

# АНОТАЦІЯ

*Пожиленьков О. В.* Плоскі мішані задачі теорії пружності для прямокутної області. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового доктора філософії за спеціальністю 113 «Прикладна математика» (11 – «Математика та статистика»). – Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, 2023.

Розв'язано плоскі мішані задачі теорії пружності для пружної прямокутної області яка піддається впливу статичних та динамічних навантажень. Шляхом застосування інтегрального скінченного  $\sin$ -та  $\cos$ -перетворення Фур'є вихідну задачу зведено до одновимірної крайової задачі, яку у просторі трансформант переформульовано у вигляді векторної крайової задачі. Розв'язок цієї задачі побудовано як суперпозицію загального розв'язку однорідного векторного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Розв'язок однорідного векторного рівняння отримано за допомогою матричного диференціального числення і зображено за допомогою фундаментальної матричної системи розв'язків відповідного однорідного матричного рівняння. Частковий розв'язок неоднорідного векторного рівняння знайдено за допомогою зображення матриці-функція Гріна. Застосування оберненого перетворення Фур'є та реалізація відокремлення слабо-збіжних частин інтегралу подає поле переміщень та напружень через невідому функцію - граничне значення переміщень по торцю прямокутної області. Для її знаходження за умови виконання крайової умови отримано сингулярне інтегральне рівняння яке розв'язано за допомогою метода ортогональних поліномів. Було проведено дослідження напруженого стану середовища

за різних типів навантаження та різних геометричних розмірів прямокутної області.

*Ключові слова:* прямокутна область, динамічна задача, перетворення Фур'є, матриця-функція Гріна, сингулярне інтегральне рівняння, метод ортогональних поліномів.

## ABSTRACT

*Pozhylenkov O. V.* Plane mixed problems of elasticity for a rectangular domain - Manuscript.

A dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the field of 113 «Applied Mathematics» (11 - «Mathematics and Statistics») - Odessa I.I. Mechnikov National University, Odessa, 2023.

The plane mixed boundary value problems of theory elasticity were solved for an elastic rectangular domain subjected to static and dynamic loads. By applying the integral finite sin-cos Fourier transformation, the original problem was reduced to a one-dimensional boundary value problem, which was reformulated in the form of a vector boundary value problem. The solution to this problem was constructed as a superposition of the general solution of the homogeneous vector equation and the particular solution of the nonhomogeneous equation. The solution of the homogeneous vector equation was obtained using matrix differential calculus and represented using the fundamental matrix solution system of the corresponding homogeneous matrix equation. The particular solution of the nonhomogeneous vector equation was found using the Green's matrix function representation. The application of inverse Fourier transformation and the realization of the separation of weakly convergent parts of the integral provide the field of displacements and stresses through an unknown function - the boundary value of displacements

along the end of the rectangular region. To find this function under the boundary condition, a singular integral equation was derived and solved using the method of orthogonal polynomials. The stress state of the medium was investigated for various types of loading and different geometric dimensions of the rectangular region.

*Key words:* rectangular domain, dynamic problem, Fourier transformation, matrix Green's function, singular integral equation, method of orthogonal polynomials.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. D. Nerukh, O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2019) Mixed plain boundary value problem of elasticity for a rectangular domain. 25-th International Conference Engineering Mechanics. 2019, May 13-16, Svratka, Czech Republic. p. 255
2. O. V. Pozhylenkov (2019) The stress state of a rectangular elastic domain. Researches in Mathematics and Mechanics, Volume 24, Issue 2(34), pp. 88-96
3. Пожиленков О. В. Вайсфельд Н. Д. (2019) Мішана крайова задача теорії пружності для прямокутної області. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур, випуск 5, Львів, ст. 30-32
4. O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2020) Stress state of a rectangular domain with the mixed boundary conditions. Procedia Structural Integrity, Volume 28, pp. 458-463
5. O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2021) Stress state of an elastic rectangular

domain under steady load. *Procedia Structural Integrity*, Volume 33, pp. 385-390

6. O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2022) Dynamic mixed problem of elasticity for a rectangular domain. *Recent trends in Wave Mechanics and Vibrations*, pp. 211-218

# Зміст

|  |           |
|--|-----------|
| Перелік умовних позначень  | 8         |
| Вступ  | 9         |
| <b>1 Огляд літератури</b>  | <b>16</b> |
| 1.1 Чисельні методи розв’язання задач теорії пружності .   | 17        |
| 1.2 Аналітичні методи розв’язання задач теорії пружності   | 18        |
| 1.3 Висновки до другого розділу . . . . .  | 20        |
| <b>2 МЕТОДИКА ПОБУДОВИ РОЗВ’ЯЗКІВ МІШАНИХ<br/>ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ<br/>ОБЛАСТІ</b>                     | <b>21</b> |
| 2.1 Загальна постановка задачі . . . . .   | 21        |
| 2.2 Зведення вихідної задачі до задачі у просторі транс-<br>формант . . . . .  | 23        |
| 2.3 Побудова матричної функції Гріна . . . . .   | 28        |
| 2.4 Загальна схема розв’язку сингулярного інтегрального<br>рівняння . . . . .  | 30        |
| 2.5 Висновки до другого розділу . . . . .  | 31        |
| <b>3 МІШАНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯ-<br/>МОКУТНОЇ ОБЛАСТІ ЗА УМОВ ІДЕАЛЬНОГО КОН-<br/>ТАКТУ НА БІЧНИХ ГРАНЯХ</b> | <b>33</b> |
| 3.1 Статична задача теорії пружності для прямокутної обла-<br>сті за умов ідеального контакту на бічних гранях . .       | 33        |
| 3.1.1 Постановка задачі . . . . .  | 33        |
| 3.1.2 Побудова точного розв’язку вихідної задачі . .   | 34        |
| 3.2 Динамічна задача теорії пружності для прямокутної<br>області за умов ідеального контакту на бічних гранях            | 38        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 3.2.1    | Постановка задачі . . . . .   | 38        |
| 3.2.2    | Побудова точного розв'язку вихідної задачі . .  | 39        |
| 3.3      | Висновки до третього розділу . . . . .  | 45        |
| <b>4</b> | <b>МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛА-</b><br><b>СТІ ЗА УМОВ ДРУГОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ТЕО-</b><br><b>РІЇ ПРУЖНОСТІ НА БІЧНИХ ГРАНЯХ</b> | <b>46</b> |
| 4.1      | Статична задача для прямокутної області за умов дру-<br>гої основної задачі теорії пружності на бічних гранях                         | 46        |
| 4.1.1    | Постановка задачі . . . . .   | 46        |
| 4.1.2    | Розв'язання векторної крайовою задачі у про-<br>сторі трансформант . . . . .  | 47        |
| 4.1.3    | Розв'язання сингулярного інтегрального рівнян-<br>ня задачі . . . . .   | 53        |
| 4.2      | Динамічна задача для прямокутної області за умов<br>другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях                          | 54        |
| 4.2.1    | Постановка задачі . . . . .   | 54        |
| 4.2.2    | Розв'язання векторної крайової задачі у про-<br>сторі трансформант . . . . .  | 55        |
| 4.2.3    | Розв'язання сингулярного інтегрального рівнян-<br>ня задачі . . . . .   | 60        |
| 4.3      | Висновки до четвертого розділу розділу . . . . .  | 61        |
| <b>5</b> | <b>ЧИСЛОВІ РОЗРАХУНКИ ТА ЇХ АНАЛІЗ</b>  | <b>62</b> |
|          | <b>Висновки</b>   | <b>62</b> |
|          | <b>Додаток В ЗНАХОДЖЕННЯ КОРЕНІВ РІВНЯН-</b><br><b>НЯ <math>\det[M(s)] = 0</math></b>   | <b>68</b> |
|          | <b>Додаток С ЗНАХОДЖЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ</b>  |           |

|  |    |
|--|----|
| БАЗИСНИХ МАТРИЦЬ $\Psi_i(y)$ , $i = \overline{0, 1}$ | 70 |
|--|----|

|   |    |
|---|----|
| Додаток D ЗНАХОДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ $v_0(y)$ НЕО-<br>ДНОРІДНОЇ ЗАДАЧІ | 81 |
|---|----|

|   |    |
|---|----|
| Додаток E ЗНАХОДЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ $c_i$ , $i =$<br>$\overline{1, 4}$ | 84 |
|---|----|

## Перелік умовних позначень

$G$  - модуль зсуву

$E$  - модуль Юнга

$\mu$  - коефіцієнт Пуасона

$c_1, c_2$  - швидкості хвилі

$\omega$  - частота

$$\mu_0 = \frac{1}{1-2\mu}$$

$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$  - коефіцієнт Ламе

$U_x(x, y) = u(x, y)$  - переміщення по осі  $x$

$U_y(x, y) = v(x, y)$  - переміщення по осі  $y$



# Вступ

**Актуальність роботи.** Прямокутна пружна область є одним з найбільш простих об'єктів для аналізу і моделювання у механіці пружного тіла. Для багатьох застосувань прямокутна форма може бути використана як апроксимація більш складних об'єктів, наприклад: в інженерних розрахунках прямокутні пластини використовують для моделювання деталей конструкцій з більш складними формами, такими як пластини з отворами та вирізами. Прямокутна форма може бути застосована для різних типів задач, а саме: для моделювання пружного деформування у твердих тілах, дослідження розподілу напружень та деформацій у матеріалах, а також для розв'язання задач пов'язаних з пружністю у біологічних та геологічних системах. Саме тому, завдяки широкому спектру застосувань, розробка аналітичних методів розв'язання задач для прямокутної пружної області залишається актуальною задачею.

Аналіз літератури виявив достатню кількість мішаних задач пружності для прямокутника, які розв'язані за допомогою аналітичних та числових методів. Незважаючи на це, питання поведінки механічних характеристик у кутових точках, питання встановлення якісної поведінки хвильових полів усередині прямокутної області за умов динамічного навантаження залишається відкритим. Цим обумовлено актуальність запропонованого дослідження, що полягає у розробці нового аналітичного підходу до розв'язання мішаних задач для прямокутної області.

**Мета і задачі дослідження.** Метою цього дослідження є розробка нового підходу до розв'язання плоских мішаних задач теорії пружності для прямокутної області, що надає можливість встановити важливі особливості розподілу напружень та переміщень.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

1. розвиток методики, яка використовує застосування методу інтегральних перетворень разом з методами розв'язання векторних крайових задач теорії пружності та використання матриці-функції Гріна.
2. побудова аналітичного розв'язку задачі для прямокутної області, що піддається впливу зовнішнього статичного навантаження за умови виконання різних граничних умов на її бокових торцях.
3. розв'язання динамічної задачі пружності для прямокутної області з метою встановлення закономірностей розподілу хвильових полів та динамічних напружень.

**Об'єктом дослідження є** пружна прямокутна область під впливом зовнішнього навантаження різної природи (статичного та динамічного).

**Предметом дослідження є** закономірності зміни напружено-деформованого стану та хвильового поля прямокутної області в залежності від видів навантаження та крайових умов.

**Методи дослідження.** У дисертаційній роботі розв'язання динамічних та статичних задач теорії пружності для прямокутної області було проведено методом інтегральних перетворень, який застосовано безпосередньо до рівнянь рівноваги. Для розв'язання векторної крайової задачі у просторі трансформант побудовано матричну функцію Гріна. Отримані в роботі сингулярні інтегральні рівняння розв'язані за допомогою методу ортогональних многочленів, з метою урахування реальної особливості невідомою функції на кінцях

інтервалів інтегрування.

**Обґрунтованість та достовірність отриманих результатів** забезпечується: використання точних математичних формулювань задач у лінійній механіці суцільного тіла та механіці руйнування; використання перевірених і строгих аналітичних методів для отримання розв'язків сформульованих задач; фізичною інтерпретацією результатів розрахунків задач. Отримані результати збігаються з відомими результатами теоретичних досліджень.

**Наукова новизна** отриманих результатів полягає в наступному:

- вперше застосовано нову методику розв'язання динамічних та статичних задач теорії пружності для прямокутної області, що ґрунтується на безпосередньому перетворенні рівнянь Ламе. Цей підхід дозволив отримати аналітичні подання для полів переміщень та напружень;
- побудовано матричну функцію Гріна, що дозволило звести вихідні задачі для прямокутної області до розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь. Встановлено нові особливості залежності полів переміщень та напружень від параметрів навантаження та крайових умов на торцях прямокутної області;
- отримано аналітичні розв'язки динамічної задачі пружності для прямокутної області та досліджено залежність хвильових полів від типу навантаження та геометричних розмірів області

**Особистий внесок здобувача.** Основні результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самотійно. У роботах у співавторстві [29, 30, 31, 34, 36, 38], науковому керівнику належить постановка задач, вибір методики їх розв'язання. Дисертантом проведено

огляд літератури, виконано усі математичні перетворення при побудові розв'язків, здійснено програмну реалізацію та проведено аналіз отриманих результатів.

### **Апробація результатів дисертації.**

Результати досліджень, які були включені до дисертаційної роботи, були представлені та обговорені на міжнародних наукових конференціях різного рівня: конференція «Актуальные вопросы и перспективы развития транспортного и строительного комплексов» (Гомель, 2018), X Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Львів, 2019), 25-th international conference «Engineering Mechanics 2019» (Svratka, 2019), «1st Virtual European Conference on Fracture» (Italy, 2020), «26th International Conference on Fracture and Structural Integrity» (Turin, 2021), «10th International Conference on Wave Mechanics and Vibrations» (Lisbon, 2022).

У повному обсязі робота доповідалась на

- науковому семінарі «Мішані задачі математичної фізики» кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І.І. Мечникова під керівництвом к.ф.-м.н., доц. Ю.С. Процєрова.

**Публікації.** Основні наукові положення дисертаційного дослідження відображено у 6 публікаціях з яких: дві статті [30, 31] опубліковано у провідних фахових виданнях України, що входять у перелік ДАК України, статті [29, 34, 36, 38] прореферовано у міжнародній наукометричній базі Scopus.

**Структура і обсяг дисертації.** Робота складається зі вступу, 4 розділів, висновків, списку використаної літератури, що включає ?? найменування. Загальний обсяг дисертації становить ?? сторінок,

із них ?? сторінок основного тексту. Робота містить ?? рисунків та ?? таблицю.

У *вступі* аргументовано актуальність теми дисертації; поставлено мету та завдання дослідження; наведено методи розв'язання поставлених задач; розкрито новизну і достовірність отриманих результатів, їх практичне та теоритичне значення; представлено відомості про апробацію роботи, публікації та особистий внесок здобувача.

У *першому розділі* проведено огляд наукових робіт за темою дисертаційного дослідження, а саме проаналізовано математичні методи розв'язання плоских мішаних задач теорії пружності для прямокутної області. Аналіз літератури показав, що незважаючи на досить широке коло публікацій аналітичним методам розв'язання задач для пружної прямокутної області присвячена не велика кількість робіт. Залишається актуальним дослідження розподілу хвильових полів напружень, особливості їх змін в залежності від доданого навантаження та геометричних розмірів області.

У *другому розділі* сформульовано загальну постановку плоских мішаних динамічних крайових задач теорії пружності для прямокутної області та продемонстровано методику побудови їх розв'язків. Наведено підхід, за яким отримано точний розв'язок векторної крайової задачі у просторі трансформант Фур'є. Точний розв'язок розшукано у вигляді суперпозиції однорідного та частинного розв'язків векторного рівняння. Методами контурного інтегрування побудовано фундаментальну матрицю для відповідного однорідного векторного рівняння. Частинний розв'язок векторного рівняння виписано за допомогою матричної функції Гріна, методику знаходження якої продемонстровано.

Теоретичні засади другого розділу застосовано у *третьому роз-*

*дилі*, де розв'язано динамічну та статичну задачі теорії пружності за умов ідеального контакту на бічних гранях прямокутника. Вихідну задачу зведено до одновимірної крайової задачі у просторі трансформант за допомогою використання інтегральних скінченних  $\sin$ - та  $\cos$ -перетворень Фур'є. Одновимірну задачу переформульовано у векторному поданні. Розв'язок вихідної задачі для статичного випадку навантаження знайдено у точному вигляді після застосування оберненого перетворення Фур'є.

Для випадку динамічного навантаження на прямокутну область за аналогічним підходом, шляхом зведення задачі до одновимірної та використання апарату матричного числення, виписані формули хвильового поля прямокутника.

Наведено числовий аналіз напруженого стану та хвильового поля прямокутної області за різних типів статичних та динамічних навантажень за різних геометричних розмірів області.

Умови другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях прямокутника задано при формулюванні постановок статичних та динамічних задач *четвертого розділу*. Методика розв'язання, що описана у другому розділі, застосовано за аналогічною процедурою. Це звело поставлену задачу до сингулярного інтегрального рівняння. З метою застосування методу ортогональних поліномів було проведено відокремлення слабо збіжної частини ядра. Стандартна схема методу ортогональних поліномів дозволила звести отримане сингулярне інтегральне рівняння, як у статичній так і у динамічій постановках, до нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь.

Проведено аналіз хвильових полів прямокутної області в залежності від частоти прикладеного навантаження та геометричних розмірів пружного прямокутника.

У *висновках* сформульовано отримані результати та наведено

основні якісні та кількісні залежності хвильових та статичних полів від геометричних параметрів прямокутної області, характеру та частоти навантаження.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана в рамках держбюджетної теми Одеського національного університету імені І. І. Мечникова «Статичні та динамічні задачі для тіл канонічної форми з дефектами» (2021-2024 рр., реєстраційний номер 0121U111664).

**Теоретичне і практичне значення одержаних результатів.** Запропонована методика розв'язання мішаних динамічних задач теорії пружності для прямокутної області має теоретичне значення для подальшого розвитку математичних методів аналізу напруженого стану тіл під час статичних та динамічних навантажень. вирішення плоских задач теорії пружності. Отримані результати стали складовою частиною учбового курсу «Теорія пружності», що викладається студентам, які навчаються за спеціальністю «Прикладна математика», під час виконання магістерських робіт. Отримані результати можуть знайти застосування в геомеханіці, будівництві конструкцій, вивченні міцності елементів транспортних засобів та тощо.

# 1 Огляд літератури

Дослідження властивостей різних природних матеріалів цікавило людство, ще з далеких часів, в основному для вирішення проблем будівництва. У ХІХ столітті почало активно розвиватись дослідження напружено-деформованого стану пружних тіл та залишається актуальним в наші часи. Це обґрунтовується великим попитом з боку інженерних галузь. Під час експлуатації різноманітних виробів, від автомобілів до літаків та різних будівельних конструкцій, вони піддаються різним механічним впливам. Тому при використанні різних матеріалів важливо враховувати їх міцність та пружні властивості. Які можливо отримати шляхом аналізу напружено-деформованого стану математичних моделей. Одним з таких моделей є пружна прямокутна область. Тому розробка математичних методів для дослідження напружено-деформованого стану лишається актуальною проблемою.

Класичні загальні підходи до знаходження аналітичного розв'язку задач теорії пружності наведено у монографіях В. Новацького, В. Т. Грінченка, В. В. Мелешка, В. М. Вігака, М. Й. Юзвяка, В. А. Ясинського, Ю. В. Токового, Г. Я. Попова [1, 4, 2, 3, 11]. Розвинення та вдосконалення цих підходів досліджено у роботах Я. О. Жука, О. К. Остоса, Р. М. Кушніра, Л. А. Фільштінського, Ю. В. Шрамко [5, 6, 10] Дослідженню та розв'язанню сингулярних інтегральних рівнянь розглянуто у працях М. Г. Крейна, З. Ю. Журавльової, В. Г. Попова [7, 8, 9].



## 1.1 Чисельні методи розв'язання задач теорії пружності

Спочатку розглянемо праці присвячені чисельним методам розв'язання задач теорії пружності для того, щоби порівняти їх ефективність з аналітичним підходом побудови розв'язку.

Однією за класичних робіт у цій сфері є [12], що є розвиненням ідеї запропонованої у [13]. Розглянуто методи скінченних елементів, що застосовані до задач теорії пружності з деякими обмеженнями на рух. Особлива увага приділяється методам штрафів. Наведено обговорення умов, необхідних для того, щоби методи штрафів забезпечували стійкість та збіжність методів скінченних елементів. Зокрема, розглядається використання методів зі зменшеним інтегруванням і описані критерії для порядку правил інтегрування, достатніх для отримання стійких та збіжних схем. Наведено приклади застосування методів зі зменшеним інтегруванням та штрафів до задач інкомпресібельної еластичності та задач контакту.

Maurizio A. [14] представлено метод скінченних елементів для аналізу двовимірних задач теорії пружності. Запропонована дискретизація базується на біквадратичній інтерполяції компонентів переміщення та використовує переваги забезпечення безперервності між елементами для отримання сприятливого зменшення загальної кількості ступенів свободи.

У праці [15] пропонується вдосконалена схема методу найменших квадратів (IMLS). Обговорено метод найменших квадратів (MLS), який може призводити до погано обумовленої системи рівнянь, що призводить до неправильного отримання розв'язку. В IMLS використовується ортогональна система функцій з ваговою функцією як базисна функція. IMLS має вищу обчислювальну ефективність

і точність, ніж класичний метод найменших квадратів (MLS), і не призводить до погано обумовлених систем рівнянь. Шляхом поєднання методу граничних елементів і методу IMLS, був представлений безсітковий метод граничних елементів (BEFM).

Dongyang Shi, Minghao Li [16] розглянуто лінійна задача пружності на основі варіаційного принципу Геллінгера-Рейснера. *За допомогою інтерполяції Клемана, інтегральної тотожності та відповідних технік післяобробки, встановлено властивості суперзбіжності  $O(h^2)$  напружень та переміщень.*

Головчан В. Т. [17] побудував алгоритм вирішення плоских задач теорії пружності для прямокутної області. Алгоритм ґрунтується на комплекснозначному представленні загального розв'язку диференціальних рівнянь та використанні поліномів Лагранжа для задоволення крайових умов. Стверджується, що це, можливо, найпростіший спосіб розв'язання крайових задач цього класу.

Як бачимо чисельні методи мають велику популярність у використанні та реалізації у багатьох чисельних програмних реалізаціях, котрі доволі зручні у використанні в інженерній сфері. Але якщо потрібно здійснити розрахунок напружень прямокутної області поблизу кутових точок, то, як відомо, чисельні методи втрачають свою ефективність.

## **1.2 Аналітичні методи розв'язання задач теорії пружності**

Проаналізуємо тепер аналітичні підходи для розв'язання мішаних задач для прямокутної області.

У праці [18] розглянуто загальний випадок задачі прямокутного еластичного тіла у випадку плоскої деформації, коли дві паралель-

ні грані несуть нульове навантаження, а змішані умови задані на решту сторін. Задача сформульована у вигляді системи двох інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Тип змішаних крайових умов може виникнути через стиснення гладкими штампами або через деякий періодичний розподіл системи тріщин у нескінченно довгій смузі.

М. Д. Коваленко [19] отримано формули, що описують точний розв'язок крайової задачі теорії пружності для прямокутної області, в якій дві протилежні (горизонтальні) грані є вільними, а напруження задані на інших двох сторонах (кінцях прямокутника). Також наведені формули для напівсмузи. Розв'язки представлені у вигляді рядів за власними функціями Папковича-Фадле, коефіцієнти яких визначаються з простих формул. Отримані формули залишаються такими ж для інших типів однорідних крайових умов, наприклад, коли горизонтальні сторони прямокутника міцно закріплені, мають підкріплювальні ребра, які працюють на розтяг чи згинання тощо.

Bantsuri R. [20] досліджено мішану задачу теорії пружності для прямокутника, який послаблено отворами, коли дотичні напруження на зовнішній границі дорівнюють нулю, а нормальні зсуви постійні, тоді як дотичні напруження на отворах дорівнюють нулю, а нормальні напруження постійні. Знайдено границі отворів коли умови дотичного нормального напруження дорівнюють константам. Використовуючи методи теорії аналітичних функцій, розв'язок знаходиться у квадратурах.

У дослідженні [21] розглянуто тривимірну задачу пружності для прямокутної пластини, яка піддається поперечному навантаженню. Модуль Юнга пластини вважається змінним експоненційно по товщині, а коефіцієнт Пуассона припускається сталим. Використано загальний розв'язок Плевако рівнянь рівноваги для неоднорідних ізо-

тропних середовищ.

Роботу [3] присвячено встановленню необхідних умов існування розв'язку для плоскої задачі теорії пружності для прямокутної області з заданими зовнішніми крайовими та об'ємними силами. Побудовано елементарні розв'язки, що задовольняють принципам Сен-Венана та принципу суперпозиції.

### 1.3 Висновки до другого розділу

Як проаналізовано в цьому розділі, два основних підходи використовуються для задач теорії пружності: чисельний та аналітичний. Вибір між ними обумовлюється поданням граничних умов.

У данній дисертаційній роботі наведена методика, запропонована Г. Я. Поповим [22], в якій застосування інтегральних перетворень безпосередньо до рівнянь рівноваги та крайових умов дозволило звести вихідну задачу до одновимірної задачі у просторі трансформант. Яку в подальшому зведено та розв'язано у векторній формі [23]. Розв'язок отримного сингулярного інтегрального рівняння побудовано за допомогою методу ортогональних поліномів [25].

Згідно з аналізом наукової літератури, не дивлячись на значну кількість проведених досліджень у напрямку мішаних задач теорії пружності для прямокутої області, залишається багато не вирішених питань, зокрема знаходження аналітичного розв'язку динамічних задач теорії пружності для прямокутника. Цим і доводиться актуальність данної теми дослідження.

## 2 МЕТОДИКА ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНО- СТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ

У даному розділі наведено теоретичні засади підходу, який використовується для розв'язання мішаних задач теорії пружності для прямокутної області. Він базується на зведенні вихідної задачі, шляхом застосування методу інтегральних перетворень, до одновимірної задачі у просторі трансформант. Побудова матричної функції Гріна та розв'язання відповідних крайових задач надає можливість отримати аналітичний розв'язок поставленої задачі. Матеріал цього розділу викладено у працях [29], [30], [31], [34], [36], [38].

### 2.1 Загальна постановка задачі

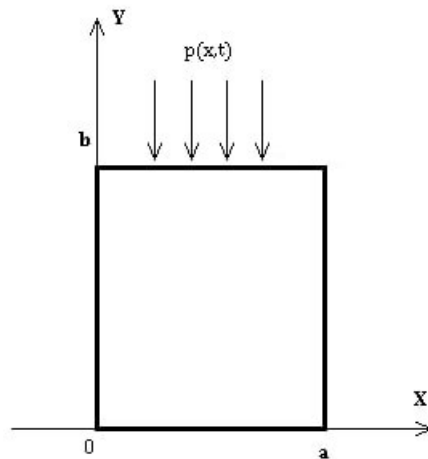


Рис. 2.1: Геометрія задачі

Розглядається пружний прямокутник (Рис: 2.1), який займає область, що у декартовій системі координат описується співвідно-

шеннями  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ .

До прямокутної області по грані  $y = b$  додане нормальне навантаження

$$\widetilde{\sigma}_y(x, y, t)|_{y=b} = -p(x, t), \quad \widetilde{\tau}_{xy}(x, y, t)|_{y=b} = 0, \quad (2.1)$$

де  $\widetilde{p}(x, t)$  відома функція,  $t$  - час. По нижній грані виконуються умови ідеального контакту

$$\widetilde{v}(x, y, t)|_{y=0}, \quad \widetilde{\tau}_{xy}(x, y, t)|_{y=0} = 0 \quad (2.2)$$

На бічних гранях  $x = 0$  та  $x = a$  граничні умови подано у формі

$$\widetilde{U}_1[\widetilde{f}(x, y, t)] = 0, \quad \widetilde{U}_2[\widetilde{f}(x, y, t)] = 0, \quad (2.3)$$

де

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_1[\widetilde{f}(x, y, t)] &= \left[ \alpha_1 \widetilde{f}(x, y, t) + \beta_1 \frac{\partial \widetilde{f}(x, y, t)}{\partial x} \right] \Big|_{x=0}, \\ \widetilde{U}_2[\widetilde{f}(x, y, t)] &= \left[ \alpha_2 \widetilde{f}(x, y, t) + \beta_2 \frac{\partial \widetilde{f}(x, y, t)}{\partial x} \right] \Big|_{x=a}, \end{aligned}$$

- граничні функціонали у загальному зображенні (для кожної конкретної задачі вони будуть деталізовані),  $\widetilde{f}(x, y, t) = (\widetilde{u}(x, y, t), \widetilde{v}(x, y, t))^T$  - вектор переміщень.

Переміщення усередині прямокутника мають задовільняти рівняння Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \widetilde{u}(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}(x, y, t)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 \widetilde{u}(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{v}(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right) = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \widetilde{u}(x, y, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \widetilde{v}(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{v}(x, y, t)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 \widetilde{u}(x, y, t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \widetilde{v}(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \widetilde{v}(x, y, t)}{\partial t^2} \end{cases} \quad (2.4)$$

Тут і далі розглянуто постановки задач у випадку гармонічних коливань

$$\widetilde{u}(x, y, t) = u(x, y)e^{i\omega t}, \quad \widetilde{v}(x, y, t) = v(x, y)e^{i\omega t}, \quad \widetilde{p}(x, y, t) = p(x, y)e^{i\omega t} \quad (2.5)$$

З урахуванням подання переміщень (2.5) рівняння рівноваги переформульовано:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{\omega^2}{c_1^2} u(x,y) \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} \right) = -\frac{\omega^2}{c_2^2} v(x,y) \end{cases} \quad (2.6)$$

Граничні умови набувають вигляду:

$$\begin{cases} \sigma_y(x,y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=b} = 0 \\ v(x,y)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x,y)|_{y=0} = 0 \\ U_1[f(x,y)] = 0, \quad U_2[f(x,y)] = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Потрібно відшукати хвильове поле пружного прямокутника, що задовольняє крайову задачу (2.6), (2.7).

## 2.2 Зведення вихідної задачі до задачі у просторі трансформант

Для зведення вихідної задачі до одновимірної задачі до рівнянь (2.6) застосовано інтегральне перетворення Фур'є за змінною  $x$ :

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y) \sin(\alpha_n x) \\ v(x,y) \cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (2.8)$$

Для цього перше та друге рівняння (2.6) помножено відповідно на  $\sin(\alpha_n x)$  та  $\cos(\alpha_n x)$  та проінтегровано за змінною  $x$  на інтервалі  $0 \leq x \leq a$ .

Тоді у просторі трансформант маємо:

$$\left\{ \begin{aligned} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - (\alpha_n^2 + \alpha_n^2 \mu_0 - \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) = \\ = \alpha_n (1 + \mu_0) (\chi_3(y) \cos(\alpha_n a) - \chi_1(y)) \\ (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - (\alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = \\ = (\frac{\alpha_2}{\beta_2} \chi_4(y) \cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \chi_2(y)) - \mu_0 (\chi_3'(y) \cos(\alpha_n a) - \chi_1'(y)) \end{aligned} \right. \quad (2.9)$$

Тут  $\chi_1(y) = u(0, y)$ ,  $\chi_2(y) = v(0, y)$ ,  $\chi_3(y) = u(a, y)$ ,  $\chi_4(y) = v(a, y)$ .

Після застосування інтегрального перетворення (2.8) до крайових умов (2.7) отримано подання крайових умов у просторі трансформант:

$$\left\{ \begin{aligned} ((2G + \lambda) v_n'(y) + \alpha_n \lambda u_n(y))|_{y=b} &= -p_n, \\ (u_n'(y) - \alpha_n v_n(y))|_{y=b} &= 0, \\ v_n(y)|_{y=0} &= 0, \\ (u_n'(y) - \alpha_n v_n(y))|_{y=0} &= 0, \end{aligned} \right. \quad (2.10)$$

де  $p_n = \int_0^a p(x) \cos(\alpha_n x) dx$ .

Для того щоб розв'язати задачу у просторі трансформант, її переписано у векторній формі.

$$L_2 [Z_n(y)] = F_n(y), \quad (2.11)$$

де  $L_2$  - диференціальний оператор другого порядку

$$L_2 [Z_n(y)] = A * Z_n''(y) + B * Z_n'(y) + C * Z_n(y), \quad (2.12)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix}, \quad Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix},$$

$$F_n(y) = \begin{pmatrix} \alpha_n(1 + \mu_0)(\chi_3(y)\cos(\alpha_n a) - \chi_1(y)) \\ (\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)\cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)) - \mu_0(\chi_3'(y)\cos(\alpha_n a) - \chi_1'(y)) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (2.10) записано у зображенні:

$$U_i [Z_n(y)] = D_i, \quad (2.13)$$

де  $i = \overline{0, 1}$ ,  $b_0 = b$ ,  $b_1 = 0$

$$U_i [Z_n(y)] = E_i * Z_n'(b_i) + F_i * Z_n(b_i), \quad (2.14)$$

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Загальний розв'язок векторної одновимірної неоднорідної крайової задачі розшукано у наступному поданні [24]

$$Z_n(y) = \int_0^b G(y, \xi) F_n(\xi) d\xi + \Psi_0(y) * D_0 + \Psi_1(y) * D_1, \quad (2.15)$$

де  $G(y, \xi)$  - матрична функція Гріна,  $\Psi_i(y)$ ,  $i = \overline{0, 1}$  - фундаментальна базисна система розв'язків задачі.

Для знаходження фундаментальної базисної системи розв'язків побудовано розв'язок матричного однорідного рівняння

$$L_2 [Y_n(y)] = 0 \quad (2.16)$$

де  $Y_n(y)$  - матриця порядку  $2 \times 2$ .

Представимо матрицю  $Y_n(y)$  у наступній формі  $Y_n(y) = e^{sy} * I$ ,  $I$  - одинична матриця, та підставимо до (2.16). В результаті отримаємо рівність  $L_2[e^{sy} * I] = e^{sy} * M(s)$ , де матриця  $M(s)$  має вигляд:

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Згідно до [26] розв'язок матричного однорідного рівняння побудовано у формі

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \quad (2.18)$$

де  $M^{-1}(s)$  - матриця обернена до матриці  $M(s)$ ,  $C$  - замкнений контур який містить усі особливі точки матриці  $M^{-1}(s)$ .

Матрицю  $M^{-1}(s)$  знайдено у наступному поданні  $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]}$ , де  $\widetilde{M(s)}$  - транспонована матриця алгебричних доповнень,  $\det[M(s)]$  - детермінант матриці, який знайдено як поліном четвертого ступеня

$$\begin{aligned} \det[M(s)] &= \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{vmatrix} = \\ &= (s - s_1)(s + s_1)(s - s_2)(s + s_2), \end{aligned} \quad (2.19)$$

де  $-s_1, -s_2, s_1, s_2$  корені  $\det[M(s)] = 0$ , детальне знаходження яких наведено в Додатку В.

Обернена матриця має вигляд

$$\begin{aligned} M^{-1}(s) &= \frac{1}{(s - s_1)(s + s_1)(s - s_2)(s + s_2)} \\ &\begin{pmatrix} s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s \\ -\alpha_n \mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Враховучи це, знайдемо значення фундаментальної матриці за до-

помогую теореме про лишки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds &= \frac{2\pi i}{2\pi i} \sum_{i=1}^4 \text{Res} \left[ e^{sy} \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]} \right] = \\ &= Y_1(y) + Y_2(y) + Y_3(y) + Y_4(y), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} Y_0(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s+s_1)(s-s_2)(s+s_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=s_1} = \\ &= \frac{e^{s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \begin{pmatrix} s_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s_1 \\ -\alpha_n \mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} Y_1(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s-s_1)(s-s_2)(s+s_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-s_1} = \\ &= -\frac{e^{-s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \begin{pmatrix} s_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 s_1 \\ \alpha_n \mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} Y_2(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s+s_2)(s-s_1)(s+s_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=s_2} = \\ &= \frac{e^{s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \begin{pmatrix} s_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s_2 \\ -\alpha_n \mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} Y_3(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s-s_2)(s-s_1)(s+s_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-s_2} = \\ &= -\frac{e^{-s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \begin{pmatrix} s_2^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 s_2 \\ \alpha_n \mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.24)$$

## 2.3 Побудова матричної функції Гріна

Для побудови матриці-функції Гріна спочатку знайдено фундаментальні базисні матриці  $\Psi_0(y)$ ,  $\Psi_1(y)$ , які мають задовільняти матричну крайову задачу [24]:

$$\begin{aligned} L_2 [\Psi_i(y)] &= 0, \\ U_i [\Psi_j(y)] &= \delta_{j,i} I, \quad j = \overline{0, 1}, i = \overline{0, 1}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

де  $\delta_{j,i}$  - символ Кронекера,  $I$  - одинична матриця. Для цього їх вибрано у поданні:

$$\Psi_i(y) = (Y_0(y) + Y_1(y)) * C_1^i + (Y_2(y) + Y_3(y)) * C_2^i \quad (2.26)$$

Тут матриці  $Y_i(y)$ ,  $i = \overline{0, 3}$  визначено формулами (2.21)-(2.24), де  $C_1^j$ ,  $C_2^j$ ,  $j = \overline{0, 1}$  невідомі матриці коефіцієнтів, які знайдено з граничних умов (2.25) (покрокове знаходження наведено у Додатку С).

Для подальшого введемо наступні позначення для елементів матриць  $\Psi_0(y)$ ,  $\Psi_1(y)$ :

$$\Psi_0(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^0(y) & \Psi_2^0(y) \\ \Psi_3^0(y) & \Psi_4^0(y) \end{pmatrix}, \quad \Psi_1(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1^1(y) & \Psi_2^1(y) \\ \Psi_3^1(y) & \Psi_4^1(y) \end{pmatrix}$$

Таким чином матрицю Гріна можемо записати у вигляді:

$$G(y, \xi) = \begin{cases} \Psi_0(y) * \Psi_1(\xi), & 0 \leq y < \xi \\ \Psi_1(y) * \Psi_0(\xi), & \xi < y \leq b \end{cases} \quad (2.27)$$

Для данної матриці Гріна виконано усі властивості, зокрема виконано однорідні граничні умови (2.13) та задовільнено однорідне рівняння рівноваги у просторі трансформант (2.11):

$$L_2 [G(y, \xi)] = 0$$

$$U_0 [G(y, \xi)] = 0, \quad U_1 [G(y, \xi)] = 0,$$

Введемо наступні позначення  $G(y, \xi) = \begin{pmatrix} g_1(y, \xi) & g_2(y, \xi) \\ g_3(y, \xi) & g_4(y, \xi) \end{pmatrix}$ ,  $F_n(y) = \begin{pmatrix} f_n^1(y) \\ f_n^2(y) \end{pmatrix}$ . Враховуючи це та (2.15), шукані функції переміщень у просторі трансформант можна записати у формі

$$u_n(y) = \int_0^b [g_1(y, \xi) f_n^1(\xi) + g_2(y, \xi) f_n^2(\xi)] d\xi - \psi_0^2(y) p_n \quad (2.28)$$

$$v_n(y) = \int_0^b [g_3(y, \xi) f_n^1(\xi) + g_4(y, \xi) f_n^2(\xi)] d\xi - \psi_0^4(y) p_n \quad (2.29)$$

Фінальний розв'язок вихідної задачі отримано після застосування оберненого перетворення Фур'є до трансформант (2.28), (2.29)

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (2.30)$$

$$v(x, y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (2.31)$$

Знайдем тепер  $v_0(y)$  розглянувши задачу у просторі трансформант (2.9), (2.10) при  $n = 0$ ,  $\alpha_n = 0$  (детальний розв'язок наведено у Додатку D). Тоді остаточний розв'язок  $v(x, y)$  набуває вигляду

$$\begin{aligned} v(x, y) = & \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x) - \psi_0(y) \frac{p_0}{a(2G + \lambda)} + \\ & + \frac{1}{a(1 + \mu_0)} \int_0^b g(y, \xi) \left[ \left( \frac{\alpha_2}{\beta_2} \chi_4(\xi) \cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \chi_2(\xi) \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\mu_0}{(1 + \mu_0)} (\chi_3'(\xi) \cos(\alpha_n a) - \chi_1'(\xi)) \right] d\xi \end{aligned} \quad (2.32)$$

Невідомі функції  $\chi_i(y)$ ,  $i = \overline{1, 4}$  що містяться у формулі розв'язку (2.30), (2.32) знайдено для кожної конкретної постанови задачі окремо.

## 2.4 Загальна схема розв'язку сингулярного інтегрального рівняння

Розглянемо випадок виконання граничних умов другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях, в результаті кількість невідомих функцій скоротиться до однієї  $f(y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}|_{x=a}$ . З цього отримаємо значення  $f_n^1(\xi) = 0$ ,  $f_n^2(\xi) = -\cos(\alpha_n a)f(\xi)$ . Для знаходження невідомої функції  $f(y)$  використано граничну умову  $u(x,y)|_{x=a} = 0$  та побудовано сингулярне інтегральне рівняння:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left( \ln \left[ \frac{1}{|x-t|} \right] + a_3(t, x) \right) f(t) dt = a_1(x), \quad (2.33)$$

де

$$a_1(x) = ap(x) - 2(2G + \lambda) \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_0^4(y) p_n \cos(\alpha_n x)|_{y=b} - \\ - 2\lambda \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_0^2(y) p_n \sin(\alpha_n x)|_{y=b} - \psi_0'(b) p_0$$

$$a_2(t) = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\partial g_4(\widetilde{y}, \xi)}{\partial y} + \lambda g_2(\widetilde{y}, \xi) \right] |_{y=b},$$

$$a_3(t, x) = \sum_{n=1}^N \cos(\alpha_n a) \cos(\alpha_n x) \left[ (2G + \lambda) \frac{\partial g_4(y, t)}{\partial y} + \alpha_n \lambda g_2(y, t) \right] |_{y=b} - \\ - a_2 \sum_{n=0}^N (-1)^n (2n+1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-t)} \cos((2n+1)\frac{\pi}{2a}x)$$

Інтегральне рівняння (2.33) розв'язується методом ортогональних поліномів [25]. Згідно з методом невідому функцію  $f(t)$  розвинуто у ряд за поліномами Чебишева першого роду

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k T_k(t), \quad (2.34)$$

де  $\varphi_k$  - невідомі коефіцієнти,  $T_k(t)$  - поліном Чебишева першого роду.

Представлення невідомої функції (2.34) підставлено у сингулярне інтегральне рівняння (2.33) та враховуючи спектральне співвідношення В.1.9 [27]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left[ \frac{1}{|x-t|} \right] \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = v_k T_k(x), \begin{cases} v_0 = \ln 2, \\ v_k = k^{-1}, k \geq 1 \end{cases} \quad (2.35)$$

отримано

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k v_k T_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{a_3(t, x)}{a_2(t)} \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = a_1(x) \quad (2.36)$$

Реалізація стандартної схеми методу ортогональних поліномів приводить до розв'язання нескінченної системи алгебричних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів  $\varphi_k$ ,  $k = \overline{0, \infty}$ , яка в подальшому розв'язується методом редукції.

$$\frac{\phi_m \pi}{2m} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k g_{k,m} = f_m, \quad (2.37)$$

де  $g_{k,m} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 \frac{a_3(t, x)}{a_2(t)} \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt dx$ ,  $f_m = \int_{-1}^1 \frac{T_m(x) a_1(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$  інтеграли відомих функцій

## 2.5 Висновки до другого розділу

1. Застосування інтегрального перетворення до рівнянь Ламе та крайових умов плоскої задачі теорії пружності для прямокутної області дозволило уникнути використання бігармонічних функцій завдяки прямому застосуванню до рівнянь Ламе.
2. Для загального випадку неоднорідного векторного диференціального рівняння другого порядку побудовано матричну функцію Гріна. За її допомогою знайдено розв'язок задачі у просторі трансформант.

3. Отримане сінгулярне інтегральне рівняння, у випадку умов другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях, розв'язано методом ортогональних поліномів, що враховує реальну особливість розв'язків на кінцях інтервалу інтегрування.



# 3 МІШАНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ ЗА УМОВ ІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ НА БІЧНИХ ГРАНЯХ

У даному розділі досліджено плоскі статична та динамічна задачі теорії пружності для прямокутної області за умов ідеального контакту на бічних гранях.

Результати розділу опубліковані в [29], [30], [31], [36] а також доповідались на конференціях [32], [33], [37].

## 3.1 Статична задача теорії пружності для прямокутної області за умов ідеального контакту на бічних гранях

### 3.1.1 Постановка задачі

Розглядається пружне прямокутне тіло (Рис: 2.1), яке займає облась, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ .

До грані  $y = b$  додано нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=b} = 0, \quad (3.1)$$

де  $p(x)$  є відома функція.

На бічних та нижній гранях виконуються умови ідеального контакту

$$u(x, y)|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=0} = 0 \quad (3.2)$$

$$u(x, y)|_{x=a} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=a} = 0 \quad (3.3)$$

$$v(x, y)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=0} = 0 \quad (3.4)$$

Потрібно відшукати розв'язок рівнянь рівноваги

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

за умови виконання (3.1) - (3.4).

### 3.1.2 Побудова точного розв'язку вихідної задачі

Для того, щоби звести задачу до одновимірної задачі, використано інтегральне перетворення Фур'є за змінною  $x$  безпосередньо до рівнянь (3.5) у наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x, y) \sin(\alpha_n x) \\ v(x, y) \cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (3.6)$$

Після інтегрування обох рівнянь за частинами у просторі трансформант отримано

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - \alpha_n^2 (1 + \mu_0) u_n(y) = 0 \\ (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Крайові умови у просторі трансформант записано у поданні

$$\begin{cases} ((2G + \lambda) v_n'(y) + \alpha_n \lambda u_n(y))|_{y=b} = -p_n, \\ (u_n'(y) - \alpha_n v_n(y))|_{y=b} = 0, \\ v_n(y)|_{y=0} = 0, \\ (u_n'(y) - \alpha_n v_n(y))|_{y=0} = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

де  $p_n = \int_0^a p(x) \cos(\alpha_n x) dx$ .

Для того, щоби розв'язати задачу у просторі трансформант, її переписано у векторній формі. Рівняння рівноваги (3.7) запишемо у наступному вигляді:

$$L_2 [Z_n(y)] = 0, \quad (3.9)$$

$$L_2 [Z_n(y)] = A * Z_n''(y) + B * Z_n'(y) + C * Z_n(y), \quad (3.10)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2(1 + \mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix}$$

$$Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (3.8) зображено як

$$U_i [Z_n(y)] = D_i, \quad (3.11)$$

$$U_i [Z_n(y)] = E_i * Z_n'(b_i) + F_i * Z_n(b_i), \quad (3.12)$$

де  $i = \overline{0, 1}$ ,  $b_0 = b$ ,  $b_1 = 0$ ,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Потрібно відшукати розв'язок однорідного векторного рівняння (3.9). З цією метою спочатку розшукуємо розв'язок однорідного матричного рівняння. Його побудовано у вигляді [26]:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds, \quad (3.13)$$

де  $M(s)$  - характеристична матриця рівняння (3.9),  $C$  - замкнений контур, який містить усі особливі точки підінтегральної функції. Матриця  $M(s)$  визначається з співвідношення

$$L_2 [e^{sy} * I] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

де матриця  $M(s)$  має вигляд

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0) & -\alpha_n\mu_0s \\ \alpha_n\mu_0s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Матрицю  $M^{-1}(s)$  побудовано у наступному поданні  $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M}(s)}{\det[M(s)]}$ , де  $\widetilde{M}(s)$  - транспонована матриця алгебричних доповнень

$$\widetilde{M}(s) = \begin{pmatrix} s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 & \alpha_n\mu_0s \\ -\alpha_n\mu_0s & s^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$\det[M(s)]$  - детермінант матриці

$$\begin{aligned} \det[M(s)] &= \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 & -\alpha_n\mu_0s \\ \alpha_n\mu_0s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 \end{vmatrix} = \\ &= (1 + \mu_0)(s - \alpha_n)^2(s + \alpha_n)^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

Детермінант матриці  $\det[M(s)]$  прирівнено до нуля та встановлено його корені  $-\alpha_n$ ,  $\alpha_n$ , що є коренями другої кратності детермінанта матриці  $M(s)$ . Детальне знаходження їх наведено у Додатку В.

За допомогою теореми про лишки знайдено фундаментальну матричну систему

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds &= \frac{2\pi i}{2\pi i(1 + \mu_0)} \sum_{i=1}^2 \text{Res} \left[ e^{sy} \frac{\widetilde{M}(s)}{\det[M(s)]} \right] = \\ &= \frac{1}{(1 + \mu_0)} (Y_0(y) + Y_1(y)), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} Y_0(y) &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{e^{sy}}{(s + \alpha_n)^2} \widetilde{M}(s) \right) \Big|_{s=\alpha_n} = \\ &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n\mu_0y + 2 + \mu_0 & \alpha_n\mu_0y \\ -\alpha_n\mu_0y & -\alpha_n\mu_0y + 2 + \mu_0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$Y_1(y) = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{e^{sy}}{(s - \alpha_n)^2} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-\alpha_n} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n \mu_0 y \\ \alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Розв'язок однорідного рівняння у просторі трансформант подано формулою

$$Z_n(y) = \frac{1}{1 + \mu_0} \left( Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \right), \quad (3.20)$$

де  $c_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$  - невідомі константи, щоби їх відшукати використано граничні умови (3.11) (Додаток Е).

Таким чином, отримано розв'язок векторної крайової задачі у просторі трансформант Фур'є:

$$u_n(y) = \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n(1 + \mu_0)} [c_1(\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2(\alpha_n \mu_0 y)] +$$

$$+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n(1 + \mu_0)} [c_3(\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y)] \quad (3.21)$$

$$v_n(y) = \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n(1 + \mu_0)} [c_1(-\alpha_n \mu_0 y) + c_2(-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0)] +$$

$$+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n(1 + \mu_0)} [c_3(\alpha_n \mu_0 y) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0)] \quad (3.22)$$

Для того, щоб виписати подання для поля переміщень вихідної задачі обернене перетворення Фур'є застосовано до формул (3.21), (3.22)

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (3.23)$$

$$v(x, y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (3.24)$$

Останній крок - це знаходження виразу  $v_0(y)$  у випадку коли  $n = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ . Для цього випадку рівняння для його визначення записано у формі

$$(1 + \mu_0)v_0''(y) = 0 \quad (3.25)$$

Граничні умови набувають вигляду

$$\begin{cases} (2G + \lambda)v_0'(y)|_{y=b} = -p_0, \\ v_0(y)|_{y=0} = 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

де  $p_0 = \int_0^a p(x)dx$ .

Невідомі константи загального розв'язку  $v_0(y) = c_1 + c_2y$  визначено з умов (3.26).

Отже

$$v_0(y) = \frac{-p_0}{(2G + \lambda)}y \quad (3.27)$$

З цього випливає остаточне подання розв'язку вихідної задачі

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin(\alpha_n x), & \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \\ v(x, y) = \frac{-p_0}{(2G + \lambda)a}y + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x), & \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \end{cases} \quad (3.28)$$

## 3.2 Динамічна задача теорії пружності для прямокутної області за умов ідеального контакту на бічних гранях

### 3.2.1 Постановка задачі

Розглядається пружне прямокутне тіло (Рис: 2.1), яке займає облась, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ .

До грані  $y = b$  додано нормальне динамічне навантаження

$$\widetilde{\sigma}_y(x, y, t)|_{y=b} = -\widetilde{p}(x, t), \quad \widetilde{\tau}_{xy}(x, y, t)|_{y=b} = 0, \quad (3.29)$$

де  $p(x, t)$  відома функція. На бічних та нижній гранях виконуються умови ідеального контакту

$$\widetilde{u}(x, y, t)|_{x=0} = 0, \quad \widetilde{\tau}_{xy}(x, y, t)|_{x=0} = 0 \quad (3.30)$$

$$\tilde{u}(x, y, t)|_{x=a} = 0, \quad \widetilde{\tau_{xy}}(x, y, t)|_{x=a} = 0 \quad (3.31)$$

$$\tilde{v}(x, y, t)|_{y=0} = 0, \quad \widetilde{\tau_{xy}}(x, y, t)|_{y=0} = 0 \quad (3.32)$$

Потрібно відшукати розв'язок рівнянь Ламе

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, t)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right) = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \tilde{v}(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}(x, y, t)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{v}(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}(x, y, t)}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3.33)$$

за умови виконання крайових умов (3.29) - (3.32).

Тут і далі постановку задачі розглянуто у випадку гармонічних коливань

$$\tilde{u}(x, y, t) = u(x, y)e^{i\omega t}, \quad \tilde{v}(x, y, t) = v(x, y)e^{i\omega t}, \quad \tilde{p}(x, y, t) = p(x, y)e^{i\omega t} \quad (3.34)$$

З урахуванням подання переміщень (3.34) рівняння Ламе переформульовано

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{\omega^2}{c_1^2} u(x, y) \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \right) = -\frac{\omega^2}{c_2^2} v(x, y) \end{cases} \quad (3.35)$$

Граничні умови набувають вигляду

$$\begin{cases} \sigma_y(x, y)|_{y=b} = -p(x, t), \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=b} = 0 \\ v(x, y)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=0} = 0 \\ u(x, y)|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=0} = 0 \\ u(x, y)|_{x=a} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=a} = 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Треба знайти хвильове поле пружного прямокутника, що задовольняє крайову задачу (3.35), (3.36).

### 3.2.2 Побудова точного розв'язку вихідної задачі

Для того, щоби звести задачу до одновимірної задачі у просторі трансформант, використано інтегральне перетворення Фур'є за змін-

ною  $x$  до рівнянь (3.35):

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x, y) \sin(\alpha_n x) \\ v(x, y) \cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (3.37)$$

Після інтегрування за частинами обох рівнянь Ламе отримано наступну систему звичайних диференціальних рівнянь у просторі трансформант

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) + (-\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) = 0 \\ (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) + (-\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

Застосування інтегрального перетворення (3.37) до крайових умов (3.36) призводить до крайових умов у просторі трансформант

$$\begin{cases} ((2G + \lambda) v_n'(y) + \alpha_n \lambda u_n(y))|_{y=b} = -p_n, \\ (u_n'(y) - \alpha_n v_n(y))|_{y=b} = 0, \\ v_n(y)|_{y=0} = 0, \\ (u_n'(y) - \alpha_n v_n(y))|_{y=0} = 0, \end{cases} \quad (3.39)$$

де  $p_n = \int_0^a p(x) \cos(\alpha_n x) dx$ .

Для того, щоби розв'язати задачу у просторі трансформант, її переписано у векторній формі. Рівняння рівноваги (3.38) запишемо у наступному вигляді:

$$L_2 [Z_n(y)] = 0 \quad (3.40)$$

$$L_2 [Z_n(y)] = A * Z_n''(y) + B * Z_n'(y) + C * Z_n(y) \quad (3.41)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix}, \quad Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$



Граничні умови (3.39) запишемо у паданні:

$$U_i [Z_n(y)] = D_i \quad (3.42)$$

$$U_i [Z_n(y)] = E_i * Z'_n(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \quad (3.43)$$

де  $i = \overline{0, 1}$ ,  $b_0 = b$ ,  $b_1 = 0$ ,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Потрібно відшукати розв'язок однорідного рівняння (3.40), для чого спочатку побудовано його фундаментальну матрицю. Її шукатимемо у наступному поданні [26]:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds, \quad (3.44)$$

де  $M(s)$  - характеристична матриця рівняння (3.40),  $C$  - замкнений контур, який містить усі особливі точки підінтегрального виразу. Матрицю  $M(s)$  шукатимемо за схемою

$$L_2 [e^{sy} * I] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Тут матриця  $M(s)$  має вигляд:

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Знайдемо тепер обернену матрицю  $M^{-1}(s)$ , яку побудовано у наступній формі  $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M}(s)}{\det[M(s)]}$ , де  $\widetilde{M}(s)$  - транспонована матриця

алгебричних доповнень,  $\det[M(s)]$  - детермінант матриці

$$\widetilde{M}(s) = \begin{pmatrix} s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s \\ -\alpha_n \mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \det[M(s)] &= \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{vmatrix} = \\ &= (s - s_1)(s + s_1)(s - s_2)(s + s_2), \end{aligned} \quad (3.48)$$

знайдено чотири прості корені рівняння  $\det[M(s)] = 0$ :  $-s_1$ ,  $-s_2$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ , детальне знаходження яких наведено у Додатку В.

Враховучи це, запишемо фундаментальну матричну систему розв'язків:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds &= \frac{2\pi i}{2\pi i(1 + \mu_0)} \sum_{i=1}^4 \text{Res} \left[ e^{sy} \frac{\widetilde{M}(s)}{\det[M(s)]} \right] = \\ &= (Y_0(y) + Y_1(y) + Y_2(y) + Y_3(y)) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} Y_0(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s + s_1)(s - s_2)(s + s_2)} \widetilde{M}(s) \right) \Big|_{s=s_1} = \\ &= \frac{e^{s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \begin{pmatrix} s_1^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s_1 \\ -\alpha_n \mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} Y_1(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s - s_1)(s - s_2)(s + s_2)} \widetilde{M}(s) \right) \Big|_{s=-s_1} = \\ &= -\frac{e^{-s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \begin{pmatrix} s_1^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 s_1 \\ \alpha_n \mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned}
Y_2(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s+s_2)(s-s_1)(s+s_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=s_2} = \\
&= \frac{e^{s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \begin{pmatrix} s_2^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s_2 \\ -\alpha_n \mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}
Y_3(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s-s_2)(s-s_1)(s+s_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-s_2} = \\
&= -\frac{e^{-s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \begin{pmatrix} s_2^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 s_2 \\ \alpha_n \mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Таким чином розв'язок однорідного векторного рівняння у просторі трансформант набуває вигляду

$$Z_n(y) = (Y_0(y) + Y_1(y)) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (Y_2(y) + Y_3(y)) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}. \tag{3.53}$$

Граничні умови (3.42) використано для того, щоб відшукати невідомі константи  $c_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , детально продемонстровано у Додатку С.

Розв'язок (3.53) векторної крайової задачі у просторі трансформант подано наступними виразами

$$\begin{aligned}
u_n(y) &= \frac{(s_1^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1 y} - e^{-s_1 y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)(1 + \mu_0)} c_1 + \\
&+ \frac{(s_2^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2 y} - e^{-s_2 y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)(1 + \mu_0)} c_3 + \\
&+ \frac{(s_1 \alpha_n y)(e^{s_1 y} + e^{-s_1 y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)(1 + \mu_0)} c_2 + \frac{(s_2 \alpha_n y)(e^{s_2 y} + e^{-s_2 y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)(1 + \mu_0)} c_4
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
v_n(y) = & \frac{(s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1 y} - e^{-s_1 y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)(1 + \mu_0)} c_2 + \\
& + \frac{(s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2 y} - e^{-s_2 y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)(1 + \mu_0)} c_4 - \\
& - \frac{(s_1 \alpha_n y)(e^{s_1 y} + e^{-s_1 y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)(1 + \mu_0)} c_1 - \frac{(s_2 \alpha_n y)(e^{s_2 y} + e^{-s_2 y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)(1 + \mu_0)} c_3
\end{aligned} \quad (3.55)$$

Оберненне інтегральне перетворення Фур'є для трансформант переміщень (3.54), (3.55) завершує побудову розв'язку вихідної задачі

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (3.56)$$

$$v(x, y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (3.57)$$

Останній крок - це знаходження  $v_0(y)$  у випадку коли  $n = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ . Друге рівняння (3.38) приймає вигляд

$$(1 + \mu_0)v_0''(y) + \frac{\omega^2}{c_2^2}v_0(y) = 0 \quad (3.58)$$

Також переписано граничні умови

$$\begin{cases} (2G + \lambda)v_0'(y)|_{y=b} = -p_0 \\ v_0(y)|_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (3.59)$$

де  $p_0 = \int_0^a p(x)dx$ .

Розв'язок рівняння (3.58) має вигляд:

$$v_0(y) = c_1 \cos \left( y \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1 + \mu_0)}} \right) + c_2 \sin \left( y \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1 + \mu_0)}} \right) \quad (3.60)$$

Отже з урахуванням умов (3.59)

$$v_0(y) = \frac{-p_0}{(2G + \lambda) \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1 + \mu_0)}} \sin \left( b \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1 + \mu_0)}} \right)} \sin \left( y \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2(1 + \mu_0)}} \right) \quad (3.61)$$

Тепер формули (3.56), (3.57) повністю описують хвильове поле прямокутної області.

### 3.3 Висновки до третього розділу

Отримано точні розв'язки статичної та динамічної задач для прямокутної області за умов ідеального контакту на бічних гранях. Досліджено поля переміщень, напружень та хвильові поля для різних видів навантаження і розмірів прямокутної області.

Встановлено ... (за результатами численних результатів).

## 4 МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ ЗА УМОВ ДРУГОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ НА БІЧНИХ ГРАНЯХ

У даному розділі досліджено плоскі статична та динамічна задачі для прямокутної області за умов другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях.

Результати розділу опубліковані в [34], [38], а також доповідалась на конференціях [35], [39].

### 4.1 Статична задача для прямокутної області за умов другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях

#### 4.1.1 Постановка задачі

Розглядається пружне прямокутне тіло (Рис: 4.1), яке займає область, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями  $-a \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ .

На грані  $y = b$  додано нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=b} = 0, \quad (4.1)$$

де  $p(x)$  відома функція.

На бічних гранях виконуються умови другої основної задачі теорії пружності

$$u(x, y)|_{x=\pm a} = 0, \quad v(x, y)|_{x=\pm a} = 0. \quad (4.2)$$

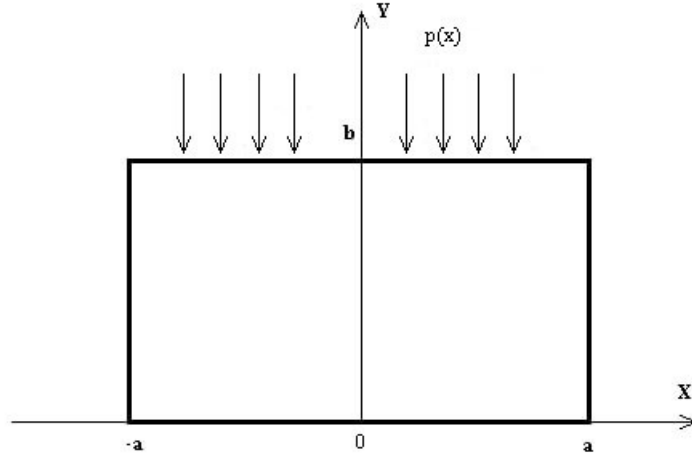


Рис. 4.1: Геометрія проблеми

На нижній грані виконується умова ідеального контакту

$$v(x, y)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=0} = 0. \quad (4.3)$$

Потрібно відшукати розв'язок рівнянь рівноваги

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \right) = 0, \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \right) = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

за виконання крайових умов (4.1) - (4.3).

Для того, щоби розв'язати поставлену задачу використано умови симетрії. Тоді крайові умови переформульовано у поданні

$$u(x, y)|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (4.5)$$

$$u(x, y)|_{x=a} = 0, \quad v(x, y)|_{x=a} = 0, \quad 0 \leq y \leq b. \quad (4.6)$$

#### 4.1.2 Розв'язання векторної крайовою задачі у просторі трансформант

З метою звести крайову задачу до одновимірної задачі, використано інтегральне перетворення Фур'є за змінною  $x$  до рівнянь (4.4) у

вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x, y) \sin(\alpha_n x) \\ v(x, y) \cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \alpha_n = \frac{\pi}{a} \left(n - \frac{1}{2}\right), n = \overline{1, \infty} \quad (4.7)$$

Для цього перше та друге рівняння (4.4) помножено відповідно на  $\sin(\alpha_n x)$  та  $\cos(\alpha_n x)$  та проінтегровано за змінною  $x$  на інтервалі  $0 \leq x \leq a$ .

В результаті отримано наступну систему звичайних диференціальних рівнянь у просторі трансформант

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - \alpha_n^2 (1 + \mu_0) u_n(y) = -(1 + \mu_0) \sin(\alpha_n a) f(y), \\ (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

де  $f(y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \big|_{x=a}$  - невідома функція.

Крайові умови у просторі трансформант подано у вигляді

$$\begin{cases} ((2G + \lambda) v_n'(y) + \alpha_n \lambda u_n(y)) \big|_{y=b} = -p_n, \\ (u_n'(y) - \alpha_n v_n(y)) \big|_{y=b} = 0, \\ v_n(y) \big|_{y=0} = 0, \\ (u_n'(y) - \alpha_n v_n(y)) \big|_{y=0} = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

де  $p_n = \int_0^a p(x) \cos(\alpha_n x) dx$ .

Для того, щоби розв'язати крайову задачу у просторі трансформант, її переписано у векторній формі. Це дає можливість записати рівняння рівноваги (4.8) за допомогою лінійного диференціального оператора другого порядку

$$L_2 [Z_n(y)] = F_n(y), \quad (4.10)$$

$$L_2 [Z_n(y)] = A * Z_n''(y) + B * Z_n'(y) + C * Z_n(y),$$



де матриці та вектори введені таким чином

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2(1 + \mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix}$$

$$Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}, \quad F_n(y) = \begin{pmatrix} -(1 + \mu_0) \sin(\alpha_n a) f(y) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Граничні умови (4.9) записано за допомогою граничних функціоналів

$$U_i [Z_n(y)] = D_i, \quad (4.11)$$

$$U_i [Z_n(y)] = E_i * Z'_n(b_i) + F_i * Z_n(b_i), \quad (4.12)$$

де  $i = \overline{0, 1}$ ,  $b_0 = b$ ,  $b_1 = 0$ ,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок векторної одновимірної неоднорідної крайової задачі у просторі трансформант знайдено за допомогою матричної функції Гріна та записано у наступному поданні [24]

$$Z_n(y) = \int_0^b G(y, \xi) F_n(\xi) d\xi + \Psi_0(y) * D_0 + \Psi_1(y) * D_1, \quad (4.13)$$

де  $G(y, \xi)$  - матрична функція Гріна,  $\Psi_i(y)$ ,  $i = \overline{0, 1}$  - фундаментальна базисна система розв'язків задачі.

Для знаходження матричної функції Гріна та фундаментальної базисної системи розв'язків спочатку знайдено розв'язок однорідного матричного рівняння (4.10). Для цього використано алгоритм побудови фундаментальної матриці рівняння [26]:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds. \quad (4.14)$$

Тут  $M(s)$  - характеристична матриця рівняння (4.10),  $C$  - замкнений контур, який містить усі особливі точки підінтегрального виразу. Матрицю  $M(s)$  знайдено після підстановки Ейлера

$$L_2[e^{sy} * I] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

де матриця  $M(s)$  має вигляд

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0) & -\alpha_n\mu_0s \\ \alpha_n\mu_0s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Обернену матрицю  $M^{-1}(s)$  знайдено у наступному поданні  $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]}$ , де  $\widetilde{M(s)}$  - транспонована матриця алгебричних доповнень

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 & \alpha_n\mu_0s \\ -\alpha_n\mu_0s & s^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0) \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

$\det[M(s)]$  - детермінант матриці

$$\begin{aligned} \det[M(s)] &= \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 & -\alpha_n\mu_0s \\ \alpha_n\mu_0s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 \end{vmatrix} = \\ &= (1 + \mu_0)(s - \alpha_n)^2(s + \alpha_n)^2, \end{aligned} \quad (4.18)$$

де  $-\alpha_n, \alpha_n$ , корені другої кратності рівняння  $\det[M(s)] = 0$ , детальне знаходження яких наведено в Додатку В.

За допомогою теореми про лишки знайдено фундаментальну матричну систему розв'язків

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds &= \frac{2\pi i}{2\pi i} \sum_{i=1}^2 \text{Res} \left[ e^{sy} \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]} \right] = \\ &= Y_0(y) + Y_1(y), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
Y_0(y) &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{e^{sy}}{(1 + \mu_0)(s + \alpha_n)^2} \widetilde{M}(s) \right) \Big|_{s=\alpha_n} = \\
&= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n(1 + \mu_0)} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 & \alpha_n \mu_0 y \\ -\alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 \end{pmatrix} \quad (4.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_1(y) &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{e^{sy}}{(1 + \mu_0)(s - \alpha_n)^2} \widetilde{M}(s) \right) \Big|_{s=-\alpha_n} = \\
&= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n(1 + \mu_0)} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n \mu_0 y \\ \alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Для побудови неоднорідного розв'язку векторного рівняння знайдено матричну функцію Гріна.

Відповідно до методу, запропонованому у [24], для побудови матриці Гріна необхідно спочатку знайти фундаментальну базисну систему розв'язків  $\Psi_0(y)$ ,  $\Psi_1(y)$ . Під останньою розуміємо функції, що задовольняють крайовій задачі

$$\begin{aligned}
L_2 [\Psi_i(y)] &= 0, \\
U_i [\Psi_j(y)] &= \delta_{j,i} I, \quad j = \overline{0, 1}, i = \overline{0, 1}, \quad (4.21)
\end{aligned}$$

де  $\delta_{j,i}$  - символ Кронекера,  $I$  - одинична матриця. Шукані функції вибрано у формі:

$$\Psi_i(y) = Y_0(y) * C_1^i + Y_2(y) * C_2^i, \quad (4.22)$$

де  $C_j^i$ ,  $i = \overline{0, 1}$ ,  $j = \overline{1, 2}$  - невідомі матриці коефіцієнтів, які знайдено з граничних умов (4.21) (покрокове знаходження наведено у Додатку С).

Матрицю Гріна побудовано у поданні

$$G(y, \xi) = \begin{cases} \Psi_0(y) * \Psi_1(\xi), & 0 \leq y < \xi \\ \Psi_1(y) * \Psi_0(\xi), & \xi < y \leq b \end{cases} \quad (4.23)$$

Для неї виконано усі чотири визначальні властивості матричної функції Гріна, зокрема виконано однорідні граничні умови (4.11) та перевірено, що матриця (4.23) задовольняє однорідне матричне рівняння рівноваги у просторі трансформант (4.10)

$$L_2 [G(y, \xi)] = 0,$$

$$U_0 [G(y, \xi)] = 0, \quad U_1 [G(y, \xi)] = 0.$$

Таким чином, розв'язок неоднорідної векторної крайової задачі у просторі трансформант записано у поданні (4.13)

$$Z_n(y) = \int_0^b G(y, \xi) F_n(\xi) d\xi + \Psi_0(y) * D_0 + \Psi_1(y) * D_1, \quad (4.24)$$

вектори  $D_i$ ,  $i = \overline{0, 1}$  визначено формулами (4.11).

Введемо наступні позначення для компонент матриць  $G(y, \xi) = \begin{pmatrix} g_1(y, \xi) & g_2(y, \xi) \\ g_3(y, \xi) & g_4(y, \xi) \end{pmatrix}$  та  $\Psi_i(y) = \begin{pmatrix} \psi_i^1(y) & \psi_i^2(y) \\ \psi_i^3(y) & \psi_i^4(y) \end{pmatrix}$ ,  $i = 0, 1$ .

З урахуванням цих позначень та (4.13), шукані функції перемішень у просторі трансформант зображено у наступному вигляді

$$u_n(y) = (-1)^n (1 + \mu_0) \int_0^b g_1(y, \xi) f(\xi) d\xi - \psi_0^2(y) p_n, \quad (4.25)$$

$$v_n(y) = (-1)^n (1 + \mu_0) \int_0^b g_3(y, \xi) f(\xi) d\xi - \psi_0^4(y) p_n. \quad (4.26)$$

Фінальний розв'язок вихідної задачі отримано після застосування оберненого перетворення Фур'є до трансформант (4.25), (4.26)

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin(\alpha_n x), \quad (4.27)$$

$$v(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi}{a} \left( n - \frac{1}{2} \right). \quad (4.28)$$

### 4.1.3 Розв'язання сингулярного інтегрального рівняння задачі

В отриманих розв'язках (4.27), (4.28) міститься невідома функція  $f(\xi)$ . Для того, щоби знайти її потрібно задовольнити граничну умову  $v(x, y)|_{x=0} = 0$ , це призводить до необхідності розв'язання сингулярного інтегрального рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left( \ln \left[ \frac{1}{|x - \xi|} \right] + a_2(\xi, x) \right) f(\xi) d\xi = a_1(x), \quad (4.29)$$

де

$$\begin{aligned} a_1(x) = & ap(x) - 2(2G + \lambda) \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_0^4(y) p_n \cos(\alpha_n x) |_{y=b} - \\ & - 2\lambda \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_0^2(y) p_n \sin(\alpha_n x) |_{y=b} - \psi_0'(b) p_0 \end{aligned}$$

$$a_2(t) = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\partial g_4(\widetilde{y}, \xi)}{\partial y} + \lambda g_2(\widetilde{y}, \xi) \right] |_{y=b},$$

$$\begin{aligned} a_3(t, x) = & \sum_{n=1}^N \cos(\alpha_n a) \cos(\alpha_n x) \left[ (2G + \lambda) \frac{\partial g_4(y, t)}{\partial y} + \alpha_n \lambda g_2(y, t) \right] |_{y=b} - \\ & - a_2 \sum_{n=0}^N (-1)^n (2n + 1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-t)} \cos\left((2n + 1)\frac{\pi}{2a}x\right) \end{aligned}$$

Інтегральне рівняння (4.29) розв'язано за допомогою метода ортогональних поліномів [25]. Невідому функцію розвинено у ряд за поліномами Чебишева першого роду

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k T_k(\xi), \quad (4.30)$$

де  $\varphi_k$  - невідомі коефіцієнти,  $T_k(\xi)$  - поліном Чебишева першого роду.

Наявність спектрального співвідношення В.1.9 [27]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left[ \frac{1}{|x - \xi|} \right] \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi = v_k T_k(x), \quad \begin{cases} v_0 = \ln 2, \\ v_k = k^{-1}, k \geq 1 \end{cases} \quad (4.31)$$

та стандартна схема методу ортогональних поліномів призводить до лінійної нескінченної системи алгебричних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів  $\varphi_k$ ,  $k = \overline{0, \infty}$

$$\frac{\phi_m \pi}{2m} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k g_{k,m} = f_m, \quad (4.32)$$

де  $g_{k,m} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 \frac{a_3(\xi, x)}{a_2(\xi)} \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi dx$ ,  $f_m = \int_{-1}^1 \frac{T_m(x) a_1(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$  інтеграли від відомих функцій. Отриману систему розв'язано за допомогою метода редукції.

## 4.2 Динамічна задача для прямокутної області за умов другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях

### 4.2.1 Постановка задачі

Розглянуто пружне прямокутне тіло, яке займає область, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями  $-a \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ .

На грані  $y = b$  додано нормальне навантаження

$$\tilde{\sigma}_y(x, y, t)|_{y=b} = -\tilde{p}(x, t), \quad \widetilde{\tau}_{xy}(x, y, t)|_{y=b} = 0, \quad (4.33)$$

де  $\tilde{p}(x, t)$  відома функція.

На бічних гранях виконано умови другої основної задачі теорії пружності

$$\tilde{u}(x, y, t)|_{x=\pm a} = 0, \quad \tilde{v}(x, y, t)|_{x=\pm a} = 0. \quad (4.34)$$

Умови ідеального контакту вважаються виконаними по нижній грані

$$\tilde{v}(x, y, t)|_{y=0} = 0, \quad \widetilde{\tau}_{xy}(x, y, t)|_{y=0} = 0. \quad (4.35)$$

Потрібно відшукати розв'язок рівнянь Ламе

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}(x,y,t)}{\partial x \partial y} \right) = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}(x,y,t)}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{v}(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}(x,y,t)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}(x,y,t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{v}(x,y,t)}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}(x,y,t)}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (4.36)$$

за умови виконання крайових умов (4.33) - (4.35).

Тут і далі постановку задачі розглянуто у випадку гармонічних коливань

$$\tilde{u}(x, y, t) = u(x, y)e^{i\omega t}, \quad \tilde{v}(x, y, t) = v(x, y)e^{i\omega t}, \quad \tilde{p}(x, t) = p(x)e^{i\omega t}. \quad (4.37)$$

З урахуванням подання переміщень (4.37) рівняння Ламе переформульовано

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{\omega^2}{c_1^2} u(x, y), \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} \right) = -\frac{\omega^2}{c_2^2} v(x, y). \end{cases} \quad (4.38)$$

Відповідно до цього переформульовано крайові умови з урахуванням симетрії задачі

$$\begin{cases} \sigma_y(x, y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=b} = 0, \\ v(x, y)|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=0} = 0, \\ u(x, y)|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=0} = 0, \\ u(x, y)|_{x=a} = 0, \quad v(x, y)|_{x=a} = 0. \end{cases} \quad (4.39)$$

Потрібно відшукати хвильове поле усередині прямокутної області, що задовільняє рівнянням Ламе (4.38) та крайовим умовам (4.39).

#### 4.2.2 Розв'язання векторної крайової задачі у просторі трансформант

Після застосування перетворення Фур'є (4.7) та інтегрування за частинами обох рівнянь (4.38) отримано систему звичайних диферен-

ціальних рівнянь у просторі трансформант

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) + (-\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) = -(1 + \mu_0) \sin(\alpha_n a) f(y), \\ (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) + (-\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = 0, \end{cases} \quad (4.40)$$

де  $f(y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \big|_{x=a}$  - невідома функція.

Інтегральне перетворення застосовано відповідно до крайових умов (4.39)

$$\begin{cases} ((2G + \lambda) v_n'(y) + \alpha_n \lambda u_n(y)) \big|_{y=b} = -p_n, \\ (u_n'(y) - \alpha_n v_n(y)) \big|_{y=b} = 0, \\ v_n(y) \big|_{y=0} = 0, \\ (u_n'(y) - \alpha_n v_n(y)) \big|_{y=0} = 0, \end{cases} \quad (4.41)$$

де  $p_n = \int_0^a p(x) \cos(\alpha_n x) dx$ .

Далі сформульовано векторну крайову задачу у просторі трансформант:

$$L_2 [Z_n(y)] = F_n(y), \quad (4.42)$$

$$L_2 [Z_n(y)] = A * Z_n''(y) + B * Z_n'(y) + C * Z_n(y), \quad (4.43)$$

де

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix}, \\ Z_n(y) &= \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}, \quad F_n(y) = \begin{pmatrix} -(1 + \mu_0) \sin(\alpha_n a) f(y) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Граничні умови (4.41) записано за допомогою крайових функціоналів:

$$U_i [Z_n(y)] = D_i, \quad (4.44)$$



$$U_i [Z_n(y)] = E_i * Z'_n(b_i) + F_i * Z_n(b_i), \quad (4.45)$$

де  $i = \overline{0, 1}$ ,  $b_0 = b$ ,  $b_1 = 0$ ,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

За схемою, що детально викладено у попередньому параграфі (4.1.2), отримано матрицю  $M(s)$  та встановлено її обернену матрицю  $M^{-1}(s)$  та її детермінант  $\det(M(s))$ :

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

$$\widetilde{M}(s) = \begin{pmatrix} s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s \\ -\alpha_n \mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \det[M(s)] &= \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{vmatrix} = \\ &= (s - s_1)(s + s_1)(s - s_2)(s + s_2), \end{aligned} \quad (4.48)$$

де  $\pm s_i$ ,  $i = \overline{1, 2}$  - чотири прості корені рівняння  $\det[M(s)] = 0$  (детальне знаходження яких наведено у Додатку В).

За допомогою теореми про лишки побудовано фундаментальну матричну систему розв'язків:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds &= \frac{2\pi i}{2\pi i} \sum_{i=1}^4 \text{Res} \left[ e^{sy} \frac{\widetilde{M}(s)}{\det[M(s)]} \right] = \\ &= Y_0(y) + Y_1(y) + Y_2(y) + Y_3(y), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
Y_0(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s+s_1)(s-s_2)(s+s_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=s_1} = \\
&= \frac{e^{s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \begin{pmatrix} s_1^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s_1 \\ -\alpha_n \mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
Y_1(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s-s_1)(s-s_2)(s+s_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-s_1} = \\
&= -\frac{e^{-s_1 y}}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \begin{pmatrix} s_1^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 s_1 \\ \alpha_n \mu_0 s_1 & s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
Y_2(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s+s_2)(s-s_1)(s+s_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=s_2} = \\
&= \frac{e^{s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \begin{pmatrix} s_2^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s_2 \\ -\alpha_n \mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
Y_3(y) &= \left( \frac{e^{sy}}{(s-s_2)(s-s_1)(s+s_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-s_2} = \\
&= -\frac{e^{-s_2 y}}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \begin{pmatrix} s_2^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 s_2 \\ \alpha_n \mu_0 s_2 & s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

З метою відшукати розв'язок неоднорідної векторної крайової задачі побудовано матричну функцію Гріна, для чого знайдено фундаментальну базисну систему розв'язків, яка задовільняє матричну крайову задачу:

$$\begin{aligned}
L_2 [\Psi_i(y)] &= 0, \\
U_i [\Psi_j(y)] &= \delta_{j,i} I, \quad j = \overline{0, 1}, i = \overline{0, 1},
\end{aligned} \tag{4.53}$$

де  $\delta_{j,i}$  - символ Кронекера,  $I$  - одинична матриця, а функції  $\Psi_0(y)$ ,  $\Psi_1(y)$  розшукано у формі

$$\Psi_i(y) = (Y_0(y) + Y_1(y)) * C_1^i + (Y_2(y) + Y_3(y)) * C_2^i. \quad (4.54)$$

У поданні (4.54) потрібно знайти невідомі матриці коефіцієнтів  $C_i^j$ ,  $i = \overline{1, 2}$ ,  $j = \overline{0, 1}$ , що зроблено за допомогою граничних умов (4.45) (дивись Додаток С).

Матрицю Гріна побудовано аналогічно методики викладеної у параграфі (4.1.2), де  $\Psi_0(y)$ ,  $\Psi_1(y)$  визначено формулами (4.54)

$$G(y, \xi) = \begin{cases} \Psi_0(y) * \Psi_1(\xi), & 0 \leq y < \xi \\ \Psi_1(y) * \Psi_0(\xi), & \xi < y \leq b \end{cases} \quad (4.55)$$

З урахуванням позначень компонент матриці Гріна та фундаментальних базисних матриць переміщення у просторі трансформант визначено за формулами.

$$u_n(y) = (-1)^n(1 + \mu_0) \int_0^b g_1(y, \xi) f(\xi) d\xi - \psi_0^2(y) p_n \quad (4.56)$$

$$v_n(y) = (-1)^n(1 + \mu_0) \int_0^b g_3(y, \xi) f(\xi) d\xi - \psi_0^4(y) p_n \quad (4.57)$$

Тут потрібно врахувати, що наведені формули (4.56), (4.57) містять невідому функцію  $f(\xi)$ . Згодом її буде визначено з крайової умови. Використовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (4.56), (4.56), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin(\alpha_n x), \quad (4.58)$$

$$v(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi}{a} \left( n - \frac{1}{2} \right) \quad (4.59)$$

### 4.2.3 Розв'язання сингулярного інтегрального рівняння задачі

Для того, щоби знайти невідому функцію  $f(\xi)$ , задовільнемо крайову умову  $u(x, y)|_{x=a} = 0$ .

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left( \ln \left[ \frac{1}{|x - \xi|} \right] + a_2(\xi, x) \right) f(\xi) d\xi = a_1(x), \quad (4.60)$$

де

$$a_1(x) = ap(x) - 2(2G + \lambda) \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_0^4(y) p_n \cos(\alpha_n x)|_{y=b} - \\ - 2\lambda \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_0^2(y) p_n \sin(\alpha_n x)|_{y=b} - \psi_0'(b) p_0$$

$$a_2(t) = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\partial g_4(\widetilde{y}, \xi)}{\partial y} + \lambda g_2(\widetilde{y}, \xi) \right] |_{y=b},$$

$$a_3(t, x) = \sum_{n=1}^N \cos(\alpha_n a) \cos(\alpha_n x) \left[ (2G + \lambda) \frac{\partial g_4(y, t)}{\partial y} + \alpha_n \lambda g_2(y, t) \right] |_{y=b} - \\ - a_2 \sum_{n=0}^N (-1)^n (2n + 1)^{-1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2a}(b-t)} \cos((2n + 1)\frac{\pi}{2a}x)$$

Аналогічно методиці, описаній в параграфі (4.1.3), сингулярне інтегральне рівняння (4.60) розв'язується за допомогою методу ортогональних поліномів [25]. В результаті якого невідому функцію  $f(\xi)$  розвинуто у ряд за поліномами Чебишова першого роду

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k T_k(\xi), \quad (4.61)$$

де  $\varphi_k$  - невідомі коефіцієнти,  $T_k(\xi)$  - поліном Чебишева першого роду.

Невідомі коефіцієнти  $\varphi_k$ ,  $k = \overline{0, \infty}$  знайдено шляхом розв'язання лінійної нескінченної системи алгебричних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів, котру в свою чергу розв'язано методом редукції

$$\frac{\phi_m \pi}{2m} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k g_{k,m} = f_m, \quad (4.62)$$

де  $g_{k,m} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 \frac{a_3(\xi, x)}{a_2(\xi)} \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi dx$ ,  $f_m = \int_{-1}^1 \frac{T_m(x) a_1(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$  інтеграли відомих функцій.

### 4.3 Висновки до четвертого розділу розділу

Отримано розв'язки статичної та динамічної задач для прямокутної області за умов другої основної задачі теорії пружності на бічних гранях. Досліджено поля переміщень, напружень та хвильові поля від різних видів навантаження, різних частот навантаження та розмірів прямокутної області.

Встановлено ... (за результатами числових розрахунків).

## 5 ЧИСЛОВІ РОЗРАХУНКИ ТА ЇХ АНАЛІЗ

### Висновки

В дисертаційній роботі досліджено напружений стан та хвильові поля плоскої прямокутної області під дією статичного та динамічного навантажень. За результатами дослідження:

1. Отримано методику аналітичного розв'язання задач теорії пружності для прямокутної області, що базується на застосуванні методу інтегральних перетворень безпосередньо до рівнянь Ламе. Це дозволяє уникнути використання допоміжних функцій та сформулювати розв'язок у термінах механічних характеристик.
2. Встановлено закономірності зміни напруженого стану прямокутної області в залежності від різних типів навантажень та різних типів граничних умов, які задано по її боковим торцях
3. Побудовано хвильові поля прямокутної пружної області та встановлено власні частоти тіла в залежності від типу динамічного навантаження на бокових торцях та геометричних розмірів області.

Ці результати дозволили встановити такі особливості поведінки полів переміщень та напружень:

- 1.

# Література

- [1] Nowacki W.: Teoria Sprezystosci. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa (1970).
- [2] V. M. Vihak, M. Y. Yuzvyak, A V. Yasinskij (1998) THE SOLUTION OF THE PLANE THERMOELASTICITY PROBLEM FOR A RECTANGULAR DOMAIN, Journal of Thermal Stresses, 21:5, 545-561, DOI: 10.1080/01495739808956162
- [3] Vihak V. M., Tokovyy Yu. (2002) Construction elementary solutions of the elasticity plane problem for the rectangular domain. International applied mechanics. Volume 32, Issue 7, pp. 79-87.
- [4] Grinchenko, V.T. and Meleshko, V.V.: Harmonic Vibrations and Waves in Elastic Bodies [in Russian]. Naukova Dumka, Kiev (1981).
- [5] Zhuk, Y.O., Ostos, O.K., Karnaukhova, T.V. Forced Vibrations and Nonstationary Heating of a Rectangular Viscoelastic Plate with Prestresses. Int Appl Mech 58, 423–435 (2022). <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01167-w>
- [6] Kushnir, R.M., Yasinsky, A.V., Tokovyy, Y.V. Reconstruction of the Thermal Load of a Functionally Graded Hollow Sphere by Surface Displacements. J Math Sci 270, 176–190 (2023). <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06339-8>
- [7] Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13, № 5. С. 3-120.
- [8] Zhuravlova Z. Yu. New approach of analytical inversion of Laplace

transform for some cases. Researches in Mathematics and Mechanics 24, 122-135 (2019).

- [9] Popov, V.G., Lytvyn, O.V. Stress State of an Elastic Body with Rigid Inclusion in the Form of a Broken Line Under Harmonic Wave Loads. J Math Sci 263, 39–51 (2022).  
<https://doi.org/10.1007/s10958-022-05905-w>
- [10] L.A. Fil'shtinskii, Yu.V. Shramko, G.F. Burnatnaya: Model of the Elastic Plate Stiffened with the Regular System of Nanorods. J. Nano- Electron. Phys. 5 No 3, 03020 (2013)  
<http://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/31952>
- [11] Popov G., (1982) The elastic stress concentration around dies, cuts, thin, inclusions and reinforcements (in Russian), Nauka, Moscow.
- [12] Oden J. T., Kikuchi N. (1982) Finite element methods for constrained problems in elasticity. International journal for Numerical Methods in Engineering. Volume 18, Issue 5.
- [13] Babuška, I. The finite element method with Lagrangian multipliers. Numer. Math. 20, 179–192 (1973).  
<https://doi.org/10.1007/BF01436561>
- [14] Maurizio A., A high-continuity finite element model for two-dimensional elastic problems. Computers and Structures, Volume 21, Issue 5 (1985), Pages 987-993, ISSN 0045-7949,  
[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(85\)90211-1](https://doi.org/10.1016/0045-7949(85)90211-1).
- [15] Liew K. M., Yuming Cheng, Kitipornchai S. (2005) Boundary element-free method (BEFM) and application to two dimensional elasticity problems. International journal for Numerical Methods in Engineering. Volume 65, Issue 8.



- [16] Dongyang Shi, Minghao Li, (2014) Superconvergence analysis of the stable conforming rectangular mixed nite elements for the linear elasticity problem Journal of Computati- onal Mathematics. Volume 32, Number 2, pp. 205-214.
- [17] Golovchan, V.T. On the solution of plane boundary-value problems of elasticity in a rectangle. Int Appl Mech 42, 84–89 (2006). <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0061-8>
- [18] Shyam N. Prasad, Sailendra N. Chatterjee (1973) Some mixed boundary value problems of elasticity in a rectangular domain. International journal of Solids and Structures. Volume 9, Issue 10, pp. 1193-1210.
- [19] Kovalenko, M.D., Menshova, I.V., Kerzhaev, A.P. et al. A boundary value problem in the theory of elasticity for a rectangle: exact solutions. Z. Angew. Math. Phys. 71, 199 (2020). <https://doi.org/10.1007/s00033-020-01425-2>
- [20] Bantsuri, R., Mzhavanadze, Sh. (2007). The mixed problem of the theory of elasticity for a rectangle weakened by unknown equiv-string holes. Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute. 145.
- [21] M Kashtalyan, Three-dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates, European Journal of Mechanics - A/Solids, Volume 23, Issue 5, 2004, Pages 853-864, ISSN 0997-7538, <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.04.002>.
- [22] Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов разрезов тонких включений и подкреплений. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 344 с.

- [23] Попов Г. Я., Абдыманов С. А., Ефимов В. В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. Алматы: Изд. Рацах, 1999. 133 с.
- [24] Попов Г.Я. Точные решения некоторых краевых задач механики деформируемого твёрдого тела. Одесса: Астропринт, 2013. 424 с.
- [25] Popov G. On the method of orthogonal polynomials in contact problems of the theory of elasticity. Journal of Applied Mathematics and Mechanics (1969). Volume 33, Issue 3, pp. 503-517
- [26] Gantmakher F. R. (1998) The theory of matrices. AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island.
- [27] Попов Г. Я., Реут В. В., Моисеев М. Г., Вайсфельд Н. Д. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів. Одесса: Астропринт, 2010. 120 с.
- [28] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды специальные функции. В 3 т. Т 1. Элементарные функции. 2-е издание, исправленное. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 632 с.
- [29] D. Nerukh, O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2019) Mixed plain boundary value problem of elasticity for a rectangular domain. 25-th International Conference Engineering Mechanics. 2019, May 13-16, Svratka, Czech Republic. p. 255
- [30] O. V. Pozhylenkov (2019) The stress state of a rectangular elastic domain. Researches in Mathematics and Mechanics, Volume 24, Issue 2(34), pp. 88-96
- [31] Пожиленков О. В. Вайсфельд Н. Д. (2019) Мішана крайова

задача теорії пружності для прямокутної області. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур, випуск 5, Львів, ст. 30-32

- [32] D. Nerukh, O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld 25-th international conference «Engineering Mechanics 2019» // Czech Republic, Svratka, 2019
- [33] Пожиленков О. В., Вайсфельд Н. Д. X Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» // Львів, 2019
- [34] O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2020) Stress state of a rectangular domain with the mixed boundary conditions. Procedia Structural Integrity, Volume 28, pp. 458-463
- [35] O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld «1st Virtual European Conference on Fracture» // Italy, 2020
- [36] O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2021) Stress state of an elastic rectangular domain under steady load. Procedia Structural Integrity, Volume 33, pp. 385-390
- [37] O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld «26th International Conference on Fracture and Structural Integrity» // Italy, Turin, 2021
- [38] O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld (2022) Dynamic mixed problem of elasticity for a rectangular domain. Recent trends in Wave Mechanics and Vibrations, pp. 211-218
- [39] O. Pozhylenkov, N. Vaysfeld «10th International Conference on Wave Mechanics and Vibrations» // Portugal, Lisbon, 2022

## Додаток В

### ЗНАХОДЖЕННЯ КОРЕНІВ

### РІВНЯННЯ $\det[M(s)] = 0$

Знайдемо корені  $\det[M(s)] = 0$

$$\begin{aligned}\det[M(s)] &= \begin{vmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{vmatrix} = \\ &= (s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) + (\alpha_n \mu_0 s)^2 = \\ &= s^4 + s^4 \mu_0 - s^2 \alpha_n^2 + s^2 \frac{\omega^2}{c_2^2} - s^2 \alpha_n^2 - s^2 \alpha_n^2 \mu_0 + \alpha_n^4 - \alpha_n^2 \frac{\omega^2}{c_2^2} - s^2 \alpha_n^2 \mu_0 - \\ &- s^2 \alpha_n^2 \mu_0 + \alpha_n^4 \mu_0 - \alpha_n^2 \frac{\omega^2}{c_2^2} + s^2 \frac{\omega^2}{c_1^2} + s^2 \mu_0 \frac{\omega^2}{c_1^2} - \alpha_n^2 \frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^4}{c_1^2 c_2^2} + s^2 \alpha_n^2 \mu_0^2 = \\ &= (1 + \mu_0) s^4 + (-2\alpha_n^2 - 2\alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_2^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2} + \mu_0 \frac{\omega^2}{c_1^2}) s^2 + (\alpha_n^4 - \alpha_n^2 \frac{\omega^2}{c_2^2} + \\ &+ \alpha_n^4 \mu_0 - \alpha_n^2 \mu_0 \frac{\omega^2}{c_2^2} - \alpha_n^2 \frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^4}{c_1^2 c_2^2}) \end{aligned}$$

Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}a_1 &= -2\alpha_n^2 - 2\alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_2^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2} + \mu_0 \frac{\omega^2}{c_1^2} \\ a_2 &= \alpha_n^4 - \alpha_n^2 \frac{\omega^2}{c_2^2} + \alpha_n^4 \mu_0 - \alpha_n^2 \mu_0 \frac{\omega^2}{c_2^2} - \alpha_n^2 \frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^4}{c_1^2 c_2^2}\end{aligned}$$

Враховучи введені позначення отримаємо наступне рівняння:

$$(1 + \mu_0) s^4 + a_1 s^2 + a_2 = 0$$

Таким чином отримаємо наступні корені рівняння:

$$\begin{aligned}s_1 &= \sqrt{\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4(1 + \mu_0)a_2}}{2(1 + \mu_0)}} \\s_2 &= -\sqrt{\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4(1 + \mu_0)a_2}}{2(1 + \mu_0)}} \\s_3 &= \sqrt{\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4(1 + \mu_0)a_2}}{2(1 + \mu_0)}} \\s_4 &= -\sqrt{\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4(1 + \mu_0)a_2}}{2(1 + \mu_0)}}\end{aligned}$$

У випадку статичної задачі коли  $\omega = 0$  отримаємо наступні рівняння:

$$(1 + \mu_0)(s^4 - 2\alpha_n^2 s^2 + \alpha_n^4) = 0$$

Таким чином отримаємо наступні корені

$$s_{1,2} = \alpha_n$$

$$s_{3,4} = -\alpha_n$$

# Додаток С

## ЗНАХОДЖЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ БАЗИСНИХ МАТРИЦЬ $\Psi_i(y)$ , $i = \overline{0, 1}$

Для знаходження фундаентальних базісних матриць  $\Psi_i(y)$  випишемо умови за яких будемо шукати коефіцієнти  $C_k^i$ ,  $i = \overline{0, 1}$ ,  $k = \overline{1, 2}$

$$U_0 [\Psi_0(y)] = I, \quad U_1 [\Psi_0(y)] = 0 \quad (\text{Ап.С. 1})$$

$$U_0 [\Psi_1(y)] = 0, \quad U_1 [\Psi_1(y)] = I, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_0 [\Psi_i(y)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix} * \Psi_i'(b) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix} * \Psi_i(b)$$

$$U_1 [\Psi_i(y)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \Psi_i'(0) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \Psi_i(0)$$

Введемо наступні позначення:

$$C_1^i = \begin{pmatrix} d_1^i & d_2^i \\ d_3^i & d_4^i \end{pmatrix}, \quad C_2^i = \begin{pmatrix} f_1^i & f_2^i \\ f_3^i & f_4^i \end{pmatrix}, \quad (\text{Ап.С. 2})$$

### Випадок динамічної задачі

Випадку статичної задачі випишемо значення елементів матриць  $\Psi_i(y)$ ,  $\Psi_i'(y)$ , враховуючи позначення (Ап.С. 2).

Елементи матриці  $\Psi_i(y)$ :

$$\begin{aligned}\Psi_i(y)_{1,1} = & \frac{1}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}[(s_1^2 + s_1^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_1^i + \\ & + (s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_3^i] + [(s_2^2 + s_2^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_1^i + \\ & + (s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_3^i]\frac{1}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_i(y)_{1,2} = & \frac{1}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}[(s_1^2 + s_1^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_2^i + \\ & + (s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_4^i] + [(s_2^2 + s_2^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_2^i + \\ & + (s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_4^i]\frac{1}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_i(y)_{2,1} = & \frac{1}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}[(-s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_1^i + \\ & + (s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_3^i] + [(-s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_1^i + \\ & + (s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_3^i]\frac{1}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_i(y)_{2,2} = & \frac{1}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}[(-s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_2^i + \\ & + (s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_4^i] + [(-s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_2^i + \\ & + (s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_4^i]\frac{1}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}\end{aligned}$$

Елементи матриці  $\Psi'_i(y)$ :

$$\begin{aligned}\Psi'_i(y)_{1,1} = & \frac{1}{2(s_1^2 - s_2^2)}[(s_1^2 + s_1^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_1^i + \\ & + (s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_3^i] + [(s_2^2 + s_2^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_1^i + \\ & + (s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_3^i]\frac{s_2}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi'_i(y)_{1,2} &= \frac{1}{2(s_1^2 - s_2^2)} [(s_1^2 + s_1^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_2^i + \\
&+ (s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_4^i] + [(s_2^2 + s_2^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_2^i + \\
&+ (s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_4^i] \frac{s_2}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi'_i(y)_{2,1} &= \frac{1}{2(s_1^2 - s_2^2)} [(-s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_1^i + \\
&+ (s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_3^i] + [(-s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_1^i + \\
&+ (s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_3^i] \frac{s_2}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi'_i(y)_{2,2} &= \frac{1}{2(s_1^2 - s_2^2)} [(-s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} - e^{-s_1y})d_2^i + \\
&+ (s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1y} + e^{-s_1y})d_4^i] + [(-s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} - e^{-s_2y})f_2^i + \\
&+ (s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2y} + e^{-s_2y})f_4^i] \frac{s_2}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}
\end{aligned}$$



Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}
a_1(y) &= \frac{(s_1^2 + s_1^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1y} - e^{-s_1y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}, \\
a_2(y) &= \frac{(s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} + e^{-s_1y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \\
a_3(y) &= \frac{(s_2^2 + s_2^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2y} - e^{-s_2y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)}, \\
a_4(y) &= \frac{(s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} + e^{-s_2y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \\
a_5(y) &= \frac{(-s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} + e^{-s_1y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)}, \\
a_6(y) &= \frac{(s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1y} - e^{-s_1y})}{2s_1(s_1^2 - s_2^2)} \\
a_7(y) &= \frac{(-s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} - e^{-s_2y})}{2s_2(s_2^2 + s_1^2)}, \\
a_8(y) &= \frac{(s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2y} - e^{-s_2y})}{2s_2(s_2^2 - s_1^2)} \\
a_9(y) &= \frac{(s_1^2 + s_1^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_1y} + e^{-s_1y})}{2(s_1^2 - s_2^2)}, \\
a_{10}(y) &= \frac{(s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} - e^{-s_1y})}{2(s_1^2 - s_2^2)} \\
a_{11}(y) &= \frac{(s_2^2 + s_2^2\mu_0 - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(e^{s_2y} + e^{-s_2y})}{2(s_2^2 - s_1^2)}, \\
a_{12}(y) &= \frac{(s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} - e^{-s_2y})}{2(s_2^2 - s_1^2)} \\
a_{13}(y) &= \frac{(-s_1\alpha_n\mu_0)(e^{s_1y} - e^{-s_1y})}{2(s_1^2 - s_2^2)}, \\
a_{14}(y) &= \frac{(s_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_1y} + e^{-s_1y})}{2(s_1^2 - s_2^2)} \\
a_{15}(y) &= \frac{(-s_2\alpha_n\mu_0)(e^{s_2y} - e^{-s_2y})}{2(s_2^2 - s_1^2)}, \\
a_{16}(y) &= \frac{(s_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2\mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2})(e^{s_2y} + e^{-s_2y})}{2(s_2^2 - s_1^2)}
\end{aligned} \tag{Ап.С. 3}$$

## Випадок статичної задачі

Випадку статичної задачі випишемо значення елементів матриць  $\Psi_i(y)$ ,  $\Psi'_i(y)$ , враховуючи позначення (Ап.С. 2).

Елементи матриці  $\Psi_i(y)$ :

$$\begin{aligned}\Psi_i(y)_{1,1} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} [(y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0)d_1^i + (y\alpha_n\mu_0)d_3^i] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} [(y\alpha_n\mu_0 - 2 - \mu_0)f_1^i + (-y\alpha_n\mu_0)f_3^i]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_i(y)_{1,2} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} [(y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0)d_2^i + (y\alpha_n\mu_0)d_4^i] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} [(y\alpha_n\mu_0 - 2 - \mu_0)f_2^i + (-y\alpha_n\mu_0)f_4^i]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_i(y)_{2,1} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} [(-y\alpha_n\mu_0)d_1^i + (-y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0)d_3^i] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} [(y\alpha_n\mu_0)f_1^i + (-y\alpha_n\mu_0 - 2 - \mu_0)f_3^i]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_i(y)_{2,2} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} [(-y\alpha_n\mu_0)d_2^i + (-y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0)d_4^i] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} [(y\alpha_n\mu_0)f_2^i + (-y\alpha_n\mu_0 - 2 - \mu_0)f_4^i]\end{aligned}$$

Елементи матриці  $\Psi'_i(y)$ :

$$\begin{aligned}\Psi'_i(y)_{1,1} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4} [(y\alpha_n\mu_0 + 2 + 2\mu_0)d_1^i + (y\alpha_n\mu_0 + \mu_0)d_3^i] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4} [(-y\alpha_n\mu_0 + 2 + 2\mu_0)f_1^i + (y\alpha_n\mu_0 - \mu_0)f_3^i]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi'_i(y)_{1,2} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4} [(y\alpha_n\mu_0 + 2 + 2\mu_0)d_2^i + (y\alpha_n\mu_0 + \mu_0)d_4^i] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4} [(-y\alpha_n\mu_0 + 2 + 2\mu_0)f_2^i + (y\alpha_n\mu_0 - \mu_0)f_4^i]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi'_i(y)_{2,1} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4} [(-y\alpha_n\mu_0 - \mu_0)d_1^i + (-y\alpha_n\mu_0 + 2)d_3^i] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4} [(-y\alpha_n\mu_0 + \mu_0)f_1^i + (y\alpha_n\mu_0 + 2)f_3^i]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi'_i(y)_{2,2} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4} [(-y\alpha_n\mu_0 - \mu_0)d_2^i + (-y\alpha_n\mu_0 + 2)d_4^i] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{(1 + \mu_0)4} [(-y\alpha_n\mu_0 + \mu_0)f_2^i + (y\alpha_n\mu_0 + 2)f_4^i]\end{aligned}$$

Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}a_1(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0)}{(1 + \mu_0)4\alpha_n}, & a_2(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0)}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} & (\text{Ап.С. 4}) \\ a_3(y) &= \frac{e^{-\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0 - 2 - \mu_0)}{(1 + \mu_0)4\alpha_n}, & a_4(y) &= \frac{e^{-\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0)}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} \\ a_5(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0)}{(1 + \mu_0)4\alpha_n}, & a_6(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0)}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} \\ a_7(y) &= \frac{e^{-\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0)}{(1 + \mu_0)4\alpha_n}, & a_8(y) &= \frac{e^{-\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0 - 2 - \mu_0)}{(1 + \mu_0)4\alpha_n} \\ a_9(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0 + 2 + 2\mu_0)}{(1 + \mu_0)4}, & a_{10}(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0 + \mu_0)}{(1 + \mu_0)4} \\ a_{11}(y) &= \frac{e^{-\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0 + 2 + 2\mu_0)}{(1 + \mu_0)4}, & a_{12}(y) &= \frac{e^{-\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0 - \mu_0)}{(1 + \mu_0)4} \\ a_{13}(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0 - \mu_0)}{(1 + \mu_0)4}, & a_{14}(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0 + 2)}{(1 + \mu_0)4} \\ a_{15}(y) &= \frac{e^{-\alpha_n y}(-y\alpha_n\mu_0 + \mu_0)}{(1 + \mu_0)4}, & a_{16}(y) &= \frac{e^{-\alpha_n y}(y\alpha_n\mu_0 + 2)}{(1 + \mu_0)4}\end{aligned}$$

## Загальна схема побудови систем алгебричних рівнянь

Враховуючи введені позначення (Ап.С. 3), (Ап.С. 4) складемо систему алгебричних рівнянь використовуючи граничні умови (Ап.С. 1).

Запишемо елементи вихідної матриці  $U_0 [\Psi_i(y)]$ :

$$\begin{aligned}U_0 [\Psi_i(y)]_{1,1} &= (a_9(b) - \alpha_n a_5(b))d_1^i + (a_{10}(b) - \alpha_n a_6(b))d_3^i + \\ &+ (a_{11}(b) - \alpha_n a_7(b))f_1^i + (a_{12}(b) - \alpha_n a_8(b))f_3^i\end{aligned}$$

$$U_0 [\Psi_i(y)]_{1,2} = (a_9(b) - \alpha_n a_5(b))d_2^i + (a_{10}(b) - \alpha_n a_6(b))d_4^i + \\ + (a_{11}(b) - \alpha_n a_7(b))f_2^i + (a_{12}(b) - \alpha_n a_8(b))f_4^i$$

$$U_0 [\Psi_i(y)]_{2,1} = ((2G + \lambda)a_{13}(b) + \alpha_n \lambda a_1(b))d_1^i + \\ + ((2G + \lambda)a_{14}(b) + \alpha_n \lambda a_2(b))d_3^i + ((2G + \lambda)a_{15} + \alpha_n \lambda a_3(b))f_1^i + \\ + ((2G + \lambda)a_{16}(b) + \alpha_n \lambda a_4(b))f_3^i$$

$$U_0 [\Psi_i(y)]_{2,2} = ((2G + \lambda)a_{13}(b) + \alpha_n \lambda a_1(b))d_2^i + \\ + ((2G + \lambda)a_{14}(b) + \alpha_n \lambda a_2(b))d_4^i + ((2G + \lambda)a_{15} + \alpha_n \lambda a_3(b))f_2^i + \\ + ((2G + \lambda)a_{16}(b) + \alpha_n \lambda a_4(b))f_4^i$$

Записано елементи вихідної матриці  $U_1 [\Psi_i(y)]$ :

$$U_1 [\Psi_i(y)]_{1,1} = (a_9(0) - \alpha_n a_5(0))d_1^i + (a_{10}(0) - \alpha_n a_6(0))d_3^i + \\ + (a_{11}(0) - \alpha_n a_7(0))f_1^i + (a_{12}(0) - \alpha_n a_8(0))f_3^i$$

$$U_1 [\Psi_i(y)]_{1,2} = (a_9(0) - \alpha_n a_5(b))d_2^i + (a_{10}(0) - \alpha_n a_6(0))d_4^i + \\ + (a_{11}(0) - \alpha_n a_7(0))f_2^i + (a_{12}(0) - \alpha_n a_8(0))f_4^i$$

$$U_1 [\Psi_i(y)]_{2,1} = a_5(0)d_1^i + a_6(0)d_3^i + a_7(0)f_1^i + a_8(0)f_3^i$$

$$U_1 [\Psi_i(y)]_{2,2} = a_5(0)d_2^i + a_6(0)d_4^i + a_7(0)f_2^i + a_8(0)f_4^i$$

Введено наступні позначення:

$$\begin{aligned}
b_1 &= (a_9(b) - \alpha_n a_5(b)), & b_2 &= (a_{10}(b) - \alpha_n a_6(b)) \\
b_3 &= (a_{11}(b) - \alpha_n a_7(b)), & b_4 &= (a_{12}(b) - \alpha_n a_8(b)) \\
b_5 &= ((2G + \lambda)a_{13}(b) + \alpha_n \lambda a_1(b)), & b_6 &= ((2G + \lambda)a_{14}(b) + \alpha_n \lambda a_2(b)) \\
b_7 &= ((2G + \lambda)a_{15} + \alpha_n \lambda a_3(b)), & b_8 &= ((2G + \lambda)a_{16}(b) + \alpha_n \lambda a_4(b)) \\
b_9 &= (a_9(0) - \alpha_n a_5(0)), & b_{10} &= (a_{10}(0) - \alpha_n a_6(0)) \\
b_{11} &= (a_{11}(0) - \alpha_n a_7(0)), & b_{12} &= (a_{12}(0) - \alpha_n a_8(0)) \\
b_{13} &= a_5(0), & b_{14} &= a_6(0) \\
b_{15} &= a_7(0), & b_{16} &= a_8(0)
\end{aligned}$$

Враховуючи останнє, виписано системи відносно невідомих коефіцієнтів  $d_k^i, f_k^i, i = \overline{0, 1}, k = \overline{1, 4}$

$$\begin{cases}
b_1 d_1^0 + b_2 d_3^0 + b_3 f_1^0 + b_4 f_3^0 = 1 \\
b_5 d_1^0 + b_6 d_3^0 + b_7 f_1^0 + b_8 f_3^0 = 0 \\
b_9 d_1^0 + b_{10} d_3^0 + b_{11} f_1^0 + b_{12} f_3^0 = 0 \\
b_{13} d_1^0 + b_{14} d_3^0 + b_{15} f_1^0 + b_{16} f_3^0 = 0
\end{cases}, \quad \begin{cases}
b_1 d_2^0 + b_2 d_4^0 + b_3 f_2^0 + b_4 f_4^0 = 0 \\
b_5 d_2^0 + b_6 d_4^0 + b_7 f_2^0 + b_8 f_4^0 = 1 \\
b_9 d_2^0 + b_{10} d_4^0 + b_{11} f_2^0 + b_{12} f_4^0 = 0 \\
b_{13} d_2^0 + b_{14} d_4^0 + b_{15} f_2^0 + b_{16} f_4^0 = 0
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
b_1 d_1^1 + b_2 d_3^1 + b_3 f_1^1 + b_4 f_3^1 = 0 \\
b_5 d_1^1 + b_6 d_3^1 + b_7 f_1^1 + b_8 f_3^1 = 0 \\
b_9 d_1^1 + b_{10} d_3^1 + b_{11} f_1^1 + b_{12} f_3^1 = 1 \\
b_{13} d_1^1 + b_{14} d_3^1 + b_{15} f_1^1 + b_{16} f_3^1 = 0
\end{cases}, \quad \begin{cases}
b_1 d_2^1 + b_2 d_4^1 + b_3 f_2^1 + b_4 f_4^1 = 0 \\
b_5 d_2^1 + b_6 d_4^1 + b_7 f_2^1 + b_8 f_4^1 = 0 \\
b_9 d_2^1 + b_{10} d_4^1 + b_{11} f_2^1 + b_{12} f_4^1 = 0 \\
b_{13} d_2^1 + b_{14} d_4^1 + b_{15} f_2^1 + b_{16} f_4^1 = 1
\end{cases}$$

## Фінальний розв'язок для випадку динамічної задачі

З урахуванням, що в динамічному випадку  $b_{10} = 0, b_{12} = 0, b_{14} = 0, b_{16} = 0$ , отримано наступні лінійні системи алгебричних рівнянь

відносно невідомих коефіцієнтів  $d_k^i, f_k^i, i = \overline{0, 1}, k = \overline{1, 4}$ :

$$\begin{cases} b_1 d_1^0 + b_2 d_3^0 + b_3 f_1^0 + b_4 f_3^0 = 1 \\ b_5 d_1^0 + b_6 d_3^0 + b_7 f_1^0 + b_8 f_3^0 = 0 \\ b_9 d_1^0 + b_{11} f_1^0 = 0 \\ b_{13} d_1^0 + b_{15} f_1^0 = 0 \end{cases}, \begin{cases} b_1 d_2^0 + b_2 d_4^0 + b_3 f_2^0 + b_4 f_4^0 = 0 \\ b_5 d_2^0 + b_6 d_4^0 + b_7 f_2^0 + b_8 f_4^0 = 1 \\ b_9 d_2^0 + b_{11} f_2^0 = 0 \\ b_{13} d_2^0 + b_{15} f_2^0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 d_1^1 + b_2 d_3^1 + b_3 f_1^1 + b_4 f_3^1 = 0 \\ b_5 d_1^1 + b_6 d_3^1 + b_7 f_1^1 + b_8 f_3^1 = 0 \\ b_9 d_1^1 + b_{11} f_1^1 = 1 \\ b_{13} d_1^1 + b_{15} f_1^1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} b_1 d_2^1 + b_2 d_4^1 + b_3 f_2^1 + b_4 f_4^1 = 0 \\ b_5 d_2^1 + b_6 d_4^1 + b_7 f_2^1 + b_8 f_4^1 = 0 \\ b_9 d_2^1 + b_{11} f_2^1 = 0 \\ b_{13} d_2^1 + b_{15} f_2^1 = 1 \end{cases}$$

Знайдено наступні розв'язки

$$\begin{cases} d_1^0 = 0, \\ d_3^0 = -\frac{b_8}{b_4 b_6 - b_2 b_8}, \\ f_1^0 = 0, \\ f_3^0 = \frac{b_6}{b_4 b_6 - b_2 b_8} \end{cases}, \begin{cases} d_2^0 = 0, \\ d_4^0 = -\frac{b_4}{b_2 b_8 - b_4 b_6}, \\ f_2^0 = 0, \\ f_4^0 = \frac{b_2}{b_2 b_8 - b_4 b_6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1^1 = -\frac{b_{15}}{b_{11} b_{13} - b_9 b_{15}}, \\ d_3^1 = -\frac{b_4(b_5 b_{15} - b_7 b_{13}) - b_8(b_1 b_{15} - b_3 b_{13})}{(b_{11} b_{13} - b_9 b_{15})(b_2 b_8 - b_4 b_6)}, \\ f_1^1 = \frac{b_{13}}{b_{11} b_{13} - b_9 b_{15}}, \\ f_3^1 = \frac{b_2(b_5 b_{15} - b_7 b_{13}) - b_6(b_1 b_{15} - b_3 b_{13})}{(b_{11} b_{13} - b_9 b_{15})(b_2 b_8 - b_4 b_6)} \end{cases}, \begin{cases} d_2^1 = -\frac{b_{11}}{b_9 b_{15} - b_{11} b_{13}}, \\ d_4^1 = -\frac{b_4(b_5 b_{11} - b_7 b_9) - b_8(b_1 b_{11} - b_3 b_9)}{(b_9 b_{15} - b_{11} b_{13})(b_2 b_8 - b_4 b_6)}, \\ f_2^1 = \frac{b_9}{b_9 b_{15} - b_{11} b_{13}}, \\ f_4^1 = \frac{b_2(b_5 b_{11} - b_7 b_9) - b_6(b_1 b_{11} - b_3 b_9)}{(b_9 b_{15} - b_{11} b_{13})(b_2 b_8 - b_4 b_6)} \end{cases}$$

## Фінальний розв'язок для випадку статичної задачі

З урахуванням, що в статичному випадку  $b_{13} = 0, b_{15} = 0$ , отримано наступні лінійні системи алгебричних рівнянь відносно невідомих

коефіцієнтів  $d_k^i, f_k^i, i = \overline{0, 1}, k = \overline{1, 4}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 d_1^0 + b_2 d_3^0 + b_3 f_1^0 + b_4 f_3^0 = 1 \\ b_5 d_1^0 + b_6 d_3^0 + b_7 f_1^0 + b_8 f_3^0 = 0 \\ b_9 d_1^0 + b_{10} d_3^0 + b_{11} f_1^0 + b_{12} f_3^0 = 0 \\ b_{14} d_3^0 + b_{16} f_3^0 = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 d_2^0 + b_2 d_4^0 + b_3 f_2^0 + b_4 f_4^0 = 0 \\ b_5 d_2^0 + b_6 d_4^0 + b_7 f_2^0 + b_8 f_4^0 = 1 \\ b_9 d_2^0 + b_{10} d_4^0 + b_{11} f_2^0 + b_{12} f_4^0 = 0 \\ b_{14} d_4^0 + b_{16} f_4^0 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 d_1^1 + b_2 d_3^1 + b_3 f_1^1 + b_4 f_3^1 = 0 \\ b_5 d_1^1 + b_6 d_3^1 + b_7 f_1^1 + b_8 f_3^1 = 0 \\ b_9 d_1^1 + b_{10} d_3^1 + b_{11} f_1^1 + b_{12} f_3^1 = 1 \\ b_{14} d_3^1 + b_{16} f_3^1 = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 d_2^1 + b_2 d_4^1 + b_3 f_2^1 + b_4 f_4^1 = 0 \\ b_5 d_2^1 + b_6 d_4^1 + b_7 f_2^1 + b_8 f_4^1 = 0 \\ b_9 d_2^1 + b_{10} d_4^1 + b_{11} f_2^1 + b_{12} f_4^1 = 0 \\ b_{14} d_4^1 + b_{16} f_4^1 = 1 \end{array} \right.$$

Знайдено наступні розв'язки

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1^0 = \frac{b_{16}(b_6 b_{11} - b_7 b_{10}) + b_{14}(b_7 b_{12} - b_8 b_{11})}{(b_8 b_{14} - b_6 b_{16})(b_3 b_9 - b_1 b_{11}) + (b_{10} b_{16} - b_{12} b_{14})(b_3 b_5 - b_1 b_7) + (b_2 b_{16} - b_4 b_{14})(b_7 b_9 - b_5 b_{11})}, \\ d_3^0 = \frac{b_{16}(b_7 b_9 - b_5 b_{11})}{(b_8 b_{14} - b_6 b_{16})(b_3 b_9 - b_1 b_{11}) + (b_{10} b_{16} - b_{12} b_{14})(b_3 b_5 - b_1 b_7) + (b_2 b_{16} - b_4 b_{14})(b_7 b_9 - b_5 b_{11})}, \\ f_1^0 = \frac{b_{16}(b_5 b_{10} - b_6 b_9) + b_{14}(b_8 b_9 - b_5 b_{12})}{(b_8 b_{14} - b_6 b_{16})(b_3 b_9 - b_1 b_{11}) + (b_{10} b_{16} - b_{12} b_{14})(b_3 b_5 - b_1 b_7) + (b_2 b_{16} - b_4 b_{14})(b_7 b_9 - b_5 b_{11})}, \\ f_3^0 = \frac{b_{14}(b_{11} b_5 - b_7 b_9)}{(b_8 b_{14} - b_6 b_{16})(b_3 b_9 - b_1 b_{11}) + (b_{10} b_{16} - b_{12} b_{14})(b_3 b_5 - b_1 b_7) + (b_2 b_{16} - b_4 b_{14})(b_7 b_9 - b_5 b_{11})}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_2^0 = \frac{b_{16}(b_3 b_{10} - b_2 b_{11}) + b_{14}(b_4 b_{11} - b_3 b_{12})}{(b_8 b_{14} - b_6 b_{16})(b_3 b_9 - b_1 b_{11}) + (b_{10} b_{16} - b_{12} b_{14})(b_3 b_5 - b_1 b_7) + (b_2 b_{16} - b_4 b_{14})(b_7 b_9 - b_5 b_{11})}, \\ d_4^0 = \frac{b_{16}(b_1 b_{11} - b_3 b_9)}{(b_8 b_{14} - b_6 b_{16})(b_3 b_9 - b_1 b_{11}) + (b_{10} b_{16} - b_{12} b_{14})(b_3 b_5 - b_1 b_7) + (b_2 b_{16} - b_4 b_{14})(b_7 b_9 - b_5 b_{11})}, \\ f_2^0 = \frac{b_{16}(b_2 b_9 - b_1 b_{10}) + b_{14}(b_1 b_{12} - b_4 b_9)}{(b_8 b_{14} - b_6 b_{16})(b_3 b_9 - b_1 b_{11}) + (b_{10} b_{16} - b_{12} b_{14})(b_3 b_5 - b_1 b_7) + (b_2 b_{16} - b_4 b_{14})(b_7 b_9 - b_5 b_{11})}, \\ f_4^0 = \frac{b_{14}(b_3 b_9 - b_1 b_{11})}{(b_8 b_{14} - b_6 b_{16})(b_3 b_9 - b_1 b_{11}) + (b_{10} b_{16} - b_{12} b_{14})(b_3 b_5 - b_1 b_7) + (b_2 b_{16} - b_4 b_{14})(b_7 b_9 - b_5 b_{11})} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1^1 = \frac{b_{14}(b_3 b_8 - b_4 b_7) + b_{16}(b_2 b_7 - b_3 b_6)}{(b_8 b_{14} - b_6 b_{16})(b_3 b_9 - b_1 b_{11}) + (b_{10} b_{16} - b_{12} b_{14})(b_3 b_5 - b_1 b_7) + (b_2 b_{16} - b_4 b_{14})(b_7 b_9 - b_5 b_{11})}, \\ d_3^1 = \frac{b_{16}(b_3 b_5 - b_1 b_7)}{(b_8 b_{14} - b_6 b_{16})(b_3 b_9 - b_1 b_{11}) + (b_{10} b_{16} - b_{12} b_{14})(b_3 b_5 - b_1 b_7) + (b_2 b_{16} - b_4 b_{14})(b_7 b_9 - b_5 b_{11})}, \\ f_1^1 = \frac{b_{14}(b_4 b_5 - b_1 b_8) + b_{16}(b_1 b_6 - b_2 b_5)}{(b_8 b_{14} - b_6 b_{16})(b_3 b_9 - b_1 b_{11}) + (b_{10} b_{16} - b_{12} b_{14})(b_3 b_5 - b_1 b_7) + (b_2 b_{16} - b_4 b_{14})(b_7 b_9 - b_5 b_{11})}, \\ f_3^1 = \frac{b_{14}(b_1 b_7 - b_3 b_5)}{(b_8 b_{14} - b_6 b_{16})(b_3 b_9 - b_1 b_{11}) + (b_{10} b_{16} - b_{12} b_{14})(b_3 b_5 - b_1 b_7) + (b_2 b_{16} - b_4 b_{14})(b_7 b_9 - b_5 b_{11})} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_2^1 = \frac{b_{10}(b_4b_7-b_3b_8)+b_{11}(b_2b_8-b_4b_6)+b_{12}(b_3b_6-b_2b_7)}{(b_8b_{14}-b_6b_{16})(b_3b_9-b_1b_{11})+(b_{10}b_{16}-b_{12}b_{14})(b_3b_5-b_1b_7)+(b_2b_{16}-b_4b_{14})(b_7b_9-b_5b_{11})}, \\ d_4^1 = \frac{b_{11}(b_4b_5-b_1b_8)+b_{12}(b_1b_7-b_3b_5)+b_9(b_3b_8-b_4b_7)}{(b_8b_{14}-b_6b_{16})(b_3b_9-b_1b_{11})+(b_{10}b_{16}-b_{12}b_{14})(b_3b_5-b_1b_7)+(b_2b_{16}-b_4b_{14})(b_7b_9-b_5b_{11})}, \\ f_2^1 = \frac{b_{10}(b_1b_8-b_4b_5)+b_{12}(b_2b_5-b_1b_6)+b_9(b_4b_6-b_2b_8)}{(b_8b_{14}-b_6b_{16})(b_3b_9-b_1b_{11})+(b_{10}b_{16}-b_{12}b_{14})(b_3b_5-b_1b_7)+(b_2b_{16}-b_4b_{14})(b_7b_9-b_5b_{11})}, \\ f_4^1 = \frac{b_{10}(b_3b_5-b_1b_7)+b_{11}(b_1b_6-b_2b_5)+b_9(b_2b_7-b_3b_6)}{(b_8b_{14}-b_6b_{16})(b_3b_9-b_1b_{11})+(b_{10}b_{16}-b_{12}b_{14})(b_3b_5-b_1b_7)+(b_2b_{16}-b_4b_{14})(b_7b_9-b_5b_{11})} \end{array} \right.$$



## Додаток D

# ЗНАХОДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ $v_0(y)$ НЕОДНОРІДНОЇ ЗАДАЧІ

### Випадок динамічної задачі

Знайдемо  $v_0(y)$  розглянувши задачу у просторі трансформант (2.9), (2.10) при  $n = 0$ ,  $\alpha_n = 0$ . Отримаємо наступну задачу відносно  $v_0(y)$ :

$$v_0''(y) + \frac{\omega^2}{c_2^2(1 + \mu_0)}v_0(y) = \frac{f(y)}{1 + \mu_0}$$

Де  $f(y) = (\frac{\alpha_2}{\beta_2}\chi_4(y)\cos(\alpha_n a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\chi_2(y)) - \frac{\mu_0}{(1+\mu_0)}(\chi_3'(y)\cos(\alpha_n a) - \chi_1'(y))$ .

Та граничні умови:

$$(2G + \lambda)v_0'(b) = -p_0, \quad v_0(0) = 0, \quad p_0 = \int_0^a p(x)dx$$

Спочатку знайдемо фундаментальну базисну систему розв'язків задачі  $\psi_0(y)$ ,  $\psi_1(y)$ :

$$\psi_i''(y) + \frac{\omega^2}{c_2^2(1 + \mu_0)}\psi_i(y) = 0, i = \overline{0, 1}$$

$$\begin{cases} \psi_0(0) = 1 \\ \psi_0'(b) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \psi_1(0) = 0 \\ \psi_1'(b) = 1 \end{cases}$$

Розв'язок однорідної задачі відносно  $\psi_i(y)$  має вигляд:

$$\psi_i(y) = c_1^i \cos\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) + c_2^i \sin\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) \quad (5.1)$$

Враховуючи граничні умови отримаємо остаточний вигляд  $\psi_0(y)$ ,  $\psi_1(y)$ :

$$\begin{cases} \psi_0(y) = \cos\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) + tg\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}b\right) \sin\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) \\ \psi_1(y) = \frac{c_2(1+\mu_0)}{\omega \cos\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}b\right)} \sin\left(\frac{\omega}{c_2\sqrt{1+\mu_0}}y\right) \end{cases}$$

Побудуємо тепер функцію Гріна задачі:

$$g(y, \xi) = \begin{cases} -a_1(\xi)\psi_1(y), & 0 \leq y < \xi \\ a_0(\xi)\psi_0(y), & \xi < y \leq b \end{cases}$$

Де  $a_0(\xi)$ ,  $a_1(\xi)$  будуть знайдені з наступної системи

$$\begin{cases} a_0(\xi)\psi_0'(\xi) + a_1(\xi)\psi_1'(\xi) = 1 \\ a_0(\xi)\psi_0(\xi) + a_1(\xi)\psi_1(\xi) = 0 \end{cases}$$

Таким чином остаточний розв'язок задачі відносно  $v_0(y)$  буде мати наступний вигляд:

$$v_0(y) = \frac{1}{(1 + \mu_0)} \int_0^b g(y, \xi) f(\xi) d\xi - \psi_0(y) \frac{p_0}{2G + \lambda}$$

## Випадок статичної задачі

У випадку статичної задачі коли  $\omega = 0$  отримаємо наступну задачу відносно  $v_0(y)$ :

$$v_0''(y) = \frac{f(y)}{1 + \mu_0}$$

$$(2G + \lambda)v_0'(b) = -p_0, \quad v_0(0) = 0, \quad p_0 = \int_0^a p(x) dx$$

Спочатку знайдем фундаментальну базисну систему розв'язків задачі  $\psi_0(y)$ ,  $\psi_1(y)$ :

$$\begin{aligned} \psi_i''(y) &= 0, i = \overline{0, 1} \\ \begin{cases} \psi_0(0) = 1 \\ \psi_0'(b) = 0 \end{cases}, & \begin{cases} \psi_1(0) = 0 \\ \psi_1'(b) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок однорідної задачі відносно  $\psi_i(y)$  має вигляд:

$$\psi_i(y) = c_1^i + c_2^i y \tag{5.2}$$

Враховуючи граничні умови отримаємо остаточний вигляд  $\psi_0(y)$ ,  $\psi_1(y)$ :

$$\begin{cases} \psi_0(y) = 1 \\ \psi_1(y) = y \end{cases}$$

Побудуємо тепер функцію Гріна задачі:

$$g(y, \xi) = \begin{cases} -a_1(\xi)\psi_1(y), 0 \leq y < \xi \\ a_0(\xi)\psi_0(y), \xi < y \leq b \end{cases}$$

Де  $a_0(\xi)$ ,  $a_1(\xi)$  будуть знайдені з наступної системи

$$\begin{cases} a_0(\xi)\psi'_0(\xi) + a_1(\xi)\psi'_1(\xi) = 1 \\ a_0(\xi)\psi_0(\xi) + a_1(\xi)\psi_1(\xi) = 0 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} a_0(\xi) = -\xi \\ a_1(\xi) = 1 \end{cases}$$

Таким чином остаточний розв'язок задачі відносно  $v_0(y)$  буде мати наступний вигляд:

$$v_0(y) = \frac{1}{(1 + \mu_0)} \int_0^b g(y, \xi) f(\xi) d\xi - \psi_0(y) \frac{p_0}{2G + \lambda}$$

## Додаток Е

### ЗНАХОДЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ $c_i$ ,

$$i = \overline{1, 4}$$

#### Випадок статичної задачі

Для знаходження коефіцієнтів  $c_1, c_2, c_3, c_4$  випадку статичної задачі (3.9) спочатку знайдем  $Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  та  $Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 & \alpha_n \mu_0 y \\ -\alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} c_1(\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2(\alpha_n \mu_0 y) \\ c_1(-\alpha_n \mu_0 y) + c_2(-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} &= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n \mu_0 y \\ \alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} c_3(\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y) \\ c_3(\alpha_n \mu_0 y) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Введемо позначення  $c = \frac{1}{4\alpha_n(1+\mu_0)}$ .

Запишем тепер  $Z_n(y)$ :

$$Z_n(y) = c \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2 e^{\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y) \\ c_1 e^{\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y) + c_2 e^{\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y) + c_4 e^{-\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Тепер  $Z'_n(y)$ :

$$Z'_n(y) = c \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_n y} (\alpha_n^2 \mu_0 y + 2\alpha_n + 2\alpha_n \mu_0) + c_2 e^{\alpha_n y} (\alpha_n^2 \mu_0 y + \alpha_n \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y} (-\alpha_n^2 \mu_0 y + 2\alpha_n + 2\alpha_n \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n y} (\alpha_n^2 \mu_0 y - \alpha_n \mu_0) \\ c_1 e^{\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y) + c_2 e^{\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y) + c_4 e^{-\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Тепер використаєм граничні умови (3.11) та побудуєм алгебричну систему відносно коефіцієнтів.

Використаєм  $U_0 [Z_n(y)]$ :

$$E_0 * Z'_n(b) + F_0 * Z_n(b) = D_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix} * Z'_n(b) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix} * Z_n(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}$$

Отримаємо перші 2 рівняння системи:

$$\begin{cases} c_1 e^{\alpha_n b} (\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n \mu_0 + \alpha_n) + c_2 e^{\alpha_n b} (\alpha_n^2 \mu_0 b - \alpha_n) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n b} (-\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n + \alpha_n \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n b} (\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n) = 0 \\ c_1 e^{\alpha_n b} (-2G \alpha_n^2 \mu_0 b - 2G \alpha_n \mu_0 + 2\lambda \alpha_n) + c_2 e^{\alpha_n b} (-2G \alpha_n^2 \mu_0 b + \\ + (2G + \lambda) 2\alpha_n) + c_3 e^{-\alpha_n b} (-2G \alpha_n^2 \mu_0 b + 2G \alpha_n \mu_0 - 2\lambda \alpha_n) + \\ + c_4 e^{-\alpha_n b} (2G \alpha_n^2 \mu_0 b + (2G + \lambda) 2\alpha_n) = -c p_n \end{cases}$$

Використаєм  $U_1 [Z_n(y)]$ :

$$E_1 * Z'_n(0) + F_1 * Z_n(0) = D_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * Z'_n(0) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * Z_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отримаємо другі 2 рівняння системи:

$$\begin{cases} c_1(\alpha_n + \alpha_n \mu_0) + c_2(-\alpha_n) + c_3(\alpha_n + \alpha_n \mu_0) + c_4(\alpha_n) = 0 \\ c_2(2 + \mu_0) + c_4(-2 - \mu_0) = 0 \end{cases}$$

Звідси видно, що  $c_3 = -c_1$ ,  $c_4 = c_2$ . Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} a_1 &= e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n \mu_0 + \alpha_n) - e^{-\alpha_n b}(-\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n + \alpha_n \mu_0), \\ a_2 &= e^{\alpha_n b}(\alpha_n^2 \mu_0 b - \alpha_n) + e^{-\alpha_n b}(\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n), \\ a_3 &= e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2 \mu_0 b - 2G\alpha_n \mu_0 + 2\lambda\alpha_n) - \\ &\quad - e^{-\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2 \mu_0 b + 2G\alpha_n \mu_0 - 2\lambda\alpha_n) \\ a_4 &= e^{\alpha_n b}(-2G\alpha_n^2 \mu_0 b + (2G + \lambda)2\alpha_n) + \\ &\quad + e^{-\alpha_n b}(2G\alpha_n^2 \mu_0 b + (2G + \lambda)2\alpha_n) \end{aligned}$$

Враховуючи останнє отримаємо:

$$\begin{cases} c_3 = -c_1 \\ c_4 = c_2 \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0 \\ c_1 a_3 + c_2 a_4 = -cp_n \end{cases} \Leftrightarrow, \begin{cases} c_3 = -c_1 \\ c_4 = c_2 \\ c_1 = -c_2 \frac{a_2}{a_1} \\ c_2(a_4 a_1 - a_2 a_3) = -cp_n a_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = cp_n \frac{a_2}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \\ c_2 = -cp_n \frac{a_1}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \\ c_3 = -cp_n \frac{a_2}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \\ c_4 = -cp_n \frac{a_1}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \end{cases}$$

## Випадок динамічної задачі

Розглянемо випадок динамічної задачі. Введемо наступні позначення

$$x_1 = \alpha_n \mu_0 s_1, \quad x_2 = \alpha_n \mu_0 s_2$$

$$x_3 = s_1^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}, \quad x_4 = s_2^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}$$

$$x_5 = s_1^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0) + \frac{\omega^2}{c_1^2}, \quad x_6 = s_2^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0) + \frac{\omega^2}{c_1^2}$$

$$y_1 = 2s_1(s_1^2 - s_2^2), \quad y_2 = 2s_2(s_2^2 - s_1^2)$$

$$z_1 = \frac{(e^{bs_1} + e^{-bs_1})(s_1 x_3 + \alpha_n x_1)}{y_1}, \quad z_2 = \frac{(e^{bs_1} - e^{-bs_1})(s_1 x_1 - \alpha_n x_5)}{y_1}$$

$$z_3 = \frac{(e^{bs_2} + e^{-bs_2})(s_2 x_4 + \alpha_n x_2)}{y_2}, \quad z_4 = \frac{(e^{bs_2} - e^{-bs_2})(s_2 x_4 - \alpha_n x_6)}{y_2}$$

$$z_5 = \frac{(e^{bs_1} - e^{-bs_1})(s_1 x_3 - s_1 x_1(2G + \lambda))}{y_1}, \quad z_6 = \frac{(e^{bs_1} + e^{-bs_1})(s_1 x_5(2G + \lambda) + \alpha_n \lambda x_1)}{y_1}$$

$$z_7 = \frac{(e^{bs_2} - e^{-bs_2})(\alpha_n \lambda x_4 - s_2 x_2(2G + \lambda))}{y_2}, \quad z_8 = \frac{(e^{bs_2} + e^{-bs_2})(s_2 x_6(2G + \lambda) + \alpha_n \lambda x_2)}{y_2}$$

$$z_9 = \frac{s_1 x_3 + \alpha_n x_1}{y_1}, \quad z_{10} = \frac{s_2 x_4 + \alpha_n x_2}{y_2}$$

$$z_{11} = \frac{x_1}{y_1}, \quad z_{12} = \frac{x_2}{y_2}$$

Таким чином отримаємо наступну систему:

$$\begin{cases} z_1 c_1 + z_2 c_2 + z_3 c_3 + z_4 c_4 = 0 \\ z_5 c_1 + z_6 c_2 + z_7 c_3 + z_8 c_4 = -p_n \\ z_9 c_1 + z_{10} c_3 = 0 \\ z_{11} c_1 + z_{12} c_3 = 0 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = 0 \\ z_2 c_2 + z_4 c_4 = 0 \\ z_6 c_2 + z_8 c_4 = -p_n \end{cases}, \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_2 = -\frac{z_4}{z_2} c_4 \\ z_6 c_2 + z_8 c_4 = -p_n \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_2 = p_n \frac{z_4}{z_8 z_2 - z_4 z_6} \\ c_4 = -p_n \frac{z_2}{z_8 z_2 - z_4 z_6} \end{cases}$$