《数理统计》

2021年4月2日 21:39

https://zhuanlan.zhihu.com/p/31743949

大数定律及中心极限定理

a. **依概率收敛，切比雪夫不等式**

- 依概率收敛
  - $$\lim_{n\to+\infty} P\{|\frac{n_A}{n}-p|\geq\epsilon\}=0$$
  - 记为 $Y_n\xrightarrow{p}c$ 当 $n\to+\infty$
- 依概率收敛的性质
  - 若$X_n\xrightarrow{P}a, Y_n\xrightarrow{P}b$ 且 $g(x,y)$ 在点 a,b 处连续
  - $X_n\xrightarrow{p}g(a,b)$ 当 $n\to+\infty$ 时
  - 如，$X_n+Y_n\xrightarrow{P}a+b$ 当 $n\to+\infty$
  - 特别的 $f(X_n)\xrightarrow{P}f(a)$
- 切比雪夫不等式 Chebyshev's inequality

  $$P\{|X-\mu|\geq\epsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$
- 等价形式

  $$P\{|X-\mu|<\epsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$
- 切比雪夫不等式的性质

  适用范围：期望、方差存在的随机变量

  重要性：可以对于随机变量落在期望附近的区域内或外给出一个界的估计

  切比雪夫不等式应用范围广，但结果比较粗糙

b. **大数定律**

- 频率的稳定值记为概率，这个结论可以用”大数定律“来描述
- 伯努利大数定律
  - $$\lim_{n\to+\infty} P\{|\frac{n_A}{n}-p|\epsilon\}=0$$
  - 即

    $$\frac{n_A}{n}\xrightarrow{p}p$$
  - 意义：提供了通过实验来确定事件概率的方法
- 大数定律

- 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 是一列随机变量，则在一定条件下，随机变量序列 $Y_n = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ 收敛到 μ，当 $n \to +\infty$
    - 含义：依概率收敛
    - 当 X_i 期望相同时，$\mu = E(X_i)$
- 切比雪夫大数定律的推论
    - $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 为相互独立的随机变量，且具有相同的期望 μ，相同的方差σ^2，那么

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu$$

，当 $n \to +\infty$
- 辛钦大数定律
    - $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 为相互独立同分布的随机变量，且期望 μ 存在，那么

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu$$

，当 $n \to +\infty$

c. **中心极限定理**
- 有许多随机变量，它们是由大量的相互独立的随机变量的综合影响所形成的，而其中每个个别因素的作用都很小，这种随机变量往往服从或近似服从正态分布，或者说他们的极限是正态分布，中心极限定理正是数学上论证了这一现象，它在长达两个世纪的时期内曾是概率论研究的中心课题
- 独立同分布的中心极限定理（CLT）
    - 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 相互独立且同分布，$E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2, i = 1, 2, \ldots$ 则对于充分大 n 的，有
    - $$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim^{近似} N(n\mu, n\sigma^2)$$
    - 此时
    - $$P(a < \sum_{i=1}^{n} X_i \le b) \approx \Phi(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}) - \Phi(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma})$$
- 注意，CLT仅仅是分布类型上的一种近似
- 德莫弗-拉普拉斯定理
    - 即二项分布可以用正态分布逼近
    - $$n_A \sim^{近似} N(np, np(1-p))$$

统计量与抽样分布

a. **总体，样本**

b. **统计量，常用统计量**

c. **X^2分布**

d. t分布， F分布
e. 单个正态总体的抽样分布
f. 两个正态总体的抽样分布

参数估计

a. 点估计，矩估计
b. 极大似然估计
c. 估计量的评价准则，无偏性
d. 有效性，均方误差
e. 相合性
f. 置信区间，置信限
g. 枢轴量法
h. 单个正态总体均值的区间估计
i. 成对数据均值差，单个正态总体方差的区间估计
j. 两个正态总体参数的区间估计

假设检验

a. 假设检验的基本思想
b. 单个正态总体参数假设检验（标准差已知，检验）
c. 单个正态总体参数假设检验（标准差未知，检验）
d. 单个正态总体参数假设检验（成对数据检验和参数的检验）
e. 两个正态总体参数假设检验(比较两个正态总体均值的检验)
f. 两个正态总体参数假设检验(比较两个正态总体方差的检验)
g. 拟合优度检验

方差分析与回归分析（略）

a. 单因素方差分析
b. 单因素方差分析（参数估计及均值的多重比较）
c. 回归分析（参数估计）
d. 回归分析（模型检验与应用）