

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Оценка бессрочных опционов для случайных процессов со скачками

Мирзоев С.Е.

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Октябрь 2021

Научный руководитель: Белянкин Г.А.

Со-руководитель: Морозов В.В.

Содержание

1	Вступление	2
2	Введение	2
3	Решение для модели I	4
4	Сопутствующая литература	5
5	Бесконечный колл-опцион	5
6	Заключение	5
A	Выкладки	5
B	Определения	8

1 Вступление

В статье Гербера и Шиу была сделана оценка бесконечного пут-опциона, в данной статье аналогичный результат будет повторён для колл-опциона. В указанной статье рассматриваются две модели, в которых логарифм цены актива представляет собой сдвинутый составной пуассоновский процесс. Явные результаты получены для цен и оптимальных стратегий исполнения определенных бессрочных американских опционов на актив, в частности для бессрочного пут-опциона. В первой модели, в которой скачки цены актива направлены вверх, результаты получаются с использованием процесса - мартингала и (условия плавного перехода?). Во второй модели, в которой скачки идут вниз, показывалось, что значение стратегии, соответствующее постоянной границе исполнения опциона удовлетворяет определенному уравнению обновления. Затем из (условия непрерывного перехода?) получается оптимальная стратегия исполнения. Кроме того, одна и та же модель может быть использована для определения цены на определенные параметры отмены. Наконец, было показано, как классическая модель геометрического броуновского движения может быть использована в качестве предела, а также, как она может быть встроена в обе модели.

2 Введение

Пусть $S(t)$ - цена актива, например, акции, в момент времени $t \geq 0$. Мы предполагаем, что рынок риск-нейтрален, следовательно, стоимость ценной бумаги - это математическое ожидание дисконтированных будущих платежей. В предположении, что актив не выплачивает никаких дивидендов и что безрисковая мгновенная процентная ставка r является положительной константой, случайный процесс дисконтированной цены актива $\{e^{-rt}S(t)\}$ является мартингалом.

Пусть $U(t) = \ln S(t)$, $t \geq 0$. Мы предполагаем, что $\{U(t), t \geq 0\}$ - процесс с независимыми и стационарными приращениями, с начальным значением $U(0) = u$. Классическая модель цены акций является частным случаем, в котором $\{U(t)\}$ представляет собой винеровский процесс со сдвигом $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$ и бесконечно малой дисперсией σ^2 .

В данной работе будут рассмотрены две модели:

Модель I: $U(t) = u - ct + Z(t)$

Модель II: $U(t) = u + ct - Z(t)$

В обоих случаях $c > 0$ является постоянной величиной, а $\{Z(t)\}$ представляет собой составной пуассоновский процесс, определяемый пара-

метром $\lambda > 0$ и распределением величин скачка.

Для упрощения обозначений предположим, что распределения величин скачка непрерывны с плотностью вероятности $p(x), x \geq 0$.

Теорема 1 (Отсутствие арбитража). *В модели II мы делаем дополнительное предположение, что $c > r$ иначе возникает возможность арбитража.*

Доказательство. в приложении к статье ■

Обратите внимание, что модель II напоминает модель, которая используется для процесса избытка в классической теории риска.

Наша главная цель - оценить бессрочный американский опцион с функцией выплаты $P(s)$. Хотя указание *американский* не является обязательным, оно добавляется, чтобы подчеркнуть, что опцион может быть реализована в любое время.

Если такой опцион будет реализован в момент времени T , выигрыш составит $P(S(T))$. Мы ограничиваемся опционами с функциями выплаты, для которых априори ясно, что оптимальными стратегиями исполнения будут времена остановки вида:

$$T_L = \inf_{S(t) < L} t, \quad (1)$$

где граница исполнения опциона L является положительной константой. Это, в частности, относится к бессрчному опциону **пут**, где

$$P(s) = \max(K - s, 0) = (K - s)_+, \quad (2)$$

где K , обозначает цену исполнения. Проблема состоит в том, чтобы сначала найти стоимость стратегии T_L ,

$$V(s; L) = E[e^{-rT_L} P(S(T_L)) \mid S(0) = s], s \geq L, \quad (3)$$

а затем определить оптимальное значение \tilde{L} , которое максимизирует $V(s; L)$. Следовательно, L - оптимальная граница опциона. Цена опциона равна:

$$\begin{cases} V(S(0); \tilde{L}), & \text{if } S(0) \geq \tilde{L} \\ P(S(0)), & \text{if } S(0) < \tilde{L} \end{cases}. \quad (4)$$

3 Решение для модели I

Поскольку траектории процесса $\{S(t)\}$ не имеют скачков вниз, точная нижняя грань (1) достигается на непрерывном участке траектории, а значит $S(T_L) = L$, и, следовательно, (3) получает вид:

$$V(s; L) = E[e^{-rT_L} \mid S(0) = s] P(L), s \geq L, \quad (5)$$

Остается определить мат.ожидание. Для этой цели мы рассмотрим мартингал вида $\{e^{-rt} S(t)^\xi\}$.

Теорема 2 (Мартингальное условие для ξ). *Так как $e^{-rt} S(t)^\xi = e^{-rt+\xi U(t)}$ и $U(t), t \geq 0$ - процесс с независимыми и стационарными приращениями, условие мартингальности для ξ при $t = 1$ ¹ выглядит как:*

$$e^{-r} E[e^{\xi U(1)} \mid U(0) = u] = e^{\xi u} \quad (6)$$

Равносильно:

$$e^{-r-c\xi} E[e^{\xi Z(1)} \mid U(0) = u] = 1 \quad (7)$$

Что приводит к:

$$\lambda \left[\int_0^{+\infty} e^{\xi x} p(x) dx - 1 \right] - r - c\xi = 0 \quad (8)$$

Доказательство. в приложении к статье ■

Далее сформулируем утверждение о виде функции в левой части уравнения.

Теорема 3 (Строгая выпуклость). *Выражение в левой части является строго выпуклой функцией по ξ*

Доказательство. в приложении к статье ■

Учитывая утверждение выше, это уравнение имеет не более двух решений. На самом деле, она имеет ровно два решения:

Теорема 4 (Решение уравнения (8)). *Уравнение (8) имеет ровно два решения.*

Первое: $\xi_1 = 1$,

Второе: $\xi_2 = -R < 0$, для некоторого $R > 0$

¹рассмотрение конкретной реализации процесса не сужает общность решаемой задачи

Доказательство. в приложении к статье ■

Отметим, что положительный мартингал $e^{-rt}S(t)^{-R}$ ограничен сверху константой L^{-R} при $t < T_L$.

Теорема 5. *Следовательно, мы можем применить теорему о необязательной выборке, чтобы сделать вывод, что:*

$$\lambda \left[\int_0^{+\infty} e^{\xi x} p(x) dx - 1 \right] - r - c\xi = 0 \quad (9)$$

Соединяя полученные в (9) и (5) получаем:

$$V(s; L) = \left(\frac{L}{s} \right)^R P(L), s \geq L. \quad (10)$$

Осталось найти \tilde{L} , то есть значение L , максимизирующее $L^R P(L)$. Тогда условие первого порядка имеет вид:

4 Сопутствующая литература

Список литературы

- [1] Hans U. Gerber and Elias S.W. Shiu "Pricing Perpetual Options for Jump Processes" // — North American Actuarial Journal, 1998 — vol. 2, issue 3, 108-109 —

5 Бесконечный колл-опцион

6 Заключение

A Выкладки

Доказательство теоремы 1. Если бы было допустимо $c \leq r$, мы бы имели $S(t) \leq S(0)e^{rt}$ со строгим неравенством после первого скачка (скачки положительные по предположению ??). Следовательно, путем короткой продажи (Подробнее: B.2) актива и инвестирования выручки $S(0)$ по безрисковой процентной ставке r мы могли бы получить безрисковую прибыль:

В момент 0 инвестор берёт актив в короткую позицию, сразу её продаёт и сумму $S(0)$ кладёт на депозит в банк под ставку r . Далее он ждёт,

когда выполнится $e^{rt}S(0) > S(t)$ (это произойдёт при первом скачке стоимости актива $S(t)$). Инвестор забирает деньги с банковского депозита, покупает актив, возвращает его брокеру и имеет безрисковую прибыль $e^{rt}S(0) - S(t)$ ■

Доказательство теоремы 2. Условие мартингалльности для $\{e^{-rt}S(t)^\xi\}$:

$$\mathbb{E}[e^{-rt}S(t)^\xi \mid S(0) = s] = s^\xi$$

Выразим $S(t)$ через $U(t)$, используя определение последнего ($U(t) = \ln S(t)$):

$$\mathbb{E}[e^{-rt+\xi U(t)} \mid U(0) = u] = e^{\xi u}$$

Подставим $t = 1$. Имеем право, т.к. рассмотрение конкретной реализации процесса не сужает общности решаемой задачи:

$$e^{-r} \mathbb{E}[e^{\xi U(1)}] = e^{\xi u} \quad (11)$$

Из формулировки первой модели, $U(t) = u - ct + Z(t)$, тогда (11) принимает вид:

$$e^{-r} \mathbb{E}[e^{\xi(u-c+Z(1))}] = e^{\xi u}$$

Или:

$$e^{-r-c\xi} \mathbb{E}[e^{\xi Z(1)}] = 1$$

Заметим, что внутри математического ожидания у нас производящая функция моментов составного пуассоновского процесса (Подробнее: B.1):

$$e^{-r-c\xi} M_{Z(1)}(\xi) = 1 \quad (12)$$

Для неё можно применить следующее упрощение:

Теорема 6 (Производящая функция моментов составного пуассоновского процесса). *Обозначим производящую функцию моментов случайной величины X :*

$$M_X(\alpha) = \mathbb{E}[e^{\alpha X}]$$

Тогда для составного Пуассоновского процесса $\{X(t)\}$.

$$M_{X(t)}(\alpha) = e^{\lambda t (M_{Y_1}(\alpha) - 1)} \quad (13)$$

Доказательство. в приложении к статье ■

То есть, прологарифмировав обе части (12):

$$\ln M_{Z(1)}(\xi) - r - c\xi = 0$$

И, подставив теперь в производящей функции результат (13) получим:

$$\ln e^{\lambda(M_{Y_1}(\xi)-1)} - r - c\xi = 0$$

Упростив полученное:

$$\lambda(M_{Y_1}(\xi) - 1) - r - c\xi = 0$$

Подставим выражения для мат.ожидания скачка получим требуемое:

$$\lambda \left(\int_0^{+\infty} e^{\xi x} p(x) dx - 1 \right) - r - c\xi = 0$$

■

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим вторую производную данной функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\lambda \left(\int_0^{+\infty} e^{\xi x} p(x) dx - 1 \right) - r - c\xi \right] &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\lambda \left(\int_0^{+\infty} e^{\xi x} p(x) x dx \right) - c \right] \\ &= \lambda \left(\int_0^{+\infty} e^{\xi x} p(x) x^2 dx \right) = \lambda E[e^{\xi x} x^2] \end{aligned}$$

Так как $\lambda > 0, x^2 \geq 0, e^{\xi x} > 0, p(x > 0) \neq 0$, выражение внутри строго положительно, как произведение положительной величины и мат.ожидания ненулевой неотрицательной случайной величины. Итак, вторая производная исходной функции строго положительна. Попутно было доказано, что и первая производная монотонна ($x > 0$), а значит имеем дело с монотонной строго выпуклой функцией.

■

Доказательство теоремы 4. Обозначим функцию в левой части уравнения (8) через $f(\xi)$:

$$f(\xi) = \lambda \left(\int_0^{+\infty} e^{\xi x} p(x) dx - 1 \right) - r - c\xi$$

Первое решение возникает, так как $e^{-rt}S(), t \geq 0$ должно быть мартингалом.

Второе решение будет отрицательным, то есть для некоторого $R > 0$ будет иметь вид: $\xi_2 = -R < 0$. Это следует из того, что $f(0) = -r$ и $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} f(\xi) = +\infty$:

$$f(0) = \lambda \left(\int_0^{+\infty} e^0 p(x) dx - 1 \right) - r = \lambda(1 - 1) - r = -r$$

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} f(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \left[\lambda \left(\int_0^{+\infty} e^{\xi x} p(x) dx - 1 \right) - r - c\xi \right] \\ &= -\lambda - r - c\xi = +\infty \end{aligned}$$

А так как выражение в левой части - непрерывная монотонная функция от ξ , она принимает все значения лежащие в $[-R, +\infty)$ на $\xi \in (-\infty, 0]$ ■

Доказательство теоремы 6. Необходимое получается из цепочки уравнений

$$\begin{aligned} M_{X_t}(\alpha) &= \mathbb{E}[e^{\alpha X_t}] \\ &= \mathbb{E}[e^{\alpha \sum_{i=1}^{N_t} Y_i}] = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{\alpha \sum_{i=1}^{N_t} Y_i}] P(N_t = m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{(\alpha \sum_{i=1}^{N_t} Y_i)}] \frac{(\lambda t)^m e^{-\lambda t}}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}[(e^{\alpha Y_1})^m] \frac{(\lambda t)^m e^{-\lambda t}}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} M_{Y_1}(\alpha)^m \frac{(\lambda t)^m e^{-\lambda t}}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(M_{Y_1}(\alpha) \lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} \\ &= e^{(M_{Y_1}(\alpha) \lambda t)} e^{-\lambda t} = e^{\lambda t (M_{Y_1}(\alpha) - 1)} \end{aligned}$$

■

В Определения

Определение В.1 (Составной пуассоновский процесс). Процесс $\{X_t, t \geq 0\}$ называется **составным процессом Пуассона**, если мы можем записать его как:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad (14)$$

где $\{N_t, t \geq 0\}$ - процесс Пуассона, а $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ - семейство случайных независимых $v.$ с тем же распределением, которые также независимы от $\{N_t, t \geq 0\}$.

Определение В.2 (Шорт, короткая позиция). **Продажа без покрытия или торговля в шорт** - продажа ценных бумаг, товаров или валюты, которыми торговец на момент продажи не владеет. Такая операция возможна, если условия контракта предусматривают его исполнение (поставку) через некоторое время или при маржинальной торговле, когда разрешено продавать взятый у брокера в кредит товар с предполагаемой последующей покупкой аналогичного товара и возврата кредита в натуральном (товарном) виде. Торговец надеется, что цена упадёт и он сможет дешевле выкупить ранее проданный товар. Этот механизм обеспечивает возможность получать прибыль при снижении цен.