2019-2020 秋复变函数期末试卷

一．（共 10 分）求解以下复方程

（1）$z^3=-3\bar{z}$,（其中$z\neq 0$）　　　　（2）$\sin z=3$.

二．（7 分）已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)=e^{\alpha y}\cos 3x+3x$，其中 $\alpha>0$ 且 $f(0)=1$，求常数 α，并求出解析函数 $f(z)$（请用 z 表示函数 $f(z)$）

三．（10 分）

（1）把 $f(z)=z^5e^{2z}$ 在 $z=0$ 展开成幂级数，并指出其收敛区域。

（2）把 $g(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-4)^2}$ 在区域 $0<|z-2|<2$ 展成洛朗级数。

四．计算复积分（共 36 分）

（1）$\displaystyle\int_0^{\pi i}(2019z^2-\cos z)dz$

（2）$\displaystyle\int_{|z|=6}\frac{e^{2z}}{(z-1)(z-3)}dz$

（2）$\displaystyle\int_{|z|=\frac{5}{2}}\frac{z^2-8z+5}{z^3(z+2)(z-3)^2}dz$

（4）$\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{\cos(\frac{1}{z-2})}{4-z}dz$

（5）$\int_{|z|=3}\frac{z+5}{1-\cos(z-2)}dz$　　（6）$\int_{|z|=2}\frac{|dz|}{|z-i|^4}$

五．求下列定积分（共 14 分）

（1）$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{3-2\cos\theta}d\theta$　　（2）$\int_0^{+\infty}\frac{x^3\sin 4x}{(x^2+4)^2}dx$

六．（5 分）判断方程 $z^9=8z^3+2z^2+z+2$ 在 $1<|z|<5$ 的根的个数，并说明理由。

七．（10 分）利用拉普拉斯变换解微分方程：

$$\begin{cases} y'' + y = e^t \cos 2t \\ y(0) = 4, y'(0) = 0. \end{cases}$$

八、（8 分）已知函数 $f(z)$ 在 $|z| \le 1$ 解析，函数 $g(z)$ 在 $|z| \ge 1$ 解析，且存在常数 M，使得在 $|z| \ge 1$ 时，$|g(z)| < M$.试证明以下算式成立：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\left(\frac{f(\xi)}{\xi - a} - \frac{ag(\xi)}{\xi(\xi - a)}\right)d\xi = \begin{cases} f(a), & 当|a| < 1 \\ g(a), & 当|a| > 1 \end{cases}$$