中国科学技术大学

2020—2021学年第二学期期末试卷

考试科目 随机过程 得分 ________

所在系 ________ 姓名 ________ 学号 ________

考试时间: 2021年3月5日14:30—16:30

线 …… 订 …… 装

一、 填空题(30分, 每道题5分)

1. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 X 的矩母函数为________;

2. 设 $\{W_n, n \geq 1\}$ 是与泊松过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 对应的一个等待时间序列, 则 W_n 服从________ 分布;

3. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程, $\{Y_k, k = 1, 2, \cdots\}$ 是一列独立同分布随机变量, 且与 $\{N(t), t \geq 0\}$ 独立, 令 $X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$, $t \geq 0$, 若 $\mathbf{E}Y_1^2 < \infty$, 则 $\mathbf{E}[X(t)] =$ ________;

4. 状态 i 常返的充要条件为 $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_{ii}^{(n)}$ ________;

5. 设随机过程 $X(t) = Acos(\omega t + \Phi)$, $-\infty < t < \infty$, 其中 ω 为正常数, A 和 Φ 是相互独立的随机变量, 且 A 和 Φ 服从在区间 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 则 $X(t)$ 的数学期望为________.

6. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是速率为 λ 的Poisson过程, 以 S_n 记第 n 个事件发生的时刻, $s, t > 0$, 则在条件 $N(s + t) = n$ 的条件下, $N(s)$的分布律为 ________.

二、 (15分) 一个系统由两个不同的元件(记为 A 与 B) 组成, 元件易受到外界的冲击, 元件 A 受到的冲击遵循参数 $\lambda_1 = 2$ 的Poisson过程 $\{N_1(t), t \geq 0\}$, 元件 B 受到的冲击遵循参数 $\lambda_2 = 4$ 的Poisson过程 $\{N_2(t), t \geq 0\}$, 且两个过程相互独立. 记 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$, 每次冲击会对系统造成损伤, 该损伤对系统持续不断地造成单位时间为 2 元的损失, 求在给定 $N(t) = 100$ 的条件下到时刻 t 冲击给系统造成的期望损失.

三、 (20分) 设有状态空间为 $S = \{1, 2, \cdots, 6\}$ 的一齐次马尔可夫链, 其转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 试将此链状态分类, 并指出各个状态的常返性及周期性;

(2) 计算首达概率 $f_{11}^{(1)}$, $f_{11}^{(4)}$;

(3) 该链是否存在平稳分布, 若存在试求出;

(4) 求各常返状态的平均返回时间 $\mu_i (i = 1, 2, \ldots, 6)$.

四、 (20分) 设 $X(t) = Acos\omega t + Bsin\omega t$, ω 是常数, A 与 B 为相互独立的随机变量, 且 $A \sim N(0,1)$, $B \sim N(0,1)$.

(1) 验证 $X(t)$ 是否为宽平稳过程;

(2) 验证过程 $X(t)$ 是否具有均值遍历性.

五、 (15分) 已知一个连续时间平稳过程的功率谱密度函数为 $S(\omega) = \frac{\omega^2+2}{\omega^4+9\omega^2+8}$, 求该过程的协方差函数 $R(\tau)$.