

Матрицы и основные матричные операции

1. Определение матриц

Матрицей размера $n \times m$ называется прямоугольная таблица специального вида, состоящая из n строк и m столбцов, заполненная числами. Матрица обычно обозначается заглавными буквами латинского алфавита, например A . Элементы матрицы A обозначаются a_{ij} , где i и j — номер строки и столбца, где расположен этот элемент, соответственно. Пространство матриц $n \times m$ обозначается $\mathbb{R}^{n \times m}$.

Матрицы можно использовать для работы с системами линейных алгебраических уравнений. Например, в задачах линейной классификации решается система линейных алгебраических уравнений с матрицей объект-признак относительно вектора неизвестных параметров. При этом получившаяся система уравнений может как иметь бесконечное число решений, так и не иметь решений вовсе. Подробнее эти вопросы будут обсуждаться в курсе по машинному обучению.

Для матриц размера $m \times n$ результат операции умножения на вектор-столбец размера n (т.е. на матрицу размера $n \times 1$) есть новый вектор-столбец размера m :

$$Aw = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}w_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}w_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}w_i \end{pmatrix}$$

Другими словами, можно сказать, что матрица задает линейное отображение.

Системы линейных уравнений лаконично записываются с помощью матриц, например:

$$\begin{cases} 12w_1 + 7w_2 + 21w_3 + 31w_4 + 11w_5 = 1 \\ 45w_1 - 2w_2 + 14w_3 + 27w_4 + 19w_5 = 0 \\ -3w_1 + 15w_2 + 36w_3 + 71w_4 + 21w_5 = 0 \\ 4w_1 - 13w_2 + 55w_3 + 34w_4 + 15w_5 = 1 \end{cases}$$

в матричной записи имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 12 & 7 & 21 & 31 & 11 \\ 45 & -2 & 14 & 27 & 19 \\ -3 & 15 & 36 & 71 & 21 \\ 4 & -13 & 55 & 34 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Матричные операции

Произведение матриц

Ранее уже было сказано, как производится умножение матрицы размера $m \times n$ на вектор-столбец длины n :

$$A \cdot w = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}w_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}w_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}w_i \end{pmatrix}.$$

При этом следует отметить, что такая операция возможна только тогда, когда число столбцов матрицы совпадает с длиной вектора. Иначе операция не определена. Можно определить более общую операцию умножения матриц следующим образом.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ — две матрицы соответствующих размеров (число столбцов в A совпадает с числом строк в B). Тогда произведением матрицы A на матрицу B называется матрица C размера $m \times k$:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix}, \quad c_{ij} = \sum_{p=1}^n a_{ip}b_{pj}.$$

Пример: произведение матриц

Заданы две матрицы согласованного размера:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

тогда их произведение:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \\ 10 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 10 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 10 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Произведение матриц и линейные отображения

Ранее было сказано, что матрицы задают линейные отображения. Матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ размера $m \times n$ будет задавать отображение из пространства векторов длины n в пространство векторов размера m . Аналогично матрица $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ задает отображение из пространства векторов длины k в пространство векторов длины n .

Но тогда можно построить отображение из пространства векторов длины n в пространство векторов длины k последовательным применением отображений, задаваемых матрицами A и B :

$$y_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \left(\sum_{p=1}^k b_{jp} w_p \right) = \sum_{p=1}^k \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jp} \right) w_p = \sum_{p=1}^k c_{ip} w_p.$$

Матрица получившегося преобразования в точности равна произведению матриц A и B :

$$c_{ip} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jp}.$$

Определённое таким образом произведение матриц оказывается совершенно естественным.

Например, при решении системы линейных уравнений $Ax = b$ (например при решении задачи линейной классификации) на x могут дополнительно быть наложены определенные ограничения. Если такие ограничения могут быть введены путем замены $x = Bz$, то вектор z может быть найден из системы уравнений:

$$ABz = b,$$

матрица которой в точности равна произведению матриц A и B .

Сложение и умножение на число

Для матриц также определены операции сложения и умножения на число. **Складывать можно только матрицы одинакового размера.** Сложение матриц происходит поэлементно, то есть $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, если $C = A + B$, где A и B — матрицы одного размера. Умножение матрицы на число заключается в умножении каждого элемента матрицы на это число, то есть $d_{ij} = \lambda a_{ij}$, если $D = \lambda A$.

Другими словами, матрицы одного размера образуют векторное пространство.

Транспонирование матриц

Для матриц также определяют операцию транспонирования. Матрица $B = A^T$, полученная транспонированием матрицы A размера $m \times n$, будет иметь размер $n \times m$, а её элементы будут связаны с элементами исходной матрицы следующим образом: $b_{ij} = a_{ji}$. Говоря нестрого, столбцы исходной матрицы стали строками новой матрицы, а строки — столбцами.

Пример: транспонирование матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Ранг и определитель

Определитель матрицы 2×2 : геометрический смысл

Важным понятием линейной алгебры является определитель (детерминант) матрицы. Он имеет множество приложений, в том числе и геометрических. Например, с помощью него можно вычислить площадь построенного на двух векторах параллелограмма на плоскости.

Для этого каждый из векторов следует записать как отдельный столбец матрицы A размера 2×2 . Тогда преобразование, задаваемое матрицей A , будет отображать единичный квадрат в требуемый параллелограмм. Определитель $\det A$ с точностью до знака будет равен площади параллелограмма:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad S = |\det A|.$$

Таким образом, абсолютное значение определителя отражает коэффициент изменения площади при преобразовании, а знак показывает, выполняет ли преобразование A отражение. Вообще говоря, свойства преобразования можно изучать на основе того, в какой параллелограмм оно переводит единичный квадрат.

Пример: нахождение площади параллелограмма

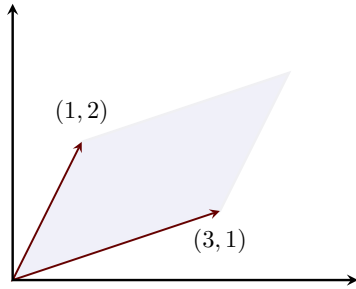


Рис. 1: Площадь параллелограмма.

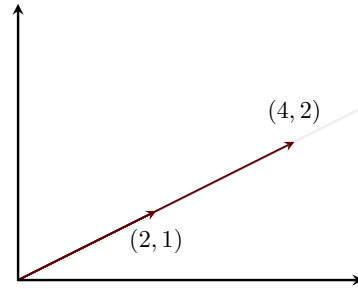


Рис. 2: Вырожденный случай.

Для того, чтобы вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $(1, 2)^T$ и $(3, 1)^T$, вычислим определитель матрицы, составленной из этих векторов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = |\det A| = |3 \cdot 2 - 1 \cdot 1| = 5.$$

Определитель матрицы

Понятие определителя матрицы имеет смысл только для квадратных матриц. Дать определение определителю на случай пространств больших размерностей можно несколькими способами: существуют определение через перестановки, определение через формулу разложения по строке и аксиоматическое определение. Геометрический смысл определителя некоторой матрицы — ориентированный объем многомерного параллелепипеда, построенного на векторах, которые являются столбцами этой матрицы.

Можно дать определение используя следующую рекурсивную формулу (разложение по строке):

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \bar{M}_j^1,$$

где \bar{M}_j^1 — определитель матрицы, полученной из исходной вычеркиванием 1-строки и j -го столбца.

Свойства определителя

Определитель широко используется в линейной алгебре, так как обладает целым рядом важных свойств:

- Определитель матрицы, содержащей линейно зависимые строки или столбцы, равен нулю.
- Определитель не меняется при транспонировании.
- Если $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — квадратные матрицы одного размера, то $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Ранг матрицы

Ранг матрицы $\text{rg } A$ — другое важное понятие из линейной алгебры. Сначала дают два определения для ранга матрицы:

- **Строчный ранг:** называется максимальное число линейно независимых строк.
- **Столбцовый ранг:** называется максимальное число линейно независимых столбцов.

Фундаментальная теорема «о ранге матрицы» говорит, что строчный ранг равен столбцовому, и поэтому говорят просто о ранге матрицы.

4. Системы линейных уравнений (СЛАУ)

Систему из m линейных уравнений относительно n неизвестных x_1, \dots, x_n можно записать в общем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Но удобно использовать матричную форму СЛАУ. Система линейных алгебраических уравнений может быть представлена в матричной форме как:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

или более кратко $Ax = b$, где A — это матрица коэффициентов, b — столбец свободных членов, а x — вектор из неизвестных. Причем возможны три случая:

1. Система вовсе не имеет решения. Такая система называется несовместной.
2. Система имеет единственное решение.
3. Система имеет бесконечно много решений.

Это связано с тем, что если система имеет два решения \vec{x}_1 и \vec{x}_2 , то любой вектор вида $t\vec{x}_1 + (1-t)\vec{x}_2$, где $t \in \mathbb{R}$, также будет решением.

Теорема Кронекера-Капелли дает критерий совместности системы. Система линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы A равен рангу её расширенной матрицы $(A|b)$, причём система имеет единственное решение, если ранг равен числу неизвестных, и бесконечное множество решений, если ранг меньше числа неизвестных. Расширенная матрица получается из матрицы A приписыванием к ней справа столбца b .

Решение системы уравнений с квадратной матрицей можно записать с привлечением так называемой обратной матрицы. Матрица называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1} , если выполнено:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

где I — единичная матрица нужного размера. **Обращение возможно только в случае квадратных невырожденных матриц.** Действительно, если предположить, что у вырожденной матрицы A ($\det A = 0$) существовала бы обратная матрица, легко можно прийти к противоречию:

$$1 = \det I = \det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \det A = \det A^{-1} \cdot 0 = 0.$$

Решение уравнения $Ax = b$, если матрица A — невырожденная, единственно и запишется в виде:

$$x = A^{-1}b.$$

Задача вычисления обратной матрицы и решения СЛАУ, строго говоря, сравнимы по сложности.

5. Типы матриц

Неоднократно было сказано, что матрица задаёт линейное отображение из одного векторного пространства в другое. Особый интерес представляет случай, когда строится отображение из некоторого линейного пространства в его само же. Такой класс линейных отображений называется линейными преобразованиями. Матрицы линейных преобразований всегда квадратные.

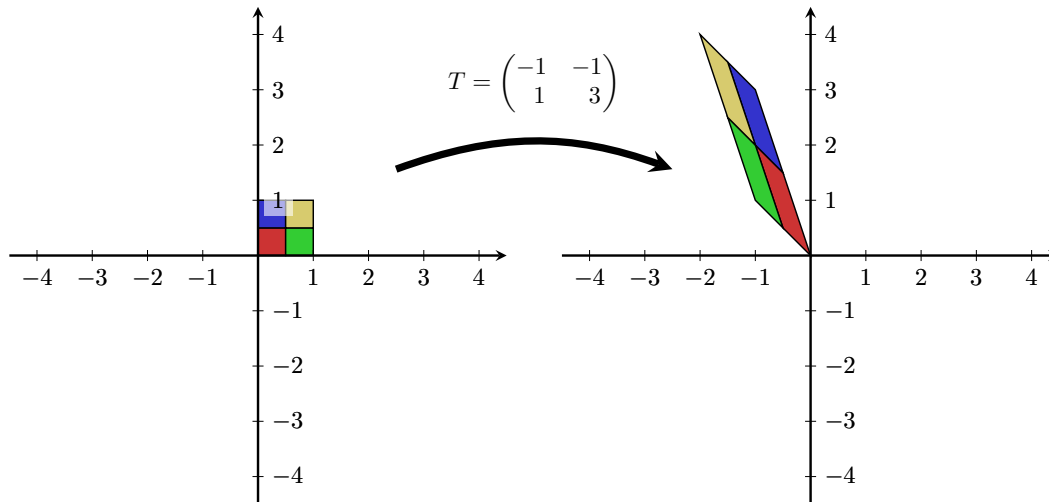


Рис. 3: Действие линейного преобразования, задаваемого матрицей T , на единичный квадрат.

Квадратная матрица называется диагональной в том случае, если все её элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю. Частным случаем диагональной матрицы является единичная матрица I , на главной диагонали которой стоят единицы. Если матрица преобразования диагональная, то она задает растяжение или сжатие по осям системы координат.

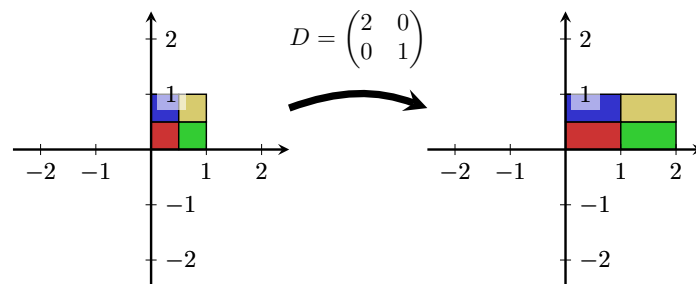


Рис. 4: Действие линейного преобразования, задаваемого диагональной матрицей D .

Важный класс квадратных матриц — ортогональные матрицы. Матрица называется ортогональной, если:

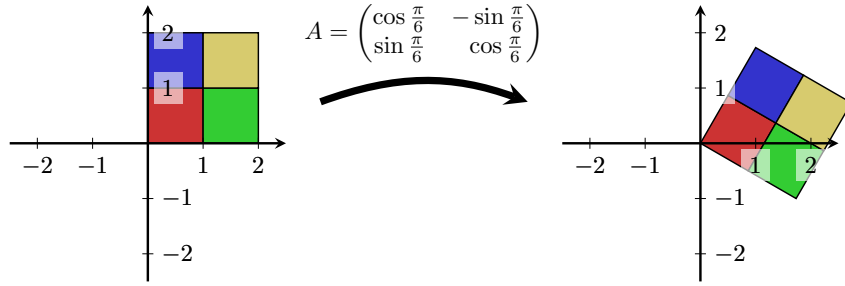
$$A^T A = A A^T = I.$$

Непосредственно из определения следуют следующие важные свойства:

- Ортогональная матрица обратима, причем $A^{-1} = A^T$.
- Ортогональные преобразования сохраняют скалярное произведение:

$$\langle Ax, Az \rangle = (Ax)^T (Az) = x^T A^T A z = x^T z = \langle x, z \rangle.$$

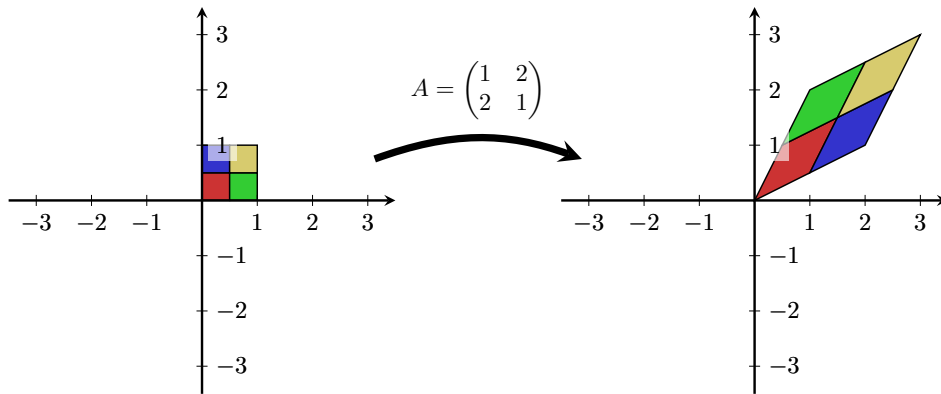
- Ортогональные преобразования сохраняют длины векторов $\|Ax\| = \|x\|$ и углы между векторами.

Рис. 5: Действие линейного преобразования, задаваемого ортогональной матрицей A .

В случае евклидовой плоскости всякое ортогональное преобразование является поворотом или поворотом с инверсией, и его матрица в любом ортонормированном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Другой важнейший класс матриц — симметричные. Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$.

Рис. 6: Действие линейного преобразования, задаваемого симметричной матрицей A .

Важным результатом линейной алгебры является теорема о приведении симметричных матриц к диагональному виду с помощью ортогонального преобразования. А именно всякую симметричную матрицу $A = A^T$ можно записать как $A = QDQ^T$, где Q — некоторая ортогональная матрица, а D — диагональная матрица.

6. Понятие собственного вектора

Важной характеристикой матрицы, а также линейного преобразования, заданного этой матрицей, является спектр — набор собственных векторов и соответствующих собственных значений.

Собственным вектором линейного преобразования A называется такой ненулевой вектор $x \in V$, что для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется $Ax = \lambda x$.

Линейное преобразование может как не иметь собственных векторов вообще, например поворот в двумерном пространстве (кроме нескольких исключительных случаев), или иметь n собственных векторов с различными собственными значениями. Вопросы существования собственных векторов преобразования разбираются в курсе линейной алгебры.

Понятие собственного вектора используется в Методе Главных Компонент, который предназначен для уменьшения размерности данных с потерей наименьшего количества информации.