

## 2016-2017 秋复变函数期末试卷

一. (共 36 分) 基础知识

1. 求下列各值:

(1)  $(1+i)(3+4i)$

(2)  $\sin(2+i)$

2. 求解下列方程:

(1)  $z^4 - 4 = 0$

(2)  $\cos z = 3$

3. 设  $f(z) = \frac{z^2}{1-2z}$ , 把  $f(z)$  在  $z=0$  展开成幂级数, 并指出收敛半径.

4. 设  $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z-2)}$ , 把  $f(z)$  在区域  $|1+i| < |z-i| < |2-i|$  展成洛朗级数.

5. 求  $z^5 + 6z + 2 = 0$  在  $1 < |z| < 2$  内根的个数，并说明理由.

6. 解析函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ，满足  $u + v = (x + y)(2x - 2y + 1)$ ，  
 $f(1) = 2 + i$ ，求函数  $f(z)$ .

二、（共 42 分）计算以下积分

$$(1) \int_0^i (z^2 + \cos 2z) dz$$

$$(2) \int_{|z|=5} \frac{e^{iz}}{z^2 + 4} dz$$

$$(3) \int_{|z|=3} \frac{|dz|}{2 + |z-1|^2}$$

$$(4) \int_{|z-i|=3} \frac{dz}{z(e^{2z} - 1)}$$

$$(5) \int_{|z|=1} \left( \frac{1}{z^2} + 2z^2 \right) e^{\frac{z}{z-3}} dz$$

$$(6) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{8 + 2\cos\theta}$$

$$(6) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2(x^2 + 9)} dx$$

三、（10 分）利用拉普拉斯变换解微分方程：

$$\begin{cases} y'' + 3y = 13t \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$$

四、（6分）设  $f(z)$  在  $z=0$  解析， $f(0)=1$ ， $f'(0)=2$ ， $f''(0)=3$ ，求：

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{|z|=\rho} \frac{1}{(f(z)-1)^2} dz$$

五、（6分）已知  $f(z)$  在不包含无穷远点的复平面上处处解析，并且有： $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^{2016}} = 0$ ，

求证： $f^{(2016)}(z) = 0$ 。