Зміст

Перелік умовних позначень

G - коєфіціеент Ламе
E - молуль Юнга
μ - коєфіцієнт Пуасона
c_1, c_2 - швидкості хвилі
ω - частота
$\mu_0 = \frac{1}{1-2\mu}$
$U_x(x,y) = u(x,y)$ - переміщення по осі x
$U_y(x,y) = v(x,y)$ - переміщення по осі y

1 МЕТОДИКА ПОБУДОВИ РОЗВ'ЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ

У даному розділі наведено опис аналітичного апарату, який використовується для розв'язання мішаних задач теорії пружності для прямокутної області. Цей підхід базується на результати раніше проведених досліджень, зокрема робіт [1] і [2]. Розглянута методика розв'язання мішаних плоских задач ґрунтується на застосуванні інтегральних перетворень безпосередньо до системи рівнянь рівноваги Ламе та крайових умов. Це дозволяє зводити вихідну задачу до векторної одновимірної крайової задачі. Векторна одновимірна крайова задача точно розв'язується за допомогою матричного диференційного числення та матричної функції Гріна.

1.1 Постановка задачі

Розглядається пружна прямокутна область, яка займає область, що у декартовій системі координат описується співвідношенням $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x,y,t)|_{y=b} = -p(x,t), \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{y=b} = 0, \quad 0 \le x \le a \tag{1.1}$$

де $p(x,t)$ відома функція. На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x,y,t)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{y=0} = 0 \tag{1.2}$$

На бічних гранях $x = 0$ та $x = a$ граничні умови запишемо у формі

$$U_1[f(x,y,t)] = 0, \quad U_2[f(x,y,t)] = 0, \quad 0 \le y \le b \tag{1.3}$$

Де

$$U_1[f(x,y,t)] = \left[\alpha_1 f(x,y,t) + \beta_1 \frac{\partial f(x,y,t)}{\partial x}\right]|_{x=0}$$
$$U_2[f(x,y,t)] = \left[\alpha_2 f(x,y,t) + \beta_2 \frac{\partial f(x,y,t)}{\partial x}\right]|_{x=a}$$

граничні функціонали у загальному виді (для кожної конкретної задачі вони будуть деталізовані), $f(x,y,t) = (u(x,y,t), v(x,y,t))^T$ - вектор переміщенть.

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x \partial y}) = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2}) = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial t^2} \end{cases} \tag{1.4}$$

Будемо розглядати випадок гармонічних коливань, тому можемо представвити функції у наступному вигляді:

$$u(x,y,t) = u(x,y)e^{i\omega t}, \quad v(x,y,t) = v(x,y)e^{i\omega t}, \quad p(x,t) = p(x)e^{i\omega t} \tag{1.5}$$

Таким чином отримаємо наступні рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}) = -\frac{\omega^2}{c_1^2} u(x,y) \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}) = -\frac{\omega^2}{c_2^2} v(x,y) \end{cases} \tag{1.6}$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} \sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=b} = 0 \\ v(x,y)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=0} = 0 \\ U_1[f(x,y)] = 0, \quad U_2[f(x,y)] = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

Введемо невідомі функції $\chi_1(y) = u(0,y)$, $\chi_2(y) = v(0,y)$, $\chi_3(y) = u(a,y)$, $\chi_4(y) = v(a,y)$. Враховучи умову (1.3), отримаємо, що $\frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_1(y)$, $\frac{\partial v(0,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)$, $\frac{\partial u(a,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_3(y)$, $\frac{\partial v(a,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)$. Отже умова (1.3) виконується автоматично.

1.2 Зведеня задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаєм інтегральне перетворення Фур'є по змінній x у до рівнянь (1.6) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y)sin(\alpha_n x) \\ v(x,y)cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a}, n = \overline{1,\infty} \tag{1.8}$$

Для цього помножим перше та друге рівняння (1.6) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруєм по змінній x на інтервалі $0 \leq x \leq a$. Покрокове інтегрування рівняння (1.6) наведено у (Додаток А). Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y) - \alpha_n\mu_0 v_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2\mu_0 - \frac{\omega^2}{c_1^2})u_n(y) = \\ = \alpha_n(1+\mu_0)(\chi_3(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1(y)) \\ \\ (1+\mu_0)v_n^{''}(y) + \alpha_n\mu_0 u_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2})v_n(y) = \\ = (\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)) - \mu_0(\chi_3^{'}(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1^{'}(y)) \end{cases} \tag{1.9}$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \Big((2G+\lambda)v_n^{'}(y) + \alpha_n\lambda u_n(y)\Big)|_{y=b} = -p_n \\ \Big(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\Big)|_{y=b} = 0 \\ v_n(y)|_{y=0} = 0 \\ \Big(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\Big)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Де $p_n = \int_0^a p(x)cos(\alpha_n x)dx$

1.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у простосторі трансформант, перепишмо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (1.9) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} L_2[Z_n(y)] &= A * Z_n^{''}(y) + B * Z_n^{'}(y) + C * Z_n(y) \\ L_2[Z_n(y)] &= F_n(y) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n\mu_0 \\ \alpha_n\mu_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix}, \quad Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$

$$F_n(y) = \begin{pmatrix} \alpha_n(1+\mu_0)(\chi_3(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1(y)) \\ (\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)) - \mu_0(\chi_3^{'}(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1^{'}(y)) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (1.10) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &U_i\left[Z_n(y)\right] = E_i * Z_n^{'}(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ &U_i\left[Z_n(y)\right] = D_i \end{aligned} \tag{1.12}$$

Де $i = \overline{0,1}$, $b_0 = b$, $b_1 = 0$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G+\lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n\lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (1.11). Шукати її будем у наступному вигляді:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy}M^{-1}(s)ds \tag{1.13}$$

Де $M(s)$ - характерестична матриця рівняння (1.11), а C - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умовни

$$L_2\left[e^{sy} * I\right] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned} &L_2\left[e^{sy} * I\right] = e^{sy}\left(s^2 A * I + sB * I + C * I\right) = \\ &= e^{sy}\begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} => \end{aligned}$$

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Знайдемо тепер $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}$.

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n\mu_0 s \\ -\alpha_n\mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} &det[M(s)] = (s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) + (\alpha_n\mu_0 s)^2 = \\ &= (s-s_1)(s+s_1)(s-s_2)(s+s_2) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Де s_1, s_2 корені $det[M(s)] = 0$, детальне знаходження яких наведено в (Додаток B).

Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy}M^{-1}(s)ds = \frac{2\pi i}{2\pi i(1+\mu_0)}\sum_{i=1}^{2} Res\left[e^{sy}\frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}\right] = \\ &= \frac{1}{(1+\mu_0)}\left(Y_0(y) + Y_1(y) + Y_2(y) + Y_3(y)\right) \end{aligned}$$

Знайдем $Y_0(y)$:

$$\begin{aligned} &Y_0(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s+a_1)(s-a_2)(s+a_2)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=a_1} = \\ &= \frac{e^{a_1 y}}{2a_1(a_1^2 - a_2^2)}\begin{pmatrix} a_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n\mu_0 a_1 \\ -\alpha_n\mu_0 a_1 & a_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.18}$$

Знайдем $Y_1(y)$:

$$Y_1(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-a_1)(s-a_2)(s+a_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-a_1} =$$

$$= -\frac{e^{-a_1 y}}{2a_1(a_1^2 - a_2^2)} \begin{pmatrix} a_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 a_1 \\ \alpha_n \mu_0 a_1 & a_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

Знайдем $Y_2(y)$:

$$Y_2(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s+a_2)(s-a_1)(s+a_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=a_2} =$$

$$= \frac{e^{a_2 y}}{2a_2(a_2^2 - a_1^2)} \begin{pmatrix} a_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 a_2 \\ -\alpha_n \mu_0 a_2 & a_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

Знайдем $Y_3(y)$:

$$Y_3(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-a_2)(s-a_1)(s+a_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-a_2} =$$

$$= -\frac{e^{-a_2 y}}{2a_2(a_2^2 - a_1^2)} \begin{pmatrix} a_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 a_2 \\ \alpha_n \mu_0 a_2 & a_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

Знайдем тепер фундамельні бизисні матриці $\Psi_0(y)$, $\Psi_1(y)$, шукать їх будем у наступному вигляді:

$$\Psi_i(y) = \frac{1}{1+\mu_0} \left(Y_0(y) + Y_1(y) \right) * C_1^i + \frac{1}{1+\mu_0} \left(Y_2(y) + Y_3(y) \right) * C_2^i \tag{1.22}$$

Залишилось знайти невідомі матриці коефіцієнтів C_1^0, C_2^0, C_1^1, C_2^1 використовуючи граничні умови (1.12). Покрокове знаходження яких наведено у (Додаток B).

Таким чином матрицю Гріна можемо записати у вигляді:

$$G(y,\xi) = \begin{cases} \Psi_0(y) * \Psi_1(\xi), & 0 \le y < \xi \\ \Psi_1(y) * \Psi_0(\xi), & \xi < y \le b \end{cases} \tag{1.23}$$

Для данної матриці Гріна виконано усі властивості, зокрема виконані однорідні граничні умови (1.12) та однорідні рівняння рівноваги у просторі трансформант (1.11):

$$L_2 \left[G(y,\xi) \right] = 0$$

$$U_0 \left[G(y,\xi) \right] = 0, \quad U_1 \left[G(y,\xi) \right],$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок крайової задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y) = \int_0^b G(y,\xi) F_n(\xi) d\xi + \Psi_0(y) * D_0 + \Psi_1(y) * D_1 \tag{1.24}$$

Введемо наступні позначення $G(y,\xi) = \begin{pmatrix} g_1(y,\xi) & g_2(y,\xi) \\ g_3(y,\xi) & g_4(y,\xi) \end{pmatrix}$, $F_n(y) = \begin{pmatrix} f_n^1(y) \\ f_n^2(y) \end{pmatrix}$, $\Psi_i(y) = \begin{pmatrix} \psi_i^1(y) & \psi_i^2(y) \\ \psi_i^3(y) & \psi_i^4(y) \end{pmatrix}$, $i = 0, 1$. Враховуючи це, шукані функції перемішень у просторі трансформант можна записати у наступному вигляді

$$u_n(y) = \int_0^b \left[g_1(y,\xi) f_n^1(\xi) + g_2(y,\xi) f_n^2(\xi) \right] d\xi - \psi_0^2(y) p_n \tag{1.25}$$

$$v_n(y) = \int_0^b \left[g_3(y,\xi) f_n^1(\xi) + g_4(y,\xi) f_n^2(\xi) \right] d\xi - \psi_0^4(y) p_n \tag{1.26}$$

1.4 Фінальний розв'язок задачі

Використовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (1.25), (1.26), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{1.27}$$

$$v(x,y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{1.28}$$

Залишилось знайти невідомі функції $\chi_1(y)$, $\chi_2(y)$, $\chi_3(y)$, $\chi_4(y)$, для цього треба побудувати систему інтегральних рівнянь, використовуючи граничну умову $\sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x)$. В залежності від умов бічних гранях розв'язання задачі зводиться

2 Напружений стан прямокутної області

2.1 Постановка задачі

Розглядається пружна прямокутна область, яка займає облась, що описується у декартовій системі координат співвідношенням $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=b} = 0 \tag{2.1}$$

де $p(x)$ відома функція. На бічних гранях виконується умова ідеального контакту

$$u(x,y)|_{x=0}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=0} = 0 \tag{2.2}$$

$$u(x,y)|_{x=a}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=a} = 0 \tag{2.3}$$

На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x,y)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=0} = 0 \tag{2.4}$$

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}) = 0 \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}) = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

2.2 Зведеня задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаєм інтегральне перетворення Фур'є по змінній x у до рівнянь (2.5) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y) sin(\alpha_n x) \\ v(x,y) cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a}, n = \overline{1,\infty} \tag{2.6}$$

Для цього помножим перше та друге рівняння (2.5) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруєм по змінній x на інтервалі $0 \le x \le a$. Покрокове інтегрування рівняння (2.5) наведено у (Додаток А). Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) - \alpha_n^2(1+\mu_0) u_n(y) = 0 \\ (1+\mu_0) v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \Big((2G+\lambda) v_n^{'}(y) + \alpha_n \lambda u_n(y)\Big)|_{y=b} = -p_n \\ \Big(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\Big)|_{y=b} = 0 \\ v_n(y)|_{y=0} = 0 \\ \Big(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\Big)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Де $p_n = \int_0^a p(x) cos(\alpha_n x) dx$

2.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у простосторі трансформант, перепишмо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (2.7) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &L_2\left[Z_n(y)\right] = A * Z_n^{''}(y) + B * Z_n^{'}(y) + C * Z_n(y) \\ &L_2\left[Z_n(y)\right] = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n\mu_0 \\ \alpha_n\mu_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2(1+\mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix}$$

$$Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (2.8) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &U_i\left[Z_n(y)\right] = E_i * Z_n^{'}(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ &U_i\left[Z_n(y)\right] = D_i \end{aligned} \tag{2.10}$$

Де $i = \overline{0,1}$, $b_0 = b$, $b_1 = 0$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G+\lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n\lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (2.9). Шукати її будем у наступному вигляді:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy} M^{-1}(s)ds \tag{2.11}$$

Де $M(s)$ - характерестична матриця рівняння (2.9), а C - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умовни

$$L_2\left[e^{sy} * I\right] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} &L_2\left[e^{sy} * I\right] = e^{sy}\left(s^2 A * I + sB * I + C * I\right) = \\ &= e^{sy}\left(\begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2(1+\mu_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_n^2(1+\mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix}\right) = \\ &= e^{sy}\begin{pmatrix} s^2-\alpha_n^2(1+\mu_0) & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2 \end{pmatrix} => \end{aligned}$$

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2-\alpha_n^2(1+\mu_0) & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Знайдемо тепер $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}$.

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2 & \alpha_n\mu_0 s \\ -\alpha_n\mu_0 s & s^2-\alpha_n^2(1+\mu_0) \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} &det[M(s)] = (s^2-\alpha_n^2(1+\mu_0))(s^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2) + (\alpha_n\mu_0 s)^2 = \\ &= (1+\mu_0)(s-\alpha_n)^2(s+\alpha_n)^2 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy}M^{-1}(s)ds = \frac{2\pi i}{2\pi i(1+\mu_0)}\sum_{i=1}^{2} Res\left[e^{sy}\frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}\right] =$$
$$= \frac{1}{(1+\mu_0)}\left(Y_0(y)+Y_1(y)\right)$$

Знайдем $Y_0(y)$:

$$Y_0(y) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{sy}}{(s+\alpha_n)^2}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=\alpha_n} =$$
$$= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n}\begin{pmatrix}\alpha_n\mu_0 y+2+\mu_0 & \alpha_n\mu_0 y\\ -\alpha_n\mu_0 y & -\alpha_n\mu_0 y+2+\mu_0\end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Знайдем $Y_1(y)$:

$$Y_1(y) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{sy}}{(s-\alpha_n)^2}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=-\alpha_n} =$$
$$= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n}\begin{pmatrix}\alpha_n\mu_0 y-2-\mu_0 & -\alpha_n\mu_0 y\\ \alpha_n\mu_0 y & -\alpha_n\mu_0 y-2-\mu_0\end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y) = \frac{1}{1+\mu_0}\left(Y_0(y)*\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}+Y_1(y)*\begin{pmatrix}c_3\\c_4\end{pmatrix}\right) \tag{2.18}$$

Залишилось знайти невідомі коєфіцієнти c_1, c_2, c_3, c_4, використовуючи граничні умови (2.10). Покрокове знаходження коєфіцієнтів наведено у (Додаток В). Таким чином ми можемо записати розв'зок у просторі трансформант:

$$u_n(y) = \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n(1+\mu_0)}\left[c_1(\alpha_n\mu_0 y+2+\mu_0)+c_2(\alpha_n\mu_0 y)\right]+$$
$$+\frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n(1+\mu_0)}\left[c_3(\alpha_n\mu_0 y-2-\mu_0)+c_4(-\alpha_n\mu_0 y)\right] \tag{2.19}$$

$$v_n(y) = \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n(1+\mu_0)}\left[c_1(-\alpha_n\mu_0 y)+c_2(-\alpha_n\mu_0 y+2+\mu_0)\right]+$$
$$+\frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n(1+\mu_0)}\left[c_3(\alpha_n\mu_0 y)+c_4(-\alpha_n\mu_0 y-2-\mu_0)\right] \tag{2.20}$$

2.4 Фінальний розв'язок задачі

Викорустовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (2.19), (2.20), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y)sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{2.21}$$

$$v(x,y) = \frac{v_0(y)}{a}+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}v_n(y)cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{2.22}$$

Останній крок це знаходження $v_0(y)$ у випадку коли $n=0$, $\alpha_n=0$. Для цього повернемся до другого рівняння (2.7), та запишем його для цього випадку:

$$(1+\mu_0)v_n^{''}(y) = 0 \tag{2.23}$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases}(2G+\lambda)v_0^{'}(y)|_{y=b} = -p_0\\ v_0(y)|_{y=0} = 0\end{cases} \tag{2.24}$$

Де $p_0 = \int_0^a p(x)dx$

Розв'язок рівняння (2.23):

$$v_0(y) = c_1 + c_2 y \tag{2.25}$$

Застовоючи граничні умови (2.24) для знаходження коефіцієнтів c_1, c_2, отримаємо розв'язок задачі задачі:

$$v_0(y) = \frac{-p_0}{(2G+\lambda)} y \tag{2.26}$$

Тепер остаточний розв'зок задачі можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} u(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \\ v(x,y) = \frac{-p_0}{(2G+\lambda)a} y + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \end{cases} \tag{2.27}$$

2.5 Чисельні розрахунки

3 Напружений стан прямокутної області динаміка

3.1 Постановка задачі

Розглядається пружна така сама прямокутна область як і в попередній задачі $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x,y,t)|_{y=b} = -p(x,t), \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{y=b} = 0 \tag{3.1}$$

де $p(x,t)$ відома функція. На бічних гранях виконується умова ідеального контакту

$$u(x,y,t)|_{x=0}, \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{x=0} = 0 \tag{3.2}$$

$$u(x,y,t)|_{x=a}, \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{x=a} = 0 \tag{3.3}$$

На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x,y,t)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{y=0} = 0 \tag{3.4}$$

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x \partial y}) = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2}) = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial t^2} \end{cases} \tag{3.5}$$

Будемо розглядати випадок гармонічних коливань, тому можемо предствавити функції у наступному вигляді:

$$u(x,y,t) = u(x,y)e^{i\omega t}, \quad v(x,y,t) = v(x,y)e^{i\omega t}, \quad p(x,t) = p(x)e^{i\omega t} \tag{3.6}$$

Таким чином отримаємо наступні рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}) = -\frac{\omega^2}{c_1^2}u(x,y) \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}) = -\frac{\omega^2}{c_2^2}v(x,y) \end{cases} \tag{3.7}$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} \sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x,t), \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=b} = 0 \\ u(x,y)|_{x=0}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=0} = 0 \\ u(x,y)|_{x=a}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=a} = 0 \\ v(x,y)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

3.2 Зведеня задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаєм інтегральне перетворення Фур'є по змінній x у до рівнянь (2.5) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y)sin(\alpha_n x) \\ v(x,y)cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a}, n = \overline{1,\infty} \tag{3.9}$$

Для цього помножим перше та друге рівняння (3.7) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруєм по змінній x на інтервалі $0 \leq x \leq a$. Покрокове інтегрування рівняння (3.7) наведено у (Додаток А). Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) + (-\alpha_n^2 - -\alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) = 0 \\ (1+\mu_0) v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) + (-\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \Big((2G+\lambda) v_n^{'}(y) + \alpha_n \lambda u_n(y)\Big) |_{y=b} = -p_n \\ \Big(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\Big) |_{y=b} = 0 \\ v_n(y)|_{y=0} = 0 \\ \Big(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\Big) |_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

Де $p_n = \int_0^a p(x) cos(\alpha_n x) dx$

3.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у простосторі трансформант, перепишмо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (3.10) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} & L_2\left[Z_n(y)\right] = A * Z_n^{''}(y) + B * Z_n^{'}(y) + C * Z_n(y) \\ & L_2\left[Z_n(y)\right] = 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix}, \quad Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (3.11) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} & U_i\left[Z_n(y)\right] = E_i * Z_n^{'}(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ & U_i\left[Z_n(y)\right] = D_i \end{aligned} \tag{3.13}$$

Де $i = \overline{0,1}$, $b_0 = b$, $b_1 = 0$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G+\lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (3.12). Шукати її будем у наступному вигляді:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \tag{3.14}$$

Де $M(s)$ - характерестична матриця рівняння (3.12), а C - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умовни

$$L_2\left[e^{sy} * I\right] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} L_2\left[e^{sy} * I\right] &= e^{sy}\left(s^2 A * I + sB * I + C * I\right) = \\ &= e^{sy} \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} => \end{aligned}$$

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

Знайдемо тепер $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}$.

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n\mu_0 s \\ -\alpha_n\mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} det[M(s)] &= (s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) + (\alpha_n\mu_0 s)^2 = \\ &= (1+\mu_0)(s-a_1)(s+a_1)(s-a_2)(s+a_2) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Де a_1, a_2:

$$a_1 = \sqrt{\frac{b_1}{b_3} - \omega\sqrt{\frac{b_2}{b_3}}},$$
$$a_2 = \sqrt{\frac{b_1}{b_3} + \omega\sqrt{\frac{b_2}{b_3}}}$$

$$\begin{aligned} &b_1 = 2\alpha_n^2 c_1^2 c_2^2 \mu_0 + 2\alpha_n^2 c_1^2 c_2^2 - c_1^2\omega^2 - c_2^2\mu_0\omega^2 - c_2^2\omega^2, \\ &b_2 = 4\alpha_n^2 c_1^4 c_2^2 \mu_0^2 + 4\alpha_n^2 c_1^4 c_2^2 \mu_0 - 4\alpha_n^2 c_1^2 c_2^4 \mu_0^2 - \\ &- 4\alpha_n^2 c_1^2 c_2^4 \mu_0 + c_1^4\omega^2 - 2c_1^2 c_2^2 \mu_0\omega^2 - 2c_1^2 c_2^2\omega^2 + \\ &+ c_2^4\mu_0^2\omega^2 + c_2^4\omega^2, \\ &b_3 = 2c_1^2 c_2^2 \mu_0 + 2c_1^2 c_2^2 \end{aligned}$$

Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds = \frac{2\pi i}{2\pi i(1+\mu_0)} \sum_{i=1}^{2} Res\left[e^{sy}\frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}\right] = \\ &= \frac{1}{(1+\mu_0)}\left(Y_0(y) + Y_1(y) + Y_2(y) + Y_3(y)\right) \end{aligned}$$

Знайдем $Y_0(y)$:

$$\begin{aligned} Y_0(y) &= \left(\frac{e^{sy}}{(s+a_1)(s-a_2)(s+a_2)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=a_1} = \\ &= \frac{e^{a_1 y}}{2a_1(a_1^2 - a_2^2)} \begin{pmatrix} a_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n\mu_0 a_1 \\ -\alpha_n\mu_0 a_1 & a_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Знайдем $Y_1(y)$:

$$Y_1(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-a_1)(s-a_2)(s+a_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-a_1} =$$
$$= -\frac{e^{-a_1 y}}{2a_1(a_1^2-a_2^2)} \begin{pmatrix} a_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n\mu_0 a_1 \\ \alpha_n\mu_0 a_1 & a_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Знайдем $Y_2(y)$:

$$Y_2(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s+a_2)(s-a_1)(s+a_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=a_2} =$$
$$= \frac{e^{a_2 y}}{2a_2(a_2^2-a_1^2)} \begin{pmatrix} a_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n\mu_0 a_2 \\ -\alpha_n\mu_0 a_2 & a_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

Знайдем $Y_3(y)$:

$$Y_3(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-a_2)(s-a_1)(s+a_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-a_2} =$$
$$= -\frac{e^{-a_2 y}}{2a_2(a_2^2-a_1^2)} \begin{pmatrix} a_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n\mu_0 a_2 \\ \alpha_n\mu_0 a_2 & a_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y) = \frac{1}{1+\mu_0} \left(Y_0(y) + Y_1(y) \right) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+\mu_0} \left(Y_2(y) + Y_3(y) \right) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

Залишилось знайти невідомі коєфіцієнти c_1, c_2, c_3, c_4, використовуючи граничні умови (3.13). Покрокове знаходження коєфіцієнтів наведено у (Додаток С). Таким чином ми можемо записати розв'зок у просторі трансформант:

$$\begin{aligned} u_n(y) = &\frac{(a_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{a_1 y} - e^{-a_1 y})}{2a_1(a_1^2-a_2^2)(1+\mu_0)} c_1 + \\ &+ \frac{(a_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{a_2 y} - e^{-a_2 y})}{2a_2(a_2^2-a_1^2)(1+\mu_0)} c_3 + \\ &+ \frac{(a_1\alpha_n y)(e^{a_1 y} + e^{-a_1 y})}{2a_1(a_1^2-a_2^2)(1+\mu_0)} c_2 + \frac{(a_2\alpha_n y)(e^{a_2 y} + e^{-a_2 y})}{2a_2(a_2^2-a_1^2)(1+\mu_0)} c_4 \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} v_n(y) = &\frac{(a_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{a_1 y} - e^{-a_1 y})}{2a_1(a_1^2-a_2^2)(1+\mu_0)} c_2 + \\ &+ \frac{(a_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{a_2 y} - e^{-a_2 y})}{2a_2(a_2^2-a_1^2)(1+\mu_0)} c_4 - \\ &- \frac{(a_1\alpha_n y)(e^{a_1 y} + e^{-a_1 y})}{2a_1(a_1^2-a_2^2)(1+\mu_0)} c_1 - \frac{(a_2\alpha_n y)(e^{a_2 y} + e^{-a_2 y})}{2a_2(a_2^2-a_1^2)(1+\mu_0)} c_3 \end{aligned} \tag{3.25}$$

3.4 Фінальний розв'язок задачі

Використовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (3.24), (3.25), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x,y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{3.26}$$

$$v(x,y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{3.27}$$

Останній крок це знаходження $v_0(y)$ у випадку коли $n = 0$, $\alpha_n = 0$. Для цього повернемся до другого рівняння (3.10), та запишем його для цього випадку:

$$(1+\mu_0)v_n^{''}(y) + \frac{\omega^2}{c_2^2}v_0(y) = 0 \tag{3.28}$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} (2G+\lambda)v_0^{'}(y)|_{y=b} = -p_0 \\ v_0(y)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

Де $p_0 = \int_0^a p(x)dx$

Розв'язок рівняння (3.28):

$$v_0(y) = c_1 cos\left(y\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right) + c_2 sin\left(y\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right) \tag{3.30}$$

Застовоючи граничні умови (3.29) для знаходження коєфіцієнтів c_1, c_2, отримаємо розв'язок задачі задачі:

$$v_0(y) = \frac{-p_0}{(2G+\lambda)\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}sin\left(b\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right)}sin\left(y\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right) \tag{3.31}$$

Література

[1] Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов разрезов тонких включений и подкреплений. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 344 с.

[2] Попов Г.Я. Точные решения некоторых краевых задач механики деформируемого твёрдого тела. Одесса: Астропринт, 2013. 424 с.

Додаток А

ПОКРОКОВЕ ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ ЛАМЕ ЗА ЗМІННОЮ x

Помножим перше та друге рівняння (1.6) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруєм по змінній x на інтервалі $0 \le x \le a$. Скористаємося введенною заміною $\chi_1(y) = u(0,y)$, $\chi_2(y) = v(0,y)$, $\chi_3(y) = u(a,y)$, $\chi_4(y) = v(a,y)$ та $\frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_1(y)$, $\frac{\partial v(0,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)$, $\frac{\partial u(a,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_3(y)$, $\frac{\partial v(a,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)$.

Розглянемо перше рівнняня

$$\begin{aligned} &\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}sin(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}sin(\alpha_n x)dx + \\ &+ \mu_0\left(\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}sin(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}sin(\alpha_n x)dx\right) + \\ &+ \frac{\omega^2}{c_1^2}\int_0^a u(x,y)sin(\alpha_n x)dx = 0 \end{aligned}$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} &\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n\int_0^a \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}cos(\alpha_n x)dx = \\ &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n\left(u(x,y)cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n\int_0^a u(x,y)sin(\alpha_n x)dx\right) = \\ &= -\alpha_n(\chi_3(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1(y)) - \alpha_n^2 u_n(y) \end{aligned}$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^a u(x,y)sin(\alpha_n x)dx = u_n^{''}(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)dx =$$
$$= -\alpha_n \frac{\partial}{\partial y}\int_0^a v(x,y)cos(\alpha_n x)dx = -\alpha_n v_n^{'}(y)$$

Тоді перше рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2\mu_0 - \frac{\omega^2}{c_1^2})u_n(y) =$$
$$= \alpha_n(1+\mu_0)(\chi_3(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1(y))$$

Розлянемо друге рівняння

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} cos(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx +$$
$$+ \mu_0 \left(\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} cos(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx\right) +$$
$$+ \frac{\omega^2}{c_2^2}\int_0^a v(x,y)cos(\alpha_n x)dx = 0$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} sin(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \left(v(x,y)sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a v(x,y)cos(\alpha_n x)dx\right) =$$
$$= -(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)) - \alpha_n^2 v_n(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^a v(x,y)cos(\alpha_n x)dx = v_n^{''}(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} sin(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \frac{\partial}{\partial y}\int_0^a u(x,y)sin(\alpha_n x)dx = \alpha_n u_n^{'}(y) +$$
$$+ (\chi_3^{'}(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1^{'}(y))$$

Тоді друге рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$(1+\mu_0)v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2})v_n(y) =$$
$$= (\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)) - \mu_0(\chi_3^{'}(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1^{'}(y))$$

Додаток B

Знайдемо корені $det[M(s)] = 0$

$$det[M(s)] = (s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) + (\alpha_n\mu_0 s)^2 =$$
$$= s^4 + s^4\mu_0 - s^2\alpha_n^2 + s^2\frac{\omega^2}{c_2^2} - s^2\alpha_n^2 - s^2\alpha_n^2\mu_0 + \alpha_n^4 - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_2^2} - s^2\alpha_n^2\mu_0 -$$
$$- s^2\alpha_n^2\mu_0 + \alpha_n^4\mu_0 - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_2^2} + s^2\frac{\omega^2}{c_1^2} + s^2\mu_0\frac{\omega^2}{c_1^2} - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^4}{c_1^2c_2^2} + s^2\alpha_n^2\mu_0^2 =$$
$$= (1+\mu_0)s^4 + (-2\alpha_n^2 - 2\alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_2^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2} + \mu_0\frac{\omega^2}{c_1^2})s^2 + (\alpha_n^4 - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_2^2} +$$
$$+ \alpha_n^4\mu_0 - \alpha_n^2\mu_0\frac{\omega^2}{c_2^2} - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^4}{c_1^2c_2^2})$$

Введемо наступні позначення:

$$a_1 = -2\alpha_n^2 - 2\alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_2^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2} + \mu_0\frac{\omega^2}{c_1^2}$$
$$a_2 = \alpha_n^4 - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_2^2} + \alpha_n^4\mu_0 - \alpha_n^2\mu_0\frac{\omega^2}{c_2^2} - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^4}{c_1^2c_2^2}$$

Враховучи введені позначення отримаємо наступне рівняння:

$$(1+\mu_0)s^4 + a_1s^2 + a_2 = 0$$

Таким чином отримаємо наступні корені рівняння:

$$s_1 = \sqrt{\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4(1+\mu_0)a_2}}{2(1+\mu_0)}}$$
$$s_2 = -\sqrt{\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4(1+\mu_0)a_2}}{2(1+\mu_0)}}$$
$$s_3 = \sqrt{\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4(1+\mu_0)a_2}}{2(1+\mu_0)}}$$
$$s_4 = -\sqrt{\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4(1+\mu_0)a_2}}{2(1+\mu_0)}}$$

У випадку статичної задачі ($\omega = 0$) отримаємо наступні рівняння:

$$(1+\mu_0)(s^4 - 2\alpha_n^2s^2 + \alpha_n^4) = 0$$

Таким чином отримаємо наступні корені

$$s_{1,2} = \alpha_n$$
$$s_{3,4} = -\alpha_n$$

Додаток C

Для знаходження коефіцієтів c_1, c_2, c_3, c_4 спочатку знайдем $Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ та $Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$.

$$Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n}\begin{pmatrix} \alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0 & \alpha_n\mu_0 y \\ -\alpha_n\mu_0 y & -\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n}\begin{pmatrix} c_1(\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2(\alpha_n\mu_0 y) \\ c_1(-\alpha_n\mu_0 y) + c_2(-\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0) \end{pmatrix}$$

$$Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n\mu_0 y \\ \alpha_n\mu_0 y & -\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} c_3(\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4(-\alpha_n\mu_0 y) \\ c_3(\alpha_n\mu_0 y) + c_4(-\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Введемо позначення $c = \frac{1}{4\alpha_n(1+\mu_0)}$.
Запишем тепер $Z_n(y)$:

$$Z_n(y) = c \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_n y}(\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2 e^{\alpha_n y}(\alpha_n\mu_0 y) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n\mu_0 y) \\ \\ c_1 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n\mu_0 y) + c_2 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n\mu_0 y) + c_4 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Тепер $Z_n^{'}(y)$:

$$Z_n^{'}(y) = c \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_n y}(\alpha_n^2\mu_0 y + 2\alpha_n + 2\alpha_n\mu_0) + c_2 e^{\alpha_n y}(\alpha_n^2\mu_0 y + \alpha_n\mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n^2\mu_0 y + 2\alpha_n + 2\alpha_n\mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n^2\mu_0 y - \alpha_n\mu_0) \\ \\ c_1 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n\mu_0 y) + c_2 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n\mu_0 y) + c_4 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Тепер використаєм граничні умови (2.10) та побудуєм алгебричну систему відносно коєфіцієнтів.

Використаєм $U_0\left[Z_n(y)\right]$:

$$E_0 * Z_n^{'}(b) + F_0 * Z_n(b) = D_0 \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G+\lambda \end{pmatrix} * Z_n^{'}(b) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n\lambda & 0 \end{pmatrix} * Z_n(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}$$

Отримаємо перші 2 рівняння системи:

$$\begin{cases} c_1 e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n\mu_0 + \alpha_n) + c_2 e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b - \alpha_n) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n b}(-\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n + \alpha_n\mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n) = 0 \\ \\ c_1 e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b - 2G\alpha_n\mu_0 + 2\lambda\alpha_n) + c_2 e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b + \\ + (2G+\lambda)2\alpha_n) + c_3 e^{-\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b + 2G\alpha_n\mu_0 - 2\lambda\alpha_n) + \\ + c_4 e^{-\alpha_n b}(2G\alpha_n^2\mu_0 b + (2G+\lambda)2\alpha_n) = -cp_n \end{cases}$$

Використаєм $U_1\left[Z_n(y)\right]$:

$$E_1 * Z_n^{'}(0) + F_1 * Z_n(0) = D_1 \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * Z_n^{'}(0) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * Z_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отримаємо другі 2 рівняння системи:

$$\begin{cases} c_1(\alpha_n + \alpha_n\mu_0) + c_2(-\alpha_n) + c_3(\alpha_n + \alpha_n\mu_0) + c_4(\alpha_n) = 0 \\ \\ c_2(2+\mu_0) + c_4(-2-\mu_0) = 0 \end{cases}$$

Звідси видно, що $c_3 = -c_1$, $c_4 = c_2$. Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} a_1 &= e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n\mu_0 + \alpha_n) - e^{-\alpha_n b}(-\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n + \alpha_n\mu_0), \\ a_2 &= e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b - \alpha_n) + e^{-\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n), \\ a_3 &= e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b - 2G\alpha_n\mu_0 + 2\lambda\alpha_n) - \\ &\quad - e^{-\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b + 2G\alpha_n\mu_0 - 2\lambda\alpha_n) \\ a_4 &= e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b + (2G+\lambda)2\alpha_n) + \\ &\quad + e^{-\alpha_n b}(2G\alpha_n^2\mu_0 b + (2G+\lambda)2\alpha_n) \end{aligned}$$

Враховуючи останнє отримаємо:

$$\begin{cases} c_3 = -c_1 \\ c_4 = c_2 \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0 \\ c_1 a_3 + c_2 a_4 = -c p_n \end{cases} \Leftrightarrow, \quad \begin{cases} c_3 = -c_1 \\ c_4 = c_2 \\ c_1 = -c_2 \frac{a_2}{a_1} \\ c_2(a_4 a_1 - a_2 a_3) = -c p_n a_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = c p_n \frac{a_2}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \\ c_2 = -c p_n \frac{a_1}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \\ c_3 = -c p_n \frac{a_2}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \\ c_4 = -c p_n \frac{a_1}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \end{cases}$$

Додаток D