随机信号处理mooc（下）

2021年10月25日　　9:22

参考：《随机信号处理-西安电子科技大学-赵国庆》
https://www.bilibili.com/video/BV16s411p7iX
因为太长了，做个分篇，这里是41-72集

白噪声通过线性系统

白噪声均值为0，功率谱在无穷区间均匀分布

$G_x(\omega)=\frac{N_0}{2}$，$-\infty<\omega<\infty$

$R_x(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}e^{j\omega\tau}d\omega$

$\int_0^{\infty}\delta(\tau)d\tau=\frac{1}{2}$

一般关系式

冲击响应函数/传递函数

h(t) H(w)

$G_y(\omega)=G_x(\omega)|H(\omega)|^2=\frac{N_0}{2}|H(\omega)|^2$

$R_y(\tau)=R_x(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)=\frac{N_0}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{N_0}{2}h(\tau)\otimes h(-\tau)$

前者一般用来计算输出过程功率谱，后者用来计算输出过程相关函数

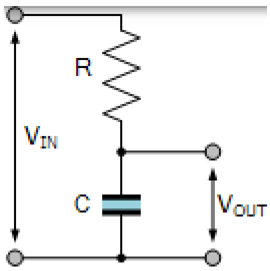
等效噪声通频带 Δf_n

说明输出后的等效宽度有多少

$\Delta f_n=\frac{\int_0^{\infty}G(\omega)d\omega}{2\pi|G(\omega_0)|}$　$|G(\omega_0)|=max|G(\omega)|$

反映了能量在频谱上的集中程度，越大代表分布越宽，频谱占据越宽变化越大

通过RC低频滤波器（积分器）



$H(\omega)=\frac{j\frac{1}{\omega c}}{R+j\frac{1}{\omega c}}$

$|H(\omega)|^2=\frac{(\frac{1}{\omega c})^2}{R^2+(\frac{1}{\omega c})^2}=\frac{1}{(R\omega c)^2+1}$

令$a=\frac{1}{RC}$ 则

$|H(\omega)|^2=\frac{a^2}{\omega^2+a^2}$

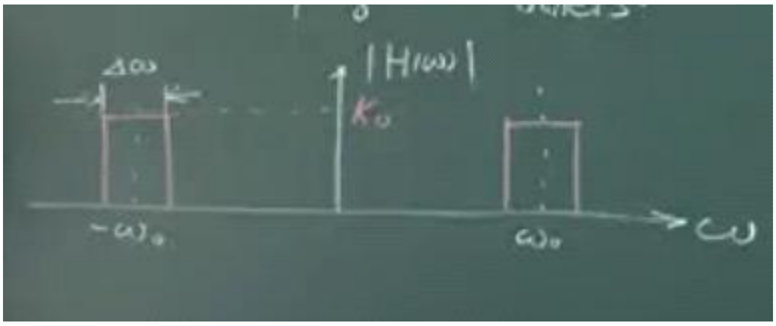
则有

$$G_y(\omega)=G_x(\omega)\left|H(\omega)\right|^2=\frac{N_0}{2}\frac{a^2}{\omega^2+a^2}$$
$$R_y(\tau)=\frac{N_0a^2}{2}\frac{2}{2\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\omega^2+a^2}cos(\omega\tau)d\omega=\frac{N_0}{2}\frac{1}{2}ae^{-a|\tau|}=\frac{N_0}{4}ae^{-a|\tau|}$$
等效噪声通频带
$$\Delta f_n=\frac{\frac{N_0}{2}\int_0^\infty\frac{a^2}{\omega^2+a^2}d\omega}{2\pi\frac{N_0}{2}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{a^2}{\omega^2+a^2}d\omega=\frac{a}{4}=\frac{1}{4RC}$$
RC越大，过滤的高频分量越多，频带越小
相关系数
$$r_y(\tau)=\frac{C_y(\tau)}{C_y(0)}=\frac{R_y(\tau)}{R_y(0)}=\frac{\frac{N_0}{4}ae^{-a|\tau|}}{\frac{N_0}{4}a}=e^{-a|\tau|}$$
相关时间
$$\tau_0=\int_0^\infty a^{-a\tau}\,d\tau=\frac{1}{a}=RC=\frac{1}{4\Delta f_n}$$
相关时间和等效噪声通频带关系
几乎所有的$\tau_0\propto\frac{1}{\Delta f_n}$都成立
通过理想的低通滤波器

$$\left|H(\omega)\right|=\begin{cases}K_0 & |\omega|\le\Delta\Omega\\ 0 & others\end{cases}$$
$$G_y(\omega)=\frac{N_0}{2}{K_0}^2\ |\omega|\le\Delta\Omega$$
$$R_y(\tau)=\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{2}{2\pi}\int_0^\infty co\,s(\omega\tau)\,d\omega=\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{sin\Delta\Omega\tau}{\pi\tau}$$
频域矩形谱，时域为sin函数

$$\Delta f_n=\frac{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\Delta\Omega}{2\pi\frac{N_0}{2}{K_0}^2}=\frac{\Delta\Omega}{2\pi}$$
即为矩形谱的宽度$\Delta\Omega$

$$r_y(\tau)=\frac{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{sin\Delta\Omega\tau}{\pi\tau}}{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{\Delta\Omega}{\pi}}=\frac{sin\Delta\Omega\tau}{\Delta\Omega\tau}$$
$$\tau_0=\int_0^\infty\frac{sin\Delta\Omega\tau}{\Delta\Omega\tau}d\tau=\frac{\pi}{2\Delta\Omega}=\frac{1}{4\Delta f_n}$$
通过理想的带通滤波器



$$|H(\omega)| = \begin{cases} K_0 & |\omega \pm \omega_0| \le \Delta\omega/2 \\ 0 & others \end{cases}$$

$$G_y(\omega) = \frac{N_0}{2}{K_0}^2 \quad |\omega \pm \omega_0| \le \frac{\Delta\omega}{2}$$

$$R_y(\tau) = \frac{N_0}{2}{K_0}^2 \frac{2}{2\pi}\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} cos(\omega\tau)\, d\omega = \frac{N_0}{2}{K_0}^2 \frac{1}{2\pi\tau} cos\omega_0\tau sin\frac{\Delta\omega\tau}{2}$$

在sin函数的基础上加了一个载波

$$\Delta f_n = \frac{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\Delta\omega}{2\pi\frac{N_0}{2}{K_0}^2} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \Delta f$$

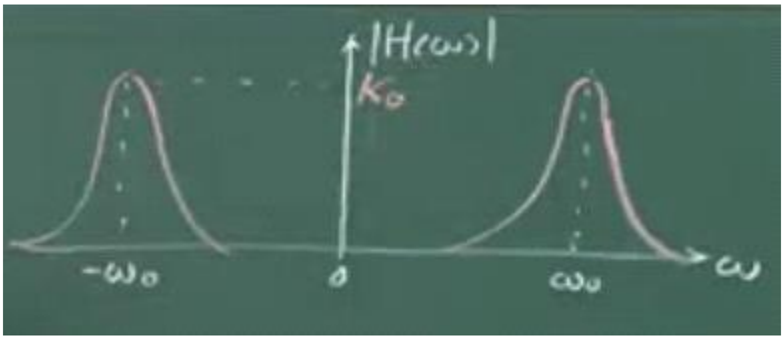
角频率转为物理频率

$$r_y(\tau) = \frac{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{1}{2\pi\tau}cos\omega_0\tau sin\frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{1}{2\pi}\frac{\Delta\omega}{2}} = \frac{2cos\omega_0\tau sin\frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\Delta\omega\tau}$$

相关时间不看载波，只看包络

$$\tau_0 = \int_0^\infty \frac{2}{\Delta\omega\tau} sin\frac{\Delta\omega\tau}{2}d\tau = \frac{\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{2\Delta f_n}$$

通过高斯型带通滤波器



$$|H(\omega)| = K_0\, e^{-\frac{(\omega\pm\omega_0)^2}{2\beta^2}} \quad -\infty < \omega < \infty$$

$$G_y(\omega) = \frac{N_0}{2}{K_0}^2 e^{-\frac{(\omega\pm\omega_0)^2}{\beta^2}} \quad -\infty < \omega < \infty$$

$$R_y(\tau) = \frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\beta^2}} cos\omega\tau d\omega \text{ 令 } \omega-\omega_0 = \omega'$$

$$= \frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{{\omega'}^2}{\beta^2}} \cos(\omega_0+\omega')\tau d\omega' = \frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{{\omega'}^2}{\beta^2}} \cos\omega'\tau d\omega' cos\omega_0\tau$$

$$= \frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{\beta}{\sqrt{\pi}} cos\omega_0\tau e^{-\frac{\tau^2\beta^2}{4}}$$

$$\Delta f_n = \frac{\frac{N_0}{2}{K_0}^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\beta^2}} d\omega}{2\pi \frac{N_0}{2}{K_0}^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\beta^2}} d\omega = \frac{\beta}{2\sqrt{\pi}}$$

$$r_y(\tau) = \frac{\frac{N_0}{2}{K_0}^2 \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} cos\omega_0\tau e^{-\frac{\tau^2\beta^2}{4}}}{\frac{N_0}{2}{K_0}^2 \frac{\beta}{\sqrt{\pi}}} = cos\omega_0\tau e^{-\frac{\tau^2\beta^2}{4}}$$

载波项依然存在

载波项依然不参加积分

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2\beta^2}{4}} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} = \frac{1}{2\Delta f_n}$$

随机过程线性变换后的概率分布