第四周作业(第 21 组)

姓名	班级	学号	贡献度
刘沁宇	计算机 002	2203613019	100
徐中伟	计算机 003	2206515211	100
廉景涛	物联网 001	2206113814	100

1. 问题一

某投资者拟在甲、乙两城市间开设一家汽车租赁公司，租赁者可在两城中任意租赁或归还汽车。在运营中发现，在甲城中租车的顾客约有 60%在本城归还，而有 40%在乙城归还；在乙城中租车的顾客约有 70%在本城归还，而有 30%在甲城归还。请预测该公司的汽车流向。

解答：

依题意于本题中，不考虑特殊情况，一般的，假设开始时甲城有车 A_0 辆，乙城有车 B_0 辆。则第一次统计公司的汽车流向情况如下：

甲城中汽车数量　$A_1 = 0.6*A_0 + 0.3*B_0$

乙城中汽车数量　$B_1 = 0.7*B_0 + 0.4*A_0$

第二次统计情况如下：

甲城中汽车数量　$A_2 = 0.6*A_1 + 0.3*B_1$

乙城中汽车数量　$B_2 = 0.7*B_1 + 0.4*A_1$

同理，第 n 次统计情况如下：

甲城中汽车数量　$A_n = 0.6*A_{n-1} + 0.3*B_{n-1}$

乙城中汽车数量　$B_n = 0.7*B_{n-1} + 0.4*A_{n-1}$

源代码运行截图：

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
int main(){
	float a,b,c,d,n;
	a=1,b=1;
	printf("统计次数：");
	scanf("%d",&n);
	int i=0;
	for(i=0;i<n;i++){
		c=0.6*a+0.3*b;
		d=0.4*a+0.7*b;
		a=c;
		b=d;
	}
	printf("甲城汽车所占原有比例：%f\n 乙城汽车所占原有比例：%f\n",a,b);
	return 0;
}
```

```
C:\Users\Dell\Desktop\1233.exe
统计次数: 100
100次统计后:
甲城汽车所占原有比例: 0.857143
乙城汽车所占原有比例: 1.142857

--------------------------------
Process exited after 3.708 seconds with return value 0
请按任意键继续. . .
```

结果分析：

由运行结果可以看到，再经过一段时间后，甲乙两城市的汽车占比逐渐稳定在一定数字比例，最终，汽车不会最终流向其中的一个城市，而是保持动态平衡。

改进思路:

假设初始阶段甲乙两城拥有的汽车各为 1000 辆，没辆车都无损坏，并且都可以被租赁出去，且都能按时归还。

假设初始阶段，甲乙城的汽车数量分别是 x1(n),x2(n)，写出差分方程：

甲城 x1(n+1)=0.6x1(n)+0.3x2(n)

乙城 x2(n+1)=0.4x1(n)+0.7x2(n)

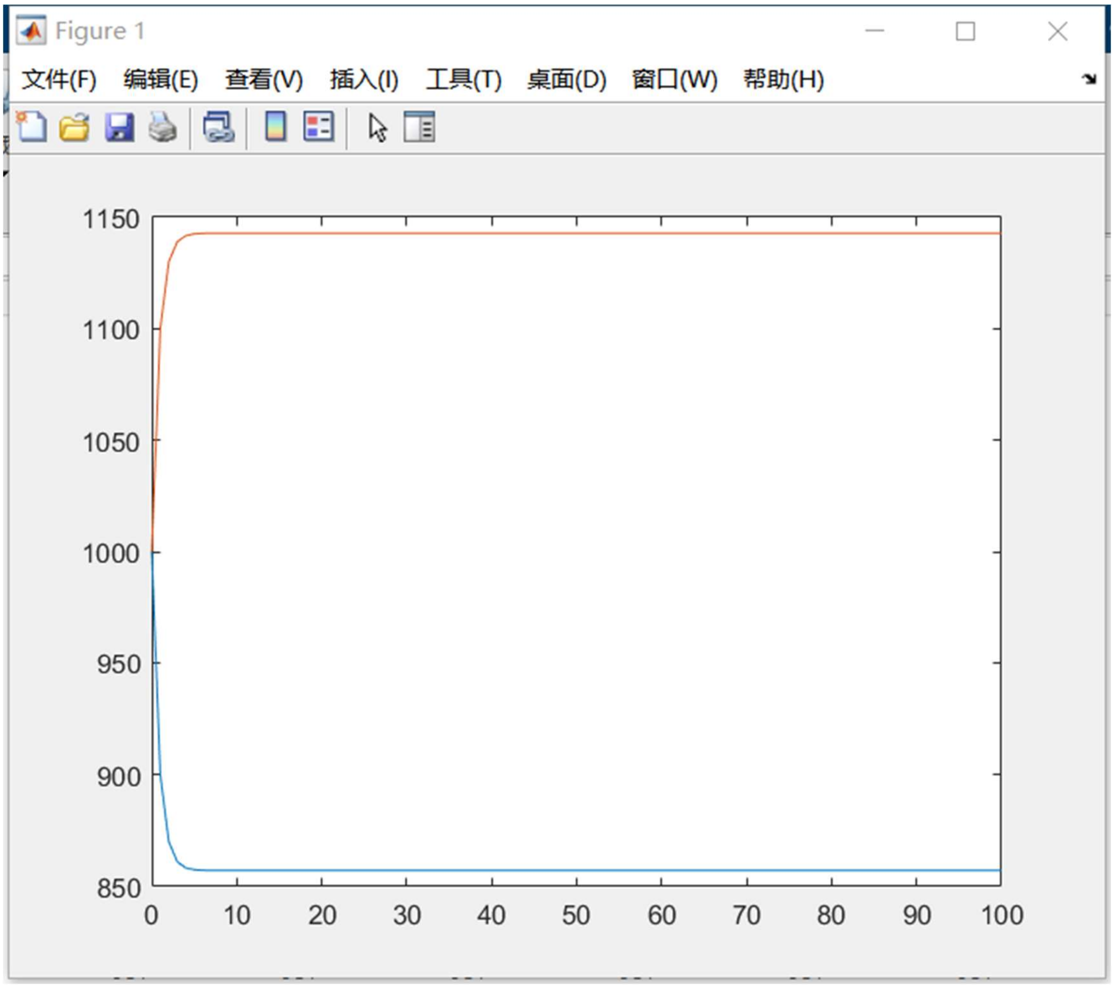
即: $$\begin{pmatrix} x1(n+1) \\ x2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1(n) \\ x2(n) \end{pmatrix}$$

故，n 次排查后各城的汽车数量情况如下:

（n 尽可能大，这里为方便使得 n=100）

```
ans =

  列 1 至 9

      1000       900       870       861       858       857       857       857       857
      1000      1100      1130      1139      1142      1143      1143      1143      1143

  列 10 至 18

       857       857       857       857       857       857       857       857       857
      1143      1143      1143      1143      1143      1143      1143      1143      1143

  列 19 至 27

       857       857       857       857       857       857       857       857       857
      1143      1143      1143      1143      1143      1143      1143      1143      1143

  列 28 至 36

       857       857       857       857       857       857       857       857       857
      1143      1143      1143      1143      1143      1143      1143      1143      1143

  列 37 至 45

       857       857       857       857       857       857       857       857       857
      1143      1143      1143      1143      1143      1143      1143      1143      1143
```

```
列 46 至 54

   857    857    857    857    857    857    857    857    857
  1143   1143   1143   1143   1143   1143   1143   1143   1143

列 55 至 63

   857    857    857    857    857    857    857    857    857
  1143   1143   1143   1143   1143   1143   1143   1143   1143

列 64 至 72

   857    857    857    857    857    857    857    857    857
  1143   1143   1143   1143   1143   1143   1143   1143   1143

列 73 至 81

   857    857    857    857    857    857    857    857    857
  1143   1143   1143   1143   1143   1143   1143   1143   1143

列 82 至 90

   857    857    857    857    857    857    857    857    857
  1143   1143   1143   1143   1143   1143   1143   1143   1143

列 91 至 99

   857    857    857    857    857    857    857    857    857
  1143   1143   1143   1143   1143   1143   1143   1143   1143
```



所以，由图表可以看出，不论初始值如何，在满足前提条件下，在时间充分增长之后两个城市拥有的汽车数量都趋于稳定。

源代码:

A=[0.6,0.3;0.4,0.7];

```
x(:,1)=[1000 1000];
for m=1:100
    x(:,m+1)=A*x(:,m);
end
round(x)
m=0:100;
plot(m,x)
```

注：问题二设计大量符号和公式，用 word 自带的公式编辑软件很麻烦，因此我们先利用 latex 编写转成 pdf 再截图到 word，同时编程语言选用 python，调用 Numpy 包即可。

2 问题二

2.1 问题

养老是重要的民生问题, 与每个人的利益息息相关, 养老保险是保险中的一个重要险种。保险公司将提供不同的保险方案。例如每月缴费 200 元至 60 岁开始领取养老金, 男子若 25 岁开始投保, 届时每月可领取养老金 2000 元; 如 35 岁开始投保, 则届时每月可领取养老金 1000 元: 请大家建立数学模型分析保险公司为兑付保险责任, 每月的投资收益率应为多少?

2.2 模型建立

2.2.1 假设前提

本问题依据以下假设进行讨论

1. 投保人在每月初上缴保险金
2. 投保人在投保年第一个月开始缴纳保险金
3. 投保人在 80 岁年初逝世
4. 保险公司月收益率恒定
5. 保险公司某月投资本金为上月月末剩余总资产

2.2.2 符号声明

本部分所用符号含义如下表所示

从 25 周岁开始, 到他 60 岁之前保险公司的收益:

第一个月月初投保人交保险费 $A_0 = x$

第一个月保险公司收益额 $A_1 = (1+R)x$

第二个月保险公司收益额 $A_2 = (1+R)(A_1+x)$

...

第 N 个月保险公司收益额 $A_n = (1+R)\left(A_{n-1}+x\right)$

逐项带入求和可得

$$A_n = x((1+R)^n + \ldots + (1+R)) = x\frac{(1+R)^{n+1}-(1+R)}{R} \tag{2.1}$$

在 60 周岁之后, 公司收益为 B_m

由于投保人在满 60 周岁的下个月开始从保险公司每月领取 2000 元的养老金, 因此

表 2.1: 符号说明

含义	符号
投保人每月投保的金额	x
60 岁后每月领取的养老金	y
投保人 60 岁前的公司收益	A_n
投保人 60 岁后的公司收益	B_m
保险公司的月收益率	R
60 岁前交保月数	n
60 岁后领取养老金的月数	m
投保人每月投保的金额	x
60 岁后每月领取的养老金	y
投保人 60 岁前的公司收益	A_n
投保人 60 岁后的公司收益	B_m
保险公司支付的养老金总额	C
保险公司的月收益率	R
60 岁前交保月数	n
60 岁后领取养老金的月数	m

60 周岁的第一个月公司收益 $B_1 = A_n(1+R) - y$
60 周岁的第二个月公司收益 $B_2 = B_1(1+R) - y$
...
60 周岁的第 m 个月公司收益 $B_m = B_{m-1}(1+R) - y$
同理逐项带入后可求得

$$B_m = x\frac{(1+R)^{n+1} - (1+R)}{R}(1+R)^m - y\frac{(1+R)^m - 1}{R} \tag{2.2}$$

当保险人身故且此时保险公司利润为 0 时能正好兑付保险责任, 即 $B_m = 0$ 时,R 有最小值

2.3 求解

由已知条件可得 将其带入式 2.2可得

表 2.2: 两种模型对应的初始变量值

投保年龄	x	y	n	m
25	200	2000	420	240
35	200	1000	300	240

(1) 当开始缴费年龄为 25 岁且 $B_m = 0$ 时, 解得此时 $R = 0.00494505$

(2) 当开始缴费年龄为 35 岁且 $B_m = 0$ 时, 解得此时 $R = 0.00746965$

2.4 结论

当开始投保缴费年龄为 25 岁时, 保险公司为兑付保险责任, 每月的投资收益率应至少为 0.494505%

当开始投保缴费年龄为 35 岁时, 保险公司为兑付保险责任, 每月的投资收益率应至少为 0.746965%

A 附录一

问题一无代码.

B 附录二

编程语言:*python*

B.1 模型 1

```python
insure_year = {
    "start": 25,
    "retire": 60,
    "death": 80
}
insurance = 200
pension = 2000

increasing_month = 12 * (insure_year["retire"] - insure_year["start"])
declining_month = 12 * (insure_year["death"] - insure_year["retire"])
exp = 1e-8


def recur(base: float, ratio: float, const_flow) -> float:
    return (const_flow+base)*(1+ratio)


def fund(inital: int, ratio: float, amount_month: int, const_flow: int) -> list:
    fund_list = [inital]
    for _ in range(amount_month):
        fund_list.append(recur(fund_list[-1], ratio, const_flow))
    return fund_list

```

```python

def remain(year: dict, ratio: float) -> float:
    increasing_fund = fund(0, ratio, increasing_month, 200)
    retire_fund = increasing_fund[-1]
    declining_fund = fund(retire_fund, ratio, declining_month, -2000)
    return declining_fund[-1]


def r_min(year: dict, expect: int, r_l: float, r_r: float):
    if r_r - r_l <= exp or remain(r_l, expect) == 0:
        return r_l
    r_m = (r_l+r_r)/2
    remain_m = remain(year, r_m)
    if remain_m < 0:
        return r_min(year, expect, r_m, r_r)
    else:
        return r_min(year, expect, r_l, r_m)


if __name__ == "__main__":
    r = r_min(insure_year, 0, 0, 1)
    print(r)
```

B.2 模型 2

```python
insure_year = {
    "start": 35,
    "retire": 60,
    "death": 80
}
insurance = 200
pension = 1000

increasing_month = 12 * (insure_year["retire"] - insure_year["start"])
declining_month = 12 * (insure_year["death"] - insure_year["retire"])
exp = 1e-8


def recur(base: float, ratio: float, const_flow) -> float:
    return (const_flow+base)*(1+ratio)


def fund(inital: int, ratio: float, amount_month: int, const_flow: int) -> list:
    fund_list = [inital]
    for _ in range(amount_month):
        fund_list.append(recur(fund_list[-1], ratio, const_flow))
```

```
    return fund_list


def remain(year: dict, ratio: float) -> float:
    increasing_fund = fund(0, ratio, increasing_month, 200)
    retire_fund = increasing_fund[-1]
    declining_fund = fund(retire_fund, ratio, declining_month, -2000)
    return declining_fund[-1]


def r_min(year: dict, expect: int, r_l: float, r_r: float):
    if r_r - r_l <= exp or remain(r_l, expect) == 0:
        return r_l
    r_m = (r_l+r_r)/2
    remain_m = remain(year, r_m)
    if remain_m < 0:
        return r_min(year, expect, r_m, r_r)
    else:
        return r_min(year, expect, r_l, r_m)


if __name__ == "__main__":
    r = r_min(insure_year, 0, 0, 1)
    print(r)
```

3. 问题三

1. 全球定位系统 GL ONASS（格洛纳斯）是由前苏联开发的，现由俄罗斯继续进行建设和运营。其基本原理:绕地球旋转的卫星向地球某位遣置发射一个信号，信号中包含卫星。在发射信号时所在的位置以及发射信号的时间等信息,则卫星与人的距离可以表示为两位置之间的时间差与光速的乘积，还可以用两者空间位置坐标表示。于是，就可以得到与探测卫星数量相同的等式，求解需定位位的时间和空间坐标。

2. 目前北斗三号系统已经全面建成，可为中国及全球全天候提供全球定位服务。

1985 年至 1994 年，我国进入自主卫星导航系统的演示论证期。1994 年至 2002 年，进入北斗卫星导航实验系统研制的建设期。 1994 年，启动北斗一号系统工程建设。北斗一号系统可提供定位、授时、广域差分和短报文通信的服务，实现有源定位。2003 年，增加发射的卫星进一步增强系统的性能。2004 年，启动北斗二号系统工程建设。该系统保留了北斗一号系统的双向位置报告等功能，与 GPS 系统在很多方面都有着相似之处，且增加了无源定位体系。2009 年，启动北斗三号系统建设。2012 年，完成 14 颗卫星的组网，建成了覆盖亚太区域、形成区域无源服务能力的北斗区域卫星导航系统。2018 年底，完成 19 颗卫星的组网，实现中国北斗三号基本系统的组网建设，北斗三号系统由区域扩展为全球服务，北斗卫星导航系统正式迈入全球时代。我国积极探索卫星导航系统的建设道路，已逐步形成了“三步走”的发展战略。第一步：2000 年底，建成北斗一号系统，向中国提供服务。第二步：2012 年底，建成北斗二号系统，向亚太地区提供服务。第三步：计划在 2020 年前后，建成北斗全球系统，向全球提供服务。随着北斗卫星导航系统的成功建设，使我国成为了拥有自主建设、独立运行卫星导航系统的国家，填补了我国卫星导航领域的空白。该系统可为全球用户提供全天候、全天时、高精度的定位、导航和授时服务，能与其他卫星导航系统兼容，是我国重要空间基础设施。北斗卫星导航系统服务区为全球，包括“一带一路”国家和地区在内的世界各地。随着北斗卫星导航系统覆盖亚太地区，并开启了全球组网时代，北斗卫星导航系统在基础理论、应用开发、服务领域等方面取得了很大的进步。伴随系统服务能力的逐步提升，北斗卫星导航系统正在大众定位、交通运输、农业渔业、公共安全、减灾救灾、气象探测、通信和电力等众多领域得到应用，并呈现出更为广泛应用的趋势

4. 问题四

题目: 随着汽油成本的上升，消费者面对汽油价格不断上涨，可能会考虑利用添加剂改善汽油的性能。假设有甲、乙两种添加剂,使用它们必须遵循的一些限制条件是:首先，每辆汽车 使用添加剂乙的添加量，加上两倍的添加剂甲的添加量，必须至少是 0.5 磅(约 0.227 kg)。其次，每添加 1 磅(约 0.454kg)添加剂甲将使每箱油增加 10 单位的辛烷,每添加 1 磅添加剂乙将使每箱油增加 20 单位的辛烷,辛烷的增加总量不能超过 6 单位。已知每磅添加剂甲的成本是 1.53 美元，每磅添加剂乙的成本是 4.00 美元。建立一个线性规划模型，确定每种添加剂的数量，满足上述限制条件并使成本最小。

由题可知，不妨设甲和乙的添加剂的量为 x1，x2：

1. 使用添加剂乙的添加量，加上两倍的添加剂甲的添加量，必须至少是 0.5 磅(约 0.227 kg)，所以 2*x1+x2>=0.5；
2. 每添加 1 磅(约 0.454kg)添加剂甲将使每箱油增加 10 单位的辛烷，每添加 1 磅添加剂乙将使每箱油增加 20 单位的辛烷,辛烷的增加总量不能超过 6 单位:

$$10*x1+20*x2<=6$$

3. x1,x2>=0

最优化成本函数 f=1.53*x1+4x2

代码：

```
c  =  [1.53,4];
A=[-1,-2;10,20];
b=[-0.5;6];
aeq=[];
beq=[];
vlb=[0;0];
vub=[];
[x,fval]=linprog(c,A,b,aeq,beq,vlb,vub)
```

```
c = [1.53,4];
A=[-1,-2;10,20];
b=[-0.5;6];
aeq=[];
beq=[];
vlb=[0;0];
vub=[];
[x,fval]=linprog(c,A,b,aeq,beq,vlb,vub)
```

命令行窗口

```
>> untitled7

Optimal solution found.


x =

    0.5000
         0


fval =

    0.7650
```

4. 问题五

题目叙述：
某校基金会有一笔数额为 M 元的基金,打算将其存人银行或购买国债。假设后年至少发行一次，发行时间不定。当前银行存款及各期国债的利率如表 7-18 所示政策参考银行的现行政策。

校基金会计划在 n 年内每年用部分本息奖励优秀师生,要求每年的奖金额大致相同在 n 年末仍保留原基金数额。校基金会希望获得最佳的基金使用计划，以提高每年的好具额。请你帮助校基金会在如下情况下设计基金使用方案,并对 M=50000 万元 n=10 出具体结果。

模型假设

(1)从学年初到学年末，算一年，学校基金在第一学年初到位，在每学年末奖

(2)平均收益率假设在这 n 年内保持不变;

(3)基金中产生的收益不考虑纳税金额，同时不计复息;

(4)科研、精品课程建设项目充足，科研基金或教学基金到期及时取出，扣除部分用于年发奖金外立即存入科研基金或教学基金

符号说明：

x_{ij}	第 i 存入 j 年期的存款
y_{ij}	第 i 购买 j 年期的国库券
r_i	i 年期的税后年利率
p_i	i 年期的国库券年利率
z	奖金数额

问题分析
问题一中题目要求在只能存款不购买国库券时所获得奖金的最大额,从题目中的各种存款年利率可以看出活期存款的年利率小于定期存款的年利率,从假设中可知奖金在每年年末发放,半年期存款的利率小于一年期利率。所以活期和半. 年期存款不能选择，这样可供选择的只有- -年期、二年期、三年期和五年期。又因为在任何时候资金都不能闲置。所以解决这道题目时可以建立线性方程组，求出最优解，通过建立线性方程组可以解出在每年年末取出资金后的处理方式。解线性方程组即可求得最大奖金额。

问题二中在既可以存款又可以购买国库券时。从题目中可知国库券的年利率高于

存款年利率，所以在既可以购国库券又可以存款时优先购买国库券，国库券每年至少发行一次，发行时间不定，在这种情况下就要分情况讨论。在一年中不同时期发放国库券，要随时准备购买国库券。为了不让资金闲置，在没发行国库券时要存款。可以分三种国库券在年初发行、国库券在每年的年中时期发行、国库券在每年其他时间发行。对于三种情况分别建立线性方程组解出最大奖金数额。

对于问题三的分析可以从对以上两问的分析中找到方法。题目中要求在第三年时因为举行校庆要增加20%的奖金数额。题目中没有限制是只能存款还是即可以存款又可以购买国库券。所以解决这个题目时要分两种情况。第一种只能存款，这时可以建立与问题一中相似的模型，建立线性方程组，此时把第三年的奖金增加20%，解得线性方程组，可得最大奖金数额。第二种情况又可以分为三种小情况，分别如问题二中国库券在年中、年初、其他时间发行，分别建立线性方程组解得每种小情况的奖金数额。这样就能解出在各种情况下的奖金数额。然后在计算出在第三年应当发放的奖金数额。

5. 模型的建立与求解

问题——模型的建立与求解

问题--种通过分析表格中的每年的年利率可知活期存款年利率要小于定期　存款的利率,半年期的存款存-　-年的利息的要小于一-年期的存款利息,依题意可知奖金是定期发放且在每年的年末发放,可知为了使利率的最大化应当舍去半年。经过分析可知第一年末提取的现金只有一个来源，那就是在第一年年初存入银行的一年期存款。第二年的校方所能提取的现金的来源有两个方面分别是第一年存入的两年期存款和第一年年初存入的一年期存款发放第一年奖金后剩余的钱转存的一年期存款。当然第三年的所能提取的现金就有三个来源。以此类推出每年提取的现金的来源方式。

第一年存入银行的资金M，有一年期、二年期、三年期和五年期的存款方式。

x11+x12+x13+x15=M

第一年年末的资金的来源是第一年年初存入的一年期存款的本息和,第二年年初的时候会把第一年年初存入的一年期存款的本息和减去当年年末奖金的数额再转存一年期、二年期、三年期、五年期的存款，具体方式如下:

x21+x22+x23+x25=x11(1+r1)-z

第二年的资金来源有二个方向，分别为第一年年初存入的二年期存款和第二二年年初存入的--年期存款,然后把发去奖金后剩余的钱在第三年的年初分别按一年期、二年期、三年期、五年期存入银行，表示如下:

X31+x32+x33+x35=x12(1+2*r2)+x21(1+r1)-z

第三年年末的资金来源有三个部分，分别是第一-年年初存　入的三年期存款、 第一年年末存入的二年期存款、第二年年末存入的-　-年期存款。 第四年年初的存

x4z+x42+x43+x45=x13(1+r3*3)+x22(1+r2*2)+x31(1+r1)-z

第四年年末的资金来源有四个来源,同样第四年年末的时候还是会把除去发

过奖金后剩余的钱在第五年年初转存一-年期、二年期、三年期、五年期存款。

$$x51+x52+x53+x55=x23(1+r3*3)+x32(1+r2*2)+x41(1+r1)-z$$

第五年的分析方法和以上分析方法-样， 第五年年末也是把发过奖金后剩余的钱在第六年年初转存四种存款方式，如下所示:

$$x61+x62+x63+x65=x15(1+r5*5)+x33(1+3*r3)+x42(1+r2*2)+x51(1+r1)-z$$

其后几年的处理方式和前几年的处理方式相同。计算方式表示如下:

$$xn1+xn2+xn3+xn5=x(n-1)(1+r1)+x(n-2)2(1+r2*2)+x(n-3)3(1+r3*3)+x(n-5)5(1+r5*5)-z$$

在第 n 年将所有钱取出，则有：

$$M=x(n-1)(1+r1)+x(n-2)2(1+r2*2)+x(n-3)3(1+r3*3)+x(n-5)5(1+r5*5)-z$$

N=10 时

求得结果有：

问题 2：

同问题一分析一模一样，只需要将三年和五年的利率替换为国债的利率

$$x11+x12+x13+x15=M$$

$$x21+x22+x23+x25=x11(1+r1)-z$$

$$x31+x32x33+x35=x12(1+2*r2)+x21(1+r1)-z$$

....

$$M=x(n-1)(1+r1)+x(n-2)2(1+r2*2)+x(n-3)3(1+r3*3)+x(n-5)5(1+r5*5)-z$$

此时只需要做替换：$xi3=yi3,xi5=yi5,y1j=y2j=0;r3=p3,r5=p5$

```
r1=0.015;
r2=0.021;
r3=0.0275;
r5=0.0275;
M=5000;
c = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
A = [];
b = [];
aeq=[
    1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
    -1-r1,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
    0,-1-2*r2,0,0,-1-r1,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0
    0,0,-1-r3*3,0,0,-1-r2*2,0,0,-1-r1,0,0,0,1,1,1,1,0,0
```

```
命令行窗口

fval =
```

问题 2：

对于问题二，如果只是存入银行，则在 1 的基础上将约束条件改为

x31+x32x33+x35=x12(1+2*r2)+x21(1+r1)-1.2*z 即可

如果是即存入银行又买国债

```
r1=0.015;
r2=0.021;
r3=0.0385;
r5=0.0397;
M=5000;
c = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
A = [];
b = [];
aeq=[
    1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
    -1-r1,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
    0,-1-2*r2,0,0,-1-r1,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
    0,0,-1-r3*3,0,0,-1-r2*2,0,0,-1-r1,0,0,0,1,1,1,1,0,0,
```

```
fval =

 -655.9291
```

问题 3:

则在 2 的基础上将约束条件 x31+x32x33+x35=x12(1+2*r2)+x21(1+r1)-z 改为 x31+x32x33+x35=x12(1+2*r2)+x21(1+r1)-1.2*z

```
r1=0.015;
r2=0.021;
r3=0.0385;
r5=0.0397;
M=5000;
c = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
A = [];
b = [];
aeq=[
    1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
    -1-r1,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
    0,-1-2*r2,0,0,-1-r1,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,
    0,0,-1-r3*3,0,0,-1-r2*2,0,0,-1-r1,0,0,0,1,1,1,1,0
```

6.

```
fval =
```