Diseration

Зміст

Перелік умовних позначень

G - коєфіцієент Ламе
E - молуль Юнга
μ - коєфіцієнт Пуасона
$\mu_0 = \frac{1}{1-2\mu}$
$U_x(x,y) = u(x,y)$ - переміщення по осі x
$U_y(x,y) = v(x,y)$ - переміщення по осі y

1 Напруженний стан прямокутної області

1.1 Постановка задачі

Розглядається пружна прямокутна область, яка займає облась, що описується у декартовій системі координат співвідношенням $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=b} = 0 \tag{1.1}$$

де $p(x)$ відома функція. На бічних гранях виконується умова ідеального контакту

$$u(x,y)|_{x=0}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=0} = 0 \tag{1.2}$$

$$u(x,y)|_{x=a}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{x=a} = 0 \tag{1.3}$$

На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x,y)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=0} = 0 \tag{1.4}$$

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0\left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}\right) = 0 \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0\left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}\right) = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

1.2 Зведеня задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаєм інтегральне перетворення Фур'є по змінній x у до рівнянь (1.5) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y)sin(\alpha_n x) \\ v(x,y)cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a}, n = \overline{1,\infty} \qquad (1.6)$$

Для цього помножим перше та друге рівняння (1.5) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруєм по змінній x на інтервалі $0 \leq x \leq a$. Покрокове інтегрування рівняння (1.5) наведено у (Додаток А). Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - \alpha_n^2 (1+\mu_0) u_n(y) = 0 \\ (1+\mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = 0 \end{cases} \qquad (1.7)$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \Big((2G+\lambda) v_n'(y) + \alpha_n \lambda u_n(y)\Big)\Big|_{y=b} = -p_n \\ \Big(u_n'(y) - \alpha_n v_n(y)\Big)\Big|_{y=b} = 0 \\ v_n(y)|_{y=0} = 0 \\ \Big(u_n'(y) - \alpha_n v_n(y)\Big)\Big|_{y=0} = 0 \end{cases} \qquad (1.8)$$

Де $p_n = \int_0^a p(x) cos(\alpha_n x) dx$

1.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у простосторі трансформант, перепишмо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (1.7) запишемо у наступному вигляді:

$$L_2\left[Z_n(y)\right] = A * Z_n''(y) + B * Z_n'(y) + C * Z_n(y)$$
$$L_2\left[Z_n(y)\right] = 0 \tag{1.9}$$

Де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n\mu_0 \\ \alpha_n\mu_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2(1+\mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix}$$

$$Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (1.8) запишемо у наступному вигляді:

$$U_i\left[Z_n(y)\right] = E_i * Z_n'(b_i) + F_i * Z_n(b_i)$$
$$U_i\left[Z_n(y)\right] = D_i \tag{1.10}$$

Де $i = \overline{0,1}$, $b_0 = b$, $b_1 = 0$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G+\lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n\lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (1.9). Шукати її будем у наступному вигляді:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy} M^{-1}(s)ds \tag{1.11}$$

Де $M(s)$ - характерестична матриця рівняння (1.9), а C - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умовни

$$L_2\left[e^{sy} * I\right] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

$$L_2\left[e^{sy}*I\right]=e^{sy}\left(s^2A*I+sB*I+C*I\right)=$$
$$=e^{sy}\left(\begin{pmatrix}s^2 & 0\\ 0 & s^2(1+\mu_0)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\alpha_n\mu_0 s\\ \alpha_n\mu_0 s & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\alpha_n^2(1+\mu_0) & 0\\ 0 & -\alpha_n^2\end{pmatrix}\right)=$$
$$=e^{sy}\begin{pmatrix}s^2-\alpha_n^2(1+\mu_0) & -\alpha_n\mu_0 s\\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2\end{pmatrix}=>$$

$$M(s)=\begin{pmatrix}s^2-\alpha_n^2(1+\mu_0) & -\alpha_n\mu_0 s\\ \alpha_n\mu_0 s & s^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2\end{pmatrix}\tag{1.13}$$

Знайдемо тепер $M^{-1}(s)=\frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}$.

$$\widetilde{M(s)}=\begin{pmatrix}s^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2 & \alpha_n\mu_0 s\\ -\alpha_n\mu_0 s & s^2-\alpha_n^2(1+\mu_0)\end{pmatrix}\tag{1.14}$$

$$det[M(s)]=(s^2-\alpha_n^2(1+\mu_0))(s^2(1+\mu_0)-\alpha_n^2)+(\alpha_n\mu_0 s)^2=$$
$$=(1+\mu_0)(s-\alpha_n)^2(s+\alpha_n)^2\tag{1.15}$$

В раховучи це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sy}M^{-1}(s)ds=\frac{2\pi i}{2\pi i(1+\mu_0)}\sum_{i=1}^{2}Res\left[e^{sy}\frac{\widetilde{M(s)}}{det[M(s)]}\right]=$$
$$=\frac{1}{(1+\mu_0)}\left(Y_0(y)+Y_1(y)\right)$$

Знайдем $Y_0(y)$

$$Y_0(y)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{sy}}{(s+\alpha_n)^2}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=\alpha_n}=$$
$$=\frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n}\begin{pmatrix}\alpha_n\mu_0 y+2+\mu_0 & \alpha_n\mu_0 y\\ -\alpha_n\mu_0 y & -\alpha_n\mu_0 y+2+\mu_0\end{pmatrix}\tag{1.16}$$

Знайдем $Y_1(y)$

$$Y_1(y) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{sy}}{(s-\alpha_n)^2}\widetilde{M(s)}\right)\Big|_{s=-\alpha_n} =$$
$$= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n}\begin{pmatrix} \alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n\mu_0 y \\ \alpha_n\mu_0 y & -\alpha_n\mu_0 y - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y) = \frac{1}{1+\mu_0}\left(Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}\right) \tag{1.18}$$

Залишилось знайти невідомі коєфіцієнти c_1, c_2, c_3, c_4, використовуючи граничні умови (1.10). Покрокове знаходження коєфіцієнтів наведено у (Додаток B)

2 Додаток A

Помножим перше та друге рівняння (1.5) на $sin(\alpha_n x)$ та $cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруєм по змінній x на інтервалі $0 \leq x \leq a$.

Розглянемо перше рівнняя

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} sin(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} sin(\alpha_n x)dx +$$
$$+\mu_0\left(\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} sin(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} sin(\alpha_n x)dx\right)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n\left(u(x,y)cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a u(x,y)sin(\alpha_n x)dx\right) =$$
$$= -\alpha_n^2 u_n(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^a u(x,y)sin(\alpha_n x)dx = u_n^{''}(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} sin(\alpha_n x)dx = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)dx =$$
$$= -\alpha_n \frac{\partial}{\partial y}\int_0^a v(x,y)cos(\alpha_n x)dx = -\alpha_n v_n^{'}(y)$$

Тоді перше рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) - \alpha_n^2(1+\mu_0)u_n(y) = 0$$

Розлянемо друге рівняння

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} cos(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx +$$
$$+\mu_0 \left(\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} cos(\alpha_n x)dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx\right)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} sin(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \left(v(x,y)sin(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a v(x,y)cos(\alpha_n x)dx \right) =$$
$$= -\alpha_n^2 v_n(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^a v(x,y)cos(\alpha_n x)dx = v_n^{''}(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} cos(\alpha_n x)dx = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} sin(\alpha_n x)dx =$$
$$= \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} cos(\alpha_n x)|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a u(x,y) sin(\alpha_n x)dx = \alpha_n u_n^{'}(y)$$

Тоді друге рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$(1+\mu_0)v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = 0$$

В результаті отримаємо наступну систему рівнянь у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n^{''}(y) - \alpha_n \mu_0 v_n^{'}(y) - \alpha_n^2(1+\mu_0)u_n(y) = 0 \\ (1+\mu_0)v_n^{''}(y) + \alpha_n \mu_0 u_n^{'}(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = 0 \end{cases}$$

3 Додаток В

Для знаходження коєфіцієтів c_1, c_2, c_3, c_4 спочатку знайдем $Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ та $Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$.

$$Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 & \alpha_n \mu_0 y \\ -\alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} c_1(\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2(\alpha_n \mu_0 y) \\ c_1(-\alpha_n \mu_0 y) + c_2(-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) \end{pmatrix}$$

$$Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n \mu_0 y \\ \alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} c_3(\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y) \\ c_3(\alpha_n \mu_0 y) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Введемо позначення $c = \frac{1}{4\alpha_n(1+\mu_0)}$.
Запишем тепер $Z_n(y)$:

$$Z_n(y) = c \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_n y}(\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2 e^{\alpha_n y}(\alpha_n \mu_0 y) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y) \\ \\ c_1 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y) + c_2 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n \mu_0 y) + c_4 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Тепер $Z_n^{'}(y)$:

$$Z_n^{'}(y) = c \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_n y}(\alpha_n^2 \mu_0 y + 2\alpha_n + 2\alpha_n \mu_0) + c_2 e^{\alpha_n y}(\alpha_n^2 \mu_0 y + \alpha_n \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n^2 \mu_0 y + 2\alpha_n + 2\alpha_n \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n^2 \mu_0 y - \alpha_n \mu_0) \\ \\ c_1 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y) + c_2 e^{\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y}(\alpha_n \mu_0 y) + c_4 e^{-\alpha_n y}(-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Тепер використаєм граничні умови (1.10) та побудуєм алгебричну систему відносно коєфіцієнтів.

Використаєм $U_0\left[Z_n(y)\right]$:

$$E_0 * Z_n^{'}(b) + F_0 * Z_n(b) = D_0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G+\lambda \end{pmatrix} * Z_n^{'}(b) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix} * Z_n(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}$$

Отримаємо перші 2 рівняння системи:

$$\begin{cases} c_1 e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n \mu_0 + \alpha_n) + c_2 e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2 \mu_0 b - \alpha_n) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n b}(-\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n + \alpha_n \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n b}(\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n) = 0 \\ \\ c_1 e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2 \mu_0 b - 2G\alpha_n \mu_0 + 2\lambda \alpha_n) + c_2 e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2 \mu_0 b + \\ + (2G+\lambda)2\alpha_n) + c_3 e^{-\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2 \mu_0 b + 2G\alpha_n \mu_0 - 2\lambda \alpha_n) + \\ + c_4 e^{-\alpha_n b}(2G\alpha_n^2 \mu_0 b + (2G+\lambda)2\alpha_n) = -cp_n \end{cases}$$

Використаєм $U_1\left[Z_n(y)\right]$:

$$E_1 * Z_n^{'}(0) + F_1 * Z_n(0) = D_1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} * Z_n^{'}(0) + \begin{pmatrix}0 & -\alpha_n\\ 0 & 1\end{pmatrix} * Z_n(0) = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

Отримаємо другі 2 рівняння системи:

$$\begin{cases} c_1(\alpha_n + \alpha_n\mu_0) + c_2(-\alpha_n) + c_3(\alpha_n + \alpha_n\mu_0) + c_4(\alpha_n) = 0 \\ \\ c_2(2+\mu_0) + c_4(-2-\mu_0) = 0 \end{cases}$$

Звідси видно, що $c_3 = -c_1$, $c_4 = c_2$. Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}
&a_1 = e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n\mu_0 + \alpha_n) - e^{-\alpha_n b}(-\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n + \alpha_n\mu_0),\\
&a_2 = e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b - \alpha_n) + e^{-\alpha_n b}(\alpha_n^2\mu_0 b + \alpha_n),\\
&a_3 = e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b - 2G\alpha_n\mu_0 + 2\lambda\alpha_n) -\\
&\quad - e^{-\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b + 2G\alpha_n\mu_0 - 2\lambda\alpha_n)\\
&a_4 = e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2\mu_0 b + (2G+\lambda)2\alpha_n) +\\
&\quad + e^{-\alpha_n b}(2G\alpha_n^2\mu_0 b + (2G+\lambda)2\alpha_n)
\end{aligned}$$

Враховуючи останнє отримаємо:

$$\begin{cases} c_3 = -c_1 \\ c_4 = c_2 \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0 \\ c_1 a_3 + c_2 a_4 = -cp_n \end{cases} \Leftrightarrow, \quad \begin{cases} c_3 = -c_1 \\ c_4 = c_2 \\ c_1 = -c_2\frac{a_2}{a_1} \\ c_2(a_4 a_1 - a_2 a_3) = -cp_n a_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = cp_n\frac{a_2}{(a_4a_1 - a_2a_3)} \\ c_2 = -cp_n\frac{a_1}{(a_4a_1 - a_2a_3)} \\ c_3 = -cp_n\frac{a_2}{(a_4a_1 - a_2a_3)} \\ c_4 = -cp_n\frac{a_1}{(a_4a_1 - a_2a_3)} \end{cases}$$