

## Зміст

<b>1</b>	<b>МЕТОДИКА ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ</b>	<b>2</b>
1.1	Постановка задачі . . . . .	2
1.2	Зведення задачі до одновимірної у просторі трансформант . . .	3
1.3	Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Напружений стан прямокутної області</b>	<b>7</b>
2.1	Постановка задачі . . . . .	7
2.2	Зведення задачі до одновимірної у просторі трансформант . . .	7
2.3	Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми . . . . .	8
2.4	Фінальний розв'язок задачі . . . . .	10
2.5	Чисельні розрахунки . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Напружений стан прямокутної області динаміка</b>	<b>10</b>
3.1	Постановка задачі . . . . .	10
3.2	Зведення задачі до одновимірної у просторі трансформант . . .	11
3.3	Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми . . . . .	12
3.4	Фінальний розв'язок задачі . . . . .	14

## Перелік умовних позначень

$G$  - коефіцієнт Ламе

$E$  - модуль Юнга

$\mu$  - коефіцієнт Пуасона

$c_1, c_2$  - швидкості хвилі

$\omega$  - частота

$\mu_0 = \frac{1}{1-2\mu}$

$U_x(x, y) = u(x, y)$  - переміщення по осі  $x$

$U_y(x, y) = v(x, y)$  - переміщення по осі  $y$

## 1 МЕТОДИКА ПОБУДОВИ РОЗВ'ЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ

У даному розділі наведено опис аналітичного апарату, який використовується для розв'язання мішаних задач теорії пружності для прямокутної області. Цей підхід базується на результатах раніше проведених досліджень, зокрема робіт [1] і [2]. Розглянута методика розв'язання мішаних плоских задач ґрунтується на застосуванні інтегральних перетворень безпосередньо до системи рівнянь рівноваги Ламе та крайових умов. Це дозволяє зводити вихідну задачу до векторної одновимірної крайової задачі. Векторна одновимірна крайова задача точно розв'язується за допомогою матричного диференційного числення та матричної функції Гріна.

### 1.1 Постановка задачі

Розглядається пружна прямокутна область, яка займає область, що у декартовій системі координат описується співвідношенням  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ .

До прямокутної області на грані  $y = b$  додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y, t)|_{y=b} = -p(x, t), \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{y=b} = 0, \quad 0 \leq x \leq a \quad (1.1)$$

де  $p(x, t)$  відома функція. На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x, y, t)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{y=0} = 0 \quad (1.2)$$

На бічних гранях  $x = 0$  та  $x = a$  граничні умови запишемо у формі

$$U_1[f(x, y, t)] = 0, \quad U_2[f(x, y, t)] = 0, \quad 0 \leq y \leq b \quad (1.3)$$

Де

$$U_1[f(x, y, t)] = \left[ \alpha_1 f(x, y, t) + \beta_1 \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial x} \right]_{x=0}$$
$$U_2[f(x, y, t)] = \left[ \alpha_2 f(x, y, t) + \beta_2 \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial x} \right]_{x=a}$$

граничні функціонали у загальному виді (для кожної конкретної задачі вони будуть деталізовані),  $f(x, y, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t))^T$  - вектор переміщень.

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right) = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1.4)$$

Будемо розглядати випадок гармонічних коливань, тому можемо представити функції у наступному вигляді:

$$u(x, y, t) = u(x, y)e^{i\omega t}, \quad v(x, y, t) = v(x, y)e^{i\omega t}, \quad p(x, t) = p(x)e^{i\omega t} \quad (1.5)$$

Таким чином отримаємо наступні рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{\omega^2}{c_1^2} u(x, y) \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \right) = -\frac{\omega^2}{c_2^2} v(x, y) \end{cases} \quad (1.6)$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} \sigma_y(x, y)|_{y=b} = -p(x, t), \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=b} = 0 \\ v(x, y)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=0} = 0 \\ U_1[f(x, y)] = 0, \quad U_2[f(x, y)] = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Введемо невідомі функції  $\chi_1(y) = u(0, y)$ ,  $\chi_2(y) = v(0, y)$ ,  $\chi_3(y) = u(a, y)$ ,  $\chi_4(y) = v(a, y)$ . Враховучи умову (1.3), отримаємо, що  $\frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} \chi_1(y)$ ,  $\frac{\partial v(0, y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} \chi_2(y)$ ,  $\frac{\partial u(a, y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2} \chi_3(y)$ ,  $\frac{\partial v(a, y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2} \chi_4(y)$ . Отже умова (1.3) виконується автоматично.

## 1.2 Зведення задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаєм інтегральне перетворення Фур'є по змінній  $x$  у до рівнянь (1.6) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x, y) \sin(\alpha_n x) \\ v(x, y) \cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a}, n = \overline{1, \infty} \quad (1.8)$$

Для цього помножимо перше та друге рівняння (1.6) на  $\sin(\alpha_n x)$  та  $\cos(\alpha_n x)$  відповідно та проінтегруємо по змінній  $x$  на інтервалі  $0 \leq x \leq a$ . Покрокове інтегрування рівняння (1.6) наведено у (Додаток А). Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2 \mu_0 - \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) = \\ = \alpha_n (1 + \mu_0) (\chi_3(y) \cos(\alpha_n a) - \chi_1(y)) \\ (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - (\alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = \\ = (\frac{\alpha_2}{\beta_2} \chi_4(y) \cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \chi_2(y)) - \mu_0 (\chi_3'(y) \cos(\alpha_n a) - \chi_1'(y)) \end{cases} \quad (1.9)$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \left( (2G + \lambda)v_n'(y) + \alpha_n \lambda u_n(y) \right) |_{y=b} = -p_n \\ \left( u_n'(y) - \alpha_n v_n(y) \right) |_{y=b} = 0 \\ v_n(y)|_{y=0} = 0 \\ \left( u_n'(y) - \alpha_n v_n(y) \right) |_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Де  $p_n = \int_0^a p(x) \cos(\alpha_n x) dx$

### 1.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у просторі трансформант, перепишемо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (1.9) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} L_2 [Z_n(y)] &= A * Z_n''(y) + B * Z_n'(y) + C * Z_n(y) \\ L_2 [Z_n(y)] &= F_n(y) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Де

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix}, \quad Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} \\ F_n(y) &= \begin{pmatrix} \alpha_n(1 + \mu_0)(\chi_3(y) \cos(\alpha_n a) - \chi_1(y)) \\ (\frac{\alpha_2}{\beta_2} \chi_4(y) \cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \chi_2(y)) - \mu_0(\chi_3(y) \cos(\alpha_n a) - \chi_1'(y)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Граничні умови (1.10) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} U_i [Z_n(y)] &= E_i * Z_n'(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ U_i [Z_n(y)] &= D_i \end{aligned} \quad (1.12)$$

Де  $i = \overline{0, 1}$ ,  $b_0 = b$ ,  $b_1 = 0$ ,

$$\begin{aligned} E_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix}, \\ E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ D_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (1.11). Шукати її будемо у наступному вигляді:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \quad (1.13)$$

Де  $M(s)$  - характеристична матриця рівняння (3.12), а  $C$  - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умови

$$L_2 [e^{sy} * I] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} L_2 [e^{sy} * I] &= e^{sy} (s^2 A * I + sB * I + C * I) = \\ &= e^{sy} \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix} => \\ M(s) &= \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Знайдемо тепер  $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]}$ .

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s \\ -\alpha_n \mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \det[M(s)] &= (s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) + (\alpha_n \mu_0 s)^2 = \\ &= (1 + \mu_0)(s - a_1)(s + a_1)(s - a_2)(s + a_2) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Де  $a_1, a_2$ :

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\frac{b_1}{b_3} - \omega \sqrt{\frac{b_2}{b_3}}}, \\ a_2 &= \sqrt{\frac{b_1}{b_3} + \omega \sqrt{\frac{b_2}{b_3}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= 2\alpha_n^2 c_1^2 c_2^2 \mu_0 + 2\alpha_n^2 c_1^2 c_2^2 - c_1^2 \omega^2 - c_2^2 \mu_0 \omega^2 - c_2^2 \omega^2, \\ b_2 &= 4\alpha_n^2 c_1^4 c_2^2 \mu_0^2 + 4\alpha_n^2 c_1^4 c_2^2 \mu_0 - 4\alpha_n^2 c_1^2 c_2^4 \mu_0^2 - \\ &\quad - 4\alpha_n^2 c_1^2 c_2^4 \mu_0 + c_1^4 \omega^2 - 2c_1^2 c_2^2 \mu_0 \omega^2 - 2c_1^2 c_2^2 \omega^2 + \\ &\quad + c_2^4 \mu_0^2 \omega^2 + c_2^4 \omega^2, \\ b_3 &= 2c_1^2 c_2^2 \mu_0 + 2c_1^2 c_2^2 \end{aligned}$$

Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds &= \frac{2\pi i}{2\pi i(1 + \mu_0)} \sum_{i=1}^2 Res \left[ e^{sy} \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]} \right] = \\ &= \frac{1}{(1 + \mu_0)} (Y_0(y) + Y_1(y) + Y_2(y) + Y_3(y)) \end{aligned}$$

Знайдем  $Y_0(y)$ :

$$\begin{aligned} Y_0(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s+a_1)(s-a_2)(s+a_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=a_1} = \\ &= \frac{e^{a_1 y}}{2a_1(a_1^2 - a_2^2)} \begin{pmatrix} a_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 a_1 \\ -\alpha_n \mu_0 a_1 & a_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Знайдем  $Y_1(y)$ :

$$\begin{aligned} Y_1(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s-a_1)(s-a_2)(s+a_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-a_1} = \\ &= -\frac{e^{-a_1 y}}{2a_1(a_1^2 - a_2^2)} \begin{pmatrix} a_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 a_1 \\ \alpha_n \mu_0 a_1 & a_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Знайдем  $Y_2(y)$ :

$$\begin{aligned} Y_2(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s+a_2)(s-a_1)(s+a_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=a_2} = \\ &= \frac{e^{a_2 y}}{2a_2(a_2^2 - a_1^2)} \begin{pmatrix} a_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 a_2 \\ -\alpha_n \mu_0 a_2 & a_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Знайдем  $Y_3(y)$ :

$$\begin{aligned} Y_3(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s-a_2)(s-a_1)(s+a_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-a_2} = \\ &= -\frac{e^{-a_2 y}}{2a_2(a_2^2 - a_1^2)} \begin{pmatrix} a_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 a_2 \\ \alpha_n \mu_0 a_2 & a_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Знайдем тепер фундаментальні базисні матриці  $\Psi_0(y)$ ,  $\Psi_1(y)$ , шукать їх будемо у наступному вигляді:

$$\Psi_i(y) = \frac{1}{1+\mu_0} (Y_0(y) + Y_1(y)) * C_1^i + \frac{1}{1+\mu_0} (Y_2(y) + Y_3(y)) * C_2^i \quad (1.22)$$

Залишилось знайти невідомі матриці коефіцієнтів  $C_1^0$ ,  $C_2^0$ ,  $C_1^1$ ,  $C_2^1$  використовуючи граничні умови (1.12). Покрокове знаходження яких наведено у (Додаток В).

Таким чином матрицю Гріна можемо записати у вигляді:

$$G(y, \xi) = \begin{cases} \Psi_0(y) * \Psi_1(\xi), & 0 \leq y < \xi \\ \Psi_1(y) * \Psi_0(\xi), & \xi < y \leq b \end{cases} \quad (1.23)$$

Для данної матриці Гріна виконано усі властивості, зокрема виконані однорідні граничні умови (1.12) та однорідні рівняння рівноваги у просторі трансформант (1.11):

$$\begin{aligned} L_2 [G(y, \xi)] &= 0 \\ U_0 [G(y, \xi)] &= 0, \quad U_1 [G(y, \xi)], \end{aligned}$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок крайової задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y) = \int_0^b G(y, \xi) F_n(\xi) d\xi + \Psi_0 * D_0 + \Psi_1 * D_1 \quad (1.24)$$

## 2 Напружений стан прямокутної області

### 2.1 Постановка задачі

Розглядається пружна прямокутна область, яка займає область, що описується у декартовій системі координат співвідношенням  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ .

До прямокутної області на грані  $y = b$  додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=b} = 0 \quad (2.1)$$

де  $p(x)$  відома функція. На бічних гранях виконується умова ідеального контакту

$$u(x, y)|_{x=0}, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=0} = 0 \quad (2.2)$$

$$u(x, y)|_{x=a}, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=a} = 0 \quad (2.3)$$

На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x, y)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=0} = 0 \quad (2.4)$$

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

### 2.2 Зведення задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаємо інтегральне перетворення Фур'є по змінній  $x$  у до рівнянь (2.5) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x, y) \sin(\alpha_n x) \\ v(x, y) \cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a}, n = \overline{1, \infty} \quad (2.6)$$

Для цього помножимо перше та друге рівняння (2.5) на  $\sin(\alpha_n x)$  та  $\cos(\alpha_n x)$  відповідно та проінтегруємо по змінній  $x$  на інтервалі  $0 \leq x \leq a$ . Покрокове інтегрування рівняння (2.5) наведено у (Додаток А). Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - \alpha_n^2 (1 + \mu_0) u_n(y) = 0 \\ (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \left( (2G + \lambda) v_n'(y) + \alpha_n \lambda u_n(y) \right) |_{y=b} = -p_n \\ \left( u_n'(y) - \alpha_n v_n(y) \right) |_{y=b} = 0 \\ v_n(y) |_{y=0} = 0 \\ \left( u_n'(y) - \alpha_n v_n(y) \right) |_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Де  $p_n = \int_0^a p(x) \cos(\alpha_n x) dx$

### 2.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у просторі трансформант, перепишемо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (2.7) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} L_2 [Z_n(y)] &= A * Z_n''(y) + B * Z_n'(y) + C * Z_n(y) \\ L_2 [Z_n(y)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2(1 + \mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix}$$

$$Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (2.8) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} U_i [Z_n(y)] &= E_i * Z_n'(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ U_i [Z_n(y)] &= D_i \end{aligned} \quad (2.10)$$

Де  $i = \overline{0, 1}$ ,  $b_0 = b$ ,  $b_1 = 0$ ,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (2.9). Шукати її будемо у наступному вигляді:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \quad (2.11)$$

Де  $M(s)$  - характеристична матриця рівняння (2.9), а  $C$  - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умови

$$L_2 [e^{sy} * I] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} L_2 [e^{sy} * I] &= e^{sy} (s^2 A * I + sB * I + C * I) = \\ &= e^{sy} \left( \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2(1 + \mu_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_n^2(1 + \mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix} \right) = \\ &= e^{sy} \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0) & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 \end{pmatrix} => \end{aligned}$$



$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0) & -\alpha_n\mu_0s \\ \alpha_n\mu_0s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Знайдемо тепер  $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]}$ .

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 & \alpha_n\mu_0s \\ -\alpha_n\mu_0s & s^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \det[M(s)] &= (s^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0))(s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2) + (\alpha_n\mu_0s)^2 = \\ &= (1 + \mu_0)(s - \alpha_n)^2(s + \alpha_n)^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матриці за допомогою теореми про лишки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds &= \frac{2\pi i}{2\pi i(1 + \mu_0)} \sum_{i=1}^2 \text{Res} \left[ e^{sy} \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]} \right] = \\ &= \frac{1}{(1 + \mu_0)} (Y_0(y) + Y_1(y)) \end{aligned}$$

Знайдемо  $Y_0(y)$ :

$$\begin{aligned} Y_0(y) &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{e^{sy}}{(s + \alpha_n)^2} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=\alpha_n} = \\ &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n\mu_0y + 2 + \mu_0 & \alpha_n\mu_0y \\ -\alpha_n\mu_0y & -\alpha_n\mu_0y + 2 + \mu_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Знайдемо  $Y_1(y)$ :

$$\begin{aligned} Y_1(y) &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{e^{sy}}{(s - \alpha_n)^2} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-\alpha_n} = \\ &= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n\mu_0y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n\mu_0y \\ \alpha_n\mu_0y & -\alpha_n\mu_0y - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y) = \frac{1}{1 + \mu_0} \left( Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \right) \quad (2.18)$$

Залишилось знайти невідомі коефіцієнти  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , використовуючи граничні умови (2.10). Покрокове знаходження коефіцієнтів наведено у (Додаток В). Таким чином ми можемо записати розв'язок у просторі трансформант:

$$\begin{aligned} u_n(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n(1 + \mu_0)} [c_1(\alpha_n\mu_0y + 2 + \mu_0) + c_2(\alpha_n\mu_0y)] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n(1 + \mu_0)} [c_3(\alpha_n\mu_0y - 2 - \mu_0) + c_4(-\alpha_n\mu_0y)] \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} v_n(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n(1 + \mu_0)} [c_1(-\alpha_n\mu_0y) + c_2(-\alpha_n\mu_0y + 2 + \mu_0)] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n(1 + \mu_0)} [c_3(\alpha_n\mu_0y) + c_4(-\alpha_n\mu_0y - 2 - \mu_0)] \end{aligned} \quad (2.20)$$

## 2.4 Фінальний розв'язок задачі

Використовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (2.19), (2.20), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (2.21)$$

$$v(x, y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (2.22)$$

Останній крок це знаходження  $v_0(y)$  у випадку коли  $n = 0$ ,  $\alpha_n = 0$ . Для цього повернемося до другого рівняння (2.7), та запишемо його для цього випадку:

$$(1 + \mu_0) v_n''(y) = 0 \quad (2.23)$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} (2G + \lambda) v_0'(y)|_{y=b} = -p_0 \\ v_0(y)|_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Де  $p_0 = \int_0^a p(x) dx$

Розв'язок рівняння (2.23):

$$v_0(y) = c_1 + c_2 y \quad (2.25)$$

Заставляючи граничні умови (2.24) для знаходження коефіцієнтів  $c_1$ ,  $c_2$ , отримаємо розв'язок задачі задачі:

$$v_0(y) = \frac{-p_0}{(2G + \lambda)} y \quad (2.26)$$

Тепер остаточний розв'язок задачі можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin(\alpha_n x), & \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \\ v(x, y) = \frac{-p_0}{(2G + \lambda)a} y + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x), & \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \end{cases} \quad (2.27)$$

## 2.5 Чисельні розрахунки

# 3 Напружений стан прямокутної області динаміка

## 3.1 Постановка задачі

Розглядається пружна така сама прямокутна область як і в попередній задачі  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ .

До прямокутної області на грані  $y = b$  додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y, t)|_{y=b} = -p(x, t), \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{y=b} = 0 \quad (3.1)$$

де  $p(x, t)$  відома функція. На бічних гранях виконується умова ідеального контакту

$$u(x, y, t)|_{x=0}, \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{x=0} = 0 \quad (3.2)$$

$$u(x, y, t)|_{x=a}, \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{x=a} = 0 \quad (3.3)$$

На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x, y, t)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{y=0} = 0 \quad (3.4)$$

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right) = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3.5)$$

Будемо розглядати випадок гармонічних коливань, тому можемо представити функції у наступному вигляді:

$$u(x, y, t) = u(x, y)e^{i\omega t}, \quad v(x, y, t) = v(x, y)e^{i\omega t}, \quad p(x, t) = p(x)e^{i\omega t} \quad (3.6)$$

Таким чином отримаємо наступні рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{\omega^2}{c_1^2} u(x, y) \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \right) = -\frac{\omega^2}{c_2^2} v(x, y) \end{cases} \quad (3.7)$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} \sigma_y(x, y)|_{y=b} = -p(x, t), \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=b} = 0 \\ u(x, y)|_{x=0}, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=0} = 0 \\ u(x, y)|_{x=a}, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=a} = 0 \\ v(x, y)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

## 3.2 Зведення задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаєм інтегральне перетворення Фур'є по змінній  $x$  у до рівнянь (2.5) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x, y) \sin(\alpha_n x) \\ v(x, y) \cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a}, n = \overline{1, \infty} \quad (3.9)$$

Для цього помножимо перше та друге рівняння (3.7) на  $\sin(\alpha_n x)$  та  $\cos(\alpha_n x)$  відповідно та проінтегруємо по змінній  $x$  на інтервалі  $0 \leq x \leq a$ . Покрокове інтегрування рівняння (3.7) наведено у (Додаток А). Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) + (-\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) = 0 \\ (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) + (-\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \left( (2G + \lambda) v_n'(y) + \alpha_n \lambda u_n(y) \right) |_{y=b} = -p_n \\ u_n'(y) - \alpha_n v_n(y) |_{y=b} = 0 \\ v_n(y) |_{y=0} = 0 \\ u_n'(y) - \alpha_n v_n(y) |_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Де  $p_n = \int_0^a p(x) \cos(\alpha_n x) dx$

### 3.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у просторі трансформант, перепишемо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (3.10) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} L_2 [Z_n(y)] &= A * Z_n''(y) + B * Z_n'(y) + C * Z_n(y) \\ L_2 [Z_n(y)] &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Де

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix}, \quad Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Граничні умови (3.11) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} U_i [Z_n(y)] &= E_i * Z_n'(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ U_i [Z_n(y)] &= D_i \end{aligned} \quad (3.13)$$

Де  $i = \overline{0, 1}$ ,  $b_0 = b$ ,  $b_1 = 0$ ,

$$\begin{aligned} E_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix}, \\ E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ D_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (3.12). Шукати її будемо у наступному вигляді:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \quad (3.14)$$

Де  $M(s)$  - характеристична матриця рівняння (3.12), а  $C$  - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умови

$$L_2 [e^{sy} * I] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} L_2 [e^{sy} * I] &= e^{sy} (s^2 A * I + sB * I + C * I) = \\ &= e^{sy} \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} => \\ M(s) &= \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Знайдемо тепер  $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]}$ .

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s \\ -\alpha_n \mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \det[M(s)] &= (s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) + (\alpha_n \mu_0 s)^2 = \\ &= (1 + \mu_0)(s - a_1)(s + a_1)(s - a_2)(s + a_2) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Де  $a_1, a_2$ :

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\frac{b_1}{b_3} - \omega \sqrt{\frac{b_2}{b_3}}}, \\ a_2 &= \sqrt{\frac{b_1}{b_3} + \omega \sqrt{\frac{b_2}{b_3}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= 2\alpha_n^2 c_1^2 c_2^2 \mu_0 + 2\alpha_n^2 c_1^2 c_2^2 - c_1^2 \omega^2 - c_2^2 \mu_0 \omega^2 - c_2^2 \omega^2, \\ b_2 &= 4\alpha_n^2 c_1^4 c_2^2 \mu_0^2 + 4\alpha_n^2 c_1^4 c_2^2 \mu_0 - 4\alpha_n^2 c_1^2 c_2^4 \mu_0^2 - \\ &\quad - 4\alpha_n^2 c_1^2 c_2^4 \mu_0 + c_1^4 \omega^2 - 2c_1^2 c_2^2 \mu_0 \omega^2 - 2c_1^2 c_2^2 \omega^2 + \\ &\quad + c_2^4 \mu_0^2 \omega^2 + c_2^4 \omega^2, \\ b_3 &= 2c_1^2 c_2^2 \mu_0 + 2c_1^2 c_2^2 \end{aligned}$$

Врахувачи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матриці за допомогою теореми про лишки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds &= \frac{2\pi i}{2\pi i(1 + \mu_0)} \sum_{i=1}^2 \text{Res} \left[ e^{sy} \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]} \right] = \\ &= \frac{1}{(1 + \mu_0)} (Y_0(y) + Y_1(y) + Y_2(y) + Y_3(y)) \end{aligned}$$

Знайдем  $Y_0(y)$ :

$$\begin{aligned} Y_0(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s + a_1)(s - a_2)(s + a_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=a_1} = \\ &= \frac{e^{a_1 y}}{2a_1(a_1^2 - a_2^2)} \begin{pmatrix} a_1^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 a_1 \\ -\alpha_n \mu_0 a_1 & a_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Знайдем  $Y_1(y)$ :

$$\begin{aligned} Y_1(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s - a_1)(s - a_2)(s + a_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-a_1} = \\ &= -\frac{e^{-a_1 y}}{2a_1(a_1^2 - a_2^2)} \begin{pmatrix} a_1^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 a_1 \\ \alpha_n \mu_0 a_1 & a_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Знайдем  $Y_2(y)$ :

$$\begin{aligned} Y_2(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s+a_2)(s-a_1)(s+a_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=a_2} = \\ &= \frac{e^{a_2 y}}{2a_2(a_2^2 - a_1^2)} \begin{pmatrix} a_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 a_2 \\ -\alpha_n \mu_0 a_2 & a_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Знайдем  $Y_3(y)$ :

$$\begin{aligned} Y_3(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s-a_2)(s-a_1)(s+a_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-a_2} = \\ &= -\frac{e^{-a_2 y}}{2a_2(a_2^2 - a_1^2)} \begin{pmatrix} a_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 a_2 \\ \alpha_n \mu_0 a_2 & a_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y) = \frac{1}{1+\mu_0} (Y_0(y) + Y_1(y)) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+\mu_0} (Y_2(y) + Y_3(y)) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Залишилось знайти невідомі коефіцієнти  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , використовуючи граничні умови (3.13). Покрокове знаходження коефіцієнтів наведено у (Додаток С). Таким чином ми можемо записати розв'язок у просторі трансформант:

$$\begin{aligned} u_n(y) &= \frac{(a_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{a_1 y} - e^{-a_1 y})}{2a_1(a_1^2 - a_2^2)(1+\mu_0)} c_1 + \\ &+ \frac{(a_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{a_2 y} - e^{-a_2 y})}{2a_2(a_2^2 - a_1^2)(1+\mu_0)} c_3 + \\ &+ \frac{(a_1 \alpha_n y)(e^{a_1 y} + e^{-a_1 y})}{2a_1(a_1^2 - a_2^2)(1+\mu_0)} c_2 + \frac{(a_2 \alpha_n y)(e^{a_2 y} + e^{-a_2 y})}{2a_2(a_2^2 - a_1^2)(1+\mu_0)} c_4 \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} v_n(y) &= \frac{(a_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{a_1 y} - e^{-a_1 y})}{2a_1(a_1^2 - a_2^2)(1+\mu_0)} c_2 + \\ &+ \frac{(a_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{a_2 y} - e^{-a_2 y})}{2a_2(a_2^2 - a_1^2)(1+\mu_0)} c_4 - \\ &- \frac{(a_1 \alpha_n y)(e^{a_1 y} + e^{-a_1 y})}{2a_1(a_1^2 - a_2^2)(1+\mu_0)} c_1 - \frac{(a_2 \alpha_n y)(e^{a_2 y} + e^{-a_2 y})}{2a_2(a_2^2 - a_1^2)(1+\mu_0)} c_3 \end{aligned} \quad (3.25)$$

### 3.4 Фінальний розв'язок задачі

Використовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (3.24), (3.25), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (3.26)$$

$$v(x, y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (3.27)$$

Останній крок це знаходження  $v_0(y)$  у випадку коли  $n = 0$ ,  $\alpha_n = 0$ . Для цього повернемося до другого рівняння (3.10), та запишемо його для цього випадку:

$$(1 + \mu_0)v_n''(y) + \frac{\omega^2}{c_2^2}v_0(y) = 0 \quad (3.28)$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} (2G + \lambda)v_0'(y)|_{y=b} = -p_0 \\ v_0(y)|_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

Де  $p_0 = \int_0^a p(x)dx$

Розв'язок рівняння (3.28):

$$v_0(y) = c_1 \cos\left(y\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right) + c_2 \sin\left(y\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right) \quad (3.30)$$

Заставляючи граничні умови (3.29) для знаходження коефіцієнтів  $c_1$ ,  $c_2$ , отримаємо розв'язок задачі задачі:

$$v_0(y) = \frac{-p_0}{(2G + \lambda)\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\sin\left(b\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right)}\sin\left(y\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right) \quad (3.31)$$

## Література

- [1] Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов разрез тонких включений и подкреплений. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 344 с.
- [2] Попов Г.Я. Точные решения некоторых краевых задач механики деформируемого твёрдого тела. Одесса: Астропринт, 2013. 424 с.

## Додаток А

### ПОКРОКОВЕ ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ ЛАМЕ ЗА ЗМІННОЮ $x$

Помножимо перше та друге рівняння (1.6) на  $\sin(\alpha_n x)$  та  $\cos(\alpha_n x)$  відповідно та проінтегруємо по змінній  $x$  на інтервалі  $0 \leq x \leq a$ . Скористаємося введенною заміною  $\chi_1(y) = u(0, y)$ ,  $\chi_2(y) = v(0, y)$ ,  $\chi_3(y) = u(a, y)$ ,  $\chi_4(y) = v(a, y)$  та  $\frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_1(y)$ ,  $\frac{\partial v(0, y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)$ ,  $\frac{\partial u(a, y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_3(y)$ ,  $\frac{\partial v(a, y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)$ .

Розглянемо перше рівняння

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \sin(\alpha_n x) dx + \int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \sin(\alpha_n x) dx + \\ & + \mu_0 \left( \int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \sin(\alpha_n x) dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \sin(\alpha_n x) dx \right) + \\ & + \frac{\omega^2}{c_1^2} \int_0^a u(x, y) \sin(\alpha_n x) dx = 0 \end{aligned}$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \sin(\alpha_n x) dx = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \sin(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cos(\alpha_n x) dx = \\ & = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \sin(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \left( u(x, y) \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a u(x, y) \sin(\alpha_n x) dx \right) = \\ & = -\alpha_n (\chi_3(y) \cos(\alpha_n a) - \chi_1(y)) - \alpha_n^2 u_n(y) \end{aligned}$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \sin(\alpha_n x) dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^a u(x, y) \sin(\alpha_n x) dx = u_n''(y)$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \sin(\alpha_n x) dx = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \sin(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cos(\alpha_n x) dx = \\ & = -\alpha_n \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a v(x, y) \cos(\alpha_n x) dx = -\alpha_n v_n'(y) \end{aligned}$$

Тоді перше рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$\begin{aligned} & u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2 \mu_0 - \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) = \\ & = \alpha_n (1 + \mu_0) (\chi_3(y) \cos(\alpha_n a) - \chi_1(y)) \end{aligned}$$

Розглянемо друге рівняння

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} \cos(\alpha_n x) dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \cos(\alpha_n x) dx + \\ & + \mu_0 \left( \int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \cos(\alpha_n x) dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \cos(\alpha_n x) dx \right) + \\ & + \frac{\omega^2}{c_2^2} \int_0^a v(x, y) \cos(\alpha_n x) dx = 0 \end{aligned}$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} \cos(\alpha_n x) dx = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \sin(\alpha_n x) dx = \\ & = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \left( v(x, y) \sin(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a v(x, y) \cos(\alpha_n x) dx \right) = \\ & = -\left( \frac{\alpha_2}{\beta_2} \chi_4(y) \cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \chi_2(y) \right) - \alpha_n^2 v_n(y) \end{aligned}$$



Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \cos(\alpha_n x) dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^a v(x, y) \cos(\alpha_n x) dx = v_n''(y)$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} \cos(\alpha_n x) dx &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \sin(\alpha_n x) dx = \\ &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a u(x, y) \sin(\alpha_n x) dx = \alpha_n u_n'(y) + \\ &+ (\chi_3'(y) \cos(\alpha_n a) - \chi_1'(y)) \end{aligned}$$

Тоді друге рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$\begin{aligned} (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - (\alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = \\ = (\frac{\alpha_2}{\beta_2} \chi_4(y) \cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \chi_2(y)) - \mu_0 (\chi_3'(y) \cos(\alpha_n a) - \chi_1'(y)) \end{aligned}$$

## Додаток В

Для знаходження коефіцієнтів  $c_1, c_2, c_3, c_4$  спочатку знайдемо  $Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  та  $Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 & \alpha_n \mu_0 y \\ -\alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} c_1(\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2(\alpha_n \mu_0 y) \\ c_1(-\alpha_n \mu_0 y) + c_2(-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) \end{pmatrix} \\ Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} &= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n \mu_0 y \\ \alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} c_3(\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y) \\ c_3(\alpha_n \mu_0 y) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Введемо позначення  $c = \frac{1}{4\alpha_n(1+\mu_0)}$ .

Запишемо тепер  $Z_n(y)$ :

$$Z_n(y) = c \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2 e^{\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y) \\ c_1 e^{\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y) + c_2 e^{\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y) + c_4 e^{-\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Тепер  $Z_n'(y)$ :

$$Z_n'(y) = c \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_n y} (\alpha_n^2 \mu_0 y + 2\alpha_n + 2\alpha_n \mu_0) + c_2 e^{\alpha_n y} (\alpha_n^2 \mu_0 y + \alpha_n \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y} (-\alpha_n^2 \mu_0 y + 2\alpha_n + 2\alpha_n \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n y} (\alpha_n^2 \mu_0 y - \alpha_n \mu_0) \\ c_1 e^{\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y) + c_2 e^{\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y) + c_4 e^{-\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Тепер використаєм граничні умови (2.10) та побудуєм алгебричну систему відносно коефіцієнтів.

Використаєм  $U_0 [Z_n(y)]$ :

$$E_0 * Z_n'(b) + F_0 * Z_n(b) = D_0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix} * Z_n'(b) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix} * Z_n(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}$$

Отримаємо перші 2 рівняння системи:

$$\begin{cases} c_1 e^{\alpha_n b} (\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n \mu_0 + \alpha_n) + c_2 e^{\alpha_n b} (\alpha_n^2 \mu_0 b - \alpha_n) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n b} (-\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n + \alpha_n \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n b} (\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n) = 0 \\ c_1 e^{\alpha_n b} (-2G \alpha_n^2 \mu_0 b - 2G \alpha_n \mu_0 + 2\lambda \alpha_n) + c_2 e^{\alpha_n b} (-2G \alpha_n^2 \mu_0 b + \\ + (2G + \lambda) 2\alpha_n) + c_3 e^{-\alpha_n b} (-2G \alpha_n^2 \mu_0 b + 2G \alpha_n \mu_0 - 2\lambda \alpha_n) + \\ + c_4 e^{-\alpha_n b} (2G \alpha_n^2 \mu_0 b + (2G + \lambda) 2\alpha_n) = -cp_n \end{cases}$$

Використаєм  $U_1 [Z_n(y)]$ :

$$E_1 * Z_n'(0) + F_1 * Z_n(0) = D_1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * Z_n'(0) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * Z_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отримаємо другі 2 рівняння системи:

$$\begin{cases} c_1 (\alpha_n + \alpha_n \mu_0) + c_2 (-\alpha_n) + c_3 (\alpha_n + \alpha_n \mu_0) + c_4 (\alpha_n) = 0 \\ c_2 (2 + \mu_0) + c_4 (-2 - \mu_0) = 0 \end{cases}$$

Звідси видно, що  $c_3 = -c_1$ ,  $c_4 = c_2$ . Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} a_1 &= e^{\alpha_n b} (\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n \mu_0 + \alpha_n) - e^{-\alpha_n b} (-\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n + \alpha_n \mu_0), \\ a_2 &= e^{\alpha_n b} (\alpha_n^2 \mu_0 b - \alpha_n) + e^{-\alpha_n b} (\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n), \\ a_3 &= e^{\alpha_n b} (-2G \alpha_n^2 \mu_0 b - 2G \alpha_n \mu_0 + 2\lambda \alpha_n) - \\ &\quad - e^{-\alpha_n b} (-2G \alpha_n^2 \mu_0 b + 2G \alpha_n \mu_0 - 2\lambda \alpha_n) \\ a_4 &= e^{\alpha_n b} (-2G \alpha_n^2 \mu_0 b + (2G + \lambda) 2\alpha_n) + \\ &\quad + e^{-\alpha_n b} (2G \alpha_n^2 \mu_0 b + (2G + \lambda) 2\alpha_n) \end{aligned}$$

Враховуючи останнє отримаємо:

$$\begin{cases} c_3 = -c_1 \\ c_4 = c_2 \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0 \\ c_1 a_3 + c_2 a_4 = -cp_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = -c_1 \\ c_4 = c_2 \\ c_1 = -c_2 \frac{a_2}{a_1} \\ c_2 (a_4 a_1 - a_2 a_3) = -cp_n a_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = cp_n \frac{a_2}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \\ c_2 = -cp_n \frac{a_1}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \\ c_3 = -cp_n \frac{a_2}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \\ c_4 = -cp_n \frac{a_1}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \end{cases}$$

## Додаток С