# 2021秋数字信号处理第三次实验报告——滤波器设计与滤波器特性分析

PB19071509 王瑞哲

# 一、实验目的

- 1. 掌握 Matlab 下滤波器设计工具 (fdatool) 的使用方法;
- 2. 掌握 IIR 滤波器设计方法与 FIR 滤波器设计方法;
- 3. 了解 IIR 滤波器设计与 FIR 滤波器设计方法的差异;
- 4. 掌握滤波器特性分析的方法:
- 5. 了解Matlab中sptool工具的使用方法。

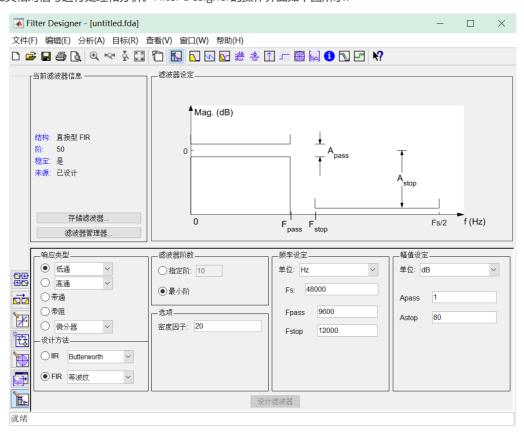
# 二、实验原理

数字滤波器有很多种,根据其实现的网络结构或者其冲激响应函数的时域特性,可分为两种:**有限冲激响应(FIR**, Finite Impulse Response)滤波器和**无限冲激响应(IIR**, Infinite Impulse Response)滤波器。

IIR滤波器和FIR滤波器的设计方法不同。**IIR**滤波器设计方法有间接法和直接法,间接法是借助于模拟滤波器的设计方法进行的。其设计步骤是:先设计过渡模拟滤波器得到系统函数H(s),然后将H(s)按某种方法转换成数字滤波器的系统函数H(z)。在设计IIR滤波器时可以借助成熟的模拟滤波器的成果,如巴特沃斯、契比雪夫和椭圆滤波器等,根据指标先写出模拟滤波器的公式,然后通过一定的变换,将模拟滤波器的公式转换成数字滤波器的公式。

FIR滤波器必须采用间接法,常用的方法有窗函数法、频率采样法和切比雪夫等波纹逼近法。对于线性相位滤波器,经常采用FIR滤波器。在设计FIR滤波器时可以根据对阻带衰减及过渡带的指标要求,选择窗函数类型(矩形窗、三角窗、汉宁窗、汉明窗、凯塞窗等),并估计窗口长度N,先按照阻带衰减选择窗函数类型。保证阻带衰减满足要求的情况下,尽量选择主瓣的窗函数,再构造希望逼近的频率响应函数,计算h(n)。最后加窗便可以得到设计结果。

本次实验借助Matlab中的**fdatool**工具箱(现版本用filter designer替换)实现各项滤波器实现指标,同时利用 **sptool**工具箱对信号进行处理和分析。Filter Designer的操作界面如下图所示:



# 三、实验内容

## 1) IIR滤波器设计

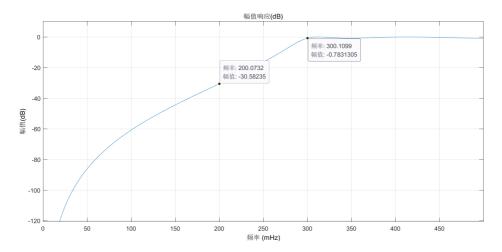
备注:实验报告要求中的第1条在此部分给出:记录在上机实验内容中所设计的IIR滤波器的传递函数H(z)及对应的幅频特性曲线,定性分析它们的性能,判断设计是否满足需求

1. 采样频率为1Hz,设计一个Chebyshev高通数字滤波器,其中通带临界频率 fp = 0.3Hz ,通带内衰减小于 0.8dB (  $\alpha_p$  = 0.8dB ),阻带临界频率 fs = 0.2Hz ,阻带内衰减大于20dB (  $\alpha_s$  = 20dB )。求这个数字滤波器的传递函数 H(z),输出它的幅频特性曲线,观察其通带衰减和阻带衰减是否满足要求。

如下图,调用Matlab中的滤波器设计工具fdatool,设定参数如下图:



所设计出的滤波器幅频特性为:

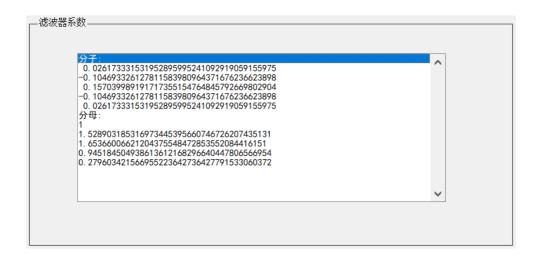


由幅频响应图像可知,频率为200mHz (即**阻带**临界频率0.2Hz) 处的幅频增益为-30dB<-20dB,频率为300mHz (即**通带**临界频率0.3Hz) 处的幅频增益为-0.78dB>-0.8dB,符合设计需求。

fdatool工具箱所给出的该滤波器实现结构为直接II型的四阶(N=4)滤波器。根据fdatool工具箱所给出的滤波器系数,可以写出该滤波器的系统函数为:

$$H(z) = rac{0.0262z^4 - 0.1047z^3 + 0.1570z^2 - 0.1047z + 0.0262}{z^4 + 1.5289z^3 + 1.6537z^2 + 0.9452z + 0.2796}$$

可见滤波器阶数为N=4。其中fdatool查看滤波器系统函数的系数界面截图如下所示:

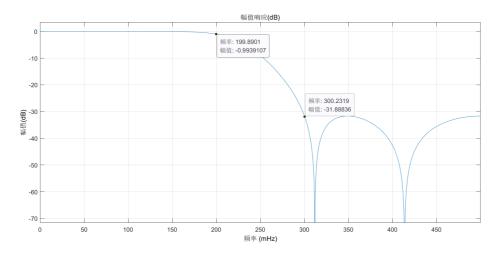


2. 采样频率为 1Hz,设计一个数字低通滤波器,要求其通带临界频率 fp = 0.2Hz ,通带内衰减小于 1dB (  $\alpha_p$  = 1dB ),阻带临界频率 fs = 0.3Hz ,阻带内衰减大于 25dB (  $\alpha_s$  = 25dB )。求这个数字滤波器的传递函数 H(z),输出它的幅频特性曲线。

与1相似,调用fdatool工具,按给定的参数设置滤波器参数。由于并没有指定滤波器种类,不妨采用Chebyshev II型滤波器进行设计。最终给出的系统函数为:

$$H(z) = rac{0.1353z^4 + 0.3342z^3 + 0.4461z^2 + 0.3342z + 0.1353}{z^4 - 0.2230z^3 + 0.5857z^2 - 0.0094z + 0.0317}$$

可见滤波器阶数为N=4。所设计出的滤波器幅频特性为:



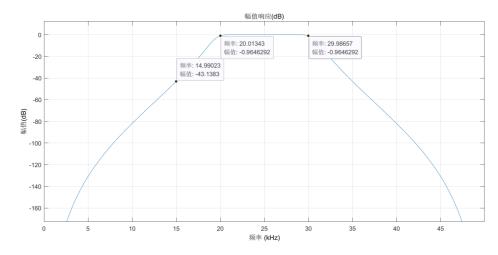
由幅频响应图像可知,频率为200mHz(即**通带**临界频率0.2Hz)处的幅频增益约为-0.99dB>-1dB,频率为300mHz(即**阻带**临界频率0.3Hz)处的幅频增益约为-31dB<-30dB,符合设计需求。

3. 设计 Butterworth 带通数字滤波器,其上下边带 1dB 处的通带临界频率分别为 20kHz 和 30kHz (fp1 = 20kHz, fp2 = 30kHz, $\alpha_p$  = 1dB ),当频率低于 15kHz 时,衰减要大于 40dB (fs = 15kHz, $\alpha_s$  = 40dB ),采样周期为 10 $\mu$ s,求这个数字滤波器的传递函数 H(z),输出它的幅频特性曲线,观察其通带衰减和阻带衰减是否满足要求。

与1相似,调用fdatool工具,按给定的参数设置滤波器参数。最终给出的系统函数为:

$$H(z) = rac{0.000154z^{14} - 0.001078z^{12} + 0.0032z^{10} - 0.0054z^8 + 0.0054z^6 - 0.0032z^4 + 0.001078z^2 - 0.000154}{z^{14} + 3.9190z^{12} + 7.0109z^{10} + 7.2789z^8 + 4.6942z^6 + 1.8690z^4 + 0.4236z^2 + 0.0420}$$

可见滤波器阶数为N=14。所设计出的滤波器幅频特性为:



由幅频响应图像可知,频率在**通带**临界频率20kHz 和 30kHz处的幅频增益约为-0.96dB>-1dB,频率在**阻带**临界频率 15kHz处的幅频增益约为-43dB<-40dB,符合设计需求。

# 2) FIR滤波器设计

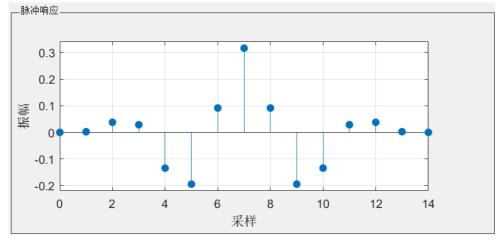
备注:实验报告要求中的第2条在此部分给出:记录在实验过程中FIR滤波器设计结果的h(n)的幅频和相位特性曲线,比较它们的性能,说明滤波器N和窗函数对滤波器性能的影响。

1. 用 Hanning 窗设计一个线性相位带通滤波器,其长度 N=15,上下边带截止频率分别为 w1=  $0.3\pi$  , w2 =  $0.5\pi$  , 求 h(n),绘制它的幅频和相位特性曲线,观察它的实际 3dB 和 20dB 带宽。如果 N=45,重复这一设计,观察幅频和相位特性的变化,注意长度N变化对结果的影响。

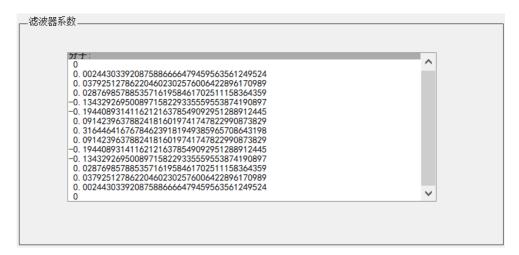
此时调用Matlab的参数设置界面为:



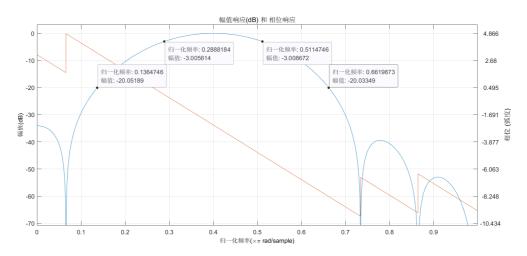
注意此处滤波器阶数需指定为15-1=14,因为Hanning窗序列长度N=15中还包含n=0的点,因此滤波器阶数需要减一。设计出的滤波器单位脉冲响应h(n)的序列图为:



其中15个序列值分别给出为:

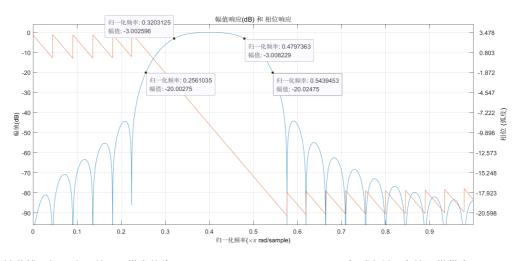


#### 它的幅频和相位特性曲线为:



由幅频特性曲线可知,实际的3dB带宽约为 $0.5115\pi-0.2888\pi=0.22\pi$  (比设定的通带带宽 $0.2\pi$ 略宽),实际的20dB带宽约为 $0.6620\pi-0.1365\pi=0.53\pi$ .

若修改N=45,则幅频和相位特性曲线变为:

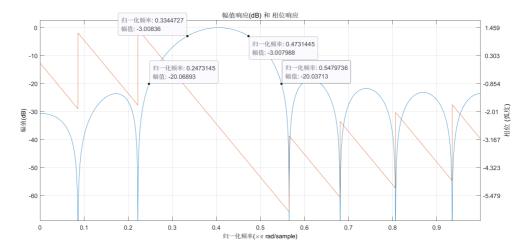


由幅频特性曲线可知,实际的3dB带宽约为 $0.4797\pi-0.3203\pi=0.16\pi$ (未到达所设定的通带带宽 $0.2\pi$ ),实际的20dB带宽约为 $0.5439\pi-0.2561\pi=0.29\pi$ (比N=15的情况大幅降低)。

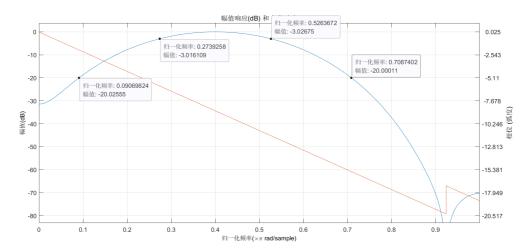
对比二者可以发现,增加长度N,可以有效减小过渡带宽度,使滤波器的幅频特性曲线更接近理想滤波器,或说使过渡带更加陡峭,这从上面所计算的实际3dB和20dB带宽的变化也可以看出;但增加长度N并不能改变肩峰(过冲)的幅度大小,只能使起伏振荡变密,这种现象称为吉布斯(Gibbs)效应。肩峰值大小直接决定着通带内的平稳和阻带的衰减,对滤波器的性能影响很大。如果想要改善阻带的衰减特性,只改变N是无能为力的,只能从改善窗函数的形状上找出路。

2. 改用矩形窗和 Blackman 窗,设计步骤(1)中的带通滤波器,观察并记录窗函数对滤波器幅频和相位特性的影响,比较这三种窗函数的特点。

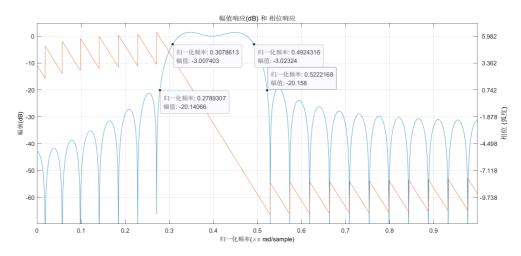
当N=15时, 改用矩形窗:



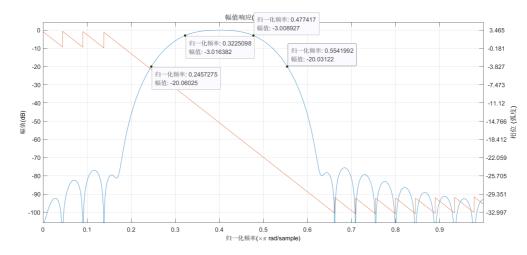
## 改用Blackman窗:



当N=45时,改用矩形窗:



改用Blackman窗:

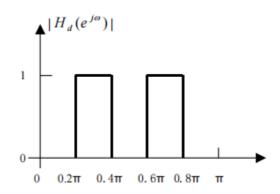


对比在N相同时各窗函数的幅频和相位特性,可得出结论:各窗函数的**主瓣宽度、旁瓣电平、通带起伏**会影响到设计出滤波器的**通带宽度、阻带衰减和通带波动**。三种窗函数的性能对比如下表所示:

窗函数	主瓣宽度	旁瓣电平/dB	阻带衰减/dB	通带起伏/dB
矩形窗	$4\pi/N$	-13	-21	0.7
Hanning窗	$8\pi/N$	-32	-44	0.05
Blackman窗	$12\pi/N$	-57	-74	0.002

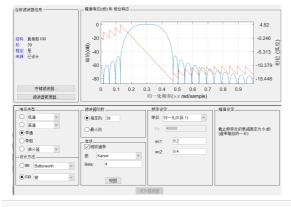
从上面所展示的各幅频曲线也可以看出,在N相同时,**矩形窗的过渡带宽度最小**,Hanning窗次之,Blackman窗最大;**矩形窗的阻带衰减最小**,Hanning窗次之,Blackman窗最大。

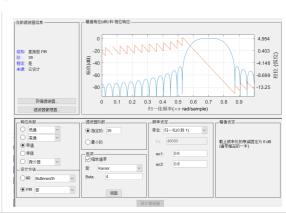
#### 3. 用 Kaiser 窗设计一个专用的线性相位滤波器。 N=40, 理想的幅频特性如下图所示:



当 beta 值分别 4,6,8 时,设计相应的滤波器,比较它们的幅频和相位特性,观察并分析 beta 值不同的时候对结果有什么影响。

考虑到该理想幅频特性为一个双带通的滤波器,考虑使用一个 $[0.2\pi,0.4\pi]$ 的带通滤波器和一个 $[0.6\pi,0.8\pi]$ 的带通滤波器**并联而成**。对于单位脉冲响应而言,**两滤波器的并联在单位脉冲响应上即是相加操作,即有总响应为**  $h(n)=h_1(n)+h_2(n)$ 。例如当 $\beta=4$ 时,分别设计两带通滤波器为:





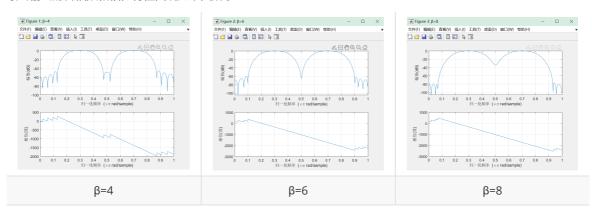
[0.2π,0.4π]的带通滤波器

[0.6π,0.8π]的带通滤波器

利用 fdatool 中的"导出"——"系数"功能,将所设计的 $[0.2\pi,0.4\pi]$ 带通滤波器和 $[0.6\pi,0.8\pi]$ 带通滤波器系数分别导出到Matlab工作区再相加,利用freqz函数查看总单位脉冲响应的幅频和相位特性。给出matlab实现代码为:

```
figure('name','\beta=4'); freqz( Num1_1 + Num1_2 ); figure('name','\beta=6'); freqz( Num2_1 + Num2_2 ); figure('name','\beta=8'); freqz( Num3_1 + Num3_2 );
```

最终输出的各幅频和相位特性曲线如下图所示:



由图像可见,对于Kaiser窗而言,其β值会影响滤波器的旁瓣特性——随着 β 的增加,相对旁瓣衰减降低,主瓣宽度增加。而由于上述滤波器采用两带通滤波器并联的形式,在β值较大时,主瓣宽度过大会导致中间阻带 $[0.4\pi,0.6\pi]$ 的幅频特性发生一部分重叠。

# 3) 滤波器特性分析

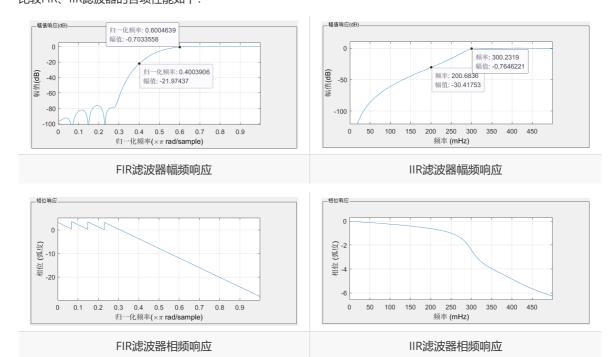
备注:实验报告要求中的第3条在此部分给出:记录滤波器特性分析中滤波器特性比较的结论并进行解释。

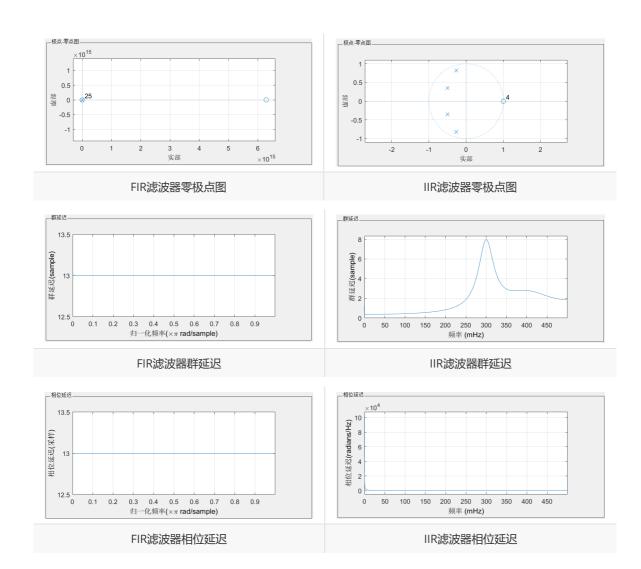
针对IIR滤波器设计实验内容中的三款滤波器(低通、高通和带通),采用基于blackman窗函数的FIR设计方法重新设计,比较用IIR与FIR方法得到的滤波器的幅频特性、相频特性、零极点、群延时、相位延时。对比较的结论进行原理性解释。

1. **FIR重新设计高通滤波器**——通带临界频率 fp =  $0.6\pi$  ,通带内衰减  $\alpha_p$ = 0.8dB ,阻带临界频率 fs =  $0.4\pi$  ,阻带内衰减  $\alpha_s$  = 20dB [已将采样频率1Hz归一化为2 $\pi$ ]

因为FIR窗函数设计中已经固定截止频率处的衰减固定为6dB,且并不能选择阻带内衰减,所以只能将截止频率 $\omega_c$ 设置得比通带临界频率更小(如此处设为 $\omega_c=0.5\pi$ ,并不断调整滤波器阶数,以使得通带和阻带内衰减满足设计要求。最终选定当阶数为25时可以达到设计要求。

比较FIR、IIR滤波器的各项性能如下:

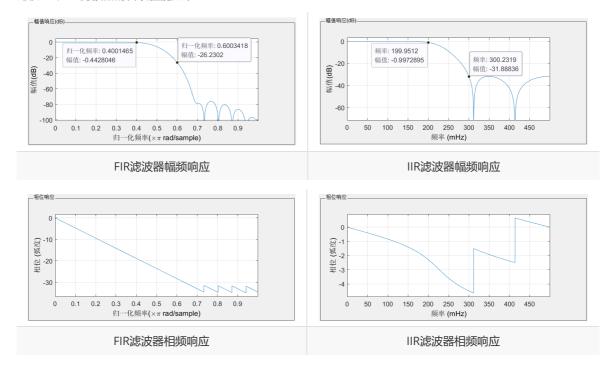


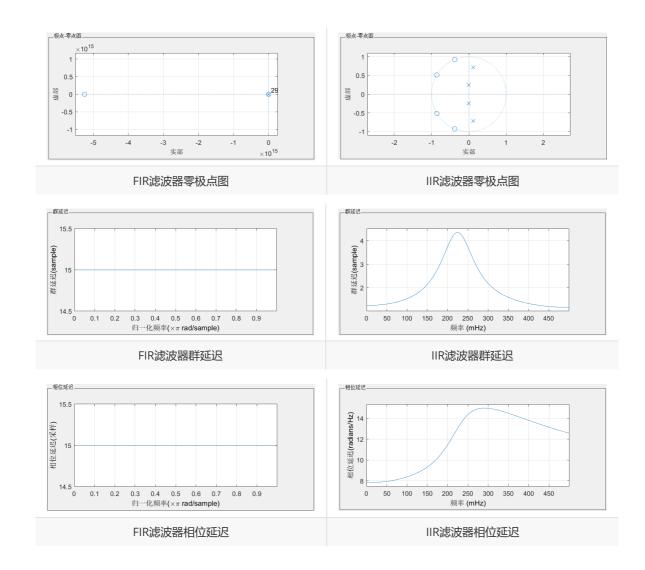


2. **FIR重新设计低通滤波器**——通带临界频率 fp =  $0.4\pi$  ,通带内衰减  $\alpha_p$  = 1dB ,阻带临界频率 fs =  $0.6\pi$  ,阻带内衰减  $\alpha_s$  = 25dB

与1同理,只能将截止频率设为比通带截止频率更大的 $\omega_c=0.5\pi$ ,并不断调整滤波器阶数,以使得通带和阻带内衰减满足设计要求。最终选定当阶数为29时可以达到设计要求。

比较FIR、IIR滤波器的各项性能如下:

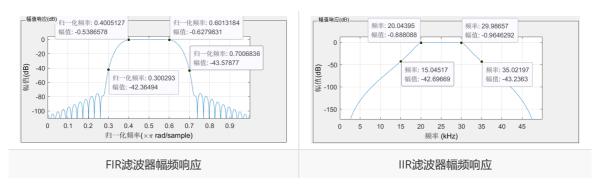


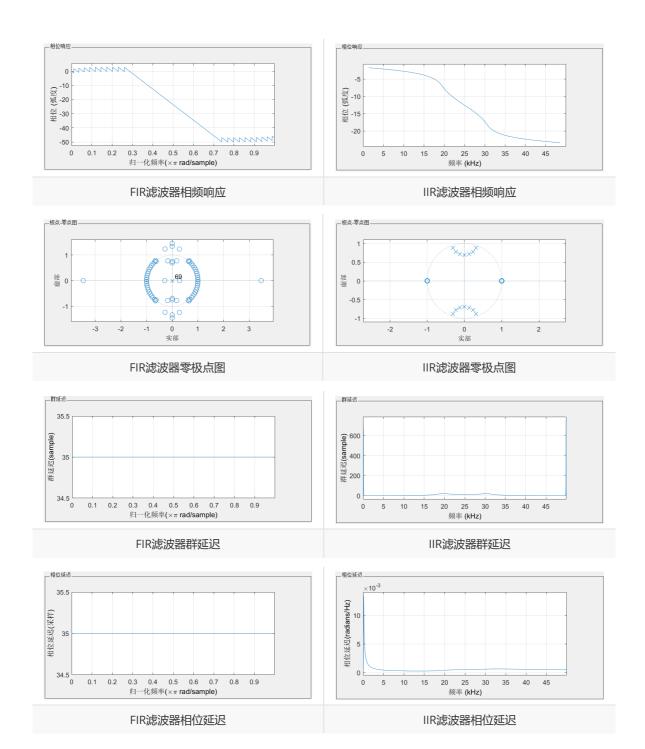


3. **FIR重新设计带通滤波器**——通带临界频率 fp1 = 20kHz/ $0.4\pi$ , fp2 = 30kHz/ $0.6\pi$ , 通带衰减 $\alpha_p$  = 1dB ,阻带临界 频率 fs = 15kHz/ $0.3\pi$ ,阻带衰减 $\alpha_s$  = 40dB [已将采样频率100kHz归一化为 $2\pi$ ]

与1同理,只能将FIR滤波器的通带范围由  $[\omega_{p1}=0.4\pi,\omega_{p2}=0.6\pi]$  扩大至 $[\omega_{c1}=0.36\pi,\omega_{pc2}=0.64\pi]$ ,并不断调整滤波器阶数,以使得通带和阻带内衰减满足设计要求。最终选定当阶数为69时可以达到设计要求。该阶数的选定非常艰难,因为所扩展的 $\omega_{c1}$ 和 $\omega_{c2}$ 也需要进行调整,如果 $\omega_{c1}$ 到 $\omega_{c2}$ 范围大了可能会发生通带衰减已远满足要求,但阻带衰减远没达到要求;范围小了则会倒过来,阻带到达要求而通带没有。从下面的幅值响应图也能看出,在这样 $\omega_{c1}$ 到 $\omega_{c2}$ 的范围仍偏大,阻带衰减刚好到达要求,但通带衰减仍有一定的裕量。

比较FIR、IIR滤波器的各项性能如下:





对比上述FIR和IIR滤波器,结合FIR滤波器和IIR滤波器设计原理,可以发现:

- 幅频特性上,IIR滤波器的幅频响应优于FIR滤波器。IIR滤波器幅频响应形状取决于所设计的类型,如
   Butterworth型、Chebyshev型等;FIR滤波器幅频响应形状取决于所采用的窗函数,直接体现为阻带处的纹波振荡。当滤波器阶数N越高时,FIR滤波器阻带振荡次数也就越多。对于相同的滤波器指标设计要求,IIR滤波器所要求的滤波器阶数远远小于FIR滤波器;
- 相频特性上,IIR滤波器优异的幅度响应是以非线性的相位响应为代价的,而非线性相位会引起频率色散。而FIR 滤波器具有严格的线性相位特性,这一点从FIR滤波器的相频响应中也可以看出,其中锯齿状折线是由于其频率 响应符号发生变化所附加的相位π;
- o **零极点分布上**, FIR滤波器具有N-1个可位于有限z平面任何位置的零点和N-1个位于原点位置的极点,而IIR滤波器具有N个位于单位圆内的零点和极点。因为IIR滤波器对零极点的约束较少,因此可用较低的阶数获得高的选择性,所用的存储单元少,计算量小,效率高。FIR滤波器传递函数的极点固定在原点,所以只能靠改变零点位置来改变它的性能。所以要达到高的选择性,必须用较高的阶数。
- **群延迟和相位延迟上**,FIR滤波器具有线性相位特性,故其群延迟和相位延迟为常数,且可以证明 $\alpha = \frac{N-1}{2}$ ; IIR滤波器不具有线性相位特性,因而其群延迟和相位延迟也是非线性的。

# 4) 滤波器的实际应用

1. 用Matlab产生信号 $x(t)=0.5+1.2sin(2\pi f_1t)+0.5cos(2\pi f_2t)+\omega(t)$ , 其中 $f_1$ =50Hz,  $f_2$ =200Hz, ω(t) 为高斯白噪声,采样频率 $f_s$ =1000Hz。利用sptool工具导入该信号,并观察其频谱特性。

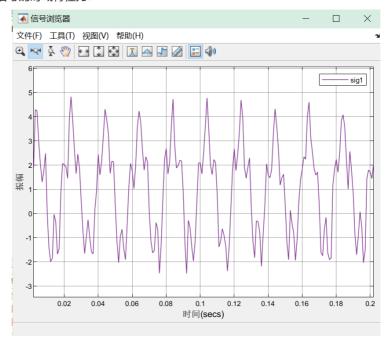
利用matlab产生信号的代码如下:

```
f1=50;f2=200;fs=1000;
n=1:1024; % 取1024点
x=0.5+1.2*sin(2*pi*f1*n/fs)+0.5*cos(2*pi*f2*n/fs);
x=x+awgn(x,10,'measured');
%在信号中加入高斯白噪声。参数10为信噪比SNR,单位dB;参数'measured'表示在添加噪声之前测量x的能量
```

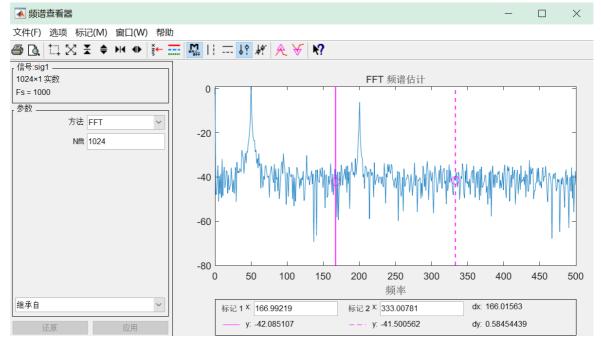
利用sptool工具导入该信号,导入界面如下:



导入后可观察到该信号的时域特性为:



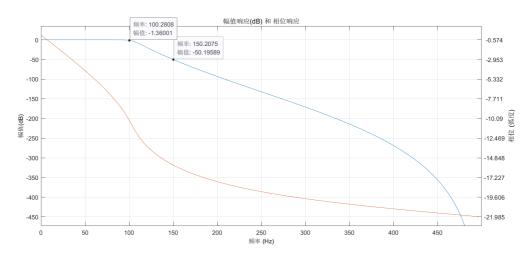
其频域特性为:



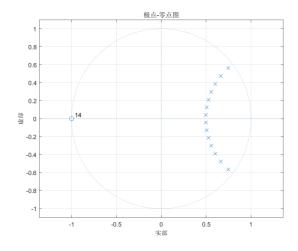
可见在直流点和引入的两正弦频率点f=50Hz和f=200Hz处有三个峰值,其余频率处的杂波由所引入的高斯白噪声所导致。

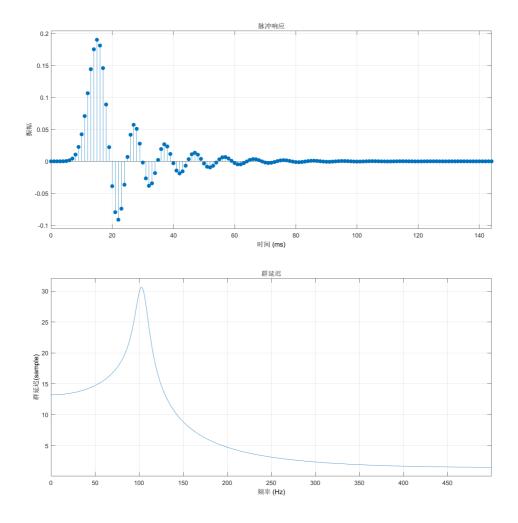
2. 在sptool中调用fdatool工具,设计一个butterworth低通滤波器,通带边界频率为100Hz,阻带边界频率为150Hz,通带波纹不大于2dB,阻带衰减不小于50dB,观察所设计滤波器的幅频特性、相频特性、零极点、群延时和脉冲响应。

所设计滤波器的幅频特性为:



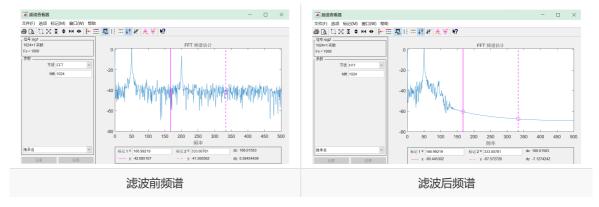
其零极点分布图、群延时和脉冲响应分别为:





#### 3. 在sptool中用 (2) 中设计的滤波器对 (1) 中的信号进行滤波处理,并分析滤波前后信号的频谱变化。

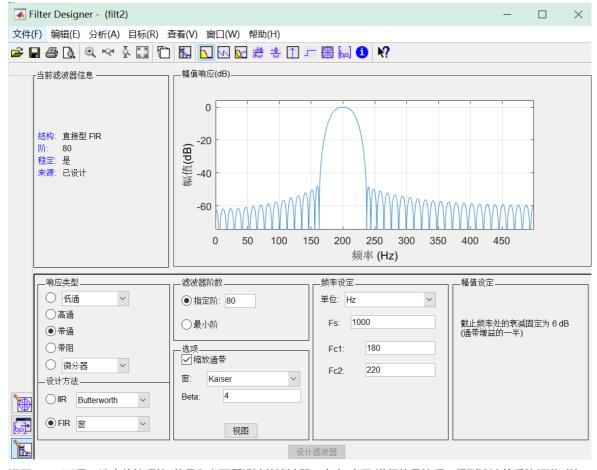
调用sptool工具,选中待处理的x信号和(2)中所设计的滤波器,点击"应用"进行信号处理,得到滤波前后的频谱对比如下图所示:



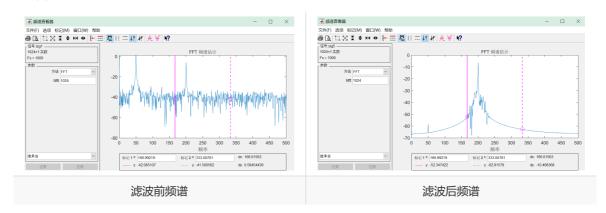
可以观察到,在频率大于150Hz部分的频谱分量几乎被完全滤除,符合预期结果。

# 4. 在sptool中调用fdatool工具,用Kaiser窗设计一个能滤除(1)中信号x(t)的直流分量和f1频率分量的滤波器,观察滤波前后的频谱变化。

根据设计要求,该滤波器需要滤除0Hz(即直流分量)、50Hz、和高频白噪声部分成分,保留200Hz频率分量,因此可考虑利用Kaiser窗设计一个带通滤波器。通带定为[180Hz, 200Hz],取定β=4,阶数为80,调用sptool的fdatool工具设计滤波器界面为:



调用sptool工具,选中待处理的x信号和上面所设计的滤波器,点击"应用"进行信号处理,得到滤波前后的频谱对比如下图所示:



可以观察到,在直流成分、低频f1=50Hz成分和高频白噪声成分的频谱分量被较好地滤除,符合预期结果。

# 四、分析总结

- 1、记录在上机实验内容中所设计的IIR滤波器的传递函数H(z)及对应的幅频特性曲线,定性分析它们的性能,判断设计是否满足需求。
- 2、记录在实验过程中FIR滤波器设计结果的h(n)的幅频和相位特性曲线,比较它们的性能,说明滤波器N和窗函数对滤波器性能的影响。
- 3、记录滤波器特性分析中滤波器特性比较的结论并进行解释。
- (1、2、3点已在第三部分实验内容中完成)
- 4、 对IIR滤波器设计和FIR滤波器设计的优缺点进行总结。
  - IIR滤波器系统函数的极点可以位于单位圆内任何地方,因此可用较低的阶数获得高选择性,所用存储单元少,经济 且效率高。但这是以相位的非线性为代价的。选择性越好,则相位的非线性越严重。相反,FIR滤波器却可以得到严 格的线性相位,然而由于FIR滤波器系统函数的极点固定在原点,所以只能用较高的阶数达到高选择性,对于同样的 滤波器设计指标,FIR所要求的阶数可以比IIR滤波器高5~10倍,导致成本较高,信号延时也较大。如果按相同的选择

性和相同的线性相位要求来说,则IIR滤波器就必须加全通网络进行相位校正,同样要大大增加滤波器的节数和复杂性:

- FIR滤波器可以用非递归方式来实现,有限精度的计算不会产生振荡。同时由于量化舍入以及系数的不准确所引起的误差的影响比IIR滤波器要小得多。显然对IIR滤波器必须留心稳定性问题,注意极点是否会位于单位圆之外,另外有限字长效应有时会引起寄生振荡。再者FIR滤波器可采用FFT算法,在相同阶数下,运算速度可以快得多;
- IIR滤波器可以借助于模拟滤波器的成果,一般都有有效的封闭形式设计公式可供准确计算,计算工作量比较小,对 计算工具要求不高。FIR滤波器没有现成设计公式。窗函数法仅可以给出窗函数的计算公式,但计算通、阻带衰减仍 无显式表达式。其他大多数设计FIR滤波器的方法都需要借助计算机辅助设计;
- IIR滤波器设计法,主要是设计规格化的,频率特性为分段常数的滤波器,而**FIR滤波器则易于适应某些特殊应用**,如构成微分器或积分器,或用于巴特沃斯、切比雪夫等逼近不可能达到预定指标的情况,例如由于某些原因要求三角形振幅响应。

#### 5、总结实验中根据实验现象得到的其他个人结论。

- 通过本次实验,我对于IIR和FIR滤波器的设计原理有了进一步的认识,同时掌握了matlab环境下滤波器设计工具 fdatool和信号处理与分析工具sptool的使用技巧。在理论学习FIR和IIR滤波器设计方法的同时,借助本次实验我也体 会到了计算机辅助设计滤波器的便捷与快速。
- 值得注意的是,理论知识在介绍关于线性相位滤波器时曾提及,若要限制滤波器的相位特性是线性的,则需要限制其单位脉冲响应满足: $h(n)=\pm h(N-1-n)$ ,其中正负号分别对应偶对称和奇对称的情况。当h(n)特性不同,以及单位脉冲响应长度N不同时,对滤波器的幅频特性有如下限制:

h(n)	N	对滤波器类型的限制
偶对称	奇数	没有限制
偶对称	偶数	不能用于逼近高通和带阻滤波器
奇对称	奇数	只能用于逼近带通滤波器
奇对称	偶数	不能用于逼近低通和带阻滤波器

在本次实验设计FIR滤波器的内容中,通过fdatool可以观察到各滤波器的单位脉冲响应h(n)特性。通过观察发现它们都满足 $h(n)=\pm h(N-1-n)$ ,即滤波器确实是线性相位的。进而可观察它们是奇对称还是偶对称的,结合N的奇偶性进行验证,发现所设计出的所有滤波器均满足上表格对于滤波器类型的限制。这也体现出,实际设计必须要满足理论推导所导出的限制条件,才说明设计是合理可行的。