Зміст

Перелік умовних позначень

G - коєфіцієент Ламе
E - молуль Юнга
μ - коєфіцієнт Пуасона
c_1, c_2 - швидкості хвилі
ω - частота
$\mu_0 = \frac{1}{1-2\mu}$
$U_x(x, y) = u(x, y)$ - переміщення по осі x
$U_y(x, y) = v(x, y)$ - переміщення по осі y

1 Огляд літератури

2 МЕТОДИКА ПОБУДОВИ РОЗВ'ЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ

У даному розділі наведено опис аналітичного апарату, який використовується для розв'язання мішаних задач теорії пружності для прямокутної області. Цей підхід базується на результати раніше проведених досліджень, зокрема робіт [1] і [2]. Розглянута методика розв'язання мішаних плоских задач ґрунтується на застосуванні інтегральних перетворень безпосередньо до системи рівнянь рівноваги Ламе та крайових умов. Це дозволяє зводити вихідну задачу до векторної одновимірної крайової задачі. Векторна одновимірна крайова задача точно розв'язується за допомогою матричного диференційного числення та матричної функції Гріна.

2.1 Постановка задачі

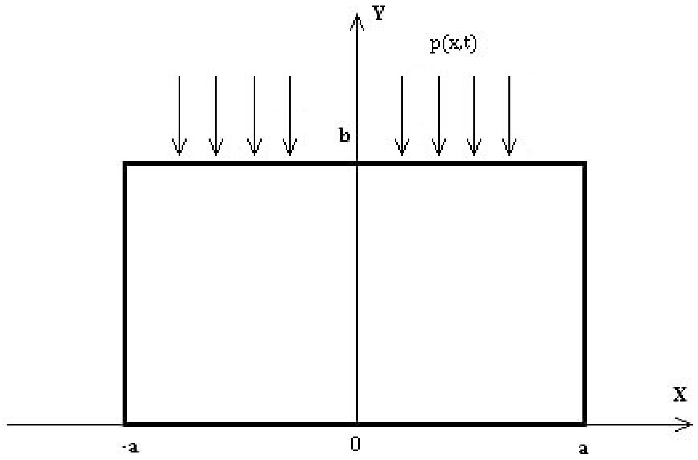

Рис. 2.1: Геометрія проблеми

Розглядається пружна прямокутна область (Рис: 2.1), яка займає область, що у декартовій системі координат описується співвідношенням $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x,y,t)|_{y=b} = -p(x,t), \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{y=b} = 0, \quad 0 \le x \le a \tag{2.1}$$

де $p(x,t)$ відома функція. На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x,y,t)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{y=0} = 0 \tag{2.2}$$

На бічних гранях $x = 0$ та $x = a$ граничні умови запишемо у формі

$$U_1[f(x,y,t)] = 0, \quad U_2[f(x,y,t)] = 0, \quad 0 \le y \le b \tag{2.3}$$

Де

$$U_1[f(x,y,t)] = \left[\alpha_1 f(x,y,t) + \beta_1 \frac{\partial f(x,y,t)}{\partial x}\right]|_{x=0}$$
$$U_2[f(x,y,t)] = \left[\alpha_2 f(x,y,t) + \beta_2 \frac{\partial f(x,y,t)}{\partial x}\right]|_{x=a}$$

граничні функціонали у загальному виді (для кожної конкретної задачі вони будуть деталізовані), $f(x,y,t) = (u(x,y,t), v(x,y,t))^T$ - вектор переміщенњ.

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0 (\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x \partial y}) = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0 (\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2}) = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial t^2} \end{cases} \tag{2.4}$$

Будемо розглядати випадок гармонічних коливань, тому можемо предстравити функції у наступному вигляді:

$$u(x,y,t) = u(x,y)e^{i\omega t}, \quad v(x,y,t) = v(x,y)e^{i\omega t}, \quad p(x,t) = p(x)e^{i\omega t} \tag{2.5}$$

Таким чином отримаємо наступні рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0 (\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}) = -\frac{\omega^2}{c_1^2} u(x,y) \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0 (\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}) = -\frac{\omega^2}{c_2^2} v(x,y) \end{cases} \tag{2.6}$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} \sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=b} = 0 \\ v(x,y)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=0} = 0 \\ U_1[f(x,y)] = 0, \quad U_2[f(x,y)] = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Введемо невідомі функції $\chi_1(y) = u(0,y)$, $\chi_2(y) = v(0,y)$, $\chi_3(y) = u(a,y)$, $\chi_4(y) = v(a,y)$. Враховучи умову (2.3), отримаємо, що $\frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_1(y)$, $\frac{\partial v(0,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)$, $\frac{\partial u(a,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_3(y)$, $\frac{\partial v(a,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)$. Отже умова (2.3) виконується автоматично.

2.2 Зведеня задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаєм інтегральне перетворення Фур'є по змінній x у до рівнянь (2.6) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y)sin(\alpha_n x) \\ v(x,y)cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a}, n = \overline{1,\infty} \tag{2.8}$$

Для цього помножим перше та друге рівняння (2.6) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруєм по змінній x на інтервалі $0 \le x \le a$. Покрокове інтегрування рівняння (2.6) наведено у (Додаток А). Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2 \mu_0 - \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) = \\ = \alpha_n (1+\mu_0)(\chi_3(y) cos(\alpha_n a) - \chi_1(y)) \\ \\ (1+\mu_0) v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = \\ = (\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y) cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)) - \mu_0(\chi_3^{'}(y) cos(\alpha_n a) - \chi_1^{'}(y)) \end{cases} \tag{2.9}$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \left((2G+\lambda) v_n^{'}(y) + \alpha_n \lambda u_n(y) \right) |_{y=b} = -p_n \\ \left(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y) \right) |_{y=b} = 0 \\ v_n(y)|_{y=0} = 0 \\ \left(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y) \right) |_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Де $p_n = \int_0^a p(x) cos(\alpha_n x) dx$

2.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у простосторі трансформант, перепишмо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (2.9) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &L_2\left[Z_n(y)\right] = A * Z_n^{''}(y) + B * Z_n^{'}(y) + C * Z_n(y) \\ &L_2\left[Z_n(y)\right] = F_n(y) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n\mu_0 \\ \alpha_n\mu_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix}, \quad Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$

$$F_n(y) = \begin{pmatrix} \alpha_n(1+\mu_0)(\chi_3(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1(y)) \\ (\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)) - \mu_0(\chi_3^{'}(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1^{'}(y)) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (2.10) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &U_i\left[Z_n(y)\right] = E_i * Z_n^{'}(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ &U_i\left[Z_n(y)\right] = D_i \end{aligned} \tag{2.12}$$

Де $i = \overline{0,1}$, $b_0 = b$, $b_1 = 0$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G+\lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n\lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (2.11). Шукати її будем у наступному вигляді:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy}M^{-1}(s)ds \tag{2.13}$$

Де $M(s)$ - характерестична матриця рівняння (2.11), а C - замкнений контур який містить усі особливі точки $M^{-1}(s)$. $M(s)$ будемо шукати з наступної умовни

$$L_2\left[e^{sy} * I\right] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} L_2\left[e^{sy} * I\right] &= e^{sy}\left(s^2 A * I + sB * I + C * I\right) = \\ &= e^{sy}\begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} => \end{aligned}$$

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Знайдемо тепер $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}$.

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n\mu_0 s \\ -\alpha_n\mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} det[M(s)] &= \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{vmatrix} = \\ &= (s-s_1)(s+s_1)(s-s_2)(s+s_2) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Де s_1, s_2, $-s_1$, $-s_2$ корені $det[M(s)] = 0$, детальне знаходження яких наведено в (Додаток B).

Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy}M^{-1}(s)ds &= \frac{2\pi i}{2\pi i(1+\mu_0)}\sum_{i=1}^{4} Res\left[e^{sy}\frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}\right] = \\ &= (Y_0(y) + Y_1(y) + Y_2(y) + Y_3(y)) \end{aligned}$$

Знайдем $Y_0(y)$:

$$Y_0(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s+s_1)(s-s_2)(s+s_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=s_1} =$$
$$= \frac{e^{s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \begin{pmatrix} s_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s_1 \\ -\alpha_n \mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Знайдем $Y_1(y)$:

$$Y_1(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-s_1)(s-s_2)(s+s_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-s_1} =$$
$$= -\frac{e^{-s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \begin{pmatrix} s_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 s_1 \\ \alpha_n \mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Знайдем $Y_2(y)$:

$$Y_2(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s+s_2)(s-s_1)(s+s_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=s_2} =$$
$$= \frac{e^{s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \begin{pmatrix} s_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s_2 \\ -\alpha_n \mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Знайдем $Y_3(y)$:

$$Y_3(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-s_2)(s-s_1)(s+s_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-s_2} =$$
$$= -\frac{e^{-s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \begin{pmatrix} s_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 s_2 \\ \alpha_n \mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

2.4 Побудова матриці-функції Гріна

Для побудови матриці-функції Гріна спочатку знайдем тепер фундамельні бизисні матриці $\Psi_0(y)$, $\Psi_1(y)$, шукати їх будем у наступному вигляді:

$$\Psi_i(y) = (Y_0(y) + Y_1(y)) * C_1^i + (Y_2(y) + Y_3(y)) * C_2^i \tag{2.22}$$

Залишилось знайти невідомі матриці коєфіцієнтів C_1^0, C_2^0, C_1^1, C_2^1 використовуючи граничні умови (2.12). Покрокове знаходження яких наведено у (Додаток C). Для подальшого введемо наступні позначення для елементів матриць $\Psi_0(y)$, $\Psi_1(y)$:

$$\Psi_0(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^0(y) & \Psi_2^0(y) \\ \Psi_3^0(y) & \Psi_4^0(y) \end{pmatrix}, \quad \Psi_1(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^1(y) & \Psi_2^1(y) \\ \Psi_3^1(y) & \Psi_4^1(y) \end{pmatrix}$$

Таким чином матрицю Гріна можемо записати у вигляді:

$$G(y,\xi) = \begin{cases} \Psi_0(y) * \Psi_1(\xi), & 0 \le y < \xi \\ \Psi_1(y) * \Psi_0(\xi), & \xi < y \le b \end{cases} \tag{2.23}$$

Для данної матриці Гріна виконано усі властивості, зокрема виконані однорідні граничні умови (2.12) та однорідні рівняння рівноваги у просторі трансформант (2.11):

$$L_2 \left[G(y,\xi) \right] = 0$$

$$U_0 \left[G(y,\xi) \right] = 0, \quad U_1 \left[G(y,\xi) \right],$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок крайової задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y) = \int_0^b G(y,\xi) F_n(\xi) d\xi + \Psi_0(y) * D_0 + \Psi_1(y) * D_1 \tag{2.24}$$

Введемо наступні позначення $G(y,\xi) = \begin{pmatrix} g_1(y,\xi) & g_2(y,\xi) \\ g_3(y,\xi) & g_4(y,\xi) \end{pmatrix}$, $F_n(y) = \begin{pmatrix} f_n^1(y) \\ f_n^2(y) \end{pmatrix}$, $\Psi_i(y) = \begin{pmatrix} \psi_i^1(y) & \psi_i^2(y) \\ \psi_i^3(y) & \psi_i^4(y) \end{pmatrix}$, $i = 0, 1$. Враховуючи це, шукані функції перемішень у просторі трансформант можна записати у наступному вигляді

$$u_n(y) = \int_0^b \left[g_1(y,\xi)f_n^1(\xi) + g_2(y,\xi)f_n^2(\xi)\right] d\xi - \psi_0^2(y)p_n \tag{2.25}$$

$$v_n(y) = \int_0^b \left[g_3(y,\xi)f_n^1(\xi) + g_4(y,\xi)f_n^2(\xi)\right] d\xi - \psi_0^4(y)p_n \tag{2.26}$$

2.5 Побудова розв'язоку вихідної задачі

Використовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (2.25), (2.26), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{2.27}$$

$$v(x,y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y)cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{2.28}$$

Знайдем тепер $v_0(y)$ розглянувши задачу у просторі трансформант (2.9), (2.10) при $n = 0$, $\alpha_n = 0$. Детальний розв'язок якої наведено в (Додаток D). Тоді остаточний розв'язок $v(x,y)$ буде мати вигляд

$$v(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y)cos(\alpha_n x) - \psi_0(y)\frac{p_0}{a(2G+\lambda)} + \tag{2.29}$$

$$+\frac{1}{a(1+\mu_0)}\int_0^b g(y,\xi)\left[\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(\xi)cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(\xi)\right) - \frac{\mu_0}{(1+\mu_0)}\left(\chi_3^{'}(\xi)cos(\alpha_n a) - \chi_1^{'}(\xi)\right)\right] d\xi \tag{2.30}$$

Залишилось знайти невідомі функції $\chi_1(y)$, $\chi_2(y)$, $\chi_3(y)$, $\chi_4(y)$. В подальшому в данній роботі розглянуто випадок таких граничних умов які призводять лише до однієї невідомої функції $f(y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}|_{x=a}$. Для знаходження якої буде побудовано інтегральне рівняння завдяки граничній умові $\sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x)$.

2.6 Загальна схема розв'язку сінгулярного інтегрального рівняння

Розглянемо випадок граничних умов другої основної задачі теорії пружності, в результаті отримаємо лише одну невідому функцію $f(y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}|_{x=a}$. З цього отримаємо значення $f_n^1(\xi) = 0$, $f_n^2(\xi) = -cos(\alpha_n a)f(\xi)$ Запишем тепер фінальний розв'язок для цього випадку:

$$u(x,y) = -\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_2(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right] d\xi + \psi_0^2(y)p_n\right) sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{2.31}$$

$$v(x,y) = -\frac{1}{a(1+\mu_0)}\int_0^b g(y,\xi)f(\xi)d\xi - \psi_0(y)\frac{p_0}{a(2G+\lambda)} \tag{2.32}$$

$$-\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_4(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right] d\xi + \psi_0^4(y)p_n\right) cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{2.33}$$

Використиєм граничну умову $\sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x)$ для того, щоб отримати інтегральне рівняння:

$$(2G+\lambda)\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}|_{y=b} + \lambda\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}|_{y=b} = -p(x) \Leftrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{(2G+\lambda)}{a(1+\mu_0)}\int_0^b \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b} f(\xi)d\xi - \psi_0^{'}(b)\frac{p_0}{a}-\\
&-\frac{2(2G+\lambda)}{a}\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_4(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right]d\xi + \psi_0^4(y)p_n\right)cos(\alpha_n x)|_{y=b}-\\
&-\frac{2\lambda}{a}\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_2(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right]d\xi + \psi_0^2(y)p_n\right)sin(\alpha_n x)|_{y=b} = -p(x)
\end{aligned}
$$

Введемо позначення:

$$
a_1(x) = ap(x) - \left[2(2G+\lambda)\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_0^4(y)p_n cos(\alpha_n x) + 2\lambda\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_0^2(y)p_n sin(\alpha_n x) + \psi_0^{'}(b)p_0\right]|_{y=b} \tag{2.34}
$$

Враховуючи його отримаємо наступне інтегральне рівняння відносно $f(\xi)$:

$$
\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\int_0^b \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b} f(\xi)d\xi+ \tag{2.35}
$$

$$
+\int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} cos(\alpha_n a)cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y} + \alpha_n\lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b} f(\xi)d\xi = a_1(x) \tag{2.36}
$$

Розглянемо ряд:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} cos(\alpha_n a)cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y} + \alpha_n\lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b} =\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\alpha_n^{-1}e^{\alpha_n(\xi-b)}cos(\alpha_n x)\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y} + \lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b} =\\
&=\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\alpha_n^{-1}e^{\alpha_n(\xi-b)}cos(\alpha_n x)\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y} + \lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b}+\\
&+a_2\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)+\\
&+a_2\sum_{n=0}^{N}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)-\\
&-a_2\sum_{n=0}^{N}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)=\\
&=a_2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) + a_3(\xi,x)
\end{aligned}
$$

Використовуючи формулу 5.4.12.8 [3] отримаємо:

$$
\begin{aligned}
&a_2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) + a_3(\xi,x) =\\
&=\frac{a_2}{4}ln\left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) + cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) - cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right] + a_3(\xi,x)
\end{aligned}
$$

Де:

$$
a_2 = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y} + \lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b},
$$

$$
\begin{aligned}
a_3(\xi,x) = &\sum_{n=1}^{N} cos(\alpha_n a)cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y} + \alpha_n\lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b}-\\
&-a_2\sum_{n=0}^{N}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)
\end{aligned}
$$

Повернемося до інтегралу

$$\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\int_0^b \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b} f(\xi)d\xi + \int_0^b \left(\frac{a_2}{4} ln\left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right]+a_3(\xi,x)\right)f(\xi)d\xi = \tag{2.37}$$

$$= \int_0^b \left(\frac{a_2}{4} ln\left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right]+a_3(\xi,x)+\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b}\right)f(\xi)d\xi = \tag{2.38}$$

$$= \left[\begin{array}{c} t=\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))-1}{1-ch(\frac{\pi b}{2a})} \\ sh(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))d\xi = -\frac{2a}{\pi}(ch(\frac{\pi b}{2a})-1)dt \\ \xi=0, \quad t=1 \\ \xi=b, \quad t=0 \\ \xi = b-\frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1) \end{array}\right] = \tag{2.39}$$

$$= a_5\int_0^b a_4(t)\left(\frac{a_2}{4} ln\left[\frac{t+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right]+\widetilde{a_3(t,x)}\right)\widetilde{f(t)}dt \tag{2.40}$$

Де:

$$\widetilde{a_3(t,x)} = a_3\left(b-\frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1),x\right)+\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\frac{\partial g(y,b-\frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1))}{\partial y}|_{y=b}$$

$$f(t) = f(b-\frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1))$$

$$a_4(t) = \frac{1}{sh\left(arch\left[(ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1\right]\right)}$$

$$a_5 = \frac{2a}{\pi}(ch(\frac{\pi b}{2a})-1)$$

Таким чином отримаємо наступне інтегральне рівняння:

$$a_5\int_0^b a_4(t)\left(\frac{a_2}{4} ln\left[\frac{t+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right]+\widetilde{a_3(t,x)}\right)\widetilde{f(t)}dt = a_1(x) \tag{2.41}$$

2.7 Висновки до другого розділу

Безпосередньо застосовані інтегральні перетворення до рівнянь рівноваги Ламе та крайових умов плоскої задачі теорії пружності для прямокутної області. Це дозволило уникнути використання допоміжних гармонічних або бігармонічних функцій. Зведено вихідну задачу до одновимірної векторної крайової задачі у просторі трансформант. Цю задачу було розв'язано за допомогою методів диференціального матричного числення. Для цього була побудована фундаментальна базисна матрична система розв'язків однорідного матричного рівняння та матриця-функція Гріна для диференціального векторного рівняння другого порядку.

3 СТАТИЧНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ ЗА УМОВ ІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ НА БІЧНИХ ГРАНЯХ

У даному розділі досліджено плоска статична задача теорії пружності для прямокутної області, за умов ідеального контакту на бічних гранях.

Вихідна задача зведена до одновимірної задачі у просторі трансформант за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Отримана крайова задача розв'язана точно за допомогою методу матрично диференціального числення, фундаментальний розв'язок представлений як інтеграл по замкненому контору, який в свою чергу, був знайденний за допомогою теоремі про лишки. Остаточний вигляд для функцій переміщеннь та напружень отриман шляхом оберненого перетворення Фур'є.

Проведено чисельний аналіз отриманих функцій переміщень та напружень для різних розмірів прямокутної області та різних видів навантаження.

3.1 Постановка задачі

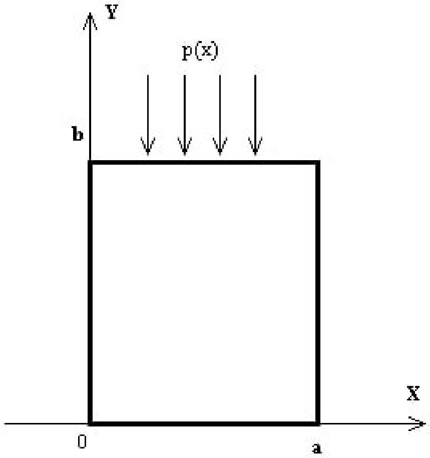

Рис. 3.1: Геометрія проблеми

Розглядається пружна прямокутна область (Рис: 3.1), яка займає облась, що описується у декартовій системі координат співвідношенням $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=b} = 0 \tag{3.1}$$

де $p(x)$ відома функція. На бічних гранях виконується умова ідеального контакту

$$u(x,y)|_{x=0}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=0} = 0 \tag{3.2}$$

$$u(x,y)|_{x=a}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=a} = 0 \tag{3.3}$$

На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x,y)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=0} = 0 \tag{3.4}$$

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}) = 0 \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

3.2 Зведеня задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаєм інтегральне перетворення Фур'є по змінній x у до рівнянь (3.5) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y)sin(\alpha_n x) \\ v(x,y)cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a}, n = \overline{1,\infty} \tag{3.6}$$

Для цього помножим перше та друге рівняння (3.5) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруєм по змінній x на інтервалі $0 \le x \le a$. Покрокове інтегрування рівняння (3.5) наведено у (Додаток А). Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) - \alpha_n^2(1+\mu_0)u_n(y) = 0 \\ (1+\mu_0)v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \Big((2G+\lambda)v_n^{'}(y) + \alpha_n \lambda u_n(y)\Big)|_{y=b} = -p_n \\ \Big(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\Big)|_{y=b} = 0 \\ v_n(y)|_{y=0} = 0 \\ \Big(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\Big)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Де $p_n = \int_0^a p(x)cos(\alpha_n x)dx$

3.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у простосторі трансформант, перепишмо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (3.7) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &L_2\left[Z_n(y)\right] = A * Z_n^{''}(y) + B * Z_n^{'}(y) + C * Z_n(y) \\ &L_2\left[Z_n(y)\right] = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n\mu_0 \\ \alpha_n\mu_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2(1+\mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix}$$

$$Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (3.8) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &U_i\left[Z_n(y)\right] = E_i * Z_n^{'}(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ &U_i\left[Z_n(y)\right] = D_i \end{aligned} \tag{3.10}$$

Де $i = \overline{0,1}$, $b_0 = b$, $b_1 = 0$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G+\lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n\lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (3.9). Шукати її будем у наступному вигляді:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \tag{3.11}$$

Де $M(s)$ - характерестична матриця рівняння (3.9), а C - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умовни

$$L_2\left[e^{sy} * I\right] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} L_2\left[e^{sy} * I\right] &= e^{sy}\left(s^2 A * I + sB * I + C * I\right) = \\ &= e^{sy}\left(\begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2(1+\mu_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_n^2(1+\mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix}\right) = \\ &= e^{sy}\begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2(1+\mu_0) & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 \end{pmatrix} => \end{aligned}$$

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2(1+\mu_0) & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Знайдемо тепер $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}$.

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 & \alpha_n\mu_0 s \\ -\alpha_n\mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2(1+\mu_0) \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} det[M(s)] &= \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 \end{vmatrix} = \\ &= (1+\mu_0)(s-\alpha_n)^2(s+\alpha_n)^2 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Де α_n, $-\alpha_n$, корені $det[M(s)] = 0$, детальне знаходження яких наведено в (Додаток B).

Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy} M^{-1}(s)ds &= \frac{2\pi i}{2\pi i(1+\mu_0)}\sum_{i=1}^{2} Res\left[e^{sy}\frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}\right] = \\ &= \frac{1}{(1+\mu_0)}\left(Y_0(y) + Y_1(y)\right) \end{aligned}$$

Знайдем $Y_0(y)$:

$$\begin{aligned} Y_0(y) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{sy}}{(s+\alpha_n)^2}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=\alpha_n} = \\ &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n}\begin{pmatrix} \alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0 & \alpha_n\mu_0 y \\ -\alpha_n\mu_0 y & -\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Знайдем $Y_1(y)$:

$$\begin{aligned} Y_1(y) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{sy}}{(s-\alpha_n)^2}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=-\alpha_n} = \\ &= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n}\begin{pmatrix} \alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n\mu_0 y \\ \alpha_n\mu_0 y & -\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y) = \frac{1}{1+\mu_0}\left(Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}\right) \tag{3.18}$$

Залишилось знайти невідомі коєфіцієнти c_1, c_2, c_3, c_4, використовуючи граничні умови (3.10). Покрокове знаходження коєфіцієнтів наведено у (Додаток E). Таким чином ми можемо записати розв'зок у просторі трансформант:

$$\begin{aligned} u_n(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n(1+\mu_0)}\left[c_1(\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2(\alpha_n\mu_0 y)\right] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n(1+\mu_0)}\left[c_3(\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4(-\alpha_n\mu_0 y)\right] \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} v_n(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n(1+\mu_0)}\left[c_1(-\alpha_n\mu_0 y) + c_2(-\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0)\right] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n(1+\mu_0)}\left[c_3(\alpha_n\mu_0 y) + c_4(-\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0)\right] \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.4 Побудова розв'язоку вихідної задачі

Використовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (3.19), (3.20), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{3.21}$$

$$v(x,y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{3.22}$$

Останній крок це знаходження $v_0(y)$ у випадку коли $n = 0$, $\alpha_n = 0$. Для цього повернемся до другого рівняння (3.7), та запишем його для цього випадку:

$$(1 + \mu_0) v_n^{''}(y) = 0 \tag{3.23}$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} (2G + \lambda) v_0^{'}(y)|_{y=b} = -p_0 \\ v_0(y)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{3.24}$$

Де $p_0 = \int_0^a p(x)dx$

Розв'язок рівняння (3.23):

$$v_0(y) = c_1 + c_2 y \tag{3.25}$$

Застовоючи граничні умови (3.24) для знаходження коєфіцієнтів c_1, c_2, отримаємо розв'язок задачі задачі:

$$v_0(y) = \frac{-p_0}{(2G + \lambda)} y \tag{3.26}$$

Тепер остаточний розв'зок задачі можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} u(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \\ v(x,y) = \frac{-p_0}{(2G+\lambda)a} y + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \end{cases} \tag{3.27}$$

3.5 Чисельні розрахунки

Наведені чисельні експеренти розглядаються для сталі ($E = 200$ ГПА, $\mu = 0.25$).

Розглянута прямокунта область $0 \le x \le 10$, $0 \le y \le 15$, при функції навантаження $p(x) = (x - 2.5)^2$. На малюнках (Рис: 3.2), (Рис: 3.3), (Рис: 3.4), (Рис: 3.5) представлені функкіі переміщень $u(x,y)$, $v(x,y)$ та напружень $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ відповідно.

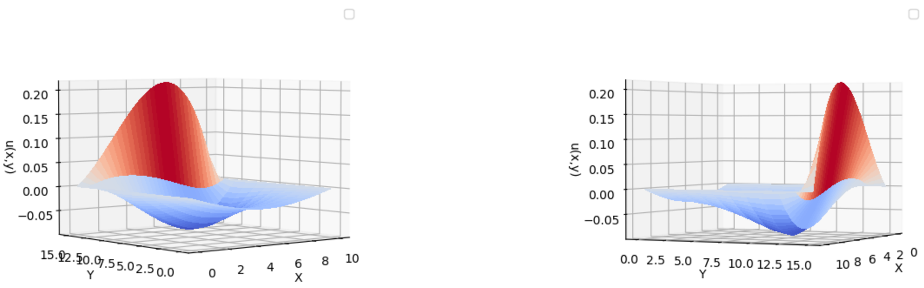

Рис. 3.2: Функція $u(x,y)$

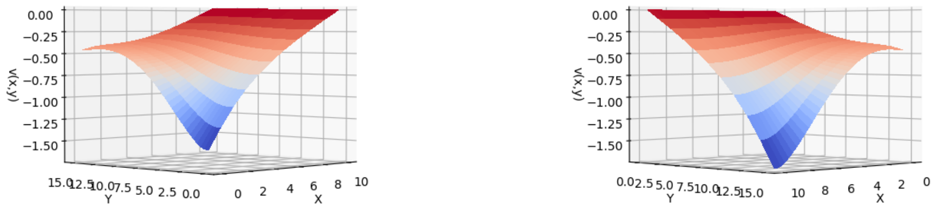

Рис. 3.3: Функція $v(x, y)$

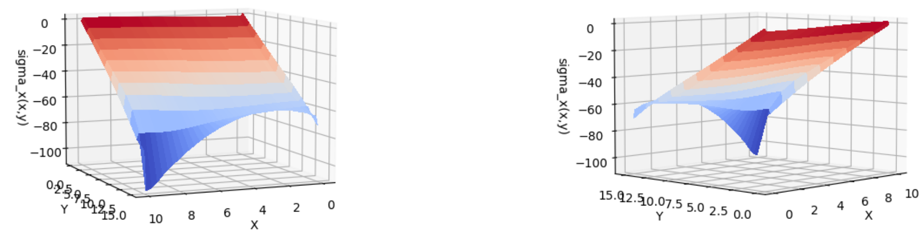

Рис. 3.4: Функція $\sigma_x(x, y)$

Рис. 3.5: Функція $\sigma_y(x, y)$

3.6 Висновки до треттього розділу розділу

Отримано точне розв'язок статичної задачі для прямокутної області за умов ідеального контакту на бічних гранях. Дослідженно поля переміщень та напружень для різних видів навантаження і розмірів прямокутної області.

4 ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ ЗА УМОВ ІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ НА БІЧНИХ ГРАНЯХ

У даному розділі досліджено плоска динамічна задача теорії пружності для прямокутної області, за умов ідеального контакту на бічних гранях.

Вихідна задача зведена до одновимірної задачі у просторі трансформант за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Отримана крайова задача розв'язана точно за допомогою методу матрично диференціального числення, фундаментальний розв'язок представлений як інтеграл по замкненому контору, який в свою чергу, був знайденний за допомогою теоремі про лишки. Остаточний вигляд для функцій переміщеннь та напружень отриман шляхом оберненого перетворення Фур'є.

Проведено чисельний аналіз отриманих функцій переміщень та напружень для різних розмірів прямокутної області та різних видів навантаження.

4.1 Постановка задачі

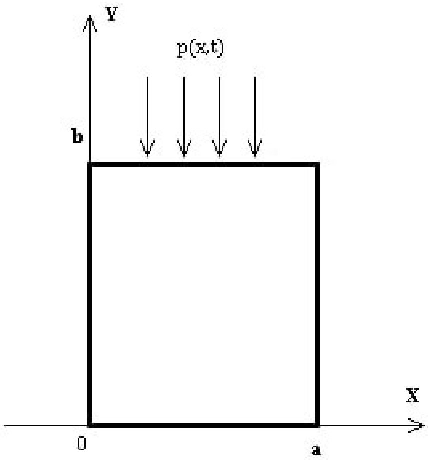

Рис. 4.1: Геометрія проблеми

Розглядається пружна сама прямокутна область (Рис: 4.1), яка займає облась, що описується у декартовій системі координат співвідношенням $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x,y,t)|_{y=b} = -p(x,t), \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{y=b} = 0 \tag{4.1}$$

де $p(x,t)$ відома функція. На бічних гранях виконується умова ідеального контакту

$$u(x,y,t)|_{x=0}, \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{x=0} = 0 \tag{4.2}$$

$$u(x,y,t)|_{x=a}, \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{x=a} = 0 \tag{4.3}$$

На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x,y,t)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{y=0} = 0 \tag{4.4}$$

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x \partial y}) = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2}) = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial t^2} \end{cases} \tag{4.5}$$

Будемо розглядати випадок гармонічних коливань, тому можемо представити функції у наступному вигляді:

$$u(x,y,t) = u(x,y)e^{i\omega t}, \quad v(x,y,t) = v(x,y)e^{i\omega t}, \quad p(x,t) = p(x)e^{i\omega t} \tag{4.6}$$

Таким чином отримаємо наступні рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}) = -\frac{\omega^2}{c_1^2}u(x,y) \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}) = -\frac{\omega^2}{c_2^2}v(x,y) \end{cases} \tag{4.7}$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} \sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x,t), \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=b} = 0 \\ u(x,y)|_{x=0}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=0} = 0 \\ u(x,y)|_{x=a}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=a} = 0 \\ v(x,y)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

4.2 Зведеня задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаєм інтегральне перетворення Фур'є по змінній x у до рівнянь (4.7) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y)sin(\alpha_n x) \\ v(x,y)cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a}, n = \overline{1,\infty} \tag{4.9}$$

Для цього помножим перше та друге рівняння (4.7) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруєм по змінній x на інтервалі $0 \le x \le a$. Покрокове інтегрування рівняння (4.7) наведено у (Додаток А). Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) + (-\alpha_n^2 - -\alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})u_n(y) = 0 \\ (1+\mu_0)v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) + (-\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})v_n(y) = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \Big((2G+\lambda)v_n^{'}(y) + \alpha_n \lambda u_n(y)\Big)|_{y=b} = -p_n \\ \Big(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\Big)|_{y=b} = 0 \\ v_n(y)|_{y=0} = 0 \\ \Big(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\Big)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

Де $p_n = \int_0^a p(x)cos(\alpha_n x)dx$

4.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у простості трансформант, перепишмо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (4.10) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &L_2\left[Z_n(y)\right] = A * Z_n^{''}(y) + B * Z_n^{'}(y) + C * Z_n(y) \\ &L_2\left[Z_n(y)\right] = 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix}, \quad Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (4.11) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &U_i\left[Z_n(y)\right] = E_i * Z_n^{'}(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ &U_i\left[Z_n(y)\right] = D_i \end{aligned} \tag{4.13}$$

Де $i = \overline{0,1}$, $b_0 = b$, $b_1 = 0$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G+\lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (4.12). Шукати її будем у наступному вигляді:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \tag{4.14}$$

Де $M(s)$ - характерестична матриця рівняння (4.12), а C - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умовни

$$L_2 \left[e^{sy} * I \right] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} L_2 \left[e^{sy} * I \right] &= e^{sy} \left(s^2 A * I + sB * I + C * I \right) = \\ &= e^{sy} \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} => \end{aligned}$$

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

Знайдемо тепер $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}$.

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s \\ -\alpha_n \mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} det[M(s)] &= \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{vmatrix} = \\ &= (s - s_1)(s + s_1)(s - s_2)(s + s_2) \end{aligned} \tag{4.18}$$

Де s_1, s_2, $-s_1$, $-s_2$ корені $det[M(s)] = 0$, детальне знаходження яких наведено в (Додаток B).

Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds &= \frac{2\pi i}{2\pi i (1+\mu_0)} \sum_{i=1}^{4} Res \left[e^{sy} \frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]} \right] = \\ &= (Y_0(y) + Y_1(y) + Y_2(y) + Y_3(y)) \end{aligned}$$

Знайдем $Y_0(y)$:

$$\begin{aligned} Y_0(y) &= \left(\frac{e^{sy}}{(s+a_1)(s-a_2)(s+a_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=a_1} = \\ &= \frac{e^{a_1 y}}{2a_1(a_1^2 - a_2^2)} \begin{pmatrix} a_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 a_1 \\ -\alpha_n \mu_0 a_1 & a_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Знайдем $Y_1(y)$:

$$\begin{aligned} Y_1(y) &= \left(\frac{e^{sy}}{(s-a_1)(s-a_2)(s+a_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-a_1} = \\ &= -\frac{e^{-a_1 y}}{2a_1(a_1^2 - a_2^2)} \begin{pmatrix} a_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 a_1 \\ \alpha_n \mu_0 a_1 & a_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.20}$$

Знайдем $Y_2(y)$:

$$Y_2(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s+a_2)(s-a_1)(s+a_1)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=a_2} =$$
$$= \frac{e^{a_2 y}}{2a_2(a_2^2-a_1^2)}\begin{pmatrix} a_2^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n\mu_0 a_2 \\ -\alpha_n\mu_0 a_2 & a_2^2-\alpha_n^2-\alpha_n^2\mu_0+\frac{\omega^2}{c_1^2}\end{pmatrix} \tag{4.21}$$

Знайдем $Y_3(y)$:

$$Y_3(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-a_2)(s-a_1)(s+a_1)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=-a_2} =$$
$$= -\frac{e^{-a_2 y}}{2a_2(a_2^2-a_1^2)}\begin{pmatrix} a_2^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n\mu_0 a_2 \\ \alpha_n\mu_0 a_2 & a_2^2-\alpha_n^2-\alpha_n^2\mu_0+\frac{\omega^2}{c_1^2}\end{pmatrix} \tag{4.22}$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y) = (Y_0(y)+Y_1(y)) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (Y_2(y)+Y_3(y)) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

Залишилось знайти невідомі коефіцієнти c_1, c_2, c_3, c_4, використовуючи граничні умови (4.13). Покрокове знаходження коефіцієнтів наведено у (Додаток Е). Таким чином ми можемо записати розв'зок у просторі трансформант:

$$\begin{aligned} u_n(y) = \frac{(a_1^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{a_1y}-e^{-a_1y})}{2a_1(a_1^2-a_2^2)(1+\mu_0)}c_1 + \\ + \frac{(a_2^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{a_2y}-e^{-a_2y})}{2a_2(a_2^2-a_1^2)(1+\mu_0)}c_3 + \\ + \frac{(a_1\alpha_n y)(e^{a_1y}+e^{-a_1y})}{2a_1(a_1^2-a_2^2)(1+\mu_0)}c_2 + \frac{(a_2\alpha_n y)(e^{a_2y}+e^{-a_2y})}{2a_2(a_2^2-a_1^2)(1+\mu_0)}c_4 \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} v_n(y) = \frac{(a_1^2-\alpha_n^2-\alpha_n^2\mu_0+\frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{a_1y}-e^{-a_1y})}{2a_1(a_1^2-a_2^2)(1+\mu_0)}c_2 + \\ + \frac{(a_2^2-\alpha_n^2-\alpha_n^2\mu_0+\frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{a_2y}-e^{-a_2y})}{2a_2(a_2^2-a_1^2)(1+\mu_0)}c_4 - \\ - \frac{(a_1\alpha_n y)(e^{a_1y}+e^{-a_1y})}{2a_1(a_1^2-a_2^2)(1+\mu_0)}c_1 - \frac{(a_2\alpha_n y)(e^{a_2y}+e^{-a_2y})}{2a_2(a_2^2-a_1^2)(1+\mu_0)}c_3 \end{aligned} \tag{4.25}$$

4.4 Побудова розв'язоку вихідної задачі

Викорустовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (4.24), (4.25), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{4.26}$$

$$v(x,y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y)cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{4.27}$$

Останній крок це знаходження $v_0(y)$ у випадку коли $n=0$, $\alpha_n = 0$. Для цього повернемся до другого рівняння (4.10), та запишем його для цього випадку:

$$(1+\mu_0)v_n^{''}(y) + \frac{\omega^2}{c_2^2}v_0(y) = 0 \tag{4.28}$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} (2G+\lambda)v_0^{'}(y)|_{y=b} = -p_0 \\ v_0(y)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{4.29}$$

Де $p_0 = \int_0^a p(x)dx$

Розв'язок рівняння (4.28):

$$v_0(y) = c_1 cos\left(y\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right) + c_2 sin\left(y\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right) \tag{4.30}$$

Застовоючи граничні умови (4.29) для знаходження коефіцієнтів c_1, c_2, отримаємо розв'язок задачі задачі:

$$v_0(y) = \frac{-p_0}{(2G+\lambda)\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}sin\left(b\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right)} sin\left(y\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right) \tag{4.31}$$

4.5 Чисельні розрахунки

4.6 Висновки до треттього розділу розділу

Отримано точне розв'язок динамічної задачі для прямокутної області за умов ідеального контакту на бічних гранях. Дослідженно поля переміщень та напружень для різних видів навантаження і розмірів прямокутної області.

Література

[1] Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов разрезов тонких включений и подкреплений. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 344 с.

[2] Попов Г.Я. Точные решения некоторых краевых задач механики деформируемого твёрдого тела. Одесса: Астропринт, 2013. 424 с.

[3] Прудников А.П.,Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды специальные функции. В 3 т. Т 1. Элементарные функции. 2-е издание, исправленное. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 632 с.

Додаток А

ПОКРОКОВЕ ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ ЛАМЕ ЗА ЗМІННОЮ x

Помножим перше та друге рівняння (2.6) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруєм по змінній x на інтервалі $0 \leq x \leq a$. Скористаємося введенною заміною $\chi_1(y) = u(0,y)$, $\chi_2(y) = v(0,y)$, $\chi_3(y) = u(a,y)$, $\chi_4(y) = v(a,y)$ та $\frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_1(y)$, $\frac{\partial v(0,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)$, $\frac{\partial u(a,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_3(y)$, $\frac{\partial v(a,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)$, та враховуючи граничні умови (2.7) знайдем вигляд задачі у просторі трансформант.

Розглянемо перше рівнняня

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} sin(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} sin(\alpha_n x)dx +$$
$$+ \mu_0\left(\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} sin(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} sin(\alpha_n x)dx\right) +$$
$$+ \frac{\omega^2}{c_1^2}\int_0^a u(x,y)sin(\alpha_n x)dx = 0$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n\left(u(x,y)cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n\int_0^a u(x,y)sin(\alpha_n x)dx\right) =$$
$$= -\alpha_n(\chi_3(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1(y)) - \alpha_n^2 u_n(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^a u(x,y)sin(\alpha_n x)dx = u_n^{''}(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)dx =$$
$$= -\alpha_n \frac{\partial}{\partial y}\int_0^a v(x,y)cos(\alpha_n x)dx = -\alpha_n v_n^{'}(y)$$

Тоді перше рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2 \mu_0 - \frac{\omega^2}{c_1^2})u_n(y) =$$
$$= \alpha_n(1+\mu_0)(\chi_3(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1(y))$$

Розлянемо друге рівняння

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} cos(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx +$$
$$+ \mu_0 \left(\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} cos(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx\right) +$$
$$+ \frac{\omega^2}{c_2^2}\int_0^a v(x,y)cos(\alpha_n x)dx = 0$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} sin(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \left(v(x,y)sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a v(x,y)cos(\alpha_n x)dx \right) =$$
$$= -(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)) - \alpha_n^2 v_n(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^a v(x,y)cos(\alpha_n x)dx = v_n^{''}(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} sin(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \frac{\partial}{\partial y}\int_0^a u(x,y)sin(\alpha_n x)dx = \alpha_n u_n^{'}(y) +$$
$$+ (\chi_3^{'}(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1^{'}(y))$$

Тоді друге рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$(1+\mu_0)v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2})v_n(y) =$$
$$= (\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)) - \mu_0(\chi_3^{'}(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1^{'}(y))$$

У випадку статичної задачі (3.5) та умов ідеального контаку на бічних гранях (3.2), (3.3) отримаємо наступні рівняння у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2 \mu_0)u_n(y) = 0 \\ (1+\mu_0)v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = 0 \end{cases}$$

У випадку динамічної задачі (4.7) та умов ідеального контаку на бічних гранях (4.8) отримаємо наступні рівняння у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2 \mu_0 - \frac{\omega^2}{c_1^2})u_n(y) = 0 \\ (1+\mu_0)v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2})v_n(y) = 0 \end{cases}$$

Додаток В

ЗНАХОДЖЕННЯ КОРЕНІВ РІВНЯННЯ $det[M(s)] = 0$

Знайдемо корені $det[M(s)] = 0$

$$det[M(s)] = \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{vmatrix} =$$

$$= (s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) + (\alpha_n\mu_0 s)^2 =$$

$$= s^4 + s^4\mu_0 - s^2\alpha_n^2 + s^2\frac{\omega^2}{c_2^2} - s^2\alpha_n^2 - s^2\alpha_n^2\mu_0 + \alpha_n^4 - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_2^2} - s^2\alpha_n^2\mu_0 -$$

$$- s^2\alpha_n^2\mu_0 + \alpha_n^4\mu_0 - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_2^2} + s^2\frac{\omega^2}{c_1^2} + s^2\mu_0\frac{\omega^2}{c_1^2} - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^4}{c_1^2c_2^2} + s^2\alpha_n^2\mu_0^2 =$$

$$= (1+\mu_0)s^4 + (-2\alpha_n^2 - 2\alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_2^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2} + \mu_0\frac{\omega^2}{c_1^2})s^2 + (\alpha_n^4 - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_2^2} +$$

$$+ \alpha_n^4\mu_0 - \alpha_n^2\mu_0\frac{\omega^2}{c_2^2} - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^4}{c_1^2c_2^2})$$

Введемо наступні позначення:

$$a_1 = -2\alpha_n^2 - 2\alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_2^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2} + \mu_0\frac{\omega^2}{c_1^2}$$

$$a_2 = \alpha_n^4 - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_2^2} + \alpha_n^4\mu_0 - \alpha_n^2\mu_0\frac{\omega^2}{c_2^2} - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^4}{c_1^2c_2^2}$$

Враховучи введені позначення отримаємо наступне рівняння:

$$(1+\mu_0)s^4 + a_1s^2 + a_2 = 0$$

Таким чином отримаємо наступні корені рівняння:

$$s_1 = \sqrt{\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4(1+\mu_0)a_2}}{2(1+\mu_0)}}$$

$$s_2 = -\sqrt{\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4(1+\mu_0)a_2}}{2(1+\mu_0)}}$$

$$s_3 = \sqrt{\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4(1+\mu_0)a_2}}{2(1+\mu_0)}}$$

$$s_4 = -\sqrt{\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4(1+\mu_0)a_2}}{2(1+\mu_0)}}$$

У випадку статичної задачі коли $\omega = 0$ отримаємо наступні рівняння:

$$(1+\mu_0)(s^4 - 2\alpha_n^2s^2 + \alpha_n^4) = 0$$

Таким чином отримаємо наступні корені

$$s_{1,2} = \alpha_n$$

$$s_{3,4} = -\alpha_n$$

Додаток C

ЗНАХОДЖЕННЯ МАТРИЦЬ КОЄФІЦІЄНТІВ C_k^i для $\Psi_i(y)$, $i = \overline{0,1}$, $k = \overline{1,2}$

Для знаходження матриць коєфіцієтів C_k^i для фундаентальних базісних матриць $\Psi_i(y)$, $i = \overline{0,1}$, $k = \overline{1,2}$. Використовуючи граничні умови (2.12) шукати їх будем з наступних умов:

$$
\begin{aligned}
&U_0\left[\Psi_0(y)\right] = I, \quad U_1\left[\Psi_0(y)\right] = 0 \\
&U_0\left[\Psi_1(y)\right] = 0, \quad U_1\left[\Psi_1(y)\right] = I, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&U_0\left[\Psi_i(y)\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G+\lambda \end{pmatrix} * \Psi_i^{'}(b) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n\lambda & 0 \end{pmatrix} * \Psi_i(b) \\
&U_1\left[\Psi_i(y)\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \Psi_i^{'}(0) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \Psi_i(0)
\end{aligned}
$$

Введемо наступні позначення:

$$
C_1^i = \begin{pmatrix} d_1^i & d_2^i \\ d_3^i & d_4^i \end{pmatrix}, \quad C_2^i = \begin{pmatrix} f_1^i & f_2^i \\ f_3^i & f_4^i \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
&x_1 = s_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}, \quad x_2 = s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \\
&x_3 = s_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}, \quad x_4 = s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \\
&x_5 = s_1\alpha_n\mu_0, \quad x_6 = s_2\alpha_n\mu_0 \\
&y_1 = 2s_1(s_1^2 - s_2^2), \quad y_2 = 2s_2(s_2^2 - s_1^2)
\end{aligned}
$$

Враховуючи їх представлення (2.22) випишем вигляд $\Psi_i(y)$:

$$
\begin{aligned}
\Psi_i(y) = \frac{1}{y_1}&\begin{pmatrix} x_1(e^{ys_1} - e^{-ys_1})d_1^i + x_5(e^{ys_1} + e^{-ys_1})d_3^i & x_1(e^{ys_1} - e^{-ys_1})d_2^i + x_5(e^{ys_1} + e^{-ys_1})d_4^i \\ -x_5(e^{ys_1} + e^{-ys_1})d_1^i + x_2(e^{ys_1} - e^{-ys_1})d_3^i & -x_5(e^{ys_1} + e^{-ys_1})d_2^i + x_2(e^{ys_1} - e^{-ys_1})d_4^i \end{pmatrix} + \\
+\frac{1}{y_2}&\begin{pmatrix} x_3(e^{ys_2} - e^{-ys_2})f_1^i + x_6(e^{ys_2} + e^{-ys_2})f_3^i & x_3(e^{ys_2} - e^{-ys_2})f_2^i + x_6(e^{ys_2} + e^{-ys_2})f_4^i \\ -x_6(e^{ys_2} + e^{-ys_2})f_1^i + x_4(e^{ys_2} - e^{-ys_2})f_3^i & -x_6(e^{ys_2} + e^{-ys_2})f_2^i + x_4(e^{ys_2} - e^{-ys_2})f_4^i \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi_i^{'}(y) = \frac{s_1}{y_1}&\begin{pmatrix} x_1(e^{ys_1} - e^{-ys_1})d_1^i + x_5(e^{ys_1} + e^{-ys_1})d_3^i & x_1(e^{ys_1} - e^{-ys_1})d_2^i + x_5(e^{ys_1} + e^{-ys_1})d_4^i \\ -x_5(e^{ys_1} + e^{-ys_1})d_1^i + x_2(e^{ys_1} - e^{-ys_1})d_3^i & -x_5(e^{ys_1} + e^{-ys_1})d_2^i + x_2(e^{ys_1} - e^{-ys_1})d_4^i \end{pmatrix} + \\
+\frac{s_2}{y_2}&\begin{pmatrix} x_3(e^{ys_2} - e^{-ys_2})f_1^i + x_6(e^{ys_2} + e^{-ys_2})f_3^i & x_3(e^{ys_2} - e^{-ys_2})f_2^i + x_6(e^{ys_2} + e^{-ys_2})f_4^i \\ -x_6(e^{ys_2} + e^{-ys_2})f_1^i + x_4(e^{ys_2} - e^{-ys_2})f_3^i & -x_6(e^{ys_2} + e^{-ys_2})f_2^i + x_4(e^{ys_2} - e^{-ys_2})f_4^i \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Розглянемо $U_0\left[\Psi_i(y)\right]$:

$$
\begin{aligned}
U_0\left[\Psi_i(y)\right]_{1,1} &= \frac{s_1}{y_1}\left(x_1(e^{bs_1} - e^{-bs_1})d_1^i + x_5(e^{bs_1} + e^{-bs_1})d_3^i\right) + \\
&+ \frac{s_2}{y_2}\left(x_3(e^{bs_2} - e^{-bs_2})f_1^i + x_6(e^{bs_2} + e^{-bs_2})f_3^i\right) + \frac{\alpha_n}{y_1}\left(x_5(e^{bs_1} + e^{-bs_1})d_1^i - x_2(e^{bs_1} - e^{-bs_1})d_3^i\right) + \\
&+ \frac{\alpha_n}{y_2}\left(x_6(e^{bs_2} + e^{-bs_2})f_1^i + x_4(e^{bs_2} - e^{-bs_2})f_3^i\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_0\left[\Psi_i(y)\right]_{1,2} &= \frac{s_1}{y_1}\left(x_1(e^{bs_1} - e^{-bs_1})d_2^i + x_5(e^{bs_1} + e^{-bs_1})d_4^i\right) + \\
&+ \frac{s_2}{y_2}\left(x_3(e^{bs_2} - e^{-bs_2})f_2^i + x_6(e^{bs_2} + e^{-bs_2})f_4^i\right) + \frac{\alpha_n}{y_1}\left(x_5(e^{bs_1} + e^{-bs_1})d_2^i - x_2(e^{bs_1} - e^{-bs_1})d_4^i\right) + \\
&+ \frac{\alpha_n}{y_2}\left(x_6(e^{bs_2} + e^{-bs_2})f_2^i + x_4(e^{bs_2} - e^{-bs_2})f_4^i\right)
\end{aligned}
$$

$$U_0\left[\Psi_i(y)\right]_{2,1} = \frac{s_1(2G+\lambda)}{y_1}\left(-x_5(e^{bs_1}+e^{-bs_1})d_1^i + x_2(e^{bs_1}-e^{-bs_1})d_3^i\right) +$$
$$+\frac{s_2(2G+\lambda)}{y_2}\left(-x_6(e^{bs_2}+e^{-bs_2})f_1^i + x_4(e^{bs_2}-e^{-bs_2})f_3^i\right) + \frac{\alpha_n\lambda}{y_1}\left(x_1(e^{bs_1}-e^{-bs_1})d_1^i + x_5(e^{bs_1}+e^{-bs_1})d_3^i\right) +$$
$$+\frac{\alpha_n\lambda}{y_2}\left(x_3(e^{bs_2}-e^{-bs_2})f_1^i + x_6(e^{bs_2}+e^{-bs_2})f_3^i\right)$$

$$U_0\left[\Psi_i(y)\right]_{2,2} = \frac{s_1(2G+\lambda)}{y_1}\left(-x_5(e^{bs_1}+e^{-bs_1})d_2^i + x_2(e^{bs_1}-e^{-bs_1})d_4^i\right) +$$
$$+\frac{s_2(2G+\lambda)}{y_2}\left(-x_6(e^{bs_2}+e^{-bs_2})f_2^i + x_4(e^{bs_2}-e^{-bs_2})f_4^i\right) + \frac{\alpha_n\lambda}{y_1}\left(x_1(e^{bs_1}-e^{-bs_1})d_2^i + x_5(e^{bs_1}+e^{-bs_1})d_4^i\right) +$$
$$+\frac{\alpha_n\lambda}{y_2}\left(x_3(e^{bs_2}-e^{-bs_2})f_2^i + x_6(e^{bs_2}+e^{-bs_2})f_4^i\right)$$

Розглянемо $U_1\left[\Psi_i(y)\right]$:

$$\begin{aligned}
U_1\left[\Psi_i(y)\right]_{1,1} &= \frac{s_1}{y_1}\left(2x_1d_1^i\right) + \frac{s_2}{y_2}\left(2x_3f_1^i\right) + \frac{\alpha_n}{y_1}\left(2x_5d_1^i\right) + \frac{\alpha_n}{y_2}\left(2x_6f_1^i\right)\\
U_1\left[\Psi_i(y)\right]_{1,2} &= \frac{s_1}{y_1}\left(2x_1d_2^i\right) + \frac{s_2}{y_2}\left(2x_3f_2^i\right) + \frac{\alpha_n}{y_1}\left(2x_5d_2^i\right) + \frac{\alpha_n}{y_2}\left(2x_6f_2^i\right)\\
U_1\left[\Psi_i(y)\right]_{2,1} &= \frac{1}{y_1}\left(-2x_5d_1^i\right) + \frac{1}{y_2}\left(-2x_6f_1^i\right)\\
U_1\left[\Psi_i(y)\right]_{2,2} &= \frac{1}{y_1}\left(-2x_5d_2^i\right) + \frac{1}{y_2}\left(-2x_6f_2^i\right)
\end{aligned}$$

Введемо наступні позначення:

$$z_1 = \frac{1}{y_1}\left(e^{bs_1}+e^{-bs_1}\right)\left(s_1x_1+\alpha_nx_5\right), \quad z_2 = \frac{1}{y_1}\left(e^{bs_1}-e^{-bs_1}\right)\left(s_1x_5-\alpha_nx_2\right),$$
$$z_3 = \frac{1}{y_2}\left(e^{bs_2}+e^{-bs_2}\right)\left(s_2x_3+\alpha_nx_6\right), \quad z_4 = \frac{1}{y_2}\left(e^{bs_2}-e^{-bs_2}\right)\left(s_2x_6-\alpha_nx_4\right),$$
$$z_5 = \frac{1}{y_1}\left(e^{bs_1}-e^{-bs_1}\right)\left(-s_1(2G+\lambda)x_5+\alpha_n\lambda x_3\right), \quad z_6 = \frac{1}{y_1}\left(e^{bs_1}+e^{-bs_1}\right)\left(s_1(2G+\lambda)x_2+\alpha_n\lambda x_5\right),$$
$$z_7 = \frac{1}{y_2}\left(e^{bs_2}-e^{-bs_2}\right)\left(-s_2(2G+\lambda)x_6+\alpha_n\lambda x_3\right), \quad z_8 = \frac{1}{y_2}\left(e^{bs_2}+e^{-bs_2}\right)\left(s_2(2G+\lambda)x_4+\alpha_n\lambda x_6\right),$$
$$z_9 = \frac{1}{y_1}\left(2s_1x_1+2\alpha_nx_5\right), \quad z_{10} = \frac{1}{y_2}\left(2s_2x_3+2\alpha_nx_6\right),$$
$$z_{11} = -\frac{2}{y_1}x_5, \quad z_{12} = -\frac{2}{y_2}x_6$$

Враховучи останнє випишем системи відностно невідомих коефіцієнтів $d_k^i,\ f_k^i,\ i=\overline{0,1}$, $k=\overline{1,4}$

$$\begin{cases} z_1d_1^0+z_2d_3^0+z_3f_1^0+z_4f_3^0=1\\ z_5d_1^0+z_6d_3^0+z_7f_1^0+z_8f_3^0=0\\ z_9d_1^0+z_{10}f_1^0=0\\ z_{11}d_1^0+z_{12}f_1^0=0\end{cases}, \quad \begin{cases} z_1d_2^0+z_2d_4^0+z_3f_2^0+z_4f_4^0=0\\ z_5d_2^0+z_6d_4^0+z_7f_2^0+z_8f_4^0=1\\ z_9d_2^0+z_{10}f_2^0=0\\ z_{11}d_2^0+z_{12}f_2^0=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1d_1^1+z_2d_3^1+z_3f_1^1+z_4f_3^1=0\\ z_5d_1^1+z_6d_3^1+z_7f_1^1+z_8f_3^1=0\\ z_9d_1^1+z_{10}f_1^1=1\\ z_{11}d_1^1+z_{12}f_1^1=0\end{cases}, \quad \begin{cases} z_1d_2^1+z_2d_4^1+z_3f_2^1+z_4f_4^1=0\\ z_5d_2^1+z_6d_4^1+z_7f_2^1+z_8f_4^1=0\\ z_9d_2^1+z_{10}f_2^1=0\\ z_{11}d_2^1+z_{12}f_2^1=1\end{cases}$$

Додаток D

ЗНАХОДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ $v_0(y)$

Знайдем $v_0(y)$ розглянувши задачу у просторі трансформант (2.9), (2.10) при $n=0$, $\alpha_n=0$. Отримаємо наступну задачу відносно $v_0(y)$:

$$v_0^{''}(y) + \frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}v_0(y) = \frac{f(y)}{1+\mu_0}$$

Де $f(y) = (\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)) - \frac{\mu_0}{(1+\mu_0)}(\chi_3^{'}(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1^{'}(y))$.

Та граничні умови:

$$(2G+\lambda)v_0^{'}(b) = -p_0, \quad v_0(0) = 0, \quad p_0 = \int_0^a p(x)dx$$

Спочатку знайдем фундаментальну базисну систему розв'язків задачі $\psi_0(y)$, $\psi_1(y)$:

$$\psi_i^{''}(y) + \frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}\psi_i(y) = 0, i = \overline{0,1}$$

$$\begin{cases} \psi_0(0) = 1 \\ \psi_0^{'}(b) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \psi_1(0) = 0 \\ \psi_1^{'}(b) = 1 \end{cases}$$

Розв'язок однорідної задачі відносно $\psi_i(y)$ має вигляд:

$$\psi_i(y) = c_1^i cos\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) + c_2^i sin\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) \tag{4.32}$$

Враховучи граничні умови отримаємо остаточний вигляд $\psi_0(y)$, $\psi_1(y)$:

$$\begin{cases} \psi_0(y) = cos\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) + tg\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}b\right) sin\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) \\ \psi_1(y) = \frac{c_2(1+\mu_0)}{\omega cos\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}b\right)} sin\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) \end{cases}$$

Побудуємо тепер функцію Гріна задачі:

$$g(y,\xi) = \begin{cases} -a_1(\xi)\psi_1(y), 0 \le y < \xi \\ a_0(\xi)\psi_0(y), \xi < y \le b \end{cases}$$

Де $a_0(\xi)$, $a_1(\xi)$ будуть знайдені з наступної системи

$$\begin{cases} a_0(\xi)\psi_0^{'}(\xi) + a_1(\xi)\psi_1^{'}(\xi) = 1 \\ a_0(\xi)\psi_0^{(}\xi) + a_1(\xi)\psi_1(\xi) = 0 \end{cases}$$

Таким чином остаточний розв'язок задачі відносно $v_0(y)$ буде мати наступний вигляд:

$$v_0(y) = \frac{1}{(1+\mu_0)}\int_0^b g(y,\xi)f(\xi)d\xi - \psi_0(y)\frac{p_0}{2G+\lambda}$$

У випадку статичної задачі коли $\omega = 0$ отримаємо наступну задачу відносно $v_0(y)$:

$$v_0^{''}(y) = \frac{f(y)}{1+\mu_0}$$

$$(2G+\lambda)v_0^{'}(b) = -p_0, \quad v_0(0) = 0, \quad p_0 = \int_0^a p(x)dx$$

Додаток Е

ЗНАХОДЖЕННЯ КОЄФІЦІЄНТІВ c_i, $i = \overline{1,4}$

Випадок статичної задачі

Для знаходження коєфіцієтів c_1, c_2, c_3, c_4 випадку статичної задачі (3.9) спочатку знайдем $Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ та $Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$.

$$Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n}\begin{pmatrix} \alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0 & \alpha_n\mu_0 y \\ -\alpha_n\mu_0 y & -\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n}\begin{pmatrix} c_1(\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2(\alpha_n\mu_0 y) \\ c_1(-\alpha_n\mu_0 y) + c_2(-\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0) \end{pmatrix}$$

$$Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n\mu_0 y \\ \alpha_n\mu_0 y & -\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} c_3(\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4(-\alpha_n\mu_0 y) \\ c_3(\alpha_n\mu_0 y) + c_4(-\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Введемо позначення $c = \frac{1}{4\alpha_n(1+\mu_0)}$.
Запишем тепер $Z_n(y)$:

$$Z_n(y) = c \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_n y}(\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2 e^{\alpha_n y}(\alpha_n\mu_0 y) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n\mu_0 y) \\ \\ c_1 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n\mu_0 y) + c_2 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n\mu_0 y) + c_4 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Тепер $Z_n^{'}(y)$:

$$Z_n^{'}(y) = c \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_n y}(\alpha_n^2\mu_0 y + 2\alpha_n + 2\alpha_n\mu_0) + c_2 e^{\alpha_n y}(\alpha_n^2\mu_0 y + \alpha_n\mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n^2\mu_0 y + 2\alpha_n + 2\alpha_n\mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n^2\mu_0 y - \alpha_n\mu_0) \\ \\ c_1 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n\mu_0 y) + c_2 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n\mu_0 y) + c_4 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Тепер використаєм граничні умови (3.10) та побудуєм алгебричну систему відносно коєфіцієнтів.

Використаєм $U_0\left[Z_n(y)\right]$:

$$E_0 * Z_n^{'}(b) + F_0 * Z_n(b) = D_0 \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix} * Z_n^{'}(b) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n\lambda & 0 \end{pmatrix} * Z_n(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}$$

Отримаємо перші 2 рівняння системи:

$$\begin{cases} c_1 e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n\mu_0 + \alpha_n) + c_2 e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b - \alpha_n) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n b}(-\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n + \alpha_n\mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n) = 0 \\ \\ c_1 e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b - 2G\alpha_n\mu_0 + 2\lambda\alpha_n) + c_2 e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b + \\ + (2G + \lambda)2\alpha_n) + c_3 e^{-\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b + 2G\alpha_n\mu_0 - 2\lambda\alpha_n) + \\ + c_4 e^{-\alpha_n b}(2G\alpha_n^2\mu_0 b + (2G + \lambda)2\alpha_n) = -cp_n \end{cases}$$

Використаєм $U_1\left[Z_n(y)\right]$:

$$E_1 * Z_n^{'}(0) + F_1 * Z_n(0) = D_1 \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * Z_n^{'}(0) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * Z_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отримаємо другі 2 рівняння системи:

$$\begin{cases} c_1(\alpha_n + \alpha_n\mu_0) + c_2(-\alpha_n) + c_3(\alpha_n + \alpha_n\mu_0) + c_4(\alpha_n) = 0 \\ \\ c_2(2 + \mu_0) + c_4(-2 - \mu_0) = 0 \end{cases}$$

Звідси видно, що $c_3 = -c_1$, $c_4 = c_2$. Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} a_1 &= e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n\mu_0 + \alpha_n) - e^{-\alpha_n b}(-\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n + \alpha_n\mu_0), \\ a_2 &= e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b - \alpha_n) + e^{-\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n), \\ a_3 &= e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b - 2G\alpha_n\mu_0 + 2\lambda\alpha_n) - \\ &\quad - e^{-\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b + 2G\alpha_n\mu_0 - 2\lambda\alpha_n) \\ a_4 &= e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b + (2G + \lambda)2\alpha_n) + \\ &\quad + e^{-\alpha_n b}(2G\alpha_n^2\mu_0 b + (2G + \lambda)2\alpha_n) \end{aligned}$$

Враховуючи останнє отримаємо:

$$\begin{cases} c_3 = -c_1 \\ c_4 = c_2 \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0 \\ c_1 a_3 + c_2 a_4 = -cp_n \end{cases} \Leftrightarrow, \quad \begin{cases} c_3 = -c_1 \\ c_4 = c_2 \\ c_1 = -c_2 \frac{a_2}{a_1} \\ c_2(a_4 a_1 - a_2 a_3) = -cp_n a_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = cp_n \frac{a_2}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \\ c_2 = -cp_n \frac{a_1}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \\ c_3 = -cp_n \frac{a_2}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \\ c_4 = -cp_n \frac{a_1}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \end{cases}$$

Випадок динамічної задачі

Для знаходження коефіцієтів c_1, c_2, c_3, c_4 випадку динамічної задачі спочатку знайдем $(Y_0(y) + Y_1(y)) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ та $(Y_2(y) + Y_3(y)) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$.