参考答案

一. 1. $\frac{\lambda}{\lambda-t}$, $t<\lambda$ 2. Γ 分布 3. $\lambda t E(Y_1)$ 4. $=\infty$ 5. $\frac{1}{2}[sin(\varpi t+1)-sin(\varpi t)]$ 6. $P(N(s)=k|N(s+t)=n)=C_n^k\left(\frac{s}{s+t}\right)^k\left(\frac{t}{s+t}\right)^{n-k}$, $0\le k\le n$.

二. 解：首先证明 $\{N(t)\}$ 为参数 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2=6$ 的齐次Poisson过程. 记 $\{N(t)\}$ 的事件发生时刻为 $\{S_n, n\ge 1\}$, 则利用齐次Poisson过程性质知

$$[(S_1,\cdots,S_{100})|N(t)=100]=(U_{1:100},\cdots,U_{100:100}),$$

其中 $U_1,U_2,\ldots,U_{100}$ 为总体 $U(0,t)$ 上容量为100的一组i.i.d.样本, $U_{1:100},\ldots,U_{100:100}$ 为其次序统计量. 于是所求的期望损失为

$$E\left[2\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)|N(t)=100\right]=E\left[2\sum_{i=1}^{100}(t-U_{i:100})\right]=E\left[2\sum_{i=1}^{100}(t-U_i)\right]=100t.$$

三. 解：(1) 状态空间 S 可分为 $C_1=\{1,2,3\}$, $C_2=\{4,5\}$, $C_3=\{6\}$ 三个不可约闭集, 三个集合中的状态同类, 全是正常返, 周期全为1.

(2)

$$f_{11}^{(1)}=\frac{1}{2}.$$

$$f_11^{(4)}=\frac{2}{27}.$$

(3) 平稳分布在各个闭集中求解: 对 C_1,

$$\begin{cases}\pi_1=\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_3\\ \pi_2=\frac{1}{2}\pi_1+\frac{2}{3}\pi_2\\ \pi_3=\frac{1}{3}\pi_2+\frac{2}{3}\pi_3\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$$

求得 $\pi_1=\frac{1}{4}$, $\pi_2=\frac{3}{8}$, $\pi_3=\frac{3}{8}$. 对 C_2, 求得 $\pi_4=\pi_5=\frac{1}{2}$. 对 C_3, 求得 $\pi_6=1$. 该链平稳分布为 $\{\frac{\lambda_1}{4},\frac{3\lambda_1}{8},\frac{3\lambda_1}{8},\frac{\lambda_2}{2},\frac{\lambda_2}{2},\lambda_3\}$, $0\le\lambda_i\le 1$, $i=1,2,3$, 且 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$.

(4) $\mu_1=\frac{1}{\pi_1}=4$, $\mu_2=\mu_3=\frac{8}{3}$, $\mu_4=\mu_5=2$, $\mu_6=1$.

四　解：(1) $EX(t)=0$,

$$\begin{aligned} E[X(t)X(t+\tau)] &= cos\varpi_0 t cos\varpi_0(t+\tau)EA^2 + sin\varpi_0 t sin\varpi_0(t+\tau)EB^2 \\ &= cos\varpi_0 t cos\varpi_0(t+\tau) + sin\varpi_0 t sin\varpi_0(t+\tau) \\ &= cos\varpi_0\tau \quad \text{只与 } \tau \text{ 有关}, \end{aligned}$$

故 $X(t)$ 为宽平稳过程.

(2) $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{-T} Acos\varpi_0 t + Bsin\varpi_0 t = 0 = EX(t)$. 故 $X(t)$ 均值具有各态历经性.

五　解：

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varpi^2+2}{\varpi^4+9\varpi^2+8}e^{i\varpi\tau}d\varpi.$$

$\tau>0$, 取上半平面,有极点 $i, 2\sqrt{2}i$; $\tau<0$, 取下半平面, 有极点 $-i, -2\sqrt{2}i$. 由留数定理, 得

$$R(\tau)=\frac{1}{14}e^{-|\tau|}+\frac{3\sqrt{2}}{28}e^{-2\sqrt{2}|\tau|}.$$