随机信号处理mooc（下）

2021年10月25日 9:22

参考：《随机信号处理-西安电子科技大学-赵国庆》
https://www.bilibili.com/video/BV16s411p7iX
因为太长了，做个分篇，这里是41-72集

白噪声通过线性系统

白噪声均值为0，功率谱在无穷区间均匀分布

$G_x(\omega)=\frac{N_0}{2}$， $-\infty<\omega<\infty$

$R_x(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}e^{j\omega\tau}d\omega$

$\int_0^{\infty}\delta(\tau)d\tau=\frac{1}{2}$

一般关系式

冲击响应函数/传递函数

h(t) H(w)

$G_y(\omega)=G_x(\omega)|H(\omega)|^2=\frac{N_0}{2}|H(\omega)|^2$

$R_y(\tau)=R_x(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)=\frac{N_0}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{N_0}{2}h(\tau)\otimes h(-\tau)$

前者一般用来计算输出过程功率谱，后者用来计算输出过程相关函数

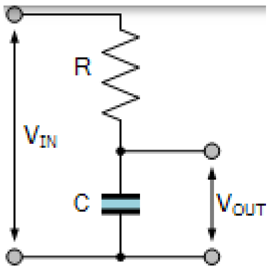
等效噪声通频带 Δf_n

说明输出后的等效宽度有多少

$\Delta f_n=\frac{\int_0^{\infty}G(\omega)d\omega}{2\pi|G(\omega_0)|}$ $|G(\omega_0)|=max|G(\omega)|$

反映了能量在频谱上的集中程度，越大代表分布越宽，频谱占据越宽变化越大

通过RC低频滤波器（积分器）



$H(\omega)=\frac{j\frac{1}{\omega c}}{R+j\frac{1}{\omega c}}$

$|H(\omega)|^2=\frac{(\frac{1}{\omega c})^2}{R^2+(\frac{1}{\omega c})^2}=\frac{1}{(R\omega c)^2+1}$

令$a=\frac{1}{RC}$ 则

$|H(\omega)|^2=\frac{a^2}{\omega^2+a^2}$

则有

$$G_y(\omega)=G_x(\omega)\left|H(\omega)\right|^2=\frac{N_0}{2}\frac{a^2}{\omega^2+a^2}$$
$$R_y(\tau)=\frac{N_0a^2}{2}\frac{2}{2\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\omega^2+a^2}cos(\omega\tau)d\omega=\frac{N_0}{2}\frac{1}{2}ae^{-a|\tau|}=\frac{N_0}{4}ae^{-a|\tau|}$$
等效噪声通频带
$$\Delta f_n=\frac{\frac{N_0}{2}\int_0^\infty\frac{a^2}{\omega^2+a^2}d\omega}{2\pi\frac{N_0}{2}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{a^2}{\omega^2+a^2}d\omega=\frac{a}{4}=\frac{1}{4RC}$$
RC越大，过滤的高频分量越多，频带越小

相关系数
$$r_y(\tau)=\frac{C_y(\tau)}{C_y(0)}=\frac{R_y(\tau)}{R_y(0)}=\frac{\frac{N_0}{4}ae^{-a|\tau|}}{\frac{N_0}{4}a}=e^{-a|\tau|}$$
相关时间
$$\tau_0=\int_0^\infty a^{-a\tau}\,d\tau=\frac{1}{a}=RC=\frac{1}{4\Delta f_n}$$
相关时间和等效噪声通频带关系

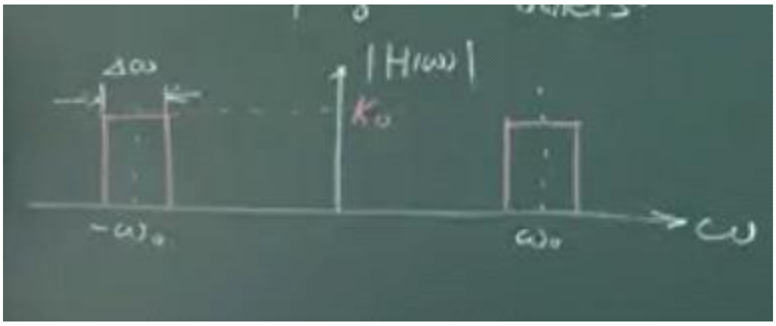
几乎所有的$\tau_0\propto\frac{1}{\Delta f_n}$都成立

通过理想的低通滤波器

$$\left|H(\omega)\right|=\begin{cases}K_0 & |\omega|\le\Delta\Omega\\ 0 & others\end{cases}$$
$$G_y(\omega)=\frac{N_0}{2}{K_0}^2\ |\omega|\le\Delta\Omega$$
$$R_y(\tau)=\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{2}{2\pi}\int_0^\infty cos(\omega\tau)\,d\omega=\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{sin\Delta\Omega\tau}{\pi\tau}$$
频域矩形谱，时域为sin函数

$$\Delta f_n=\frac{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\Delta\Omega}{2\pi\frac{N_0}{2}{K_0}^2}=\frac{\Delta\Omega}{2\pi}$$
即为矩形谱的宽度$\Delta\Omega$

$$r_y(\tau)=\frac{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{sin\Delta\Omega\tau}{\pi\tau}}{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{\Delta\Omega}{\pi}}=\frac{sin\Delta\Omega\tau}{\Delta\Omega\tau}$$
$$\tau_0=\int_0^\infty\frac{sin\Delta\Omega\tau}{\Delta\Omega\tau}d\tau=\frac{\pi}{2\Delta\Omega}=\frac{1}{4\Delta f_n}$$
通过理想的带通滤波器



$$|H(\omega)| = \begin{cases} K_0 & |\omega \pm \omega_0| \le \Delta\omega/2 \\ 0 & others \end{cases}$$

$$G_y(\omega) = \frac{N_0}{2}{K_0}^2 \quad |\omega \pm \omega_0| \le \frac{\Delta\omega}{2}$$

$$R_y(\tau) = \frac{N_0}{2}{K_0}^2 \frac{2}{2\pi}\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} cos(\omega\tau)\,d\omega = \frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{1}{2\pi\tau}cos\omega_0\tau sin\frac{\Delta\omega\tau}{2}$$

在sin函数的基础上加了一个载波

$$\Delta f_n = \frac{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\Delta\omega}{2\pi\frac{N_0}{2}{K_0}^2} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \Delta f$$

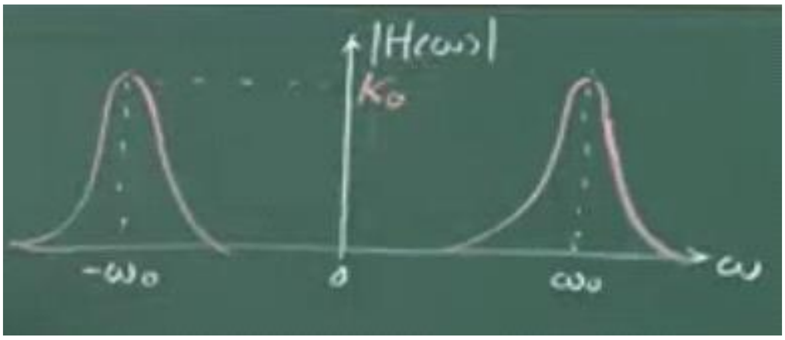
角频率转为物理频率

$$r_y(\tau) = \frac{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{1}{2\pi\tau}cos\omega_0\tau sin\frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{1}{2\pi}\frac{\Delta\omega}{2}} = \frac{2cos\omega_0\tau sin\frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\Delta\omega\tau}$$

相关时间不看载波，只看包络

$$\tau_0 = \int_0^\infty \frac{2}{\Delta\omega\tau}sin\frac{\Delta\omega\tau}{2}d\tau = \frac{\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{2\Delta f_n}$$

通过高斯型带通滤波器



$$|H(\omega)| = K_0\, e^{-\frac{(\omega\pm\omega_0)^2}{2\beta^2}} \quad -\infty < \omega < \infty$$

$$G_y(\omega) = \frac{N_0}{2}{K_0}^2 e^{-\frac{(\omega\pm\omega_0)^2}{\beta^2}} \quad -\infty < \omega < \infty$$

$$R_y(\tau) = \frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\beta^2}} cos\omega\tau d\omega \text{ 令 } \omega-\omega_0 = \omega'$$

$$= \frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega'^2}{\beta^2}}\cos(\omega_0+\omega')\tau d\omega' = \frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega'^2}{\beta^2}}\cos\omega'\tau d\omega' cos\omega_0\tau$$

$$= \frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}cos\omega_0\tau e^{-\frac{\tau^2\beta^2}{4}}$$

$$\Delta f_n = \frac{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\beta^2}}\,d\omega}{2\pi\frac{N_0}{2}{K_0}^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\beta^2}}\,d\omega = \frac{\beta}{2\sqrt{\pi}}$$

$$r_y(\tau) = \frac{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}cos\omega_0\tau e^{-\frac{\tau^2\beta^2}{4}}}{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}} = cos\omega_0\tau e^{-\frac{\tau^2\beta^2}{4}}$$

载波项依然存在

载波项依然不参加积分

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2\beta^2}{4}}\,d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} = \frac{1}{2\Delta f_n}$$

随机过程线性变换后的概率分布

输入为正态分布过程 输出仍为正态分布过程

证明：输入正态过程经过线性变换仍为正态过程

$$P(x_1```x_n, t_1```t_n) = P_x(X) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}}exp\left\{-\frac{1}{2}(X-M_x)^T C^{-1}(X-M_x)\right\}$$

线性变换

$Y = L[X]$

雅可比行列式

$$|J| = \left|\frac{\partial X}{\partial Y}\right| \quad X = L^{-1}[Y]\ |J| = |L^{-1}| = \frac{1}{|L|}$$

$$P_Y(L^{-1}[Y]) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}|L|}exp\left\{-\frac{1}{2}(L^{-1}[Y]-M_x)^T C^{-1}(L^{-1}[Y]-M_x)\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}|L|}exp\left\{-\frac{1}{2}(Y-L[M_x])^T L^{-1T}C^{-1}L^{-1}(Y-LM_x)\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}|L|}exp\left\{-\frac{1}{2}(Y-L[M_x])^T Q^{-1}(Y-LM_x)\right\}$$

$Q^{-1} = (LCL^T)^{-1}$

$|LCL^T| = |L||C||L^T| = |L|^2|C| = Q$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|Q|^{\frac{1}{2}}}exp\left\{-\frac{1}{2}(Y-M_Y)^T Q^{-1}(Y-M_Y)\right\}$$

仅仅是协方差矩阵从C变为Q，均值从Mx变为My=L[Mx]

输入非正态分布宽谱过程 输出窄带线性系统近似为正态过程

输入为白噪声 输出有限带宽系统近似正态过程

后两条可以利用中心极限定理，带宽的比值，输入的谱很宽通过窄带系统的时候，无法及时响应，快速变化形成叠加，等效为正态随机过程

Chapter Three 平稳窄带随机过程

平稳窄带随机过程的表示

产生原因与特点

使用的系统都是窄带系统

原因：

1) 宽带输入经过窄带系统，输出变为窄带过程

$G_y(\omega) = G_x(\omega)\left|H(\omega)\right|^2$

一般无线电系统都存在非线性部分（在总的处理过程中都是线性的，除了部分必要的非线性处理）

2) 系统内噪声在输出端也是窄带随机过程

特点：

1) 具有明显和确定的中心频率ω_0
2) 振幅和相位变化远远慢于ω_0

表示

$x(t) = A(t)\cos\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right)$

A(t)振幅调制 $\varphi(t)$相位调制

$x(t) = A(t)cos\varphi(t)cos\omega_0 t - A(t)sin\varphi(t)sin\omega_0 t = A_c(t)cos\omega_0 t - A_s(t)sin\omega_0 t$

$A_c(t) = A(t)cos\omega_0 t$

$A_s(t) = A(t)sin\omega_0 t$

Ac(t)与As(t)称为窄带信号x(t)的正交分量

解析信号与Hilbert变换

正弦信号的复信号表示

1) 时信号

   $S(t) = Acos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$

   其中各项均为确定的常数

2) 复信号

   $\tilde{S}(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \varphi)} = Ae^{j\varphi}e^{j\omega_0 t}$

   $e^{j\omega_0 t}$ 复载波

   $Ae^{j\varphi}$ 复包络

   $R_e\left[\tilde{S}(t)\right] = S(t) = Acos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$

   $I_m\left[\tilde{S}(t)\right] = \hat{S}(t) = Asin\left(\omega_0 t + \varphi\right)$

3) 频谱关系

   $$S(t) \Rightarrow S(\omega) = \frac{A}{2}2\pi\left[\delta\left(\omega - \omega_0\right)e^{j\varphi} + \delta\left(\omega + \omega_0\right)e^{-j\varphi}\right]$$
   $$= A\pi\left[\delta\left(\omega - \omega_0\right)e^{j\varphi} + \delta\left(\omega + \omega_0\right)e^{-j\varphi}\right]$$

   $$\hat{S}(t) \Rightarrow \hat{S}(\omega) = \frac{A\pi}{j}\left[\delta\left(\omega - \omega_0\right)e^{j\varphi} - \delta\left(\omega + \omega_0\right)e^{-j\varphi}\right]$$

   $$\tilde{S}(t) = S(t) + j\hat{S}(t) \Rightarrow 2A\pi\delta\left(\omega - \omega_0\right)e^{j\varphi}$$

具有单边频谱特性

$$\tilde{S}(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega)\ \omega \geq 0 \\ 0\ \omega < 0 \end{cases}$$

高频窄带信号的复信号表示

1) 实信号

   $S(t) = A(t)cos\big(\omega_0 t + \varphi(t)\big)$

   A(t) $\varphi(t)$为确定函数，ω_0为常数

2) 复信号

   $\tilde{S}(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}e^{j\omega_0 t}$

   $R_e\big[\tilde{S}(t)\big] = S(t) = A(t)cos\omega_0 tcos\varphi(t)$

   $I_m\big[\tilde{S}(t)\big] = \hat{S}(t) = A(t)sin\omega_0 tsin\varphi(t)$

3) 频谱关系

   $A(t)e^{j\varphi(t)} \Rightarrow \tilde{A}(\omega)$

   $A(t)cos\varphi(t) \Rightarrow A(\omega)$

   $S(t) \Rightarrow \pi\big[\tilde{A}(\omega - \omega_0) + \tilde{A}(\omega + \omega_0)\big]$

   $\hat{S}(t) \Rightarrow \frac{\pi}{j}\big[\tilde{A}(\omega - \omega_0) - \tilde{A}(\omega + \omega_0)\big]$

   $\tilde{S}(t) \Rightarrow 2\pi\tilde{A}(\omega - \omega_0)$

只在频率正方向有频谱，且能量不损失

保存了完整的幅度信息和相位信息

I Q信号

解析信号与hilbert变换

定义解析信号：

具有单边频谱特性的复信号

$\tilde{S}(t) = S(t) + j\hat{S}(t)$

称为解析信号

$$\tilde{S}(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega)\ \omega > 0 \\ S(\omega)\ \omega = 0 \\ 0\ \omega < 0 \end{cases}$$

$$\hat{S}(\omega) = \begin{cases} \frac{S(\omega)}{j}\omega > 0 \\ 0\ \omega = 0 \\ -\frac{S(\omega)}{j}\omega < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{S(\omega)}{j}\mathrm{sgn}(\omega)$$

$$\mathrm{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1\ \omega > 0 \\ 0\ \omega = 0 \\ -1\ \omega < 0 \end{cases}$$

转换为时域，则有

$$\hat{S}(t) = S(t)\otimes\frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

定义hilbert变换：

1) 已知实部，求虚部（正变换）

   $\hat{S}(t) = S(t)\otimes\frac{1}{\pi t}$

2) 已知虚部，求实部（反变换）

   $S(t) = \hat{S}(t)\otimes\frac{-1}{\pi t}$

用于求解复信号的实部or虚部

例：已知信号$S(t) = cos\omega_0 t$ 求其hilbert变换和解析信号

$\hat{S}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos\omega_0\tau}{t-\tau}d\tau$

令 $\tau'=t-\tau$

$\hat{S}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos\omega_0(t-\tau)}{\tau}d\tau=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{sin\omega_0\tau}{\tau}d\tau sin\omega_0 t=sin\omega_0 t$

$\tilde{S}(t)=cos\omega_0 t+jsin\omega_0 t$

一般解法：从频域开始

$S(t)\Rightarrow S(\omega)$

$\hat{S}(t)=F^{-1}[\hat{S}(\omega)]=\frac{S(\omega)}{j}sgn(\omega)$

如果是欧拉式，利用指数的性质

hilbert变换是一般方法，对所有信号适用

解析复随机过程

复随机过程

定义：若x(t)，y(t)为任意实随机过程，则称z(t)=x(t)+jy(t)为复随机过程

均值：

$E[z(t)]=m_x(t)+jm_y(t)=m_z(t)$

方差：

$D[z(t)]=E\left[\left(z(t)-m_z(t)\right)^*\left(z(t)-m_z(t)\right)\right]=D[x(t)]+D\left[y(t)\right]$

相关函数：

$R_z(t_1,t_2)=E\left[\left(x(t_1)-jy(t_1)\right)\left(x(t_2)+jy(t_2)\right)\right]$

$=R_x(t_1,t_2)+R_y(t_1,t_2)+j[R_{xy}(t_1,t_2)-R_{yx}(t_1,t_2)]$

互相关函数：

$R_{z_1z_2}(t_1,t_2)=E\left[\left(x_1(t_1)-jy_1(t_1)\right)\left(x_2(t_2)+jy_2(t_2)\right)\right]$

$=R_{x_1x_2}(t_1,t_2)+R_{y_1y_2}(t_1,t_2)+j[R_{x_1y_2}(t_1,t_2)-R_{y_1x_2}(t_1,t_2)]$

解析复随机过程的相关函数和功率谱

定义：

若随机过程 $\tilde{x}(t)=x(t)+j\hat{x}(t)$，若 $\hat{x}(t)=x(t)\otimes\frac{1}{\pi t}$

则称$\tilde{x}(t)$为解析复随机过程，其中$x(t)$，$\hat{x}(t)$为实随机过程

相关函数：

$R_{\hat{x}x}(\tau)=R_{x\hat{x}}(-\tau)$

$R_{\hat{x}x}(\tau)=-R_x(\tau)\otimes\frac{1}{\pi\tau}$

$R_{x\hat{x}}(\tau)=R_x(\tau)\otimes\frac{1}{\pi\tau}$

$R_{x\hat{x}}(\tau)=-R_{\hat{x}x}(\tau)$

$R_{x\hat{x}}(-\tau)=-R_{x\hat{x}}(\tau)$

$R_x(\tau)=R_{\hat{x}}(\tau)$

$R_{\tilde{x}}(\tau)=2[R_x(\tau)+jR_{x\hat{x}}(\tau)]$

功率谱：

$G_{\tilde{x}}(\omega)=2G_x(\omega)+2G_x(\omega)sgn(\omega)$

证明：

1) $left=E\left[\hat{x}(t)\,x(t+\tau)\right]$

   $t+\tau=t'$

   $=E\left[\widehat{x(t')}x(t'-\tau)\right]$

   $=R_{x\hat{x}}(-\tau)$

2) $left = E[\hat{x}(t)\,x(t+\tau)] = E\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(p)}{\tau-p}dpx(t+\tau)\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_x(t+\tau-p)}{t-p}dp$

$t-p=p'$

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_x(p'+\tau)}{p'}dp'$

$p'+\tau=p$

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_x(p)}{p-\tau}dp$

$=-R_x(\tau)\otimes\frac{1}{\pi\tau}$

3) $R_{x\hat{x}}(\tau) = E\left[x(t)\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(p)}{t+\tau-p}dp\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_x(p-t)}{t+\tau-p}dp$

$p-t=p'$

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_x(p')}{\tau-p'}dp' = R_x(\tau)\otimes\frac{1}{\pi\tau}$

4) 根据2、3就可以得到

5) 利用之前的结果交换一下就可以了

6) $\hat{x}(t) = x(t)\otimes\frac{1}{\pi t}$

$\frac{1}{\pi t}\Rightarrow|\mathrm{sgn}(\omega)\,/j|^2$

$G_{\hat{x}}(\omega)\ = G_x(\omega)|\mathrm{sgn}(\omega)\,/j|^2 = G_x(\omega)$

$R_x(\tau) = R_{\hat{x}}(\tau)$

7) 可以根据互相关函数的计算方式

8) 对第7进行傅里叶变化得到

窄带随机过程的复包络和统计特性

实窄带过程 $y(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$

复窄带过程 $\tilde{y}(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}e^{j\omega_0 t} = \tilde{A}(t)e^{j\omega_0 t} = y(t) + j\hat{y}(t)$

1) $\tilde{y}(t)$的相关函数

$R_{\tilde{y}}(\tau)=2[R_y(\tau)+jR_{y\hat{y}}(\tau)]=\mathrm{E}[\tilde{A}(t)^* e^{j\omega_0 t}\tilde{A}(t+\tau)e^{j\omega_0(t+\tau)}]=R_{\tilde{A}}(\tau)e^{j\omega_0\tau}$

2) 功率谱

$$G_{\tilde{y}}(\omega) = \begin{cases} 4G_y(\omega)\ \omega>0 \\ 2G_y(\omega)\ \omega=0 \\ 0\ \omega<0 \end{cases}$$

$= G_{\tilde{A}}(\omega-\omega_0)$

3) 相互关系

$R_y(\tau)=A(\tau)\cos\omega_0\tau$

$A(\tau) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}G_{\tilde{A}}(\omega)\,cos\,\omega_0\tau\,d\tau$

证明:

$left = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_y(\omega)\,e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}G_y(\omega)cos\omega\tau d\omega = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}G_{\tilde{y}}(\omega)cos\omega\tau d\omega$

$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}G_{\tilde{A}}(\omega-\omega_0)cos\omega\tau d\omega$

$\omega-\omega_0=\omega'$

$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\omega_0}^{\infty}G_{\tilde{A}}(\omega')cos(\omega_0+\omega')\tau d\omega = \frac{1}{4\pi}\int_{-\omega_0}^{\infty}G_{\tilde{A}}(\omega')cos\omega'\tau cos\,\omega_0\tau d\omega$

$= co\,s\,\omega_0\tau\frac{1}{4\pi}\int_{-\omega_0}^{\infty}G_{\tilde{A}}(\omega')cos\omega'\tau d\omega = right$

4) 统计特性

$y(t) = A_c(t)cos\omega_0 t - A_s(t)sin\omega_0 t$
$\hat{y}(t) = A_c(t)sin\omega_0 t + A_s(t)cos\omega_0 t$
$\begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\omega_0 t & -sin\omega_0 t \\ sin\omega_0 t & cos\omega_0 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c(t) \\ A_s(t) \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} A_c(t) \\ A_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\omega_0 t & sin\omega_0 t \\ -sin\omega_0 t & cos\omega_0 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix}$
$A_c(t) = cos\omega_0 t y(t) + sin\omega_0 t\hat{y}(t)$
$A_s(t) = -sin\omega_0 t y(t) + cos\omega_0 t\hat{y}(t)$

正交分量的自相关函数

$R_c(\tau) = E[A_c(t)A_c(t+\tau)]$
$= E\left[\left(cos\omega_0 t y(t) + sin\omega_0 t\hat{y}(t)\right)\left(cos\omega_0(t+\tau)y(t+\tau) + sin\omega_0(t+\tau)\hat{y}(t+\tau)\right)\right]$
$= R_y(\tau)[cos\omega_0 t cos\omega_0(t+\tau) + sin\omega_0 t sin\omega_0(t+\tau)]$
$+ R_{y\hat{y}}(\tau)[cos\omega_0 t sin\omega_0(t+\tau) - sin\omega_0 t cos\omega_0(t+\tau)]$
$=R_y(\tau)cos\omega_0\tau + R_{y\hat{y}}(\tau)sin\omega_0\tau$
$= R_s(\tau)$

窄带过程中两个正交分量的自相关函数相等

$R_{cs}(\tau) = -R_{sc}(\tau)$
$R_{cs}(0) = -R_{sc}(0) = 0$

互相关函数在同一时刻不相关/正交

例子:

设窄带随机过程y(t)具有一个对称的功率谱，其相关函数满足:

$R_y(\tau) = A(\tau)cos\omega_0\tau$

求相关函数$R_{\hat{y}}(\tau)R_{\tilde{y}}(\tau)$，方差$\sigma_{\hat{y}}^2\sigma_{\tilde{y}}^2$；进一步求解$R_c(\tau)R_s(\tau)\sigma_c^2\sigma_s^2R_{cs}(\tau)R_{sc}(\tau)$

解:

$R_y(\tau) = R_{\hat{y}}(\tau) = A(\tau)cos\omega_0\tau$
$R_{\tilde{y}}(\tau) = 2\left[R_y(\tau) + jR_{y\hat{y}}(\tau)\right] = 2\left(A(\tau)cos\omega_0\tau + jA(\tau)sin\omega_0\tau\right)$
$\sigma_{\hat{y}}^2 = R_{\hat{y}}(0) = A(0)$
$\sigma_{\tilde{y}}^2 = R_{\tilde{y}}(0) = 2A(0)$
$R_c(\tau) = R_y(\tau)cos\omega_0\tau + R_{y\hat{y}}(\tau)sin\omega_0\tau = A(\tau)cos^2\omega_0\tau + A(\tau)sin^2\omega_0\tau = A(\tau) = R_s(\tau)$
$R_c(0) = \sigma_c^2 = A(0) = \sigma_s^2$
$R_{cs}(\tau) = -R_y(\tau)sin\omega_0\tau + R_{y\hat{y}}(\tau)cos\omega_0\tau = -A(\tau)cos\omega_0\tau sin\omega_0\tau + A(\tau)sin\omega_0\tau cos\omega_0\tau = 0$
$= R_{sc}(\tau)$

说明窄带随机过程的两个正交分量，是始终正交的

窄带正态过程包络和相位的概率分布

窄带正态噪声包络与相位的概率分布

窄带噪声

$n(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]=A_c(t)cos\omega_0 t - A_s(t)sin\omega_0 t$

正态噪声：$A_c(t)$ $A_s(t)$ 满足0均值的正态分布

$P(A_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{A_c{}^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty < A_c < \infty$

$P(A_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{A_s{}^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty < A_s < \infty$

因为正交

$P(A_cA_s) = P(A_c)P(A_s) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{A_c{}^2+A_s{}^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty < A_c, A_s < \infty$

引入新随机变量A振幅φ相位

$A_c = Acos\varphi$
$A_s = Asin\varphi$

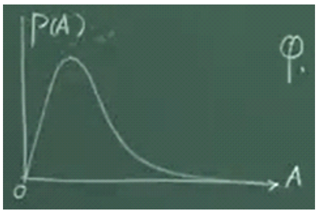
$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_c}{\partial A} & \frac{\partial A_c}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial A_s}{\partial A} & \frac{\partial A_s}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\varphi & -Asin\varphi \\ sin\varphi & Acos\varphi \end{vmatrix} = A$$

$$P(A, \varphi) = \frac{A}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{A^2cos^2\varphi + A^2sin^2\varphi}{2\sigma^2}\right\} = \frac{A}{2\pi\sigma^2}e^{--\frac{A^2}{2\sigma^2}} \quad 0 \le A < \infty \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

说明 φ在[0,2π)均匀分布

$$P(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

$P(A) = \frac{A}{\sigma^2}e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}}$ $0 \le A < \infty$ Reily分布（瑞利分布）



φ和A独立

正态随机数：使用均匀分布结合反变换，就能得到

噪声的二维联合包络与相位的概率分布

$$P(A_cA_sA_{c\tau}A_{s\tau}) = P(A_cA_{c\tau})P(A_sA_{s\tau})$$

$$P(A_cA_{c\tau}) = \frac{1}{2\pi|C|^{\frac{1}{2}}}exp\left\{-\frac{1}{2}(A_c, A_{c\tau})C^{-1}\begin{pmatrix}A_c \\ A_{c\tau}\end{pmatrix}\right\}$$

$$|R| = \begin{vmatrix} \sigma^2 & R(\tau) \\ R(\tau) & \sigma^2 \end{vmatrix} = \sigma^4 - R^2(\tau)$$

$$R^{-1} = \frac{1}{\sigma^4 - R^2(\tau)}\begin{vmatrix} \sigma^2 & R(\tau) \\ R(\tau) & \sigma^2 \end{vmatrix}$$

$$P(A_cA_{c\tau}) = \frac{1}{2\pi(\sigma^4 - R^2(\tau))^{\frac{1}{2}}}exp\left\{-\frac{\sigma^2[(A_c{}^2 + A_{c\tau}{}^2) - 2A_cA_{c\tau}R(\tau)]}{2(\sigma^4 - R^2(\tau))}\right\}$$

$$P(A_cA_sA_{c\tau}A_{s\tau}) = \frac{1}{(2\pi)^2(\sigma^4 - R^2(\tau))}exp\{-\frac{\sigma^2[(A_c{}^2 + A_{c\tau}{}^2 + A_s{}^2 + A_{s\tau}{}^2) - 2R(\tau)(A_cA_{c\tau} + A_sA_{s\tau})]}{2(\sigma^4 - R^2(\tau))}\}$$

$A_c = Acos\varphi$
$A_s = Asin\varphi$
$A_{c\tau} = A_\tau cos\varphi_\tau$
$A_{s\tau} = A_\tau sin\varphi_\tau$

$$|J| = \begin{vmatrix} cos\varphi & -Asin\varphi & 0 & 0 \\ sin\varphi & Acos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\varphi_\tau & -A_\tau cos\varphi_\tau \\ 0 & 0 & sin\varphi_\tau & A_\tau cos\varphi_\tau \end{vmatrix} = AA_\tau$$

$$P(AA_\tau\varphi\varphi_\tau) = \frac{AA_\tau}{4\pi^2(\sigma^4 - R^2(\tau))}exp\{-\frac{\sigma^2[(A^2 + A_\tau{}^2) - 2AA_\tau R(\tau)cos(\varphi - \varphi_\tau)]}{2(\sigma^4 - R^2(\tau))}\}$$

相位分布和包络分布不再独立

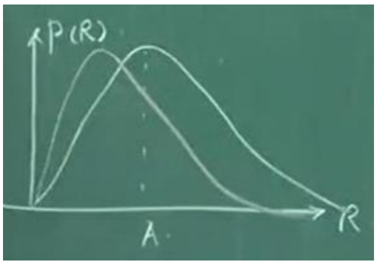
$$P(AA_\tau) = \frac{AA_\tau}{(\sigma^4 - R^2(\tau))}e^{-\frac{\sigma^2(A^2 + A_\tau{}^2)}{2(\sigma^4 - R^2(\tau))}} I_0\left(-\frac{2AA_\tau R(\tau)}{2(\sigma^4 - R^2(\tau))}\right)$$

I_0为零阶修正的bessd函数（贝塞尔函数）

加入正弦信号后合成包络与相位的概率分布

$S(t) = Acos(\omega_0 t + \theta)$ A,ω_0为常数，θ为[0,2π]均匀分布的随机变量

$S(t) = Acos\theta cos\omega_0 t - Asin\theta sin\omega_0 t$
$n(t) + S(t)$
$$P(A_c A_s \mid \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(A_c - Acos\theta)^2 + \left(A_s - Asin\theta\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$
$$P(R, \varphi \mid \theta) = \frac{R}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{R^2 + A^2 - 2ARcos(\varphi - \theta)}{2\sigma^2}\right\}$$
不独立
$$P(R) = \frac{R}{\sigma^2} exp\left\{-\frac{R^2 + A^2}{2\sigma^2}\right\} I_0\left(-\frac{AR}{\sigma^2}\right) \ R \geq 0$$
广义Reily分布/Rice分布（莱斯分布）（若A=0，则为Reily分布）
信号能量很小的时候，趋近于Reily分布；信号能量很大的时候，趋近于正态分布



包络和相位的分布取决于两个因素：信号的幅度和噪声的关系
噪声的大小：σ^2是噪声的功率
σ与A的比值，就是信噪比
信噪比越高，趋向于正态分布；信噪比越低，趋向于噪声的Reily分布

平稳窄带随机过程

非线性变换概述

随机过程非线性变换的直接方法

随机过程非线性变换的变换法

随机过程非线性变换的缓变包络法

随机过程通过限幅器的分析

无线电系统输出端信噪比的计算