校门开放方式对于通行效率的影响探究

摘要

这里阐述摘要的部分。

关键字： 排队论　通行方式　元胞自动机

一、问题分析

1.1 建模基本思路

从理论的角度，通过排队论的方法对问题进行建模。需要考虑到服务对象，服务规则来构建排队模型，使用常见的系统平均队长 L_s，平均等待时间 W_s，服务强度 ρ 等概念来对比两种开门模式的效率。另一方面，从模拟的角度，基于理论分析的顾客、服务模型，建立元胞自动机模拟排队过程，计算最终结果，与理论计算值进行对比。

由于两个开门模式的差别在于服务模式的不同，而对于顾客源，两者是一致的。因此，可以将顾客源进行适当的简化，而突出服务模式的对排队系统的影响。

另一方面，研究由浅入深，建立三个模型，模型的复杂度逐步增加，效果更加接近实际：

模型 1 在时间上，只考虑非高峰期，在通道上只考虑一个校门的情形，在服务系统方面将随机服务时间用固定数值（均值）代替，从而简化模型。

模型 2 在时间上，只考虑非高峰期，在通道上只考虑一个校门的情形，在服务系统方面，随机服务时间用负指数分布来描述，从而细化对服务系统的刻画。

模型 3 在时间上，既考虑非高峰期，又考虑高峰期，在通道上考虑多个校门的情形，并且顾客流可以在不同队列中按照一定概率转移，在服务系统方面，随机服务时间用负指数分布来描述，得到最终的效率对比结果。

以下对这些问题一一建模。

1.2 服务规则分析

在两种方案中，无论默认状态是开门还是关门，顾客的服务时间都是相对固定的。

对于默认关门的情况，顺利刷卡的服务时间为刷卡时间 t_g，开门时间 t_o，经过时间 t_p 与关门时间 t_c 组成。其中开门、关门时间即为定值，而且是相等的，相加作为固定服务时间 $2t_c$。而刷卡时间、经过时间有一定的波动，对于不同年龄、不同身份、不同交通工具的人有较大的差异。例如，骑行单车入校的人由于要控制单车，取出与放回校园卡的时间比步行要长；年龄较大的人通过时间比年轻人要长；通过时看手机的人，通过时间比正常通行的人要长。将这两个服务时间之和即为随机服务时间 t_r

但总的来说，校门的随机服务时间有一定的共性。首先，服务时间必然是正数；其次大多数人的服务时间都较为稳定，服务时间极长的人很少。为了描述这种变化，使用常见的负指数分布来描述校门的服务过程。

最后将固定服务时间与随机服务时间相加即为总服务时间 $t_{all} = 2t_c + t_r$.

而对于刷卡失败的情况，在非高峰期时，队列稀疏的情况下，对正常队列的影响不大，但是在高峰期时，由于进出压力大，人们在刷卡的流程中形成惯性，而刷卡失败会导致队列结果的破坏与前后人流的拥堵，从而大大降低通过效率，甚至导致整条队列的长期停滞。对刷卡失败的情况，需要细致的建模。

对于默认开门的情况，顺利刷卡的服务时间为刷卡时间与经过时间，也可以视为定值。但是对于刷卡失败的人员，需要在保安的协助下进行登记之后才能入内，而下一个人的经过时间需要加上开门时间。

1.3 顾客源分析

在我们的问题中，服务对象为进出校的学生以及其他人员。在这些服务对象中，又分为步行与单车两重出行方式。在分布时间上，又分为高峰期与非高峰期。总的来说需要对不同时期、不同方式、不同身份的服务对象分别进行建模，以下是具体分析过程

1.3.1 学生

学生群体是所有服务对象中规模最大，成分最复杂的情况，也是开门方式能够影响的主要人员，需要进行详细的建模。

从时间分布的角度来说，由于学生群体在高峰期与非高峰期上具有明显的差异。在非高峰期时，学生进出校门的时间随机性强，且较为稀疏。进一步分析，在不相互重叠的时间段内顾客到达的数量是相互独立的；且在任意时间段内，到达的概率与时间无关，因为在非高峰期的出行没有显著规律；最后，由于非高峰期人群的通行具有稀疏性，所以在短时间内有多人进入的概率极小。

综合以上原因，顾客源适合用标准泊松流来建模。而且由于几乎不存在过于拥挤的可能，因此也不考虑容量限制。即 $M/G/1/\infty/\infty/FCFS$ 模型。

在高峰期，人员流动迅速，排队长度较长，但是高峰期的流通人数是由限制的，即顾客源的容量是有限的, 将此时顾客源的容量记为 C_{source}。而且在校门口排队的空间容量是有限的，在高峰期容易被填满，将此时的总容量记为 C_{queue}。但总体来说，顾客到来的间隔时间还是可以服从一个均值较小的泊松分布，这个均值比非高峰期要小得多。综合起来，高峰期的学生进校排队模型可以简化为 $M/G/3/C_{queue}/C_{source}/FCFS$ 此外，由于步行与单车在排队是占据的空间有多不同，所以最后的空间限制并非直接作用于人数，而是需要通过作用于空间，间接控制人数。

从刷卡成功率的角度分析，学生群体的刷卡成功率很高。

1.3.2 其他

对于其他人群，在进校时间上没有明显的高峰期与非高峰期之分，所以用统一的泊松过程模拟即可。而且由于其他人群的进出校需求与非高峰期的学生大致相当，可以直接与学生统一。对于交通方式来说，主要是步行，而骑单车的人数较少，故简化为全步行。在刷卡成功率方面，这个群体的成功率要比学生群体更低。如果与学生顾客源统一，则需要按照双方人数加权平均，得到综合的刷卡成功率。

二、 符号说明

表 **1**　符号说明表格

符号	符号说明	量纲
t_g	刷卡时间	s
t_o	开门时间	s
t_p	经过时间	s
t_c	关门时间	s
t_s	随机服务时间	s
t_{all}	总服务时间	s
v_f	队伍前进速度	m/s
p_s	换道的概率	–
C_{source}	顾客源的容量	–
C_{queue}	队列的空间容量	–
l_b	自行车占据空间	m
l_p	普通行人占据空间	m
L_s	服务系统中的总共人数	–
L_q	服务系统队列中的人数	–
W_s	服务系统中平均等待时长	s
W_q	服务系统队列平均等待时长	s
λ_l	非高峰期时人群的平均到达率	–
λ_h	高峰期时人群的平均到达率	–
μ	随机服务时的单位时间内的服务人数	–
ρ	服务强度	–

三、 模型建立与求解

3.1 基本理论

首先从理论上，基于排队论的基本公式与概率论相关知识，在理论上对两种开门模型进行理论计算，得到平均队长与平均等待时间作为评价通行效率的指标。

从顾客源的角度来说，顾客源的输入为泊松过程，泊松过程的概率表达式如下

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, t > 0, n \in \mathbb{N} \tag{3.1.1}$$

λ 表示单位时间内平均到达的顾客数，对于非高峰期与高峰期的顾客源，分别使用不同的 λ_l, λ_h 来描述。

按照泊松过程的概率公式，随机生成顾客队列，并让队列以 $v_f = 1m/s$ 的速度前进。

对于到达校门的人，开始进行服务。服务时间由固定服务时间与随机服务时间相加得到，即 $t_{all} = 2t_c + t_r$。t_r 服从负指数分布，概率密度与分布函数如下：

$$\begin{aligned} f(t) &= \mu e^{-\mu t}, \\ F(t) &= 1 - e^{-\mu t}, t > 0 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

求的随机服务时间 t_r 的数学期望 $E(t_r) = \frac{1}{\mu}$ 即为平均随机服务时间，因此 μ 的意义就是单位时间内的平均服务人数，也就是校门的平均通过速率。在加上固定服务时间 $2t_c$，得到总服务时间的数学期望 $E(t_{all}) = 2t_c + \frac{1}{\mu}$, 方差 $Var(t_{all}) = Var(t_r) = \frac{1}{\mu^2}$。对于精度要求不高的模型，也可以使用一个常数 (平均服务时间) 来代替，即数学期望 $E(t_{all}) = 2t_c + \frac{1}{\mu}$, 方差 $Var(t_{all}) = 0$。

有了顾客源与服务时间的随机分布模型，可以服务定义强度 $\rho = \lambda E(t_{all}) = 2t_c\lambda + \frac{\lambda}{\mu}$

在这里假设服务强度 $\rho < 1$，而这个假设也是合理的，因为否则会导致队伍长度发散。使用排队论中的经典公式 Pollaczek-Khintchine 公式, 对于一个任意分布的服务时间 T，且规定对应分布的服务强度 $\rho = \lambda E(t_{all})$，有

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 Var(T)}{2(1-\rho)} \tag{3.1.3}$$

根据 Little 法则，可以对平均服务长度与平均等待时长进行换算

$$L_s = \lambda W_s \tag{3.1.4}$$

基于以上理论分析，给出我们模型的理论平均队长与理论平均等待时间，在考虑随机服务时间为定值的条件下

$$\begin{aligned} L_s &= \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \\ W_s &= \frac{\rho}{\lambda} + \frac{\rho^2}{2\lambda(1-\rho)} \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

在考虑随机服务时间为负指数分布的条件下

$$
\begin{aligned}
L_s &= \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2/\mu^2}{2(1-\rho)} \\
W_s &= \frac{\rho}{\lambda} + \frac{\rho^2 + \lambda^2/\mu^2}{2\lambda(1-\rho)}
\end{aligned} \tag{3.1.6}
$$

3.2 单通道确定性模型

3.2.1 理论分析

首先考虑非高峰期的情况下，使用一个参数为 λ_l 的泊松过程来表示顾客源，使用一个常数 (平均服务时间) 来代替负指数分布的随机服务时长，即 $M/D/1/\infty/\infty/FCFS$ 模型。

为了细致的分析这一过程，我们需要求解得到系统的运行特征 $P_n(t)$, 它表示系统在任意时刻 t 系统中有 n 个人的概率。

为方便后续的描述，将平均服务时间简写为 $\frac{1}{\mu}$，实际为 $2t_c + \frac{1}{\mu}$。

先在 t 时刻与 $t + \Delta t$ 时刻之间的时间段内进行研究。由于在任意时间段内一个顾客到达的概率与 t 无关，所以有一个顾客到来的概率为 $\lambda\Delta t$, 与之对应，没有顾客到来的概率为 $1 - \lambda\Delta t$。

由于此时将服务时间简化为定值，所以这段时间内一个顾客离去的概率为 $\mu\Delta t$，没有顾客离去的概率为 $1 - \mu\Delta t$。

发生两个以上顾客到来或者离去的概率为以上两个概率的平方，所以是 $o(\Delta)t$，可以忽略不计。

接下来，在 t 时刻与 $t + \Delta t$ 时刻之间的时间段内，可能发生四种情况，

- 一个人到来，一个人离去，概率为 $\lambda\Delta t \cdot \mu\Delta t$，结果为人数加 1。
- 一个人到来，没有人离去，概率为 $\lambda\Delta t \cdot (1 - \mu\Delta)t$，结果为人数不变。
- 没有人到来，一个人离去，概率为 $(1 - \lambda\Delta)t \cdot \mu\Delta t$，结果为人数减 1。
- 没有人到来，没有人离去，概率为 $(1 - \lambda\Delta t) \cdot (1 - \mu\Delta)t$，结果为人数不变。

再考虑在时刻 t 时，有 n-1，n，n+1 个顾客时的情形，要想在时刻 $t + \Delta t$ 时有 n 个人，只有三种情况 (不考虑两个人以上的变动)，

- 在时刻 t 有 n 个人，在接下来 Δt 时间段内人数不变。
- 在时刻 t 有 n-1 个人，在接下来 Δt 时间段内人数加 1。
- 在时刻 t 有 n+1 个人，在接下来 Δt 时间段内人数减 1。

综合得到以下状态转移概率公式：

$$
P_n(t+\Delta t) = P_n(t)(1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t) + P_{n+1}(t)(\mu\Delta t) + P_{n-1}(t)(\lambda\Delta t) + o(\Delta t) \tag{3.2.1}
$$

在这个状态转移概率公式中对 t 取极限，得到关于 $P_n(t)$ 差分微分方程：

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) - (\lambda + \mu) P_n(t) \tag{3.2.2}$$

我们只关心系统状态的稳态解，而不关心系统状态的瞬态解，所以只考虑 P_n，而不是 $P_n(t)$。

从而得到一个关于稳态状态之间的差分方程:

$$\begin{aligned} &\lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) - (\lambda + \mu) P_n(t) = 0, n \geq 1 \\ &- \lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

这个差分方程表示的各个不同状态之间的转移关系，可以用状态转移图来表示：

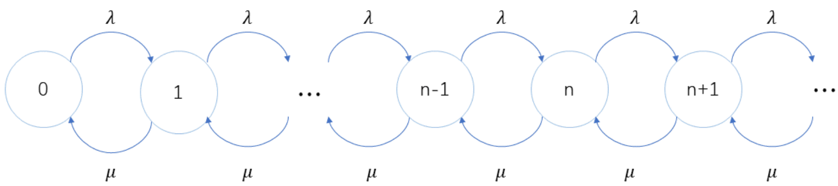

图 **3.2.1** 单通道状态转移图

以上的差分方程是很好求解的，由于顾客源于排队的空间都设置为无穷大，所以可以解得：

$$\begin{aligned} &P_0 = 1 - \rho \\ &P_n = (1 - \rho)\rho^n, n \geq 1 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

其中的 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, 它的物理意义为服务强度。

从而可以得到 L_s 的数学期望 $L_s = \frac{\rho}{1-\rho}$, 这与基本理论中的 Pollaczek-Khintchine 公式结果是一致的。

3.2.2 模型建立

将校门前的道路网格化，假设行人占据一个网格、自行车占据两个网格。根据假设，自行车在通过校门的时候会下车推行，从而行人和自行车在门前的前进速度可以认为相同，设为 $1m/s$。对排队人群进行离散模拟，在每个模拟时间段内，如果行人或自行车前方空格没有被占用，则前进一格。根据这样的模拟规则，将一个网格的长度设为 $1m$。

考虑单通行道的情况，模型可视化展示在图3.2.2中。

其中：

- L_p, L_b 分别表示行人和自行车占用的网格长度
- v_f 表示行人和自行车的前进速度
- t_o, t_c 分别表示校门的开关时间，考虑实际情况，认为 $t_c = t_o$

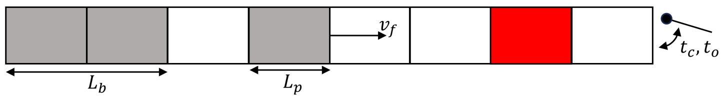

图 **3.2.2** 单通行道模型可视化，其中灰色块表示网格被占用，红色块表示该通行者会刷卡失败（或没有校园卡），图中最右部分为校门

- t_g, t_p（图中未标注）分别为刷卡时间和通过时间，在确定性模型中两者视为定值

人和自行车均在道路最左边生成，道路有最大长度，当道路最左侧已经被占用时，不再生成人。认为人的生成过程是一个泊松过程，对于高人流量和低人流量的时间段泊松过程的参数取值不同。

刷卡进校过程的拆分及两种开门方式的不同展示在图3.2.3中。在刷卡进校时，对

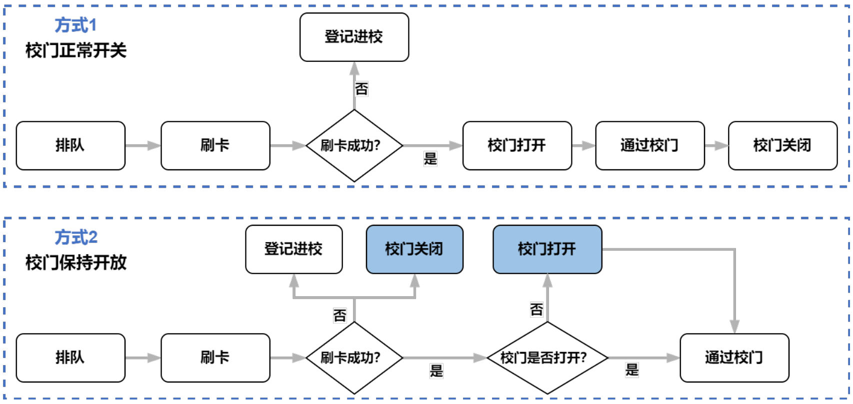

图 **3.2.3** 刷卡进校过程及两种校门开关方式的异同

于两种方法做相应的时间消耗分析：

- 门保持开放：
  - 如果刷卡成功，直接通过校门，需要的时间即为通过校门的时间加上刷卡识别的时间 $t_p + t_g$。如果上一个人刷卡失败，该时间变为 $t_g + t_o + t_p$。
  - 如果刷卡失败，需要等待门关闭。根据实际生活经验，刷卡失败的个体在刷卡过程中一般花费时间也较长 (例如询问在哪里刷身份证)，同时刷卡失败之后，一般要离开队伍，然后登记入校。将这两个过程中时间的消耗合计为 t_{penal}，从而刷卡失败消耗的时间为刷卡时间、等待门关闭的时间和离开队伍的时间加和 $t_g + t_c + t_{penal}$。
- 门正常开关：
  - 如果刷卡成功，等待门开放后通过校门，下一个在队伍中的人等待门关闭后继续刷卡通过。从而一个人需要的时间为 $t_g + t_o + t_p + t_c$。
  - 如果刷卡失败，需要离开队伍。门正常开关时，不用等待门关闭，从而所需时间为 $t_g + t_{penal}$。

3.2.3 数值模拟

模拟的时间步长 t^* 取为 $0.5s$，根据实际生活经验，约定开门的时间 $t_o = t^*$、行人的刷卡时间 $t_g = t^*$、通过时间 $t_p = t^*$、门关上的时间 $t_c = t_o = t^*$。如果刷卡失败，耽误的时间 $t_{penal} = 2t^*$。根据模型分析：

- 门保持开放：
  - 刷卡成功：耗时 $t_p + t_g = 2t^*$。
  - 刷卡失败：耗时 $t_g + t_c + t_{penal} = 4t^*$。
- 门正常开关：
  - 刷卡成功：耗时 $t_g + t_o + t_p + t_c = 4t^*$。
  - 刷卡失败：耗时 $t_g + t_{penal} = 3t^*$

3.3 单通道随机性模型

3.3.1 理论分析

考虑非高峰期的情况下，使用一个参数为 λ_l 的泊松过程来表示顾客源，使用负指数分布的随机服务时长，即 $M/G/1/\infty/\infty/FCFS$ 模型。其中使用的是 G 而不是 M 是因为总的服务时长 $t_{all} = 2t_c + t_r$，是一个符合负指数分布的变量加上一个常量，并不是严格的负指数分布，所以用一般分布 G 表示。

对本模型的求解，主要按照按模型 1 的求解方法，先建立对应稳态之间的差分方程：

以下是不同时间点的状态转移关系：

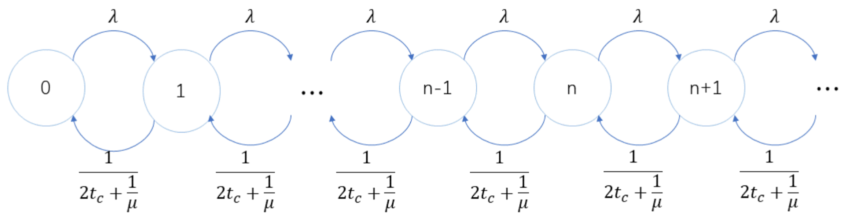

图 **3.3.1**　单通道状态转移图

3.3.2 模型建立

在确定性模型中，刷卡时间和通行时间（之后统称为服务时间）认为是常数，在实际情况中，服务时间往往会因为客户对象的不同而发生变化。选择利用负指数分布刻画这种服务时间的不确定性，从而更好地刻画队伍的运动情况。

3.4 多通道模型

3.4.1 理论分析

考虑非高峰期高峰期的情况下，使用一个参数为 λ_l□λ_h 的泊松过程来表示顾客源，使用负指数分布的随机服务时长，考虑多通道且允许相互转移的过程，即 $M/G/3/C_{queue}/C_{source}/FCF$ 模型。

以下是不同时间点的状态转移关系：

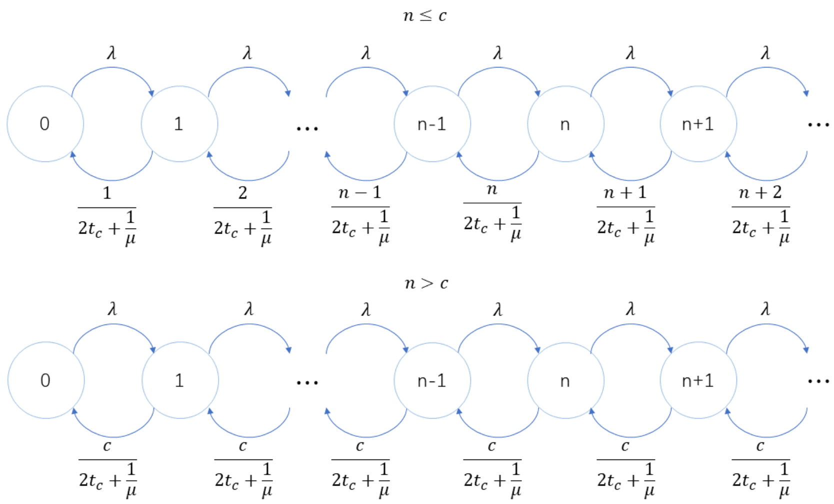

图 **3.4.1**　多通道状态转移图

3.4.2 模型建立

实际情况中，往往有多条入校通道。相较于单通道，多通道的引入，使得行人和自行车在条件允许时，可以选择更换通道，从而更快地通过校门。在实际情况中，如果当前通道有人刷卡失败

参考文献

[1] 刘延柱. 关于摩擦碰撞的 Kane 难题[J/OL]. 力学与实践, 2012, 34(1):91-94. `https://lxsj.cstam.org.cn/cn/article/doi/10.6052/1000-0879-20120118`.

[2] COHEN C, DARBOIS-TEXIER B, DUPEUX G, et al. The aerodynamic wall[J/OL]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2014, 470(2161):20130497. `https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.2013.0497`.

[3] 刘延柱. 再论 Kane 难题[J/OL]. 力学与实践, 2013, 35(3):77-79. https://lxsj.cstam.org.cn/cn/article/doi/10.6052/1000-0879-12-170.