АНОТАЦІЯ

Пожиленков О. В. Плоскі мішані задачі теорії пружності для прямокутної області. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового доктора філософії за спеціальністю 113 «Прикладна математика» (11 – Математика та статистика). – Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, 2023.

Була розглянута плоска мішана задача теорії пружності для скінченної прямокутної області, яка піддається впливу різних навантажень. Шляхом застосування інтегрального півнескінченного sin- та cos-перетворення Фур'є вихідна задача була зведена до одновимірної векторної крайової задачі. Задачу у просторі трансформантів було переформульовано як векторну крайову задачу. Розв'язок цієї задачі було побудовано як суперпозицію загального розв'язку однорідного векторного рівняння та часткового розв'язку неоднорідного рівняння. Розв'язок однорідного векторного рівняння було отримано за допомогою матричного диференціального числення і представлено за допомогою фундаментальної матричної системи розв'язків відповідного однорідного матричного рівняння. Для отримання часткового розв'язку неоднорідного векторного рівняння була знайдена матриця-функція Гріна за допомогою фундаментальної базисної матричної системи розв'язків. Після застосування оберненого перетворення Фур'є до явного розв'язку одновимірної крайової задачі у просторі трансформантів та підсумування слабко-збіжних інтегралів у формулах для переміщень залишається лише одна невідома функція переміщень по короткому торцю прямокунтої області. Для знаходження цієї функції було отримано сингулярне інтегральне рівняння. Сингулярне інтегральне рівняння було розв'язано за допомогою методу ортогональних поліномів. Було проведено дослідження напруженого стану півсмуги при різних типів навантаження та розмірів прямокутної області.

Ключові слова: прямокутна область, динамічна задача, перетворення Фур'є, матриця-функція Гріна, сингулярне інтегральне рівняння, метод ортогональних поліномів.

ABSTRACT

Pozhylenkov O. V. Plane mixed problems of elasticity for a rectangular domain - Manuscript.

A dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the field of Applied Mathematics (11 - Mathematics and Statistics) - Odessa I.I. Mechnikov National University, Odessa, 2023.

The flat mixed problem of elasticity theory for a finite rectangular domain subjected to various types of loads was considered. By applying the integral semibound sin- and cos-transformations of Fourier, the initial problem was reduced to a one-dimensional vector boundary problem. The problem in the transform space was reformulated as a vector boundary problem. The solution to this problem was constructed as a superposition of the general solution to the homogeneous vector equation and the particular solution to the nonhomogeneous equation. The solution to the homogeneous vector equation was obtained using matrix differential calculus and represented through the fundamental matrix solution of the corresponding homogeneous matrix equation. To obtain the particular solution to the nonhomogeneous vector equation, the Green's matrix-function was found using the method of matrix integral transformations. The Green's matrix-function was constructed in the form of a bilinear expansion, which simplifies further computations. After applying the inverse Fourier transform to the explicit solution of the one-dimensional boundary problem in the transform space and summing weakly convergent integrals in the displacement formulas, only one unknown displacement function along the short end of the semibounded strip remains. To find this function, a singular integral equation was obtained. The singular integral equation was solved using the method of orthogonal polynomials. An investigation of the stress state of the half-strip was conducted for different types of loads and sizes of the rectangular domain.

Key words: rectangular domain, dynamic problem, Fourier transformation, matrix Green's function, singular integral equation, method of orthogonal polynomials.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. D. Nerukh, O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2019) Mixed plain boundary value problem of elasticity for a rectangular domain. 25-th International Conference Engineering Mechanics. 2019, May 13-16, Svratka, Czech Republic. p. 255

2. O. V. Pozhylenkov (2019) The stress state of a rectangular elastic domain. Researches in Mathematics and Mechanics, Volume 24, Issue 2(34), pp. 88-96

3. Пожиленков О. В. Вайсфельд Н. Д. (2019) Мішана крайова

задача теорії пружності для прямокутної області. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур, випуск 5, Львів, ст. 30-32

4. O. Pozhyenkov, N. Vaysfeld (2020) Stress state of a rectangular domain with the mixed boundary conditions. Procedia Structural Integrity, Volume 28, pp. 458-463

5. O. Pozhyenkov, N. Vaysfeld (2021) Stress state of an elastic rectangular domain under steady load. Procedia Structural Integrity, Volume 33, pp. 385-390

6. O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2022) Dynamic mixed problem of elasticity for a rectangular domain. Recent trends in Wave Mechanics and Vibrations, pp. 211-218

Зміст

Перелік умовних позначень

G - коєфіцієент Ламе
E - молуль Юнга
μ - коєфіцієнт Пуасона
c_1, c_2 - швидкості хвилі
ω - частота
$\mu_0 = \frac{1}{1-2\mu}$
$U_x(x,y) = u(x,y)$ - переміщення по осі x
$U_y(x,y) = v(x,y)$ - переміщення по осі y

1 Огляд літератури

2 МЕТОДИКА ПОБУДОВИ РОЗВ'ЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ

У даному розділі наведено опис аналітичного апарату, який використовується для розв'язання мішаних задач теорії пружності для прямокутної області. Цей підхід базується на результати раніше проведених досліджень, зокрема робіт [1] і [2]. Розглянута методика розв'язання мішаних плоских задач ґрунтується на застосуванні інтегральних перетворень безпосередньо до системи рівнянь рівноваги Ламе та крайових умов. Це дозволяє зводити вихідну задачу до векторної одновимірної крайової задачі. Векторна одновимірна крайова задача точно розв'язується за допомогою матричного диференційного числення та матричної функції Гріна. Що призводить у результаті до сингулярного інтегрального рівнняння яке розв'язане за допомогою методу ортогональних многочленів описанного [3].

2.1 Постановка задачі

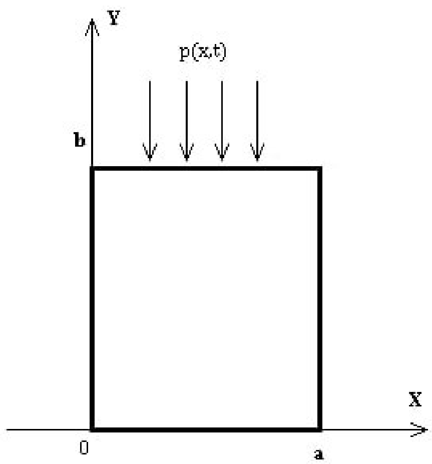

Рис. 2.1: Геометрія проблеми

Розглядається пружна прямокутна область (Рис: 2.1), яка займає область, що у декартовій системі координат описується співвідношенням $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y, t)|_{y=b} = -p(x, t), \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{y=b} = 0, \quad 0 \leq x \leq a \qquad (2.1)$$

де $p(x,t)$ відома функція. На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x,y,t)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{y=0} = 0 \tag{2.2}$$

На бічних гранях $x = 0$ та $x = a$ граничні умови запишемо у формі

$$U_1[f(x,y,t)] = 0, \quad U_2[f(x,y,t)] = 0, \quad 0 \leq y \leq b \tag{2.3}$$

Де

$$U_1[f(x,y,t)] = \left[\alpha_1 f(x,y,t) + \beta_1 \frac{\partial f(x,y,t)}{\partial x}\right]|_{x=0}$$
$$U_2[f(x,y,t)] = \left[\alpha_2 f(x,y,t) + \beta_2 \frac{\partial f(x,y,t)}{\partial x}\right]|_{x=a}$$

граничні функціонали у загальному виді (для кожної конкретної задачі вони будуть деталізовані), $f(x,y,t) = (u(x,y,t), v(x,y,t))^T$ - вектор переміщенњ.

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x \partial y}) = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2}) = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial t^2} \end{cases} \tag{2.4}$$

Будемо розглядати випадок гармонічних коливань, тому можемо представити функції у наступному вигляді:

$$u(x,y,t) = u(x,y)e^{i\omega t}, \quad v(x,y,t) = v(x,y)e^{i\omega t}, \quad p(x,t) = p(x)e^{i\omega t} \tag{2.5}$$

Таким чином отримаємо наступні рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}) = -\frac{\omega^2}{c_1^2}u(x,y) \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}) = -\frac{\omega^2}{c_2^2}v(x,y) \end{cases} \tag{2.6}$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} \sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=b} = 0 \\ v(x,y)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=0} = 0 \\ U_1[f(x,y)] = 0, \quad U_2[f(x,y)] = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Введемо невідомі функції $\chi_1(y) = u(0,y)$, $\chi_2(y) = v(0,y)$, $\chi_3(y) = u(a,y)$, $\chi_4(y) = v(a,y)$. Враховучи умову (2.3), отримаємо, що $\frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_1(y)$, $\frac{\partial v(0,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)$, $\frac{\partial u(a,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_3(y)$, $\frac{\partial v(a,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)$. Отже умова (2.3) виконується автоматично.

2.2 Зведеня задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаєм інтегральне перетворення Фур'є по змінній x у до рівнянь (2.6) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y)sin(\alpha_n x) \\ v(x,y)cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{2.8}$$

Для цього помножим перше та друге рівняння (2.6) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруєм по змінній x на інтервалі $0 \leq x \leq a$. Покрокове інтегрування рівняння (2.6) наведено у (Додаток А). Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2 \mu_0 - \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) = \\ = \alpha_n (1+\mu_0)(\chi_3(y) cos(\alpha_n a) - \chi_1(y)) \\ \\ (1+\mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - (\alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = \\ = (\frac{\alpha_2}{\beta_2} \chi_4(y) cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \chi_2(y)) - \mu_0 (\chi_3'(y) cos(\alpha_n a) - \chi_1'(y)) \end{cases} \tag{2.9}$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \left((2G+\lambda) v_n'(y) + \alpha_n \lambda u_n(y)\right)|_{y=b} = -p_n \\ \left(u_n'(y) - \alpha_n v_n(y)\right)|_{y=b} = 0 \\ v_n(y)|_{y=0} = 0 \\ \left(u_n'(y) - \alpha_n v_n(y)\right)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Де $p_n = \int_0^a p(x) cos(\alpha_n x) dx$

2.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у простосторі трансформант, перепишмо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (2.9) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} L_2\left[Z_n(y)\right] &= A * Z_n''(y) + B * Z_n'(y) + C * Z_n(y) \\ L_2\left[Z_n(y)\right] &= F_n(y) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix}, \quad Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$

$$F_n(y) = \begin{pmatrix} \alpha_n(1+\mu_0)(\chi_3(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1(y)) \\ (\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)) - \mu_0(\chi_3^{'}(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1^{'}(y)) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (2.10) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &U_i\left[Z_n(y)\right] = E_i * Z_n^{'}(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ &U_i\left[Z_n(y)\right] = D_i \end{aligned} \tag{2.12}$$

Де $i = \overline{0,1}$, $b_0 = b$, $b_1 = 0$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G+\lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n\lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (2.11). Шукати її будем у наступному вигляді [4]:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy}M^{-1}(s)ds \tag{2.13}$$

Де $M(s)$ - характерестична матриця рівняння (2.11), а C - замкнений контур який містить усі особливі точки $M^{-1}(s)$. $M(s)$ будемо шукати з наступної умовни

$$L_2\left[e^{sy} * I\right] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} &L_2\left[e^{sy} * I\right] = e^{sy}\left(s^2 A * I + sB * I + C * I\right) = \\ &= e^{sy}\begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Знайдемо тепер $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}$.

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n\mu_0 s \\ -\alpha_n\mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$$det[M(s)] = \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{vmatrix} =$$
$$= (s - s_1)(s + s_1)(s - s_2)(s + s_2) \tag{2.17}$$

Де s_1, s_2, $-s_1$, $-s_2$ корені $det[M(s)] = 0$, детальне знаходження яких наведено в (Додаток B).

Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy}M^{-1}(s)ds = \frac{2\pi i}{2\pi i(1+\mu_0)}\sum_{i=1}^{4} Res\left[e^{sy}\frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}\right] =$$
$$= (Y_0(y) + Y_1(y) + Y_2(y) + Y_3(y))$$

Знайдем $Y_0(y)$:

$$Y_0(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s+s_1)(s-s_2)(s+s_2)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=s_1} =$$
$$= \frac{e^{s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}\begin{pmatrix} s_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n\mu_0 s_1 \\ -\alpha_n\mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Знайдем $Y_1(y)$:

$$Y_1(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-s_1)(s-s_2)(s+s_2)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=-s_1} =$$
$$= -\frac{e^{-s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}\begin{pmatrix} s_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n\mu_0 s_1 \\ \alpha_n\mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Знайдем $Y_2(y)$:

$$Y_2(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s+s_2)(s-s_1)(s+s_1)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=s_2} =$$
$$= \frac{e^{s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}\begin{pmatrix} s_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n\mu_0 s_2 \\ -\alpha_n\mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Знайдем $Y_3(y)$:

$$Y_3(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-s_2)(s-s_1)(s+s_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-s_2} =$$
$$= -\frac{e^{-s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \begin{pmatrix} s_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 s_2 \\ \alpha_n \mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

2.4 Побудова матриці-функції Гріна

Для побудови матриці-функції Гріна спочатку знайдем тепер фундамельні бизисні матриці $\Psi_0(y)$, $\Psi_1(y)$, шукати їх будем у наступному вигляді:

$$\Psi_i(y) = (Y_0(y) + Y_1(y)) * C_1^i + (Y_2(y) + Y_3(y)) * C_2^i \tag{2.22}$$

Залишилось знайти невідомі матриці коєфіцієнтів C_1^0, C_2^0, C_1^1, C_2^1 використовуючи граничні умови (2.12). Покрокове знаходження яких наведено у (Додаток C). Для подальшого введемо наступні позначення для елементів матриць $\Psi_0(y)$, $\Psi_1(y)$:

$$\Psi_0(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^0(y) & \Psi_2^0(y) \\ \Psi_3^0(y) & \Psi_4^0(y) \end{pmatrix}, \quad \Psi_1(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^1(y) & \Psi_2^1(y) \\ \Psi_3^1(y) & \Psi_4^1(y) \end{pmatrix}$$

Таким чином матрицю Гріна можемо записати у вигляді:

$$G(y,\xi) = \begin{cases} \Psi_0(y) * \Psi_1(\xi), & 0 \le y < \xi \\ \Psi_1(y) * \Psi_0(\xi), & \xi < y \le b \end{cases} \tag{2.23}$$

Для данної матриці Гріна виконано усі властивості, зокрема виконані однорідні граничні умови (2.12) та однорідні рівняння рівноваги у просторі трансформант (2.11):

$$L_2\left[G(y,\xi)\right] = 0$$

$$U_0\left[G(y,\xi)\right] = 0, \quad U_1\left[G(y,\xi)\right] = 0,$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок крайової задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y) = \int_0^b G(y,\xi) F_n(\xi) d\xi + \Psi_0(y) * D_0 + \Psi_1(y) * D_1 \tag{2.24}$$

Введемо наступні позначення $G(y,\xi) = \begin{pmatrix} g_1(y,\xi) & g_2(y,\xi) \\ g_3(y,\xi) & g_4(y,\xi) \end{pmatrix}$, $F_n(y) = \begin{pmatrix} f_n^1(y) \\ f_n^2(y) \end{pmatrix}$. Враховуючи це, шукані функції перемішень у просторі трансформант можна записати у наступному вигляді

$$u_n(y) = \int_0^b \left[g_1(y,\xi)f_n^1(\xi) + g_2(y,\xi)f_n^2(\xi)\right] d\xi - \psi_0^2(y)p_n \tag{2.25}$$

$$v_n(y) = \int_0^b \left[g_3(y,\xi)f_n^1(\xi) + g_4(y,\xi)f_n^2(\xi)\right] d\xi - \psi_0^4(y)p_n \tag{2.26}$$

2.5 Побудова розв'язоку вихідної задачі

Використовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (2.25), (2.26), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{2.27}$$

$$v(x,y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{2.28}$$

Знайдем тепер $v_0(y)$ розглянувши задачу у просторі трансформант (2.9), (2.10) при $n = 0$, $\alpha_n = 0$. Детальний розв'язок якої наведено в (Додаток D). Тоді остаточний розв'язок $v(x,y)$ буде мати вигляд

$$v(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) cos(\alpha_n x) - \psi_0(y)\frac{p_0}{a(2G+\lambda)} + \tag{2.29}$$

$$+\frac{1}{a(1+\mu_0)}\int_0^b g(y,\xi)\left[\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(\xi)cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(\xi)\right) - \frac{\mu_0}{(1+\mu_0)}(\chi_3^{'}(\xi)cos(\alpha_n a) - \chi \tag{2.30}$$

Залишилось знайти невідомі функції $\chi_1(y)$, $\chi_2(y)$, $\chi_3(y)$, $\chi_4(y)$. В подальшому в данній роботі розглянуто випадок таких граничних умов які призводять лише до однієї невідомої функції $f(y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}|_{x=a}$. Для знаходження якої буде побудовано інтегральне рівняння завдяки граничній умові $\sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x)$.

2.6 Загальна схема розв'язку сінгулярного інтегрального рівняння

Розглянемо випадок граничних умов другої основної задачі теорії пружності, в результаті отримаємо лише одну невідому функцію

$f(y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}|_{x=a}$. З цього отримаємо значення $f_n^1(\xi) = 0$, $f_n^2(\xi) = -cos(\alpha_n a)f(\xi)$ Запишем тепер фінальний розв'язок для цього випадку:

$$u(x,y) = -\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_2(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right]d\xi + \psi_0^2(y)p_n\right)sin(\alpha_n x) \tag{2.31}$$

$$v(x,y) = -\frac{1}{a(1+\mu_0)}\int_0^b g(y,\xi)f(\xi)d\xi - \psi_0(y)\frac{p_0}{a(2G+\lambda)}$$
$$-\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_4(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right]d\xi + \psi_0^4(y)p_n\right)cos(\alpha_n x) \tag{2.32}$$

Використиєм граничну умову $\sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x)$ для того, щоб отримати інтегральне рівняння:

$$(2G+\lambda)\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}|_{y=b} + \lambda\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}|_{y=b} = -p(x) \Leftrightarrow$$

$$-\frac{(2G+\lambda)}{a(1+\mu_0)}\int_0^b \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b}f(\xi)d\xi - \psi_0^{'}(b)\frac{p_0}{a}-$$
$$-\frac{2(2G+\lambda)}{a}\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_4(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right]d\xi + \psi_0^4(y)p_n\right)cos(\alpha_n x)|_{y=b}-$$
$$-\frac{2\lambda}{a}\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_2(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right]d\xi + \psi_0^2(y)p_n\right)sin(\alpha_n x)|_{y=b} = -p(x)$$

Введемо позначення:

$$a_1(x) = ap(x) - 2(2G+\lambda)\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_0^4(y)p_n cos(\alpha_n x)|_{y=b}-$$
$$-2\lambda\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_0^2(y)p_n sin(\alpha_n x)|_{y=b} - \psi_0^{'}(b)p_0 \tag{2.33}$$

Враховуючи його отримаємо наступне інтегральне рівняння відносно $f(\xi)$:

$$\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\int_0^b \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b}f(\xi)d\xi+$$
$$+\int_0^b\sum_{n=1}^{\infty}cos(\alpha_n a)cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y} + \alpha_n\lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b}$$
$$f(\xi)d\xi = a_1(x) \tag{2.34}$$

Розглянемо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} cos(\alpha_n a) cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y} + \alpha_n \lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \alpha_n^{-1} e^{\alpha_n(\xi-b)} cos(\alpha_n x)\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y} + \lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}(-1)^n \alpha_n^{-1} e^{\alpha_n(\xi-b)} cos(\alpha_n x)\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y} + \lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b} +$$

$$+ a_2 \sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) +$$

$$+ a_2 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) -$$

$$- a_2 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) =$$

$$= a_2 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) + a_3(\xi, x)$$

Де:

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y} + \lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b},$$

$$a_3(\xi,x) = \sum_{n=1}^{N} cos(\alpha_n a) cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y} + \alpha_n \lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b} -$$

$$- a_2 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)$$

Використовуючи формулу 5.4.12.8 [6] отримаємо:

$$a_2 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)} cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) + a_3(\xi, x) =$$

$$= \frac{a_2}{4} ln\left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) + cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) - cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right] + a_3(\xi, x)$$

Повернемося до інтегралу

$$\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\int_0^b \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b} f(\xi)d\xi + \int_0^b \left(\frac{a_2}{4} ln\left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) + cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) - cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right] + a_3(\xi,x)\right) \tag{2.35}$$

$$= \int_0^b \left(\frac{a_2}{4} ln\left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) + cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi)) - cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right] + a_3(\xi,x) + \frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b}\right) f(\xi)d\xi \tag{2.36}$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = \frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))-1}{1-ch(\frac{\pi b}{2a})} \\ sh(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))d\xi = -\frac{2a}{\pi}(ch(\frac{\pi b}{2a})-1)dt \\ \xi = 0, \quad t = 1 \\ \xi = b, \quad t = 0 \\ \xi = b - \frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1) \end{array}\right] = \tag{2.37}$$

$$= a_5 \int_0^b a_4(t)\left(\frac{a_2}{4} ln\left[\frac{t+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right] + \widetilde{a_3(t,x)}\right)\widetilde{f(t)}dt \tag{2.38}$$

Де:

$$\widetilde{a_3(t,x)} = a_3\left(b - \frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1), x\right) +$$

$$+ \frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\frac{\partial g(y, b-\frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1))}{\partial y}|_{y=b}$$

$$f(t) = f(b - \frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1))$$

$$a_4(t) = \frac{1}{sh\left(arch\left[(ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1\right]\right)}$$

$$a_5 = 2a(ch(\frac{\pi b}{2a})-1)$$

Таким чином отримаємо наступне інтегральне рівняння:

$$\frac{a_5}{\pi}\int_0^b a_4(t)\left(\frac{a_2}{4} ln\left[\frac{t+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right] + \widetilde{a_3(t,x)}\right)\widetilde{f(t)}dt = a_1(x) \tag{2.39}$$

Розв'язок якого будемо шукати у наступному вигляді:

$$\widetilde{f(t)} = \frac{1}{a_2 a_4(t)}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k T_{2k+1}(t) \tag{2.40}$$

Де φ_k - невідомі коефіцієнти, $T_{2k+1}(t)$ - поліном Чебишева першого роду.

Таким чином отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_k}{4}\frac{1}{\pi}\int_0^1 ln\left[\frac{t+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right]\frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\widetilde{a_3(t,x)}}{a_2}\frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{a_1(x)}{a_5}\Leftrightarrow$$

Використовуючи формулу B.1.9 [5]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\frac{T_{2k+1}(cos(\frac{\pi}{2a}x))}{4(2k+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\widetilde{a_3(t,x)}}{a_2}\frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{a_1(x)}{a_5} \tag{2.41}$$

Введем позначення

$$l=cos(\frac{\pi}{2a}x),\quad \widetilde{a_1(l)}=\frac{a_1(\frac{2a}{\pi}arccos(l))}{a_5}$$

Помножимо обидві частини рівняння (2.41) скалярно на $\frac{T_{2m+1}(l)}{\sqrt{1-l^2}}$ та проінтегруєм по змінній l на інтервалі $(-1;1)$. Та використовуючи формулу 2.3.2 [5] отримаєм наступне бескінечну алгебричну систему відносно невідомих коєфіцієнтів φ_k, яка в подальшому буде розв'язуватись методом редукції.

$$\frac{\phi_m\pi}{8(2m+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\phi_k g_{k,m}=f_m \tag{2.42}$$

Де $g_{k,m}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1\frac{T_{2m+1}(l)}{\sqrt{1-l^2}}\int_0^1\frac{a_3(t,\widetilde{\frac{2a}{\pi}arccos(l)})}{a_2}\frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dtdl$, $f_m=\int_{-1}^1\frac{T_{2m+1}(l)\widetilde{a_1(l)}}{\sqrt{1-l^2}}dl$ інтеграли відомих функцій

2.7 Висновки до другого розділу

Безпосередньо застосовані інтегральні перетворення до рівнянь рівноваги Ламе та крайових умов плоскої задачі теорії пружності для прямокутної області. Це дозволило уникнути використання допоміжних гармонічних або бігармонічних функцій. Зведено вихідну задачу до одновимірної векторної крайової задачі у просторі трансформант. Цю задачу було розв'язано за допомогою методів диференціального матричного числення. Для цього була побудована фундаментальна базисна матрична система розв'язків однорідного матричного рівняння та матриця-функція Гріна для диференціального векторного рівняння другого порядку. Побудовано та розв'язано сінгульрне інтегральне рівняння відносно невідомої функції шляхом викорстання методу ортагональних поліномів, та зведення рівнняння до бескінечної алгебричної системи, яка в подальшому була розв'язана методом редукції.

3 СТАТИЧНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ ЗА УМОВ ІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ НА БІЧНИХ ГРАНЯХ

У даному розділі досліджено плоска статична задача теорії пружності для прямокутної області, за умов ідеального контакту на бічних гранях.

Вихідна задача зведена до одновимірної задачі у просторі трансформант за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Отримана крайова задача розв'язана точно за допомогою методу матрично диференціального числення, фундаментальний розв'язок представлений як інтеграл по замкненому контору, який в свою чергу, був знайденний за допомогою теоремі про лишки. Остаточний вигляд для функцій переміщеннь та напружень отриман шляхом оберненого перетворення Фур'є.

Проведено чисельний аналіз отриманих функцій переміщень та напружень для різних розмірів прямокутної області та різних видів навантаження.

Результати розділу опубліковані в [7], [8], [9], а також доповідалась на конференціях [10], [11].

3.1 Постановка задачі

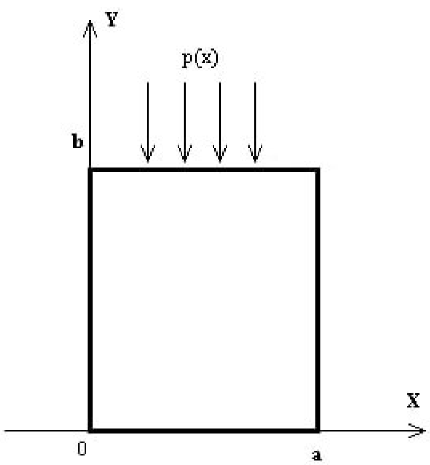

Рис. 3.1: Геометрія проблеми

Розглядається пружна прямокутна область (Рис: 3.1), яка займає область, що описується у декартовій системі координат співвідношенням $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=b} = 0 \tag{3.1}$$

де $p(x)$ відома функція.

На бічних гранях виконується умова ідеального контакту

$$u(x, y)|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=0} = 0 \tag{3.2}$$

$$u(x, y)|_{x=a} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=a} = 0 \tag{3.3}$$

На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x, y)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=0} = 0 \tag{3.4}$$

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}) = 0 \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

3.2 Зведеня задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаєм інтегральне перетворення Фур'є по змінній x у до рівнянь (3.5) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x, y) sin(\alpha_n x) \\ v(x, y) cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{3.6}$$

Для цього помножим перше та друге рівняння (3.5) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруєм по змінній x на інтервалі $0 \le x \le a$. Покрокове інтегрування рівняння (3.5) наведено у (Додаток А). Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - \alpha_n^2(1 + \mu_0) u_n(y) = 0 \\ (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \left((2G + \lambda) v_n'(y) + \alpha_n \lambda u_n(y)\right)|_{y=b} = -p_n \\ \left(u_n'(y) - \alpha_n v_n(y)\right)|_{y=b} = 0 \\ v_n(y)|_{y=0} = 0 \\ \left(u_n'(y) - \alpha_n v_n(y)\right)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Де $p_n = \int_0^a p(x) cos(\alpha_n x) dx$

3.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у простосторі трансформант, перепишмо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (3.7) запишемо у наступному вигляді:

$$
\begin{aligned}
&L_2\left[Z_n(y)\right] = A * Z_n^{''}(y) + B * Z_n^{'}(y) + C * Z_n(y) \\
&L_2\left[Z_n(y)\right] = 0
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Де

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n\mu_0 \\ \alpha_n\mu_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2(1+\mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix}
$$

$$
Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}
$$

Граничні умови (3.8) запишемо у наступному вигляді:

$$
\begin{aligned}
&U_i\left[Z_n(y)\right] = E_i * Z_n^{'}(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\
&U_i\left[Z_n(y)\right] = D_i
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Де $i = \overline{0,1}$, $b_0 = b$, $b_1 = 0$,

$$
E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G+\lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n\lambda & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
$$

$$
D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (3.9). Шукати її будем у наступному вигляді [4]:

$$
Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \tag{3.11}
$$

Де $M(s)$ - характерестична матриця рівняння (3.9), а C - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умовни

$$
L_2\left[e^{sy} * I\right] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.12}
$$

$$L_2\left[e^{sy}*I\right]=e^{sy}\left(s^2A*I+sB*I+C*I\right)=$$
$$=e^{sy}\left(\begin{pmatrix}s^2 & 0\\ 0 & s^2(1+\mu_0)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\alpha_n\mu_0 s\\ \alpha_n\mu_0 s & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\alpha_n^2(1+\mu_0) & 0\\ 0 & -\alpha_n^2\end{pmatrix}\right)=$$
$$=e^{sy}\begin{pmatrix}s^2-\alpha_n^2(1+\mu_0) & -\alpha_n\mu_0 s\\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$M(s)=\begin{pmatrix}s^2-\alpha_n^2(1+\mu_0) & -\alpha_n\mu_0 s\\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2\end{pmatrix}\tag{3.13}$$

Знайдемо тепер $M^{-1}(s)=\frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}$.

$$\widetilde{M(s)}=\begin{pmatrix}s^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2 & \alpha_n\mu_0 s\\ -\alpha_n\mu_0 s & s^2-\alpha_n^2(1+\mu_0)\end{pmatrix}\tag{3.14}$$

$$det[M(s)]=\begin{vmatrix}s^2-\alpha_n^2-\alpha_n^2\mu_0 & -\alpha_n\mu_0 s\\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2\end{vmatrix}=$$
$$=(1+\mu_0)(s-\alpha_n)^2(s+\alpha_n)^2\tag{3.15}$$

Де α_n, $-\alpha_n$, корені $det[M(s)]=0$, детальне знаходження яких наведено в (Додаток B).

Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy}M^{-1}(s)ds=\frac{2\pi i}{2\pi i(1+\mu_0)}\sum_{i=1}^{2}Res\left[e^{sy}\frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}\right]=$$
$$=\frac{1}{(1+\mu_0)}\left(Y_0(y)+Y_1(y)\right)$$

Знайдем $Y_0(y)$:

$$Y_0(y)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{sy}}{(s+\alpha_n)^2}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=\alpha_n}=$$
$$=\frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n}\begin{pmatrix}\alpha_n\mu_0 y+2+\mu_0 & \alpha_n\mu_0 y\\ -\alpha_n\mu_0 y & -\alpha_n\mu_0 y+2+\mu_0\end{pmatrix}\tag{3.16}$$

Знайдем $Y_1(y)$:

$$Y_1(y)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{sy}}{(s-\alpha_n)^2}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=-\alpha_n}=$$
$$=\frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n}\begin{pmatrix}\alpha_n\mu_0 y-2-\mu_0 & -\alpha_n\mu_0 y\\ \alpha_n\mu_0 y & -\alpha_n\mu_0 y-2-\mu_0\end{pmatrix}\tag{3.17}$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y) = \frac{1}{1+\mu_0}\left(Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}\right) \tag{3.18}$$

Залишилось знайти невідомі коефіцієнти c_1, c_2, c_3, c_4, використовуючи граничні умови (3.10). Покрокове знаходження коефіцієнтів наведено у (Додаток Е). Таким чином ми можемо записати розв'зок у просторі трансформант:

$$\begin{aligned} u_n(y) = &\frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n(1+\mu_0)}\left[c_1(\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2(\alpha_n\mu_0 y)\right] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n(1+\mu_0)}\left[c_3(\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4(-\alpha_n\mu_0 y)\right] \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} v_n(y) = &\frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n(1+\mu_0)}\left[c_1(-\alpha_n\mu_0 y) + c_2(-\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0)\right] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n(1+\mu_0)}\left[c_3(\alpha_n\mu_0 y) + c_4(-\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0)\right] \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.4 Побудова розв'язоку вихідної задачі

Викорустовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (3.19), (3.20), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x, y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{3.21}$$

$$v(x, y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{3.22}$$

Останній крок це знаходження $v_0(y)$ у випадку коли $n = 0$, $\alpha_n = 0$. Для цього повернемся до другого рівняння (3.7), та запишем його для цього випадку:

$$(1 + \mu_0)v_n''(y) = 0 \tag{3.23}$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} (2G + \lambda)v_0'(y)|_{y=b} = -p_0 \\ v_0(y)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{3.24}$$

Де $p_0 = \int_0^a p(x)dx$

Розв'язок рівняння (3.23):

$$v_0(y) = c_1 + c_2 y \tag{3.25}$$

Застововючи граничні умови (3.24) для знаходження коефіцієнтів c_1, c_2, отримаємо розв'язок задачі задачі:

$$v_0(y) = \frac{-p_0}{(2G+\lambda)} y \tag{3.26}$$

Тепер остаточний розв'зок задачі можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} u(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \\ v(x,y) = \frac{-p_0}{(2G+\lambda)a} y + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \end{cases} \tag{3.27}$$

3.5 Чисельні розрахунки

Наведені чисельні експеренти розглядаються для сталі ($E = 200$ ГПА, $\mu = 0.25$).

Розглянута прямокунта область $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 15$, при функції навантаження $p(x) = (x - 2.5)^2$. На малюнках (Рис: 3.2), (Рис: 3.3), (Рис: 3.4), (Рис: 3.5) представлені функії переміщень $u(x,y)$, $v(x,y)$ та напружень $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ відповідно.

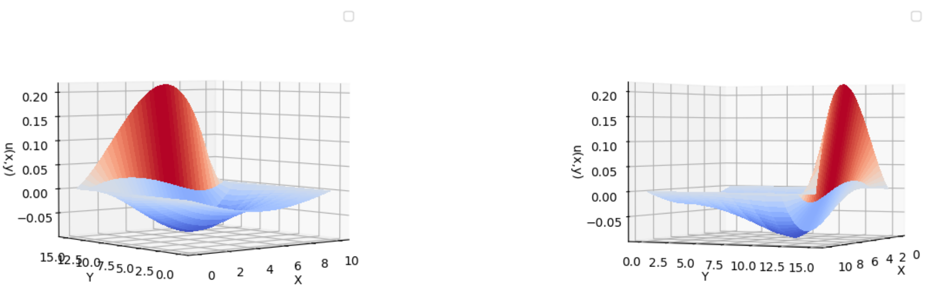

Рис. 3.2: Функція $u(x,y)$

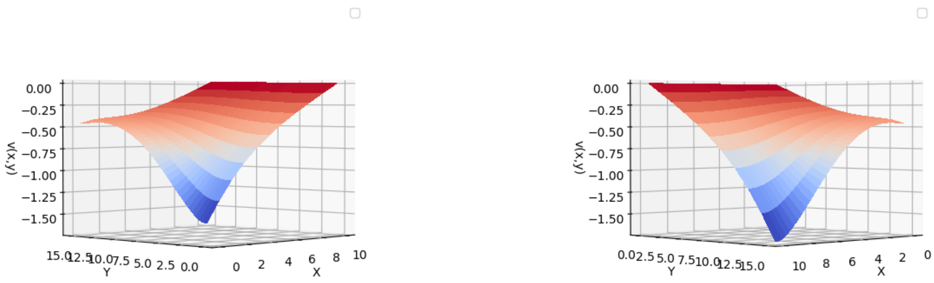

Рис. 3.3: Функція $v(x, y)$

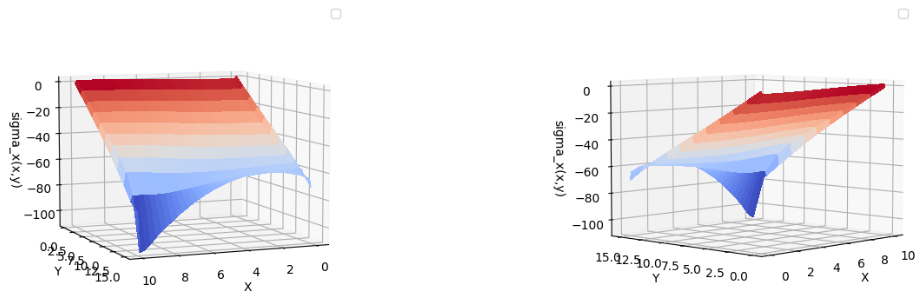

Рис. 3.4: Функція $\sigma_x(x, y)$

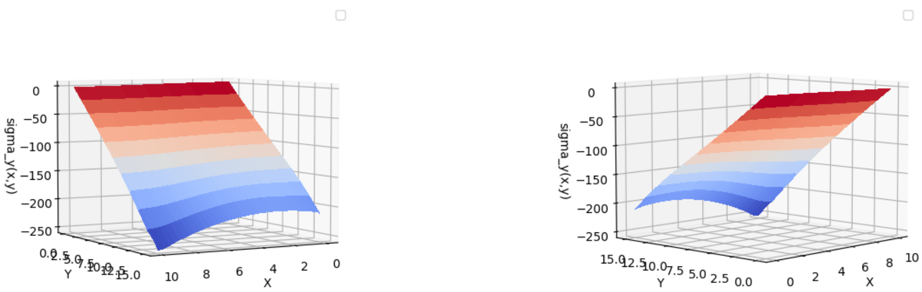

Рис. 3.5: Функція $\sigma_y(x, y)$

3.6 Висновки до треттього розділу розділу

Отримано точне розв'язок статичної задачі для прямокутної області за умов ідеального контакту на бічних гранях. Дослідженно поля переміщень та напружень для різних видів навантаження і розмірів прямокутної області.

4 ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ ЗА УМОВ ІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ НА БІЧНИХ ГРАНЯХ

У даному розділі досліджено плоска динамічна задача теорії пружності для прямокутної області, за умов ідеального контакту на бічних гранях.

Вихідна задача зведена до одновимірної задачі у просторі трансформант за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Отримана крайова задача розв'язана точно за допомогою методу матрично диференціального числення, фундаментальний розв'язок представлений як інтеграл по замкненому контору, який в свою чергу, був знайденний за допомогою теоремі про лишки. Остаточний вигляд для функцій переміщеннь та напружень отриман шляхом оберненого перетворення Фур'є.

Проведено чисельний аналіз отриманих функцій переміщень та напружень для різних розмірів прямокутної області та різних видів навантаження.

Результати розділу опубліковані в [14], а також доповідалась на конференції [15].

4.1 Постановка задачі

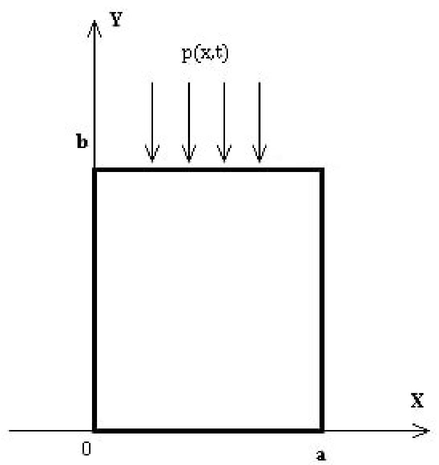

Рис. 4.1: Геометрія проблеми

Розглядається пружна сама прямокутна область (Рис: 4.1), яка займає область, що описується у декартовій системі координат співвідношенням $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x,y,t)|_{y=b} = -p(x,t), \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{y=b} = 0 \tag{4.1}$$

де $p(x,t)$ відома функція. На бічних гранях виконується умова ідеального контакту

$$u(x,y,t)|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{x=0} = 0 \tag{4.2}$$

$$u(x,y,t)|_{x=a} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{x=a} = 0 \tag{4.3}$$

На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x,y,t)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{y=0} = 0 \tag{4.4}$$

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x \partial y}) = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2}) = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial t^2} \end{cases} \tag{4.5}$$

Будемо розглядати випадок гармонічних коливань, тому можемо представвити функції у наступному вигляді:

$$u(x,y,t) = u(x,y)e^{i\omega t}, \quad v(x,y,t) = v(x,y)e^{i\omega t}, \quad p(x,t) = p(x)e^{i\omega t} \tag{4.6}$$

Таким чином отримаємо наступні рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}) = -\frac{\omega^2}{c_1^2}u(x,y) \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}) = -\frac{\omega^2}{c_2^2}v(x,y) \end{cases} \tag{4.7}$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} \sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x,t), \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=b} = 0 \\ v(x,y)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=0} = 0 \\ u(x,y)|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=0} = 0 \\ u(x,y)|_{x=a} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=a} = 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

4.2 Зведеня задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаєм інтегральне перетворення Фур'є по змінній x у до рівнянь (4.7) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y)sin(\alpha_n x) \\ v(x,y)cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{4.9}$$

Для цього помножим перше та друге рівняння (4.7) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруєм по змінній x на інтервалі $0 \leq x \leq a$. Покрокове інтегрування рівняння (4.7) наведено у (Додаток А). Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) + (-\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) = 0 \\ (1+\mu_0) v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) + (-\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \left((2G+\lambda) v_n^{'}(y) + \alpha_n \lambda u_n(y)\right)|_{y=b} = -p_n \\ \left(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\right)|_{y=b} = 0 \\ v_n(y)|_{y=0} = 0 \\ \left(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\right)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

Де $p_n = \int_0^a p(x) cos(\alpha_n x) dx$

4.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у простосторі трансформант, перепишемо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (4.10) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &L_2\left[Z_n(y)\right] = A * Z_n^{''}(y) + B * Z_n^{'}(y) + C * Z_n(y) \\ &L_2\left[Z_n(y)\right] = 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix}, \quad Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (4.11) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &U_i\left[Z_n(y)\right] = E_i * Z_n^{'}(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ &U_i\left[Z_n(y)\right] = D_i \end{aligned} \tag{4.13}$$

Де $i = \overline{0,1}$, $b_0 = b$, $b_1 = 0$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G+\lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (4.12). Шукати її будем у наступному вигляді [4]:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \tag{4.14}$$

Де $M(s)$ - характерестична матриця рівняння (4.12), а C - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умовни

$$L_2 \left[e^{sy} * I \right] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

$$\begin{gathered} L_2 \left[e^{sy} * I \right] = e^{sy} \left(s^2 A * I + sB * I + C * I \right) = \\ = e^{sy} \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \end{gathered}$$

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

Знайдемо тепер $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}$.

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s \\ -\alpha_n \mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

$$\begin{gathered} det[M(s)] = \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{vmatrix} = \\ = (s - s_1)(s + s_1)(s - s_2)(s + s_2) \end{gathered} \tag{4.18}$$

Де s_1, s_2, $-s_1$, $-s_2$ корені $det[M(s)] = 0$, детальне знаходження яких наведено в (Додаток B).

Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy}M^{-1}(s)ds = \frac{2\pi i}{2\pi i(1+\mu_0)}\sum_{i=1}^{4} Res\left[e^{sy}\frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}\right] =$$
$$= (Y_0(y)+Y_1(y)+Y_2(y)+Y_3(y))$$

Знайдем $Y_0(y)$:

$$Y_0(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s+s_1)(s-s_2)(s+s_2)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=s_1} =$$
$$= \frac{e^{s_1 y}}{2s_1(s_1^2-s_2^2)}\begin{pmatrix} s_1^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n\mu_0 s_1 \\ -\alpha_n\mu_0 s_1 & s_1^2-\alpha_n^2-\alpha_n^2\mu_0+\frac{\omega^2}{c_1^2}\end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Знайдем $Y_1(y)$:

$$Y_1(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-s_1)(s-s_2)(s+s_2)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=-s_1} =$$
$$= -\frac{e^{-s_1 y}}{2s_1(s_1^2-s_2^2)}\begin{pmatrix} s_1^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n\mu_0 s_1 \\ \alpha_n\mu_0 s_1 & s_1^2-\alpha_n^2-\alpha_n^2\mu_0+\frac{\omega^2}{c_1^2}\end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Знайдем $Y_2(y)$:

$$Y_2(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s+s_2)(s-s_1)(s+s_1)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=s_2} =$$
$$= \frac{e^{s_2 y}}{2s_2(s_2^2-s_1^2)}\begin{pmatrix} s_2^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n\mu_0 s_2 \\ -\alpha_n\mu_0 s_2 & s_2^2-\alpha_n^2-\alpha_n^2\mu_0+\frac{\omega^2}{c_1^2}\end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Знайдем $Y_3(y)$:

$$Y_3(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-s_2)(s-s_1)(s+s_1)}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=-s_2} =$$
$$= -\frac{e^{-s_2 y}}{2s_2(s_2^2-s_1^2)}\begin{pmatrix} s_2^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2+\frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n\mu_0 s_2 \\ \alpha_n\mu_0 s_2 & s_2^2-\alpha_n^2-\alpha_n^2\mu_0+\frac{\omega^2}{c_1^2}\end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y) = (Y_0(y)+Y_1(y)) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (Y_2(y)+Y_3(y)) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Залишилось знайти невідомі коефіцієнти c_1, c_2, c_3, c_4, використовуючи граничні умови (4.13). Покрокове знаходження коефіцієнтів наведено у (Додаток Е). Таким чином ми можемо записати розв'зок у просторі трансформант:

$$u_n(y) = \frac{(s_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1 y} - e^{-s_1 y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)(1+\mu_0)} c_1 + \\ + \frac{(s_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2 y} - e^{-s_2 y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)(1+\mu_0)} c_3 + \\ + \frac{(s_1 \alpha_n y)(e^{s_1 y} + e^{-s_1 y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)(1+\mu_0)} c_2 + \frac{(s_2 \alpha_n y)(e^{s_2 y} + e^{-s_2 y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)(1+\mu_0)} c_4 \tag{4.24}$$

$$v_n(y) = \frac{(s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1 y} - e^{-s_1 y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)(1+\mu_0)} c_2 + \\ + \frac{(s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2 y} - e^{-s_2 y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)(1+\mu_0)} c_4 - \\ - \frac{(s_1 \alpha_n y)(e^{s_1 y} + e^{-s_1 y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)(1+\mu_0)} c_1 - \frac{(s_2 \alpha_n y)(e^{s_2 y} + e^{-s_2 y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)(1+\mu_0)} c_3 \tag{4.25}$$

4.4 Побудова розв'язоку вихідної задачі

Викорустовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (4.24), (4.25), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{4.26}$$

$$v(x,y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{4.27}$$

Останній крок це знаходження $v_0(y)$ у випадку коли $n = 0$, $\alpha_n = 0$. Для цього повернемся до другого рівняння (4.10), та запишем його для цього випадку:

$$(1+\mu_0)v_n''(y) + \frac{\omega^2}{c_2^2} v_0(y) = 0 \tag{4.28}$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} (2G+\lambda)v_0'(y)|_{y=b} = -p_0 \\ v_0(y)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{4.29}$$

Де $p_0 = \int_0^a p(x)dx$

Розв'язок рівняння (4.28):

$$v_0(y) = c_1 cos\left(y\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right) + c_2 sin\left(y\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right) \tag{4.30}$$

Застовоючи граничні умови (4.29) для знаходження коєфіцієнтів c_1, c_2, отримаємо розв'язок задачі задачі:

$$v_0(y) = \frac{-p_0}{(2G+\lambda)\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}} sin\left(b\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right)} sin\left(y\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}}\right) \tag{4.31}$$

4.5 Чисельні розрахунки

Наведені чисельні експеренти розглядаються для сталі ($E = 200$ ГПА, $\mu = 0.25$).

Розглянута прямокунта область $0 \le x \le 10$, $0 \le y \le 15$, при функції навантаження $p(x) = (x-2.5)^2$ та частоті коливань $\omega = 0.75$. На малюнках (Рис: 3.2), (Рис: 3.3), (Рис: 3.4), (Рис: 3.5) представлені функкіі переміщень $u(x, y)$, $v(x, y)$ та напружень $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ відповідно.

4.6 Висновки до треттього розділу розділу

Отримано точне розв'язок динамічної задачі для прямокутної області за умов ідеального контакту на бічних гранях. Дослідженно поля переміщень та напружень для різних видів навантаження і розмірів прямокутної області.

5 СТАТИЧНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ ЗА УМОВ ДРУГОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

У даному розділі досліджено плоска статична задача теорії пружності для прямокутної області, за умов другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях.

Вихідна задача зведена до одновимірної задачі у просторі трансформант за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Отримана крайова задача розв'язана точно за допомогою методу матрично диференціального числення, фундаментальний розв'язок представлений як інтеграл по замкненому контору, який в свою чергу, був знайденний за допомогою теоремі про лишки. Побудована матриця-функція Гріна як комбінація фундаментальних базисних розв'язків задачі у просторі трансформант. Остаточний вигляд для функцій переміщеннь та напружень отриман шляхом оберненого перетворення Фур'є. Побудовано та розв'язано сінгульрне інтегральне рівняння відносно невідомої функції шляхом викорстання методу ортагональних многочленів, та зведення рівнняння до бескінечної алгебричної системи, яка в подальшому була розв'язана методом редукції [3].

Проведено чисельний аналіз отриманих функцій переміщень та напружень для різних розмірів прямокутної області та різних видів навантаження.

Результати розділу опубліковані в [12], а також доповідалась на конференції [13].

5.1 Постановка задачі

Розглядається пружна прямокутна область (Рис: 5.1), яка займає облась, що описується у декартовій системі координат співвідношенням $-a \le x \le a$, $0 \le y \le b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=b} = 0 \tag{5.1}$$

де $p(x)$ відома функція.

На бічних гранях виконується умова другої основної задачі теорії пружності

$$u(x, y)|_{x=\pm a} = 0, \quad v(x, y)|_{x=\pm a} = 0 \tag{5.2}$$

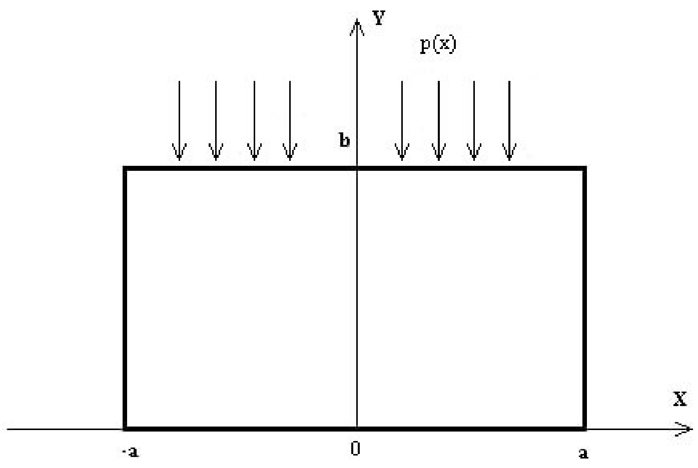

Рис. 5.1: Геометрія проблеми

На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x,y)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=0} = 0 \tag{5.3}$$

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}) = 0 \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}) = 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

Щоб розв'язати поставлену задачу буде розглянута тільки половона прямокутної області $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ та використовуючи властивості симметрії граничні умови на бічних гранях будуть мати вигляд:

$$u(x,y)|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=0} = 0 \tag{5.5}$$

$$u(x,y)|_{x=a} = 0, \quad v(x,y)|_{x=a} = 0 \tag{5.6}$$

5.2 Зведеня задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаєм інтегральне перетворення Фур'є по змінній x у до рівнянь (5.4) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y)sin(\alpha_n x) \\ v(x,y)cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{5.7}$$

Для цього помножим перше та друге рівняння (5.4) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруєм по змінній x на інтервалі $0 \leq$

$x \leq a$. Покрокове інтегрування рівняння (5.4) наведено у (Додаток А). Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - \alpha_n^2 (1+\mu_0) u_n(y) = 0 \\ (1+\mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = -cos(\alpha_n) f(y) \end{cases} \tag{5.8}$$

Де $f(y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}|_{x=a}$ - невідома функція

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \left((2G+\lambda) v_n'(y) + \alpha_n \lambda u_n(y)\right)|_{y=b} = -p_n \\ \left(u_n'(y) - \alpha_n v_n(y)\right)|_{y=b} = 0 \\ v_n(y)|_{y=0} = 0 \\ \left(u_n'(y) - \alpha_n v_n(y)\right)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{5.9}$$

Де $p_n = \int_0^a p(x) cos(\alpha_n x) dx$

5.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у простосторі трансформант, перепишемо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (5.8) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} L_2\left[Z_n(y)\right] &= A * Z_n''(y) + B * Z_n'(y) + C * Z_n(y) \\ L_2\left[Z_n(y)\right] &= F_n(y) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2(1+\mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix}$$

$$Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}, \quad F_n(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -cos(\alpha_n a) f(y) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (5.9) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} U_i\left[Z_n(y)\right] &= E_i * Z_n'(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ U_i\left[Z_n(y)\right] &= D_i \end{aligned} \tag{5.11}$$

Де $i = \overline{0,1}$, $b_0 = b$, $b_1 = 0$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G+\lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (5.10). Шукати її будем у наступному вигляді [4]:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \tag{5.12}$$

Де $M(s)$ - характерестична матриця рівняння (5.10), а C - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умовни

$$L_2 \left[e^{sy} * I \right] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

$$L_2 \left[e^{sy} * I \right] = e^{sy} \left(s^2 A * I + sB * I + C * I \right) =$$
$$= e^{sy} \left(\begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2(1+\mu_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_n^2(1+\mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= e^{sy} \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2(1+\mu_0) & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2(1+\mu_0) & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

Знайдемо тепер $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}$.

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 & \alpha_n \mu_0 s \\ -\alpha_n \mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2(1+\mu_0) \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

$$det[M(s)] = \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 \end{vmatrix} =$$
$$= (1+\mu_0)(s-\alpha_n)^2(s+\alpha_n)^2 \tag{5.16}$$

Де α_n, $-\alpha_n$, корені $det[M(s)] = 0$, детальне знаходження яких наведено в (Додаток В).

Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds = \frac{2\pi i}{2\pi i(1+\mu_0)} \sum_{i=1}^{2} Res \left[e^{sy} \frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]} \right] =$$
$$= \frac{1}{(1+\mu_0)} \left(Y_0(y) + Y_1(y) \right)$$

Знайдем $Y_0(y)$:

$$Y_0(y) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{sy}}{(s+\alpha_n)^2}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=\alpha_n} =$$
$$= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n}\begin{pmatrix} \alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0 & \alpha_n\mu_0 y \\ -\alpha_n\mu_0 y & -\alpha_n\mu_0 y + 2 + \mu_0 \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

Знайдем $Y_1(y)$:

$$Y_1(y) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{sy}}{(s-\alpha_n)^2}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=-\alpha_n} =$$
$$=\frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n}\begin{pmatrix} \alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n\mu_0 y \\ \alpha_n\mu_0 y & -\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

5.4 Побудова матриці-функції Гріна

Для побудови матриці-функції Гріна спочатку знайдем тепер фундамельні бизисні матриці $\Psi_0(y)$, $\Psi_1(y)$, шукати їх будем у наступному вигляді:

$$\Psi_i(y) = Y_0(y) * C_1^i + Y_2(y) * C_2^i \tag{5.19}$$

Залишилось знайти невідомі матриці коєфіцієнтів C_1^0, C_2^0, C_1^1, C_2^1 використовуючи граничні умови (5.11). Покрокове знаходження яких наведено у (Додаток C). Для подальшого введемо наступні позначення для елементів матриць $\Psi_0(y)$, $\Psi_1(y)$:

$$\Psi_0(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^0(y) & \Psi_2^0(y) \\ \Psi_3^0(y) & \Psi_4^0(y) \end{pmatrix}, \quad \Psi_1(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^1(y) & \Psi_2^1(y) \\ \Psi_3^1(y) & \Psi_4^1(y) \end{pmatrix}$$

Таким чином матрицю Гріна можемо записати у вигляді:

$$G(y,\xi) = \begin{cases} \Psi_0(y) * \Psi_1(\xi), & 0 \le y < \xi \\ \Psi_1(y) * \Psi_0(\xi), & \xi < y \le b \end{cases} \tag{5.20}$$

Для данної матриці Гріна виконано усі властивості, зокрема виконані однорідні граничні умови (5.11) та однорідні рівняння рівноваги у просторі трансформант (5.10):

$$L_2\left[G(y,\xi)\right] = 0$$

$$U_0\left[G(y,\xi)\right] = 0, \quad U_1\left[G(y,\xi)\right],$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок крайової задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y) = \int_0^b G(y,\xi)F_n(\xi)d\xi + \Psi_0(y) * D_0 + \Psi_1(y) * D_1 \tag{5.21}$$

Введемо наступні позначення $G(y,\xi) = \begin{pmatrix} g_1(y,\xi) & g_2(y,\xi) \\ g_3(y,\xi) & g_4(y,\xi) \end{pmatrix}$, $F_n(y) = \begin{pmatrix} f_n^1(y) \\ f_n^2(y) \end{pmatrix}$, $\Psi_i(y) = \begin{pmatrix} \psi_i^1(y) & \psi_i^2(y) \\ \psi_i^3(y) & \psi_i^4(y) \end{pmatrix}$, $i = 0, 1$. Враховуючи це, шукані функції перемішень у просторі трансформант можна записати у наступному вигляді

$$u_n(y) = \int_0^b \left[g_1(y,\xi) f_n^1(\xi) + g_2(y,\xi) f_n^2(\xi)\right] d\xi - \psi_0^2(y) p_n \tag{5.22}$$

$$v_n(y) = \int_0^b \left[g_3(y,\xi) f_n^1(\xi) + g_4(y,\xi) f_n^2(\xi)\right] d\xi - \psi_0^4(y) p_n \tag{5.23}$$

5.5 Побудова розв'язоку вихідної задачі

Використовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (5.22), (5.22), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x,y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{5.24}$$

$$v(x,y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{5.25}$$

Знайдем тепер $v_0(y)$ розглянувши задачу у просторі трансформант (5.8), (5.9) при $n = 0$, $\alpha_n = 0$. Детальний розв'язок якої наведено в (Додаток D). Тоді остаточний розв'язок $v(x,y)$ буде мати вигляд

$$v(x,y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) cos(\alpha_n x) - \frac{p_0}{a(2G+\lambda)} - \tag{5.26}$$

$$- \frac{1}{a(1+\mu_0)} \int_0^b g(y,\xi) f(\xi) d\xi \tag{5.27}$$

5.6 Розв'язок сінгулярного інтегрального рівняння

Залишилось знайти невідому функцію $f(y)$ для якої побудуєм інтегральне рівнняння використовуючи граничну умову $\sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x)$.

$$(2G+\lambda) \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}|_{y=b} + \lambda \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}|_{y=b} = -p(x) \Leftrightarrow$$

$$
-\frac{(2G+\lambda)}{a(1+\mu_0)}\int_0^b \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b} f(\xi)d\xi -
$$

$$
-\frac{2(2G+\lambda)}{a}\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_4(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right]d\xi+\psi_0^4(y)p_n\right)
$$

$$
cos(\alpha_n x)|_{y=b}-\frac{2\lambda}{a}\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_2(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right]d\xi+\psi_0^2(y)p_n\right)
$$

$$
sin(\alpha_n x)|_{y=b}=-p(x)
$$

Введемо позначення:

$$
a_1(x)=ap(x)-2(2G+\lambda)\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_0^4(y)p_n cos(\alpha_n x)|_{y=b}-
$$

$$
-2\lambda\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_0^2(y)p_n sin(\alpha_n x)|_{y=b} \tag{5.28}
$$

Враховуючи його отримаємо наступне інтегральне рівняння відносно $f(\xi)$:

$$
\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\int_0^b \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b} f(\xi)d\xi +
$$

$$
+\int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} cos(\alpha_n a)cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y}+\alpha_n\lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b}
$$

$$
f(\xi)d\xi=a_1(x) \tag{5.29}
$$

Розглянемо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} cos(\alpha_n a) cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y}+\alpha_n\lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b} =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\alpha_n^{-1}e^{\alpha_n(\xi-b)}cos(\alpha_n x)\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y}+\lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b} =$$

$$=\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\alpha_n^{-1}e^{\alpha_n(\xi-b)}cos(\alpha_n x)\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y}+\lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b}+$$

$$+a_2\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)+$$

$$+a_2\sum_{n=0}^{N}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)-$$

$$-a_2\sum_{n=0}^{N}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)=$$

$$=a_2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)+a_3(\xi,x)$$

Де:

$$a_2=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y}+\lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b},$$

$$a_3(\xi,x)=\sum_{n=1}^{N} cos(\alpha_n a) cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y}+\alpha_n\lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b}-$$

$$-a_2\sum_{n=0}^{N}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)$$

Використовуючи формулу 5.4.12.8 [6] отримаємо:

$$a_2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)+a_3(\xi,x)=$$

$$=\frac{a_2}{4}ln\left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right]+a_3(\xi,x)$$

Повернемося до інтегралу

$$\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\int_0^b \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b} f(\xi)d\xi + \int_0^b \left(\frac{a_2}{4} ln\left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right] + a_3(\xi,x)\right) \tag{5.30}$$

$$= \int_0^b \left(\frac{a_2}{4} ln\left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right] + a_3(\xi,x) + \frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b}\right) f(\xi)d\xi \tag{5.31}$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = \frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))-1}{1-ch(\frac{\pi b}{2a})} \\ sh(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))d\xi = -\frac{2a}{\pi}(ch(\frac{\pi b}{2a})-1)dt \\ \xi = 0, \quad t = 1 \\ \xi = b, \quad t = 0 \\ \xi = b - \frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1) \end{array}\right] = \tag{5.32}$$

$$= a_5\int_0^b a_4(t)\left(\frac{a_2}{4}ln\left[\frac{t+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right] + \widetilde{a_3(t,x)}\right)\widetilde{f(t)}dt \tag{5.33}$$

Де:

$$\widetilde{a_3(t,x)} = a_3\left(b - \frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1), x\right) + \frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\frac{\partial g(y, b - \frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi}{2}}{\partial y}$$

$$f(t) = f(b - \frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1))$$

$$a_4(t) = \frac{1}{sh\left(arch\left[(ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1\right]\right)}$$

$$a_5 = \frac{2a}{\pi}(ch(\frac{\pi b}{2a})-1)$$

Таким чином отримаємо наступне інтегральне рівняння:

$$a_5\int_0^b a_4(t)\left(\frac{a_2}{4}ln\left[\frac{t+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right] + \widetilde{a_3(t,x)}\right)\widetilde{f(t)}dt = a_1(x) \tag{5.34}$$

Розв'язок якого будемо шукати у наступному вигляді:

$$\widetilde{f(t)} = \frac{1}{a_2 a_4(t)}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k T_{2k+1}(t) \tag{5.35}$$

Де φ_k - невідомі коефіцієнти, $T_{2k+1}(t)$ - поліном Чебишева першого роду.

Таким чином отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_k}{4}\frac{1}{\pi}\int_0^1 ln\left[\frac{t+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right]\frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\widetilde{a_3(t,x)}}{a_2}\frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{a_1(x)}{a_5}\Leftrightarrow$$

Використовуючи формулу В.1.9 [5]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\frac{T_{2k+1}(cos(\frac{\pi}{2a}x))}{4(2k+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\widetilde{a_3(t,x)}}{a_2}\frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{a_1(x)}{a_5} \tag{5.36}$$

Введем позначення

$$l=cos(\frac{\pi}{2a}x),\quad \widetilde{a_1(l)}=\frac{a_1(\frac{2a}{\pi}arccos(l))}{a_5}$$

Помножимо обидві частини рівняння (5.36) скалярно на $\frac{T_{2m+1}(l)}{\sqrt{1-l^2}}$ та проінтегруєм по змінній l на інтервалі $(-1;1)$. Та використовуючи формулу 2.3.2 [5] отримаєм наступне бескінечну алгебричну систему відносно невідомих коєфіцієнтів φ_k, яка в подальшому буде розв'язуватись методом редукції.

$$\frac{\phi_m\pi}{8(2m+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\phi_k g_{k,m}=f_m \tag{5.37}$$

Де $g_{k,m}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1\frac{T_{2m+1}(l)}{\sqrt{1-l^2}}\int_0^1\frac{a_3(t,\widetilde{\frac{2a}{\pi}arccos(l)})}{a_2}\frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dtdl$, $f_m=\int_{-1}^1\frac{T_{2m+1}(l)\widetilde{a_1(l)}}{\sqrt{1-l^2}}dl$ інтеграли відомих функцій.

5.7 Чисельні розрахунки

Наведені чисельні експеренти розглядаються для сталі ($E=200$ ГПА, $\mu=0.25$).

Розглянута прямокунта область $0\le x\le 10$, $0\le y\le 15$, при функції навантаження $p(x)=(x-2.5)^2$. На малюнках (Рис: 5.2), (Рис: 5.3), (Рис: 5.4), (Рис: 5.5) представлені функкії переміщень $u(x,y)$, $v(x,y)$ та напружень $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ відповідно.

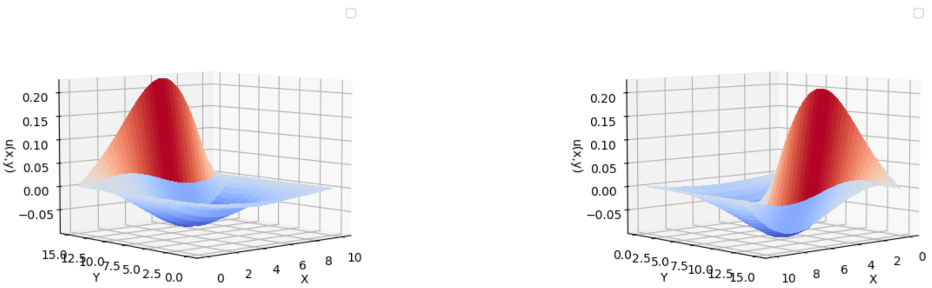

Рис. 5.2: Функція $u(x, y)$

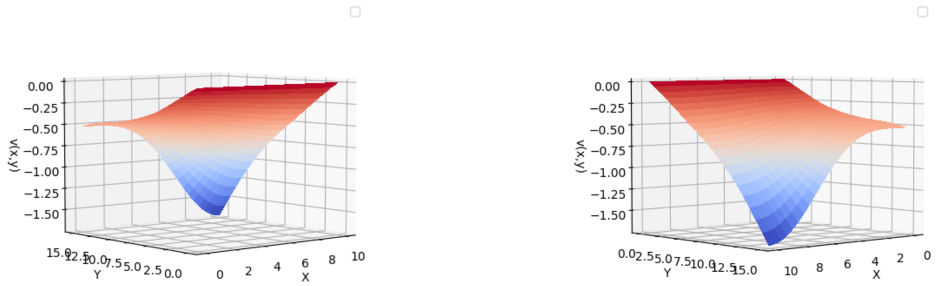

Рис. 5.3: Функція $v(x, y)$

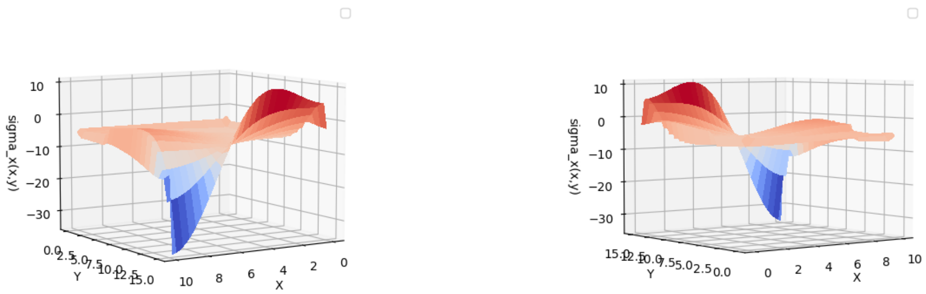

Рис. 5.4: Функція $\sigma_x(x, y)$

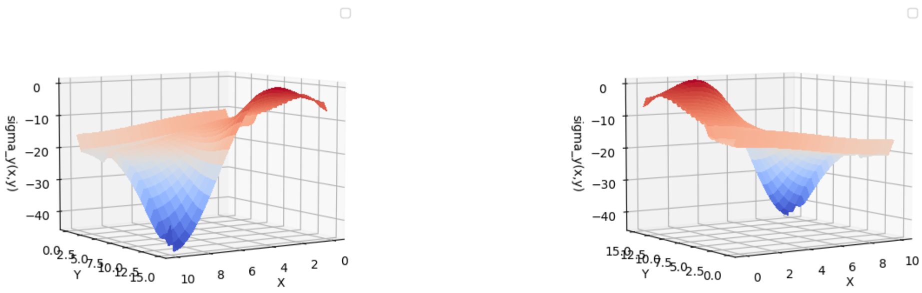

Рис. 5.5: Функція $\sigma_y(x, y)$

5.8 Висновки до треттього розділу розділу

Отримано точне розв'язок статичної задачі для прямокутної області за умов другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях. Дослідженно поля переміщень та напружень для різних видів навантаження і розмірів прямокутної області.

6 ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ ЗА УМОВ ДРУГОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

У даному розділі досліджено плоска динамічна задача теорії пружності для прямокутної області, за другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях.

Вихідна задача зведена до одновимірної задачі у просторі трансформант за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Отримана крайова задача розв'язана точно за допомогою методу матрично диференціального числення, фундаментальний розв'язок представлений як інтеграл по замкненому контору, який в свою чергу, був знайденний за допомогою теоремі про лишки. Побудована матриця-функція Гріна як комбінація фундаментальних базисних розв'язків задачі у просторі трансформант. Остаточний вигляд для функцій переміщенння та напружень отриман шляхом оберненого перетворення Фур'є. Побудовано та розв'язано сінгульрне інтегральне рівняння відносно невідомої функції шляхом використання методу ортагональних многочленів, та зведення рівнняння до бескінечної алгебричної системи, яка в подальшому була розв'язана методом редукції [3].

Проведено чисельний аналіз отриманих функцій переміщень та напружень для різних розмірів прямокутної області та різних видів навантаження.

Результати розділу опубліковані в [16], а також доповідалась на конференції [17].

6.1 Постановка задачі

Розглядається пружна сама прямокутна область (Рис: 4.1), яка займає облась, що описується у декартовій системі координат співвідношенням $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y, t)|_{y=b} = -p(x, t), \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{y=b} = 0 \tag{6.1}$$

де $p(x, t)$ відома функція. На бічних гранях виконується умова другої основної задачі теорії пружності

$$u(x, y, t)|_{x=\pm a} = 0, \quad v(x, y, t)|_{x=\pm a} = 0 \tag{6.2}$$

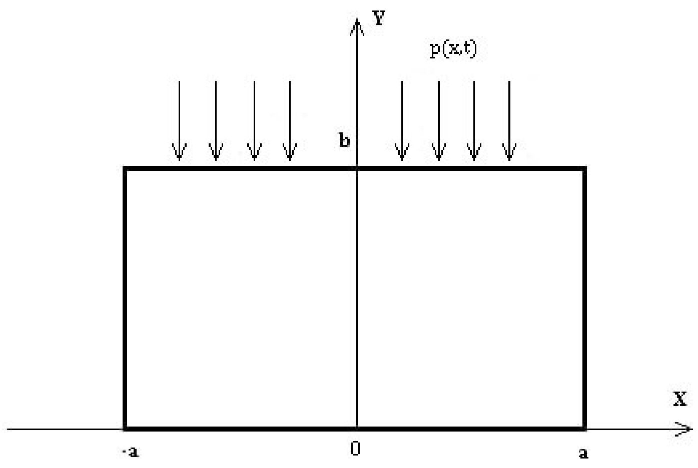

Рис. 6.1: Геометрія проблеми

На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x,y,t)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y,t)|_{y=0} = 0 \tag{6.3}$$

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x \partial y}) = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2}) = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial t^2} \end{cases} \tag{6.4}$$

Будемо розглядати випадок гармонічних коливань, тому можемо представити функції у наступному вигляді:

$$u(x,y,t) = u(x,y)e^{i\omega t}, \quad v(x,y,t) = v(x,y)e^{i\omega t}, \quad p(x,t) = p(x)e^{i\omega t} \tag{6.5}$$

Таким чином отримаємо наступні рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}) = -\frac{\omega^2}{c_1^2}u(x,y) \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}) = -\frac{\omega^2}{c_2^2}v(x,y) \end{cases} \tag{6.6}$$

Також, щоб розв'язати поставлену задачу буде розглянута тільки половона прямокутної області $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ та використовуючи властивості симметрії граничні умови в результаті будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} \sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x,t), \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=b} = 0 \\ v(x,y)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=0} = 0 \\ u(x,y)|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=0} = 0 \\ u(x,y)|_{x=a} = 0, \quad v(x,y)|_{x=a} = 0 \end{cases} \tag{6.7}$$

6.2 Зведеня задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаєм інтегральне перетворення Фур'є по змінній x у до рівнянь (6.6) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y)sin(\alpha_n x) \\ v(x,y)cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{6.8}$$

Для цього помножим перше та друге рівняння (6.6) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруєм по змінній x на інтервалі $0 \le x \le a$. Покрокове інтегрування рівняння (6.6) наведено у (Додаток А). Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) + (-\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) = 0 \\ (1+\mu_0) v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) + (-\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = -cos(\alpha_n) f(y) \end{cases} \tag{6.9}$$

Де $f(y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}|_{x=a}$ - невідома функція

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \left((2G+\lambda) v_n^{'}(y) + \alpha_n \lambda u_n(y)\right)|_{y=b} = -p_n \\ \left(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\right)|_{y=b} = 0 \\ v_n(y)|_{y=0} = 0 \\ \left(u_n^{'}(y) - \alpha_n v_n(y)\right)|_{y=0} = 0 \end{cases} \tag{6.10}$$

Де $p_n = \int_0^a p(x) cos(\alpha_n x) dx$

6.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у простосторі трансформант, перепишмо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (6.9) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} L_2\left[Z_n(y)\right] &= A * Z_n^{''}(y) + B * Z_n^{'}(y) + C * Z_n(y) \\ L_2\left[Z_n(y)\right] &= F_n(y) \end{aligned} \tag{6.11}$$

Де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix},$$

$$Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}, \quad F_n(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -cos(\alpha_n a) f(y) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (6.10) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} U_i\left[Z_n(y)\right] &= E_i * Z_n^{'}(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ U_i\left[Z_n(y)\right] &= D_i \end{aligned} \tag{6.12}$$

Де $i = \overline{0,1}$, $b_0 = b$, $b_1 = 0$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n\lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (6.11). Шукати її будем у наступному вигляді [4]:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \tag{6.13}$$

Де $M(s)$ - характерестична матриця рівняння (6.11), а C - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умовни

$$L_2\left[e^{sy} * I\right] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned} L_2\left[e^{sy} * I\right] &= e^{sy}\left(s^2 A * I + sB * I + C * I\right) = \\ &= e^{sy} \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix} \tag{6.15}$$

Знайдемо тепер $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}$.

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s \\ -\alpha_n \mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

$$det[M(s)] = \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{vmatrix} =$$
$$= (s - s_1)(s + s_1)(s - s_2)(s + s_2) \tag{6.17}$$

Де s_1, s_2, $-s_1$, $-s_2$ корені $det[M(s)] = 0$, детальне знаходження яких наведено в (Додаток В).

Враховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds = \frac{2\pi i}{2\pi i(1+\mu_0)} \sum_{i=1}^{4} Res \left[e^{sy} \frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]} \right] =$$
$$= (Y_0(y) + Y_1(y) + Y_2(y) + Y_3(y))$$

Знайдем $Y_0(y)$:

$$Y_0(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s+s_1)(s-s_2)(s+s_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=s_1} =$$
$$= \frac{e^{s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \begin{pmatrix} s_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s_1 \\ -\alpha_n \mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{6.18}$$

Знайдем $Y_1(y)$:

$$Y_1(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-s_1)(s-s_2)(s+s_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-s_1} =$$
$$= -\frac{e^{-s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \begin{pmatrix} s_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 s_1 \\ \alpha_n \mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{6.19}$$

Знайдем $Y_2(y)$:

$$Y_2(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s+s_2)(s-s_1)(s+s_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=s_2} =$$
$$= \frac{e^{s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \begin{pmatrix} s_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s_2 \\ -\alpha_n \mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{6.20}$$

Знайдем $Y_3(y)$:

$$Y_3(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-s_2)(s-s_1)(s+s_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-s_2} =$$
$$= -\frac{e^{-s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \begin{pmatrix} s_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 s_2 \\ \alpha_n \mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \tag{6.21}$$

6.4 Побудова матриці-функції Гріна

Для побудови матриці-функції Гріна спочатку знайдем тепер фундамельні бизисні матриці $\Psi_0(y)$, $\Psi_1(y)$, шукати їх будем у наступному вигляді:

$$\Psi_i(y) = (Y_0(y) + Y_1(y)) * C_1^i + (Y_2(y) + Y_3(y)) * C_2^i \tag{6.22}$$

Залишилось знайти невідомі матриці коефіцієнтів C_1^0, C_2^0, C_1^1, C_2^1 використовуючи граничні умови (6.12). Покрокове знаходження яких наведено у (Додаток C). Для подальшого введемо наступні позначення для елементів матриць $\Psi_0(y)$, $\Psi_1(y)$:

$$\Psi_0(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^0(y) & \Psi_2^0(y) \\ \Psi_3^0(y) & \Psi_4^0(y) \end{pmatrix}, \quad \Psi_1(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^1(y) & \Psi_2^1(y) \\ \Psi_3^1(y) & \Psi_4^1(y) \end{pmatrix}$$

Таким чином матрицю Гріна можемо записати у вигляді:

$$G(y,\xi) = \begin{cases} \Psi_0(y) * \Psi_1(\xi), & 0 \le y < \xi \\ \Psi_1(y) * \Psi_0(\xi), & \xi < y \le b \end{cases} \tag{6.23}$$

Для данної матриці Гріна виконано усі властивості, зокрема виконані однорідні граничні умови (6.12) та однорідні рівняння рівноваги у просторі трансформант (6.11):

$$L_2\left[G(y,\xi)\right] = 0$$

$$U_0\left[G(y,\xi)\right] = 0, \quad U_1\left[G(y,\xi)\right] = 0,$$

Введемо наступні позначення $G(y,\xi) = \begin{pmatrix} g_1(y,\xi) & g_2(y,\xi) \\ g_3(y,\xi) & g_4(y,\xi) \end{pmatrix}$. Враховуючи це, шукані функції перемішень у просторі трансформант можна записати у наступному вигляді

$$u_n(y) = -\int_0^b g_2(y,\xi) f(\xi) cos(\alpha_n a) d\xi - \psi_0^2(y) p_n \tag{6.24}$$

$$v_n(y) = -\int_0^b g_4(y,\xi) f(\xi) cos(\alpha_n a) d\xi - \psi_0^4(y) p_n \tag{6.25}$$

6.5 Побудова розв'язоку вихідної задачі

Використовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (6.24), (6.24), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{6.26}$$

$$v(x,y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \tag{6.27}$$

Знайдем тепер $v_0(y)$ розглянувши задачу у просторі трансформант (6.9), (6.10) при $n = 0$, $\alpha_n = 0$. Детальний розв'язок якої наведено в (Додаток D). Тоді остаточний розв'язок $v(x,y)$ буде мати вигляд

$$\begin{aligned} v(x,y) = &-\frac{1}{a(1+\mu_0)}\int_0^b g(y,\xi)f(\xi)d\xi - \psi_0(y)\frac{p_0}{a(2G+\lambda)} \\ &- \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_4(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right]d\xi + \psi_0^4(y)p_n\right)cos(\alpha_n x) \end{aligned} \tag{6.28}$$

6.6 Розв'язок сінгулярного інтегрального рівняння

Залишилось знайти невідому функцію $f(y)$ для якої побудуєм інтегральне рівнняння використовуючи граничну умову $\sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x)$.

$$(2G+\lambda)\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}|_{y=b} + \lambda\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}|_{y=b} = -p(x) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &-\frac{(2G+\lambda)}{a(1+\mu_0)}\int_0^b \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b} f(\xi)d\xi - \psi_0'(b)\frac{p_0}{a} - \\ &-\frac{2(2G+\lambda)}{a}\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_4(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right]d\xi + \psi_0^4(y)p_n\right)cos(\alpha_n x)|_{y=b} - \\ &-\frac{2\lambda}{a}\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b \left[g_2(y,\xi)cos(\alpha_n a)f(\xi)\right]d\xi + \psi_0^2(y)p_n\right)sin(\alpha_n x)|_{y=b} = -p(x) \end{aligned}$$

Введемо позначення:

$$a_1(x) = ap(x) - 2(2G+\lambda)\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_0^4(y)p_n cos(\alpha_n x)|_{y=b} -$$

$$- 2\lambda\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_0^2(y)p_n sin(\alpha_n x)|_{y=b} - \psi_0^{'}(b)p_0 \qquad (6.29)$$

Враховуючи його отримаємо наступне інтегральне рівняння відносно $f(\xi)$:

$$\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\int_0^b \frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b} f(\xi)d\xi +$$
$$+ \int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} cos(\alpha_n a)cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y} + \alpha_n\lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b}$$
$$f(\xi)d\xi = a_1(x) \qquad (6.30)$$

Розглянемо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} cos(\alpha_n a)cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y} + \alpha_n\lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\alpha_n^{-1}e^{\alpha_n(\xi-b)}cos(\alpha_n x)\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y} + \lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b} =$$
$$= \sum_{n=1}^{N}(-1)^n\alpha_n^{-1}e^{\alpha_n(\xi-b)}cos(\alpha_n x)\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y} + \lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b} +$$
$$+ a_2\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) +$$
$$+ a_2\sum_{n=0}^{N}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) -$$
$$- a_2\sum_{n=0}^{N}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) =$$
$$= a_2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x) + a_3(\xi,x)$$

Де:

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial g_4\widetilde{(y,\xi)}}{\partial y} + \lambda g_2\widetilde{(y,\xi)}\right]|_{y=b},$$

$$a_3(\xi,x)=\sum_{n=1}^{N}cos(\alpha_n a)cos(\alpha_n x)\left[(2G+\lambda)\frac{\partial g_4(y,\xi)}{\partial y}+\alpha_n\lambda g_2(y,\xi)\right]|_{y=b}-$$

$$-a_2\sum_{n=0}^{N}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)$$

Використовуючи формулу 5.4.12.8 [6] отримаємо:

$$a_2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{-1}e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-\xi)}cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)+a_3(\xi,x)=$$

$$=\frac{a_2}{4}ln\left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right]+a_3(\xi,x)$$

Повернемося до інтегралу

$$\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\int_0^b\frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b}f(\xi)d\xi+\int_0^b\left(\frac{a_2}{4}ln\left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right]+a_3(\xi,x)\right) \tag{6.31}$$

$$=\int_0^b\left(\frac{a_2}{4}ln\left[\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right]+a_3(\xi,x)+\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\frac{\partial g(y,\xi)}{\partial y}|_{y=b}\right)f(\xi)d\xi \tag{6.32}$$

$$=\left[\begin{array}{c} t=\frac{ch(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))-1}{1-ch(\frac{\pi b}{2a})} \\ sh(\frac{\pi}{2a}(b-\xi))d\xi=-\frac{2a}{\pi}(ch(\frac{\pi b}{2a})-1)dt \\ \xi=0,\quad t=1 \\ \xi=b,\quad t=0 \\ \xi=b-\frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1) \end{array}\right]= \tag{6.33}$$

$$=a_5\int_0^b a_4(t)\left(\frac{a_2}{4}ln\left[\frac{t+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right]+\widetilde{a_3(t,x)}\right)\widetilde{f(t)}dt \tag{6.34}$$

Де:

$$\widetilde{a_3(t,x)}=a_3\left(b-\frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1),x\right)+$$

$$+\frac{(2G+\lambda)}{(1+\mu_0)}\frac{\partial g(y,b-\frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1))}{\partial y}|_{y=b}$$

$$f(t)=f(b-\frac{2a}{\pi}arch((ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1))$$

$$a_4(t)=\frac{1}{sh\left(arch\left[(ch(\frac{\pi b}{2a})-1)t+1\right]\right)}$$

$$a_5=2a(ch(\frac{\pi b}{2a})-1)$$

Таким чином отримаємо наступне інтегральне рівняння:

$$\frac{a_5}{\pi}\int_0^b a_4(t)\left(\frac{a_2}{4}ln\left[\frac{t+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right]+a_3\widetilde{(t,x)}\right)\widetilde{f(t)}dt=a_1(x) \quad (6.35)$$

Розв'язок якого будемо шукати у наступному вигляді:

$$\widetilde{f(t)}=\frac{1}{a_2a_4(t)}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_kT_{2k+1}(t) \quad (6.36)$$

Де φ_k - невідомі коєфіцієнти, $T_{2k+1}(t)$ - поліном Чебишева першого роду.

Таким чином отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_k}{4}\frac{1}{\pi}\int_0^1 ln\left[\frac{t+cos(\frac{\pi}{2a}x)}{t-cos(\frac{\pi}{2a}x)}\right]\frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{a_3\widetilde{(t,x)}}{a_2}\frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{a_1(x)}{a_5}\Leftrightarrow$$

Використовуючи формулу B.1.9 [5]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\frac{T_{2k+1}(cos(\frac{\pi}{2a}x))}{4(2k+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{a_3\widetilde{(t,x)}}{a_2}\frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{a_1(x)}{a_5} \quad (6.37)$$

Введем позначення

$$l=cos(\frac{\pi}{2a}x), \quad \widetilde{a_1(l)}=\frac{a_1(\frac{2a}{\pi}arccos(l))}{a_5}$$

Помножимо обидві частини рівняння (6.37) скалярно на $\frac{T_{2m+1}(l)}{\sqrt{1-l^2}}$ та проінтегруєм по змінній l на інтервалі $(-1;1)$. Та використовуючи формулу 2.3.2 [5] отримаєм наступне бескінечну алгебричну систему відносно невідомих коєфіцієнтів φ_k, яка в подальшому буде розв'язуватись методом редукції.

$$\frac{\phi_m\pi}{8(2m+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\phi_kg_{k,m}=f_m \quad (6.38)$$

Де $g_{k,m}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1\frac{T_{2m+1}(l)}{\sqrt{1-l^2}}\int_0^1\frac{a_3(t,\widetilde{\frac{2a}{\pi}arccos(l))}}{a_2}\frac{T_{2k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dtdl$, $f_m=\int_{-1}^1\frac{T_{2m+1}(l)\widetilde{a_1(l)}}{\sqrt{1-l^2}}dl$ інтеграли відомих функцій.

6.7 Чисельні розрахунки

Наведені чисельні експеренти розглядаються для сталі ($E = 200$ ГПА, $\mu = 0.25$).

Розглянута прямокунта область $0 \le x \le 10$, $0 \le y \le 15$, при функції навантаження $p(x) = (x - 2.5)^2$.

6.8 Висновки до треттього розділу розділу

Отримано точне розв'язок динамічної задачі для прямокутної області за умов другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях. Дослідженно поля переміщень та напружень для різних видів навантаження і розмірів прямокутної області.

Література

[1] Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов разрезов тонких включений и подкреплений. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 344 с.

[2] Попов Г.Я. Точные решения некоторых краевых задач механики деформируемого твѐрдого тела. Одесса: Астропринт, 2013. 424 с.

[3] Popov G. On the method of orthogonal polynomials in contact problems of the theory of elasticity. Journal of Applied Mathematics and Mechanics (1969). Volume 33, Issue 3, pp. 503-517

[4] Gantmakher F. R. (1998) The theory of matrices. AMS Chelsea Publishing, Providence, Rohde Island.

[5] Попов Г. Я., Реут В. В., Моісеєв М. Г., Вайсфельд Н. Д. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів. Одесса: Астропринт, 2010. 120 с.

[6] Прудников А.П.,Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды специальные функции. В 3 т. Т 1. Элементарные функции. 2-е издание, исправленное. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 632 с.

[7] D. Nerukh, O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2019) Mixed plain boundary value problem of elasticity for a rectangular domain. 25-th International Conference Engineering Mechanics. 2019, May 13-16, Svratka, Czech Republic. p. 255

[8] O. V. Pozhylenkov (2019) The stress state of a rectangular elastic domain. Researches in Mathematics and Mechanics, Volume 24, Issue 2(34), pp. 88-96

[9] Пожиленков О. В. Вайсфельд Н. Д. (2019) Мішана крайова задача теорії пружності для прямокутної області. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур, випуск 5, Львів, ст. 30-32

[10] D. Nerukh, O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld 25-th international conference «Engineering Mechanics 2019» // Czech Republic, Svratka, 2019

[11] Пожиленков О. В., Вайсфельд Н. Д. X Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» // Львів, 2019

[12] O. Pozhyenkov, N. Vaysfeld (2020) Stress state of a rectangular domain with the mixed boundary conditions. Procedia Structural Integrity, Volume 28, pp. 458-463

[13] O. Pozhyenkov, N. Vaysfeld «1st Virtual European Conference on Fracture» // Italy, 2020

[14] O. Pozhyenkov, N. Vaysfeld (2021) Stress state of an elastic rectangular domain under steady load. Procedia Structural Integrity, Volume 33, pp. 385-390

[15] O. Pozhyenkov, N. Vaysfeld «26th International Conference on Fracture and Structural Integrity» // Italy, Turin, 2021

[16] O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2022) Dynamic mixed problem of elasticity for a rectangular domain. Recent trends in Wave Mechanics and Vibrations, pp. 211-218

[17] O. Pozhyenkov, N. Vaysfeld «10th International Conference on Wave Mechanics and Vibrations» // Portugal, Lisbon, 2022

Додаток А

ПОКРОКОВЕ ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ ЛАМЕ ЗА ЗМІННОЮ x

Помножим перше та друге рівняння (2.6) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруєм по змінній x на інтервалі $0 \leq x \leq a$. Скористаємося введенною заміною $\chi_1(y) = u(0, y)$, $\chi_2(y) = v(0, y)$, $\chi_3(y) = u(a, y)$, $\chi_4(y) = v(a, y)$ та $\frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_1(y)$, $\frac{\partial v(0,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)$, $\frac{\partial u(a,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_3(y)$, $\frac{\partial v(a,y)}{\partial x} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)$, та враховуючи граничні умови (2.7) знайдем вигляд задачі у просторі трансформант.

Розглянемо перше рівняння

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} sin(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} sin(\alpha_n x)dx +$$
$$+ \mu_0 \left(\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} sin(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} sin(\alpha_n x)dx \right) +$$
$$+ \frac{\omega^2}{c_1^2} \int_0^a u(x,y) sin(\alpha_n x)dx = 0$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \left(u(x,y)cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a u(x,y) sin(\alpha_n x)dx \right) =$$
$$= -\alpha_n(\chi_3(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1(y)) - \alpha_n^2 u_n(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^a u(x,y) sin(\alpha_n x)dx = u_n^{''}(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)dx =$$
$$= -\alpha_n \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a v(x,y) cos(\alpha_n x)dx = -\alpha_n v_n^{'}(y)$$

Тоді перше рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2 \mu_0 - \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) =$$
$$= \alpha_n(1+\mu_0)(\chi_3(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1(y))$$

Розлянемо друге рівняння

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} cos(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx +$$
$$+ \mu_0 \left(\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} cos(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx \right) +$$
$$+ \frac{\omega^2}{c_2^2} \int_0^a v(x,y) cos(\alpha_n x)dx = 0$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} sin(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \left(v(x,y) sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a v(x,y) cos(\alpha_n x)dx \right) =$$
$$= -(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)) - \alpha_n^2 v_n(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^a v(x,y) cos(\alpha_n x)dx = v_n^{''}(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} sin(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a u(x,y) sin(\alpha_n x)dx = \alpha_n u_n^{'}(y) +$$
$$+ (\chi_3^{'}(y) cos(\alpha_n a) - \chi_1^{'}(y))$$

Тоді друге рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$(1+\mu_0)v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2})v_n(y) =$$
$$= (\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y) cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)) - \mu_0(\chi_3^{'}(y) cos(\alpha_n a) - \chi_1^{'}(y))$$

У випадку статичної задачі (3.5) та умов ідеального контаку на бічних гранях (3.2), (3.3) отримаємо наступні рівняння у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2 \mu_0) u_n(y) = 0 \\ (1+\mu_0)v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = 0 \end{cases}$$

У випадку динамічної задачі (4.7) та умов ідеального контаку на бічних гранях (4.8) отримаємо наступні рівняння у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2 \mu_0 - \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) = 0 \\ (1+\mu_0)v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = 0 \end{cases}$$

У випадку статичної задачі (5.4) та умов другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях (5.5), (5.6) отримаємо наступні рівняння у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2 \mu_0) u_n(y) = 0 \\ (1+\mu_0)v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = -cos(\alpha_n) \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}|_{x=a} \end{cases}$$

У випадку динамічної задачі (6.6) та умов другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях (6.7) отримаємо наступні рівняння у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2 \mu_0 - \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) = 0 \\ (1+\mu_0)v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) - (\alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = -cos(\alpha_n) \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}|_{x=a} \end{cases}$$

Додаток В

ЗНАХОДЖЕННЯ КОРЕНІВ РІВНЯННЯ $det[M(s)] = 0$

Знайдемо корені $det[M(s)] = 0$

$$det[M(s)] = \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n\mu_0 s \\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{vmatrix} =$$

$$= (s^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) + (\alpha_n\mu_0 s)^2 =$$

$$= s^4 + s^4\mu_0 - s^2\alpha_n^2 + s^2\frac{\omega^2}{c_2^2} - s^2\alpha_n^2 - s^2\alpha_n^2\mu_0 + \alpha_n^4 - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_2^2} - s^2\alpha_n^2\mu_0 -$$

$$- s^2\alpha_n^2\mu_0 + \alpha_n^4\mu_0 - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_2^2} + s^2\frac{\omega^2}{c_1^2} + s^2\mu_0\frac{\omega^2}{c_1^2} - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^4}{c_1^2c_2^2} + s^2\alpha_n^2\mu_0^2 =$$

$$= (1+\mu_0)s^4 + (-2\alpha_n^2 - 2\alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_2^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2} + \mu_0\frac{\omega^2}{c_1^2})s^2 + (\alpha_n^4 - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_2^2} +$$

$$+ \alpha_n^4\mu_0 - \alpha_n^2\mu_0\frac{\omega^2}{c_2^2} - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^4}{c_1^2c_2^2})$$

Введемо наступні позначення:

$$a_1 = -2\alpha_n^2 - 2\alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_2^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2} + \mu_0\frac{\omega^2}{c_1^2}$$

$$a_2 = \alpha_n^4 - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_2^2} + \alpha_n^4\mu_0 - \alpha_n^2\mu_0\frac{\omega^2}{c_2^2} - \alpha_n^2\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^4}{c_1^2c_2^2}$$

Враховучи введені позначення отримаємо наступне рівняння:

$$(1+\mu_0)s^4 + a_1s^2 + a_2 = 0$$

Таким чином отримаємо наступні корені рівняння:

$$s_1 = \sqrt{\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4(1+\mu_0)a_2}}{2(1+\mu_0)}}$$

$$s_2 = -\sqrt{\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4(1+\mu_0)a_2}}{2(1+\mu_0)}}$$

$$s_3 = \sqrt{\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4(1+\mu_0)a_2}}{2(1+\mu_0)}}$$

$$s_4 = -\sqrt{\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4(1+\mu_0)a_2}}{2(1+\mu_0)}}$$

У випадку статичної задачі коли $\omega = 0$ отримаємо наступні рівняння:

$$(1+\mu_0)(s^4 - 2\alpha_n^2 s^2 + \alpha_n^4) = 0$$

Таким чином отримаємо наступні корені

$$s_{1,2} = \alpha_n$$
$$s_{3,4} = -\alpha_n$$

Додаток C

ЗНАХОДЖЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ БАЗИСНИХ МАТРИЦЬ $\Psi_i(y)$, $i = \overline{0,1}$

Для знаходження матриць коєфіцієтів C_k^i для фундаентальних базісних матриць $\Psi_i(y)$, $i = \overline{0,1}$, $k = \overline{1,2}$. Використовуючи граничні умови (2.12) шукати їх будем з наступних умов:

$$\begin{aligned}
&U_0\left[\Psi_0(y)\right] = I, \quad U_1\left[\Psi_0(y)\right] = 0\\
&U_0\left[\Psi_1(y)\right] = 0, \quad U_1\left[\Psi_1(y)\right] = I, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&U_0\left[\Psi_i(y)\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G+\lambda \end{pmatrix} * \Psi_i'(b) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n\lambda & 0 \end{pmatrix} * \Psi_i(b)\\
&U_1\left[\Psi_i(y)\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \Psi_i'(0) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \Psi_i(0)
\end{aligned}$$

Введемо наступні позначення:

$$C_1^i = \begin{pmatrix} d_1^i & d_2^i \\ d_3^i & d_4^i \end{pmatrix}, \quad C_2^i = \begin{pmatrix} f_1^i & f_2^i \\ f_3^i & f_4^i \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
&x_1 = s_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}, \quad x_2 = s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}\\
&x_3 = s_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}, \quad x_4 = s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}\\
&x_5 = s_1\alpha_n\mu_0, \quad x_6 = s_2\alpha_n\mu_0\\
&y_1 = 2s_1(s_1^2 - s_2^2), \quad y_2 = 2s_2(s_2^2 - s_1^2)
\end{aligned}$$

Враховуючи їх представлення (2.22) випишем вигляд $\Psi_i(y)$:

$$\Psi_i(y) = \frac{1}{y_1}\begin{pmatrix} x_1(e^{ys_1} - e^{-ys_1})d_1^i + x_5(e^{ys_1} + e^{-ys_1})d_3^i & x_1(e^{ys_1} - e^{-ys_1})d_2^i + x_5(e^{ys_1} \\ -x_5(e^{ys_1} + e^{-ys_1})d_1^i + x_2(e^{ys_1} - e^{-ys_1})d_3^i & -x_5(e^{ys_1} + e^{-ys_1})d_2^i + x_2(e^{ys_1} \end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{y_2}\begin{pmatrix} x_3(e^{ys_2} - e^{-ys_2})f_1^i + x_6(e^{ys_2} + e^{-ys_2})f_3^i & x_3(e^{ys_2} - e^{-ys_2})f_2^i + x_6(e^{ys_2} + e^{-y} \\ -x_6(e^{ys_2} + e^{-ys_2})f_1^i + x_4(e^{ys_2} - e^{-ys_2})f_3^i & -x_6(e^{ys_2} + e^{-ys_2})f_2^i + x_4(e^{ys_2} - e^{-} \end{pmatrix}$$

$$\Psi_i'(y) = \frac{s_1}{y_1}\begin{pmatrix} x_1(e^{ys_1} - e^{-ys_1})d_1^i + x_5(e^{ys_1} + e^{-ys_1})d_3^i & x_1(e^{ys_1} - e^{-ys_1})d_2^i + x_5(e^{ys_1} \\ -x_5(e^{ys_1} + e^{-ys_1})d_1^i + x_2(e^{ys_1} - e^{-ys_1})d_3^i & -x_5(e^{ys_1} + e^{-ys_1})d_2^i + x_2(e^{ys_1} \end{pmatrix}$$

$$+\frac{s_2}{y_2}\begin{pmatrix} x_3(e^{ys_2} - e^{-ys_2})f_1^i + x_6(e^{ys_2} + e^{-ys_2})f_3^i & x_3(e^{ys_2} - e^{-ys_2})f_2^i + x_6(e^{ys_2} + e^{-y} \\ -x_6(e^{ys_2} + e^{-ys_2})f_1^i + x_4(e^{ys_2} - e^{-ys_2})f_3^i & -x_6(e^{ys_2} + e^{-ys_2})f_2^i + x_4(e^{ys_2} - e^{-} \end{pmatrix}$$

Розглянемо $U_0\left[\Psi_i(y)\right]$:

$$U_0\left[\Psi_i(y)\right]_{1,1} = \frac{s_1}{y_1}\left(x_1(e^{bs_1} - e^{-bs_1})d_1^i + x_5(e^{bs_1} + e^{-bs_1})d_3^i\right) +$$
$$+\frac{s_2}{y_2}\left(x_3(e^{bs_2} - e^{-bs_2})f_1^i + x_6(e^{bs_2} + e^{-bs_2})f_3^i\right) + \frac{\alpha_n}{y_1}\left(x_5(e^{bs_1} + e^{-bs_1})d_1^i - x_2(e^{bs_1} - e^{-b}\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_n}{y_2}\left(x_6(e^{bs_2} + e^{-bs_2})f_1^i + x_4(e^{bs_2} - e^{-bs_2})f_3^i\right)\right.$$

$$U_0\left[\Psi_i(y)\right]_{1,2} = \frac{s_1}{y_1}\left(x_1(e^{bs_1} - e^{-bs_1})d_2^i + x_5(e^{bs_1} + e^{-bs_1})d_4^i\right) +$$
$$+\frac{s_2}{y_2}\left(x_3(e^{bs_2} - e^{-bs_2})f_2^i + x_6(e^{bs_2} + e^{-bs_2})f_4^i\right) + \frac{\alpha_n}{y_1}\left(x_5(e^{bs_1} + e^{-bs_1})d_2^i - x_2(e^{bs_1} - e^{-b}\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_n}{y_2}\left(x_6(e^{bs_2} + e^{-bs_2})f_2^i + x_4(e^{bs_2} - e^{-bs_2})f_4^i\right)\right.$$

$$U_0\left[\Psi_i(y)\right]_{2,1} = \frac{s_1(2G+\lambda)}{y_1}\left(-x_5(e^{bs_1} + e^{-bs_1})d_1^i + x_2(e^{bs_1} - e^{-bs_1})d_3^i\right) +$$
$$+\frac{s_2(2G+\lambda)}{y_2}\left(-x_6(e^{bs_2} + e^{-bs_2})f_1^i + x_4(e^{bs_2} - e^{-bs_2})f_3^i\right) + \frac{\alpha_n\lambda}{y_1}\left(x_1(e^{bs_1} - e^{-bs_1})d_1^i + \right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_n\lambda}{y_2}\left(x_3(e^{bs_2} - e^{-bs_2})f_1^i + x_6(e^{bs_2} + e^{-bs_2})f_3^i\right)\right.$$

$$U_0\left[\Psi_i(y)\right]_{2,2} = \frac{s_1(2G+\lambda)}{y_1}\left(-x_5(e^{bs_1} + e^{-bs_1})d_2^i + x_2(e^{bs_1} - e^{-bs_1})d_4^i\right) +$$
$$+\frac{s_2(2G+\lambda)}{y_2}\left(-x_6(e^{bs_2} + e^{-bs_2})f_2^i + x_4(e^{bs_2} - e^{-bs_2})f_4^i\right) + \frac{\alpha_n\lambda}{y_1}\left(x_1(e^{bs_1} - e^{-bs_1})d_2^i + \right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_n\lambda}{y_2}\left(x_3(e^{bs_2} - e^{-bs_2})f_2^i + x_6(e^{bs_2} + e^{-bs_2})f_4^i\right)\right.$$

Розглянемо $U_1\left[\Psi_i(y)\right]$:

$$U_1\left[\Psi_i(y)\right]_{1,1} = \frac{s_1}{y_1}\left(2x_1 d_1^i\right) + \frac{s_2}{y_2}\left(2x_3 f_1^i\right) + \frac{\alpha_n}{y_1}\left(2x_5 d_1^i\right) + \frac{\alpha_n}{y_2}\left(2x_6 f_1^i\right)$$
$$U_1\left[\Psi_i(y)\right]_{1,2} = \frac{s_1}{y_1}\left(2x_1 d_2^i\right) + \frac{s_2}{y_2}\left(2x_3 f_2^i\right) + \frac{\alpha_n}{y_1}\left(2x_5 d_2^i\right) + \frac{\alpha_n}{y_2}\left(2x_6 f_2^i\right)$$
$$U_1\left[\Psi_i(y)\right]_{2,1} = \frac{1}{y_1}\left(-2x_5 d_1^i\right) + \frac{1}{y_2}\left(-2x_6 f_1^i\right)$$
$$U_1\left[\Psi_i(y)\right]_{2,2} = \frac{1}{y_1}\left(-2x_5 d_2^i\right) + \frac{1}{y_2}\left(-2x_6 f_2^i\right)$$

Введемо наступні позначення:

$$z_1 = \frac{1}{y_1}\left(e^{bs_1} + e^{-bs_1}\right)\left(s_1 x_1 + \alpha_n x_5\right), \quad z_2 = \frac{1}{y_1}\left(e^{bs_1} - e^{-bs_1}\right)\left(s_1 x_5 - \alpha_n x_2\right),$$
$$z_3 = \frac{1}{y_2}\left(e^{bs_2} + e^{-bs_2}\right)\left(s_2 x_3 + \alpha_n x_6\right), \quad z_4 = \frac{1}{y_2}\left(e^{bs_2} - e^{-bs_2}\right)\left(s_2 x_6 - \alpha_n x_4\right),$$
$$z_5 = \frac{1}{y_1}\left(e^{bs_1} - e^{-bs_1}\right)\left(-s_1(2G+\lambda)x_5 + \alpha_n \lambda x_3\right), \quad z_6 = \frac{1}{y_1}\left(e^{bs_1} + e^{-bs_1}\right)\left(s_1(2G+\lambda)\right.$$
$$z_7 = \frac{1}{y_2}\left(e^{bs_2} - e^{-bs_2}\right)\left(-s_2(2G+\lambda)x_6 + \alpha_n \lambda x_3\right), \quad z_8 = \frac{1}{y_2}\left(e^{bs_2} + e^{-bs_2}\right)\left(s_2(2G+\lambda)\right.$$
$$z_9 = \frac{1}{y_1}\left(2s_1 x_1 + 2\alpha_n x_5\right), \quad z_{10} = \frac{1}{y_2}\left(2s_2 x_3 + 2\alpha_n x_6\right),$$
$$z_{11} = -\frac{2}{y_1}x_5, \quad z_{12} = -\frac{2}{y_2}x_6$$

Враховучи останнє випишем системи відностно невідомих коєфіцієнтів d_k^i, f_k^i, $i = \overline{0,1}$, $k = \overline{1,4}$

$$\begin{cases} z_1 d_1^0 + z_2 d_3^0 + z_3 f_1^0 + z_4 f_3^0 = 1 \\ z_5 d_1^0 + z_6 d_3^0 + z_7 f_1^0 + z_8 f_3^0 = 0 \\ z_9 d_1^0 + z_{10} f_1^0 = 0 \\ z_{11} d_1^0 + z_{12} f_1^0 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} z_1 d_2^0 + z_2 d_4^0 + z_3 f_2^0 + z_4 f_4^0 = 0 \\ z_5 d_2^0 + z_6 d_4^0 + z_7 f_2^0 + z_8 f_4^0 = 1 \\ z_9 d_2^0 + z_{10} f_2^0 = 0 \\ z_{11} d_2^0 + z_{12} f_2^0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 d_1^1 + z_2 d_3^1 + z_3 f_1^1 + z_4 f_3^1 = 0 \\ z_5 d_1^1 + z_6 d_3^1 + z_7 f_1^1 + z_8 f_3^1 = 0 \\ z_9 d_1^1 + z_{10} f_1^1 = 1 \\ z_{11} d_1^1 + z_{12} f_1^1 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} z_1 d_2^1 + z_2 d_4^1 + z_3 f_2^1 + z_4 f_4^1 = 0 \\ z_5 d_2^1 + z_6 d_4^1 + z_7 f_2^1 + z_8 f_4^1 = 0 \\ z_9 d_2^1 + z_{10} f_2^1 = 0 \\ z_{11} d_2^1 + z_{12} f_2^1 = 1 \end{cases}$$

Додаток D

ЗНАХОДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ $v_0(y)$ НЕОДНОРІДНОЇ ЗАДАЧІ

Випадок динамічної задачі

Знайдем $v_0(y)$ розглянувши задачу у просторі трансформант (2.9), (2.10) при $n = 0$, $\alpha_n = 0$. Отримаємо наступну задачу відносно $v_0(y)$:

$$v_0^{''}(y) + \frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)} v_0(y) = \frac{f(y)}{1+\mu_0}$$

Де $f(y) = (\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)) - \frac{\mu_0}{(1+\mu_0)}(\chi_3^{'}(y)cos(\alpha_n a) - \chi_1^{'}(y))$.

Та граничні умови:

$$(2G+\lambda)v_0^{'}(b) = -p_0, \quad v_0(0) = 0, \quad p_0 = \int_0^a p(x)dx$$

Спочатку знайдем фундаментальну базисну систему розв'язків задачі $\psi_0(y)$, $\psi_1(y)$:

$$\psi_i^{''}(y) + \frac{\omega^2}{c_2^2(1+\mu_0)}\psi_i(y) = 0, i = \overline{0,1}$$

$$\begin{cases} \psi_0(0) = 1 \\ \psi_0^{'}(b) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \psi_1(0) = 0 \\ \psi_1^{'}(b) = 1 \end{cases}$$

Розв'язок однорідної задачі відносно $\psi_i(y)$ має вигляд:

$$\psi_i(y) = c_1^i cos\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) + c_2^i sin\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) \tag{6.39}$$

Враховучи граничні умови отримаємо остаточний вигляд $\psi_0(y)$, $\psi_1(y)$:

$$\begin{cases} \psi_0(y) = cos\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) + tg\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}b\right) sin\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) \\ \psi_1(y) = \frac{c_2(1+\mu_0)}{\omega cos\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}b\right)} sin\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) \end{cases}$$

Побудуємо тепер функцію Гріна задачі:

$$g(y,\xi) = \begin{cases} -a_1(\xi)\psi_1(y), 0 \le y < \xi \\ a_0(\xi)\psi_0(y), \xi < y \le b \end{cases}$$

Де $a_0(\xi)$, $a_1(\xi)$ будуть знайдені з наступної системи

$$\begin{cases} a_0(\xi)\psi_0^{'}(\xi) + a_1(\xi)\psi_1^{'}(\xi) = 1 \\ a_0(\xi)\psi_0^{(}\xi) + a_1(\xi)\psi_1(\xi) = 0 \end{cases}$$

Таким чином остаточний розв'язок задачі відносно $v_0(y)$ буде мати наступний вигляд:

$$v_0(y) = \frac{1}{(1+\mu_0)} \int_0^b g(y,\xi) f(\xi) d\xi - \psi_0(y) \frac{p_0}{2G+\lambda}$$

Випадок статичної задачі

У випадку статичної задачі коли $\omega = 0$ отримаємо наступну задачу відносно $v_0(y)$:

$$v_0^{''}(y) = \frac{f(y)}{1+\mu_0}$$

$$(2G+\lambda)v_0^{'}(b) = -p_0, \quad v_0(0) = 0, \quad p_0 = \int_0^a p(x)dx$$

Спочатку знайдем фундаментальну базисну систему розв'язків задачі $\psi_0(y)$, $\psi_1(y)$:

$$\psi_i^{''}(y) = 0, i = \overline{0,1}$$

$$\begin{cases} \psi_0(0) = 1 \\ \psi_0^{'}(b) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \psi_1(0) = 0 \\ \psi_1^{'}(b) = 1 \end{cases}$$

Розв'язок однорідної задачі відносно $\psi_i(y)$ має вигляд:

$$\psi_i(y) = c_1^i + c_2^i y \tag{6.40}$$

Враховучи граничні умови отримаємо остаточний вигляд $\psi_0(y)$, $\psi_1(y)$:

$$\begin{cases} \psi_0(y) = 1 \\ \psi_1(y) = y \end{cases}$$

Побудуємо тепер функцію Гріна задачі:

$$g(y,\xi) = \begin{cases} -a_1(\xi)\psi_1(y), 0 \le y < \xi \\ a_0(\xi)\psi_0(y), \xi < y \le b \end{cases}$$

Де $a_0(\xi)$, $a_1(\xi)$ будуть знайдені з наступної системи

$$\begin{cases} a_0(\xi)\psi_0^{'}(\xi) + a_1(\xi)\psi_1^{'}(\xi) = 1 \\ a_0(\xi)\psi_0^{(}\xi) + a_1(\xi)\psi_1(\xi) = 0 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} a_0(\xi) = -\xi \\ a_1(\xi) = 1 \end{cases}$$

Таким чином остаточний розв'язок задачі відносно $v_0(y)$ буде мати наступний вигляд:

$$v_0(y) = \frac{1}{(1+\mu_0)} \int_0^b g(y,\xi) f(\xi) d\xi - \psi_0(y) \frac{p_0}{2G+\lambda}$$

Додаток Е

ЗНАХОДЖЕННЯ КОЄФІЦІЄНТІВ c_i, $i = \overline{1,4}$

Випадок статичної задачі

Для знаходження коєфіцієтів c_1, c_2, c_3, c_4 випадку статичної задачі (3.9) спочатку знайдем $Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ та $Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$.

$$Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 & \alpha_n \mu_0 y \\ -\alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} c_1(\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2(\alpha_n \mu_0 y) \\ c_1(-\alpha_n \mu_0 y) + c_2(-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) \end{pmatrix}$$

$$Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n \mu_0 y \\ \alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} c_3(\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y) \\ c_3(\alpha_n \mu_0 y) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Введемо позначення $c = \frac{1}{4\alpha_n(1+\mu_0)}$.
Запишем тепер $Z_n(y)$:

$$Z_n(y) = c \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_n y}(\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2 e^{\alpha_n y}(\alpha_n \mu_0 y) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y) \\ \\ c_1 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y) + c_2 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n \mu_0 y) + c_4 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Тепер $Z_n'(y)$:

$$Z_n'(y) = c \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_n y}(\alpha_n^2 \mu_0 y + 2\alpha_n + 2\alpha_n \mu_0) + c_2 e^{\alpha_n y}(\alpha_n^2 \mu_0 y + \alpha_n \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n^2 \mu_0 y + 2\alpha_n + 2\alpha_n \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n^2 \mu_0 y - \alpha_n \mu_0) \\ \\ c_1 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y) + c_2 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n \mu_0 y) + c_4 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Тепер використаєм граничні умови (3.10) та побудуєм алгебричну систему відносно коефіцієнтів.

Використаєм $U_0\left[Z_n(y)\right]$:

$$E_0 * Z_n^{'}(b) + F_0 * Z_n(b) = D_0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G+\lambda \end{pmatrix} * Z_n^{'}(b) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n\lambda & 0 \end{pmatrix} * Z_n(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}$$

Отримаємо перші 2 рівняння системи:

$$\begin{cases} c_1 e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n\mu_0 + \alpha_n) + c_2 e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b - \alpha_n) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n b}(-\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n + \alpha_n\mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n) = 0 \\ \\ c_1 e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b - 2G\alpha_n\mu_0 + 2\lambda\alpha_n) + c_2 e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b + \\ + (2G+\lambda)2\alpha_n) + c_3 e^{-\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b + 2G\alpha_n\mu_0 - 2\lambda\alpha_n) + \\ + c_4 e^{-\alpha_n b}(2G\alpha_n^2\mu_0 b + (2G+\lambda)2\alpha_n) = -cp_n \end{cases}$$

Використаєм $U_1\left[Z_n(y)\right]$:

$$E_1 * Z_n^{'}(0) + F_1 * Z_n(0) = D_1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * Z_n^{'}(0) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * Z_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отримаємо другі 2 рівняння системи:

$$\begin{cases} c_1(\alpha_n + \alpha_n\mu_0) + c_2(-\alpha_n) + c_3(\alpha_n + \alpha_n\mu_0) + c_4(\alpha_n) = 0 \\ \\ c_2(2+\mu_0) + c_4(-2-\mu_0) = 0 \end{cases}$$

Звідси видно, що $c_3 = -c_1$, $c_4 = c_2$. Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} a_1 &= e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n\mu_0 + \alpha_n) - e^{-\alpha_n b}(-\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n + \alpha_n\mu_0), \\ a_2 &= e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b - \alpha_n) + e^{-\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n), \\ a_3 &= e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b - 2G\alpha_n\mu_0 + 2\lambda\alpha_n) - \\ &\quad - e^{-\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b + 2G\alpha_n\mu_0 - 2\lambda\alpha_n) \\ a_4 &= e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b + (2G+\lambda)2\alpha_n) + \\ &\quad + e^{-\alpha_n b}(2G\alpha_n^2\mu_0 b + (2G+\lambda)2\alpha_n) \end{aligned}$$

Враховуючи останнє отримаємо:

$$\begin{cases} c_3 = -c_1 \\ c_4 = c_2 \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0 \\ c_1 a_3 + c_2 a_4 = -cp_n \end{cases} \Leftrightarrow, \quad \begin{cases} c_3 = -c_1 \\ c_4 = c_2 \\ c_1 = -c_2\frac{a_2}{a_1} \\ c_2(a_4 a_1 - a_2 a_3) = -cp_n a_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = cp_n \frac{a_2}{(a_4a_1 - a_2a_3)} \\ c_2 = -cp_n \frac{a_1}{(a_4a_1 - a_2a_3)} \\ c_3 = -cp_n \frac{a_2}{(a_4a_1 - a_2a_3)} \\ c_4 = -cp_n \frac{a_1}{(a_4a_1 - a_2a_3)} \end{cases}$$

Випадок динамічної задачі

Розглянемо випадок динамічної задачі. Введемо наступні позначення

$$x_1 = \alpha_n \mu_0 s_1, \quad x_2 = \alpha_n \mu_0 s_2$$
$$x_3 = s_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}, \quad x_4 = s_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}$$
$$x_5 = s_1^2 - \alpha_n^2(1+\mu_0) + \frac{\omega^2}{c_1^2}, \quad x_6 = s_2^2 - \alpha_n^2(1+\mu_0) + \frac{\omega^2}{c_1^2}$$
$$y_1 = 2s_1(s_1^2 - s_2^2), \quad y_2 = 2s_2(s_2^2 - s_1^2)$$
$$z_1 = \frac{(e^{bs_1} + e^{-bs_1})(s_1x_3 + \alpha_n x_1)}{y_1}, \quad z_2 = \frac{(e^{bs_1} - e^{-bs_1})(s_1x_1 - \alpha_n x_5)}{y_1}$$
$$z_3 = \frac{(e^{bs_2} + e^{-bs_2})(s_2x_4 + \alpha_n x_2)}{y_2}, \quad z_4 = \frac{(e^{bs_2} - e^{-bs_2})(s_2x_4 - \alpha_n x_6)}{y_2}$$
$$z_5 = \frac{(e^{bs_1} - e^{-bs_1})(s_1x_3 - s_1x_1(2G+\lambda))}{y_1}, \quad z_6 = \frac{(e^{bs_1} + e^{-bs_1})(s_1x_5(2G+\lambda) + \alpha_n\lambda x_1}{y_1}$$
$$z_7 = \frac{(e^{bs_2} - e^{-bs_2})(\alpha_n\lambda x_4 - s_2x_2(2G+\lambda))}{y_2}, \quad z_8 = \frac{(e^{bs_2} + e^{-bs_2})(s_2x_6(2G+\lambda) + \alpha_n\lambda}{y_2}$$
$$z_9 = \frac{s_1x_3 + \alpha_n x_1}{y_1}, \quad z_{10} = \frac{s_2x_4 + \alpha_n x_2}{y_2}$$
$$z_{11} = \frac{x_1}{y_1}, \quad z_{12} = \frac{x_2}{y_2}$$

Таким чином отримаємо наступну систему:

$$\begin{cases} z_1c_1 + z_2c_2 + z_3c_3 + z_4c_4 = 0 \\ z_5c_1 + z_6c_2 + z_7c_3 + z_8c_4 = -p_n \\ z_9c_1 + z_{10}c_3 = 0 \\ z_{11}c_1 + z_{12}c_3 = 0 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = 0 z_2c_2 + z_4c_4 = 0 \\ z_6c_2 + z_8c_4 = -p_n \end{cases}, \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = 0 c_2 = -\frac{z_4}{z_2}c_4 \\ z_6c_2 + z_8c_4 = -p_n \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_2 = p_n \frac{z_4}{z_8z_2 - z_4z_6} \\ c_4 = -p_n \frac{z_2}{z_8z_2 - z_4z_6} \end{cases}$$