АНОТАЦІЯ

Пожиленков О. В. Плоскі мішані задачі теорії пружності для прямокутної області. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового доктора філософії за спеціальністю 113 «Прикладна математика» (11 – «Математика та статистика»). – Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, 2023.

Розв'язано плоскі мішані задачі теорії пружності для пружної прямокутної області яка піддається впливу статичних та динамічних навантажень. Шляхом застосування інтегрального скінченного sin- та cos-перетворення Фур'є вихідну задачу зведено до одновимірної крайової задачі, яку у просторі трансформант переформульовано у вигляді векторної крайової задачі. Розв'язок цієї задачі побудовано як суперпозицію загального розв'язку однорідного векторного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Розв'язок однорідного векторного рівняння отримано за допомогою матричного диференціального числення і зображено за допомогою фундаментальної матричної системи розв'язків відповідного однорідного матричного рівняння. Частковий розв'язок неоднорідного векторного рівняння знайдено за допомогою зображення матриці-функція Гріна. Застосування оберненного перетворення Фур'є та реалізація відокремлення слабко-збіжних частин інтегралу подає поле переміщень та напружень через невідому функцію - граничне значення переміщень по торцю прямокутною області. Для її знаходження за умови виконання крайової умови отримано сингулярне інтегральне рівняння яке розв'язано за допомогою метода ортогональних поліномів. Було проведено дослідження напруженого стану середовища за різних типів навантаження та різних геометричних розмірів прямокутної області.

Ключові слова: прямокутна область, динамічна задача, перетворення Фур'є, матриця-функція Гріна, сингулярне інтегральне рівняння, метод ортогональних поліномів.

ABSTRACT

Pozhylenkov O. V. Plane mixed problems of elasticity for a rectangular domain - Manuscript.

A dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the field of 113 «Applied Mathematics» (11 - «Mathematics and Statistics») - Odessa I.I. Mechnikov National University, Odessa, 2023.

The plane mixed boundary value problems of theory elasticity were solved for an elastic rectangular domain subjected to static and dynamic loads. By applying the integral finite sin-cos Fourier transformation, the original problem was reduced to a one-dimensional boundary value problem, which was reformulated in the form of a vector boundary value problem. The solution to this problem was constructed as a superposition of the general solution of the homogeneous vector equation and the particular solution of the nonhomogeneous equation. The solution of the homogeneous vector equation was obtained using matrix differential calculus and represented using the fundamental matrix solution system of the corresponding homogeneous matrix equation. The particular solution of the nonhomogeneous vector equation was found using the Green's matrix function representation. The application of inverse Fourier transformation and the realization of the separation of weakly convergent parts of the integral provide the field of displacements and stresses through an unknown function - the boundary value of displacements along the end of the rectangular region. To find this function under the boundary condition, a singular integral equation was derived and solved using the method of orthogonal polynomials. The stress state of the medium was investigated for various types of loading and different geometric dimensions of the rectangular region.

Key words: rectangular domain, dynamic problem, Fourier transformation, matrix Green's function, singular integral equation, method of orthogonal polynomials.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. D. Nerukh, O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2019) Mixed plain boundary value problem of elasticity for a rectangular domain. 25-th International Conference Engineering Mechanics. 2019, May 13-16, Svratka, Czech Republic. p. 255

2. O. V. Pozhylenkov (2019) The stress state of a rectangular elastic domain. Researches in Mathematics and Mechanics, Volume 24, Issue 2(34), pp. 88-96

3. Пожиленков О. В. Вайсфельд Н. Д. (2019) Мішана крайова задача теорії пружності для прямокутної області. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур, випуск 5, Львів, ст. 30-32

4. O. Pozhyenkov, N. Vaysfeld (2020) Stress state of a rectangular

domain with the mixed boundary conditions. Procedia Structural Integrity, Volume 28, pp. 458-463

5. O. Pozhyenkov, N. Vaysfeld (2021) Stress state of an elastic rectangular domain under steady load. Procedia Structural Integrity, Volume 33, pp. 385-390

6. O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2022) Dynamic mixed problem of elasticity for a rectangular domain. Recent trends in Wave Mechanics and Vibrations, pp. 211-218

Зміст

Перелік умовних позначень

G - коефіцієнт Ламе
E - модуль Юнга
μ - коефіцієнт Пуасона
c_1, c_2 - швидкості хвилі
ω - частота
$\mu_0 = \frac{1}{1-2\mu}$
$U_x(x,y) = u(x,y)$ - переміщення по осі x
$U_y(x,y) = v(x,y)$ - переміщення по осі y

Вступ

Актуальність роботи. Прямокутна пружна область є однім з найбільш простих об'єктів для аналізу і моделювання у механіці пружного тіла. Для багатьох застосувань прямокутна форма може бути використана як апроксімація більш складних об'єктів, наприклад: в інженерних розрахунках прямокутні пластини використовують для моделювання деталів конструкцій з більш складними формами, такими як пластини з отворами та вирізами. Прямокутна форма може бути застосована для різних типів задач, а саме: для моделювання пружного деформування у твердих тілах, дослідження розподілу напружень та деформацій у матеріалах, а також для розв'язання задач пов'язаних з пружністю у біологічних та геологічних системах. Саме тому, завдяки широкому спектру застосувань, розробка аналітичних методів розв'язання задач для прямокутної пружної області залишається актуальною задачею.

Аналіз літератури виявив достатню кількість мішаних задач пружності для прямокутника, які розв'язані за допомогою аналітичних та числових методів. Незважаючи на це, питання поведінки механічних характеристик у кутових точках, питання встановлення якісної поведінки хвильових полів усередині прямокутної області за умов динамічного навантаження залишається відкритим. Цим обумовлено актуальність запропонованного дослідження, що полягає у розробці нового аналітичного підходу до розв'язання мішаних задач для прямокутної області.

Мета і задачі дослідження. Метою цього дослідження є розробка нового підходу до розв'язання плоских мішаних задач теорії пружності для прямокутної області, що надає можливість встановити важливі особливості розподілу напружень та переміщень.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

1. розвиток методики, яка використовує застосування методу інтегральних перетворень разом з методоми розв'язання векторних крайових задач теорії пружності та використання матриці-фукції Гріна.

2. побудова аналітичного розв'язку задачі для прямокутної області, що піддається впливу зовнішнього статичного навантаження за умови виконання різних граничних умов на її бокових торцях.

3. розв'язання динамічної задачі пружності для прямокутної області з метою встановлення закономірностей розподілу хвильо-

вих полів та динамічних напружень.

Об'єктом дослідження є пружна прямокутна область під впливом зовнішнього навантаження різної природи (статичного та динамічного).

Предметом дослідження є закономірності зміни напружено-деформованого стану та хвильового поля прямокутної області в залежності від видів навантаження та крайових умов.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі розв'язання динамічних та статичних задач теорії пружності для прямокутної області було проведено методом інтегральних перетворень, який застосовано безпосередньо до рівнянь рівноваги. Для розв'язання векторної крайової задачі у просторі трансформант побудовано матричну функцію Гріна. Отримані в роботі сінгулярні інтегральні рівняння розв'язані за допомогою методу ортогональних многочленів, з метою урахування реальної особливості невідомою функції на кінцях інтервалів інтегрування.

Обґрунтованість та достовірність отриманих результатів забезпечується: використання точних математичних формулювань задач у лінійній механіці суцільного тіла та механіці руйнування; використання перевірених і строгих аналітичних методів для отримання розв'язків сформульованих задач; фізичною інтерпретацією результатів розрахунків задач. Отримані результати збігаються з відомими результатами теоретичних досліджень.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

- вперше застосовано нову методику розв'язання динамічних та статичних задач теорії пружності для прямокутної області, що ґрунтується на безпосередньому перетворенні рівнянь Ламе. Цей підхід дозволив отримати аналітичні подання для полів переміщень та напружень;

- побудовано матричну функцію Гріна, що дозволило звести вихідні задачі для прямокутної області до розв'язання сінгулярних інтегральних рівнянь. Встановлено нові особливості залежності полів переміщень та напружень від параметрів навантаження та крайових умов на торцях прямокутної області;

- отримано аналітичні розв'язки динамічної задачі пружності для прямокутної області та досліджено залежність хвильових полів від типу навантаження та геометричних розмірів області

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У роботах у співавторстві [7, 8, 9, 12, 14, 16], науковому керівнику належить постановка задач, вибір методики їх розв'язання. Дисертантом проведено огляд літератури, виконано усі математичні перетворення при побудові розв'язків, здійснено програмну реалізацію та проведено аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації.

Результати досліджень, які були включені до дисертаційної роботи, були представлені та обговорені на міжнародних наукових конференціях різного рівня: конференція «Актуальные вопросы и перспективы развития транспортного и строительного комплексов» (Гомель, 2018), X Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Львів, 2019), 25-th international conference «Engineering Mechanics 2019» (Svratka, 2019), «1st Virtual European Conference on Fracture» (Italy, 2020), «26th International Conference on Fracture and Structural Integrity» (Turin, 2021), «10th International Conference on Wave Mechanics and Vibrations» (Lisbon, 2022).

У повному обсязі робота доповідалась на

- науковому семінарі «Мішані задачі математичної фізики» кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І.І. Мечникова під керівництвом к.ф.-м.н., доц. Ю.С. Процерова.

Публікації. Основні наукові положення дисертаційного дослідження відображено у 6 публікаціях з яких: дві статті [8, 9] опубліковано у провідних фахових виданнях України, що входять у перелік ДАК України, статті [7, 12, 14, 16] прореферовано у міжнародній наукометричній базі Scopus.

Структура і обсяг дисертації. Робота складається зі вступу, 4 розділів, висновків, списку використаної літератури, що включає ?? найменування. Загальний обсяг дисертації становить ?? сторінок, із них ?? сторінок основного тексту. Робота містить ?? рисунків та ?? таблицю.

У *вступі* аргументовано актуальність теми десертації; поставлено мету та завдання дослідження; наведено методи розв'язання поставлених задач; розкрито новизну і достовірність отриманих результатів, їх практичне та теоритичне значення; представлено відомості про апробацію роботи, публікації та особоистий внесок здобувача.

У *першому розділі* проведено огляд наукових робіт, що мають мають відношення до розв'язання плоских мішаних задач теорії пружності для прямокутної області. Проаналізовано праці та внесок автора у вивчення наукової проблеми, на яку спрямована дана робота. Показано, що таматика данної дисертаційної роботи є актуальною.

У *другому розділі* сформульовано загальну постановку плоских мішаних динамічних задач теорії пружності для прямокутної області, продемонстровано загальну методику побудови розв'язку. Наведено побудова точного розв'язку крайової задачі у просторі завдяки використанню інтегрального скінченного sin- та cos-перетворення Фур'є. Загальний розв'язок векторного однорідного рівняння побудовано за допомогою фундаментальної матричної системи розв'язків для відповідного однорідного матричного рівняння, що отримана методами контурного інтегрування. Для отримання часткового розв'язку векторного неоднорідного рівняння побудовано матрицю-функцію Гріна, яку зображено як комбінацію фундаментальних базісних матриц. Приведено схему розв'язання отриманного сінгулярного інтегрального рівняння методом ортогональних поліномів.

У *третьому розділі* розглянуто динамічну та статичну задачу теорії пружності за умов ідеального контакту на бічних гранях. Розв'язок поставленної задачі побудовано за вищеописаною методикою. Задачу зведено до одновимірної крайової задачі у просторі трансформант з однорідними рівнянями рівноваги за допомогою використанню інтегрального скінченного sin- та cos-перетворення Фур'є. Одновімірну задачу переформульовано у матрично-векторному виді, розв'зок якої знайдено за допомогою фундаментальної матричної системи розв'язків. Застосування оберненного перетворення Фур'є завершує побудову вихідної крайової задачі. Наведено аналіз напруженого стану прямокутної області за різних типів навантаження та різних геометричних розмірів області.

У *четвертому розділі* розглянуто динамічну та статичну задачу теорії пружності за умов другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях. Розв'язок поставленної задачі побудовано за вищеописаною методикою. Задачу зведено до одновимірної крайової задачі у просторі трансформант за допомогою використанню інтегрального скінченного sin- та cos-перетворення Фур'є. Одновімірну задачу переформульовано у матрично-векторному виді, розв'зок якої знайдено як суперпозицію загального розв'язку однорідного векторного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Загальний та частинний розв'язки знайденні за методикою яка описана вище. Розв'язано отримане сінгулярне інтегральне рівняння за допомогою метода ортогональних поліномів. Наведено аналіз напруженого стану прямокутної області за різних типів навантаження та різних геометричних розмірів області.

У *висновках* сформульовано отримані результати та наведено основні якісні залежності хвильового поля навантажень та напружень від геометричних параметрів прямокутної області, хахрактеру та частоти навантаження.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках держбюджетних тем Одеського національного університету імені І. І. Мечникова «Статичні та динамічні задачі для тіл канонічної форми з дефектами» (2021-2024 рр., реєстраційний номер 0121U111664).

Теоретичне і практичне значення одержаних результатів. Запропонована методика для розв'язання мішаних динамічних задач теорії пружності для прямокутної області має теоретичне значення для подальшого розвитку математичних методів вирішення плоских задач теорії пружності. Отримані результати стали складовою частиною курса "Теорія пружності"та були використанні студентами, які навчаються за спеціальністю "Прикладна математика під час виконання магістерських робіт. Отримані результати також можуть знайти застосування в геомеханіці, будівництві конструкцій, вивченні міцності елементів транспортних засобів та визначенні їх безпечності та в інших сферах.

1 Огляд літератури

Дослідження напружено-деформованого стану пружних тіл почало активно розвиватися у XIX столітті і залишається актуальним до нашого часу. Це пояснюється широким спектром застосування в різноманітних інженерних галузях. Класична лінійна теорія пружності є основою для більшості міцностних розрахунків в техніці. Під час експлуатації будівель та інших конструкцій вони піддаються механічним, температурним та іншим впливам. Тому при проектуванні необхідно враховувати міцність таких конструкцій. Характеристики міцності виробів можна отримати шляхом аналізу напружено-деформованого стану їх пружних моделей. Одним з таких моделей є скінченна прямокутна область. Тому актуальною проблемою є розробка аналітично-числових методів для дослідження її напружено-деформованого стану.

2 МЕТОДИКА ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ

У даному розділі наведено опис аналітичного апарату, який використовується для розв'язання мішаних задач теорії пружності для прямокутної області. Цей підхід базується на результати раніше проведених досліджень, зокрема робіт [1] і [2]. Розглянута методика розв'язання мішаних плоских задач ґрунтується на застосуванні інтегральних перетворень безпосередньо до системи рівнянь рівноваги Ламе та крайових умов. Це дозволяє зводити вихідну задачу до векторної одновимірної крайової задачі. Векторна одновимірна крайова задача точно розв'язується за допомогою матричного диференційного числення та матричної функції Гріна. Що призводить у результаті до сингулярного інтегрального рівнняння яке розв'язане за допомогою методу ортогональних многочленів описанного [3].

2.1 Постановка задачі

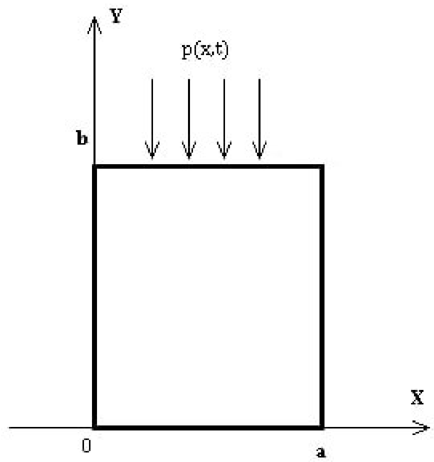

Рис. 2.1: Геометрія проблеми

Розглядається пружна прямокутна область (Рис: 2.1), яка займає область, що у декартовій системі координат описується співвідношенням $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y, t)|_{y=b} = -p(x, t), \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{y=b} = 0, \quad 0 \leq x \leq a \qquad (2.1)$$

де $p(x,t)$ відома функція. На нижній грані виконуються наступні умови
$$v(x,y,t)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{y=0} = 0 \tag{2.2}$$
На бічних гранях $x=0$ та $x=a$ граничні умови запишемо у формі
$$U_1[f(x,y,t)] = 0, \quad U_2[f(x,y,t)] = 0, \quad 0 \le y \le b \tag{2.3}$$
Де
$$U_1[f(x,y,t)] = \left[\alpha_1 f(x,y,t) + \beta_1 \frac{\partial f(x,y,t)}{\partial x}\right]|_{x=0}$$
$$U_2[f(x,y,t)] = \left[\alpha_2 f(x,y,t) + \beta_2 \frac{\partial f(x,y,t)}{\partial x}\right]|_{x=a}$$

граничні функціонали у загальному виді (для кожної конкретної задачі вони будуть деталізовані), $f(x,y,t) = (u(x,y,t), v(x,y,t))^T$ - вектор переміщеннь.

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x \partial y}) = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2}) = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial t^2} \end{cases} \tag{2.4}$$

Будемо розглядати випадок гармонічних коливань, тому можемо представити функції у наступному вигляді:
$$u(x,y,t) = u(x,y)e^{i\omega t}, \quad v(x,y,t) = v(x,y)e^{i\omega t}, \quad p(x,t) = p(x)e^{i\omega t} \tag{2.5}$$
Таким чином отримаємо наступні рівняння рівноваги:
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}) = -\frac{\omega^2}{c_1^2}u(x,y) \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}) = -\frac{\omega^2}{c_2^2}v(x,y) \end{cases} \tag{2.6}$$

Та граничні умови:
$$\begin{cases} \sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=b} = 0 \\ v(x,y)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=0} = 0 \\ U_1[f(x,y)] = 0, \quad U_2[f(x,y)] = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Введемо невідомі функції $\chi_1(y) = u(0,y)$, $\chi_2(y) = v(0,y)$, $\chi_3(y) = u(a,y)$, $\chi_4(y) = v(a,y)$. Враховучи умову (2.3), отримаємо, що $\frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_1(y)$, $\frac{\partial v(0,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)$, $\frac{\partial u(a,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_3(y)$, $\frac{\partial v(a,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)$. Отже умова (2.3) виконується автоматично.

2.2 Зведення задачі до одновимірної у просторі трансформант та її розв'язання

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаємо інтегральне перетворення Фур'є по змінній x до рівнянь (2.6) в наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y)sin(\alpha_n x) \\ v(x,y)cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{2.8}$$

Для цього помножимо перше та друге рівняння (2.6) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруємо по змінній x на інтервалі $0 \leq x \leq a$.

Розглянемо перше рівняння:

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} sin(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} sin(\alpha_n x)dx +$$
$$+ \mu_0 \left(\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} sin(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} sin(\alpha_n x)dx \right) +$$
$$+ \frac{\omega^2}{c_1^2} \int_0^a u(x,y)sin(\alpha_n x)dx = 0$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \left(u(x,y)cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a u(x,y)sin(\alpha_n x)dx \right) =$$
$$= -\alpha_n(\chi_3(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1(y)) - \alpha_n^2 u_n(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^a u(x,y)sin(\alpha_n x)dx = u_n^{''}(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)dx =$$
$$= -\alpha_n \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a v(x,y)cos(\alpha_n x)dx = -\alpha_n v_n^{'}(y)$$

Тоді перше рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2 \mu_0 - \frac{\omega^2}{c_1^2})u_n(y) =$$
$$= \alpha_n(1+\mu_0)(\chi_3(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1(y))$$

Розлянемо друге рівняння

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} cos(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx +$$
$$+ \mu_0 \left(\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} cos(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx \right) +$$
$$+ \frac{\omega^2}{c_2^2} \int_0^a v(x,y) cos(\alpha_n x)dx = 0$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} sin(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \left(v(x,y) sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a v(x,y) cos(\alpha_n x)dx \right) =$$
$$= -(\frac{\alpha_2}{\beta_2} \chi_4(y) cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \chi_2(y)) - \alpha_n^2 v_n(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^a v(x,y) cos(\alpha_n x)dx = v_n^{''}(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} sin(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a u(x,y) sin(\alpha_n x)dx = \alpha_n u_n^{'}(y) +$$
$$+ (\chi_3^{'}(y) cos(\alpha_n a) - \chi_1^{'}(y))$$

Тоді друге рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$(1+\mu_0) v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) =$$
$$= (\frac{\alpha_2}{\beta_2} \chi_4(y) cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \chi_2(y)) - \mu_0 (\chi_3^{'}(y) cos(\alpha_n a) - \chi_1^{'}(y))$$

Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2 \mu_0 - \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) = \\ = \alpha_n (1+\mu_0)(\chi_3(y) cos(\alpha_n a) - \chi_1(y)) \\ \\ (1+\mu_0) v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = \\ = (\frac{\alpha_2}{\beta_2} \chi_4(y) cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \chi_2(y)) - \mu_0 (\chi_3^{'}(y) cos(\alpha_n a) - \chi_1^{'}(y)) \end{cases} \tag{2.9}$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} \left((2G+\lambda)v_n'(y)+\alpha_n\lambda u_n(y)\right)|_{y=b}=-p_n \\ \left(u_n'(y)-\alpha_n v_n(y)\right)|_{y=b}=0 \\ v_n(y)|_{y=0}=0 \\ \left(u_n'(y)-\alpha_n v_n(y)\right)|_{y=0}=0 \end{cases} \tag{2.10}$$

де $p_n=\int_0^a p(x)cos(\alpha_n x)dx$

Для того щоб розв'язати задачу у простосторі трансформант, перепишмо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (2.9) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &L_2\left[Z_n(y)\right]=A*Z_n''(y)+B*Z_n'(y)+C*Z_n(y) \\ &L_2\left[Z_n(y)\right]=F_n(y) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Де

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1+\mu_0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & -\alpha_n\mu_0\\ \alpha_n\mu_0 & 0\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}-\alpha_n^2-\alpha_n^2\mu_0+\frac{\omega^2}{c_1^2} & 0\\ 0 & -\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_2^2}\end{pmatrix},\quad Z_n(y)=\begin{pmatrix}u_n(y)\\ v_n(y)\end{pmatrix}$$

$$F_n(y)=\begin{pmatrix}\alpha_n(1+\mu_0)(\chi_3(y)cos(\alpha_n a)-\chi_1(y))\\ (\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)cos(\alpha_n a)-\frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y))-\mu_0(\chi_3'(y)cos(\alpha_n a)-\chi_1'(y))\end{pmatrix}$$

Граничні умови (2.10) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &U_i\left[Z_n(y)\right]=E_i*Z_n'(b_i)+F_i*Z_n(b_i) \\ &U_i\left[Z_n(y)\right]=D_i \end{aligned} \tag{2.12}$$

де $i=\overline{0,1}$, $b_0=b$, $b_1=0$,

$$E_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2G+\lambda\end{pmatrix},\quad F_0=\begin{pmatrix}0 & -\alpha_n\\ \alpha_n\lambda & 0\end{pmatrix},$$

$$E_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad F_1=\begin{pmatrix}0 & -\alpha_n\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$D_0=\begin{pmatrix}0\\ -p_n\end{pmatrix},\quad D_1=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (2.11). Шукати її будем у наступному вигляді [4]:

$$Y(y)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy}M^{-1}(s)ds \tag{2.13}$$

де $M(s)$ - характерестична матриця рівняння (2.11), а C - замкнений контур який містить усі особливі точки $M^{-1}(s)$. $M(s)$ будемо шукати з наступної умовни

$$L_2\left[e^{sy} * I\right] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} &L_2\left[e^{sy} * I\right] = e^{sy}\left(s^2 A * I + sB * I + C * I\right) = \\ &= e^{sy}\begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Знайдемо тепер $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}$.

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n\mu_0 s \\ -\alpha_n\mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} &det[M(s)] = \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{vmatrix} = \\ &= (s - s_1)(s + s_1)(s - s_2)(s + s_2) \end{aligned} \tag{2.17}$$

де s_1, s_2, $-s_1$, $-s_2$ корені $det[M(s)] = 0$, детальне знаходження яких наведено в (Додаток B).

Враховучи це, знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy}M^{-1}(s)ds = \frac{2\pi i}{2\pi i(1+\mu_0)}\sum_{i=1}^{4} Res\left[e^{sy}\frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}\right] = \\ &= (Y_0(y) + Y_1(y) + Y_2(y) + Y_3(y)) \end{aligned}$$

Знайдемо $Y_0(y)$:

$$\begin{aligned} &Y_0(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s+s_1)(s-s_2)(s+s_2)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=s_1} = \\ &= \frac{e^{s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}\begin{pmatrix} s_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n\mu_0 s_1 \\ -\alpha_n\mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Знайдемо $Y_1(y)$:

$$Y_1(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-s_1)(s-s_2)(s+s_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-s_1} =$$
$$= -\frac{e^{-s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \begin{pmatrix} s_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 s_1 \\ \alpha_n \mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Знайдемо $Y_2(y)$:

$$Y_2(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s+s_2)(s-s_1)(s+s_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=s_2} =$$
$$= \frac{e^{s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \begin{pmatrix} s_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s_2 \\ -\alpha_n \mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Знайдемо $Y_3(y)$:

$$Y_3(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-s_2)(s-s_1)(s+s_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-s_2} =$$
$$= -\frac{e^{-s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \begin{pmatrix} s_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 s_2 \\ \alpha_n \mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

2.3 Побудова матриці-функції Гріна

Для побудови матриці-функції Гріна спочатку знайдемо тепер фундамельні бизисні матриці $\Psi_0(y)$, $\Psi_1(y)$, шукати їх будем у наступному вигляді:

$$\Psi_i(y) = (Y_0(y) + Y_1(y)) * C_1^i + (Y_2(y) + Y_3(y)) * C_2^i \tag{2.22}$$

Залишилось знайти невідомі матриці коєфіцієнтів C_1^0, C_2^0, C_1^1, C_2^1 використовуючи граничні умови (2.12). Покрокове знаходження яких наведено у (Додаток C). Для подальшого введемо наступні позначення для елементів матриць $\Psi_0(y)$, $\Psi_1(y)$:

$$\Psi_0(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^0(y) & \Psi_2^0(y) \\ \Psi_3^0(y) & \Psi_4^0(y) \end{pmatrix}, \quad \Psi_1(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^1(y) & \Psi_2^1(y) \\ \Psi_3^1(y) & \Psi_4^1(y) \end{pmatrix}$$

Таким чином матрицю Гріна можемо записати у вигляді:

$$G(y,\xi) = \begin{cases} \Psi_0(y) * \Psi_1(\xi), & 0 \le y < \xi \\ \Psi_1(y) * \Psi_0(\xi), & \xi < y \le b \end{cases} \tag{2.23}$$

Для данної матриці Гріна виконано усі властивості, зокрема виконані однорідні граничні умови (2.12) та однорідні рівняння рівноваги у просторі трансформант (2.11):

$$L_2\left[G(y,\xi)\right]=0$$

$$U_0\left[G(y,\xi)\right]=0,\quad U_1\left[G(y,\xi)\right]=0,$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок крайової задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y)=\int_0^b G(y,\xi)F_n(\xi)d\xi+\Psi_0(y)*D_0+\Psi_1(y)*D_1 \tag{2.24}$$

Введемо наступні позначення $G(y,\xi)=\begin{pmatrix} g_1(y,\xi) & g_2(y,\xi)\\ g_3(y,\xi) & g_4(y,\xi)\end{pmatrix}$, $F_n(y)=\begin{pmatrix} f_n^1(y)\\ f_n^2(y)\end{pmatrix}$. Враховуючи це, шукані функції переміщень у просторі трансформант можна записати у наступному вигляді

$$u_n(y)=\int_0^b\left[g_1(y,\xi)f_n^1(\xi)+g_2(y,\xi)f_n^2(\xi)\right]d\xi-\psi_0^2(y)p_n \tag{2.25}$$

$$v_n(y)=\int_0^b\left[g_3(y,\xi)f_n^1(\xi)+g_4(y,\xi)f_n^2(\xi)\right]d\xi-\psi_0^4(y)p_n \tag{2.26}$$

Використовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (2.25), (2.26), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x,y)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y)sin(\alpha_n x),\quad \alpha_n=\frac{\pi n}{a} \tag{2.27}$$

$$v(x,y)=\frac{v_0(y)}{a}+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}v_n(y)cos(\alpha_n x),\quad \alpha_n=\frac{\pi n}{a} \tag{2.28}$$

Знайдем тепер $v_0(y)$ розглянувши задачу у просторі трансформант (2.9), (2.10) при $n=0$, $\alpha_n=0$. Детальний розв'язок якої наведено в (Додаток D). Тоді остаточний розв'язок $v(x,y)$ буде мати вигляд

$$\begin{aligned} v(x,y)=&\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}v_n(y)cos(\alpha_n x)-\psi_0(y)\frac{p_0}{a(2G+\lambda)}+\\ &+\frac{1}{a(1+\mu_0)}\int_0^b g(y,\xi)[(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(\xi)cos(\alpha_n a)-\frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(\xi))-\\ &-\frac{\mu_0}{(1+\mu_0)}(\chi_3^{'}(\xi)cos(\alpha_n a)-\chi_1^{'}(\xi))]d\xi \end{aligned} \tag{2.29}$$

Залишилось знайти невідомі функції $\chi_1(y)$, $\chi_2(y)$, $\chi_3(y)$, $\chi_4(y)$. В подальшому в данній роботі розглянуто випадок таких граничних умов які призводять лише до однієї невідомої функції $f(y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}|_{x=a}$. Для знаходження якої буде побудовано інтегральне рівняння завдяки граничній умові $\sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x)$.

2.4 Загальна схема розв'язку сінгулярного інтегрального рівняння

Розглянемо випадок граничних умов другої основної задачі теорії пружності, в результаті отримаємо лише одну невідому функцію $f(y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}|_{x=a}$. З цього отримаємо значення $f_n^1(\xi) = 0$, $f_n^2(\xi) = -cos(\alpha_n a)f(\xi)$. Запишемо тепер фінальний розв'язок для цього випадку:

$$u(x,y) = -\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_2(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right]d\xi + \psi_0^2(y)p_n\right)sin(\alpha_n x) \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned} v(x,y) = &-\frac{1}{a(1+\mu_0)}\int_0^b g(y,\xi)f(\xi)d\xi - \psi_0(y)\frac{p_0}{a(2G+\lambda)} \\ &-\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_4(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right]d\xi + \psi_0^4(y)p_n\right)cos(\alpha_n x) \end{aligned} \tag{2.31}$$

Використиємо граничну умову $\sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x)$ для того, щоб отримати інтегральне рівняння:

$$(2G+\lambda)\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}|_{y=b} + \lambda\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}|_{y=b} = -p(x) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &-\frac{(2G+\lambda)}{a(1+\mu_0)}\int_0^b \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b}f(\xi)d\xi - \psi_0^{'}(b)\frac{p_0}{a} - \\ &-\frac{2(2G+\lambda)}{a}\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_4(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right]d\xi + \psi_0^4(y)p_n\right) \\ &cos(\alpha_n x)|_{y=b} - \frac{2\lambda}{a}\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_2(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right]d\xi + \psi_0^2(y)p_n\right) \\ &sin(\alpha_n x)|_{y=b} = -p(x) \end{aligned}$$

Введемо позначення:

$$a_1(x) = ap(x) - 2(2G+\lambda)\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_0^4(y)p_n cos(\alpha_n x)|_{y=b} -$$

$$-2\lambda\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_0^2(y)p_n sin(\alpha_n x)|_{y=b} - \psi_0^{'}(b)p_0 \tag{2.32}$$

Враховуючи його отримаємо наступне інтегральне рівняння відносно $f(\xi)$:

$$\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\int_0^b \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b} f(\xi)d\xi +$$
$$+\int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} cos(\alpha_n a)cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y} + \alpha_n\lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b}$$
$$f(\xi)d\xi = a_1(x) \tag{2.33}$$

Розглянемо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} cos(\alpha_n a)cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y} + \alpha_n\lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\alpha_n^{-1}e^{\alpha_n(\xi-b)}cos(\alpha_n x)\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y} + \lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b} =$$
$$= \sum_{n=1}^{N}(-1)^n\alpha_n^{-1}e^{\alpha_n(\xi-b)}cos(\alpha_n x)\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y} + \lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b} +$$
$$+ a_2\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) +$$
$$+ a_2\sum_{n=0}^{N}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) -$$
$$- a_2\sum_{n=0}^{N}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) =$$
$$= a_2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) + a_3(\xi,x)$$

де:

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y} + \lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b},$$

$$a_3(\xi,x)=\sum_{n=1}^{N}cos(\alpha_n a)cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y}+\alpha_n\lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b}-$$

$$-a_2\sum_{n=0}^{N}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)$$

Використовуючи формулу 5.4.12.8 [6] отримаємо:

$$a_2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)+a_3(\xi,x)=$$

$$=\frac{a_2}{4}ln\left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right]+a_3(\xi,x)$$

Повернемося до інтегралу

$$\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\int_0^b\frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b}f(\xi)d\xi+$$

$$+\int_0^b\left(\frac{a_2}{4}ln\left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right]+a_3(\xi,x)\right)f(\xi)d\xi=$$

$$=\int_0^b(\frac{a_2}{4}ln\left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right]+a_3(\xi,x)+$$

$$+\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b})f(\xi)d\xi=$$

$$=\left[\begin{array}{c} t=\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))-1}{1-ch(\frac{\pi b}{2a})}\\ sh(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))d\xi=-\frac{2a}{\pi}(ch(\frac{\pi b}{2a})-1)dt\\ \xi=0,\quad t=1\\ \xi=b,\quad t=0\\ \xi=b-\frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1)\end{array}\right]=$$

$$=a_5\int_0^b a_4(t)\left(\frac{a_2}{4}ln\left[\frac{t+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right]+a_3\widetilde{(t,x)}\right)\widetilde{f(t)}dt \qquad (2.34)$$

де:

$$\widetilde{a_3(t,x)} = a_3\left(b - \frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi b}{2a}) - 1)t + 1), x\right) +$$
$$+ \frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\frac{\partial g(y, b - \frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi b}{2a}) - 1)t + 1))}{\partial y}|_{y=b}$$
$$f(t) = f(b - \frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi b}{2a}) - 1)t + 1))$$
$$a_4(t) = \frac{1}{sh\left(arch\left[(ch(\frac{\pi b}{2a}) - 1)t + 1\right]\right)}$$
$$a_5 = 2a(ch(\frac{\pi b}{2a}) - 1)$$

Таким чином отримаємо наступне інтегральне рівняння:

$$\frac{a_5}{\pi}\int_0^b a_4(t)\left(\frac{a_2}{4}ln\left[\frac{t + cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t - cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right] + \widetilde{a_3(t,x)}\right)\widetilde{f(t)}dt = a_1(x) \quad (2.35)$$

Розв'язок якого будемо шукати у наступному вигляді:

$$\widetilde{f(t)} = \frac{1}{a_2 a_4(t)}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k T_{2k+1}(t) \quad (2.36)$$

Де φ_k - невідомі коєфіцієнти, $T_{2k+1}(t)$ - поліном Чебишева першого роду.

Таким чином отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_k}{4}\frac{1}{\pi}\int_0^1 ln\left[\frac{t + cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t - cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right]\frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\widetilde{a_3(t,x)}}{a_2}\frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{a_1(x)}{a_5} \Leftrightarrow$$

Використовуючи формулу B.1.9 [5]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\frac{T_{2k+1}(cos(\frac{\pi}{2a}x))}{4(2k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\widetilde{a_3(t,x)}}{a_2}\frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{a_1(x)}{a_5} \quad (2.37)$$

Введемо позначення

$$l = cos(\frac{\pi}{2a}x), \quad \widetilde{a_1(l)} = \frac{a_1(\frac{2a}{\pi}arccos(l))}{a_5}$$

Помножимо обидві частини рівняння (2.37) скалярно на $\frac{T_{2m+1}(l)}{\sqrt{1-l^2}}$ та проінтегруєм по змінній l на інтервалі $(-1;1)$. Та використовуючи формулу 2.3.2 [5] отримаєм наступне бескінечну алгебричну систему відносно невідомих коефіцієнтів φ_k, яка в подальшому буде розв'язуватись методом редукції.

$$\frac{\phi_m \pi}{8(2m+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k g_{k,m} = f_m \tag{2.38}$$

Де $g_{k,m} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_{2m+1}(l)}{\sqrt{1-l^2}} \int_0^1 \frac{a_3(t, \frac{2a}{\pi} \widetilde{arccos(l)})}{a_2} \frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dtdl$, $f_m = \int_{-1}^{1} \frac{T_{2m+1}(l) \widetilde{a_1(l)}}{\sqrt{1-l^2}} dl$ інтеграли відомих функцій

2.5 Висновки до другого розділу

Безпосередньо застосовані інтегральні перетворення до рівнянь рівноваги Ламе та крайових умов плоскої задачі теорії пружності для прямокутної області. Це дозволило уникнути використання допоміжних гармонічних або бігармонічних функцій. Зведено вихідну задачу до одновимірної векторної крайової задачі у просторі трансформант. Цю задачу було розв'язано за допомогою методів диференціального матричного числення. Для цього була побудована фундаментальна базисна матрична система розв'язків однорідного матричного рівняння та матриця-функція Гріна для диференціального векторного рівняння другого порядку. Побудовано та розв'язано сінгульрне інтегральне рівняння відносно невідомої функції шляхом викорстання методу ортагональних поліномів, та зведення рівняння до бескінечної алгебричної системи, яка в подальшому була розв'язана методом редукції.

3 ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ ЗА УМОВ ІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ НА БІЧНИХ ГРАНЯХ

У даному розділі досліджено плоскі статична та динамічна задачі теорії пружності для прямокутної області, за умов ідеального контакту на бічних гранях.

Вихідні задачі зведено до одновимірної задачі у просторі трансформант за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Отримані крайові задачі розв'язано точно за допомогою методу матрично диференціального числення, фундаментальний розв'язок представлений як інтеграл по замкненому контору, який в свою чергу, був знайденний за допомогою теоремі про лишки. Остаточний вигляд для полів переміщеннь та напружень отримано шляхом оберненого перетворення Фур'є.

Проведено чисельний аналіз отриманих функцій переміщень та напружень для різних розмірів прямокутної області та різних видів навантаження.

Результати розділу опубліковані в [7], [8], [9], [14] а також доповідалась на конференціях [10], [11], [15].

3.1 Статична задача теорії пружності для прямокутної області за умов ідеального контакту на бічних гранях

3.1.1 Постановка задачі

Розглядається пружна прямокутна область (Рис: 3.1), яка займає облась, що описується у декартовій системі координат співвідношенням $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=b} = 0 \tag{3.1}$$

де $p(x)$ відома функція.

На бічних гранях виконується умова ідеального контакту

$$u(x, y)|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=0} = 0 \tag{3.2}$$

$$u(x, y)|_{x=a} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=a} = 0 \tag{3.3}$$

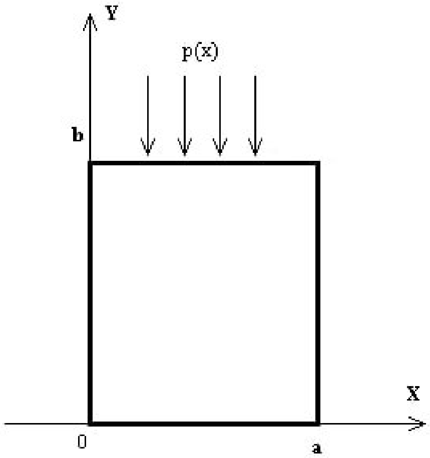

Рис. 3.1: Геометрія проблеми

На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x,y)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=0} = 0 \tag{3.4}$$

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}) = 0 \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

3.1.2 Побудова точного розв'язку вихідної задачі

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаємо інтегральне перетворення Фур'є по змінній x до рівнянь (3.5) в наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y) sin(\alpha_n x) \\ v(x,y) cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{3.6}$$

Для цього помножимо перше та друге рівняння (3.5) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруємо по змінній x на інтервалі $0 \le x \le a$.

Розглянемо перше рівняння

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} sin(\alpha_n x) dx + \int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} sin(\alpha_n x) dx +$$
$$+ \mu_0 \left(\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} sin(\alpha_n x) dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} sin(\alpha_n x) dx \right) = 0$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \left(u(x,y)cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a u(x,y)sin(\alpha_n x)dx \right) =$$
$$= -\alpha_n^2 u_n(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^a u(x,y)sin(\alpha_n x)dx = u_n^{''}(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)dx =$$
$$= -\alpha_n \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a v(x,y)cos(\alpha_n x)dx = -\alpha_n v_n^{'}(y)$$

Тоді перше рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2 \mu_0) u_n(y) = 0$$

Розлянемо друге рівняння

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} cos(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx +$$
$$+ \mu_0 \left(\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} cos(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx \right) = 0$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} sin(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \left(v(x,y)sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a v(x,y)cos(\alpha_n x)dx \right) =$$
$$= -\alpha_n^2 v_n(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^a v(x,y)cos(\alpha_n x)dx = v_n^{''}(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} sin(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a u(x,y)sin(\alpha_n x)dx = \alpha_n u_n^{'}(y)$$

Тоді друге рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$(1+\mu_0)v_n^{''}(y)+\alpha_n\mu_0 u_n^{'}(y)-\alpha_n^2 v_n(y)=0$$

Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y)-\alpha_n\mu_0 v_n^{'}(y)-\alpha_n^2(1+\mu_0)u_n(y)=0 \\ (1+\mu_0)v_n^{''}(y)+\alpha_n\mu_0 u_n^{'}(y)-\alpha_n^2 v_n(y)=0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \left((2G+\lambda)v_n^{'}(y)+\alpha_n\lambda u_n(y)\right)|_{y=b}=-p_n \\ \left(u_n^{'}(y)-\alpha_n v_n(y)\right)|_{y=b}=0 \\ v_n(y)|_{y=0}=0 \\ \left(u_n^{'}(y)-\alpha_n v_n(y)\right)|_{y=0}=0 \end{cases} \tag{3.8}$$

де $p_n=\int_0^a p(x)cos(\alpha_n x)dx$

Для того щоб розв'язати задачу у простосторі трансформант, перепишемо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (3.7) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &L_2\left[Z_n(y)\right]=A*Z_n^{''}(y)+B*Z_n^{'}(y)+C*Z_n(y) \\ &L_2\left[Z_n(y)\right]=0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Де

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1+\mu_0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & -\alpha_n\mu_0\\ \alpha_n\mu_0 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-\alpha_n^2(1+\mu_0) & 0\\ 0 & -\alpha_n^2\end{pmatrix}$$

$$Z_n(y)=\begin{pmatrix}u_n(y)\\ v_n(y)\end{pmatrix}$$

Граничні умови (3.8) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &U_i\left[Z_n(y)\right]=E_i*Z_n^{'}(b_i)+F_i*Z_n(b_i) \\ &U_i\left[Z_n(y)\right]=D_i \end{aligned} \tag{3.10}$$

де $i=\overline{0,1}$, $b_0=b$, $b_1=0$,

$$E_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2G+\lambda\end{pmatrix},\quad F_0=\begin{pmatrix}0 & -\alpha_n\\ \alpha_n\lambda & 0\end{pmatrix},$$

$$E_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad F_1=\begin{pmatrix}0 & -\alpha_n\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдемо фундаментальну матрицю рівняння (3.9). Шукати її будем у наступному вигляді [4]:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \tag{3.11}$$

Де $M(s)$ - характерестична матриця рівняння (3.9), а C - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умовни

$$L_2\left[e^{sy} * I\right] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} &L_2\left[e^{sy} * I\right] = e^{sy}\left(s^2 A * I + sB * I + C * I\right) = \\ &= e^{sy}\left(\begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2(1+\mu_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_n^2(1+\mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix}\right) = \\ &= e^{sy}\begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2(1+\mu_0) & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2(1+\mu_0) & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Знайдемо тепер $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}$.

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 & \alpha_n\mu_0 s \\ -\alpha_n\mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2(1+\mu_0) \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} det[M(s)] &= \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 \end{vmatrix} = \\ &= (1+\mu_0)(s-\alpha_n)^2(s+\alpha_n)^2 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Де α_n, $-\alpha_n$, корені $det[M(s)] = 0$, детальне знаходження яких наведено в (Додаток В).

Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds = \frac{2\pi i}{2\pi i(1+\mu_0)} \sum_{i=1}^{2} Res\left[e^{sy}\frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}\right] = \\ &= \frac{1}{(1+\mu_0)}\left(Y_0(y) + Y_1(y)\right) \end{aligned}$$

Знайдемо $Y_0(y)$:

$$Y_0(y) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{sy}}{(s+\alpha_n)^2}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=\alpha_n} =$$
$$= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n}\begin{pmatrix}\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0 & \alpha_n\mu_0 y \\ -\alpha_n\mu_0 y & -\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0\end{pmatrix} \tag{3.16}$$

Знайдемо $Y_1(y)$:

$$Y_1(y) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{sy}}{(s-\alpha_n)^2}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=-\alpha_n} =$$
$$=\frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n}\begin{pmatrix}\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n\mu_0 y \\ \alpha_n\mu_0 y & -\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0\end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Таким чином можна записати розв'язок задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y) = \frac{1}{1+\mu_0}\left(Y_0(y) * \begin{pmatrix}c_1 \\ c_2\end{pmatrix} + Y_1(y) * \begin{pmatrix}c_3 \\ c_4\end{pmatrix}\right) \tag{3.18}$$

Залишилось знайти невідомі коєфіцієнти c_1, c_2, c_3, c_4, використовуючи граничні умови (3.10). Покрокове знаходження коєфіцієнтів наведено у (Додаток E). Таким чином можна записати розв'зок у просторі трансформант:

$$u_n(y) = \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n(1+\mu_0)}\left[c_1(\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2(\alpha_n\mu_0 y)\right] +$$
$$+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n(1+\mu_0)}\left[c_3(\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4(-\alpha_n\mu_0 y)\right] \tag{3.19}$$

$$v_n(y) = \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n(1+\mu_0)}\left[c_1(-\alpha_n\mu_0 y) + c_2(-\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0)\right] +$$
$$+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n(1+\mu_0)}\left[c_3(\alpha_n\mu_0 y) + c_4(-\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0)\right] \tag{3.20}$$

Використовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (3.19), (3.20), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{3.21}$$

$$v(x,y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{3.22}$$

Останній крок це знаходження $v_0(y)$ у випадку коли $n = 0$, $\alpha_n = 0$. Для цього повернемся до другого рівняння (3.7), та запишем його для цього випадку:

$$(1 + \mu_0)v_n^{''}(y) = 0 \tag{3.23}$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} (2G + \lambda)v_0^{'}(y)|_{y=b} = -p_0 \\ v_0(y)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{3.24}$$

Де $p_0 = \int_0^a p(x)dx$

Розв'язок рівняння (3.23):

$$v_0(y) = c_1 + c_2 y \tag{3.25}$$

Застовоючи граничні умови (3.24) для знаходження коефіцієнтів c_1, c_2, отримаємо розв'язок задачі задачі:

$$v_0(y) = \frac{-p_0}{(2G + \lambda)} y \tag{3.26}$$

Тепер остаточний розв'зок задачі можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \\ v(x, y) = \frac{-p_0}{(2G+\lambda)a} y + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \end{cases} \tag{3.27}$$

3.1.3 Чисельні розрахунки

Наведені чисельні експеренти розглядаються для сталі ($E = 200$ ГПА, $\mu = 0.25$).

Розглянута прямокунта область $0 \le x \le 10$, $0 \le y \le 15$, при функції навантаження $p(x) = (x - 2.5)^2$. На малюнках (Рис: 3.2), (Рис: 3.3), (Рис: 3.4), (Рис: 3.5) представлені функкії переміщень $u(x, y)$, $v(x, y)$ та напружень $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ відповідно.

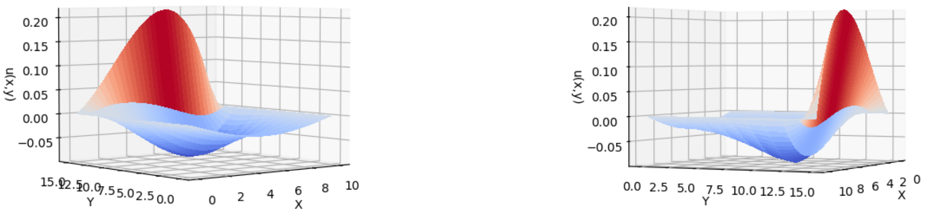

Рис. 3.2: Функція $u(x, y)$

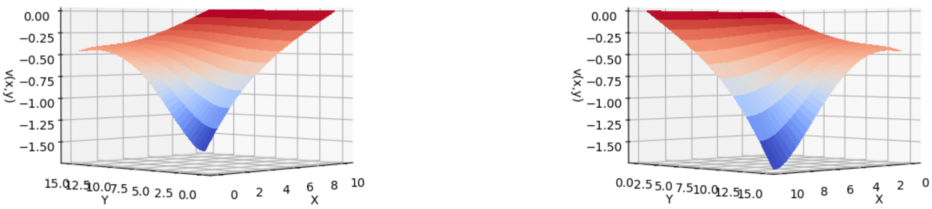

Рис. 3.3: Функція $v(x, y)$

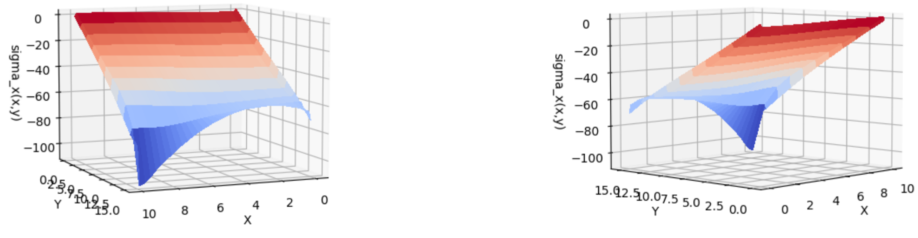

Рис. 3.4: Функція $\sigma_x(x, y)$

Рис. 3.5: Функція $\sigma_y(x, y)$

3.2 Динамічна задача теорії пружності для прямокутної області за умов ідеального контакту на бічних гранях

3.2.1 Постановка задачі

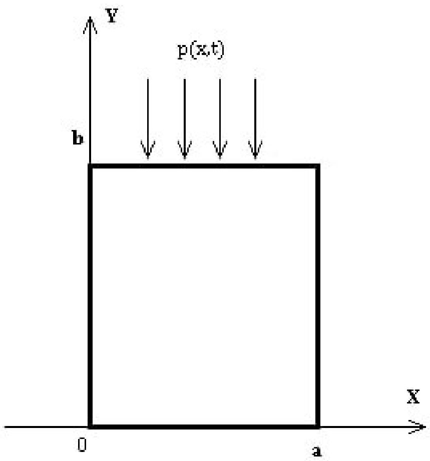

Рис. 3.6: Геометрія проблеми

Розглядається пружна сама прямокутна область (Рис: 3.6), яка займає облась, що описується у декартовій системі координат співвідношенням $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y, t)|_{y=b} = -p(x, t), \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{y=b} = 0 \tag{3.28}$$

де $p(x,t)$ відома функція. На бічних гранях виконується умова ідеального контакту

$$u(x,y,t)|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{x=0} = 0 \tag{3.29}$$

$$u(x,y,t)|_{x=a} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{x=a} = 0 \tag{3.30}$$

На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x,y,t)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{y=0} = 0 \tag{3.31}$$

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x \partial y}) = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2}) = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial t^2} \end{cases} \tag{3.32}$$

Будемо розглядати випадок гармонічних коливань, тому можемо представити функції у наступному вигляді:

$$u(x,y,t) = u(x,y)e^{i\omega t}, \quad v(x,y,t) = v(x,y)e^{i\omega t}, \quad p(x,t) = p(x)e^{i\omega t} \tag{3.33}$$

Таким чином отримаємо наступні рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}) = -\frac{\omega^2}{c_1^2}u(x,y) \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}) = -\frac{\omega^2}{c_2^2}v(x,y) \end{cases} \tag{3.34}$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} \sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x,t), \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=b} = 0 \\ v(x,y)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=0} = 0 \\ u(x,y)|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=0} = 0 \\ u(x,y)|_{x=a} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=a} = 0 \end{cases} \tag{3.35}$$

3.2.2 Побудова точного розв'язку вихідної задачі

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаємо інтегральне перетворення Фур'є по змінній x до рівнянь (3.34) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y)sin(\alpha_n x) \\ v(x,y)cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{3.36}$$

Для цього помножимо перше та друге рівняння (3.34) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруємо по змінній x на інтервалі $0 \le x \le a$. Покрокове інтегрування рівняння аналогічне розглянутого в попередній статичній задачі окрім того, що в обидвах рівняннях є додаткові елементи $\int_0^a \frac{\omega^2}{c_1^2} u(x,y) sin(\alpha_n x) dx = \frac{\omega^2}{c_1^2} u_n(y)$, $\int_0^a \frac{\omega^2}{c_2^2} v(x,y) cos(\alpha_n x) dx = \frac{\omega^2}{c_2^2} v_n(y)$.

Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) + (-\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) = 0 \\ (1+\mu_0) v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) + (-\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = 0 \end{cases} \tag{3.37}$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \left((2G+\lambda) v_n^{'}(y) + \alpha_n \lambda u_n(y)\right)|_{y=b} = -p_n \\ \left(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\right)|_{y=b} = 0 \\ v_n(y)|_{y=0} = 0 \\ \left(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\right)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{3.38}$$

де $p_n = \int_0^a p(x) cos(\alpha_n x) dx$

Для того щоб розв'язати задачу у простосторі трансформант, перепишмо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (3.37) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &L_2\left[Z_n(y)\right] = A * Z_n^{''}(y) + B * Z_n^{'}(y) + C * Z_n(y) \\ &L_2\left[Z_n(y)\right] = 0 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix}, \quad Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (3.38) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &U_i\left[Z_n(y)\right] = E_i * Z_n^{'}(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ &U_i\left[Z_n(y)\right] = D_i \end{aligned} \tag{3.40}$$

Де $i = \overline{0,1}$, $b_0 = b$, $b_1 = 0$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G+\lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (3.39). Шукати її будем у наступному вигляді [4]:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \tag{3.41}$$

Де $M(s)$ - характерестична матриця рівняння (3.39), а C - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умовни

$$L_2 \left[e^{sy} * I \right] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned} L_2 \left[e^{sy} * I \right] &= e^{sy} \left(s^2 A * I + sB * I + C * I \right) = \\ &= e^{sy} \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

Знайдемо тепер $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}$.

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s \\ -\alpha_n \mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} det[M(s)] &= \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{vmatrix} = \\ &= (s - s_1)(s + s_1)(s - s_2)(s + s_2) \end{aligned} \tag{3.45}$$

Де s_1, s_2, $-s_1$, $-s_2$ корені $det[M(s)] = 0$, детальне знаходження яких наведено в (Додаток B).

Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds &= \frac{2\pi i}{2\pi i(1+\mu_0)} \sum_{i=1}^{4} Res \left[e^{sy} \frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]} \right] = \\ &= (Y_0(y) + Y_1(y) + Y_2(y) + Y_3(y)) \end{aligned}$$

Знайдем $Y_0(y)$:

$$Y_0(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s+s_1)(s-s_2)(s+s_2)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=s_1} =$$
$$= \frac{e^{s_1 y}}{2s_1(s_1^2-s_2^2)}\begin{pmatrix} s_1^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n\mu_0 s_1 \\ -\alpha_n\mu_0 s_1 & s_1^2-\alpha_n^2-\alpha_n^2\mu_0+\frac{\omega^2}{c_1^2}\end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Знайдем $Y_1(y)$:

$$Y_1(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-s_1)(s-s_2)(s+s_2)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=-s_1} =$$
$$= -\frac{e^{-s_1 y}}{2s_1(s_1^2-s_2^2)}\begin{pmatrix} s_1^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n\mu_0 s_1 \\ \alpha_n\mu_0 s_1 & s_1^2-\alpha_n^2-\alpha_n^2\mu_0+\frac{\omega^2}{c_1^2}\end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Знайдем $Y_2(y)$:

$$Y_2(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s+s_2)(s-s_1)(s+s_1)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=s_2} =$$
$$= \frac{e^{s_2 y}}{2s_2(s_2^2-s_1^2)}\begin{pmatrix} s_2^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n\mu_0 s_2 \\ -\alpha_n\mu_0 s_2 & s_2^2-\alpha_n^2-\alpha_n^2\mu_0+\frac{\omega^2}{c_1^2}\end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Знайдем $Y_3(y)$:

$$Y_3(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-s_2)(s-s_1)(s+s_1)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=-s_2} =$$
$$= -\frac{e^{-s_2 y}}{2s_2(s_2^2-s_1^2)}\begin{pmatrix} s_2^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n\mu_0 s_2 \\ \alpha_n\mu_0 s_2 & s_2^2-\alpha_n^2-\alpha_n^2\mu_0+\frac{\omega^2}{c_1^2}\end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y) = (Y_0(y)+Y_1(y)) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (Y_2(y)+Y_3(y)) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Залишилось знайти невідомі коефіцієнти c_1, c_2, c_3, c_4, використовуючи граничні умови (3.40). Покрокове знаходження коефіцієнтів наведено у (Додаток Е). Таким чином ми можемо записати розв'зок у просторі трансформант:

$$u_n(y) = \frac{(s_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1 y} - e^{-s_1 y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)(1+\mu_0)} c_1 + \\ + \frac{(s_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2 y} - e^{-s_2 y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)(1+\mu_0)} c_3 + \\ + \frac{(s_1 \alpha_n y)(e^{s_1 y} + e^{-s_1 y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)(1+\mu_0)} c_2 + \frac{(s_2 \alpha_n y)(e^{s_2 y} + e^{-s_2 y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)(1+\mu_0)} c_4 \quad (3.51)$$

$$v_n(y) = \frac{(s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1 y} - e^{-s_1 y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)(1+\mu_0)} c_2 + \\ + \frac{(s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2 y} - e^{-s_2 y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)(1+\mu_0)} c_4 - \\ - \frac{(s_1 \alpha_n y)(e^{s_1 y} + e^{-s_1 y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)(1+\mu_0)} c_1 - \frac{(s_2 \alpha_n y)(e^{s_2 y} + e^{-s_2 y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)(1+\mu_0)} c_3 \quad (3.52)$$

Використовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (3.51), (3.52), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x,y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (3.53)$$

$$v(x,y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (3.54)$$

Останній крок це знаходження $v_0(y)$ у випадку коли $n = 0$, $\alpha_n = 0$. Для цього повернемся до другого рівняння (3.37), та запишем його для цього випадку:

$$(1+\mu_0) v_n''(y) + \frac{\omega^2}{c_2^2} v_0(y) = 0 \quad (3.55)$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} (2G+\lambda) v_0'(y)|_{y=b} = -p_0 \\ v_0(y)|_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (3.56)$$

Де $p_0 = \int_0^a p(x) dx$

Розв'язок рівняння (3.55):

$$v_0(y) = c_1 cos\left(y\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right) + c_2 sin\left(y\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right) \quad (3.57)$$

Застовоючи граничні умови (3.56) для знаходження коєфіцієнтів c_1, c_2, отримаємо розв'язок задачі задачі:

$$v_0(y) = \frac{-p_0}{(2G+\lambda)\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}sin\left(b\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right)}sin\left(y\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right) \tag{3.58}$$

3.2.3 Чисельні розрахунки

Наведені чисельні експеренти розглядаються для сталі ($E = 200$ ГПА, $\mu = 0.25$).

Розглянута прямокунта область $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 15$, при функції навантаження $p(x) = (x-2.5)^2$ та частоті коливань $\omega = 0.75$. На малюнках (Рис: 3.2), (Рис: 3.3), (Рис: 3.4), (Рис: 3.5) представлені функкіі переміщень $u(x,y)$, $v(x,y)$ та напружень $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ відповідно.

3.3 Висновки до треттього розділу розділу

Отримано точне розв'язок статичної та динамічної задачі для прямокутної області за умов ідеального контакту на бічних гранях. Досліджено поля переміщень та напружень для різних видів навантаження і розмірів прямокутної області.

4 ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ ЗА УМОВ ДРУГОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

У даному розділі досліджено плоска статична задача теорії пружності для прямокутної області, за умов другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях.

Вихідна задача зведена до одновимірної задачі у просторі трансформант за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Отримана крайова задача розв'язана точно за допомогою методу матрично диференціального числення, фундаментальний розв'язок представлений як інтеграл по замкненому контору, який в свою чергу, був знайденний за допомогою теоремі про лишки. Побудована матриця-функція Гріна як комбінація фундаментальних базисних розв'язків задачі у просторі трансформант. Остаточний вигляд для функцій переміщенннь та напружень отриман шляхом оберненого перетворення Фур'є. Побудовано та розв'язано сінгульрне інтегральне рівняння відносно невідомої функції шляхом викорстання методу ортагональних многочленів, та зведення рівнняяння до бескінечної алгебричної системи, яка в подальшому була розв'язана методом редукції [3].

Проведено чисельний аналіз отриманих функцій переміщень та напружень для різних розмірів прямокутної області та різних видів навантаження.

Результати розділу опубліковані в [12], [16], а також доповідалась на конференції [13], [17].

4.1 Статична задача теорії пружності для прямокутної області за умов другої основної задачі теорії пружності

4.1.1 Постановка задачі

Розглядається пружна прямокутна область (Рис: 4.1), яка займає облась, що описується у декартовій системі координат співвідношенням $-a \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=b} = 0 \tag{4.1}$$

де $p(x)$ відома функція.

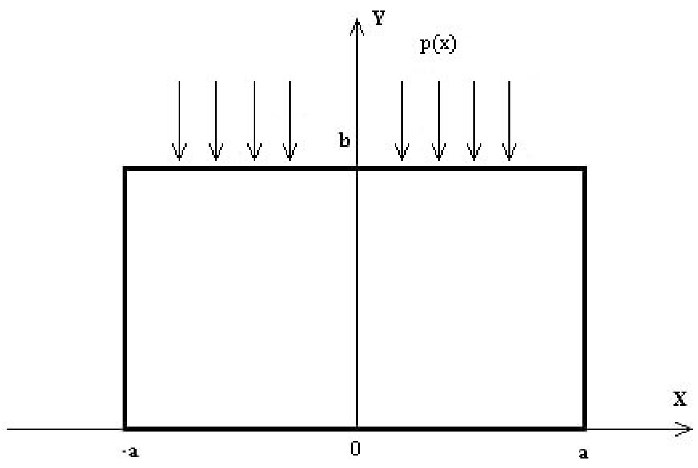

Рис. 4.1: Геометрія проблеми

На бічних гранях виконується умова другої основної задачі теорії пружності

$$u(x,y)|_{x=\pm a} = 0, \quad v(x,y)|_{x=\pm a} = 0 \tag{4.2}$$

На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x,y)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=0} = 0 \tag{4.3}$$

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}) = 0 \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}) = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

Щоб розв'язати поставлену задачу буде розглянута тільки половона прямокутної області $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ та використовуючи властивості симметрії граничні умови на бічних гранях будуть мати вигляд:

$$u(x,y)|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=0} = 0 \tag{4.5}$$

$$u(x,y)|_{x=a} = 0, \quad v(x,y)|_{x=a} = 0 \tag{4.6}$$

4.1.2 Зведеня задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаєм інтегральне перетворення Фур'є по змінній x у до рівнянь (4.4) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y) sin(\alpha_n x) \\ v(x,y) cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{4.7}$$

Для цього помножим перше та друге рівняння (4.4) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруєм по змінній x на інтервалі $0 \leq x \leq a$.

Розглянемо перше рівняння:

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} sin(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} sin(\alpha_n x)dx +$$
$$+ \mu_0 \left(\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} sin(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} sin(\alpha_n x)dx \right) = 0$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \left(u(x,y)cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a u(x,y) sin(\alpha_n x)dx \right) =$$
$$= -\alpha_n^2 u_n(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^a u(x,y) sin(\alpha_n x)dx = u_n^{''}(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)dx =$$
$$= -\alpha_n \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a v(x,y) cos(\alpha_n x)dx = -\alpha_n v_n^{'}(y)$$

Тоді перше рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2 \mu_0) u_n(y) = 0$$

Розлянемо друге рівняння

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} cos(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx +$$
$$+ \mu_0 \left(\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} cos(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx \right) = 0$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} sin(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \left(v(x,y) sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a v(x,y) cos(\alpha_n x)dx \right) =$$
$$= \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}|_{x=a} cos(\alpha_n a) - \alpha_n^2 v_n(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^a v(x,y)cos(\alpha_n x)dx = v_n^{''}(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} sin(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \frac{\partial}{\partial y}\int_0^a u(x,y)sin(\alpha_n x)dx = \alpha_n u_n^{'}(y)$$

Тоді друге рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$(1+\mu_0)v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2})v_n(y) = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}|_{x=a} cos(\alpha_n a)$$

Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) - \alpha_n^2(1+\mu_0)u_n(y) = 0 \\ (1+\mu_0)v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = -cos(\alpha_n)f(y) \end{cases} \tag{4.8}$$

Де $f(y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}|_{x=a}$ - невідома функція

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \left((2G+\lambda)v_n^{'}(y) + \alpha_n \lambda u_n(y)\right)|_{y=b} = -p_n \\ \left(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\right)|_{y=b} = 0 \\ v_n(y)|_{y=0} = 0 \\ \left(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\right)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

Де $p_n = \int_0^a p(x)cos(\alpha_n x)dx$

4.1.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у простосторі трансформант, перепишемо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (4.8) запишемо у наступному вигляді:

$$L_2[Z_n(y)] = A * Z_n^{''}(y) + B * Z_n^{'}(y) + C * Z_n(y)$$
$$L_2[Z_n(y)] = F_n(y) \tag{4.10}$$

Де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n\mu_0 \\ \alpha_n\mu_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2(1+\mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix}$$

$$Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}, \quad F_n(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -cos(\alpha_n a) f(y) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (4.9) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &U_i\left[Z_n(y)\right] = E_i * Z_n'(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ &U_i\left[Z_n(y)\right] = D_i \end{aligned} \tag{4.11}$$

Де $i = \overline{0,1}$, $b_0 = b$, $b_1 = 0$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G+\lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (4.10). Шукати її будем у наступному вигляді [4]:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \tag{4.12}$$

Де $M(s)$ - характерестична матриця рівняння (4.10), а C - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умовни

$$L_2\left[e^{sy} * I\right] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} &L_2\left[e^{sy} * I\right] = e^{sy}\left(s^2 A * I + sB * I + C * I\right) = \\ &= e^{sy}\left(\begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2(1+\mu_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_n^2(1+\mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix}\right) = \\ &= e^{sy}\begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2(1+\mu_0) & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2(1+\mu_0) & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

Знайдемо тепер $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}$.

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 & \alpha_n \mu_0 s \\ -\alpha_n \mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2(1+\mu_0) \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

$$det[M(s)] = \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 \end{vmatrix} =$$
$$= (1+\mu_0)(s-\alpha_n)^2(s+\alpha_n)^2 \tag{4.16}$$

Де α_n, $-\alpha_n$, корені $det[M(s)] = 0$, детальне знаходження яких наведено в (Додаток B).

Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy}M^{-1}(s)ds = \frac{2\pi i}{2\pi i(1+\mu_0)}\sum_{i=1}^{2} Res\left[e^{sy}\frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}\right] =$$
$$= \frac{1}{(1+\mu_0)}\left(Y_0(y) + Y_1(y)\right)$$

Знайдем $Y_0(y)$:

$$Y_0(y) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{sy}}{(s+\alpha_n)^2}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=\alpha_n} =$$
$$= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n}\begin{pmatrix} \alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0 & \alpha_n\mu_0 y \\ -\alpha_n\mu_0 y & -\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

Знайдем $Y_1(y)$:

$$Y_1(y) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{sy}}{(s-\alpha_n)^2}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=-\alpha_n} =$$
$$= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n}\begin{pmatrix} \alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n\mu_0 y \\ \alpha_n\mu_0 y & -\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

4.1.4 Побудова матриці-функції Гріна

Для побудови матриці-функції Гріна спочатку знайдем тепер фундамельні бизисні матриці $\Psi_0(y)$, $\Psi_1(y)$, шукати їх будем у наступному вигляді:

$$\Psi_i(y) = Y_0(y) * C_1^i + Y_2(y) * C_2^i \tag{4.19}$$

Залишилось знайти невідомі матриці коєфіцієнтів C_1^0, C_2^0, C_1^1, C_2^1 використовуючи граничні умови (4.11). Покрокове знаходження яких наведено у (Додаток C). Для подальшого введемо наступні позначення для елементів матриць $\Psi_0(y)$, $\Psi_1(y)$:

$$\Psi_0(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^0(y) & \Psi_2^0(y) \\ \Psi_3^0(y) & \Psi_4^0(y) \end{pmatrix}, \quad \Psi_1(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^1(y) & \Psi_2^1(y) \\ \Psi_3^1(y) & \Psi_4^1(y) \end{pmatrix}$$

Таким чином матрицю Гріна можемо записати у вигляді:

$$G(y,\xi) = \begin{cases} \Psi_0(y) * \Psi_1(\xi), & 0 \le y < \xi \\ \Psi_1(y) * \Psi_0(\xi), & \xi < y \le b \end{cases} \tag{4.20}$$

Для данної матриці Гріна виконано усі властивості, зокрема виконані однорідні граничні умови (4.11) та однорідні рівняння рівноваги у просторі трансформант (4.10):

$$L_2\left[G(y,\xi)\right]=0$$

$$U_0\left[G(y,\xi)\right]=0, \quad U_1\left[G(y,\xi)\right],$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок крайової задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y)=\int_0^b G(y,\xi)F_n(\xi)d\xi+\Psi_0(y)*D_0+\Psi_1(y)*D_1 \tag{4.21}$$

Введемо наступні позначення $G(y,\xi)=\begin{pmatrix} g_1(y,\xi) & g_2(y,\xi) \\ g_3(y,\xi) & g_4(y,\xi) \end{pmatrix}$, $F_n(y)=\begin{pmatrix} f_n^1(y) \\ f_n^2(y) \end{pmatrix}$, $\Psi_i(y)=\begin{pmatrix} \psi_i^1(y) & \psi_i^2(y) \\ \psi_i^3(y) & \psi_i^4(y) \end{pmatrix}$, $i=0,1$. Враховуючи це, шукані функції перемішень у просторі трансформант можна записати у наступному вигляді

$$u_n(y)=\int_0^b \left[g_1(y,\xi)f_n^1(\xi)+g_2(y,\xi)f_n^2(\xi)\right]d\xi-\psi_0^2(y)p_n \tag{4.22}$$

$$v_n(y)=\int_0^b \left[g_3(y,\xi)f_n^1(\xi)+g_4(y,\xi)f_n^2(\xi)\right]d\xi-\psi_0^4(y)p_n \tag{4.23}$$

4.1.5 Побудова розв'язоку вихідної задачі

Використовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (4.22), (4.22), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x,y)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y)sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n=\frac{\pi n}{a} \tag{4.24}$$

$$v(x,y)=\frac{v_0(y)}{a}+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}v_n(y)cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n=\frac{\pi n}{a} \tag{4.25}$$

Знайдем тепер $v_0(y)$ розглянувши задачу у просторі трансформант (4.8), (4.9) при $n=0$, $\alpha_n=0$. Детальний розв'язок якої наведено в (Додаток D). Тоді остаточний розв'язок $v(x,y)$ буде мати вигляд

$$v(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) cos(\alpha_n x) - \frac{p_0}{a(2G+\lambda)} - \tag{4.26}$$

$$-\frac{1}{a(1+\mu_0)}\int_0^b g(y,\xi) f(\xi) d\xi \tag{4.27}$$

4.1.6 Розв'язок сінгулярного інтегрального рівняння

Залишилось знайти невідому функцію $f(y)$ для якої побудуєм інтегральне рівнняння використовуючи граничну умову $\sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x)$.

$$(2G+\lambda)\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}|_{y=b} + \lambda \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}|_{y=b} = -p(x) \Leftrightarrow$$

$$-\frac{(2G+\lambda)}{a(1+\mu_0)}\int_0^b \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b} f(\xi) d\xi -$$
$$-\frac{2(2G+\lambda)}{a}\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_4(y,\xi) cos(\alpha_n a) f(\xi)\right] d\xi + \psi_0^4(y) p_n\right)$$
$$cos(\alpha_n x)|_{y=b} - \frac{2\lambda}{a}\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_2(y,\xi) cos(\alpha_n a) f(\xi)\right] d\xi + \psi_0^2(y) p_n\right)$$
$$sin(\alpha_n x)|_{y=b} = -p(x)$$

Введемо позначення:

$$a_1(x) = ap(x) - 2(2G+\lambda)\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_0^4(y) p_n cos(\alpha_n x)|_{y=b} -$$

$$-2\lambda \frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_0^2(y) p_n sin(\alpha_n x)|_{y=b} \tag{4.28}$$

Враховуючи його отримаємо наступне інтегральне рівняння відносно $f(\xi)$:

$$\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\int_0^b \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b} f(\xi) d\xi +$$
$$+\int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} cos(\alpha_n a) cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y} + \alpha_n \lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b}$$
$$f(\xi) d\xi = a_1(x) \tag{4.29}$$

Розглянемо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} cos(\alpha_n a) cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y} + \alpha_n \lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \alpha_n^{-1} e^{\alpha_n(\xi-b)} cos(\alpha_n x)\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y} + \lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}(-1)^n \alpha_n^{-1} e^{\alpha_n(\xi-b)} cos(\alpha_n x)\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y} + \lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b}+$$

$$+ a_2 \sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)+$$

$$+ a_2 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)-$$

$$- a_2 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) =$$

$$= a_2 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) + a_3(\xi,x)$$

Де:

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y} + \lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b},$$

$$a_3(\xi,x) = \sum_{n=1}^{N} cos(\alpha_n a) cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y} + \alpha_n \lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b}-$$

$$- a_2 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)$$

Використовуючи формулу 5.4.12.8 [6] отримаємо:

$$a_2 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) + a_3(\xi,x) =$$

$$= \frac{a_2}{4} ln\left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) + cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) - cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right] + a_3(\xi,x)$$

Повернемося до інтегралу

$$\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\int_0^b \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b} f(\xi)d\xi +$$
$$+\int_0^b \left(\frac{a_2}{4} ln\left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) + cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) - cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right] + a_3(\xi,x)\right) f(\xi)d\xi =$$
$$= \int_0^b (\frac{a_2}{4} ln\left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) + cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) - cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right] + a_3(\xi,x) +$$
$$+\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b}) f(\xi)d\xi =$$
$$= \left[\begin{array}{c} t = \frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))-1}{1-ch(\frac{\pi b}{2a})} \\ sh(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))d\xi = -\frac{2a}{\pi}(ch(\frac{\pi b}{2a})-1)dt \\ \xi = 0, \quad t = 1 \\ \xi = b, \quad t = 0 \\ \xi = b - \frac{2a}{\pi} arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1) \end{array}\right] =$$
$$= a_5 \int_0^b a_4(t)\left(\frac{a_2}{4} ln\left[\frac{t + cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t - cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right] + \widetilde{a_3(t,x)}\right)\widetilde{f(t)}dt \qquad (4.30)$$

де:

$$\widetilde{a_3(t,x)} = a_3\left(b - \frac{2a}{\pi} arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1), x\right) +$$
$$+\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\frac{\partial g(y, b - \frac{2a}{\pi} arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1))}{\partial y}|_{y=b}$$
$$f(t) = f(b - \frac{2a}{\pi} arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1))$$
$$a_4(t) = \frac{1}{sh\left(arch\left[(ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1\right]\right)}$$
$$a_5 = \frac{2a}{\pi}(ch(\frac{\pi b}{2a})-1)$$

Таким чином отримаємо наступне інтегральне рівняння:

$$a_5 \int_0^b a_4(t)\left(\frac{a_2}{4} ln\left[\frac{t + cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t - cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right] + \widetilde{a_3(t,x)}\right)\widetilde{f(t)}dt = a_1(x) \qquad (4.31)$$

Розв'язок якого будемо шукати у наступному вигляді:

$$\widetilde{f(t)} = \frac{1}{a_2 a_4(t)}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k T_{2k+1}(t) \qquad (4.32)$$

де φ_k - невідомі коєфіцієнти, $T_{2k+1}(t)$ - поліном Чебишева першого роду.

Таким чином отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_k}{4}\frac{1}{\pi}\int_0^1 ln\left[\frac{t+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right]\frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\widetilde{a_3(t,x)}}{a_2}\frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{a_1(x)}{a_5}\Leftrightarrow$$

Використовуючи формулу B.1.9 [5]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\frac{T_{2k+1}(cos(\frac{\pi}{2a}x))}{4(2k+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\widetilde{a_3(t,x)}}{a_2}\frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{a_1(x)}{a_5} \tag{4.33}$$

Введем позначення

$$l=cos(\frac{\pi}{2a}x),\quad \widetilde{a_1(l)}=\frac{a_1(\frac{2a}{\pi}arccos(l))}{a_5}$$

Помножимо обидві частини рівняння (4.33) скалярно на $\frac{T_{2m+1}(l)}{\sqrt{1-l^2}}$ та проінтегруєм по змінній l на інтервалі $(-1;1)$. Та використовуючи формулу 2.3.2 [5] отримаєм наступне бескінечну алгебричну систему відносно невідомих коєфіцієнтів φ_k, яка в подальшому буде розв'язуватись методом редукції.

$$\frac{\phi_m\pi}{8(2m+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\phi_k g_{k,m}=f_m \tag{4.34}$$

Де $g_{k,m}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1\frac{T_{2m+1}(l)}{\sqrt{1-l^2}}\int_0^1\frac{a_3(t,\widetilde{\frac{2a}{\pi}arccos(l)})}{a_2}\frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dtdl$, $f_m=\int_{-1}^1\frac{T_{2m+1}(l)\widetilde{a_1(l)}}{\sqrt{1-l^2}}dl$ інтеграли відомих функцій.

4.1.7 Чисельні розрахунки

Наведені чисельні експеренти розглядаються для сталі (E = 200 ГПА, $\mu=0.25$).

Розглянута прямокунта область $0\le x\le 10$, $0\le y\le 15$, при функції навантаження $p(x)=(x-2.5)^2$. На малюнках (Рис: 4.2), (Рис: 4.3), (Рис: 4.4), (Рис: 4.5) представлені функкіі переміщень $u(x,y)$, $v(x,y)$ та напружень $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ відповідно.

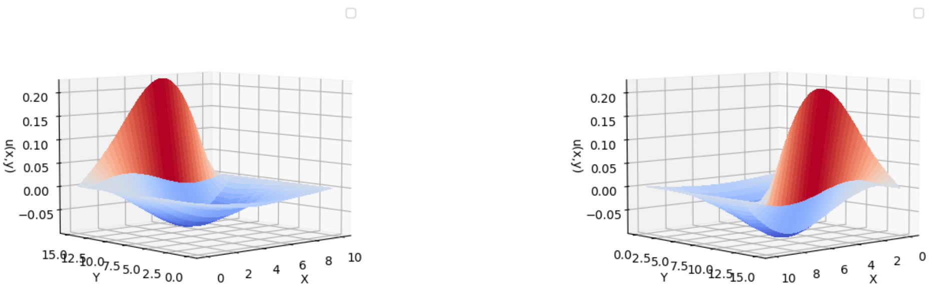

Рис. 4.2: Функція $u(x, y)$

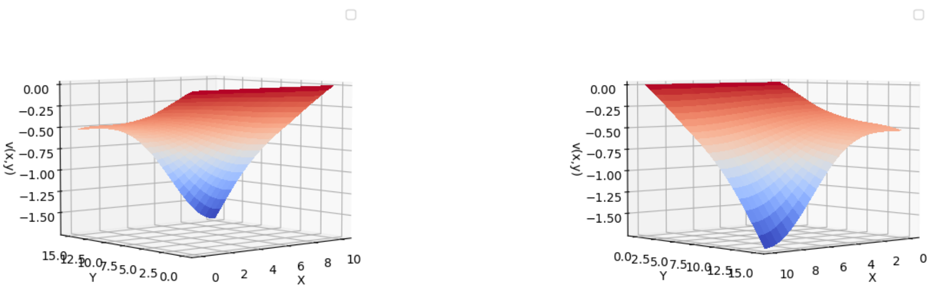

Рис. 4.3: Функція $v(x, y)$

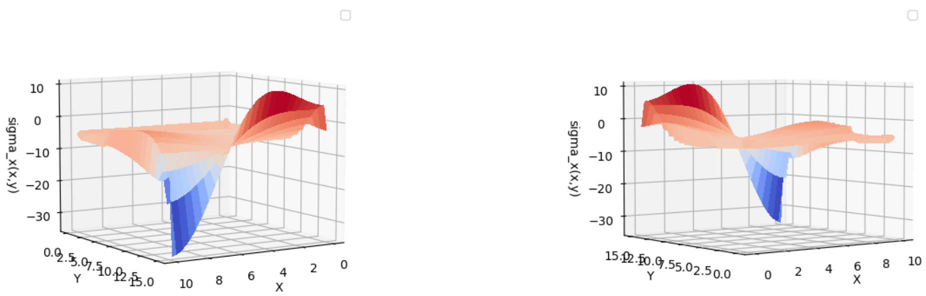

Рис. 4.4: Функція $\sigma_x(x, y)$

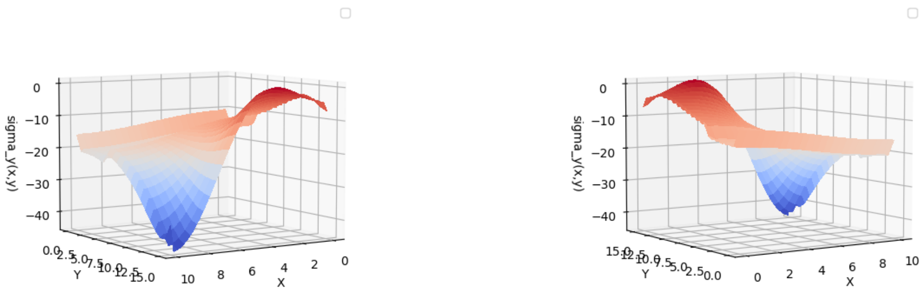

Рис. 4.5: Функція $\sigma_y(x, y)$

4.2 Динамічна задача теорії пружності для прямокутної області за умов другої основної задачі теорії пружності

4.2.1 Постановка задачі

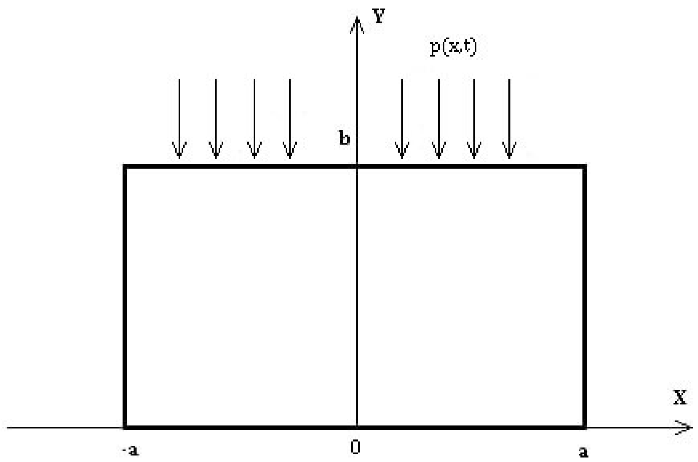

Рис. 4.6: Геометрія проблеми

Розглядається пружна сама прямокутна область (Рис: 3.6), яка займає облась, що описується у декартовій системі координат співвідношенням $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y, t)|_{y=b} = -p(x, t), \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{y=b} = 0 \tag{4.35}$$

де $p(x,t)$ відома функція. На бічних гранях виконується умова другої основної задачі теорії пружності

$$u(x,y,t)|_{x=\pm a} = 0, \quad v(x,y,t)|_{x=\pm a} = 0 \tag{4.36}$$

На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x,y,t)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{y=0} = 0 \tag{4.37}$$

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x \partial y}) = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2}) = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial t^2} \end{cases} \tag{4.38}$$

Будемо розглядати випадок гармонічних коливань, тому можемо представити функції у наступному вигляді:

$$u(x,y,t) = u(x,y)e^{i\omega t}, \quad v(x,y,t) = v(x,y)e^{i\omega t}, \quad p(x,t) = p(x)e^{i\omega t} \tag{4.39}$$

Таким чином отримаємо наступні рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}) = -\frac{\omega^2}{c_1^2}u(x,y) \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}) = -\frac{\omega^2}{c_2^2}v(x,y) \end{cases} \tag{4.40}$$

Також, щоб розв'язати поставлену задачу буде розглянута тільки половона прямокутної області $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ та використовуючи властивості симметрії граничні умови в результаті будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} \sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x,t), \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=b} = 0 \\ v(x,y)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=0} = 0 \\ u(x,y)|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=0} = 0 \\ u(x,y)|_{x=a} = 0, \quad v(x,y)|_{x=a} = 0 \end{cases} \tag{4.41}$$

4.2.2 Зведеня задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаєм інтегральне перетворення Фур'є по змінній x у до рівнянь (4.40) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y)sin(\alpha_n x) \\ v(x,y)cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{4.42}$$

Для цього помножим перше та друге рівняння (4.40) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруєм по змінній x на інтервалі $0 \leq x \leq a$. Покрокове інтегрування рівняння аналогічне розглянутого в попередній статичній задачі окрім того, що в обидвах рівняннях є додаткові елементи $\int_0^a \frac{\omega^2}{c_1^2} u(x,y) sin(\alpha_n x) dx = \frac{\omega^2}{c_1^2} u_n(y)$, $\int_0^a \frac{\omega^2}{c_2^2} v(x,y) cos(\alpha_n x) dx = \frac{\omega^2}{c_2^2} v_n(y)$.

Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) + (-\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) = 0 \\ (1+\mu_0) v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) + (-\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = -cos(\alpha_n) f(y) \end{cases} \tag{4.43}$$

Де $f(y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}|_{x=a}$ - невідома функція

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \left((2G+\lambda) v_n^{'}(y) + \alpha_n \lambda u_n(y)\right)|_{y=b} = -p_n \\ \left(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\right)|_{y=b} = 0 \\ v_n(y)|_{y=0} = 0 \\ \left(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\right)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{4.44}$$

Де $p_n = \int_0^a p(x) cos(\alpha_n x) dx$

4.2.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у простосторі трансформант, перепишмо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (4.43) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &L_2\left[Z_n(y)\right] = A * Z_n^{''}(y) + B * Z_n^{'}(y) + C * Z_n(y) \\ &L_2\left[Z_n(y)\right] = F_n(y) \end{aligned} \tag{4.45}$$

Де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix},$$

$$Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}, \quad F_n(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -cos(\alpha_n a) f(y) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (4.44) запишемо у наступному вигляді:

$$
\begin{aligned}
&U_i\left[Z_n(y)\right]=E_i * Z_n^{'}(b_i)+F_i * Z_n(b_i)\\
&U_i\left[Z_n(y)\right]=D_i
\end{aligned} \tag{4.46}
$$

Де $i=\overline{0,1}$, $b_0=b$, $b_1=0$,

$$
E_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2G+\lambda\end{pmatrix},\quad F_0=\begin{pmatrix}0 & -\alpha_n\\ \alpha_n\lambda & 0\end{pmatrix},
$$

$$
E_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad F_1=\begin{pmatrix}0 & -\alpha_n\\ 0 & 1\end{pmatrix},
$$

$$
D_0=\begin{pmatrix}0\\ -p_n\end{pmatrix},\quad D_1=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},
$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (4.45). Шукати її будем у наступному вигляді [4]:

$$
Y(y)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy}M^{-1}(s)ds \tag{4.47}
$$

Де $M(s)$ - характерестична матриця рівняння (4.45), а C - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умовни

$$
L_2\left[e^{sy} * I\right]=e^{sy} * M(s),\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{4.48}
$$

$$
\begin{aligned}
&L_2\left[e^{sy} * I\right]=e^{sy}\left(s^2A * I+sB * I+C * I\right)=\\
&=e^{sy}\begin{pmatrix}s^2-\alpha_n^2-\alpha_n^2\mu_0+\frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s\\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_1^2}\end{pmatrix}\Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
M(s)=\begin{pmatrix}s^2-\alpha_n^2-\alpha_n^2\mu_0+\frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s\\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_2^2}\end{pmatrix} \tag{4.49}
$$

Знайдемо тепер $M^{-1}(s)=\frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}$.

$$
\widetilde{M(s)}=\begin{pmatrix}s^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n\mu_0 s\\ -\alpha_n\mu_0 s & s^2-\alpha_n^2-\alpha_n^2\mu_0+\frac{\omega^2}{c_1^2}\end{pmatrix} \tag{4.50}
$$

$$det[M(s)] = \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{vmatrix} =$$
$$= (s - s_1)(s + s_1)(s - s_2)(s + s_2) \qquad (4.51)$$

Де s_1, s_2, $-s_1$, $-s_2$ корені $det[M(s)] = 0$, детальне знаходження яких наведено в (Додаток В).

Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy} M^{-1}(s)ds = \frac{2\pi i}{2\pi i(1+\mu_0)}\sum_{i=1}^{4} Res\left[e^{sy}\frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}\right] =$$
$$= (Y_0(y) + Y_1(y) + Y_2(y) + Y_3(y))$$

Знайдем $Y_0(y)$:

$$Y_0(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s+s_1)(s-s_2)(s+s_2)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=s_1} =$$
$$= \frac{e^{s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}\begin{pmatrix} s_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n\mu_0 s_1 \\ -\alpha_n\mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \qquad (4.52)$$

Знайдем $Y_1(y)$:

$$Y_1(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-s_1)(s-s_2)(s+s_2)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=-s_1} =$$
$$= -\frac{e^{-s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}\begin{pmatrix} s_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n\mu_0 s_1 \\ \alpha_n\mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \qquad (4.53)$$

Знайдем $Y_2(y)$:

$$Y_2(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s+s_2)(s-s_1)(s+s_1)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=s_2} =$$
$$= \frac{e^{s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}\begin{pmatrix} s_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n\mu_0 s_2 \\ -\alpha_n\mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \qquad (4.54)$$

Знайдем $Y_3(y)$:

$$Y_3(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-s_2)(s-s_1)(s+s_1)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=-s_2} =$$
$$= -\frac{e^{-s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}\begin{pmatrix} s_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n\mu_0 s_2 \\ \alpha_n\mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \qquad (4.55)$$

4.2.4 Побудова матриці-функції Гріна

Для побудови матриці-функції Гріна спочатку знайдем тепер фундамельні бизисні матриці $\Psi_0(y)$, $\Psi_1(y)$, шукати їх будем у наступному вигляді:

$$\Psi_i(y) = (Y_0(y) + Y_1(y)) * C_1^i + (Y_2(y) + Y_3(y)) * C_2^i \tag{4.56}$$

Залишилось знайти невідомі матриці коєфіцієнтів C_1^0, C_2^0, C_1^1, C_2^1 використовуючи граничні умови (4.46). Покрокове знаходження яких наведено у (Додаток C). Для подальшого введемо наступні позначення для елементів матриць $\Psi_0(y)$, $\Psi_1(y)$:

$$\Psi_0(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^0(y) & \Psi_2^0(y) \\ \Psi_3^0(y) & \Psi_4^0(y) \end{pmatrix}, \quad \Psi_1(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^1(y) & \Psi_2^1(y) \\ \Psi_3^1(y) & \Psi_4^1(y) \end{pmatrix}$$

Таким чином матрицю Гріна можемо записати у вигляді:

$$G(y,\xi) = \begin{cases} \Psi_0(y) * \Psi_1(\xi), & 0 \leq y < \xi \\ \Psi_1(y) * \Psi_0(\xi), & \xi < y \leq b \end{cases} \tag{4.57}$$

Для данної матриці Гріна виконано усі властивості, зокрема виконані однорідні граничні умови (4.46) та однорідні рівняння рівноваги у просторі трансформант (4.45):

$$L_2\left[G(y,\xi)\right] = 0$$

$$U_0\left[G(y,\xi)\right] = 0, \quad U_1\left[G(y,\xi)\right] = 0,$$

Введемо наступні позначення $G(y,\xi) = \begin{pmatrix} g_1(y,\xi) & g_2(y,\xi) \\ g_3(y,\xi) & g_4(y,\xi) \end{pmatrix}$. Враховуючи це, шукані функції перемішень у просторі трансформант можна записати у наступному вигляді

$$u_n(y) = -\int_0^b g_2(y,\xi) f(\xi) cos(\alpha_n a) d\xi - \psi_0^2(y) p_n \tag{4.58}$$

$$v_n(y) = -\int_0^b g_4(y,\xi) f(\xi) cos(\alpha_n a) d\xi - \psi_0^4(y) p_n \tag{4.59}$$

4.2.5 Побудова розв'язоку вихідної задачі

Викорустовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (4.58), (4.58), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{4.60}$$

$$v(x,y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{4.61}$$

Знайдем тепер $v_0(y)$ розглянувши задачу у просторі трансформант (4.43), (4.44) при $n = 0$, $\alpha_n = 0$. Детальний розв'язок якої наведено в (Додаток D). Тоді остаточний розв'язок $v(x,y)$ буде мати вигляд

$$v(x,y) = -\frac{1}{a(1+\mu_0)}\int_0^b g(y,\xi)f(\xi)d\xi - \psi_0(y)\frac{p_0}{a(2G+\lambda)}$$
$$-\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_4(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right]d\xi + \psi_0^4(y)p_n\right)cos(\alpha_n x) \tag{4.62}$$

4.2.6 Розв'язок сінгулярного інтегрального рівняння

Залишилось знайти невідому функцію $f(y)$ для якої побудуєм інтегральне рівнняяння використовуючи граничну умову $\sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x)$.

$$(2G+\lambda)\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}|_{y=b} + \lambda\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}|_{y=b} = -p(x) \Leftrightarrow$$

$$-\frac{(2G+\lambda)}{a(1+\mu_0)}\int_0^b \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b}f(\xi)d\xi - \psi_0'(b)\frac{p_0}{a} -$$
$$-\frac{2(2G+\lambda)}{a}\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_4(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right]d\xi + \psi_0^4(y)p_n\right)cos(\alpha_n x)|_{y=b} -$$
$$-\frac{2\lambda}{a}\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_2(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right]d\xi + \psi_0^2(y)p_n\right)sin(\alpha_n x)|_{y=b} = -p(x)$$

Введемо позначення:

$$a_1(x) = ap(x) - 2(2G+\lambda)\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_0^4(y)p_n cos(\alpha_n x)|_{y=b} -$$
$$-2\lambda\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_0^2(y)p_n sin(\alpha_n x)|_{y=b} - \psi_0'(b)p_0 \tag{4.63}$$

Враховуючи його отримаємо наступне інтегральне рівняння відносно $f(\xi)$:

$$\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\int_0^b \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b} f(\xi)d\xi +$$
$$+\int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} cos(\alpha_n a)cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y}+\alpha_n\lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b}$$
$$f(\xi)d\xi = a_1(x) \tag{4.64}$$

Розглянемо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} cos(\alpha_n a)cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y}+\alpha_n\lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b} =$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\alpha_n^{-1}e^{\alpha_n(\xi-b)}cos(\alpha_n x)\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y}+\lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b} =$$
$$=\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\alpha_n^{-1}e^{\alpha_n(\xi-b)}cos(\alpha_n x)\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y}+\lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b} +$$
$$+a_2\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)+$$
$$+a_2\sum_{n=0}^{N}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)-$$
$$-a_2\sum_{n=0}^{N}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)=$$
$$=a_2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)+a_3(\xi,x)$$

Де:

$$a_2=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y}+\lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b},$$

$$a_3(\xi,x)=\sum_{n=1}^{N} cos(\alpha_n a)cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y}+\alpha_n\lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b}-$$
$$-a_2\sum_{n=0}^{N}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)$$

Використовуючи формулу 5.4.12.8 [6] отримаємо:

$$a_2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) + a_3(\xi, x) =$$
$$= \frac{a_2}{4} ln \left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) + cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) - cos(\frac{\pi}{2a}x)} \right] + a_3(\xi, x)$$

Повернемося до інтегралу

$$\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)} \int_0^b \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b} f(\xi) d\xi +$$
$$+ \int_0^b \left(\frac{a_2}{4} ln \left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) + cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) - cos(\frac{\pi}{2a}x)} \right] + a_3(\xi, x) \right) f(\xi) d\xi =$$
$$= \int_0^b (\frac{a_2}{4} ln \left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) + cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) - cos(\frac{\pi}{2a}x)} \right] + a_3(\xi, x) +$$
$$+ \frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)} \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b}) f(\xi) d\xi =$$
$$= \begin{bmatrix} t = \frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))-1}{1-ch(\frac{\pi b}{2a})} \\ sh(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))d\xi = -\frac{2a}{\pi}(ch(\frac{\pi b}{2a})-1)dt \\ \xi = 0, \quad t=1 \\ \xi = b, \quad t = 0 \\ \xi = b - \frac{2a}{\pi} arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1) \end{bmatrix} =$$
$$= a_5 \int_0^b a_4(t) \left(\frac{a_2}{4} ln \left[\frac{t + cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t - cos(\frac{\pi}{2a}x)} \right] + \widetilde{a_3(t,x)} \right) \widetilde{f(t)} dt \tag{4.65}$$

Де:

$$\widetilde{a_3(t,x)} = a_3 \left(b - \frac{2a}{\pi} arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1), x \right) +$$
$$+ \frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)} \frac{\partial g(y, b - \frac{2a}{\pi} arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1))}{\partial y}|_{y=b}$$
$$f(t) = f(b - \frac{2a}{\pi} arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1))$$
$$a_4(t) = \frac{1}{sh\left(arch\left[(ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1\right]\right)}$$
$$a_5 = 2a(ch(\frac{\pi b}{2a})-1)$$

Таким чином отримаємо наступне інтегральне рівняння:

$$\frac{a_5}{\pi} \int_0^b a_4(t) \left(\frac{a_2}{4} ln \left[\frac{t + cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t - cos(\frac{\pi}{2a}x)} \right] + \widetilde{a_3(t,x)} \right) \widetilde{f(t)} dt = a_1(x) \tag{4.66}$$

Розв'язок якого будемо шукати у наступному вигляді:

$$\widetilde{f(t)} = \frac{1}{a_2 a_4(t)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k T_{2k+1}(t) \tag{4.67}$$

Де φ_k - невідомі коефіцієнти, $T_{2k+1}(t)$ - поліном Чебишева першого роду.

Таким чином отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k}{4} \frac{1}{\pi} \int_0^1 ln \left[\frac{t + cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t - cos(\frac{\pi}{2a}x)} \right] \frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\widetilde{a_3(t,x)}}{a_2} \frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{a_1(x)}{a_5} \Leftrightarrow$$

Використовуючи формулу B.1.9 [5]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \frac{T_{2k+1}(cos(\frac{\pi}{2a}x))}{4(2k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\widetilde{a_3(t,x)}}{a_2} \frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{a_1(x)}{a_5} \tag{4.68}$$

Введем позначення

$$l = cos(\frac{\pi}{2a}x), \quad \widetilde{a_1(l)} = \frac{a_1(\frac{2a}{\pi}arccos(l))}{a_5}$$

Помножимо обидві частини рівняння (4.68) скалярно на $\frac{T_{2m+1}(l)}{\sqrt{1-l^2}}$ та проінтегруєм по змінній l на інтервалі $(-1;1)$. Та використовуючи формулу 2.3.2 [5] отримаєм наступне бескінечну алгебричну систему відносно невідомих коефіцієнтів φ_k, яка в подальшому буде розв'язуватись методом редукції.

$$\frac{\phi_m \pi}{8(2m+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k g_{k,m} = f_m \tag{4.69}$$

Де $g_{k,m} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_{2m+1}(l)}{\sqrt{1-l^2}} \int_0^1 \frac{\widetilde{a_3(t, \frac{2a}{\pi}arccos(l))}}{a_2} \frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt dl$, $f_m = \int_{-1}^{1} \frac{T_{2m+1}(l) \widetilde{a_1(l)}}{\sqrt{1-l^2}} dl$ інтеграли відомих функцій.

4.2.7 Чисельні розрахунки

Наведені чисельні эксперенти розглядаються для сталі ($E = 200$ ГПА, $\mu = 0.25$).

Розглянута прямокунта область $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 15$, при функції навантаження $p(x) = (x - 2.5)^2$.

4.3 Висновки до четвертого розділу розділу

Отримано точне розв'язок статичної та динамічної задачі для прямокутної області за умов другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях. Дослідженно поля переміщень та напружень для різних видів навантаження і розмірів прямокутної області.

Література

[1] Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов разрезов тонких включений и подкреплений. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 344 с.

[2] Попов Г.Я. Точные решения некоторых краевых задач механики деформируемого твѐрдого тела. Одесса: Астропринт, 2013. 424 с.

[3] Popov G. On the method of orthogonal polynomials in contact problems of the theory of elasticity. Journal of Applied Mathematics and Mechanics (1969). Volume 33, Issue 3, pp. 503-517

[4] Gantmakher F. R. (1998) The theory of matrices. AMS Chelsea Publishing, Providence, Rohde Island.

[5] Попов Г. Я., Реут В. В., Моісеєв М. Г., Вайсфельд Н. Д. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів. Одесса: Астропринт, 2010. 120 с.

[6] Прудников А.П.,Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды специальные функции. В 3 т. Т 1. Элементарные функции. 2-е издание, исправленное. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 632 с.

[7] D. Nerukh, O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2019) Mixed plain boundary value problem of elasticity for a rectangular domain. 25-th International Conference Engineering Mechanics. 2019, May 13-16, Svratka, Czech Republic. p. 255

[8] O. V. Pozhylenkov (2019) The stress state of a rectangular elastic domain. Researches in Mathematics and Mechanics, Volume 24, Issue 2(34), pp. 88-96

[9] Пожиленков О. В. Вайсфельд Н. Д. (2019) Мішана крайова задача теорії пружності для прямокутної області. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур, випуск 5, Львів, ст. 30-32

[10] D. Nerukh, O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld 25-th international conference «Engineering Mechanics 2019» // Czech Republic, Svratka, 2019

[11] Пожиленков О. В., Вайсфельд Н. Д. X Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» // Львів, 2019

[12] O. Pozhyenkov, N. Vaysfeld (2020) Stress state of a rectangular domain with the mixed boundary conditions. Procedia Structural Integrity, Volume 28, pp. 458-463

[13] O. Pozhyenkov, N. Vaysfeld «1st Virtual European Conference on Fracture» // Italy, 2020

[14] O. Pozhyenkov, N. Vaysfeld (2021) Stress state of an elastic rectangular domain under steady load. Procedia Structural Integrity, Volume 33, pp. 385-390

[15] O. Pozhyenkov, N. Vaysfeld «26th International Conference on Fracture and Structural Integrity» // Italy, Turin, 2021

[16] O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2022) Dynamic mixed problem of elasticity for a rectangular domain. Recent trends in Wave Mechanics and Vibrations, pp. 211-218

[17] O. Pozhyenkov, N. Vaysfeld «10th International Conference on Wave Mechanics and Vibrations» // Portugal, Lisbon, 2022

Додаток B

ЗНАХОДЖЕННЯ КОРЕНІВ РІВНЯННЯ $det[M(s)] = 0$

Знайдемо корені $det[M(s)] = 0$

$$det[M(s)] = \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{vmatrix} =$$

$$= (s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) + (\alpha_n\mu_0 s)^2 =$$

$$= s^4 + s^4\mu_0 - s^2\alpha_n^2 + s^2\frac{\omega^2}{c_2^2} - s^2\alpha_n^2 - s^2\alpha_n^2\mu_0 + \alpha_n^4 - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_2^2} - s^2\alpha_n^2\mu_0 -$$

$$- s^2\alpha_n^2\mu_0 + \alpha_n^4\mu_0 - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_2^2} + s^2\frac{\omega^2}{c_1^2} + s^2\mu_0\frac{\omega^2}{c_1^2} - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^4}{c_1^2c_2^2} + s^2\alpha_n^2\mu_0^2 =$$

$$= (1+\mu_0)s^4 + (-2\alpha_n^2 - 2\alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_2^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2} + \mu_0\frac{\omega^2}{c_1^2})s^2 + (\alpha_n^4 - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_2^2} +$$

$$+ \alpha_n^4\mu_0 - \alpha_n^2\mu_0\frac{\omega^2}{c_2^2} - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^4}{c_1^2c_2^2})$$

Введемо наступні позначення:

$$a_1 = -2\alpha_n^2 - 2\alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_2^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2} + \mu_0\frac{\omega^2}{c_1^2}$$
$$a_2 = \alpha_n^4 - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_2^2} + \alpha_n^4\mu_0 - \alpha_n^2\mu_0\frac{\omega^2}{c_2^2} - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^4}{c_1^2c_2^2}$$

Враховучи введені позначення отримаємо наступне рівняння:

$$(1+\mu_0)s^4 + a_1s^2 + a_2 = 0$$

Таким чином отримаємо наступні корені рівняння:

$$s_1 = \sqrt{\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4(1+\mu_0)a_2}}{2(1+\mu_0)}}$$
$$s_2 = -\sqrt{\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4(1+\mu_0)a_2}}{2(1+\mu_0)}}$$
$$s_3 = \sqrt{\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4(1+\mu_0)a_2}}{2(1+\mu_0)}}$$
$$s_4 = -\sqrt{\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4(1+\mu_0)a_2}}{2(1+\mu_0)}}$$

У випадку статичної задачі коли $\omega = 0$ отримаємо наступні рівняння:

$$(1+\mu_0)(s^4 - 2\alpha_n^2s^2 + \alpha_n^4) = 0$$

Таким чином отримаємо наступні корені

$$s_{1,2} = \alpha_n$$
$$s_{3,4} = -\alpha_n$$

Додаток С

ЗНАХОДЖЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ БАЗИСНИХ МАТРИЦЬ $\Psi_i(y)$, $i=\overline{0,1}$

Для знаходження фундаентальних базісних матриць $\Psi_i(y)$ випишемо умови за яких будемо шукати коєфіцієти C_k^i, $i=\overline{0,1}$, $k=\overline{1,2}$

$$U_0\left[\Psi_0(y)\right]=I, \quad U_1\left[\Psi_0(y)\right]=0 \tag{Ап.С. 1}$$

$$U_0\left[\Psi_1(y)\right]=0, \quad U_1\left[\Psi_1(y)\right]=I, \quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$U_0\left[\Psi_i(y)\right]=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2G+\lambda\end{pmatrix}*\Psi_i'(b)+\begin{pmatrix}0 & -\alpha_n\\ \alpha_n\lambda & 0\end{pmatrix}*\Psi_i(b)$$

$$U_1\left[\Psi_i(y)\right]=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}*\Psi_i'(0)+\begin{pmatrix}0 & -\alpha_n\\ 0 & 1\end{pmatrix}*\Psi_i(0)$$

Введемо наступні позначення:

$$C_1^i=\begin{pmatrix}d_1^i & d_2^i\\ d_3^i & d_4^i\end{pmatrix}, \quad C_2^i=\begin{pmatrix}f_1^i & f_2^i\\ f_3^i & f_4^i\end{pmatrix}, \tag{Ап.С. 2}$$

Випадок динамічної задачі

Випадку статичної задачі випишемо значення елементів матриць $\Psi_i(y)$, $\Psi_i'(y)$, враховуючи позначення (Ап.С. 2).

Елементи матриці $\Psi_i(y)$:

$$\Psi_i(y)_{1,1}=\frac{1}{2s_1(s_1^2-s_2^2)}[(s_1^2+s_1^2\mu_0-\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1y}-e^{-s_1y})d_1^i+$$
$$+(s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y}+e^{-s_1y})d_3^i]+[(s_2^2+s_2^2\mu_0-\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2y}-e^{-s_2y})f_1^i+$$
$$+(s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y}+e^{-s_2y})f_3^i]\frac{1}{2s_2(s_2^2-s_1^2)}$$

$$\Psi_i(y)_{1,2}=\frac{1}{2s_1(s_1^2-s_2^2)}[(s_1^2+s_1^2\mu_0-\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1y}-e^{-s_1y})d_2^i+$$
$$+(s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y}+e^{-s_1y})d_4^i]+[(s_2^2+s_2^2\mu_0-\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2y}-e^{-s_2y})f_2^i+$$
$$+(s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y}+e^{-s_2y})f_4^i]\frac{1}{2s_2(s_2^2-s_1^2)}$$

$$\Psi_i(y)_{2,1} = \frac{1}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}[(-s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_1^i +$$
$$+ (s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_3^i] + [(-s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_1^i +$$
$$+ (s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_3^i]\frac{1}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}$$

$$\Psi_i(y)_{2,2} = \frac{1}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}[(-s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_2^i +$$
$$+ (s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_4^i] + [(-s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_2^i +$$
$$+ (s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_4^i]\frac{1}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}$$

Елементи матриці $\Psi_i^{'}(y)$:

$$\Psi_i^{'}(y)_{1,1} = \frac{1}{2(s_1^2 - s_2^2)}[(s_1^2 + s_1^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_1^i +$$
$$+ (s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_3^i] + [(s_2^2 + s_2^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_1^i +$$
$$+ (s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_3^i]\frac{s_2}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}$$

$$\Psi_i^{'}(y)_{1,2} = \frac{1}{2(s_1^2 - s_2^2)}[(s_1^2 + s_1^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_2^i +$$
$$+ (s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_4^i] + [(s_2^2 + s_2^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_2^i +$$
$$+ (s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_4^i]\frac{s_2}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}$$

$$\Psi_i^{'}(y)_{2,1} = \frac{1}{2(s_1^2 - s_2^2)}[(-s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_1^i +$$
$$+ (s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_3^i] + [(-s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_1^i +$$
$$+ (s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_3^i]\frac{s_2}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}$$

$$
\Psi_i^{'}(y)_{2,2} = \frac{1}{2(s_1^2 - s_2^2)}[(-s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_2^i +
$$

$$
+ (s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_4^i] + [(-s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_2^i +
$$

$$
+ (s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_4^i]\frac{s_2}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}
$$

Введемо наступні позначення:

$$
\begin{aligned}
a_1(y) &= \frac{(s_1^2 + s_1^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1y} - e^{-s_1y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}, \\
a_2(y) &= \frac{(s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} + e^{-s_1y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \\
a_3(y) &= \frac{(s_2^2 + s_2^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2y} - e^{-s_2y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}, \\
a_4(y) &= \frac{(s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} + e^{-s_2y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \\
a_5(y) &= \frac{(-s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} - e^{-s_1y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}, \\
a_6(y) &= \frac{(s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1y} + e^{-s_1y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \\
a_7(y) &= \frac{(-s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} - e^{-s_2y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}, \\
a_8(y) &= \frac{(s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2y} + e^{-s_2y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \\
a_9(y) &= \frac{(s_1^2 + s_1^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1y} + e^{-s_1y})}{2(s_1^2 - s_2^2)}, \\
a_{10}(y) &= \frac{(s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} - e^{-s_1y})}{2(s_1^2 - s_2^2)} \\
a_{11}(y) &= \frac{(s_2^2 + s_2^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2y} + e^{-s_2y})}{2(s_2^2 - s_1^2)}, \\
a_{12}(y) &= \frac{(s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} - e^{-s_2y})}{2(s_2^2 - s_1^2)} \\
a_{13}(y) &= \frac{(-s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} + e^{-s_1y})}{2(s_1^2 - s_2^2)}, \\
a_{14}(y) &= \frac{(s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1y} - e^{-s_1y})}{2(s_1^2 - s_2^2)} \\
a_{15}(y) &= \frac{(-s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} + e^{-s_2y})}{2(s_2^2 - s_1^2)}, \\
a_{16}(y) &= \frac{(s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2y} - e^{-s_2y})}{2(s_2^2 - s_1^2)}
\end{aligned}
\tag{Ап.С. 3}
$$

Випадок статичної задачі

Випадку статичної задачі випишемо значення елементів матриць $\Psi_i(y)$, $\Psi_i^{'}(y)$, враховуючи позначення (Ап.С. 2).

Елементи матриці $\Psi_i(y)$:

$$\Psi_i(y)_{1,1} = \frac{e^{\alpha_n y}}{(1+\mu_0)4\alpha_n}\left[(y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0)d_1^i + (y\alpha_n\mu_0)d_3^i\right] +$$
$$+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1+\mu_0)4\alpha_n}\left[(y\alpha_n\mu_0 - 2 - \mu_0)f_1^i + (-y\alpha_n\mu_0)f_3^i\right]$$

$$\Psi_i(y)_{1,2} = \frac{e^{\alpha_n y}}{(1+\mu_0)4\alpha_n}\left[(y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0)d_2^i + (y\alpha_n\mu_0)d_4^i\right] +$$
$$+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1+\mu_0)4\alpha_n}\left[(y\alpha_n\mu_0 - 2 - \mu_0)f_2^i + (-y\alpha_n\mu_0)f_4^i\right]$$

$$\Psi_i(y)_{2,1} = \frac{e^{\alpha_n y}}{(1+\mu_0)4\alpha_n}\left[(-y\alpha_n\mu_0)d_1^i + (-y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0)d_3^i\right] +$$
$$+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1+\mu_0)4\alpha_n}\left[(y\alpha_n\mu_0)f_1^i + (-y\alpha_n\mu_0 - 2 - \mu_0)f_3^i\right]$$

$$\Psi_i(y)_{2,2} = \frac{e^{\alpha_n y}}{(1+\mu_0)4\alpha_n}\left[(-y\alpha_n\mu_0)d_2^i + (-y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0)d_4^i\right] +$$
$$+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1+\mu_0)4\alpha_n}\left[(y\alpha_n\mu_0)f_2^i + (-y\alpha_n\mu_0 - 2 - \mu_0)f_4^i\right]$$

Елементи матриці $\Psi_i^{'}(y)$:

$$\Psi_i^{'}(y)_{1,1} = \frac{e^{\alpha_n y}}{(1+\mu_0)4}\left[(y\alpha_n\mu_0 + 2 + 2\mu_0)d_1^i + (y\alpha_n\mu_0 + \mu_0)d_3^i\right] +$$
$$+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1+\mu_0)4}\left[(-y\alpha_n\mu_0 + 2 + 2\mu_0)f_1^i + (y\alpha_n\mu_0 - \mu_0)f_3^i\right]$$

$$\Psi_i^{'}(y)_{1,2} = \frac{e^{\alpha_n y}}{(1+\mu_0)4}\left[(y\alpha_n\mu_0 + 2 + 2\mu_0)d_2^i + (y\alpha_n\mu_0 + \mu_0)d_4^i\right] +$$
$$+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1+\mu_0)4}\left[(-y\alpha_n\mu_0 + 2 + 2\mu_0)f_2^i + (y\alpha_n\mu_0 - \mu_0)f_4^i\right]$$

$$\Psi_i^{'}(y)_{2,1} = \frac{e^{\alpha_n y}}{(1+\mu_0)4}\left[(-y\alpha_n\mu_0 - \mu_0)d_1^i + (-y\alpha_n\mu_0 + 2)d_3^i\right] +$$
$$+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1+\mu_0)4}\left[(-y\alpha_n\mu_0 + \mu_0)f_1^i + (y\alpha_n\mu_0 + 2)f_3^i\right]$$

$$\Psi_i'(y)_{2,2} = \frac{e^{\alpha_n y}}{(1+\mu_0)4}\left[(-y\alpha_n\mu_0 - \mu_0)d_2^i + (-y\alpha_n\mu_0 + 2)d_4^i\right] + $$
$$+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1+\mu_0)4}\left[(-y\alpha_n\mu_0 + \mu_0)f_2^i + (y\alpha_n\mu_0 + 2)f_4^i\right]$$

Введемо наступні позначення:

$$a_1(y) = \frac{e^{\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0)}{(1+\mu_0)4\alpha_n}, \quad a_2(y) = \frac{e^{\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0)}{(1+\mu_0)4\alpha_n} \qquad \text{(Ап.С. 4)}$$
$$a_3(y) = \frac{e^{-\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0 - 2 - \mu_0)}{(1+\mu_0)4\alpha_n}, \quad a_4(y) = \frac{e^{-\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0)}{(1+\mu_0)4\alpha_n}$$
$$a_5(y) = \frac{e^{\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0)}{(1+\mu_0)4\alpha_n}, \quad a_6(y) = \frac{e^{\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0)}{(1+\mu_0)4\alpha_n}$$
$$a_7(y) = \frac{e^{-\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0)}{(1+\mu_0)4\alpha_n}, \quad a_8(y) = \frac{e^{-\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0 - 2 - \mu_0)}{(1+\mu_0)4\alpha_n}$$
$$a_9(y) = \frac{e^{\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0 + 2 + 2\mu_0)}{(1+\mu_0)4}, \quad a_{10}(y) = \frac{e^{\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0 + \mu_0)}{(1+\mu_0)4}$$
$$a_{11}(y) = \frac{e^{-\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0 + 2 + 2\mu_0)}{(1+\mu_0)4}, \quad a_{12}(y) = \frac{e^{-\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0 - \mu_0)}{(1+\mu_0)4}$$
$$a_{13}(y) = \frac{e^{\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0 - \mu_0)}{(1+\mu_0)4}, \quad a_{14}(y) = \frac{e^{\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0 + 2)}{(1+\mu_0)4}$$
$$a_{15}(y) = \frac{e^{-\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0 + \mu_0)}{(1+\mu_0)4}, \quad a_{16}(y) = \frac{e^{-\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0 + 2)}{(1+\mu_0)4}$$

Загальна схема розв'язку системи алгребричних рівнянь

Враховуючи введені позначення (Ап.С. 3), (Ап.С. 4) складемо систему алгебричних рівнянь використовуючи граничні умови (Ап.С. 1). Запишемо елементи вихідної матриці $U_0\left[\Psi_i(y)\right]$:

$$U_0\left[\Psi_i(y)\right]_{1,1} = (a_9(b) - \alpha_n a_5(b))d_1^i + (a_{10}(b) - \alpha_n a_6(b))d_3^i +$$
$$+ (a_{11}(b) - \alpha_n a_7(b))f_1^i + (a_{12}(b) - \alpha_n a_8(b))f_3^i$$

$$U_0\left[\Psi_i(y)\right]_{1,2} = (a_9(b) - \alpha_n a_5(b))d_2^i + (a_{10}(b) - \alpha_n a_6(b))d_4^i +$$
$$+ (a_{11}(b) - \alpha_n a_7(b))f_2^i + (a_{12}(b) - \alpha_n a_8(b))f_4^i$$

$$U_0\left[\Psi_i(y)\right]_{2,1} = ((2G+\lambda)a_{13}(b) + \alpha_n\lambda a_1(b))d_1^i +$$
$$+ ((2G+\lambda)a_{14}(b) + \alpha_n\lambda a_2(b))d_3^i + ((2G+\lambda)a_{15} + \alpha_n\lambda a_3(b))f_1^i +$$
$$+ ((2G+\lambda)a_{16}(b) + \alpha_n\lambda a_4(b))f_3^i$$

$$U_0\left[\Psi_i(y)\right]_{2,2} = ((2G+\lambda)a_{13}(b) + \alpha_n\lambda a_1(b))d_2^i +$$
$$+((2G+\lambda)a_{14}(b) + \alpha_n\lambda a_2(b))d_4^i + ((2G+\lambda)a_{15} + \alpha_n\lambda a_3(b))f_2^i +$$
$$+((2G+\lambda)a_{16}(b) + \alpha_n\lambda a_4(b))f_4^i$$

Запишемо елементи вихідної матриці $U_1\left[\Psi_i(y)\right]$:

$$U_1\left[\Psi_i(y)\right]_{1,1} = (a_9(0) - \alpha_n a_5(0))d_1^i + (a_{10}(0) - \alpha_n a_6(0))d_3^i +$$
$$+(a_{11}(0) - \alpha_n a_7(0))f_1^i + (a_{12}(0) - \alpha_n a_8(0))f_3^i$$

$$U_1\left[\Psi_i(y)\right]_{1,2} = (a_9(0) - \alpha_n a_5(b))d_2^i + (a_{10}(0) - \alpha_n a_6(0))d_4^i +$$
$$+(a_{11}(0) - \alpha_n a_7(0))f_2^i + (a_{12}(0) - \alpha_n a_8(0))f_4^i$$

$$U_1\left[\Psi_i(y)\right]_{2,1} = a_5(0)d_1^i + a_6(0)d_3^i + a_7(0)f_1^i + a_8(0)f_3^i$$

$$U_1\left[\Psi_i(y)\right]_{2,2} = a_5(0)d_2^i + a_6(0)d_4^i + a_7(0)f_2^i + a_8(0)f_4^i$$

Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}
&b_1 = (a_9(b) - \alpha_n a_5(b)), \quad b_2 = (a_{10}(b) - \alpha_n a_6(b))\\
&b_3 = (a_{11}(b) - \alpha_n a_7(b)), \quad b_4 = (a_{12}(b) - \alpha_n a_8(b))\\
&b_5 = ((2G+\lambda)a_{13}(b) + \alpha_n\lambda a_1(b)), \quad b_6 = ((2G+\lambda)a_{14}(b) + \alpha_n\lambda a_2(b))\\
&b_7 = ((2G+\lambda)a_{15} + \alpha_n\lambda a_3(b)), \quad b_8 = ((2G+\lambda)a_{16}(b) + \alpha_n\lambda a_4(b))\\
&b_9 = (a_9(0) - \alpha_n a_5(0)), \quad b_{10} = (a_{10}(0) - \alpha_n a_6(0))\\
&b_{11} = (a_{11}(0) - \alpha_n a_7(0)), \quad b_{12} = (a_{12}(0) - \alpha_n a_8(0))\\
&b_{13} = a_5(0), \quad b_{14} = a_6(0)\\
&b_{15} = a_7(0), \quad b_{16} = a_8(0)
\end{aligned}$$

Враховучи останнє випишемо системи відностно невідомих коєфіцієнтів d_k^i, f_k^i, $i = \overline{0,1}$, $k = \overline{1,4}$

$$\begin{cases} b_1 d_1^0 + b_2 d_3^0 + b_3 f_1^0 + b_4 f_3^0 = 1\\ b_5 d_1^0 + b_6 d_3^0 + b_7 f_1^0 + b_8 f_3^0 = 0\\ b_9 d_1^0 + b_{10} d_3^0 + b_{11} f_1^0 + b_{12} f_3^0 = 0\\ b_{13} d_1^0 + b_{14} d_3^0 + b_{15} f_1^0 + b_{16} f_3^0 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} b_1 d_2^0 + b_2 d_4^0 + b_3 f_2^0 + b_4 f_4^0 = 0\\ b_5 d_2^0 + b_6 d_4^0 + b_7 f_2^0 + b_8 f_4^0 = 1\\ b_9 d_2^0 + b_{10} d_4^0 + b_{11} f_2^0 + b_{12} f_4^0 = 0\\ b_{13} d_2^0 + b_{14} d_4^0 + b_{15} f_2^0 + b_{16} f_4^0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 d_1^1 + b_2 d_3^1 + b_3 f_1^1 + b_4 f_3^1 = 0\\ b_5 d_1^1 + b_6 d_3^1 + b_7 f_1^1 + b_8 f_3^1 = 0\\ b_9 d_1^1 + b_{10} d_3^1 + b_{11} f_1^1 + b_{12} f_3^1 = 1\\ b_{13} d_1^1 + b_{14} d_3^1 + b_{15} f_1^1 + b_{16} f_3^1 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} b_1 d_2^1 + b_2 d_4^1 + b_3 f_2^1 + b_4 f_4^1 = 0\\ b_5 d_2^1 + b_6 d_4^1 + b_7 f_2^1 + b_8 f_4^1 = 0\\ b_9 d_2^1 + b_{10} d_4^1 + b_{11} f_2^1 + b_{12} f_4^1 = 0\\ b_{13} d_2^1 + b_{14} d_4^1 + b_{15} f_2^1 + b_{16} f_4^1 = 1 \end{cases}$$

Додаток D

ЗНАХОДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ $v_0(y)$ НЕОДНОРІДНОЇ ЗАДАЧІ

Випадок динамічної задачі

Знайдем $v_0(y)$ розглянувши задачу у просторі трансформант (2.9), (2.10) при $n = 0$, $\alpha_n = 0$. Отримаємо наступну задачу відносно $v_0(y)$:

$$v_0''(y) + \frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)} v_0(y) = \frac{f(y)}{1+\mu_0}$$

Де $f(y) = (\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)) - \frac{\mu_0}{(1+\mu_0)}(\chi_3'(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1'(y))$.
Та граничні умови:

$$(2G+\lambda)v_0'(b) = -p_0, \quad v_0(0) = 0, \quad p_0 = \int_0^a p(x)dx$$

Спочатку знайдем фундаментальну базисну систему розв'язків задачі $\psi_0(y)$, $\psi_1(y)$:

$$\psi_i''(y) + \frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}\psi_i(y) = 0, i = \overline{0,1}$$

$$\begin{cases} \psi_0(0) = 1 \\ \psi_0'(b) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \psi_1(0) = 0 \\ \psi_1'(b) = 1 \end{cases}$$

Розв'язок однорідної задачі відносно $\psi_i(y)$ має вигляд:

$$\psi_i(y) = c_1^i cos\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) + c_2^i sin\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) \tag{4.70}$$

Враховучи граничні умови отримаємо остаточний вигляд $\psi_0(y)$, $\psi_1(y)$:

$$\begin{cases} \psi_0(y) = cos\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) + tg\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}b\right) sin\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) \\ \psi_1(y) = \frac{c_2(1+\mu_0)}{\omega cos\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}b\right)} sin\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) \end{cases}$$

Побудуємо тепер функцію Гріна задачі:

$$g(y,\xi) = \begin{cases} -a_1(\xi)\psi_1(y), 0 \le y < \xi \\ a_0(\xi)\psi_0(y), \xi < y \le b \end{cases}$$

Де $a_0(\xi)$, $a_1(\xi)$ будуть знайдені з наступної системи

$$\begin{cases} a_0(\xi)\psi_0^{'}(\xi) + a_1(\xi)\psi_1^{'}(\xi) = 1 \\ a_0(\xi)\psi_0^{(}\xi) + a_1(\xi)\psi_1(\xi) = 0 \end{cases}$$

Таким чином остаточний розв'язок задачі відносно $v_0(y)$ буде мати наступний вигляд:

$$v_0(y) = \frac{1}{(1+\mu_0)} \int_0^b g(y,\xi) f(\xi) d\xi - \psi_0(y) \frac{p_0}{2G+\lambda}$$

Випадок статичної задачі

У випадку статичної задачі коли $\omega = 0$ отримаємо наступну задачу відносно $v_0(y)$:

$$v_0^{''}(y) = \frac{f(y)}{1+\mu_0}$$

$$(2G+\lambda)v_0^{'}(b) = -p_0, \quad v_0(0) = 0, \quad p_0 = \int_0^a p(x)dx$$

Спочатку знайдем фундаментальну базисну систему розв'язків задачі $\psi_0(y)$, $\psi_1(y)$:

$$\psi_i^{''}(y) = 0, i = \overline{0,1}$$

$$\begin{cases} \psi_0(0) = 1 \\ \psi_0^{'}(b) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \psi_1(0) = 0 \\ \psi_1^{'}(b) = 1 \end{cases}$$

Розв'язок однорідної задачі відносно $\psi_i(y)$ має вигляд:

$$\psi_i(y) = c_1^i + c_2^i y \tag{4.71}$$

Враховучи граничні умови отримаємо остаточний вигляд $\psi_0(y)$, $\psi_1(y)$:

$$\begin{cases} \psi_0(y) = 1 \\ \psi_1(y) = y \end{cases}$$

Побудуємо тепер функцію Гріна задачі:

$$g(y,\xi) = \begin{cases} -a_1(\xi)\psi_1(y), 0 \le y < \xi \\ a_0(\xi)\psi_0(y), \xi < y \le b \end{cases}$$

Де $a_0(\xi)$, $a_1(\xi)$ будуть знайдені з наступної системи

$$\begin{cases} a_0(\xi)\psi_0^{'}(\xi) + a_1(\xi)\psi_1^{'}(\xi) = 1 \\ a_0(\xi)\psi_0^{(}\xi) + a_1(\xi)\psi_1(\xi) = 0 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} a_0(\xi) = -\xi \\ a_1(\xi) = 1 \end{cases}$$

Таким чином остаточний розв'язок задачі відносно $v_0(y)$ буде мати наступний вигляд:

$$v_0(y) = \frac{1}{(1+\mu_0)} \int_0^b g(y,\xi) f(\xi) d\xi - \psi_0(y) \frac{p_0}{2G+\lambda}$$

Додаток Е

ЗНАХОДЖЕННЯ КОЄФІЦІЄНТІВ c_i, $i=\overline{1,4}$

Випадок статичної задачі

Для знаходження коєфіцієтів c_1, c_2, c_3, c_4 випадку статичної задачі (3.9) спочатку знайдем $Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ та $Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$.

$$Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 & \alpha_n \mu_0 y \\ -\alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} c_1(\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2(\alpha_n \mu_0 y) \\ c_1(-\alpha_n \mu_0 y) + c_2(-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) \end{pmatrix}$$

$$Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n \mu_0 y \\ \alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} c_3(\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y) \\ c_3(\alpha_n \mu_0 y) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Введемо позначення $c = \frac{1}{4\alpha_n(1+\mu_0)}$.
Запишем тепер $Z_n(y)$:

$$Z_n(y) = c \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_n y}(\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2 e^{\alpha_n y}(\alpha_n \mu_0 y) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y) \\ \\ c_1 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y) + c_2 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n \mu_0 y) + c_4 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Тепер $Z_n'(y)$:

$$Z_n'(y) = c \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_n y}(\alpha_n^2 \mu_0 y + 2\alpha_n + 2\alpha_n \mu_0) + c_2 e^{\alpha_n y}(\alpha_n^2 \mu_0 y + \alpha_n \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n^2 \mu_0 y + 2\alpha_n + 2\alpha_n \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n^2 \mu_0 y - \alpha_n \mu_0) \\ \\ c_1 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y) + c_2 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n \mu_0 y) + c_4 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Тепер використаєм граничні умови (3.10) та побудуєм алгебричну систему відносно коєфіцієнтів.

Використаєм $U_0\left[Z_n(y)\right]$:

$$E_0 * Z_n^{'}(b) + F_0 * Z_n(b) = D_0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2G+\lambda\end{pmatrix} * Z_n^{'}(b) + \begin{pmatrix}0 & -\alpha_n\\ \alpha_n\lambda & 0\end{pmatrix} * Z_n(b) = \begin{pmatrix}0\\ -p_n\end{pmatrix}$$

Отримаємо перші 2 рівняння системи:

$$\begin{cases} c_1 e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n\mu_0 + \alpha_n) + c_2 e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b - \alpha_n) + \\ +c_3 e^{-\alpha_n b}(-\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n + \alpha_n\mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n) = 0 \\ \\ c_1 e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b - 2G\alpha_n\mu_0 + 2\lambda\alpha_n) + c_2 e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b + \\ +(2G+\lambda)2\alpha_n) + c_3 e^{-\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b + 2G\alpha_n\mu_0 - 2\lambda\alpha_n) + \\ +c_4 e^{-\alpha_n b}(2G\alpha_n^2\mu_0 b + (2G+\lambda)2\alpha_n) = -cp_n \end{cases}$$

Використаєм $U_1\left[Z_n(y)\right]$:

$$E_1 * Z_n^{'}(0) + F_1 * Z_n(0) = D_1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} * Z_n^{'}(0) + \begin{pmatrix}0 & -\alpha_n\\ 0 & 1\end{pmatrix} * Z_n(0) = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

Отримаємо другі 2 рівняння системи:

$$\begin{cases} c_1(\alpha_n + \alpha_n\mu_0) + c_2(-\alpha_n) + c_3(\alpha_n + \alpha_n\mu_0) + c_4(\alpha_n) = 0 \\ \\ c_2(2+\mu_0) + c_4(-2-\mu_0) = 0 \end{cases}$$

Звідси видно, що $c_3 = -c_1$, $c_4 = c_2$. Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} a_1 &= e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n\mu_0 + \alpha_n) - e^{-\alpha_n b}(-\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n + \alpha_n\mu_0), \\ a_2 &= e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b - \alpha_n) + e^{-\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n), \\ a_3 &= e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b - 2G\alpha_n\mu_0 + 2\lambda\alpha_n) - \\ &\quad - e^{-\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b + 2G\alpha_n\mu_0 - 2\lambda\alpha_n) \\ a_4 &= e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b + (2G+\lambda)2\alpha_n) + \\ &\quad + e^{-\alpha_n b}(2G\alpha_n^2\mu_0 b + (2G+\lambda)2\alpha_n) \end{aligned}$$

Враховуючи останнє отримаємо:

$$\begin{cases} c_3 = -c_1 \\ c_4 = c_2 \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0 \\ c_1 a_3 + c_2 a_4 = -cp_n \end{cases} \Leftrightarrow, \quad \begin{cases} c_3 = -c_1 \\ c_4 = c_2 \\ c_1 = -c_2\frac{a_2}{a_1} \\ c_2(a_4 a_1 - a_2 a_3) = -cp_n a_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = cp_n \frac{a_2}{(a_4a_1 - a_2a_3)} \\ c_2 = -cp_n \frac{a_1}{(a_4a_1 - a_2a_3)} \\ c_3 = -cp_n \frac{a_2}{(a_4a_1 - a_2a_3)} \\ c_4 = -cp_n \frac{a_1}{(a_4a_1 - a_2a_3)} \end{cases}$$

Випадок динамічної задачі

Розглянемо випадок динамічної задачі. Введемо наступні позначення

$$x_1 = \alpha_n \mu_0 s_1, \quad x_2 = \alpha_n \mu_0 s_2$$
$$x_3 = s_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}, \quad x_4 = s_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}$$
$$x_5 = s_1^2 - \alpha_n^2(1+\mu_0) + \frac{\omega^2}{c_1^2}, \quad x_6 = s_2^2 - \alpha_n^2(1+\mu_0) + \frac{\omega^2}{c_1^2}$$
$$y_1 = 2s_1(s_1^2 - s_2^2), \quad y_2 = 2s_2(s_2^2 - s_1^2)$$
$$z_1 = \frac{(e^{bs_1} + e^{-bs_1})(s_1x_3 + \alpha_n x_1)}{y_1}, \quad z_2 = \frac{(e^{bs_1} - e^{-bs_1})(s_1x_1 - \alpha_n x_5)}{y_1}$$
$$z_3 = \frac{(e^{bs_2} + e^{-bs_2})(s_2x_4 + \alpha_n x_2)}{y_2}, \quad z_4 = \frac{(e^{bs_2} - e^{-bs_2})(s_2x_4 - \alpha_n x_6)}{y_2}$$
$$z_5 = \frac{(e^{bs_1} - e^{-bs_1})(s_1x_3 - s_1x_1(2G+\lambda))}{y_1}, \quad z_6 = \frac{(e^{bs_1} + e^{-bs_1})(s_1x_5(2G+\lambda) + \alpha_n\lambda x_1}{y_1}$$
$$z_7 = \frac{(e^{bs_2} - e^{-bs_2})(\alpha_n\lambda x_4 - s_2x_2(2G+\lambda))}{y_2}, \quad z_8 = \frac{(e^{bs_2} + e^{-bs_2})(s_2x_6(2G+\lambda) + \alpha_n\lambda}{y_2}$$
$$z_9 = \frac{s_1x_3 + \alpha_n x_1}{y_1}, \quad z_{10} = \frac{s_2x_4 + \alpha_n x_2}{y_2}$$
$$z_{11} = \frac{x_1}{y_1}, \quad z_{12} = \frac{x_2}{y_2}$$

Таким чином отримаємо наступну систему:

$$\begin{cases} z_1c_1 + z_2c_2 + z_3c_3 + z_4c_4 = 0 \\ z_5c_1 + z_6c_2 + z_7c_3 + z_8c_4 = -p_n \\ z_9c_1 + z_{10}c_3 = 0 \\ z_{11}c_1 + z_{12}c_3 = 0 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = 0 z_2c_2 + z_4c_4 = 0 \\ z_6c_2 + z_8c_4 = -p_n \end{cases}, \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = 0 c_2 = -\frac{z_4}{z_2}c_4 \\ z_6c_2 + z_8c_4 = -p_n \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_2 = p_n \frac{z_4}{z_8z_2 - z_4z_6} \\ c_4 = -p_n \frac{z_2}{z_8z_2 - z_4z_6} \end{cases}$$