

Disertation

Зміст

1	Напружений стан прямокутної області	3
1.1	Постановка задачі	3
1.2	Зведення задачі до одновимірної у просторі трансформант	4
1.3	Зведення задачі у просторі трансформант до матрично- векторної форми	4
1.4	Фінальний розв'язок задачі	7
1.5	Чисельні розрахунки	8
2	Напружений стан прямокутної області динаміка	8
2.1	Постановка задачі	8
2.2	Зведення задачі до одновимірної у просторі трансформант	10
2.3	Зведення задачі у просторі трансформант до матрично- векторної форми	10
3	Додаток А	14
4	Додаток В	17

Перелік умовних позначень

G - коефіцієнт Ламе

E - модуль Юнга

μ - коефіцієнт Пуасона

c_1, c_2 - швидкості хвилі

ω - частота

$\mu_0 = \frac{1}{1-2\mu}$

$U_x(x, y) = u(x, y)$ - переміщення по осі x

$U_y(x, y) = v(x, y)$ - переміщення по осі y

1 Напружений стан прямокутної області

1.1 Постановка задачі

Розглядається пружна прямокутна область, яка займає область, що описується у декартовій системі координат співвідношенням $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y)|_{y=b} = -p(x), \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=b} = 0 \quad (1.1)$$

де $p(x)$ відома функція. На бічних гранях виконується умова ідеального контакту

$$u(x, y)|_{x=0}, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=0} = 0 \quad (1.2)$$

$$u(x, y)|_{x=a}, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=a} = 0 \quad (1.3)$$

На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x, y)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=0} = 0 \quad (1.4)$$

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

1.2 Зведення задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаєм інтегральне перетворення Фур'є по змінній x у до рівнянь (1.5) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y) \sin(\alpha_n x) \\ v(x,y) \cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a}, n = \overline{1, \infty} \quad (1.6)$$

Для цього помножимо перше та друге рівняння (1.5) на $\sin(\alpha_n x)$ та $\cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруємо по змінній x на інтервалі $0 \leq x \leq a$. Покрокове інтегрування рівняння (1.5) наведено у (Додаток А). Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - \alpha_n^2 (1 + \mu_0) u_n(y) = 0 \\ (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \left((2G + \lambda) v_n'(y) + \alpha_n \lambda u_n(y) \right) |_{y=b} = -p_n \\ \left(u_n'(y) - \alpha_n v_n(y) \right) |_{y=b} = 0 \\ v_n(y) |_{y=0} = 0 \\ \left(u_n'(y) - \alpha_n v_n(y) \right) |_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Де $p_n = \int_0^a p(x) \cos(\alpha_n x) dx$

1.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у просторі трансформант, перепишемо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (1.7)

запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} L_2 [Z_n(y)] &= A * Z_n''(y) + B * Z_n'(y) + C * Z_n(y) \\ L_2 [Z_n(y)] &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 (1 + \mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix}$$

$$Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$

Граничні умови (1.8) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} U_i [Z_n(y)] &= E_i * Z_n'(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ U_i [Z_n(y)] &= D_i \end{aligned} \quad (1.10)$$

Де $i = \overline{0, 1}$, $b_0 = b$, $b_1 = 0$,

$$\begin{aligned} E_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix}, \\ E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ D_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (1.9). Шукати її будемо у наступному вигляді:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \quad (1.11)$$

Де $M(s)$ - характеристична матриця рівняння (1.9), а C - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умови

$$L_2 [e^{sy} * I] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned}
L_2[e^{sy} * I] &= e^{sy} \left(s^2 A * I + sB * I + C * I \right) = \\
&= e^{sy} \left(\begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2(1 + \mu_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_n^2(1 + \mu_0) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix} \right) = \\
&= e^{sy} \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0) & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 \end{pmatrix} =>
\end{aligned}$$

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0) & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Знайдемо тепер $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]}$.

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 & \alpha_n \mu_0 s \\ -\alpha_n \mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0) \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned}
\det[M(s)] &= (s^2 - \alpha_n^2(1 + \mu_0))(s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2) + (\alpha_n \mu_0 s)^2 = \\
&= (1 + \mu_0)(s - \alpha_n)^2(s + \alpha_n)^2
\end{aligned} \quad (1.15)$$

Враховуци це, тепер знайдемо значення фундаментальної матрицю за допомогою теореми про лишки:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds &= \frac{2\pi i}{2\pi i(1 + \mu_0)} \sum_{i=1}^2 \text{Res} \left[e^{sy} \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]} \right] = \\
&= \frac{1}{(1 + \mu_0)} (Y_0(y) + Y_1(y))
\end{aligned}$$

Знайдемо $Y_0(y)$:

$$\begin{aligned}
Y_0(y) &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{e^{sy}}{(s + \alpha_n)^2} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=\alpha_n} = \\
&= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 & \alpha_n \mu_0 y \\ -\alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad (1.16)$$

Знайдемо $Y_1(y)$:

$$\begin{aligned} Y_1(y) &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{e^{sy}}{(s - \alpha_n)^2} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-\alpha_n} = \\ &= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n \mu_0 y \\ \alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y) = \frac{1}{1 + \mu_0} \left(Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \right) \quad (1.18)$$

Залишилось знайти невідомі коефіцієнти c_1, c_2, c_3, c_4 , використовуючи граничні умови (1.10). Покрокове знаходження коефіцієнтів наведено у (Додаток В). Таким чином ми можемо записати розв'язок у просторі трансформант:

$$\begin{aligned} u_n(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n(1 + \mu_0)} [c_1(\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2(\alpha_n \mu_0 y)] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n(1 + \mu_0)} [c_3(\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y)] \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} v_n(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n(1 + \mu_0)} [c_1(-\alpha_n \mu_0 y) + c_2(-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0)] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n(1 + \mu_0)} [c_3(\alpha_n \mu_0 y) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0)] \end{aligned} \quad (1.20)$$

1.4 Фінальний розв'язок задачі

Використовуючи обернене інтегральне перетворення Фур'є до розв'язку задачі у просторі трансформант (1.19), (1.20), отримаємо фінальний розв'язок задачі

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (1.21)$$

$$v(x, y) = \frac{v_0(y)}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (1.22)$$

Останній крок це знаходження $v_0(y)$ у випадку коли $n = 0$, $\alpha_n = 0$. Для цього повернемося до другого рівняння (1.7), та запишемо його для цього випадку:

$$(1 + \mu_0)v_n''(y) = 0 \quad (1.23)$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} (2G + \lambda)v_0'(y)|_{y=b} = -p_0 \\ v_0(y)|_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

Де $p_0 = \int_0^a p(x) dx$

Розв'язок рівняння (1.23):

$$v_0(y) = c_1 + c_2 y \quad (1.25)$$

Заставляючи граничні умови (1.24) для знаходження коефіцієнтів c_1 , c_2 , отримаємо розв'язок задачі задачі:

$$v_0(y) = \frac{-p_0}{(2G + \lambda)} y \quad (1.26)$$

Тепер остаточний розв'язок задачі можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin(\alpha_n x), & \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \\ v(x, y) = \frac{-p_0}{(2G + \lambda)a} y + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \cos(\alpha_n x), & \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \end{cases} \quad (1.27)$$

1.5 Чисельні розрахунки

2 Напружений стан прямокутної області динаміка

2.1 Постановка задачі

Розглядається пружна така сама прямокутна область як і в попередній задачі $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

До прямокутної області на грані $y = b$ додане нормальне навантаження

$$\sigma_y(x, y, t)|_{y=b} = -p(x, t), \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{y=b} = 0 \quad (2.1)$$

де $p(x, t)$ відома функція. На бічних гранях виконується умова ідеального контакту

$$u(x, y, t)|_{x=0}, \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{x=0} = 0 \quad (2.2)$$

$$u(x, y, t)|_{x=a}, \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{x=a} = 0 \quad (2.3)$$

На нижній грані виконуються наступні умови

$$v(x, y, t)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x, y, t)|_{y=0} = 0 \quad (2.4)$$

Розглядаються наступні рівняння рівноваги Ламе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right) = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial y^2} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial t^2} \end{cases} \quad (2.5)$$

Будемо розглядати випадок гармонічних коливань, тому можемо представити функції у наступному вигляді:

$$u(x, y, t) = u(x, y) e^{i\omega t}, \quad v(x, y, t) = v(x, y) e^{i\omega t}, \quad p(x, t) = p(x) e^{i\omega t} \quad (2.6)$$

Таким чином отримаємо наступні рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{\omega^2}{c_1^2} u(x, y) \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \right) = -\frac{\omega^2}{c_2^2} v(x, y) \end{cases} \quad (2.7)$$

Та граничні умови:

$$\begin{cases} \sigma_y(x, y)|_{y=b} = -p(x, t), \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=b} = 0 \\ u(x, y)|_{x=0}, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=0} = 0 \\ u(x, y)|_{x=a}, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{x=a} = 0 \\ v(x, y)|_{y=0}, \quad \tau_{xy}(x, y)|_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

2.2 Зведення задачі до одновимірної у просторі трансформант

Для того, щоб звести задачу до одновимірної задачі, використаєм інтегральне перетворення Фур'є по змінній x у до рівнянь (1.5) наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} u(x,y) \sin(\alpha_n x) \\ v(x,y) \cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a}, n = \overline{1, \infty} \quad (2.9)$$

Для цього помножимо перше та друге рівняння (2.7) на $\sin(\alpha_n x)$ та $\cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруємо по змінній x на інтервалі $0 \leq x \leq a$. Покрокове інтегрування рівняння (2.7) наведено у (Додаток А). Отримана система рівнянь задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) + (-\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) u_n(y) = 0 \\ (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) + (-\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2}) v_n(y) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до граничних умов, отримаємо наступні умови задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} \left((2G + \lambda) v_n'(y) + \alpha_n \lambda u_n(y) \right) |_{y=b} = -p_n \\ \left(u_n'(y) - \alpha_n v_n(y) \right) |_{y=b} = 0 \\ v_n(y) |_{y=0} = 0 \\ \left(u_n'(y) - \alpha_n v_n(y) \right) |_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Де $p_n = \int_0^a p(x) \cos(\alpha_n x) dx$

2.3 Зведення задачі у просторі трансформант до матрично-векторної форми

Для того щоб розв'язати задачу у просторі трансформант, перепишемо її у матрично-векторній формі. Рівняння рівноваги (2.10)

запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} L_2 [Z_n(y)] &= A * Z_n''(y) + B * Z_n'(y) + C * Z_n(y) \\ L_2 [Z_n(y)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Де

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \alpha_n \mu_0 & 0 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix}, \quad Z_n(y) = \begin{pmatrix} u_n(y) \\ v_n(y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Граничні умови (2.11) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} U_i [Z_n(y)] &= E_i * Z_n'(b_i) + F_i * Z_n(b_i) \\ U_i [Z_n(y)] &= D_i \end{aligned} \quad (2.13)$$

Де $i = \overline{0, 1}$, $b_0 = b$, $b_1 = 0$,

$$\begin{aligned} E_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix}, \\ E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ D_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Для знаходження розв'язку задачі у просторі трансформант, знайдем фундаментальну матрицю рівняння (2.12). Шукати її будемо у наступному вигляді:

$$Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds \quad (2.14)$$

Де $M(s)$ - характеристична матриця рівняння (2.12), а C - замкнений контур який містить усі особливі точки. Яку будемо шукати з наступної умови

$$L_2 [e^{sy} * I] = e^{sy} * M(s), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}
L_2[e^{sy} * I] &= e^{sy} \left(s^2 A * I + sB * I + C * I \right) = \\
&= e^{sy} \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} =>
\end{aligned}$$

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} & -\alpha_n \mu_0 s \\ \alpha_n \mu_0 s & s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Знайдемо тепер $M^{-1}(s) = \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]}$.

$$\widetilde{M(s)} = \begin{pmatrix} s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 s \\ -\alpha_n \mu_0 s & s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
\det[M(s)] &= (s^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2})(s^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2}) + (\alpha_n \mu_0 s)^2 = \\
&= (1 + \mu_0)(s - a_1)(s + a_1)(s - a_2)(s + a_2) \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Де a_1, a_2 :

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{\frac{b_1}{b_3} - \omega \sqrt{\frac{b_2}{b_3}}}, \\
a_2 &= \sqrt{\frac{b_1}{b_3} + \omega \sqrt{\frac{b_2}{b_3}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= 2\alpha_n^2 c_1^2 c_2^2 \mu_0 + 2\alpha_n^2 c_1^2 c_2^2 - c_1^2 \omega^2 - c_2^2 \mu_0 \omega^2 - c_2^2 \omega^2, \\
b_2 &= 4\alpha_n^2 c_1^4 c_2^2 \mu_0^2 + 4\alpha_n^2 c_1^4 c_2^2 \mu_0 - 4\alpha_n^2 c_1^2 c_2^4 \mu_0^2 - \\
&\quad - 4\alpha_n^2 c_1^2 c_2^4 \mu_0 + c_1^4 \omega^2 - 2c_1^2 c_2^2 \mu_0 \omega^2 - 2c_1^2 c_2^2 \omega^2 + \\
&\quad + c_2^4 \mu_0^2 \omega^2 + c_2^4 \omega^2, \\
b_3 &= 2c_1^2 c_2^2 \mu_0 + 2c_1^2 c_2^2
\end{aligned}$$

Враховуци це, тепер знайдемо значення фундаментальної матриці за допомогою теореми про лишки:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sy} M^{-1}(s) ds &= \frac{2\pi i}{2\pi i(1+\mu_0)} \sum_{i=1}^2 \text{Res} \left[e^{sy} \frac{\widetilde{M(s)}}{\det[M(s)]} \right] = \\
&= \frac{1}{(1+\mu_0)} (Y_0(y) + Y_1(y) + Y_2(y) + Y_3(y))
\end{aligned}$$

Знайдемо $Y_0(y)$:

$$\begin{aligned}
Y_0(y) &= \left(\frac{e^{sy}}{(s+a_1)(s-a_2)(s+a_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=a_1} = \\
&= \frac{e^{a_1 y}}{2a_1(a_1^2 - a_2^2)} \begin{pmatrix} a_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 a_1 \\ -\alpha_n \mu_0 a_1 & a_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Знайдемо $Y_1(y)$:

$$\begin{aligned}
Y_1(y) &= \left(\frac{e^{sy}}{(s-a_1)(s-a_2)(s+a_2)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-a_1} = \\
&= -\frac{e^{-a_1 y}}{2a_1(a_1^2 - a_2^2)} \begin{pmatrix} a_1^2(1+\mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 a_1 \\ \alpha_n \mu_0 a_1 & a_1^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Знайдем $Y_2(y)$:

$$Y_2(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s+a_2)(s-a_1)(s+a_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=a_2} =$$

$$= \frac{e^{a_2 y}}{2a_2(a_2^2 - a_1^2)} \begin{pmatrix} a_2^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & \alpha_n \mu_0 a_2 \\ -\alpha_n \mu_0 a_2 & a_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Знайдем $Y_3(y)$:

$$Y_3(y) = \left(\frac{e^{sy}}{(s-a_2)(s-a_1)(s+a_1)} \widetilde{M(s)} \right) \Big|_{s=-a_2} =$$

$$= -\frac{e^{-a_2 y}}{2a_2(a_2^2 - a_1^2)} \begin{pmatrix} a_2^2(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} & -\alpha_n \mu_0 a_2 \\ \alpha_n \mu_0 a_2 & a_2^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n^2 \mu_0 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Таким чином ми можемо записати розв'язок задачі у просторі трансформант:

$$Z_n(y) = \frac{1}{1 + \mu_0} (Y_0(y) + Y_1(y)) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{1 + \mu_0} (Y_2(y) + Y_3(y)) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Залишилось знайти невідомі коефіцієнти c_1, c_2, c_3, c_4 , використовуючи граничні умови (2.13). Покрокове знаходження коефіцієнтів наведено у (??).

3 Додаток А

Помножимо перше та друге рівняння (1.5) на $\sin(\alpha_n x)$ та $\cos(\alpha_n x)$ відповідно та проінтегруємо по змінній x на інтервалі $0 \leq x \leq a$.

Розглянемо перше рівняння

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \sin(\alpha_n x) dx + \int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \sin(\alpha_n x) dx + \\ + \mu_0 \left(\int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \sin(\alpha_n x) dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \sin(\alpha_n x) dx \right)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \sin(\alpha_n x) dx = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \sin(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cos(\alpha_n x) dx = \\ = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \sin(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \left(u(x, y) \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a u(x, y) \sin(\alpha_n x) dx \right) = \\ = -\alpha_n^2 u_n(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \sin(\alpha_n x) dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^a u(x, y) \sin(\alpha_n x) dx = u_n''(y)$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \sin(\alpha_n x) dx = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \sin(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cos(\alpha_n x) dx = \\ = -\alpha_n \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a v(x, y) \cos(\alpha_n x) dx = -\alpha_n v_n'(y)$$

Тоді перше рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - \alpha_n^2 (1 + \mu_0) u_n(y) = 0$$

Розглянемо друге рівняння

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} \cos(\alpha_n x) dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \cos(\alpha_n x) dx + \\ + \mu_0 \left(\int_0^a \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \cos(\alpha_n x) dx + \int_0^a \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \cos(\alpha_n x) dx \right)$$

Розглянемо

$$\begin{aligned}
\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} \cos(\alpha_n x) dx &= \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \sin(\alpha_n x) dx = \\
&= \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \left(v(x,y) \sin(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} - \alpha_n \int_0^a v(x,y) \cos(\alpha_n x) dx \right) = \\
&= -\alpha_n^2 v_n(y)
\end{aligned}$$

Розглянемо

$$\int_0^a \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} \cos(\alpha_n x) dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^a v(x,y) \cos(\alpha_n x) dx = v_n''(y)$$

Розглянемо

$$\begin{aligned}
\int_0^a \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} \cos(\alpha_n x) dx &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \int_0^a \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \sin(\alpha_n x) dx = \\
&= \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \cos(\alpha_n x) \Big|_{x=0}^{x=a} + \alpha_n \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a u(x,y) \sin(\alpha_n x) dx = \alpha_n u_n'(y)
\end{aligned}$$

Тоді друге рівняння у просторі трансформант прийме вигляд:

$$(1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = 0$$

В результаті отримаємо наступну систему рівнянь у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_n''(y) - \alpha_n \mu_0 v_n'(y) - \alpha_n^2 (1 + \mu_0) u_n(y) = 0 \\ (1 + \mu_0) v_n''(y) + \alpha_n \mu_0 u_n'(y) - \alpha_n^2 v_n(y) = 0 \end{cases}$$

4 Додаток В

Для знаходження коефіцієнтів c_1, c_2, c_3, c_4 спочатку знайдем $Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ та $Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} Y_0(y) * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 & \alpha_n \mu_0 y \\ -\alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} c_1(\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2(\alpha_n \mu_0 y) \\ c_1(-\alpha_n \mu_0 y) + c_2(-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_1(y) * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} &= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 & -\alpha_n \mu_0 y \\ \alpha_n \mu_0 y & -\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} c_3(\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y) \\ c_3(\alpha_n \mu_0 y) + c_4(-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Введемо позначення $c = \frac{1}{4\alpha_n(1+\mu_0)}$.

Запишем тепер $Z_n(y)$:

$$Z_n(y) = c \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + c_2 e^{\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y) \\ c_1 e^{\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y) + c_2 e^{\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y) + c_4 e^{-\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Тепер $Z'_n(y)$:

$$Z'_n(y) = c \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_n y} (\alpha_n^2 \mu_0 y + 2\alpha_n + 2\alpha_n \mu_0) + c_2 e^{\alpha_n y} (\alpha_n^2 \mu_0 y + \alpha_n \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y} (-\alpha_n^2 \mu_0 y + 2\alpha_n + 2\alpha_n \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n y} (\alpha_n^2 \mu_0 y - \alpha_n \mu_0) \\ c_1 e^{\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y) + c_2 e^{\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y + 2 + \mu_0) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n y} (\alpha_n \mu_0 y) + c_4 e^{-\alpha_n y} (-\alpha_n \mu_0 y - 2 - \mu_0) \end{pmatrix}$$

Тепер використаєм граничні умови (1.10) та побудуєм алгебричну систему відносно коефіцієнтів.

Використаєм $U_0 [Z_n(y)]$:

$$E_0 * Z'_n(b) + F_0 * Z_n(b) = D_0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2G + \lambda \end{pmatrix} * Z'_n(b) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix} * Z_n(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}$$

Отримаємо перші 2 рівняння системи:

$$\begin{cases} c_1 e^{\alpha_n b} (\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n \mu_0 + \alpha_n) + c_2 e^{\alpha_n b} (\alpha_n^2 \mu_0 b - \alpha_n) + \\ + c_3 e^{-\alpha_n b} (-\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n + \alpha_n \mu_0) + c_4 e^{-\alpha_n b} (\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n) = 0 \\ c_1 e^{\alpha_n b} (-2G \alpha_n^2 \mu_0 b - 2G \alpha_n \mu_0 + 2\lambda \alpha_n) + c_2 e^{\alpha_n b} (-2G \alpha_n^2 \mu_0 b + \\ + (2G + \lambda) 2\alpha_n) + c_3 e^{-\alpha_n b} (-2G \alpha_n^2 \mu_0 b + 2G \alpha_n \mu_0 - 2\lambda \alpha_n) + \\ + c_4 e^{-\alpha_n b} (2G \alpha_n^2 \mu_0 b + (2G + \lambda) 2\alpha_n) = -c p_n \end{cases}$$

Використаєм $U_1 [Z_n(y)]$:

$$E_1 * Z'_n(0) + F_1 * Z_n(0) = D_1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * Z'_n(0) + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * Z_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отримаємо другі 2 рівняння системи:

$$\begin{cases} c_1 (\alpha_n + \alpha_n \mu_0) + c_2 (-\alpha_n) + c_3 (\alpha_n + \alpha_n \mu_0) + c_4 (\alpha_n) = 0 \\ c_2 (2 + \mu_0) + c_4 (-2 - \mu_0) = 0 \end{cases}$$

Звідси видно, що $c_3 = -c_1$, $c_4 = c_2$. Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} a_1 &= e^{\alpha_n b} (\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n \mu_0 + \alpha_n) - e^{-\alpha_n b} (-\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n + \alpha_n \mu_0), \\ a_2 &= e^{\alpha_n b} (\alpha_n^2 \mu_0 b - \alpha_n) + e^{-\alpha_n b} (\alpha_n^2 \mu_0 b + \alpha_n), \\ a_3 &= e^{\alpha_n b} (-2G \alpha_n^2 \mu_0 b - 2G \alpha_n \mu_0 + 2\lambda \alpha_n) - \\ &\quad - e^{-\alpha_n b} (-2G \alpha_n^2 \mu_0 b + 2G \alpha_n \mu_0 - 2\lambda \alpha_n) \\ a_4 &= e^{\alpha_n b} (-2G \alpha_n^2 \mu_0 b + (2G + \lambda) 2\alpha_n) + \\ &\quad + e^{-\alpha_n b} (2G \alpha_n^2 \mu_0 b + (2G + \lambda) 2\alpha_n) \end{aligned}$$

Враховуючи останнє отримаємо:

$$\begin{cases} c_3 = -c_1 \\ c_4 = c_2 \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0 \\ c_1 a_3 + c_2 a_4 = -cp_n \end{cases} \Leftrightarrow, \begin{cases} c_3 = -c_1 \\ c_4 = c_2 \\ c_1 = -c_2 \frac{a_2}{a_1} \\ c_2(a_4 a_1 - a_2 a_3) = -cp_n a_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = cp_n \frac{a_2}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \\ c_2 = -cp_n \frac{a_1}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \\ c_3 = -cp_n \frac{a_2}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \\ c_4 = -cp_n \frac{a_1}{(a_4 a_1 - a_2 a_3)} \end{cases}$$