

# АНОТАЦІЯ

*Пожиленьков О. В.* Плоскі мішані задачі теорії пружності для прямокутної області. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового доктора філософії за спеціальністю 113 «Прикладна математика» (11 – «Математика та статистика»). – Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, 2023.

Розв'язано плоскі мішані задачі теорії пружності для пружної прямокутної області яка піддається впливу статичних та динамічних навантажень. Шляхом застосування інтегрального скінченного  $\sin$ -та  $\cos$ -перетворення Фур'є вихідну задачу зведено до одновимірної крайової задачі, яку у просторі трансформант переформульовано у вигляді векторної крайової задачі. Розв'язок цієї задачі побудовано як суперпозицію загального розв'язку однорідного векторного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Розв'язок однорідного векторного рівняння отримано за допомогою матричного диференціального числення і зображено за допомогою фундаментальної матричної системи розв'язків відповідного однорідного матричного рівняння. Частковий розв'язок неоднорідного векторного рівняння знайдено за допомогою зображення матриці-функція Гріна. Застосування оберненого перетворення Фур'є та реалізація відокремлення слабо-збіжних частин інтегралу подає поле переміщень та напружень через невідому функцію - граничне значення переміщень по торцю прямокутної області. Для її знаходження за умови виконання крайової умови отримано сингулярне інтегральне рівняння яке розв'язано за допомогою метода ортогональних поліномів. Було проведено дослідження напруженого стану середовища

за різних типів навантаження та різних геометричних розмірів прямокутної області.

*Ключові слова:* прямокутна область, динамічна задача, перетворення Фур'є, матриця-функція Гріна, сингулярне інтегральне рівняння, метод ортогональних поліномів.

## ABSTRACT

*Pozhylenkov O. V.* Plane mixed problems of elasticity for a rectangular domain - Manuscript.

A dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the field of 113 «Applied Mathematics» (11 - «Mathematics and Statistics») - Odessa I.I. Mechnikov National University, Odessa, 2023.

The plane mixed boundary value problems of theory elasticity were solved for an elastic rectangular domain subjected to static and dynamic loads. By applying the integral finite sin-cos Fourier transformation, the original problem was reduced to a one-dimensional boundary value problem, which was reformulated in the form of a vector boundary value problem. The solution to this problem was constructed as a superposition of the general solution of the homogeneous vector equation and the particular solution of the nonhomogeneous equation. The solution of the homogeneous vector equation was obtained using matrix differential calculus and represented using the fundamental matrix solution system of the corresponding homogeneous matrix equation. The particular solution of the nonhomogeneous vector equation was found using the Green's matrix function representation. The application of inverse Fourier transformation and the realization of the separation of weakly convergent parts of the integral provide the field of displacements and stresses through an unknown function - the boundary value of displacements

along the end of the rectangular region. To find this function under the boundary condition, a singular integral equation was derived and solved using the method of orthogonal polynomials. The stress state of the medium was investigated for various types of loading and different geometric dimensions of the rectangular region.

*Key words:* rectangular domain, dynamic problem, Fourier transformation, matrix Green's function, singular integral equation, method of orthogonal polynomials.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. D. Nerukh, O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2019) Mixed plain boundary value problem of elasticity for a rectangular domain. 25-th International Conference Engineering Mechanics. 2019, May 13-16, Svratka, Czech Republic. p. 255
2. O. V. Pozhylenkov (2019) The stress state of a rectangular elastic domain. Researches in Mathematics and Mechanics, Volume 24, Issue 2(34), pp. 88-96
3. Пожиленков О. В. Вайсфельд Н. Д. (2019) Мішана крайова задача теорії пружності для прямокутної області. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур, випуск 5, Львів, ст. 30-32
4. O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2020) Stress state of a rectangular domain with the mixed boundary conditions. Procedia Structural Integrity, Volume 28, pp. 458-463
5. O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2021) Stress state of an elastic rectangular

domain under steady load. *Procedia Structural Integrity*, Volume 33, pp. 385-390

6. O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2022) Dynamic mixed problem of elasticity for a rectangular domain. *Recent trends in Wave Mechanics and Vibrations*, pp. 211-218

# Зміст

Перелік умовних позначень	8
Вступ	9
<b>1 Огляд літератури</b>	<b>16</b>
<b>2 МЕТОДИКА ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ</b>	<b>17</b>
2.1 Загальна постановка задачі . . . . .	17
2.2 Зведення вихідної задачі до задачі у просторі транс- формант . . . . .	19
2.3 Побудова матричної функції Гріна . . . . .	24
2.4 Загальна схема розв'язку сингулярного інтегрального рівняння . . . . .	26
2.5 Висновки до другого розділу . . . . .	27
<b>3 ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУ- ТНОЇ ОБЛАСТІ ЗА УМОВ ІДЕАЛЬНОГО КОНТА- КТУ НА БІЧНИХ ГРАНЯХ</b>	<b>29</b>
3.1 Статична задача теорії пружності для прямокутної обла- сті за умов ідеального контакту на бічних гранях . .	29
3.1.1 Постановка задачі . . . . .	29
3.1.2 Побудова точного розв'язку вихідної задачі . .	30
3.1.3 Числові розрахунки . . . . .	34
3.2 Динамічна задача теорії пружності для прямокутної області за умов ідеального контакту на бічних гранях	37
3.2.1 Постановка задачі . . . . .	37
3.2.2 Побудова точного розв'язку вихідної задачі . .	38

3.2.3	Числові розрахунки . . . . .	43
3.3	Висновки до третього розділу . . . . .	43
<b>4</b>	<b>ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ ЗА УМОВ ДРУГОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ НА БІЧНИХ ГРАНЯХ</b>	<b>45</b>
4.1	Статична задача теорії пружності для прямокутної області за умов другої основної задачі на бічних гранях .	46
4.1.1	Постановка задачі . . . . .	46
4.1.2	Розв'язання векторної крайовою задачі у просторі трансформант . . . . .	47
4.1.3	Розв'язання сингулярного інтегрального рівняння задачі . . . . .	53
4.1.4	Числові розрахунки . . . . .	57
4.2	Динамічна задача теорії пружності для прямокутної області за умов другої основної задачі на бічних гранях	60
4.2.1	Постановка задачі . . . . .	60
4.2.2	Розв'язання векторної крайовою задачі у просторі трансформант . . . . .	61
4.2.3	Розв'язання сингулярного інтегрального рівняння задачі . . . . .	67
4.2.4	Числові розрахунки . . . . .	71
4.3	Висновки до четвертого розділу розділу . . . . .	71
	<b>Висновки</b>	<b>72</b>
	<b>Додаток В ЗНАХОДЖЕННЯ КОРЕНІВ РІВНЯННЯ <math>\det[M(s)] = 0</math></b>	<b>75</b>
	<b>Додаток С ЗНАХОДЖЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ</b>	

БАЗИСНИХ МАТРИЦЬ $\Psi_i(y)$ , $i = \overline{0, 1}$	76
--	----

Додаток D ЗНАХОДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ $v_0(y)$ НЕО- ДНОРІДНОЇ ЗАДАЧІ	84
---	----

Додаток E ЗНАХОДЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ $c_i$ , $i =$ $\overline{1, 4}$	87
---	----

## Перелік умовних позначень

$G$  - модуль зсуву

$E$  - модуль Юнга

$\mu$  - коефіцієнт Пуасона

$c_1, c_2$  - швидкості хвилі

$\omega$  - частота

$$\mu_0 = \frac{1}{1-2\mu}$$

$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$  - коефіцієнт Ламе

$U_x(x, y) = u(x, y)$  - переміщення по осі  $x$

$U_y(x, y) = v(x, y)$  - переміщення по осі  $y$



# Вступ

**Актуальність роботи.** Прямокутна пружна область є одним з найбільш простих об'єктів для аналізу і моделювання у механіці пружного тіла. Для багатьох застосувань прямокутна форма може бути використана як апроксимація більш складних об'єктів, наприклад: в інженерних розрахунках прямокутні пластини використовують для моделювання деталей конструкцій з більш складними формами, такими як пластини з отворами та вирізами. Прямокутна форма може бути застосована для різних типів задач, а саме: для моделювання пружного деформування у твердих тілах, дослідження розподілу напружень та деформацій у матеріалах, а також для розв'язання задач пов'язаних з пружністю у біологічних та геологічних системах. Саме тому, завдяки широкому спектру застосувань, розробка аналітичних методів розв'язання задач для прямокутної пружної області залишається актуальною задачею.

Аналіз літератури виявив достатню кількість мішаних задач пружності для прямокутника, які розв'язані за допомогою аналітичних та числових методів. Незважаючи на це, питання поведінки механічних характеристик у кутових точках, питання встановлення якісної поведінки хвильових полів усередині прямокутної області за умов динамічного навантаження залишається відкритим. Цим обумовлено актуальність запропонованого дослідження, що полягає у розробці нового аналітичного підходу до розв'язання мішаних задач для прямокутної області.

**Мета і задачі дослідження.** Метою цього дослідження є розробка нового підходу до розв'язання плоских мішаних задач теорії пружності для прямокутної області, що надає можливість встановити важливі особливості розподілу напружень та переміщень.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

1. розвиток методики, яка використовує застосування методу інтегральних перетворень разом з методами розв'язання векторних крайових задач теорії пружності та використання матриці-функції Гріна.
2. побудова аналітичного розв'язку задачі для прямокутної області, що піддається впливу зовнішнього статичного навантаження за умови виконання різних граничних умов на її бокових торцях.
3. розв'язання динамічної задачі пружності для прямокутної області з метою встановлення закономірностей розподілу хвильових полів та динамічних напружень.

**Об'єктом дослідження є** пружна прямокутна область під впливом зовнішнього навантаження різної природи (статичного та динамічного).

**Предметом дослідження є** закономірності зміни напружено-деформованого стану та хвильового поля прямокутної області в залежності від видів навантаження та крайових умов.

**Методи дослідження.** У дисертаційній роботі розв'язання динамічних та статичних задач теорії пружності для прямокутної області було проведено методом інтегральних перетворень, який застосовано безпосередньо до рівнянь рівноваги. Для розв'язання векторної крайової задачі у просторі трансформант побудовано матричну функцію Гріна. Отримані в роботі сингулярні інтегральні рівняння розв'язані за допомогою методу ортогональних многочленів, з метою урахування реальної особливості невідомою функції на кінцях

інтервалів інтегрування.

**Обґрунтованість та достовірність отриманих результатів** забезпечується: використання точних математичних формулювань задач у лінійній механіці суцільного тіла та механіці руйнування; використання перевірених і строгих аналітичних методів для отримання розв'язків сформульованих задач; фізичною інтерпретацією результатів розрахунків задач. Отримані результати збігаються з відомими результатами теоретичних досліджень.

**Наукова новизна** отриманих результатів полягає в наступному:

- вперше застосовано нову методику розв'язання динамічних та статичних задач теорії пружності для прямокутної області, що ґрунтується на безпосередньому перетворенні рівнянь Ламе. Цей підхід дозволив отримати аналітичні подання для полів переміщень та напружень;
- побудовано матричну функцію Гріна, що дозволило звести вихідні задачі для прямокутної області до розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь. Встановлено нові особливості залежності полів переміщень та напружень від параметрів навантаження та крайових умов на торцях прямокутної області;
- отримано аналітичні розв'язки динамічної задачі пружності для прямокутної області та досліджено залежність хвильових полів від типу навантаження та геометричних розмірів області

**Особистий внесок здобувача.** Основні результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самотійно. У роботах у співавторстві [9, 10, 11, 14, 16, 18], науковому керівнику належить постановка задач, вибір методики їх розв'язання. Дисертантом проведено

огляд літератури, виконано усі математичні перетворення при побудові розв'язків, здійснено програмну реалізацію та проведено аналіз отриманих результатів.

### **Апробація результатів дисертації.**

Результати досліджень, які були включені до дисертаційної роботи, були представлені та обговорені на міжнародних наукових конференціях різного рівня: конференція «Актуальные вопросы и перспективы развития транспортного и строительного комплексов» (Гомель, 2018), X Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Львів, 2019), 25-th international conference «Engineering Mechanics 2019» (Svratka, 2019), «1st Virtual European Conference on Fracture» (Italy, 2020), «26th International Conference on Fracture and Structural Integrity» (Turin, 2021), «10th International Conference on Wave Mechanics and Vibrations» (Lisbon, 2022).

У повному обсязі робота доповідалась на

- науковому семінарі «Мішані задачі математичної фізики» кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І.І. Мечникова під керівництвом к.ф.-м.н., доц. Ю.С. Процєрова.

**Публікації.** Основні наукові положення дисертаційного дослідження відображено у 6 публікаціях з яких: дві статті [10, 11] опубліковано у провідних фахових виданнях України, що входять у перелік ДАК України, статті [9, 14, 16, 18] прореферовано у міжнародній наукометричній базі Scopus.

**Структура і обсяг дисертації.** Робота складається зі вступу, 4 розділів, висновків, списку використаної літератури, що включає ?? найменування. Загальний обсяг дисертації становить ?? сторінок,

із них ?? сторінок основного тексту. Робота містить ?? рисунків та ?? таблицю.

У *вступі* аргументовано актуальність теми дисертації; поставлено мету та завдання дослідження; наведено методи розв'язання поставлених задач; розкрито новизну і достовірність отриманих результатів, їх практичне та теоритичне значення; представлено відомості про апробацію роботи, публікації та особистий внесок здобувача.

У *першому розділі* проведено огляд наукових робіт за темою дисертаційного дослідження, а саме проаналізовано математичні методи розв'язання плоских мішаних задач теорії пружності для прямокутної області. Аналіз літератури показав, що незважаючи на досить широке коло публікацій аналітичним методам розв'язання задач для пружної прямокутної області присвячена не велика кількість робіт. Залишається актуальним дослідження розподілу хвильових полів напружень, особливості їх змін в залежності від доданого навантаження та геометричних розмірів області.

У *другому розділі* сформульовано загальну постановку плоских мішаних динамічних крайових задач теорії пружності для прямокутної області та продемонстровано методику побудови їх розв'язків. Наведено підхід, за яким отримано точний розв'язок векторної крайової задачі у просторі трансформант Фур'є. Точний розв'язок розшукано у вигляді суперпозиції однорідного та частинного розв'язків векторного рівняння. Методами контурного інтегрування побудовано фундаментальну матрицю для відповідного однорідного векторного рівняння. Частинний розв'язок векторного рівняння виписано за допомогою матричної функції Гріна, методику знаходження якої продемонстровано.

Теоретичні засади другого розділу застосовано у *третьому роз-*

*дилі*, де розв'язано динамічну та статичну задачі теорії пружності за умов ідеального контакту на бічних гранях прямокутника. Вихідну задачу зведено до одновимірної крайової задачі у просторі трансформант за допомогою використання інтегральних скінченних  $\sin$ - та  $\cos$ -перетворень Фур'є. Одновимірну задачу переформульовано у векторному поданні. Розв'язок вихідної задачі для статичного випадку навантаження знайдено у точному вигляді після застосування оберненого перетворення Фур'є.

Для випадку динамічного навантаження на прямокутну область за аналогічним підходом, шляхом зведення задачі до одновимірної та використання апарату матричного числення, виписані формули хвильового поля прямокутника.

Наведено числовий аналіз напруженого стану та хвильового поля прямокутної області за різних типів статичних та динамічних навантажень за різних геометричних розмірів області.

Умови другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях прямокутника задано при формулюванні постановок статичних та динамічних задач *четвертого розділу*. Методика розв'язання, що описана у другому розділі, застосовано за аналогічною процедурою. Це звело поставлену задачу до сингулярного інтегрального рівняння. З метою застосування методу ортогональних поліномів було проведено відокремлення слабо збіжної частини ядра. Стандартна схема методу ортогональних поліномів дозволила звести отримане сингулярне інтегральне рівняння, як у статичній так і у динамічій постановках, до нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь.

Проведено аналіз хвильових полів прямокутної області в залежності від частоти прикладеного навантаження та геометричних розмірів пружного прямокутника.

У *висновках* сформульовано отримані результати та наведено

основні якісні та кількісні залежності хвильових та статичних полів від геометричних параметрів прямокутної області, характеру та частоти навантаження.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана в рамках держбюджетної теми Одеського національного університету імені І. І. Мечникова «Статичні та динамічні задачі для тіл канонічної форми з дефектами» (2021-2024 рр., реєстраційний номер 0121U111664).

**Теоретичне і практичне значення одержаних результатів.** Запропонована методика розв'язання мішаних динамічних задач теорії пружності для прямокутної області має теоретичне значення для подальшого розвитку математичних методів аналізу напруженого стану тіл під час статичних та динамічних навантажень. вирішення плоских задач теорії пружності. Отримані результати стали складовою частиною учбового курсу «Теорія пружності», що викладається студентам, які навчаються за спеціальністю «Прикладна математика», під час виконання магістерських робіт. Отримані результати можуть знайти застосування в геомеханіці, будівництві конструкцій, вивченні міцності елементів транспортних засобів та тощо.

# 1 Огляд літератури

Дослідження напружено-деформованого стану пружних тіл почало активно розвиватися у ХІХ столітті і залишається актуальним до нашого часу. Це пояснюється широким спектром застосування в різноманітних інженерних галузях. Класична лінійна теорія пружності є основою для більшості міцностних розрахунків в техніці. Під час експлуатації будівель та інших конструкцій вони піддаються механічним, температурним та іншим впливам. Тому при проектуванні необхідно враховувати міцність таких конструкцій. Характеристики міцності виробів можна отримати шляхом аналізу напружено-деформованого стану їх пружних моделей. Одним з таких моделей є скінченна прямокутна область. Тому актуальною проблемою є розробка аналітично-числових методів для дослідження її напружено-деформованого стану.



## 2 МЕТОДИКА ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНО- СТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ

У даному розділі наведено теоретичні засади підходу, який використовується для розв'язання мішаних задач теорії пружності для прямокутної області. Він базується на зведенні вихідної задачі, шляхом застосування методу інтегральних перетворень, до одновимірної задачі у просторі трансформант. Побудова матричної функції Гріна та розв'язання відповідних крайових задач надає можливість отримати аналітичний розв'язок поставленої задачі. Матеріал цього розділу викладено у працях [9], [10], [11], [14], [16], [18].

### 2.1 Загальна постановка задачі



Рис. 2.1: Геометрія задачі

Розглядається пружний прямокутник (Рис: 2.1), який займає область, що у декартовій системі координат описується співвідно-

шенням  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ .

До прямокутної області по грані  $y = b$  додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y, t)|_{y=b} = -p(x, t), \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{y=b} = 0, \quad 0 \leq x \leq a \quad (2.1)$$

де  $p(x, t)$  відома функція,  $t$  - час. По нижній грані виконуються умови ідеального контакту

$$v(x, y, t)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{y=0} = 0 \quad (2.2)$$

На бічних гранях  $x = 0$  та  $x = a$  граничні умови подано у формі

$$U_1[f(x, y, t)] = 0, \quad U_2[f(x, y, t)] = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (2.3)$$

де

$$U_1[f(x, y, t)] = \left[ \alpha_1 f(x, y, t) + \beta_1 \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial x} \right] \Big|_{x=0}$$

$$U_2[f(x, y, t)] = \left[ \alpha_2 f(x, y, t) + \beta_2 \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial x} \right] \Big|_{x=a}$$

- граничні функціонали у загальному зображенні (для кожної конкретної задачі вони будуть деталізовані),  $f(x, y, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t))^T$
- вектор переміщень.

Переміщення усередині прямокутника мають задовільняти рівняння Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right) = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial t^2} \end{cases} \quad (2.4)$$

Тут і далі розглянуто постановки задач у випадку гармонічних коливань

$$u(x, y, t) = u(x, y) e^{i\omega t}, \quad v(x, y, t) = v(x, y) e^{i\omega t}, \quad p(x, y, t) = p(x, y) e^{i\omega t} \quad (2.5)$$

З урахуванням подання переміщень (2.5) рівняння рівноваги переформульовано:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{\omega^2}{c_1^2} u(x,y) \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} \right) = -\frac{\omega^2}{c_2^2} v(x,y) \end{cases} \quad (2.6)$$

Граничні умови набувають вигляду:

$$\begin{cases} \sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=b} = 0 \\ v(x,y)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=0} = 0 \\ U_1[f(x,y)] = 0, \quad U_2[f(x,y)] = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Потрібно відшукати хвильове поле пружного прямокутника, що задовольняє крайову задачу (2.6), (2.7).

## 2.2 Зведення вихідної задачі до задачі у просторі трансформант

Для зведення вихідної задачі до одновимірної задачі до рівнянь (2.6) застосовано інтегральне перетворення Фур'є за змінною  $x$ :

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y) \sin(\alpha_n x) \\ v(x,y) \cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (2.8)$$

Для цього перше та друге рівняння (2.6) помножено відповідно на  $\sin(\alpha_n x)$  та  $\cos(\alpha_n x)$  та проінтегровано за змінною  $x$  на інтервалі  $0 \leq x \leq a$ .

Тоді у просторі трансформант маємо:

$$\left\{ \begin{aligned} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2 \mu_0 - \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) &= \\ &= \alpha_n (1 + \mu_0) (\chi_3(y) \cos(\alpha_n a) - \chi_1(y)) \\ (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - (\alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) &= \\ &= (\frac{\alpha_2}{\beta_2} \chi_4(y) \cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \chi_2(y)) - \mu_0 (\chi_3'(y) \cos(\alpha_n a) - \chi_1'(y)) \end{aligned} \right. \quad (2.9)$$

Тут  $\chi_1(y) = u(0, y)$ ,  $\chi_2(y) = v(0, y)$ ,  $\chi_3(y) = u(a, y)$ ,  $\chi_4(y) = v(a, y)$ . Враховучи умову (2.3), отримаємо, що  $\frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} \chi_1(y)$ ,  $\frac{\partial v(0, y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} \chi_2(y)$ ,  $\frac{\partial u(a, y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2} \chi_3(y)$ ,  $\frac{\partial v(a, y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2} \chi_4(y)$ .

Після застосування інтегрального перетворення (2.8) до крайових умов (2.7) отримано подання крайових умов у просторі трансформант:

$$\left\{ \begin{aligned} ((2G + \lambda) v_n'(y) + \alpha_n \lambda u_n(y)) |_{y=b} &= -p_n \\ (u_n'(y) - \alpha_n v_n(y)) |_{y=b} &= 0 \\ v_n(y) |_{y=0} &= 0 \\ (u_n'(y) - \alpha_n v_n(y)) |_{y=0} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (2.10)$$

де  $p_n = \int_0^a p(x) \cos(\alpha_n x) dx$

Для того щоб розв'язати задачу у просторі трансформант, її переписано у векторній формі.

$$L_2 [Z_n(y)] = F_n(y) \quad (2.11)$$

де  $L_2$  - диференціальний оператор другого порядку

$$L_2 [Z_n(y)] = A * Z_n''(y) + B * Z_n'(y) + C * Z_n(y), \quad (2.12)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix}, \quad Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix},$$

$$F_n(y) = \begin{pmatrix} \alpha_n(1 + \mu_0)(\chi_3(y)\cos(\alpha_n a) - \chi_1(y)) \\ (\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)\cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)) - \mu_0(\chi_3'(y)\cos(\alpha_n a) - \chi_1'(y)) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (2.10) записано у зображенні:

$$U_i [Z_n(y)] = D_i \quad (2.13)$$

де  $i = \overline{0, 1}$ ,  $b_0 = b$ ,  $b_1 = 0$ ,

$$U_i [Z_n(y)] = E_i * Z_n'(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \quad (2.14)$$

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язок векторної одновимірної крайової задачі знайдено як суперпозиція загального розв'язку векторного однорідного рівняння  $Z_n^0(y)$  та часткового розв'язку неоднорідного рівняння  $Z_n^1(y)$ .

$$Z_n(y) = Z_n^0(y) + Z_n^1(y) \quad (2.15)$$

Ці розв'язки знайдено за допомогою апарату матричного диференціального числення [4], [6], для чого побудовано фундаментальну матричну систему розв'язків та фундаментальну базисну систему розв'язків відповідної матричної крайової задачі.

Як показано у [4] для знаходження розв'язку однорідного векторного рівняння (2.11), спочатку треба побудувати розв'язок матричного однорідного рівняння

$$L_2 [Y_n(y)] = 0 \quad (2.16)$$

де  $Y_n(y)$  - матриця порядку  $2 \times 2$ .

Представимо матрицю  $Y_n(y)$  у наступній формі  $Y_n(y) = e^{sy} * I$ ,  $I$  - одинична матриця, та підставимо до (2.16). В результаті отримаємо рівність  $L_2[e^{sy} * I] = e^{sy} * M(s)$ , де матриця  $M(s)$  має вигляд:

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Згідно до [5] розв'язок матричного однорідного рівняння побудовано у формі

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \quad (2.18)$$

де  $M^{-1}(s)$  - матриця обернена до матриці  $M(s)$ ,  $C$  - замкнений контур який містить усі особливі точки матриці  $M^{-1}(s)$ .

Матрицю  $M^{-1}(s)$  знайдено у наступному поданні  $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]}$ , де  $\widetilde{M(s)}$  - транспонована матриця алгебричних доповнень,  $\det[M(s)]$  - детермінант матриці, який знайдено як поліном четвертого ступеня

$$\begin{aligned} \det[M(s)] &= \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{vmatrix} = \\ &= (s - s_1)(s + s_1)(s - s_2)(s + s_2) \end{aligned} \quad (2.19)$$

де  $s_1, s_2, -s_1, -s_2$  корені  $\det[M(s)] = 0$ , детальне знаходження яких наведено в Додатку В.

Обернена матриця має вигляд

$$\begin{aligned} M^{-1}(s) &= \frac{1}{(s - s_1)(s + s_1)(s - s_2)(s + s_2)} \\ &\begin{pmatrix} s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s \\ -\alpha_n \mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Враховучи це, знайдемо значення фундаментальної матриці за до-

помогую теореме про лишки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds &= \frac{2\pi i}{2\pi i(1 + \mu_0)} \sum_{i=1}^4 \text{Res} \left[ e^{sy} \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]} \right] = \\ &= (Y_1(y) + Y_2(y) + Y_3(y) + Y_4(y)), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} Y_0(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s + s_1)(s - s_2)(s + s_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=s_1} = \\ &= \frac{e^{s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \begin{pmatrix} s_1^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s_1 \\ -\alpha_n \mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} Y_1(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s - s_1)(s - s_2)(s + s_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-s_1} = \\ &= -\frac{e^{-s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \begin{pmatrix} s_1^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 s_1 \\ \alpha_n \mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} Y_2(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s + s_2)(s - s_1)(s + s_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=s_2} = \\ &= \frac{e^{s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \begin{pmatrix} s_2^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s_2 \\ -\alpha_n \mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} Y_3(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s - s_2)(s - s_1)(s + s_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-s_2} = \\ &= -\frac{e^{-s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \begin{pmatrix} s_2^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 s_2 \\ \alpha_n \mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.24)$$

## 2.3 Побудова матричної функції Гріна

Для побудови матриці-функції Гріна спочатку знайдено фундаментальні базисні матриці  $\Psi_0(y)$ ,  $\Psi_1(y)$ , які мають задовільняти матричну крайову задачу [2]:

$$\begin{aligned} L_2 [\Psi_i(y)] &= 0, \\ U_i [\Psi_j(y)] &= \delta_{j,i}, \quad j = \overline{0,1}, i = \overline{0,1} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Для цього їх вибрано у поданні:

$$\Psi_i(y) = (Y_0(y) + Y_1(y)) * C_1^i + (Y_2(y) + Y_3(y)) * C_2^i \quad (2.26)$$

Тут матриці  $Y_i(y)$ ,  $i = \overline{0,3}$  визначено формулами (2.21)-(2.24), де  $C_1^j$ ,  $C_2^j$ ,  $j = \overline{0,1}$  невідомі матриці коефіцієнтів, які знайдено з граничних умов (2.25) (покрокове знаходження наведено у Додатку С).

Для подальшого введемо наступні позначення для елементів матриць  $\Psi_0(y)$ ,  $\Psi_1(y)$ :

$$\Psi_0(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^0(y) & \Psi_2^0(y) \\ \Psi_3^0(y) & \Psi_4^0(y) \end{pmatrix}, \quad \Psi_1(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^1(y) & \Psi_2^1(y) \\ \Psi_3^1(y) & \Psi_4^1(y) \end{pmatrix}$$

Таким чином матрицю Гріна можемо записати у вигляді:

$$G(y, \xi) = \begin{cases} \Psi_0(y) * \Psi_1(\xi), & 0 \leq y < \xi \\ \Psi_1(y) * \Psi_0(\xi), & \xi < y \leq b \end{cases} \quad (2.27)$$

Для данної матриці Гріна виконано усі властивості, зокрема виконано однорідні граничні умови (2.13) та задовільнено однорідне рівняння рівноваги у просторі трансформант (2.11):

$$L_2 [G(y, \xi)] = 0$$

$$U_0 [G(y, \xi)] = 0, \quad U_1 [G(y, \xi)] = 0,$$



За допомогою функції Гріна (2.27) розв'язок неоднорідної векторної крайової задачі у просторі трансформант записано у поданні [2]

$$Z_n(y) = \int_0^b G(y, \xi) F_n(\xi) d\xi + \Psi_0(y) * D_0 + \Psi_1(y) * D_1 \quad (2.28)$$

Введемо наступні позначення  $G(y, \xi) = \begin{pmatrix} g_1(y, \xi) & g_2(y, \xi) \\ g_3(y, \xi) & g_4(y, \xi) \end{pmatrix}$ ,  $F_n(y) = \begin{pmatrix} f_n^1(y) \\ f_n^2(y) \end{pmatrix}$ . Враховуючи це, шукані функції переміщень у просторі трансформант можна записати у формі

$$u_n(y) = \int_0^b [g_1(y, \xi) f_n^1(\xi) + g_2(y, \xi) f_n^2(\xi)] d\xi - \psi_0^2(y) p_n \quad (2.29)$$

$$v_n(y) = \int_0^b [g_3(y, \xi) f_n^1(\xi) + g_4(y, \xi) f_n^2(\xi)] d\xi - \psi_0^4(y) p_n \quad (2.30)$$

Фінальний розв'язок вихідної задачі отримано після застосування оберненого перетворення Фур'є до трансформант (2.29), (2.30)

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (2.31)$$

$$v(x, y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (2.32)$$

Знайдем тепер  $v_0(y)$  розглянувши задачу у просторі трансформант (2.9), (2.10) при  $n = 0$ ,  $\alpha_n = 0$  (детальний розв'язок наведено у Додатку D). Тоді остаточний розв'язок  $v(x, y)$  набуває вигляду

$$\begin{aligned} v(x, y) = & \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x) - \psi_0(y) \frac{p_0}{a(2G + \lambda)} + \\ & + \frac{1}{a(1 + \mu_0)} \int_0^b g(y, \xi) \left[ \left( \frac{\alpha_2}{\beta_2} \chi_4(\xi) \cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \chi_2(\xi) \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\mu_0}{(1 + \mu_0)} (\chi_3'(\xi) \cos(\alpha_n a) - \chi_1'(\xi)) \right] d\xi \end{aligned} \quad (2.33)$$

Невідомі функції  $\chi_i(y)$ ,  $i = \overline{1, 4}$  що містяться у формулі розв'язку (2.31), (2.33) знайдено для кожної конкретної постанови задачі окремо.

## 2.4 Загальна схема розв'язку сингулярного інтегрального рівняння

Розглянемо випадок виконання граничних умов другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях, в результаті кількість невідомих функцій скоротиться до однієї  $f(y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}|_{x=a}$ . З цього отримаємо значення  $f_n^1(\xi) = 0$ ,  $f_n^2(\xi) = -\cos(\alpha_n a) f(\xi)$ . Для знаходження невідомої функції  $f(y)$  використано граничну умову  $\sigma_y(x, y)|_{y=b} = -p(x)$  та побудуємо сингулярне інтегральне рівняння:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left( a_2(t) \ln \left[ \frac{1}{|x-t|} \right] + a_3(t, x) \right) f(t) dt = a_1(x) \quad (2.34)$$

де

$$a_1(x) = ap(x) - 2(2G + \lambda) \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_0^4(y) p_n \cos(\alpha_n x)|_{y=b} - \\ - 2\lambda \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_0^2(y) p_n \sin(\alpha_n x)|_{y=b} - \psi_0'(b) p_0$$

$$a_2(t) = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\partial g_4(\widetilde{y}, \xi)}{\partial y} + \lambda g_2(\widetilde{y}, \xi) \right] |_{y=b},$$

$$a_3(t, x) = \sum_{n=1}^N \cos(\alpha_n a) \cos(\alpha_n x) \left[ (2G + \lambda) \frac{\partial g_4(y, t)}{\partial y} + \alpha_n \lambda g_2(y, t) \right] |_{y=b} - \\ - a_2 \sum_{n=0}^N (-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-t)} \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2a}x\right)$$

Інтегральне рівняння (2.34) розв'язується методом ортогональних поліномів [3]. Згідно з методом невідому функцію  $f(t)$  розвинуто

у ряд за поліномами Чебишева першого роду

$$f(t) = \frac{1}{a_2(t)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k T_k(t), \quad (2.35)$$

де  $\varphi_k$  - невідомі коефіцієнти,  $T_{2k+1}(t)$  - поліном Чебишева першого роду.

Представлення невідомої функції (2.35) підставлено у сингулярне інтегральне рівняння (2.34) та враховуючи спектральне співвідношення В.1.9 [7]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left[ \frac{1}{|x-t|} \right] \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = v_k T_k(x), \quad \begin{cases} v_0 = \ln 2, \\ v_k = k^{-1}, k \geq 1 \end{cases} \quad (2.36)$$

отримано

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k v_k T_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{a_3(t, x)}{a_2(t)} \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = a_1(x) \quad (2.37)$$

Реалізація стандартної схеми методу ортогональних поліномів приводить до розв'язання нескінченної системи алгебричних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів  $\varphi_k$ ,  $k = \overline{0, \infty}$ , яка в подальшому розв'язується методом редукції.

$$\frac{\phi_m \pi}{2m} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k g_{k,m} = f_m, \quad (2.38)$$

де  $g_{k,m} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 \frac{a_3(t, x)}{a_2(t)} \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt dx$ ,  $f_m = \int_{-1}^1 \frac{T_m(x) a_1(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$  інтеграли відомих функцій

## 2.5 Висновки до другого розділу

1. Застосування інтегрального перетворення до рівнянь Ламе та крайових умов плоскої задачі теорії пружності для прямокутної області дозволило уникнути використання бігармонічних функцій.

2. Для найбільш загального випадку неоднорідного векторного диференціального рівняння другого порядку побудовано матричну функцію Гріна. За її допомогою побудовано розв'язок задачі у просторі трансформант.
3. Отримане сингулярне інтегральне рівняння, у випадку умов другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях, розв'язано методом ортогональних поліномів, що враховує реальну особливість розв'язків на кінцях інтервалу інтегрування.

# **3 ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ ЗА УМОВ ІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ НА БІЧНИХ ГРАНЯХ**

У даному розділі досліджено плоскі статична та динамічна задачі теорії пружності для прямокутної області, за умов ідеального контакту на бічних гранях.

Вихідні задачі зведено до одновимірної задачі у просторі трансформант за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Отримані крайові задачі розв'язано точно за допомогою методу матричного диференціального числення. Остаточне подання для полів переміщень та напружень наведено за допомогою оберненого перетворення Фур'є.

Проведено чисельний аналіз отриманих функцій переміщень та напружень для різних розмірів прямокутної області та різних видів навантаження.

Результати розділу опубліковані в [9], [10], [11], [16] а також доповідались на конференціях [12], [13], [17].

## **3.1 Статична задача теорії пружності для прямокутної області за умов ідеального контакту на бічних гранях**

### **3.1.1 Постановка задачі**

Розглядається пружне прямокутне тіло (Рис: 2.1), яке займає облась, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b.$$

До грані  $y = b$  додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=b} = 0, \quad (3.1)$$

де  $p(x)$  є відома функція.

На бічних та нижній гранях виконуються умови ідеального контакту

$$u(x, y)|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=0} = 0 \quad (3.2)$$

$$u(x, y)|_{x=a} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=a} = 0 \quad (3.3)$$

$$v(x, y)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=0} = 0 \quad (3.4)$$

Потрібно відшукати розв'язок рівнянь рівноваги

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

за умови виконання (3.1) - (3.4)

### 3.1.2 Побудова точного розв'язку вихідної задачі

Для того, щоби звести задачу до одновимірної задачі, використаємо інтегральне перетворення Фур'є за змінною  $x$  до рівнянь (3.5) у наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x, y) \sin(\alpha_n x) \\ v(x, y) \cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (3.6)$$

Після інтегрування обох рівнянь за частинами у просторі трансформант отримаємо

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - \alpha_n^2 (1 + \mu_0) u_n(y) = 0 \\ (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Крайові умови у просторі трансформант набувають вигляду

$$\begin{cases} ((2G + \lambda)v'_n(y) + \alpha_n \lambda u_n(y))|_{y=b} = -p_n \\ (u'_n(y) - \alpha_n v_n(y))|_{y=b} = 0 \\ v_n(y)|_{y=0} = 0 \\ (u'_n(y) - \alpha_n v_n(y))|_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

де  $p_n = \int_0^a p(x) \cos(\alpha_n x) dx$

Для того щоб розв'язати задачу у просторі трансформант, перепишемо її у векторній формі. Рівняння рівноваги (3.7) запишемо у наступному вигляді:

$$L_2 [Z_n(y)] = 0 \quad (3.9)$$

$$L_2 [Z_n(y)] = A * Z_n''(y) + B * Z_n'(y) + C * Z_n(y), \quad (3.10)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 (1 + \mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix}$$

$$Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (3.8) запишемо у наступному вигляді:

$$U_i [Z_n(y)] = D_i \quad (3.11)$$

$$U_i [Z_n(y)] = E_i * Z_n'(b_i) + F_i * Z_n(b_i), \quad (3.12)$$

де  $i = \overline{0, 1}$ ,  $b_0 = b$ ,  $b_1 = 0$ ,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Будемо шукати однорідний розв'язок рівняння, для цього спочатку побудуємо фундаментальну матрицю рівняння (3.9). Її будемо шукати у вигляді [6]:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds, \quad (3.13)$$

де  $M(s)$  - характеристична матриця рівняння (3.9), а  $C$  - замкнений контур, який містить усі особливі точки. Матрицю  $M(s)$  будемо шукати з наступної умови

$$L_2 [e^{sy} * I] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

де матриця  $M(s)$  має вигляд:

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0) & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Матрицю  $M^{-1}(s)$  побудовано у наступному поданні  $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]}$ , де  $\widetilde{M(s)}$  - транспонована матриця алгебричних доповнень,  $\det[M(s)]$  - детермінант матриці

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 & \alpha_n \mu_0 s \\ -\alpha_n \mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \det[M(s)] &= \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 \end{vmatrix} = \\ &= (1 + \mu_0)(s - \alpha_n)^2(s + \alpha_n)^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

де  $\alpha_n, -\alpha_n$ , корені  $\det[M(s)] = 0$ , детальне знаходження яких наведено у Додатку В.



Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матриці за допомогою теореми про лишки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds &= \frac{2\pi i}{2\pi i(1 + \mu_0)} \sum_{i=1}^2 \text{Res} \left[ e^{sy} \frac{\widetilde{M}(s)}{\det[M(s)]} \right] = \\ &= \frac{1}{(1 + \mu_0)} (Y_0(y) + Y_1(y)), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} Y_0(y) &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{e^{sy}}{(s + \alpha_n)^2} \widetilde{M}(s) \right) \Big|_{s=\alpha_n} = \\ &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 & \alpha_n \mu_0 y \\ -\alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} Y_1(y) &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{e^{sy}}{(s - \alpha_n)^2} \widetilde{M}(s) \right) \Big|_{s=-\alpha_n} = \\ &= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n \mu_0 y \\ \alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Таким чином розв'язок однорідного рівняння у просторі трансформант подано формулою

$$Z_n(y) = \frac{1}{1 + \mu_0} \left( Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \right) \quad (3.20)$$

Для того, щоб відшукати невідомі коефіцієнти  $c_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$  потрібно задовольнити граничні умови (3.11) (Додаток Е). Таким чином можна записати розв'язок векторної задачі у просторі трансформант:

$$\begin{aligned} u_n(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n(1 + \mu_0)} [c_1(\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2(\alpha_n \mu_0 y)] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n(1 + \mu_0)} [c_3(\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y)] \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} v_n(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n(1 + \mu_0)} [c_1(-\alpha_n \mu_0 y) + c_2(-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0)] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n(1 + \mu_0)} [c_3(\alpha_n \mu_0 y) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0)] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Обернення інтегрального перетворення Фур'є для трансформант переміщень завершує побудову розв'язку вихідної задачі

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (3.23)$$

$$v(x, y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (3.24)$$

Останній крок - це знаходження виразу  $v_0(y)$  у випадку коли  $n = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ . Для цього повернемося до другого рівняння (3.7), та запишем його для цього випадку:

$$(1 + \mu_0)v_0''(y) = 0 \quad (3.25)$$

Та запишемо відповідні граничні умови:

$$\begin{cases} (2G + \lambda)v_0'(y)|_{y=b} = -p_0, \\ v_0(y)|_{y=0} = 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

де  $p_0 = \int_0^a p(x)dx$

Розв'язок рівняння (3.25) має вигляд:

$$v_0(y) = c_1 + c_2 y \quad (3.27)$$

Отже

$$v_0(y) = \frac{-p_0}{(2G + \lambda)} y \quad (3.28)$$

Тепер остаточний розв'язок задачі можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \\ v(x, y) = \frac{-p_0}{(2G + \lambda)a} y + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \end{cases} \quad (3.29)$$

### 3.1.3 Числові розрахунки

Числові експерименти наведено для сталі ( $E = 200$  ГПА,  $\mu = 0.25$ ).

Розглянуто прямокутну область  $0 \leq x \leq 10$ ,  $0 \leq y \leq 15$ , функцію навантаження взято у формі  $p(x) = (x - 2.5)^2$ . На рисунках (Рис: 3.1) - (Рис: 3.4) представлено функції переміщень  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  та напружень  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$  відповідно.

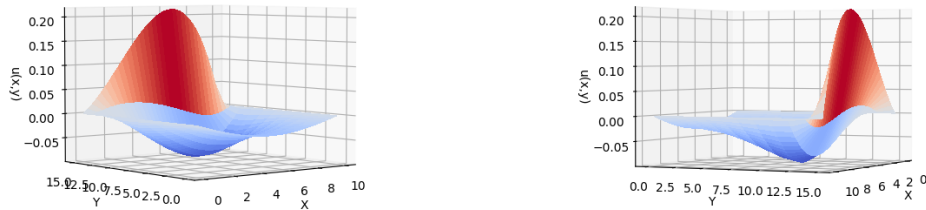


Рис. 3.1: Функція  $u(x, y)$

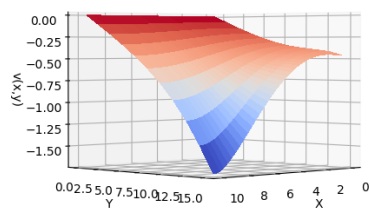
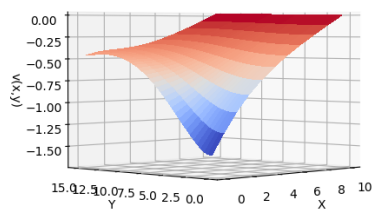


Рис. 3.2: Функція  $v(x, y)$

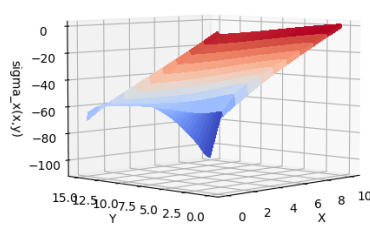
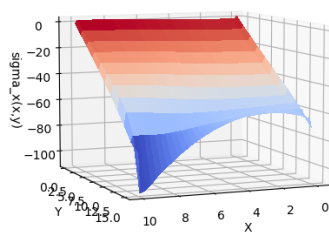


Рис. 3.3: Функція  $\sigma_x(x, y)$

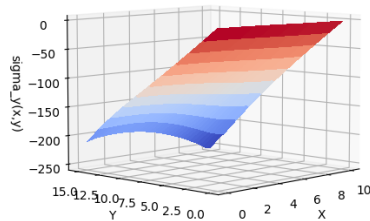
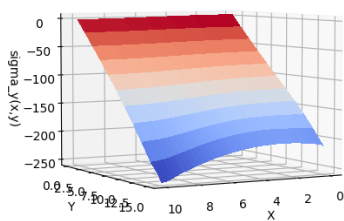


Рис. 3.4: Функція  $\sigma_y(x, y)$

## 3.2 Динамічна задача теорії пружності для прямокутної області за умов ідеального контакту на бічних гранях

### 3.2.1 Постановка задачі

Розглядається пружне прямокутне тіло (Рис: 2.1), яке займає область, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ .

До грані  $y = b$  додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y, t)|_{y=b} = -p(x, t), \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{y=b} = 0 \quad (3.30)$$

де  $p(x, t)$  відома функція. На бічних та нижній гранях виконуються умови ідеального контакту

$$u(x, y, t)|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{x=0} = 0 \quad (3.31)$$

$$u(x, y, t)|_{x=a} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{x=a} = 0 \quad (3.32)$$

$$v(x, y, t)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{y=0} = 0 \quad (3.33)$$

Потрібно відшукати розв'язок рівнянь Ламе

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right) = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3.34)$$

за умови виконання крайових умов (3.30) - (3.33)

Тут і далі розглянуто постановка задачі у випадку гармонічних коливань

$$u(x, y, t) = u(x, y)e^{i\omega t}, \quad v(x, y, t) = v(x, y)e^{i\omega t}, \quad p(x, y, t) = p(x, y)e^{i\omega t} \quad (3.35)$$

З урахуванням подання переміщень (3.35) рівняння Ламе переформульовано:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{\omega^2}{c_1^2} u(x,y) \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} \right) = -\frac{\omega^2}{c_2^2} v(x,y) \end{cases} \quad (3.36)$$

Граничні умови набувають вигляду:

$$\begin{cases} \sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x,t), \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=b} = 0 \\ v(x,y)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=0} = 0 \\ u(x,y)|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=0} = 0 \\ u(x,y)|_{x=a} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=a} = 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

Треба знайти хвильове поле пружного прямокутника, що задовольняє крайову задачу (3.36), (3.37).

### 3.2.2 Побудова точного розв'язку вихідної задачі

Для того, щоби звести задачу до одновимірної задачі у просторі трансформант, використано інтегральне перетворення Фур'є за змінною  $x$  до рівнянь (3.5):

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y) \sin(\alpha_n x) \\ v(x,y) \cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (3.38)$$

Після інтегрування за частинами обох рівнянь Ламе отримаємо наступні рівняння у просторі трансформант

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) + (-\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) = 0 \\ (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) + (-\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

Застосовуючи інтегральне перетворення (3.38) до крайових умов

(3.37), отримаємо крайові умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} ((2G + \lambda)v'_n(y) + \alpha_n \lambda u_n(y))|_{y=b} = -p_n \\ (u'_n(y) - \alpha_n v_n(y))|_{y=b} = 0 \\ v_n(y)|_{y=0} = 0 \\ (u'_n(y) - \alpha_n v_n(y))|_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

де  $p_n = \int_0^a p(x) \cos(\alpha_n x) dx$

Для того щоб розв'язати задачу у просторі трансформант, її переписано у векторній формі. Рівняння рівноваги (3.39) запишемо у наступному вигляді:

$$L_2 [Z_n(y)] = 0 \quad (3.41)$$

$$L_2 [Z_n(y)] = A * Z''_n(y) + B * Z'_n(y) + C * Z_n(y) \quad (3.42)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix}, \quad Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (3.40) запишемо у наступному вигляді:

$$U_i [Z_n(y)] = D_i \quad (3.43)$$

$$U_i [Z_n(y)] = E_i * Z'_n(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \quad (3.44)$$

де  $i = \overline{0, 1}$ ,  $b_0 = b$ ,  $b_1 = 0$ ,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Будемо шукати однорідний розв'язок рівняння, для цього спочатку побудуємо фундаментальну матрицю рівняння (3.9). Її будемо шукати у наступному поданні [6]:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \quad (3.45)$$

Де  $M(s)$  - характеристична матриця рівняння (3.41), а  $C$  - замкнений контур який містить усі особливі точки. Матрицю  $M(s)$  будемо шукати з наступної умови

$$L_2 [e^{sy} * I] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

де матриця  $M(s)$  має вигляд:

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Знайдемо тепер  $M^{-1}(s)$ , яку побудовано у наступній формі  $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M}(s)}{\det[M(s)]}$ , де  $\widetilde{M}(s)$  - транспонована матриця алгебричних доповнень,  $\det[M(s)]$  - детермінант матриці

$$\widetilde{M}(s) = \begin{pmatrix} s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s \\ -\alpha_n \mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \det[M(s)] &= \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{vmatrix} = \\ &= (s - s_1)(s + s_1)(s - s_2)(s + s_2), \end{aligned} \quad (3.49)$$

де  $s_1, s_2, -s_1, -s_2$  корені  $\det[M(s)] = 0$ , детальне знаходження яких наведено у Додатку В.



Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матриці за допомогою теореми про лишки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds &= \frac{2\pi i}{2\pi i(1 + \mu_0)} \sum_{i=1}^4 \text{Res} \left[ e^{sy} \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]} \right] = \\ &= (Y_0(y) + Y_1(y) + Y_2(y) + Y_3(y)) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} Y_0(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s + s_1)(s - s_2)(s + s_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=s_1} = \\ &= \frac{e^{s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \begin{pmatrix} s_1^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s_1 \\ -\alpha_n \mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} Y_1(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s - s_1)(s - s_2)(s + s_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-s_1} = \\ &= -\frac{e^{-s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \begin{pmatrix} s_1^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 s_1 \\ \alpha_n \mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} Y_2(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s + s_2)(s - s_1)(s + s_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=s_2} = \\ &= \frac{e^{s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \begin{pmatrix} s_2^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s_2 \\ -\alpha_n \mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} Y_3(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s - s_2)(s - s_1)(s + s_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-s_2} = \\ &= -\frac{e^{-s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \begin{pmatrix} s_2^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 s_2 \\ \alpha_n \mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Отримаємо розв'язок однорідного рівняння у просторі трансформант, який подано у формі

$$Z_n(y) = (Y_0(y) + Y_1(y)) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (Y_2(y) + Y_3(y)) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Для того, щоб відшукати невідомі коефіцієнти  $c_i$ ,  $i = \overline{1,4}$  потрібно задовольнити граничні умови (3.43) (Додаток Е). Тепер можна записати фінальний розв'язок векторної крайової задачі у просторі трансформант:

$$\begin{aligned} u_n(y) = & \frac{(s_1^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1 y} - e^{-s_1 y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)(1 + \mu_0)} c_1 + \\ & + \frac{(s_2^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2 y} - e^{-s_2 y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)(1 + \mu_0)} c_3 + \\ & + \frac{(s_1 \alpha_n y)(e^{s_1 y} + e^{-s_1 y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)(1 + \mu_0)} c_2 + \frac{(s_2 \alpha_n y)(e^{s_2 y} + e^{-s_2 y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)(1 + \mu_0)} c_4 \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} v_n(y) = & \frac{(s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1 y} - e^{-s_1 y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)(1 + \mu_0)} c_2 + \\ & + \frac{(s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2 y} - e^{-s_2 y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)(1 + \mu_0)} c_4 - \\ & - \frac{(s_1 \alpha_n y)(e^{s_1 y} + e^{-s_1 y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)(1 + \mu_0)} c_1 - \frac{(s_2 \alpha_n y)(e^{s_2 y} + e^{-s_2 y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)(1 + \mu_0)} c_3 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Використовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є для трансформант переміщень (3.55), (3.56) завершує побудову розв'язку вихідної задачі

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (3.57)$$

$$v(x, y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (3.58)$$

Останній крок - це знаходження  $v_0(y)$  у випадку коли  $n = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ . Для цього повернемося до другого рівняння (3.39), та запишем його

для цього випадку:

$$(1 + \mu_0)v_0''(y) + \frac{\omega^2}{c_2^2}v_0(y) = 0 \quad (3.59)$$

Та запишемо відповідні граничні умови:

$$\begin{cases} (2G + \lambda)v_0'(y)|_{y=b} = -p_0 \\ v_0(y)|_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

де  $p_0 = \int_0^a p(x)dx$

Розв'язок рівняння (3.59) буде мати вигляд:

$$v_0(y) = c_1 \cos \left( y \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1 + \mu_0)}} \right) + c_2 \sin \left( y \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1 + \mu_0)}} \right) \quad (3.61)$$

Отже

$$v_0(y) = \frac{-p_0}{(2G + \lambda) \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1 + \mu_0)}} \sin \left( b \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1 + \mu_0)}} \right)} \sin \left( y \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1 + \mu_0)}} \right) \quad (3.62)$$

### 3.2.3 Числові розрахунки

Наведені чисельні експерименти розглядаються для сталі ( $E = 200$  ГПа,  $\mu = 0.25$ ).

Розглянута прямокутна область  $0 \leq x \leq 10$ ,  $0 \leq y \leq 15$ , при функції навантаження  $p(x) = (x - 2.5)^2$  та частоті коливань  $\omega = 0.75$ . На малюнках (Рис: 3.1), (Рис: 3.2), (Рис: 3.3), (Рис: 3.4) представлені функції переміщень  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  та напружень  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$  відповідно.

## 3.3 Висновки до третього розділу

Отримано точне розв'язок статичної та динамічної задачі для прямокутної області за умов ідеального контакту на бічних гранях. До-

слідженню поля переміщень та напружень для різних видів навантаження і розмірів прямокутної області.

## 4 ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ ЗА УМОВ ДРУГОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ НА БІЧНИХ ГРАНЯХ

У даному розділі досліджено плоскі статична та динамічна задачі теорії пружності для прямокутної області, за умов другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях.

Вихідні задачі зведено до одновимірної задачі у просторі трансформант за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Розв'язок одновимірної задачі у просторі трансформант знайдено як суперпозиція загального розв'язку векторного однорідного рівняння та часткового розв'язку неоднорідного рівняння. Загальний розв'язок векторного однорідного рівняння знайдено за допомогою методу матричного диференціального числення. Частковий розв'язок неоднорідного рівняння знайдено за допомогою матричної функції Гріна. Остаточне подання для полів переміщень та напружень наведено за допомогою оберненого перетворення Фур'є.

Проведено чисельний аналіз отриманих функцій переміщень та напружень для різних розмірів прямокутної області та різних видів навантаження.

Результати розділу опубліковані в [14], [18], а також доповідалась на конференції [15], [19].

## 4.1 Статична задача теорії пружності для прямокутної області за умов другої основної задачі на бічних гранях

### 4.1.1 Постановка задачі

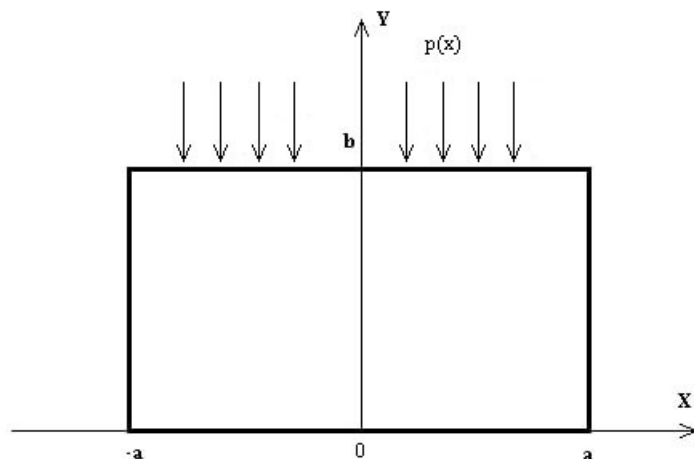


Рис. 4.1: Геометрія проблеми

Розглядається пружна прямокутне тіло (Рис: 4.1), яке займає область, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями  $-a \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ .

На грані  $y = b$  додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=b} = 0 \quad (4.1)$$

де  $p(x)$  відома функція.

На бічних гранях виконується умова другої основної задачі теорії пружності

$$u(x, y)|_{x=\pm a} = 0, \quad v(x, y)|_{x=\pm a} = 0 \quad (4.2)$$

На нижній грані виконується умова ідеального контакту

$$v(x, y)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=0} = 0 \quad (4.3)$$

Потрібно відшукати розв'язок рівнянь рівноваги

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

за умови виконання (4.1) - (4.3)

Щоб розв'язати поставлену задачу буде розглянуто половона прямокутної області  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  та використовуючи властивості симетрії граничні умови на бічних гранях будуть мати наступний вигляд:

$$u(x, y)|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=0} = 0 \quad (4.5)$$

$$u(x, y)|_{x=a} = 0, \quad v(x, y)|_{x=a} = 0 \quad (4.6)$$

#### 4.1.2 Розв'язання векторної крайовою задачі у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаємо інтегральне перетворення Фур'є по змінній  $x$  у до рівнянь (4.4) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x, y) \sin(\alpha_n x) \\ v(x, y) \cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (4.7)$$

Для цього помножимо перше та друге рівняння (4.4) на  $\sin(\alpha_n x)$  та  $\cos(\alpha_n x)$  відповідно та проінтегруємо по змінній  $x$  на інтервалі  $0 \leq x \leq a$ .

Розглянемо перше рівняння:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \sin(\alpha_n x) dx + \int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \sin(\alpha_n x) dx + \\ & + \mu_0 \left( \int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \sin(\alpha_n x) dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \sin(\alpha_n x) dx \right) = 0 \end{aligned}$$

Розглянемо

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \sin(\alpha_n x) dx = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \sin(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} - \\
& - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cos(\alpha_n x) dx = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \sin(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} - \\
& - \alpha_n \left( u(x, y) \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a u(x, y) \sin(\alpha_n x) dx \right) = \\
& = -\alpha_n^2 u_n(y)
\end{aligned}$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \sin(\alpha_n x) dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^a u(x, y) \sin(\alpha_n x) dx = u_n''(y)$$

Розглянемо

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \sin(\alpha_n x) dx = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \sin(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} - \\
& - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cos(\alpha_n x) dx = -\alpha_n \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a v(x, y) \cos(\alpha_n x) dx = -\alpha_n v_n'(y)
\end{aligned}$$

Тоді перше рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2 \mu_0) u_n(y) = 0$$

Розглянемо друге рівняння

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} \cos(\alpha_n x) dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \cos(\alpha_n x) dx + \\
& + \mu_0 \left( \int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \cos(\alpha_n x) dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \cos(\alpha_n x) dx \right) = 0
\end{aligned}$$

Розглянемо

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} \cos(\alpha_n x) dx = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \\
& + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \sin(\alpha_n x) dx = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \\
& + \alpha_n \left( v(x, y) \sin(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a v(x, y) \cos(\alpha_n x) dx \right) = \\
& = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=a} \cos(\alpha_n a) - \alpha_n^2 v_n(y)
\end{aligned}$$



Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \cos(\alpha_n x) dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^a v(x, y) \cos(\alpha_n x) dx = v_n''(y)$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} \cos(\alpha_n x) dx &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \\ &+ \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \sin(\alpha_n x) dx = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \\ &+ \alpha_n \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a u(x, y) \sin(\alpha_n x) dx = \alpha_n u_n'(y) \end{aligned}$$

Тоді друге рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$(1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - (\alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = - \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=a} \cos(\alpha_n a)$$

Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - \alpha_n^2 (1 + \mu_0) u_n(y) = 0 \\ (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = - \cos(\alpha_n) f(y) \end{cases} \quad (4.8)$$

Де  $f(y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=a}$  - невідома функція

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} ((2G + \lambda) v_n'(y) + \alpha_n \lambda u_n(y)) \Big|_{y=b} = -p_n \\ (u_n'(y) - \alpha_n v_n(y)) \Big|_{y=b} = 0 \\ v_n(y) \Big|_{y=0} = 0 \\ (u_n'(y) - \alpha_n v_n(y)) \Big|_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Де  $p_n = \int_0^a p(x) \cos(\alpha_n x) dx$

Для того щоб розв'язати задачу у просторі трансформант, перепишемо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (4.8) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} L_2 [Z_n(y)] &= A * Z_n''(y) + B * Z_n'(y) + C * Z_n(y) \\ L_2 [Z_n(y)] &= F_n(y) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2(1 + \mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix}$$

$$Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}, \quad F_n(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\alpha_n a) f(y) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (4.9) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} U_i [Z_n(y)] &= E_i * Z'_n(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ U_i [Z_n(y)] &= D_i \end{aligned} \tag{4.11}$$

Де  $i = \overline{0, 1}$ ,  $b_0 = b$ ,  $b_1 = 0$ ,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (4.10). Шукати її будемо у наступному вигляді [6]:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \tag{4.12}$$

Де  $M(s)$  - характеристична матриця рівняння (4.10), а  $C$  - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умови

$$L_2 [e^{sy} * I] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
L_2 [e^{sy} * I] &= e^{sy} (s^2 A * I + sB * I + C * I) = \\
&= e^{sy} \left( \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2(1 + \mu_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_n^2(1 + \mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix} \right) = \\
&= e^{sy} \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0) & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
M(s) &= \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0) & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 \end{pmatrix} \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Знайдемо тепер  $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M}(s)}{\det[M(s)]}$ .

$$\widetilde{M}(s) = \begin{pmatrix} s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 & \alpha_n \mu_0 s \\ -\alpha_n \mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0) \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
\det[M(s)] &= \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 \end{vmatrix} = \\
&= (1 + \mu_0)(s - \alpha_n)^2(s + \alpha_n)^2 \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Де  $\alpha_n, -\alpha_n$ , корені  $\det[M(s)] = 0$ , детальне знаходження яких наведено в (Додаток В).

Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds &= \frac{2\pi i}{2\pi i(1 + \mu_0)} \sum_{i=1}^2 \text{Res} \left[ e^{sy} \frac{\widetilde{M}(s)}{\det[M(s)]} \right] = \\
&= \frac{1}{(1 + \mu_0)} (Y_0(y) + Y_1(y))
\end{aligned}$$

Знайдем  $Y_0(y)$ :

$$\begin{aligned}
Y_0(y) &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{e^{sy}}{(s + \alpha_n)^2} \widetilde{M}(s) \right) \Big|_{s=\alpha_n} = \\
&= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 & \alpha_n \mu_0 y \\ -\alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 \end{pmatrix} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Знайдем  $Y_1(y)$ :

$$\begin{aligned} Y_1(y) &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{e^{sy}}{(s - \alpha_n)^2} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-\alpha_n} = \\ &= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n \mu_0 y \\ \alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Для побудови матриці-функції Гріна спочатку знайдем тепер фундаментальні базисні матриці  $\Psi_0(y)$ ,  $\Psi_1(y)$ , шукати їх будемо у наступному вигляді:

$$\Psi_i(y) = Y_0(y) * C_1^i + Y_2(y) * C_2^i \quad (4.19)$$

Залишилось знайти невідомі матриці коефіцієнтів  $C_1^0$ ,  $C_2^0$ ,  $C_1^1$ ,  $C_2^1$  використовуючи граничні умови (4.11). Покрокове знаходження яких наведено у (Додаток С). Для подальшого введемо наступні позначення для елементів матриць  $\Psi_0(y)$ ,  $\Psi_1(y)$ :

$$\Psi_0(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^0(y) & \Psi_2^0(y) \\ \Psi_3^0(y) & \Psi_4^0(y) \end{pmatrix}, \quad \Psi_1(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^1(y) & \Psi_2^1(y) \\ \Psi_3^1(y) & \Psi_4^1(y) \end{pmatrix}$$

Таким чином матрицю Гріна можемо записати у вигляді:

$$G(y, \xi) = \begin{cases} \Psi_0(y) * \Psi_1(\xi), & 0 \leq y < \xi \\ \Psi_1(y) * \Psi_0(\xi), & \xi < y \leq b \end{cases} \quad (4.20)$$

Для данної матриці Гріна виконано усі властивості, зокрема виконані однорідні граничні умови (4.11) та однорідні рівняння рівноваги у просторі трансформант (4.10):

$$L_2 [G(y, \xi)] = 0$$

$$U_0 [G(y, \xi)] = 0, \quad U_1 [G(y, \xi)],$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок крайової задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y) = \int_0^b G(y, \xi) F_n(\xi) d\xi + \Psi_0(y) * D_0 + \Psi_1(y) * D_1 \quad (4.21)$$

Введемо наступні позначення  $G(y, \xi) = \begin{pmatrix} g_1(y, \xi) & g_2(y, \xi) \\ g_3(y, \xi) & g_4(y, \xi) \end{pmatrix}$ ,  $F_n(y) = \begin{pmatrix} f_n^1(y) \\ f_n^2(y) \end{pmatrix}$ ,  $\Psi_i(y) = \begin{pmatrix} \psi_i^1(y) & \psi_i^2(y) \\ \psi_i^3(y) & \psi_i^4(y) \end{pmatrix}$ ,  $i = 0, 1$ . Враховуючи це, шукані функції перемішень у просторі трансформант можна записати у наступному вигляді

$$u_n(y) = \int_0^b [g_1(y, \xi) f_n^1(\xi) + g_2(y, \xi) f_n^2(\xi)] d\xi - \psi_0^2(y) p_n \quad (4.22)$$

$$v_n(y) = \int_0^b [g_3(y, \xi) f_n^1(\xi) + g_4(y, \xi) f_n^2(\xi)] d\xi - \psi_0^4(y) p_n \quad (4.23)$$

Використовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (4.22), (4.23), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (4.24)$$

$$v(x, y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (4.25)$$

Знайдем тепер  $v_0(y)$  розглянувши задачу у просторі трансформант (4.8), (4.9) при  $n = 0$ ,  $\alpha_n = 0$ . Детальний розв'язок якої наведено в (Додаток D). Тоді остаточний розв'язок  $v(x, y)$  буде мати вигляд

$$v(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x) - \frac{p_0}{a(2G + \lambda)} - \quad (4.26)$$

$$- \frac{1}{a(1 + \mu_0)} \int_0^b g(y, \xi) f(\xi) d\xi \quad (4.27)$$

### 4.1.3 Розв'язання сингулярного інтегрального рівняння задачі

Залишилось знайти невідому функцію  $f(y)$  для якої побудуємо інтегральне рівняння використовуючи граничну умову  $\sigma_y(x, y)|_{y=b} =$

$$-p(x).$$

$$(2G + \lambda) \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=b} + \lambda \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Big|_{y=b} = -p(x) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} & - \frac{(2G + \lambda)}{a(1 + \mu_0)} \int_0^b \frac{\partial g(y, \xi)}{\partial y} \Big|_{y=b} f(\xi) d\xi - \\ & - \frac{2(2G + \lambda)}{a} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^b [g_4(y, \xi) \cos(\alpha_n a) f(\xi)] d\xi + \psi_0^4(y) p_n \right) \\ & \cos(\alpha_n x) \Big|_{y=b} - \frac{2\lambda}{a} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^b [g_2(y, \xi) \cos(\alpha_n a) f(\xi)] d\xi + \psi_0^2(y) p_n \right) \\ & \sin(\alpha_n x) \Big|_{y=b} = -p(x) \end{aligned}$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} a_1(x) = & ap(x) - 2(2G + \lambda) \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_0^4(y) p_n \cos(\alpha_n x) \Big|_{y=b} - \\ & - 2\lambda \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_0^2(y) p_n \sin(\alpha_n x) \Big|_{y=b} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Враховуючи його отримаємо наступне інтегральне рівняння відносно  $f(\xi)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{(2G + \lambda)}{(1 + \mu_0)} \int_0^b \frac{\partial g(y, \xi)}{\partial y} \Big|_{y=b} f(\xi) d\xi + \\ & + \int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n a) \cos(\alpha_n x) \left[ (2G + \lambda) \frac{\partial g_4(y, \xi)}{\partial y} + \alpha_n \lambda g_2(y, \xi) \right] \Big|_{y=b} \\ & f(\xi) d\xi = a_1(x) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Розглянемо ряд:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n a) \cos(\alpha_n x) \left[ (2G + \lambda) \frac{\partial g_4(y, \xi)}{\partial y} + \alpha_n \lambda g_2(y, \xi) \right] \Big|_{y=b} = \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n^{-1} e^{\alpha_n(\xi-b)} \cos(\alpha_n x) \left[ \frac{\partial g_4(\widetilde{y}, \xi)}{\partial y} + \lambda g_2(\widetilde{y}, \xi) \right] \Big|_{y=b} = \\
& = \sum_{n=1}^N (-1)^n \alpha_n^{-1} e^{\alpha_n(\xi-b)} \cos(\alpha_n x) \left[ \frac{\partial g_4(\widetilde{y}, \xi)}{\partial y} + \lambda g_2(\widetilde{y}, \xi) \right] \Big|_{y=b} + \\
& + a_2 \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} \cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) + \\
& + a_2 \sum_{n=0}^N (-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} \cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) - \\
& - a_2 \sum_{n=0}^N (-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} \cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) = \\
& = a_2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} \cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) + a_3(\xi, x)
\end{aligned}$$

Де:

$$a_2 = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\partial g_4(\widetilde{y}, \xi)}{\partial y} + \lambda g_2(\widetilde{y}, \xi) \right] \Big|_{y=b},$$

$$\begin{aligned}
a_3(\xi, x) &= \sum_{n=1}^N \cos(\alpha_n a) \cos(\alpha_n x) \left[ (2G + \lambda) \frac{\partial g_4(y, \xi)}{\partial y} + \alpha_n \lambda g_2(y, \xi) \right] \Big|_{y=b} - \\
&- a_2 \sum_{n=0}^N (-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} \cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)
\end{aligned}$$

Використовуючи формулу 5.4.12.8 [8] отримаємо:

$$\begin{aligned}
& a_2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} \cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) + a_3(\xi, x) = \\
& = \frac{a_2}{4} \ln \left[ \frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) + \cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) - \cos(\frac{\pi}{2a}x)} \right] + a_3(\xi, x)
\end{aligned}$$

Повернемося до інтегралу

$$\begin{aligned}
& \frac{(2G + \lambda)}{(1 + \mu_0)} \int_0^b \frac{\partial g(y, \xi)}{\partial y} \Big|_{y=b} f(\xi) d\xi + \\
& + \int_0^b \left( \frac{a_2}{4} \ln \left[ \frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b - \xi)) + \cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b - \xi)) - \cos(\frac{\pi}{2a}x)} \right] + a_3(\xi, x) \right) f(\xi) d\xi = \\
& = \int_0^b \left( \frac{a_2}{4} \ln \left[ \frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b - \xi)) + \cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b - \xi)) - \cos(\frac{\pi}{2a}x)} \right] + a_3(\xi, x) + \right. \\
& + \left. \frac{(2G + \lambda)}{(1 + \mu_0)} \frac{\partial g(y, \xi)}{\partial y} \Big|_{y=b} \right) f(\xi) d\xi = \\
& = \left[ \begin{array}{c} t = \frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b - \xi)) - 1}{1 - ch(\frac{\pi}{2a}b)} \\ sh(\frac{\pi}{2a}(b - \xi)) d\xi = -\frac{2a}{\pi} (ch(\frac{\pi}{2a}b) - 1) dt \\ \xi = 0, \quad t = 1 \\ \xi = b, \quad t = 0 \\ \xi = b - \frac{2a}{\pi} arch((ch(\frac{\pi}{2a}b) - 1)t + 1) \end{array} \right] = \\
& = a_5 \int_0^b a_4(t) \left( \frac{a_2}{4} \ln \left[ \frac{t + \cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t - \cos(\frac{\pi}{2a}x)} \right] + a_3(\widetilde{t}, x) \right) \widetilde{f(t)} dt \quad (4.30)
\end{aligned}$$

де:

$$\begin{aligned}
a_3(\widetilde{t}, x) &= a_3 \left( b - \frac{2a}{\pi} arch((ch(\frac{\pi}{2a}b) - 1)t + 1), x \right) + \\
&+ \frac{(2G + \lambda)}{(1 + \mu_0)} \frac{\partial g(y, b - \frac{2a}{\pi} arch((ch(\frac{\pi}{2a}b) - 1)t + 1))}{\partial y} \Big|_{y=b} \\
f(t) &= f(b - \frac{2a}{\pi} arch((ch(\frac{\pi}{2a}b) - 1)t + 1)) \\
a_4(t) &= \frac{1}{sh(arch[(ch(\frac{\pi}{2a}b) - 1)t + 1])} \\
a_5 &= \frac{2a}{\pi} (ch(\frac{\pi}{2a}b) - 1)
\end{aligned}$$

Таким чином отримаємо наступне інтегральне рівняння:

$$a_5 \int_0^b a_4(t) \left( \frac{a_2}{4} \ln \left[ \frac{t + \cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t - \cos(\frac{\pi}{2a}x)} \right] + a_3(\widetilde{t}, x) \right) \widetilde{f(t)} dt = a_1(x) \quad (4.31)$$

Розв'язок якого будемо шукати у наступному вигляді:

$$\widetilde{f(t)} = \frac{1}{a_2 a_4(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k T_{2k+1}(t) \quad (4.32)$$



де  $\varphi_k$  - невідомі коефіцієнти,  $T_{2k+1}(t)$  - поліном Чебишева першого роду.

Таким чином отримаємо

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k}{4} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \ln \left[ \frac{t + \cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t - \cos(\frac{\pi}{2a}x)} \right] \frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\widetilde{a_3(t, x)}}{a_2} \frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{a_1(x)}{a_5} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Використовуючи формулу В.1.9 [7]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \frac{T_{2k+1}(\cos(\frac{\pi}{2a}x))}{4(2k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\widetilde{a_3(t, x)}}{a_2} \frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{a_1(x)}{a_5} \quad (4.33)$$

Введем позначення

$$l = \cos(\frac{\pi}{2a}x), \quad \widetilde{a_1(l)} = \frac{a_1(\frac{2a}{\pi} \arccos(l))}{a_5}$$

Помножимо обидві частини рівняння (4.33) скалярно на  $\frac{T_{2m+1}(l)}{\sqrt{1-l^2}}$  та проінтегруємо по змінній  $l$  на інтервалі  $(-1; 1)$ . Та використовуючи формулу 2.3.2 [7] отримаємо наступне бескінечну алгебричну систему відносно невідомих коефіцієнтів  $\varphi_k$ , яка в подальшому буде розв'язуватись методом редукції.

$$\frac{\phi_m \pi}{8(2m+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k g_{k,m} = f_m \quad (4.34)$$

Де  $g_{k,m} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_{2m+1}(l)}{\sqrt{1-l^2}} \int_0^1 \frac{\widetilde{a_3(t, \frac{2a}{\pi} \arccos(l))}}{a_2} \frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt dl$ ,  $f_m = \int_{-1}^1 \frac{T_{2m+1}(l) \widetilde{a_1(l)}}{\sqrt{1-l^2}} dl$  інтеграли відомих функцій.

#### 4.1.4 Числові розрахунки

Наведені чисельні експеренти розглядаються для сталі ( $E = 200$  ГПа,  $\mu = 0.25$ ).

Розглянута прямокутна область  $0 \leq x \leq 10$ ,  $0 \leq y \leq 15$ , при функції навантаження  $p(x) = (x - 2.5)^2$ . На малюнках (Рис: 4.2),

(Рис: 4.3), (Рис: 4.4), (Рис: 4.5) представлені функції переміщень  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  та напружень  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$  відповідно.



Рис. 4.2: Функція  $u(x, y)$

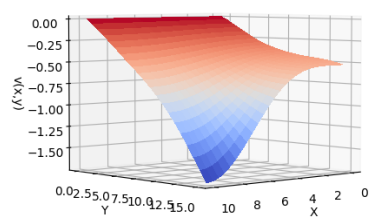
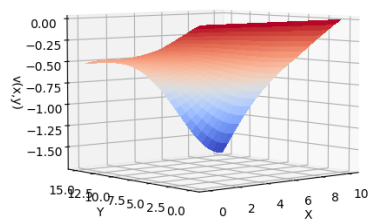


Рис. 4.3: Функція  $v(x, y)$

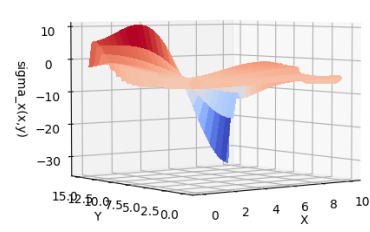
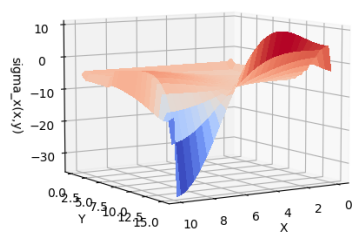


Рис. 4.4: Функція  $\sigma_x(x, y)$

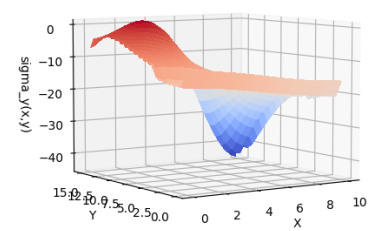
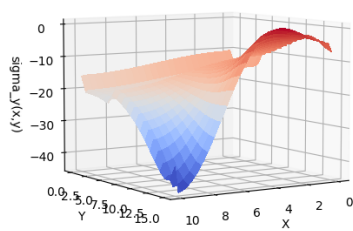


Рис. 4.5: Функція  $\sigma_y(x, y)$

## 4.2 Динамічна задача теорії пружності для прямокутної області за умов другої основної задачі на бічних гранях

### 4.2.1 Постановка задачі

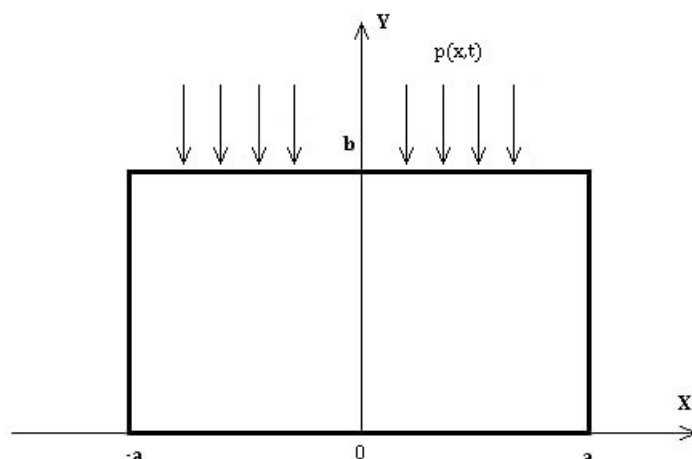


Рис. 4.6: Геометрія проблеми

Розглядається пружна сама прямокутна область (Рис: ??), яка займає облась, що описується у декартовій системі координат співвідношенням  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ .

До прямокутної області на грані  $y = b$  додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y, t)|_{y=b} = -p(x, t), \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{y=b} = 0 \quad (4.35)$$

де  $p(x, t)$  відома функція. На бічних гранях виконується умова другої основної задачі теорії пружності

$$u(x, y, t)|_{x=\pm a} = 0, \quad v(x, y, t)|_{x=\pm a} = 0 \quad (4.36)$$

На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x, y, t)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{y=0} = 0 \quad (4.37)$$

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x \partial y} \right) = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial t^2} \end{cases} \quad (4.38)$$

Будемо розглядати випадок гармонічних коливань, тому можемо представити функції у наступному вигляді:

$$u(x, y, t) = u(x, y) e^{i\omega t}, \quad v(x, y, t) = v(x, y) e^{i\omega t}, \quad p(x, t) = p(x) e^{i\omega t} \quad (4.39)$$

Таким чином отримаємо наступні рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{\omega^2}{c_1^2} u(x, y) \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} \right) = -\frac{\omega^2}{c_2^2} v(x, y) \end{cases} \quad (4.40)$$

Також, щоб розв'язати поставлену задачу буде розглянута тільки половона прямокутної області  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  та використовуємо властивості симетрії граничні умови в результаті будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} \sigma_y(x, y)|_{y=b} = -p(x, t), \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=b} = 0 \\ v(x, y)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=0} = 0 \\ u(x, y)|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=0} = 0 \\ u(x, y)|_{x=a} = 0, \quad v(x, y)|_{x=a} = 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

#### 4.2.2 Розв'язання векторної крайовою задачі у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаємо інтегральне перетворення Фур'є по змінній  $x$  у до рівнянь (4.40) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x, y) \sin(\alpha_n x) \\ v(x, y) \cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (4.42)$$

Для цього помножимо перше та друге рівняння (4.40) на  $\sin(\alpha_n x)$  та  $\cos(\alpha_n x)$  відповідно та проінтегруємо по змінній  $x$  на інтервалі  $0 \leq x \leq a$ . Покрокове інтегрування рівняння аналогічне розглянутого в попередній статичній задачі окрім того, що в обидвах рівняннях є додаткові елементи  $\int_0^a \frac{\omega^2}{c_1^2} u(x, y) \sin(\alpha_n x) dx = \frac{\omega^2}{c_1^2} u_n(y)$ ,  $\int_0^a \frac{\omega^2}{c_2^2} v(x, y) \cos(\alpha_n x) dx = \frac{\omega^2}{c_2^2} v_n(y)$ .

Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) + (-\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) = 0 \\ (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) + (-\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = -\cos(\alpha_n) f(y) \end{cases} \quad (4.43)$$

Де  $f(y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} |_{x=a}$  - невідома функція

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} ((2G + \lambda) v_n'(y) + \alpha_n \lambda u_n(y)) |_{y=b} = -p_n \\ (u_n'(y) - \alpha_n v_n(y)) |_{y=b} = 0 \\ v_n(y) |_{y=0} = 0 \\ (u_n'(y) - \alpha_n v_n(y)) |_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

Де  $p_n = \int_0^a p(x) \cos(\alpha_n x) dx$

Для того щоб розв'язати задачу у просторі трансформант, перепишемо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (4.43) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} L_2 [Z_n(y)] &= A * Z_n''(y) + B * Z_n'(y) + C * Z_n(y) \\ L_2 [Z_n(y)] &= F_n(y) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix},$$

$$Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}, \quad F_n(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\alpha_n a) f(y) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (4.44) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} U_i [Z_n(y)] &= E_i * Z'_n(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ U_i [Z_n(y)] &= D_i \end{aligned} \quad (4.46)$$

Де  $i = \overline{0, 1}$ ,  $b_0 = b$ ,  $b_1 = 0$ ,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (4.45). Шукати її будемо у наступному вигляді [6]:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \quad (4.47)$$

Де  $M(s)$  - характеристична матриця рівняння (4.45), а  $C$  - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умови

$$L_2 [e^{sy} * I] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned}
L_2 [e^{sy} * I] &= e^{sy} (s^2 A * I + sB * I + C * I) = \\
&= e^{sy} \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \\
M(s) &= \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix} \quad (4.49)
\end{aligned}$$

Знайдемо тепер  $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]}$ .

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s \\ -\alpha_n \mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned}
\det[M(s)] &= \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{vmatrix} = \\
&= (s - s_1)(s + s_1)(s - s_2)(s + s_2) \quad (4.51)
\end{aligned}$$

Де  $s_1, s_2, -s_1, -s_2$  корені  $\det[M(s)] = 0$ , детальне знаходження яких наведено в (Додаток В).

Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds &= \frac{2\pi i}{2\pi i(1 + \mu_0)} \sum_{i=1}^4 \text{Res} \left[ e^{sy} \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]} \right] = \\
&= (Y_0(y) + Y_1(y) + Y_2(y) + Y_3(y))
\end{aligned}$$

Знайдем  $Y_0(y)$ :

$$\begin{aligned}
Y_0(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s + s_1)(s - s_2)(s + s_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=s_1} = \\
&= \frac{e^{s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \begin{pmatrix} s_1^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s_1 \\ -\alpha_n \mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \quad (4.52)
\end{aligned}$$



Знайдем  $Y_1(y)$ :

$$\begin{aligned} Y_1(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s-s_1)(s-s_2)(s+s_2)} \widetilde{M}(s) \right) \Big|_{s=-s_1} = \\ &= -\frac{e^{-s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \begin{pmatrix} s_1^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 s_1 \\ \alpha_n \mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Знайдем  $Y_2(y)$ :

$$\begin{aligned} Y_2(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s+s_2)(s-s_1)(s+s_1)} \widetilde{M}(s) \right) \Big|_{s=s_2} = \\ &= \frac{e^{s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \begin{pmatrix} s_2^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s_2 \\ -\alpha_n \mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Знайдем  $Y_3(y)$ :

$$\begin{aligned} Y_3(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s-s_2)(s-s_1)(s+s_1)} \widetilde{M}(s) \right) \Big|_{s=-s_2} = \\ &= -\frac{e^{-s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \begin{pmatrix} s_2^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 s_2 \\ \alpha_n \mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Для побудови матриці-функції Гріна спочатку знайдем тепер фундаментальні базисні матриці  $\Psi_0(y)$ ,  $\Psi_1(y)$ , шукати їх будемо у наступному вигляді:

$$\Psi_i(y) = (Y_0(y) + Y_1(y)) * C_1^i + (Y_2(y) + Y_3(y)) * C_2^i \quad (4.56)$$

Залишилось знайти невідомі матриці коефіцієнтів  $C_1^0$ ,  $C_2^0$ ,  $C_1^1$ ,  $C_2^1$  використовуючи граничні умови (4.46). Покрокове знаходження яких наведено у (Додаток С). Для подальшого введемо наступні позначення для елементів матриць  $\Psi_0(y)$ ,  $\Psi_1(y)$ :

$$\Psi_0(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^0(y) & \Psi_2^0(y) \\ \Psi_3^0(y) & \Psi_4^0(y) \end{pmatrix}, \quad \Psi_1(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^1(y) & \Psi_2^1(y) \\ \Psi_3^1(y) & \Psi_4^1(y) \end{pmatrix}$$

Таким чином матрицю Гріна можемо записати у вигляді:

$$G(y, \xi) = \begin{cases} \Psi_0(y) * \Psi_1(\xi), & 0 \leq y < \xi \\ \Psi_1(y) * \Psi_0(\xi), & \xi < y \leq b \end{cases} \quad (4.57)$$

Для данної матриці Гріна виконано усі властивості, зокрема виконані однорідні граничні умови (4.46) та однорідні рівняння рівноваги у просторі трансформант (4.45):

$$L_2 [G(y, \xi)] = 0$$

$$U_0 [G(y, \xi)] = 0, \quad U_1 [G(y, \xi)] = 0,$$

Введемо наступні позначення  $G(y, \xi) = \begin{pmatrix} g_1(y, \xi) & g_2(y, \xi) \\ g_3(y, \xi) & g_4(y, \xi) \end{pmatrix}$ . Враховуючи це, шукані функції перемішень у просторі трансформант можна записати у наступному вигляді

$$u_n(y) = - \int_0^b g_2(y, \xi) f(\xi) \cos(\alpha_n a) d\xi - \psi_0^2(y) p_n \quad (4.58)$$

$$v_n(y) = - \int_0^b g_4(y, \xi) f(\xi) \cos(\alpha_n a) d\xi - \psi_0^4(y) p_n \quad (4.59)$$

Використовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (4.58), (4.59), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (4.60)$$

$$v(x, y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (4.61)$$

Знайдем тепер  $v_0(y)$  розглянувши задачу у просторі трансформант (4.43), (4.44) при  $n = 0$ ,  $\alpha_n = 0$ . Детальний розв'язок якої

наведено в (Додаток D). Тоді остаточний розв'язок  $v(x, y)$  буде мати вигляд

$$v(x, y) = -\frac{1}{a(1 + \mu_0)} \int_0^b g(y, \xi) f(\xi) d\xi - \psi_0(y) \frac{p_0}{a(2G + \lambda)} - \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^b [g_4(y, \xi) \cos(\alpha_n a) f(\xi)] d\xi + \psi_0^4(y) p_n \right) \cos(\alpha_n x) \quad (4.62)$$

### 4.2.3 Розв'язання сингулярного інтегрального рівняння задачі

Залишилось знайти невідому функцію  $f(y)$  для якої побудуємо інтегральне рівняння використовуючи граничну умову  $\sigma_y(x, y)|_{y=b} = -p(x)$ .

$$\begin{aligned} (2G + \lambda) \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=b} + \lambda \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Big|_{y=b} = -p(x) \Leftrightarrow \\ -\frac{(2G + \lambda)}{a(1 + \mu_0)} \int_0^b \frac{\partial g(y, \xi)}{\partial y} \Big|_{y=b} f(\xi) d\xi - \psi_0'(b) \frac{p_0}{a} - \\ -\frac{2(2G + \lambda)}{a} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^b [g_4(y, \xi) \cos(\alpha_n a) f(\xi)] d\xi + \psi_0^4(y) p_n \right) \cos(\alpha_n x) \Big|_{y=b} - \\ -\frac{2\lambda}{a} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^b [g_2(y, \xi) \cos(\alpha_n a) f(\xi)] d\xi + \psi_0^2(y) p_n \right) \sin(\alpha_n x) \Big|_{y=b} = -p(x) \end{aligned}$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} a_1(x) = ap(x) - 2(2G + \lambda) \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_0^4(y) p_n \cos(\alpha_n x) \Big|_{y=b} - \\ - 2\lambda \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_0^2(y) p_n \sin(\alpha_n x) \Big|_{y=b} - \psi_0'(b) p_0 \end{aligned} \quad (4.63)$$

Враховуючи його отримаємо наступне інтегральне рівняння відносно  $f(\xi)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{(2G + \lambda)}{(1 + \mu_0)} \int_0^b \frac{\partial g(y, \xi)}{\partial y} \Big|_{y=b} f(\xi) d\xi + \\ & + \int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n a) \cos(\alpha_n x) \left[ (2G + \lambda) \frac{\partial g_4(y, \xi)}{\partial y} + \alpha_n \lambda g_2(y, \xi) \right] \Big|_{y=b} \\ & f(\xi) d\xi = a_1(x) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Розглянемо ряд:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n a) \cos(\alpha_n x) \left[ (2G + \lambda) \frac{\partial g_4(y, \xi)}{\partial y} + \alpha_n \lambda g_2(y, \xi) \right] \Big|_{y=b} = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n^{-1} e^{\alpha_n(\xi-b)} \cos(\alpha_n x) \left[ \frac{\partial g_4(\widetilde{y}, \xi)}{\partial y} + \lambda g_2(\widetilde{y}, \xi) \right] \Big|_{y=b} = \\ & = \sum_{n=1}^N (-1)^n \alpha_n^{-1} e^{\alpha_n(\xi-b)} \cos(\alpha_n x) \left[ \frac{\partial g_4(\widetilde{y}, \xi)}{\partial y} + \lambda g_2(\widetilde{y}, \xi) \right] \Big|_{y=b} + \\ & + a_2 \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2a}x\right) + \\ & + a_2 \sum_{n=0}^N (-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2a}x\right) - \\ & - a_2 \sum_{n=0}^N (-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2a}x\right) = \\ & = a_2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2a}x\right) + a_3(\xi, x) \end{aligned}$$

Де:

$$a_2 = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\partial g_4(\widetilde{y}, \xi)}{\partial y} + \lambda g_2(\widetilde{y}, \xi) \right] \Big|_{y=b},$$

$$\begin{aligned} a_3(\xi, x) &= \sum_{n=1}^N \cos(\alpha_n a) \cos(\alpha_n x) \left[ (2G + \lambda) \frac{\partial g_4(y, \xi)}{\partial y} + \alpha_n \lambda g_2(y, \xi) \right] \Big|_{y=b} - \\ & - a_2 \sum_{n=0}^N (-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2a}x\right) \end{aligned}$$

Використовуючи формулу 5.4.12.8 [8] отримаємо:

$$\begin{aligned} & a_2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} \cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) + a_3(\xi, x) = \\ & = \frac{a_2}{4} \ln \left[ \frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) + \cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) - \cos(\frac{\pi}{2a}x)} \right] + a_3(\xi, x) \end{aligned}$$

Повернемося до інтегралу

$$\begin{aligned} & \frac{(2G + \lambda)}{(1 + \mu_0)} \int_0^b \frac{\partial g(y, \xi)}{\partial y} \Big|_{y=b} f(\xi) d\xi + \\ & + \int_0^b \left( \frac{a_2}{4} \ln \left[ \frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) + \cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) - \cos(\frac{\pi}{2a}x)} \right] + a_3(\xi, x) \right) f(\xi) d\xi = \\ & = \int_0^b \left( \frac{a_2}{4} \ln \left[ \frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) + \cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) - \cos(\frac{\pi}{2a}x)} \right] + a_3(\xi, x) + \right. \\ & + \left. \frac{(2G + \lambda)}{(1 + \mu_0)} \frac{\partial g(y, \xi)}{\partial y} \Big|_{y=b} \right) f(\xi) d\xi = \\ & = \left[ \begin{array}{c} t = \frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) - 1}{1 - ch(\frac{\pi}{2a}b)} \\ sh(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) d\xi = -\frac{2a}{\pi} (ch(\frac{\pi b}{2a}) - 1) dt \\ \xi = 0, \quad t = 1 \\ \xi = b, \quad t = 0 \\ \xi = b - \frac{2a}{\pi} arch((ch(\frac{\pi b}{2a}) - 1)t + 1) \end{array} \right] = \\ & = a_5 \int_0^b a_4(t) \left( \frac{a_2}{4} \ln \left[ \frac{t + \cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t - \cos(\frac{\pi}{2a}x)} \right] + a_3(\widetilde{t}, x) \right) \widetilde{f}(t) dt \quad (4.65) \end{aligned}$$

Де:

$$\begin{aligned} & a_3(\widetilde{t}, x) = a_3 \left( b - \frac{2a}{\pi} arch((ch(\frac{\pi b}{2a}) - 1)t + 1), x \right) + \\ & + \frac{(2G + \lambda)}{(1 + \mu_0)} \frac{\partial g(y, b - \frac{2a}{\pi} arch((ch(\frac{\pi b}{2a}) - 1)t + 1))}{\partial y} \Big|_{y=b} \\ & f(t) = f(b - \frac{2a}{\pi} arch((ch(\frac{\pi b}{2a}) - 1)t + 1)) \\ & a_4(t) = \frac{1}{sh \left( arch \left[ (ch(\frac{\pi b}{2a}) - 1)t + 1 \right] \right)} \\ & a_5 = 2a(ch(\frac{\pi b}{2a}) - 1) \end{aligned}$$

Таким чином отримаємо наступне інтегральне рівняння:

$$\frac{a_5}{\pi} \int_0^b a_4(t) \left( \frac{a_2}{4} \ln \left[ \frac{t + \cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t - \cos(\frac{\pi}{2a}x)} \right] + a_3(\widetilde{t}, x) \right) \widetilde{f(t)} dt = a_1(x) \quad (4.66)$$

Розв'язок якого будемо шукати у наступному вигляді:

$$\widetilde{f(t)} = \frac{1}{a_2 a_4(t)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k T_{2k+1}(t) \quad (4.67)$$

Де  $\varphi_k$  - невідомі коефіцієнти,  $T_{2k+1}(t)$  - поліном Чебишева першого роду.

Таким чином отримаємо

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k}{4} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \ln \left[ \frac{t + \cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t - \cos(\frac{\pi}{2a}x)} \right] \frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{a_3(\widetilde{t}, x)}{a_2} \frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{a_1(x)}{a_5} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Використовуючи формулу В.1.9 [7]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \frac{T_{2k+1}(\cos(\frac{\pi}{2a}x))}{4(2k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{a_3(\widetilde{t}, x)}{a_2} \frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{a_1(x)}{a_5} \quad (4.68)$$

Введем позначення

$$l = \cos(\frac{\pi}{2a}x), \quad a_1(\widetilde{l}) = \frac{a_1(\frac{2a}{\pi} \arccos(l))}{a_5}$$

Помножимо обидві частини рівняння (4.68) скалярно на  $\frac{T_{2m+1}(l)}{\sqrt{1-l^2}}$  та проінтегруємо по змінній  $l$  на інтервалі  $(-1; 1)$ . Та використовуючи формулу 2.3.2 [7] отримаємо наступне бескінечну алгебричну систему відносно невідомих коефіцієнтів  $\varphi_k$ , яка в подальшому буде розв'язуватись методом редукції.

$$\frac{\phi_m \pi}{8(2m+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k g_{k,m} = f_m \quad (4.69)$$

Де  $g_{k,m} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_{2m+1}(l)}{\sqrt{1-l^2}} \int_0^1 \frac{a_3(t, \frac{2a}{\pi} \arccos(l))}{a_2} \frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt dl$ ,  $f_m = \int_{-1}^1 \frac{T_{2m+1}(l) a_1(\widetilde{l})}{\sqrt{1-l^2}} dl$  інтеграли відомих функцій.

#### 4.2.4 Числові розрахунки

Наведені чисельні експеренти розглядаються для сталі ( $E = 200$  ГПА,  $\mu = 0.25$ ).

Розглянута прямокутна область  $0 \leq x \leq 10$ ,  $0 \leq y \leq 15$ , при функції навантаження  $p(x) = (x - 2.5)^2$ .

### 4.3 Висновки до четвертого розділу розділу

Отримано точне розв'язок статичної та динамічної задачі для прямокутної області за умов другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях. Досліджено поля переміщень та напружень для різних видів навантаження і розмірів прямокутної області.

## Висновки



# Література

- [1] Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов разрезов тонких включений и подкреплений. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 344 с.
- [2] Попов Г.Я. Точные решения некоторых краевых задач механики деформируемого твёрдого тела. Одесса: Астропринт, 2013. 424 с.
- [3] Popov G. On the method of orthogonal polynomials in contact problems of the theory of elasticity. Journal of Applied Mathematics and Mechanics (1969). Volume 33, Issue 3, pp. 503-517
- [4] Попов Г. Я., Абдыманов С. А., Ефимов В. В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. Алматы: Изд. Рацах, 1999. 133 с.
- [5] Попов Г.Я. Точные решения некоторых краевых задач механики деформируемого твёрдого тела. Одесса: Астропринт, 2013. 424 с.
- [6] Gantmakher F. R. (1998) The theory of matrices. AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island.
- [7] Попов Г. Я., Реут В. В., Моисеев М. Г., Вайсфельд Н. Д. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів. Одесса: Астропринт, 2010. 120 с.
- [8] Прудников А.П.,Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды специальные функции. В 3 т. Т 1. Элементарные функции. 2-е издание, исправленное. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 632 с.
- [9] D. Nerukh, O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2019) Mixed plain boundary value problem of elasticity for a rectangular domain. 25-th

International Conference Engineering Mechanics. 2019, May 13-16, Svratka, Czech Republic. p. 255

- [10] O. V. Pozhylenkov (2019) The stress state of a rectangular elastic domain. Researches in Mathematics and Mechanics, Volume 24, Issue 2(34), pp. 88-96
- [11] Пожиленков О. В. Вайсфельд Н. Д. (2019) Мішана крайова задача теорії пружності для прямокутної області. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур, випуск 5, Львів, ст. 30-32
- [12] D. Nerukh, O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld 25-th international conference «Engineering Mechanics 2019» // Czech Republic, Svratka, 2019
- [13] Пожиленков О. В., Вайсфельд Н. Д. X Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» // Львів, 2019
- [14] O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2020) Stress state of a rectangular domain with the mixed boundary conditions. Procedia Structural Integrity, Volume 28, pp. 458-463
- [15] O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld «1st Virtual European Conference on Fracture» // Italy, 2020
- [16] O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2021) Stress state of an elastic rectangular domain under steady load. Procedia Structural Integrity, Volume 33, pp. 385-390
- [17] O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld «26th International Conference on Fracture and Structural Integrity» // Italy, Turin, 2021

[18] O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2022) Dynamic mixed problem of elasticity for a rectangular domain. Recent trends in Wave Mechanics and Vibrations, pp. 211-218

[19] O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld «10th International Conference on Wave Mechanics and Vibrations» // Portugal, Lisbon, 2022

## Додаток В

### ЗНАХОДЖЕННЯ КОРЕНІВ

#### РІВНЯННЯ $\det[M(s)] = 0$

Знайдемо корені  $\det[M(s)] = 0$

$$\begin{aligned}
 \det[M(s)] &= \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{vmatrix} = \\
 &= (s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) + (\alpha_n \mu_0 s)^2 = \\
 &= s^4 + s^4 \mu_0 - s^2 \alpha_n^2 + s^2 \frac{\omega^2}{c_2^2} - s^2 \alpha_n^2 - s^2 \alpha_n^2 \mu_0 + \alpha_n^4 - \alpha_n^2 \frac{\omega^2}{c_2^2} - s^2 \alpha_n^2 \mu_0 - \\
 &- s^2 \alpha_n^2 \mu_0 + \alpha_n^4 \mu_0 - \alpha_n^2 \frac{\omega^2}{c_2^2} + s^2 \frac{\omega^2}{c_1^2} + s^2 \mu_0 \frac{\omega^2}{c_1^2} - \alpha_n^2 \frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^4}{c_1^2 c_2^2} + s^2 \alpha_n^2 \mu_0^2 = \\
 &= (1 + \mu_0) s^4 + (-2\alpha_n^2 - 2\alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_2^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2} + \mu_0 \frac{\omega^2}{c_1^2}) s^2 + (\alpha_n^4 - \alpha_n^2 \frac{\omega^2}{c_2^2} + \\
 &+ \alpha_n^4 \mu_0 - \alpha_n^2 \mu_0 \frac{\omega^2}{c_2^2} - \alpha_n^2 \frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^4}{c_1^2 c_2^2})
 \end{aligned}$$

Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -2\alpha_n^2 - 2\alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_2^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2} + \mu_0 \frac{\omega^2}{c_1^2} \\
 a_2 &= \alpha_n^4 - \alpha_n^2 \frac{\omega^2}{c_2^2} + \alpha_n^4 \mu_0 - \alpha_n^2 \mu_0 \frac{\omega^2}{c_2^2} - \alpha_n^2 \frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^4}{c_1^2 c_2^2}
 \end{aligned}$$

Враховучи введені позначення отримаємо наступне рівняння:

$$(1 + \mu_0)s^4 + a_1s^2 + a_2 = 0$$

Таким чином отримаємо наступні корені рівняння:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4(1 + \mu_0)a_2}}{2(1 + \mu_0)}} \\ s_2 &= -\sqrt{\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4(1 + \mu_0)a_2}}{2(1 + \mu_0)}} \\ s_3 &= \sqrt{\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4(1 + \mu_0)a_2}}{2(1 + \mu_0)}} \\ s_4 &= -\sqrt{\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4(1 + \mu_0)a_2}}{2(1 + \mu_0)}} \end{aligned}$$

У випадку статичної задачі коли  $\omega = 0$  отримаємо наступні рівняння:

$$(1 + \mu_0)(s^4 - 2\alpha_n^2s^2 + \alpha_n^4) = 0$$

Таким чином отримаємо наступні корені

$$s_{1,2} = \alpha_n$$

$$s_{3,4} = -\alpha_n$$

# Додаток С

## ЗНАХОДЖЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ БАЗИСНИХ МАТРИЦЬ $\Psi_i(y)$ , $i = \overline{0, 1}$

Для знаходження фундаентальних базісних матриць  $\Psi_i(y)$  випишемо умови за яких будемо шукати коефіцієнти  $C_k^i$ ,  $i = \overline{0, 1}$ ,  $k = \overline{1, 2}$

$$U_0 [\Psi_0(y)] = I, \quad U_1 [\Psi_0(y)] = 0 \quad (\text{Ап.С. 1})$$

$$U_0 [\Psi_1(y)] = 0, \quad U_1 [\Psi_1(y)] = I, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_0 [\Psi_i(y)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix} * \Psi_i'(b) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix} * \Psi_i(b)$$

$$U_1 [\Psi_i(y)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \Psi_i'(0) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \Psi_i(0)$$

Введемо наступні позначення:

$$C_1^i = \begin{pmatrix} d_1^i & d_2^i \\ d_3^i & d_4^i \end{pmatrix}, \quad C_2^i = \begin{pmatrix} f_1^i & f_2^i \\ f_3^i & f_4^i \end{pmatrix}, \quad (\text{Ап.С. 2})$$

### Випадок динамічної задачі

Випадку статичної задачі випишемо значення елементів матриць  $\Psi_i(y)$ ,  $\Psi_i'(y)$ , враховуючи позначення (Ап.С. 2).

Елементи матриці  $\Psi_i(y)$ :

$$\begin{aligned}\Psi_i(y)_{1,1} = & \frac{1}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}[(s_1^2 + s_1^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_1^i + \\ & + (s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_3^i] + [(s_2^2 + s_2^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_1^i + \\ & + (s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_3^i]\frac{1}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_i(y)_{1,2} = & \frac{1}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}[(s_1^2 + s_1^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_2^i + \\ & + (s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_4^i] + [(s_2^2 + s_2^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_2^i + \\ & + (s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_4^i]\frac{1}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_i(y)_{2,1} = & \frac{1}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}[(-s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_1^i + \\ & + (s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_3^i] + [(-s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_1^i + \\ & + (s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_3^i]\frac{1}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_i(y)_{2,2} = & \frac{1}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}[(-s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_2^i + \\ & + (s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_4^i] + [(-s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_2^i + \\ & + (s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_4^i]\frac{1}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}\end{aligned}$$

Елементи матриці  $\Psi'_i(y)$ :

$$\begin{aligned}\Psi'_i(y)_{1,1} = & \frac{1}{2(s_1^2 - s_2^2)}[(s_1^2 + s_1^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_1^i + \\ & + (s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_3^i] + [(s_2^2 + s_2^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_1^i + \\ & + (s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_3^i]\frac{s_2}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi'_i(y)_{1,2} &= \frac{1}{2(s_1^2 - s_2^2)} [(s_1^2 + s_1^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_2^i + \\
&+ (s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_4^i] + [(s_2^2 + s_2^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_2^i + \\
&+ (s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_4^i] \frac{s_2}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi'_i(y)_{2,1} &= \frac{1}{2(s_1^2 - s_2^2)} [(-s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_1^i + \\
&+ (s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_3^i] + [(-s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_1^i + \\
&+ (s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_3^i] \frac{s_2}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi'_i(y)_{2,2} &= \frac{1}{2(s_1^2 - s_2^2)} [(-s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_2^i + \\
&+ (s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_4^i] + [(-s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_2^i + \\
&+ (s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_4^i] \frac{s_2}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}
\end{aligned}$$

Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}
a_1(y) &= \frac{(s_1^2 + s_1^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1y} - e^{-s_1y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}, \\
a_2(y) &= \frac{(s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} + e^{-s_1y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \\
a_3(y) &= \frac{(s_2^2 + s_2^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2y} - e^{-s_2y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}, \\
a_4(y) &= \frac{(s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} + e^{-s_2y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \\
a_5(y) &= \frac{(-s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} - e^{-s_1y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}, \\
a_6(y) &= \frac{(s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1y} + e^{-s_1y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \\
a_7(y) &= \frac{(-s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} - e^{-s_2y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}, \\
a_8(y) &= \frac{(s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2y} + e^{-s_2y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \\
a_9(y) &= \frac{(s_1^2 + s_1^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1y} + e^{-s_1y})}{2(s_1^2 - s_2^2)}, \\
a_{10}(y) &= \frac{(s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} - e^{-s_1y})}{2(s_1^2 - s_2^2)} \\
a_{11}(y) &= \frac{(s_2^2 + s_2^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2y} + e^{-s_2y})}{2(s_2^2 - s_1^2)}, \\
a_{12}(y) &= \frac{(s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} - e^{-s_2y})}{2(s_2^2 - s_1^2)} \\
a_{13}(y) &= \frac{(-s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} + e^{-s_1y})}{2(s_1^2 - s_2^2)}, \\
a_{14}(y) &= \frac{(s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1y} - e^{-s_1y})}{2(s_1^2 - s_2^2)} \\
a_{15}(y) &= \frac{(-s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} + e^{-s_2y})}{2(s_2^2 - s_1^2)}, \\
a_{16}(y) &= \frac{(s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2y} - e^{-s_2y})}{2(s_2^2 - s_1^2)}
\end{aligned} \tag{Ап.С. 3}$$



## Випадок статичної задачі

Випадку статичної задачі випишемо значення елементів матриць  $\Psi_i(y)$ ,  $\Psi'_i(y)$ , враховуючи позначення (Ап.С. 2).

Елементи матриці  $\Psi_i(y)$ :

$$\begin{aligned}\Psi_i(y)_{1,1} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} [(y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0)d_1^i + (y\alpha_n\mu_0)d_3^i] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} [(y\alpha_n\mu_0 - 2 - \mu_0)f_1^i + (-y\alpha_n\mu_0)f_3^i]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_i(y)_{1,2} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} [(y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0)d_2^i + (y\alpha_n\mu_0)d_4^i] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} [(y\alpha_n\mu_0 - 2 - \mu_0)f_2^i + (-y\alpha_n\mu_0)f_4^i]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_i(y)_{2,1} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} [(-y\alpha_n\mu_0)d_1^i + (-y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0)d_3^i] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} [(y\alpha_n\mu_0)f_1^i + (-y\alpha_n\mu_0 - 2 - \mu_0)f_3^i]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_i(y)_{2,2} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} [(-y\alpha_n\mu_0)d_2^i + (-y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0)d_4^i] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} [(y\alpha_n\mu_0)f_2^i + (-y\alpha_n\mu_0 - 2 - \mu_0)f_4^i]\end{aligned}$$

Елементи матриці  $\Psi'_i(y)$ :

$$\begin{aligned}\Psi'_i(y)_{1,1} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4} [(y\alpha_n\mu_0 + 2 + 2\mu_0)d_1^i + (y\alpha_n\mu_0 + \mu_0)d_3^i] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4} [(-y\alpha_n\mu_0 + 2 + 2\mu_0)f_1^i + (y\alpha_n\mu_0 - \mu_0)f_3^i]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi'_i(y)_{1,2} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4} [(y\alpha_n\mu_0 + 2 + 2\mu_0)d_2^i + (y\alpha_n\mu_0 + \mu_0)d_4^i] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4} [(-y\alpha_n\mu_0 + 2 + 2\mu_0)f_2^i + (y\alpha_n\mu_0 - \mu_0)f_4^i]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi'_i(y)_{2,1} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4} [(-y\alpha_n\mu_0 - \mu_0)d_1^i + (-y\alpha_n\mu_0 + 2)d_3^i] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4} [(-y\alpha_n\mu_0 + \mu_0)f_1^i + (y\alpha_n\mu_0 + 2)f_3^i]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi'_i(y)_{2,2} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4} [(-y\alpha_n\mu_0 - \mu_0)d_2^i + (-y\alpha_n\mu_0 + 2)d_4^i] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4} [(-y\alpha_n\mu_0 + \mu_0)f_2^i + (y\alpha_n\mu_0 + 2)f_4^i]\end{aligned}$$

Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}a_1(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0)}{(1 + \mu_0)4\alpha_n}, & a_2(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0)}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} & (\text{Ап.С. 4}) \\ a_3(y) &= \frac{e^{-\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0 - 2 - \mu_0)}{(1 + \mu_0)4\alpha_n}, & a_4(y) &= \frac{e^{-\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0)}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} \\ a_5(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0)}{(1 + \mu_0)4\alpha_n}, & a_6(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0)}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} \\ a_7(y) &= \frac{e^{-\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0)}{(1 + \mu_0)4\alpha_n}, & a_8(y) &= \frac{e^{-\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0 - 2 - \mu_0)}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} \\ a_9(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0 + 2 + 2\mu_0)}{(1 + \mu_0)4}, & a_{10}(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0 + \mu_0)}{(1 + \mu_0)4} \\ a_{11}(y) &= \frac{e^{-\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0 + 2 + 2\mu_0)}{(1 + \mu_0)4}, & a_{12}(y) &= \frac{e^{-\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0 - \mu_0)}{(1 + \mu_0)4} \\ a_{13}(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0 - \mu_0)}{(1 + \mu_0)4}, & a_{14}(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0 + 2)}{(1 + \mu_0)4} \\ a_{15}(y) &= \frac{e^{-\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0 + \mu_0)}{(1 + \mu_0)4}, & a_{16}(y) &= \frac{e^{-\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0 + 2)}{(1 + \mu_0)4}\end{aligned}$$

## Загальна схема розв'язку системи алгебричних рівнянь

Враховуючи введені позначення (Ап.С. 3), (Ап.С. 4) складемо систему алгебричних рівнянь використовуючи граничні умови (Ап.С. 1).

Запишемо елементи вихідної матриці  $U_0 [\Psi_i(y)]$ :

$$\begin{aligned}U_0 [\Psi_i(y)]_{1,1} &= (a_9(b) - \alpha_n a_5(b))d_1^i + (a_{10}(b) - \alpha_n a_6(b))d_3^i + \\ &+ (a_{11}(b) - \alpha_n a_7(b))f_1^i + (a_{12}(b) - \alpha_n a_8(b))f_3^i\end{aligned}$$

$$U_0 [\Psi_i(y)]_{1,2} = (a_9(b) - \alpha_n a_5(b))d_2^i + (a_{10}(b) - \alpha_n a_6(b))d_4^i + \\ + (a_{11}(b) - \alpha_n a_7(b))f_2^i + (a_{12}(b) - \alpha_n a_8(b))f_4^i$$

$$U_0 [\Psi_i(y)]_{2,1} = ((2G + \lambda)a_{13}(b) + \alpha_n \lambda a_1(b))d_1^i + \\ + ((2G + \lambda)a_{14}(b) + \alpha_n \lambda a_2(b))d_3^i + ((2G + \lambda)a_{15} + \alpha_n \lambda a_3(b))f_1^i + \\ + ((2G + \lambda)a_{16}(b) + \alpha_n \lambda a_4(b))f_3^i$$

$$U_0 [\Psi_i(y)]_{2,2} = ((2G + \lambda)a_{13}(b) + \alpha_n \lambda a_1(b))d_2^i + \\ + ((2G + \lambda)a_{14}(b) + \alpha_n \lambda a_2(b))d_4^i + ((2G + \lambda)a_{15} + \alpha_n \lambda a_3(b))f_2^i + \\ + ((2G + \lambda)a_{16}(b) + \alpha_n \lambda a_4(b))f_4^i$$

Запишемо елементи вихідної матриці  $U_1 [\Psi_i(y)]$ :

$$U_1 [\Psi_i(y)]_{1,1} = (a_9(0) - \alpha_n a_5(0))d_1^i + (a_{10}(0) - \alpha_n a_6(0))d_3^i + \\ + (a_{11}(0) - \alpha_n a_7(0))f_1^i + (a_{12}(0) - \alpha_n a_8(0))f_3^i$$

$$U_1 [\Psi_i(y)]_{1,2} = (a_9(0) - \alpha_n a_5(b))d_2^i + (a_{10}(0) - \alpha_n a_6(0))d_4^i + \\ + (a_{11}(0) - \alpha_n a_7(0))f_2^i + (a_{12}(0) - \alpha_n a_8(0))f_4^i$$

$$U_1 [\Psi_i(y)]_{2,1} = a_5(0)d_1^i + a_6(0)d_3^i + a_7(0)f_1^i + a_8(0)f_3^i$$

$$U_1 [\Psi_i(y)]_{2,2} = a_5(0)d_2^i + a_6(0)d_4^i + a_7(0)f_2^i + a_8(0)f_4^i$$

Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}
b_1 &= (a_9(b) - \alpha_n a_5(b)), & b_2 &= (a_{10}(b) - \alpha_n a_6(b)) \\
b_3 &= (a_{11}(b) - \alpha_n a_7(b)), & b_4 &= (a_{12}(b) - \alpha_n a_8(b)) \\
b_5 &= ((2G + \lambda)a_{13}(b) + \alpha_n \lambda a_1(b)), & b_6 &= ((2G + \lambda)a_{14}(b) + \alpha_n \lambda a_2(b)) \\
b_7 &= ((2G + \lambda)a_{15} + \alpha_n \lambda a_3(b)), & b_8 &= ((2G + \lambda)a_{16}(b) + \alpha_n \lambda a_4(b)) \\
b_9 &= (a_9(0) - \alpha_n a_5(0)), & b_{10} &= (a_{10}(0) - \alpha_n a_6(0)) \\
b_{11} &= (a_{11}(0) - \alpha_n a_7(0)), & b_{12} &= (a_{12}(0) - \alpha_n a_8(0)) \\
b_{13} &= a_5(0), & b_{14} &= a_6(0) \\
b_{15} &= a_7(0), & b_{16} &= a_8(0)
\end{aligned}$$

Враховуючи останнє випишемо системи відносно невідомих коефіцієнтів  $d_k^i, f_k^i, i = \overline{0, 1}, k = \overline{1, 4}$

$$\begin{cases}
b_1 d_1^0 + b_2 d_3^0 + b_3 f_1^0 + b_4 f_3^0 = 1 \\
b_5 d_1^0 + b_6 d_3^0 + b_7 f_1^0 + b_8 f_3^0 = 0 \\
b_9 d_1^0 + b_{10} d_3^0 + b_{11} f_1^0 + b_{12} f_3^0 = 0 \\
b_{13} d_1^0 + b_{14} d_3^0 + b_{15} f_1^0 + b_{16} f_3^0 = 0
\end{cases}, \quad \begin{cases}
b_1 d_2^0 + b_2 d_4^0 + b_3 f_2^0 + b_4 f_4^0 = 0 \\
b_5 d_2^0 + b_6 d_4^0 + b_7 f_2^0 + b_8 f_4^0 = 1 \\
b_9 d_2^0 + b_{10} d_4^0 + b_{11} f_2^0 + b_{12} f_4^0 = 0 \\
b_{13} d_2^0 + b_{14} d_4^0 + b_{15} f_2^0 + b_{16} f_4^0 = 0
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
b_1 d_1^1 + b_2 d_3^1 + b_3 f_1^1 + b_4 f_3^1 = 0 \\
b_5 d_1^1 + b_6 d_3^1 + b_7 f_1^1 + b_8 f_3^1 = 0 \\
b_9 d_1^1 + b_{10} d_3^1 + b_{11} f_1^1 + b_{12} f_3^1 = 1 \\
b_{13} d_1^1 + b_{14} d_3^1 + b_{15} f_1^1 + b_{16} f_3^1 = 0
\end{cases}, \quad \begin{cases}
b_1 d_2^1 + b_2 d_4^1 + b_3 f_2^1 + b_4 f_4^1 = 0 \\
b_5 d_2^1 + b_6 d_4^1 + b_7 f_2^1 + b_8 f_4^1 = 0 \\
b_9 d_2^1 + b_{10} d_4^1 + b_{11} f_2^1 + b_{12} f_4^1 = 0 \\
b_{13} d_2^1 + b_{14} d_4^1 + b_{15} f_2^1 + b_{16} f_4^1 = 1
\end{cases}$$

## Додаток D

# ЗНАХОДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ $v_0(y)$ НЕОДНОРІДНОЇ ЗАДАЧІ

### Випадок динамічної задачі

Знайдем  $v_0(y)$  розглянувши задачу у просторі трансформант (2.9), (2.10) при  $n = 0$ ,  $\alpha_n = 0$ . Отримаємо наступну задачу відносно  $v_0(y)$ :

$$v_0''(y) + \frac{\omega^2}{c_2^2(1 + \mu_0)}v_0(y) = \frac{f(y)}{1 + \mu_0}$$

Де  $f(y) = (\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)\cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)) - \frac{\mu_0}{(1+\mu_0)}(\chi_3'(y)\cos(\alpha_n a) - \chi_1'(y))$ .

Та граничні умови:

$$(2G + \lambda)v_0'(b) = -p_0, \quad v_0(0) = 0, \quad p_0 = \int_0^a p(x)dx$$

Спочатку знайдем фундаментальну базисну систему розв'язків задачі  $\psi_0(y)$ ,  $\psi_1(y)$ :

$$\psi_i''(y) + \frac{\omega^2}{c_2^2(1 + \mu_0)}\psi_i(y) = 0, i = \overline{0, 1}$$

$$\begin{cases} \psi_0(0) = 1 \\ \psi_0'(b) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \psi_1(0) = 0 \\ \psi_1'(b) = 1 \end{cases}$$

Розв'язок однорідної задачі відносно  $\psi_i(y)$  має вигляд:

$$\psi_i(y) = c_1^i \cos\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) + c_2^i \sin\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) \quad (4.70)$$

Враховучи граничні умови отримаємо остаточний вигляд  $\psi_0(y)$ ,  $\psi_1(y)$ :

$$\begin{cases} \psi_0(y) = \cos\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) + tg\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}b\right) \sin\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) \\ \psi_1(y) = \frac{c_2(1+\mu_0)}{\omega \cos\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}b\right)} \sin\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) \end{cases}$$

Побудуємо тепер функцію Гріна задачі:

$$g(y, \xi) = \begin{cases} -a_1(\xi)\psi_1(y), & 0 \leq y < \xi \\ a_0(\xi)\psi_0(y), & \xi < y \leq b \end{cases}$$

Де  $a_0(\xi)$ ,  $a_1(\xi)$  будуть знайдені з наступної системи

$$\begin{cases} a_0(\xi)\psi_0'(\xi) + a_1(\xi)\psi_1'(\xi) = 1 \\ a_0(\xi)\psi_0(\xi) + a_1(\xi)\psi_1(\xi) = 0 \end{cases}$$

Таким чином остаточний розв'язок задачі відносно  $v_0(y)$  буде мати наступний вигляд:

$$v_0(y) = \frac{1}{(1 + \mu_0)} \int_0^b g(y, \xi) f(\xi) d\xi - \psi_0(y) \frac{p_0}{2G + \lambda}$$

## Випадок статичної задачі

У випадку статичної задачі коли  $\omega = 0$  отримаємо наступну задачу відносно  $v_0(y)$ :

$$v_0''(y) = \frac{f(y)}{1 + \mu_0}$$

$$(2G + \lambda)v_0'(b) = -p_0, \quad v_0(0) = 0, \quad p_0 = \int_0^a p(x) dx$$

Спочатку знайдем фундаментальну базисну систему розв'язків задачі  $\psi_0(y)$ ,  $\psi_1(y)$ :

$$\begin{aligned} \psi_i''(y) &= 0, i = \overline{0, 1} \\ \begin{cases} \psi_0(0) = 1 \\ \psi_0'(b) = 0 \end{cases}, & \begin{cases} \psi_1(0) = 0 \\ \psi_1'(b) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок однорідної задачі відносно  $\psi_i(y)$  має вигляд:

$$\psi_i(y) = c_1^i + c_2^i y \tag{4.71}$$

Враховуючи граничні умови отримаємо остаточний вигляд  $\psi_0(y)$ ,  $\psi_1(y)$ :

$$\begin{cases} \psi_0(y) = 1 \\ \psi_1(y) = y \end{cases}$$

Побудуємо тепер функцію Гріна задачі:

$$g(y, \xi) = \begin{cases} -a_1(\xi)\psi_1(y), 0 \leq y < \xi \\ a_0(\xi)\psi_0(y), \xi < y \leq b \end{cases}$$

Де  $a_0(\xi)$ ,  $a_1(\xi)$  будуть знайдені з наступної системи

$$\begin{cases} a_0(\xi)\psi_0'(\xi) + a_1(\xi)\psi_1'(\xi) = 1 \\ a_0(\xi)\psi_0(\xi) + a_1(\xi)\psi_1(\xi) = 0 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} a_0(\xi) = -\xi \\ a_1(\xi) = 1 \end{cases}$$

Таким чином остаточний розв'язок задачі відносно  $v_0(y)$  буде мати наступний вигляд:

$$v_0(y) = \frac{1}{(1 + \mu_0)} \int_0^b g(y, \xi) f(\xi) d\xi - \psi_0(y) \frac{p_0}{2G + \lambda}$$

## Додаток Е

### ЗНАХОДЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ $c_i$ ,

$$i = \overline{1, 4}$$

#### Випадок статичної задачі

Для знаходження коефіцієнтів  $c_1, c_2, c_3, c_4$  випадку статичної задачі (3.9) спочатку знайдем  $Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  та  $Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 & \alpha_n \mu_0 y \\ -\alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} c_1(\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2(\alpha_n \mu_0 y) \\ c_1(-\alpha_n \mu_0 y) + c_2(-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} &= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n \mu_0 y \\ \alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} c_3(\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y) \\ c_3(\alpha_n \mu_0 y) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Введемо позначення  $c = \frac{1}{4\alpha_n(1+\mu_0)}$ .

Запишем тепер  $Z_n(y)$ :

$$Z_n(y) = c \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2 e^{\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y) \\ c_1 e^{\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y) + c_2 e^{\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y) + c_4 e^{-\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$



Тепер  $Z'_n(y)$ :

$$Z'_n(y) = c \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_n y} (\alpha_n^2 \mu_0 y + 2\alpha_n + 2\alpha_n \mu_0) + c_2 e^{\alpha_n y} (\alpha_n^2 \mu_0 y + \alpha_n \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y} (-\alpha_n^2 \mu_0 y + 2\alpha_n + 2\alpha_n \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n y} (\alpha_n^2 \mu_0 y - \alpha_n \mu_0) \\ c_1 e^{\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y) + c_2 e^{\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y) + c_4 e^{-\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Тепер використаєм граничні умови (3.11) та побудуєм алгебричну систему відносно коефіцієнтів.

Використаєм  $U_0 [Z_n(y)]$ :

$$E_0 * Z'_n(b) + F_0 * Z_n(b) = D_0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix} * Z'_n(b) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix} * Z_n(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}$$

Отримаємо перші 2 рівняння системи:

$$\begin{cases} c_1 e^{\alpha_n b} (\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n \mu_0 + \alpha_n) + c_2 e^{\alpha_n b} (\alpha_n^2 \mu_0 b - \alpha_n) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n b} (-\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n + \alpha_n \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n b} (\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n) = 0 \\ c_1 e^{\alpha_n b} (-2G \alpha_n^2 \mu_0 b - 2G \alpha_n \mu_0 + 2\lambda \alpha_n) + c_2 e^{\alpha_n b} (-2G \alpha_n^2 \mu_0 b + \\ + (2G + \lambda) 2\alpha_n) + c_3 e^{-\alpha_n b} (-2G \alpha_n^2 \mu_0 b + 2G \alpha_n \mu_0 - 2\lambda \alpha_n) + \\ + c_4 e^{-\alpha_n b} (2G \alpha_n^2 \mu_0 b + (2G + \lambda) 2\alpha_n) = -c p_n \end{cases}$$

Використаєм  $U_1 [Z_n(y)]$ :

$$E_1 * Z'_n(0) + F_1 * Z_n(0) = D_1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * Z'_n(0) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * Z_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отримаємо другі 2 рівняння системи:

$$\begin{cases} c_1(\alpha_n + \alpha_n \mu_0) + c_2(-\alpha_n) + c_3(\alpha_n + \alpha_n \mu_0) + c_4(\alpha_n) = 0 \\ c_2(2 + \mu_0) + c_4(-2 - \mu_0) = 0 \end{cases}$$

Звідси видно, що  $c_3 = -c_1$ ,  $c_4 = c_2$ . Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} a_1 &= e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n \mu_0 + \alpha_n) - e^{-\alpha_n b}(-\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n + \alpha_n \mu_0), \\ a_2 &= e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2 \mu_0 b - \alpha_n) + e^{-\alpha_n b}(\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n), \\ a_3 &= e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2 \mu_0 b - 2G\alpha_n \mu_0 + 2\lambda\alpha_n) - \\ &\quad - e^{-\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2 \mu_0 b + 2G\alpha_n \mu_0 - 2\lambda\alpha_n) \\ a_4 &= e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2 \mu_0 b + (2G + \lambda)2\alpha_n) + \\ &\quad + e^{-\alpha_n b}(2G\alpha_n^2 \mu_0 b + (2G + \lambda)2\alpha_n) \end{aligned}$$

Враховуючи останнє отримаємо:

$$\begin{cases} c_3 = -c_1 \\ c_4 = c_2 \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0 \\ c_1 a_3 + c_2 a_4 = -cp_n \end{cases} \Leftrightarrow, \begin{cases} c_3 = -c_1 \\ c_4 = c_2 \\ c_1 = -c_2 \frac{a_2}{a_1} \\ c_2(a_4 a_1 - a_2 a_3) = -cp_n a_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = cp_n \frac{a_2}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \\ c_2 = -cp_n \frac{a_1}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \\ c_3 = -cp_n \frac{a_2}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \\ c_4 = -cp_n \frac{a_1}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \end{cases}$$

## Випадок динамічної задачі

Розглянемо випадок динамічної задачі. Введемо наступні позначення

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \alpha_n \mu_0 s_1, & x_2 &= \alpha_n \mu_0 s_2 \\
 x_3 &= s_1^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}, & x_4 &= s_2^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \\
 x_5 &= s_1^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0) + \frac{\omega^2}{c_1^2}, & x_6 &= s_2^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0) + \frac{\omega^2}{c_1^2} \\
 y_1 &= 2s_1(s_1^2 - s_2^2), & y_2 &= 2s_2(s_2^2 - s_1^2) \\
 z_1 &= \frac{(e^{bs_1} + e^{-bs_1})(s_1 x_3 + \alpha_n x_1)}{y_1}, & z_2 &= \frac{(e^{bs_1} - e^{-bs_1})(s_1 x_1 - \alpha_n x_5)}{y_1} \\
 z_3 &= \frac{(e^{bs_2} + e^{-bs_2})(s_2 x_4 + \alpha_n x_2)}{y_2}, & z_4 &= \frac{(e^{bs_2} - e^{-bs_2})(s_2 x_4 - \alpha_n x_6)}{y_2} \\
 z_5 &= \frac{(e^{bs_1} - e^{-bs_1})(s_1 x_3 - s_1 x_1(2G + \lambda))}{y_1}, & z_6 &= \frac{(e^{bs_1} + e^{-bs_1})(s_1 x_5(2G + \lambda) + \alpha_n \lambda x_1)}{y_1} \\
 z_7 &= \frac{(e^{bs_2} - e^{-bs_2})(\alpha_n \lambda x_4 - s_2 x_2(2G + \lambda))}{y_2}, & z_8 &= \frac{(e^{bs_2} + e^{-bs_2})(s_2 x_6(2G + \lambda) + \alpha_n \lambda x_2)}{y_2} \\
 z_9 &= \frac{s_1 x_3 + \alpha_n x_1}{y_1}, & z_{10} &= \frac{s_2 x_4 + \alpha_n x_2}{y_2} \\
 z_{11} &= \frac{x_1}{y_1}, & z_{12} &= \frac{x_2}{y_2}
 \end{aligned}$$

Таким чином отримаємо наступну систему:

$$\begin{cases} z_1 c_1 + z_2 c_2 + z_3 c_3 + z_4 c_4 = 0 \\ z_5 c_1 + z_6 c_2 + z_7 c_3 + z_8 c_4 = -p_n \\ z_9 c_1 + z_{10} c_3 = 0 \\ z_{11} c_1 + z_{12} c_3 = 0 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = 0 \\ z_2 c_2 + z_4 c_4 = 0 \\ z_6 c_2 + z_8 c_4 = -p_n \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_2 = p_n \frac{z_4}{z_8 z_2 - z_4 z_6} \\ c_4 = -p_n \frac{z_2}{z_8 z_2 - z_4 z_6} \end{cases}$$