

Disertation

Зміст

1	Напружений стан прямокутної області	3
1.1	Постановка задачі	3
1.2	Зведення задачі до одновимірної у просторі трансформант	4
1.3	Зведення задачі у просторі трансформант до матрично- векторної форми	4
2	Додаток А	5

Перелік умовних позначень

G - коефіцієнт Ламе

E - модуль Юнга

μ - коефіцієнт Пуасона

$$\mu_0 = \frac{1}{1-2\mu}$$

$U_x(x, y) = u(x, y)$ - переміщення по осі x

$U_y(x, y) = v(x, y)$ - переміщення по осі y

1 Напружений стан прямокутної області

1.1 Постановка задачі

Розглядається пружна прямокутна область, яка займає облась, що описується у декартовій системі координат співвідношенням $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=b} = 0 \quad (1.1)$$

де $p(x)$ відома функція. На бічних гранях виконується умова ідеального контакту

$$u(x, y)|_{x=0}, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=0} = 0 \quad (1.2)$$

$$u(x, y)|_{x=a}, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=a} = 0 \quad (1.3)$$

На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x, y)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=0} = 0 \quad (1.4)$$

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

1.2 Зведення задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаєм інтегральне перетворення Фур'є по змінній x у до рівнянь (1.5) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y) \sin(\alpha_n x) \\ v(x,y) \cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a}, n = \overline{1, \infty} \quad (1.6)$$

Для цього помножимо перше та друге рівняння (1.5) на $\sin(\alpha_n x)$ та $\cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруємо по змінній x на інтервалі $0 \leq x \leq a$. Покрокове інтегрування рівняння (1.5) наведено у (Додаток А). Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - \alpha_n^2 (1 + \mu_0) u_n(y) = 0 \\ (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \left((2G + \lambda) v_n'(y) + \alpha_n \lambda u_n(y) \right) |_{y=b} = -p_n \\ \left(u_n'(y) - \alpha_n v_n(y) \right) |_{y=b} = 0 \\ v_n(y) |_{y=0} = 0 \\ \left(u_n'(y) - \alpha_n v_n(y) \right) |_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Де $p_n = \int_0^a p(x) \cos(\alpha_n x) dx$

1.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у просторі трансформант, перепишемо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (1.7)

запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} L_2 [Z_n(y)] &= A * Z_n''(y) + B * Z_n'(y) + C * Z_n(y) \\ L_2 [Z_n(y)] &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 (1 + \mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix}$$

$$Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (1.8) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} U_i [Z_n(y)] &= E_i * Z_n'(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ U_i [Z_n(y)] &= D_i \end{aligned} \quad (1.10)$$

Де $i = \overline{0, 1}$, $b_0 = b$, $b_1 = 0$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

2 Додаток А

Помножимо перше та друге рівняння (1.5) на $\sin(\alpha_n x)$ та $\cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруємо по змінній x на інтервалі $0 \leq x \leq a$.

Розглянемо перше рівняння

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \sin(\alpha_n x) dx + \int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \sin(\alpha_n x) dx + \\ & + \mu_0 \left(\int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \sin(\alpha_n x) dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \sin(\alpha_n x) dx \right) \end{aligned}$$

Розглянемо

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \sin(\alpha_n x) dx &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \sin(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cos(\alpha_n x) dx = \\ &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \sin(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \left(u(x, y) \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a u(x, y) \sin(\alpha_n x) dx \right) = \\ &= -\alpha_n^2 u_n(y)\end{aligned}$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \sin(\alpha_n x) dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^a u(x, y) \sin(\alpha_n x) dx = u_n''(y)$$

Розглянемо

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \sin(\alpha_n x) dx &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \sin(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cos(\alpha_n x) dx = \\ &= -\alpha_n \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a v(x, y) \cos(\alpha_n x) dx = -\alpha_n v_n'(y)\end{aligned}$$

Тоді перше рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - \alpha_n^2 (1 + \mu_0) u_n(y) = 0$$

Розглянемо друге рівняння

$$\begin{aligned}&\int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} \cos(\alpha_n x) dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \cos(\alpha_n x) dx + \\ &+ \mu_0 \left(\int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \cos(\alpha_n x) dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \cos(\alpha_n x) dx \right)\end{aligned}$$

Розглянемо

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} \cos(\alpha_n x) dx &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \sin(\alpha_n x) dx = \\ &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \left(v(x, y) \sin(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a v(x, y) \cos(\alpha_n x) dx \right) = \\ &= -\alpha_n^2 v_n(y)\end{aligned}$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} \cos(\alpha_n x) dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^a v(x,y) \cos(\alpha_n x) dx = v_n''(y)$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} \cos(\alpha_n x) dx &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \sin(\alpha_n x) dx = \\ &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a u(x,y) \sin(\alpha_n x) dx = \alpha_n u_n'(y) \end{aligned}$$

Тоді друге рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$(1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = 0$$

В результаті отримаємо наступну систему рівнянь у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - \alpha_n^2 (1 + \mu_0) u_n(y) = 0 \\ (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = 0 \end{cases}$$