2017-2018 秋复变函数期末试卷

一．（共 30 分）基础知识

1. 求解以下复方程：

（1）$e^{iz} = 2017$　　　　（2）$(z-3)^4 = 1$

2. 已知调和函数 $v(x,y) = 4x^2 + ay^2 + x$，求常数 a 并求出以 $v(x,y)$ 为虚部且满足 $f(0) = 1$ 的解析函数 $f(z)$.

3. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nz^{n-1}}{2^n}$，求收敛半径 R 并在收敛域内求出此幂级数的和函数.

4. 已知 $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$，把 $f(z)$ 在区域 $0<|z|<+\infty$ 展成洛朗级数.

5. 求 $z^5+5z^2+2z+1=0$ 在 $1<|z|<2$ 内根的个数，并说明理由.

二、（共 30 分）计算以下复积分

（1）$\int_0^{1+i}(2z+3z^2)dz$　　（2）$\oint_{|z|=3}\frac{e^{iz}}{z-2i}dz$　　（3）$\oint_{|z|=4}\frac{\sin 5z}{z^2}dz$

（4）$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{1}{1-z}\right)}{z^4} dz$　　　　（5）$\oint_{|z-3|=2} \frac{e^z}{|z|^2} |dz|$

三、（共 14 分）计算以下定积分

（1）$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-2\cos\theta)^2}$　　　　（2）$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 4x}{x(x^4+1)} dx$

四、（10 分）利用拉普拉斯变换解微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y''-6y'+9y=te^{3t} \\ y(0)=0, y'(0)=2017. \end{cases}$$

五、（6分）设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在围道 C 及其内部解析，$g(z)$ 在围道 C 上没有零点，在 C 内 $g(z)$ 有唯一零点 a，已知 $f(a)=p_1\neq 0$，$f'(a)=p_2$，$f''(a)=p_3$，而 $g'(a)=0$，$g''(a)=q_1\neq 0$，$g'''(a)=q_2$，$g''''(a)=q_3$.计算积分：$\oint_C \frac{f(z)}{g(z)}dz$.

六、（共 10 分）设 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\,(a_0\neq 0)$ 的收敛半径 $R>0$，

（1）记 $M(r)=\max_{|z|\leq r}|f(z)|$，（$r<R$），利用柯西积分公式证明：$\left|f^{(n)}(0)\right|\leq \frac{n!M(r)}{r^n}$

（2）证明：在圆 $|z|<\frac{|a_0|r}{|a_0|+M(r)}$ 内 $f(z)$ 无零点.（其中 $r<R$）