高等数学

2021年10月3日 22:38

参考：https://www.cnblogs.com/ixtwuko/p/advanced-mathematics.html

基础知识补充

基础

- 一元二次方程的根 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，并且$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$
- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$，$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^ka^kb^{n-k}$

对数

- $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$
- $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
- $\log_a M^n=n\log_a M$

三角函数

- $\csc x = \frac{1}{\sin x}$，$\sec x = \frac{1}{\cos x}$，$\cot x = \frac{1}{\tan x}$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ 1 + \tan^2 x = \sec^2 x,\ 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
- $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$
- $a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\alpha + \varphi),\ \varphi = \arctan\frac{b}{a}$
- 积化和差
  - $\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$
  - $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$
  - $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$
- 和差化积
  - $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
  - $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
  - $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
  - $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

不等式

- $2|ab| \leq a^2 + b^2$
- $|a \pm b| \leq |a| + |b|$
- $|a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$
- $|a - b| \geq |a| - |b|$
- $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$
- $\left|\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right| \leq \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$
- $x, y, p, q > 0, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，则$xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$
- $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$

数列

- 等差数列 $a_n = a_1 + (n-1)d$：$S_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$
- 等比数列 $a_n = a_1 q^{n-1}$：$S_n = \dfrac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$

常用数列的和：

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

排列组合

- $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}, C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$
- 特别的，规定$0! = 1$。
- $C_n^m = C_n^{n-m}$，$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$

曲线和曲面

- 圆锥体积$V=\frac{1}{3}sh$，球的体积$V=\frac{4}{3}\pi R^3$，球表面积$S=4\pi R^2$
- 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，抛物线 $y^2=2px$
- 椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，二次锥面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
- 单页双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
- 椭圆抛物面$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$，双曲抛物面/马鞍面$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z$

极坐标

- 弧长 $l=r\theta$
- 扇形面积 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$
- 极坐标换直角坐标 $\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases}$
- 圆心在x轴$\frac{a}{2}$处的圆 $\rho=a\cos\theta$，圆心在y轴$\frac{a}{2}$处的圆 $\rho=a\sin\theta$
- 摆线$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$
- 阿基米德螺线 $\rho=a\theta,\ (a>0)$

常用定理

有界性定理

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\exists K>0,\ |f(x)|\le K$.

最值定理

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$m\le f(x)\le M$，m,M 为$f(x)$在$[a,b]$上的最小、最大值。

（后面的m,M根据情景一般是最值，不再指明。）

介值定理

- 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$m\le\mu\le M$，则$\exists\xi\in[a,b]$，使$f(\xi)=\mu$.
- 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)\ne f(b)$，则$f(x)$可以取到$f(a)$，$f(b)$之间的任意函数值。

零点定理

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)\cdot f(b)<0$，则$\exists\xi\in[a,b]$，使$f(\xi)=0$.

费马定理

若$f(x)$在$x=x_0$处可导，并取到极值，则$f'(x_0)=0$.

罗尔定理

若$f(x)$满足：$[a,b]$上连续，(a,b)上可导，$f(a)=f(b)$，则$\exists\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$.

拉格朗日中值定理

若$f(x)$满足：$[a,b]$上连续，(a,b)上可导，则$\exists\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证明如下：

令$f'(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,

两边同时积分，得$f(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x+C$, 取$C=0$,

取$F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$, 其中

$F(a)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$, $F(b)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$,

得$F(a)=F(b)$, 由罗尔定理，$\exists\xi\in(a,b)$，$F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

柯西中值定理

若$f(x)$在x_0的某个邻域内（或者(a,b)内）有$n+1$阶导数，则此邻域内的任意x，均有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+remainder$$

- 拉格朗日余项 $\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$
- 佩亚诺余项 $o((x-x_0)^n)$

积分中值定理

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\exists\xi\in[a,b]$, 使$\int_b^a f(x)dx=f(\xi)(b-a)$.

证明如下：

由题，设m,M为$f(x)$在$[a,b]$上的最小值、最大值，$m\le f(x)\le M$,

则$\int_b^a mdx\le\int_b^a f(x)dx\le\int_b^a Mdx$,

即$m(b-a)\le\int_b^a f(x)dx\le M(b-a)$,

记$\frac{\int_b^a f(x)dx}{(b-a)}=\mu$, 得$m\le\mu\le M$,

由介值定理，$\exists\xi\in[a,b]$, 使$f(\xi)=\mu$.

因此，$\exists\xi\in[a,b]$, 使$f(\xi)(b-a)=\int_b^a f(x)dx$.

函数、极限、连续

函数

概念：定义域、值域、映射（函数是R下的映射）、邻域、去心邻域、分段函数、隐函数、反函数。

函数的基本特性：有界性、单调性、周期性、奇偶性、

基本初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数。

取整函数 $y=[x]$, the max integer not more than x

狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1 & x\text{ is a rational number}\\ 0 & x\text{ is a irrational number}\end{cases}$

有界性

- $f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(x)$在$[a,b]$上有界。
- $f(x)$在(a,b)上连续，且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$和$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$都存在，则$f(x)$在$[a,b]$上有界。
- 有界函数和有界函数的和、积均为有界函数。

奇偶性质

- 奇函数与奇函数复合为奇函数
- 奇函数与偶函数复合为偶函数
- 偶函数与偶函数复合为偶函数
- $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ （可以看作一个奇函数和一个偶函数的和）

极限

概念：无穷小、高阶无穷小（更小）、同阶无穷小、等价无穷小、无穷大、单侧极限

定义

- 数列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$: $\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{while } n > N, |x_n - a| < \varepsilon$.
- 函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$: $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \text{while } 0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon$.

性质

- 极限存在必唯一
  - $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = a$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$
- 若$\lim\limits_{x\to\bullet} f(x) = A(\exists)$，则$f(x)$在$x \to \bullet$过程中处处有定义。只要有一个点是无定义点，此极限就不存在。
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff f(x) - A = a(x), \lim\limits_{x\to x_0} a(x) = 0$
- 假设$f(x)$单调减少（增加）且有下界（上界），则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$必存在。
- 局部保号性：假设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$，则存在$x_0$的一个去心邻域，在此邻域内$f(x)$与$A$同号。
- 局部有界性：假设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则存在$M > 0$，当$x \to x_0$时，$|f(x)| = M$.

计算

- 思路：优先提取能够计算出来的因子；对分式化成倒三角形；三角代换和倒代换
- 四则运算法则：同趋向下，可加减乘除、数乘。
- 有界函数与无穷小的乘积是无穷小。有限个无穷小的和、积均是无穷小。
- 几个重要的极限
  - $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
  - $\lim_{x\to 0^+}x^{\delta}(\ln x)^k=0,\ \delta>0$
  - $\lim_{x\to +\infty}x^k e^{-\delta x}=0,\ \delta>0$
  - $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ a>0$
- 利用等价无穷小进行替换乘除因子。以下常用的等价无穷小（$x\to 0$）
  - $\sin x\sim\arcsin x\sim x$ （注意 $\sin x<x<\tan x$ ）
  - $\tan x\sim\arctan x\sim x$
  - $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$
  - $x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$
  - $(1+x)^{ax}-1\sim ax$
  - $e^x-1\sim x,\ a^x-1\sim x\ln a$
  - $\ln(1+x)\sim x\to\ln U\sim U-1(U\to 1)$
- 洛必达法则，只有在计算后的极限存在才可用。

- 泰勒公式。
  - $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
  - $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
  - $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
  - $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
  - $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$
  - $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2)$
  - $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
  - $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
- 归结原则：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \implies \lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = A$
- 夹逼准则，除了下述的两条，还需灵活运用。
  - 有限个项：$1 \cdot U_{max} \le U_1 + U_2 + \cdots + U_n \le n \cdot U_{max}$
  - 无限个项：$n \cdot U_{min} \le U_1 + U_2 + \cdots + U_n \le n \cdot U_{max}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) = \int_0^1 f(x)dx$ （$\frac{i}{n}$换成了x）

计算极限时常见的形式

- $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty$：化成倒三角形；根号差有理化；洛必达法则。
- $\infty - \infty$：同分成一个分式在处理。
- $\infty^0, 0^0$：使用$\lim u^v = e^{\lim v \ln u}$处理。
- 1^∞：使用$\lim u^v = e^{\lim (u-1)v}$处理。

连续

定义

满足$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

性质

连续函数的和差积商仍为连续函数。

$f(x)$在$[a,b]$上连续，则:

- $f(x)$在$[a,b]$上有界
- $f(x)$在$[a,b]$上有最大值、最小值
- $m \le \mu \le M$，则至少存在一点$\xi \in [a,b]$，使$f(\xi) = \mu$
- $f(a)f(b) < 0$，则至少存在一点$\xi \in [a,b]$，使$f(\xi) = 0$

间断

不满足$\underbrace{\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)}_{a} = \underbrace{\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)}_{b} = \underbrace{f(x_0)}_{c}$，这些点出现在无定义点、分段函数的分段点。

1. $a \neq b$: 跳跃间断点
2. $a = b \neq c$: 可去间断点
3. $a = \infty \ or \ b = \infty$: 无穷间断点
4. $a \ or \ b$振荡: 振荡间断点

1、2 为第一类间断点，3、4 为第二类间断点。

一元函数微分学

导数

定义

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \iff$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

上述两个定义都是导数的定义，其中的变量满足一动一静。

$f'(x)$存在 $\iff f'_+(x) = f'_-(x)$

若$f(x)$是可导的偶函数，则$f'(x)$为奇函数；若$f(x)$为可导的奇函数，则$f'(x)$为可导的偶函数。

性质

- 若$f(x)$在x处可导，则$f(x)$在此处连续。
- $dy = f'(x)dx.$
- $\Delta y = dy + o(\Delta x) = f'(x_0) + o(\Delta x) \Rightarrow \Delta y - dy = \frac{1}{2} f''(\xi)(\Delta x)^2$

计算

- $(uv)' = u'v + v'u$
- $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, (v \neq 0)$
- $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$
- 莱布尼茨公式：$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \mathrm{C}_n^1 u^{(n-1)}v' + \cdots + \mathrm{C}_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$
- $(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt)' = f(\varphi_2(x))\varphi_2'(x) - f(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)$
- 初等函数的导数
  - $C' = 0$
  - $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
  - $(a^x)' = a^x \ln a$
  - $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \ (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
  - $(x^x)' = (e^{x \ln x})' = x^x(\ln x + 1)$
  - $(\sin x)' = \cos x, \ (\cos x)' = -\sin x$
  - $(\tan x)' = \sec^2 x, \ (\cot x)' = -\csc^2 x$
  - $(\sec x)' = \sec x \tan x, \ (\csc x)' = -\csc x \cot x$
  - $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
  - $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

- 常见的n阶导数
  - $(e^{ax})^{(n)}=a^ne^{ax}$
  - $(\sin ax)^{(n)}=a^n\sin(\frac{n\pi}{2}+ax)$
  - $(\cos ax)^{(n)}=a^n\cos(\frac{n\pi}{2}+ax)$
  - $(\ln(1+x))^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$
  - $((1+x)^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$
  - $(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$
  - $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$
  - $(\frac{1}{x+a})^{(n)}=\frac{(-1)^nn!}{(x+a)^{n+1}}$
- 复合函数求导：$[f(\varphi(x))]'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$
- 隐函数求导
- 对数求导法：$u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$
- 反函数求导：

  $$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$$

  $$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d\frac{dx}{dy}}{dy}=\frac{d\frac{1}{y'}}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{(y')^2}\cdot y''\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

  $$\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$$
- 参数方程求导：对于$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，有$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$

应用

- 极值、最值
  - 设$f(x)$在$x=x_0$处连续，在$x=x_0$的去心邻域内可导。左侧$f'(x)>0$，右侧$f'(x)<0$，则$f(x_0)$为极大值；左侧$f'(x)<0$，右侧$f'(x)>0$，则$f(x_0)$为极小值。
  - 设$f(x)$在$x=x_0$处存在二阶导数，$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$。$f''(x_0)<0$，则$f(x_0)$为极大值；$f''(x_0)>0$，则$f(x_0)$为极小值。
  - 设$f(x)$在$x=x_0$处存在n阶导数，$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$。$n$为奇数时，$f(x_0)$不是极值点；$n$为偶数时，若$f''(x_0)<0$，则$f(x_0)$为极大值，若$f''(x_0)>0$，则$f(x_0)$为极小值。
- 单调性、凹凸性
  - 弦在曲线上方为凹；反之为凸。

    $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$为凹；$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$为凸。
  - 任意区间上$f''(x)>0$为凹；反之为凸。
- 拐点（凹凸的分界点）、驻点（导函数等于零的点）
  - 设$f(x)$在$x=x_0$处连续，在$x=x_0$的某去心邻域内二阶可导，且在$x=x_0$的左右邻域$f''(x)$反号，则点$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点。
  - 设$f(x)$在$x=x_0$处n可导，且$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$。$n$为奇数时，点$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点。
- 渐近线
  - 水平渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$，则$y=b$是一条水平渐近线。
  - 铅直渐近线：$\lim\limits_{x\to x_0^+}=\infty\ or\ \lim\limits_{x\to x_0^-}=\infty$，则$x=x_0$是一条铅直渐近线。$x_0$的取值一般是分母为零、对数的真数为零等。
  - 斜渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$，$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$，则$y=ax+b$是一条斜渐近线。

- 曲线
  - 弧微分：$ds = \sqrt{1+y'^2}dx$
  - 曲率：$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$
  - 曲率圆与曲率半径：$\rho = \frac{1}{K}$

方程近似求解

- 二分法：
  - 寻找区间$[a,b]$满足$f(a)\cdot f(b)<0$;
  - 取中点$\xi_1 = \frac{a+b}{2}$，计算$f(\xi_1)$;
  - 若$f(\xi_1)=0$，则ξ_1为所求解；否则根据符号异号减小区间，再次取中点计算，直到满足误差；
  - 误差为$\frac{1}{2^n}(b-a)$。
- 切线法：
  - 寻找区间$[a,b]$满足$f(a)\cdot f(b)<0$;
  - 选取一个合适的区间端点做切线$y-f(\xi_0)=f'(\xi_0)(x-\xi_0)$，与$x$轴交点$\xi_1=\xi_0\frac{f(\xi_0)}{f'(\xi_0)}$，计算$f(\xi_1)$;
  - 若$f(\xi_1)=0$，则ξ_1为所求解；否则根据符号异号减小区间，利用$\xi_n=\xi_{n-1}\frac{f(\xi_{n-1})}{f'(\xi_{n-1})}$计算，直到满足误差；
  - 误差为最后所取区间的大小。
- 割线法
  - 寻找区间$[a,b]$满足$f(a)\cdot f(b)<0$;
  - 取$\xi_{n+1}=\xi_n-\frac{\xi_n-\xi_{n-1}}{f(\xi_n)-f'(\xi_{n-1})}f(\xi_n)$，计算$f(\xi_{n+1})$;
  - $f(\xi_{n+1})=0$，则ξ_{n+1}为所求解；否则根据符号异号减小区间，重复步骤 2、3；
  - 误差为最后所取区间的大小。

一元函数积分学

不定积分与定积分

定义

- 不定积分：$\int f(x)dx = F(x) + C$

  连续函数必有原函数；含有第一类间断点、无穷间断点的函数在包含该间断点的区间内**必没有**原函数。

- 定积分：$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

  设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\int_a^b f(x)dx$存在。设$f(x)$在$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，则$\int_a^b f(x)dx$存在。

- 变限积分：$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$，其中$(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt)' = f(\varphi_2(x)) \cdot \varphi_2(x) - f(\varphi_1(x)) \cdot \varphi_1(x)$

- 反常积分：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{C} f(x)dx + \int_{C}^{+\infty} f(x)dx$.（这里必须这样计算，否则前面是不存在的。）

- 瑕点：无界间断点。瑕积分：无界函数的反常积分。

性质

- 牛顿-莱布尼茨公式：$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

- 保号性：在区间$[a,b]$上$f(x) \leq g(x)$，则有$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$。

- 估值定理：设m, M为$f(x)$在区间$[a,b]$上的最小值和最大值，则$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$。

- 中值定理：设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则$\exists \xi \in [a,b]$，使得$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$。

不定积分计算--a.凑微分法

1. 基本积分公式

- $\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^k + C, k \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$
- $\int a^x dx = a^x \frac{1}{\ln a} + C, a > 0\ and\ a \neq 1$
- $\int e^x = e^x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$
- $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$
- $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
- $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$
- $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
- $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
- $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
- $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a} + C$
- $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln|\frac{a+x}{a-x}|+C$
- $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|+C$

2. 常用凑微分公式

- $\frac{du}{2\sqrt{u}} = d(\sqrt{u}),\ \frac{du}{u^2} = d(-\frac{1}{u})$
- $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = d(\arcsin u),\ \frac{du}{1+u^2} = d(\arctan u)$
- $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}dx = d(2\sqrt{u(x)}),\ \frac{u'(x)}{u(x)}dx = d(\ln|u(x)|)$
- $\frac{du}{1+\cos u} = d(\tan \frac{u}{2}),\ \frac{du}{1-\cos u} = d(-\cot \frac{u}{2})$
- $\cos 2udu = d(\sin u \cos u)$

不定积分计算--b.换元法

1. 三角代换：当被积函数有$\sqrt{a^2 \pm x^2}$，$\sqrt{x^2 - a^2}$

$$\begin{array}{c|l} \sqrt{a^2-x^2} & x = a\sin t(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}) \\ \sqrt{a^2+x^2} & x = a\tan t(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}) \\ \sqrt{x^2+a^2} & x = a\sec t(x > 0, 0 \le t < \frac{\pi}{2}; x < 0, \frac{\pi}{2} < t \le \pi) \end{array}$$

2. 倒代换：$x = \dfrac{1}{t}$

$$\int \frac{dx}{x^k\sqrt{a^2-x^2}}, (k = 1, 2, 4, \cdots)$$
$$\int \frac{dx}{x^k\sqrt{a^2+x^2}}, (k = 1, 2, 4, \cdots)$$
$$\int \frac{dx}{x^k\sqrt{x^2-a^2}}, (k = 1, 2, 4, \cdots)$$

3. 整体复杂代换

- $\sqrt[n]{ax+b}$, $\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, $\sqrt{ae^{bx}+c}$
- a^x，e^x
- $\ln x$
- $\arcsin x$，$\arctan x$

不定积分计算--c.分部积分法

- $P_n(x) \cdot e^{ax}$，$P_n(x) \cdot \sin bx$，$P_n(x) \cdot \cos bx$
- $e^{ax} \cdot \sin bx$，$e^{ax} \cdot \cos bx$
- $P_n(x) \cdot \ln x$，$P_n(x) \cdot \arcsin x$，$P_n(x) \cdot \arctan x$

u	u'	u''	u'''	$\cdots$	0 or $u^{(n+1)}$	$nothing\ here$
$v^{(n+1)}$	$v^{(n)}$	$v^{(n-1)}$	$v^{(n-2)}$	$\cdots$	$v^{(t)}$	$(-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}dx$

上面三种情况左侧的部分为u，右侧的部分为$v^{(n+1)}$；积分结果为上表格中的左上至右下，交叉相乘，正负相间，即$u \cdot v^{(n)} - u' \cdot v^{(n-1)} + u'' \cdot v^{(n-2)} - \cdots$

不定积分计算--d.有理函数积分法

对于$\displaystyle\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx, (n < m)$，将$Q_m(x)$因式分解：

1. $Q_m(x)$的一次因式$(ax+b)$，产生一项$\dfrac{A}{ax+b}$；
2. $Q_m(x)$的k重一次因式$(ax+b)^k$，产生k项$\dfrac{A_1}{ax+b}+\dfrac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\dfrac{A_k}{(ax+b)^k}$；
3. $Q_m(x)$的二次因式(px^2+qx+r)，产生一项$\dfrac{Ax+B}{px^2+qx+r}$；
4. $Q_m(x)$的k重二次因式$(px^2+qx+r)^k$，产生k项 $\dfrac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r}+\dfrac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2}+\cdots+\dfrac{A_kx+B_k}{(px^2+qx+r)^k}$；

定积分计算

- 利用不定积分和牛顿-莱布尼茨公式。
- 换元法，变上下限。
- $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & n\ is\ even \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3} & n\ is\ odd \end{cases}$$ $$。
- 根据正态分布概率密度，$$\displaystyle \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt \pi$$

几何应用

- 平面图形面积
- 平面曲线弧长
  - 参数方程下：$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$
  - 直角坐标系：$s=\int_{a}^{b}\sqrt{1+y'^2(x)}dx$
  - 极坐标系：$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$
- 计算旋转体的体积

反常积分审敛法

- 反常积分收敛：设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，且$f(x)\geq 0$。若函数$F(x)=\int_{a}^{x}f(t)dt$在$[a,+\infty)$上有上界，则反常积分$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$收敛。
- 比较审敛法 1：设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)(a>0)$上连续，且$f(x)\geq 0$。如果存在常数$M>0\ and\ p>1$，使得$f(x)\leq\frac{M}{x^p}(a\leq x<+\infty)$，那么反常积分$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$收敛；如果存在常数$N>0$，使得$f(x)\geq\frac{N}{x}(a\leq x<+\infty)$，那么反常积分$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$发散。
- 极限审敛法 1：设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，且$f(x)\geq 0$。如果存在常数$p>1$，使得$\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)=c<+\infty$，那么反常积分$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$收敛；如果$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=d>0\ or\ =+\infty$，那么反常积分$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$发散。
- 比较审敛法 2：设函数$f(x)$在区间$(a,b]$上连续，且$f(x)\geq 0$，$x=a$为$f(x)$的瑕点。如果存在常数$M>0\ and\ q<1$，使得$f(x)\leq\frac{M}{(x-a)^q}(a<x\leq b)$，那么反常积分$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$收敛；如果存在常数$N>0$，使得$f(x)\geq\frac{N}{x-a}(a<x\leq b)$，那么反常积分$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$发散。
- 极限审敛法 2：设函数$f(x)$在区间$(a,b]$上连续，且$f(x)\geq 0$，$x=a$为$f(x)$的瑕点。如果存在常数$0<q<1$，使得$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^qf(x)$存在，那么反常积分$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$收敛；如果$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)f(x)=d>0\ or\ =+\infty$，那么反常积分$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$发散。

Γ函数

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx \quad (s>0)$$

- $s=1$为函数$e^{-x}x^{s-1}$的瑕点。反常积分$\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx \quad (s>0)$收敛。
- 递推公式：$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$，$\Gamma(n+1)=n!$。
- 当$s\to 0^+$时，$\Gamma(s)\to+\infty$。
- 余元公式：$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin\pi s}$
- 令$x=u^2$，$s=\frac{1}{2}$得，$2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\Gamma(\dfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}$，即概率论中常用公式 $\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$。

微分方程

- 通解中独立常数的个数等于方程的阶数。
- 求解过程中不确定正负的因子要加绝对值。
- 可能出现丢解的情况，这种解称为奇解，全部解包含通解和奇解，只有在线性的微分方程中，通解才等同于全部解。

变量可分离的微分方程

形如$\dfrac{dy}{dx}=h(x)g(y)$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{g(y)}=h(x)dx$$

$$\Longrightarrow \int\frac{dy}{g(y)}=\int h(x)dx+C$$

齐次微分方程

形如$\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{y}{x})$

$$\Longrightarrow 令u=\frac{y}{x}\Longrightarrow y=ux\Longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x+u$$

$$\Longrightarrow \frac{du}{dx}x+u=f(u)\Longrightarrow \frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

$$\Longrightarrow \int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C$$

可化作齐次的微分方程

形如$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$，当$c=c_1=0$时，方程时齐次的，否则就不是齐次的。

令$x=X+h,y=Y+k\Longrightarrow dx=dX,dy=dY$

$$\Longrightarrow \frac{dY}{dX}=\frac{aX+bY+ah+bk+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}$$

若方程组$\begin{cases}ah+bk+c=0\\ a_1h+b_1k+c_1=0\end{cases}$的系数行列式$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\neq 0$，即$\dfrac{a_1}{a}\neq\dfrac{b_1}{b}$，可以找出满足这个方程组的$h,k$，将上式化简成$\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}$，以齐次微分方程的解法求解；

若$\dfrac{a_1}{a}=\dfrac{b_1}{b}=\lambda$，原式可以化简为$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}$，取$v=ax+by$

$$\Longrightarrow \frac{dv}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}\Longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}(\frac{dv}{dx}-a)，即$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{b}(\frac{dv}{dx}-a)=\frac{v+c}{\lambda v+c_1}，为可分离变量的微分方程。$$

一阶线性微分方程

形如$y'+P(x)y=Q(x)$

$\Longrightarrow$ 同乘$e^{\int(Px)dx}$ $\Longrightarrow$ $e^{\int P(x)dx}\cdot y'+P(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\cdot y=Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$

$\Longrightarrow$ 由$(uv'+u'v=(uv)')$ $\Longrightarrow$ $(e^{\int P(x)dx}\cdot y)'=Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$

$$\Longrightarrow e^{\int P(x)dx}\cdot y=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$$

$$\Longrightarrow y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

伯努利方程

形如$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n,(n\neq 0,1)$

$\Longrightarrow$ 同乘y^{-n} $\Longrightarrow$ $y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$，令$z=y^{1-n}$

$\Longrightarrow \frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+P(x)z=Q(x)$，同乘$(1-n)$

$\Longrightarrow \frac{dz}{dx}=[(1-n)P(x)]\cdot z=[(1-n)Q(x)]$，利用一阶线性微分方程的解法解左式，然后求得原方程的解。

全微分方程

若存在二元函数$u(x,y)$使得$du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，则称微分方程$P(x,y)dx=Q(x,y)dy=0$为全微分方程，它的通解为$u(x,y)=C$。

可降阶的高阶微分方程

- 形如$y^{(n)}=f(x)$，逐次积分即可

  $$\Longrightarrow\ y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1$$

  $$\Longrightarrow\ y^{(n-2)}=\int(\int f(x)dx+C_1)dx+C_2$$

  $$\Longrightarrow\ \cdots\cdots$$

- 形如$y''=f(x,y')$，令$p=y'\ \Longrightarrow\ y''=\dfrac{dp}{dx}=p'$

  $\Longrightarrow$ 方程化为$p'=f(x,p)$的一阶微分方程，解得$p=\varphi(x,C_1)$带入$p=y'$，再次获得一个一阶微分方程，求解即可。通解为$y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$。

- 形如$y''=f(y,y')$，令$p=y'\ \Longrightarrow\ y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$

  $\Longrightarrow$ 方程化为$p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p)$的一阶微分方程，解得$p=\varphi(y,C_1)$带入$p=y'$，再次获得一个一阶微分方程，求解即可。通解为$\int\dfrac{dy}{\varphi(y,C_1)}=\int dx+C_2=x+C_2$。

高阶线性微分方程解的结构

- 对于二阶齐次线性方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$:
  - 如果$y_1(x),y_2(x)$是其两个解，则$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$也是它的解；
  - 如果$y_1(x),y_2(x)$是其两个线性无关的特解，则$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$是它的通解。
- 对于n阶齐次线性方程$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$，如果$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$是其$n$个线性无关的特解，则此方程的通解为$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$。
- 对于二阶非齐次线性方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$，如果$y^*(x)$是其一个特解，$Y(x)$是其对应的**齐次方程**的通解，则$y=Y(x)+y^*(x)$是它的通解。
- 线性微分方程的解的叠加原理：设$y_1^*(x),y_2^*(x)$分别是方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x),\ and\ \ y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$的特解，则$y=y_1^*(x)+y_2^*(x)$是方程$y''+p(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$的特解。

常系数齐次线性微分方程

- 对于二阶常系数齐次线性微分方程$y''+py'+qy=0$，其中p,q为常数，特征方程为$r^2+pr+q=0$，解得特征根r。则其通解为

$$\begin{array}{c|c} r_1 \neq r_2 & y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x} \\ r_1 = r_2 & y=(C_1+C_2x)e^{r_1x} \\ r_{1,2}=\alpha\pm\beta i(\beta\neq 0) & y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x) \end{array}$$

- 对于n阶常系数齐次线性微分方程$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$，解其特征方程，通解为

$$\begin{array}{c|l} \text{single real root } r & Ce^{rx} \\ \text{pair of single complex root } r_{1,2}=\alpha+\beta i & e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x) \\ k \text{ repeated real root } r & e^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1}) \\ \text{pair of } k \text{ repeated complex root } r_{1,2}=\alpha+\beta i & e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(I \end{array}$$

常系数非齐次线性微分方程

- 对于二阶常系数齐次线性微分方程$y'' + py' + qy = f(x)$，其中p, q为常数，可以将求解问题归结为求其对于齐次方程的通解和求该方程的一个特解特征方程为。两种常见的$f(x)$形式
    - $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$，其中$P_m$为$m$次多项式。

      $y^*(x) = R(x) e^{\lambda x} \implies y^{*\prime} = e^{\lambda x}[\lambda R(x) + R'(x)], y^{*\prime\prime}$，
      $= e^{\lambda x}[\lambda^2 R(x) + 2\lambda R'(x) + R''(x)]$

      带入方程并消去$e^{\lambda x}$得，$R''(x) + (2\lambda + p) R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q) R(x) = P_m(x)$，

        - λ不是特征方程的根，$y^* = R_m(x) e^{\lambda x}$；
        - λ是特征方程的单根，$y^* = x R_m e^{\lambda x}$；
        - λ是特征方程的重根，$y^* = x^2 R_m(x) e^{\lambda x}$；

      其中$x^k R_m(x)$的系数通过与$P_m(x)$的同次幂系数恒等来建立方程组求得。

    - $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x) \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x]$，使用**欧拉公式**$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \sin \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \end{cases}$，把$f(x)$变成复变指数函数的形式

      $$
      \begin{aligned}
      f(x) &= e^{\lambda x}[P_l \frac{e^{\omega x i} + e^{-\omega x i}}{2} + Q_n \frac{e^{\omega x i} - e^{-\omega x i}}{2}] \\
      &= (\frac{P_l}{2} + \frac{Q_n}{2i}) e^{(\lambda + \omega i)x} + (\frac{P_l}{2} - \frac{Q_m}{2i}) e^{(\lambda - \omega i)x} \\
      &= P(x) e^{(\lambda + \omega i)x} + \overline{P}(x) e^{(\lambda - \omega i)x}
      \end{aligned}
      $$

      其中$P(x) = \frac{P_l}{2} - \frac{Q_n}{2} i$，$\overline{P}(x) = \frac{P_l}{2} + \frac{Q_n}{2} i, m = \max\{l, n\}$

      使用叠加原理，将$f(x)$分解成两项，方程变为两个方程，按照前面的进行求解。

      若$y_1^* = x^k R_m(x) e^{(\lambda + \omega i)x}$为方程$y'' + py' + qy = P(x) e^{(\lambda + \omega i)x}$的一个特解，则其共轭$y_2^* = x^k \overline{R}_m(x) e^{(\lambda - \omega i)x}$为方程$y'' + py' + qy = \overline{P}(x) e^{(\lambda - \omega i)x}$的一个特解，其中$\overline{R}_m(x)$ 是$R_m(x)$的共轭m次多项式，$m = \max\{l, n\}$。

      叠加，$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m e^{\omega x i} + \overline{R}_m e^{-\omega x i}]$ ，
      $= x^k e^{\lambda x}[R_m(\cos \omega x + i \sin \omega x) + \overline{R}_m(\cos \omega x - i \sin \omega x)]$

      由于括号内的两项是互成共轭的，相加之后无虚部，因此

      $y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x]$，其中$R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$为$m$次多项式，系数按照前面的方法求得。

欧拉方程

形如$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$，作变换$x = e^t$，取记号$D$为$\frac{d}{dt}$，则

$$xy' = Dy, \quad x^2 y'' = D(D-1)y, \quad \cdots, \quad x^k y^{(k)} = D(D-1)(D-2)\cdots(D-k+1)y \quad \cdots$$

将上述带入原方程，方程转化为一个以t为自变量的常系数线性微分方程，求解即可。

如二阶的方程$x^2 y'' + pxy' + qy = f(x)$，可以化简为$y''(t) + (p-1)y'(t) + qy(t) = f(e^t)$。

多元函数微分学

多元函数的极限、连续、偏导数、全微分

极限

$\lim\limits_{x \to x_0, y \to y_0} f(x,y) = A$，以任意方式趋向都成立，极限才存在。

连续

$\lim\limits_{x \to x_0, y \to y_0} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

极限和连续的多数性质与一元函数相同或类似。

偏导数

$$f'_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

- 多元函数与一元函数复合：若函数$u = \varphi(t), v = \psi(t)$都在点$t$可导，函数$z = f(x,y)$在对应点$(u,v)$具有连续一阶偏导数，则复合函数$z = f[\varphi(t), \psi(t)]$在点$t$可导，且$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$。
- 多元函数与多元函数复合：若函数$u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$都在点$(x,y)$有对$x, y$的偏导数，函数$z = f(x,y)$在对应点$(u,v)$具有连续一阶偏导数，则复合函数$z = f[\varphi(x,y), \psi(x,y)]$在点$(x,y)$有对$x, y$的偏导数，且$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$，$\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$。
- 高阶偏导数$f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, f''_{yx}$
  - 若f''_{xy}, f''_{yx}在点(x_0, y_0)处连续，则在该点$f''_{xy} = f''_{yx}$。
- 拉普拉斯方程：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

全微分

$dz = A\Delta x + B\Delta y$

- 可微的充分条件：函数$z = f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$ 处连续，则函数在该点可微。
- 可微的必要条件：函数$z = f(x,y)$在点(x,y) 处可微，则函数在该点偏导数必存在。
- 全微分形式不变性：若函数$z = f(u,v)$和$u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$都具有连续的一阶偏导数，则复合函数可微，且$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$。

多元函数的极值与最值

多元函数极值

- 极值点：若一点大于等于或者小于等于其某个邻域内的所有的点，这个点就是一个极值点。
- 驻点：满足偏导数全为 0 的点。
- **这里可以看出多元函数极值点不等价于驻点。极值点一定是驻点，但是驻点不一定是极值点。**
- 取得极值点的充分条件：若$z = f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有连续的二阶偏导数，且 $f'_x(x_0,y_0) = 0, f'_y(x_0,y_0) = 0$。令$A = f''_{xx}(x_0,y_0), B = f''_{xy}(x_0,y_0), C = f''_{yy}(x_0,y_0)$，则
  - $AC - B^2 > 0$时，点(x_0,y_0)为极值点，且当$A > 0$时取极小值，当$A < 0$时取极大值。
  - $AC - B^2 < 0$时，点(x_0,y_0)不为极值点。
  - $AC - B^2 = 0$时，不能确定，需进一步讨论，比如使用极值的定义。

条件极值--拉格朗日乘子法

1. 二元：构造$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$，解方程组$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} & = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} & = \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$。所有满足该方程组的解都是$f(x,y)$在$\varphi(x,y) = 0$下的条件极值。
2. 三元两条件：构造$F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z) + \mu\psi(x,y,z)$，解方程组求解。

泰勒公式

若二元函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域$U(P_0)$内具有二阶连续偏导数，点$P(x,y) \in U(P_0)$，则

- $f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + R_1$

  $R_1 = \frac{1}{2!}[\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f(P_1}{\partial y^2}(y-y_0)^2]$，

  其中$P_1(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0)), \theta \in (0,1)$。$R_1$称为拉格朗日余项。
- $f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$
  $+ \frac{1}{2!}[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2]$
  $+ o(\rho^2)$

  $o(\rho^2)$称为佩亚诺余项。

向量代数与空间解析几何

向量

向量的模、方向角、投影

- $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- 两点距$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2}$
- 方向角：非零向量与三个座标轴的夹角α, β, γ
- 方向余弦：$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{|\boldsymbol{r}|} \\ \cos\beta = \dfrac{y}{|\boldsymbol{r}|} \\ \cos\gamma = \dfrac{z}{|\boldsymbol{r}|} \end{cases}$
- 向量方向上的单位向量$\boldsymbol{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，由此可得$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
- u轴上的投影$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}\ or\ (\boldsymbol{r})_u$
  - $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi$，$\varphi$为$\boldsymbol{a}$在$u$轴上的夹角。
  - $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a} + \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$
  - $\mathrm{Prj}_u\lambda\boldsymbol{a} = \lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$

向量代数运算

- 加减法：平行四边形法则，符合交换律、结合律。
- 数乘：符合结合律、分配律

数量积、向量积、混合积

- 数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$
  - $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$
  - 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$
  - 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$
  - $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$
  - 两向量夹角θ，由此可得$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$
- 向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$，几何意义：同时垂直于$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的向量，满足右手规则。
  - $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ （这个也是$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为邻边组成的平行四边形的面积。
  - $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$
  - $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$
  - 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$
  - $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$
- 混合积$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$
  - 轮换对称性$[\boldsymbol{abc}]=[\boldsymbol{bca}]=[\boldsymbol{cab}]$
  - 两向量互换，混合积变号：$[\boldsymbol{abc}]=-[\boldsymbol{acb}]=-[\boldsymbol{cba}]=-[\boldsymbol{bac}]$
  - 以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积：$V=|[\boldsymbol{abc}]|$
- $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\iff$ 存在唯一实数λ使$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\iff\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$
- $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\iff\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$
- $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面 $\iff[\boldsymbol{abc}]=0$

平面与直线

曲面方程$F(x,y,z)=0$

平面方程

- 一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0, \quad \boldsymbol{n}=A,B,C$ 为平面的法向量，A,B,C 不全为零。
- 点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，其中$(x_0,y_0,z_0)$为平面上任一点。
- 截距式方程：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$a,b,c$ 为平面在三个坐标轴的截距，全不为零。

直线方程

- 一般方程：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$
- 对称式方程：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，其中$(x_0,y_0,z_0)$为直线上一点，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$为直线的方向向量。
- 参数式方程：$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$

平面、直线之间的关系

- 两平面$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 夹角θ为两平面所成角度的直角或者锐角，满足：$\cos\theta=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})|=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
  - 两平面平行或者重合$\theta=0 \iff \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$
  - 两平面垂直$\theta=\dfrac{\pi}{2} \iff A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
- 两直线$\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}, \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$ 的夹角θ为两直线所成角度的直角或者锐角，满足：$\cos\theta=|\cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})|=\dfrac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$
  - 两直线平行或者重合$\theta=0 \iff \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$
  - 两平面垂直$\theta=\dfrac{\pi}{2} \iff m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$
- 平面与直线的夹角θ满足$\sin\theta=|\cos(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}})|=\dfrac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$
  - 平面与直线平行$\theta=0 \iff \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$
  - 平面与直线垂直$\theta=\dfrac{\pi}{2} \iff Am+Bn+Cp=0$
- 点(x_0,y_0,z_0)到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离为$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$。
- 点(x_0,y_0,z_0)到直线$\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$的距离为 $d=\dfrac{|\{x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0\}\times\{m_1,n_1,p_1\}|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}$。
- 两条不想交的直线的距离为$d=\dfrac{|[\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2\overrightarrow{AB}]|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}$，其中$A,B$分别为两条直线上的一点。

曲面与曲线

曲线

曲线Γ的参数方程：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$，

- 切向量：$\boldsymbol{\tau}=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$
- 切线方程：$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$
- 法平面方程：$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

曲线Γ的方程一般式：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，

- 切向量：$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{n_1}\times\boldsymbol{n_2}$，其中$\boldsymbol{n_1}=\{F_x',F_y',F_z'\},\boldsymbol{n_2}=\{G_x',G_y',G_z'\}$
- 切线方程：记$\boldsymbol{n_1}\times\boldsymbol{n_2}=\{A,B,C\}$，$\dfrac{x-x_0}{A}=\dfrac{y-y_0}{B}=\dfrac{z-z_0}{C}$
- 法平面方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

曲面

曲面：$F(x,y,z)=0$和其上一点(x_0,y_0,z_0)

- 法向量：$\boldsymbol{n}=\{F_x'(x_0,y_0,z_0),F_y'(x_0,y_0,z_0),F_z'(x_0,y_0,z_0)\}$
- 切平面：$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$
- 法线方程：$\dfrac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}$

空间曲线在坐标面上的投影

设有空间曲线Γ：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，先消去$z$得$\varphi(x,y)=0$，其投影的方程包含在$\begin{cases} \varphi(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$中。

（来自多元微分）

旋转曲面

- 定义：由一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面
- 设在xOy面上的曲线L：$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$，则
  - 曲线L绕x轴旋转产生的曲面方程为$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$
  - 曲线L绕y轴旋转产生的曲面方程为$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$

柱面

- 定义：由一条直线（母线）沿走曲线（准线）平行移动形成的轨迹所成的曲面。
- 方程建立
  - 准线L：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，母线的方向向量为$\{m,n,p\}$，

    在L上任取一点(x_0,y_0,z_0)，则母线方程为$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$。

    联立方程$\begin{cases} F(x_0,y_0,z_0)=0 \\ G(x_0,y_0,z_0)=0 \\ \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$，消去$x_0,y_0,z_0$，即可得到所求柱面方程。
  - 准线L：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$，母线的方向向量为$\{m,n,p\}$，

    柱面方程为$\begin{cases} x=x(t)+ms \\ y=y(t)+ns \\ z=z(t)+ps \end{cases}$，这里$t,s$均为参数。
  - 设柱面的准线是xOy平面上的曲线$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$，母线平行与$x$轴，则柱面方程为$f(x,y)=0$。
- 常用的柱面（这里的u,y为任意两个坐标轴）
  - 圆柱面 $u^2+v^2=R^2$
  - 椭圆柱面 $\dfrac{u^2}{a^2}+\dfrac{v^2}{b^2}=1$
  - 抛物柱面 $v^2=2pu$

二次曲面

- 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
- 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
- 双叶双曲面 $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
- 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz,\ (p>0)$
- 双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz,\ (p>0)$
- 椭圆锥面（二次锥面） $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

多元函数积分学

重积分

二重积分

- 定义：$\iint_D f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$，其中$d$为小区域直径的最大值，$\Delta\sigma_k$为小区域的面积。
- 几何意义：为以D为底，$z=f(x,y)$为顶的曲面圆柱的体积。
- 性质：
    - 比较定理：若在D上，$f(x,y)\le g(x,y)$，则$\iint_D f(x,y)d\sigma\le\iint_D g(x,y)d\sigma$
    - 估值定理：M,m是连续函数$f(x,y)$在闭区域D上的最值，S为D的面积，则 $mS\le\iint_D f(x,y)d\sigma\le MS$
    - 中值定理：D上至少存在一点(ξ,η)，使$\iint_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\cdot S$
- 计算
    - 直角坐标系：$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)dx$
    - 极坐标系：$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$
    - 使用被积函数的**奇偶性和对称性**可以化简运算。
    - 若积分域D关于$y=x$对称，则$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(y,x)d\sigma$。（轮换对称性）

三重积分

- 定义：设$\mu = f(x,y,z)$为空间体Ω的体密度，积分$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV$为空间体的质量。
- 性质与二重积分完全类似。
- 计算：
    - 直角坐标系：
    $$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$
    - 柱坐标系：柱坐标系与直角坐标系的换算
    $$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \le r < +\infty, 0 \le \theta \le 2\pi \\ y = r\sin\theta & \\ z = z & -\infty < z < +\infty \end{cases}, \quad dV = rdrd\theta dz$$
    $$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV = \iiint_\Omega f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz$$
    一般满足$f(x,y,z) = \varphi(z)g(x^2+y^2)$的被积函数可以转化成上述计算。
    - 球坐标系：球坐标系与直角坐标系的换算
    $$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} and \begin{cases} 0 \le r < +\infty \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}, \quad dV = r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$
    $$\iiint_\Omega f(x,y,z) = \iiint_\Omega f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$
    一般满足$f(x,y,z) = \varphi(x^2+y^2+z^2)$的被积函数可以转化成上述计算。
    - 使用被积函数的奇偶性和对称性可以化简运算。

曲线积分

第一类线积分-对弧长的线积分

- 定义：$\int_L f(x,y)ds=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$，其中$\lambda$为小弧段的最大长度，$(\xi_i,\eta_i)$为小弧段上的一点。此积分表示弧形的质量。
- 与积分的路径无关，$\int_{L(\widehat{AB})} f(x,y)ds=\int_{L(\widehat{BA})} f(x,y)ds$。
- 计算
  - 曲线$L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$，若$f(x,y)$在$L$上有定义，$x(t),y(t)$在$[\alpha,\beta]$上有连续的一阶导数且$x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$，则曲线积分存在，
    $\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \quad (\alpha<\beta)$。
  - 将上述结论推广到直角坐标系，曲线为$y=y(x)$，则
    $\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx \quad (a<b)$。
  - 将上述结论推广到极坐标系，曲线为$\rho=\rho(\theta)$，则
    $\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta$。
  - 利用积分曲线的对称性和被积函数的奇偶性、变量的对称性进行简化。

第二类线积分-对坐标的线积分

- 定义：

$$\int_L P(x,y)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i$$

$$\int_L Q(x,y)dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i$$

其中λ为小弧段的最大长度，(ξ_i, η_i)为小弧段上的一点。

- 与积分路径**有关**，$\int_{L(\overset{\frown}{AB})} Pdx + Qdy = -\int_{L(\overset{\frown}{BA})} Pdx + Qdy$

- 计算

  - 曲线$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，若$P(x,y), Q(x,y)$在有向$L$上有定义且连续，$x(t), y(t)$在$[\alpha, \beta]$上有连续的一阶导数且$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$，则曲线积分存在，

    $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt \quad (\alpha < \beta)$。

  - **格林公式**：设由光滑曲线L围成的闭区域D，函数$P(x,y), Q(x,y)$在D上有连续的一阶偏导数，曲线L为区域D的取正向的边界曲线，则$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$。

    边界曲线取正向：当面向正向时区域总在自己的左手侧，一般外侧的边界时逆时针，内侧的边界时顺时针。

    单连通区域是内部没有洞的区域，复连通区域时内部有洞的区域。复连通区域上使用格林公式时用外侧的曲线积分减去内侧的曲线积分即可。

  - 对于不封闭的曲线，可以将其补全使用格林公式，再减去补线的部分。

  - **平面上曲线积分与路径无关的条件**：设函数$P(x,y), Q(x,y)$在单连通区域G内有连续的一阶偏导数，则曲线积分$\int_L Pdx + Qdy$与路径无关 $\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$在$G$内恒成立 $\Longleftrightarrow$ L为G中任一分段光滑闭曲线 $\Longleftrightarrow$ 存在函数$u(x,y)$其全微分$du = Pdx + Qdy$。

    (1)可以改换路径

    (2)找到原函数$u(x,y)$，使得$\int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1)$

  - 斯托克斯公式$\oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\Sigma (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + \iint_\Sigma (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx + \iint_\Sigma (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$

两类曲线积分的关系

$\displaystyle\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P\cos\alpha + Q\sin\beta)ds$，其中，$\cos\alpha, \cos\beta$为曲线$L$的切线的方向余弦。

补充：曲线积分基本定理

设$\boldsymbol{F}(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$是平面区域$G$内的一个向量场，若$P(x,y), Q(x,y)$都在$G$内连续，且存在一个数量函数$f(x,y)$，使得$\boldsymbol{F} = \nabla f$，则曲线积分$\displaystyle \int_L \boldsymbol F \cdot d \boldsymbol r 在G内与路径无关，且\displaystyle \int_L \boldsymbol F \cdot d \boldsymbol r = f(B) - f(A)。其中L时位于G内起点为A终点为B$的任一分段光滑曲线。

曲面积分

第一类曲面积分-对面积的曲面积分

- 定义：$\displaystyle\iint_\Sigma f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$，其中$\lambda$为小块曲面的直径的最大值，$S$为小块曲面的面积，$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$为小块曲面的一点。此积分表示面密度的积分。
- 与所选则的曲面的哪一侧无关。
- 计算：
  - 设曲面是由$z = z(x,y)$描述的，则$\displaystyle\iint_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$
  - 利用积分曲面的对称性和被积函数的奇偶性、变量的对称性进行简化。

第二类曲面积分-对坐标的曲面积分

- 定义：

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

  其中λ为小块曲面的直径的最大值，S为小块曲面的面积，(ξ_i,η_i,ζ_i)为小块曲面的一点。

- 有曲面的方向有关，相反侧的积分取反。

- 计算：

  - 曲面由$x=x(y,z)$描述，$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \pm\iint_{D} P(x(y,z),y,z)dydz$。若有向曲面$\Sigma$的法向量与$x$轴正向的夹角为锐角，即右侧，上式取正，否则取负。

    曲面由$y=y(z,x)$描述，$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \pm\iint_{D} Q(x,y(z,x),z)dzdx$。若有向曲面$\Sigma$的法向量与$$轴正 y 向的夹角为锐角，即右侧，上式取正，否则取负。

    曲面由$z=z(x,y)$描述，$\iint_{\Sigma} (Rx,y,z)dxdy = \pm\iint_{D} R(x,y,z(x,y))dxdy$。若有向曲面$\Sigma$的法向量与$z$轴正向的夹角为锐角，即右侧，上式取正，否则取负。

  - **高斯公式**：设由分片光滑的闭曲面Σ所围成的空间闭区域Ω，函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Omega$上有连续的一阶偏导数，$\Sigma$为$\Omega$的整个边界曲面的外侧，则$$\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv = \oint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

  - 对于空间区域不封闭，则可以用一块曲面使原来的空间区域封闭，积分时再减去这块补面上的积分即可。

  - 曲面积分$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$与曲面$\Sigma$无关而只取决于它的边界曲线$\iff \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$在二维单连通区域$G$内恒成立。

两类曲面积分的关系

$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = \iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$，其中，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为曲面$\Sigma$在点$(x,y,z)$处的法向量的方向余弦。

多元积分的应用

几何度量

- 平面面积：$S = \iint_D dxdy$
- 空间体体积：$V = \iiint_\Omega dv$
- 曲线长度：$L = \int_C ds$
- 曲面面积：$S = \iint_\Sigma dS$

质量

- 平面质量：$m = \iint_D \rho(x,y)dxdy$
- 空间体质量：$m = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)dv$
- 曲线质量：$m = \int_C \rho(x,y,z)ds$
- 曲面质量：$m = \iint_\Sigma \rho(x,y,z)dS$

质心

$\bar{x} = \frac{\int x\rho}{\int \rho}, \bar{y} = \frac{\int y\rho}{\int \rho}$，积分与上面的质量积分的公式相似

转动惯量

$I_x = \int x^2\rho, I_y = \int y^2\rho$，积分与上面质量积分的公式相似。

场论

梯度

- 沿方向l的**方向导数**：$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$。若函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处可微，那么函数在该点沿任意方向$l$的方向导数存在，且$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0)\cos\beta$。$\cos\alpha,\cos\beta$是方向余弦。上公式可以类推到三元函数。
- 梯度定义：向量$\boldsymbol{A}(x,y)$指向的方向是$u(x,y)$在点P处的方向导数取最大值的方向，它的模$|\boldsymbol{A}(x,y)|$是此方向导数的最大值，则称$\boldsymbol{A}(x,y)$为函数$u(x,y)$在点P处的梯度，记作：$\boldsymbol{grad}u|_P=\boldsymbol{A}(x,y)$或者$\nabla u|_p=\boldsymbol{A}(x,y)$（Nabla 算子）。
  - $\boldsymbol{grad}u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{grad}u(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$
  - $\boldsymbol{grad}u|_P\cdot\boldsymbol{e}_l=\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P$

通量

向量场$\boldsymbol{u}(x,y,z)=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，$\Sigma$为有向曲面，则向量场穿过曲面的指定侧的通量为

$$\Phi=\iint_\Sigma \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

散度

向量场$\boldsymbol{u}(x,y,z)=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，其中$P,Q,R$均有连续的一阶偏导数，则$\boldsymbol{u}$在点$(x,y,z)$处的散度为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

旋度

向量场$\boldsymbol{u}(x,y,z)=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，其中$P,Q,R$均有连续的一阶偏导数，则$\boldsymbol{u}$在点$(x,y,z)$处的旋度为

$$\boldsymbol{rot}\boldsymbol{u}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}$$

无穷级数

定义

- 无穷级数：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$
- 部分和数列$\{S_n\}$，其中$S_n = \sum_{n=1}^{n} u_n$
- 无穷级数的和：$S = \lim_{n\to\infty} S_n$，若$S$存在，则无穷级数收敛；$S$不存在，则无穷级数发散。
- 余部r_n，若无穷级数收敛，$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$。
- 绝对收敛：$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$和$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$都收敛；条件收敛：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$发散。

性质

- 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛于和S，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$收敛于和kS。
- 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$分别收敛于和$S, \sigma$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$收敛于$S \pm \sigma$。
- 在级数中去掉、添加、改变有限项，级数的收敛性不变。
- 如果级数收敛，则对这个级数中的项任意添加括号形成的新级数仍收敛。
- 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则其一般项趋向于零。$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
- 绝对收敛的级数一定收敛。条件收敛的级数的所有正项（或负项）组成的级数一定发散。
- 补充：柯西审敛原理 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充要条件为对于任意给定的正数ε，总存在正整数N，使得当$n > N$时，对于任意的正整数p，都有$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$成立。
- 补充：设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$都绝对收敛，其和分别是$S, \sigma$，则它们的柯西乘积 $u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + \cdots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \cdots + u_nv_1) + \cdots$ 也绝对收敛，且其和为 $S\sigma$。

常数项级数

正项级数

- 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充要条件是它的部分和数列$\{S_n\}$有界。

- 比较审敛法：若$0 \le u_n \le v_n$，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，$\implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，$\implies \sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散。

  设$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \quad (0 \le l \le +\infty)$，(1)$0 < l < +\infty$，两级数同敛散性；(2)$l = 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，$\implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；(3)$l = +\infty$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，$\implies \sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散。

- 比值审敛法：$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，$\rho < 1$，收敛；$\rho > 1$，发散；$\rho = 1$，此方法失效。

- 根值审敛法：$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，$\rho < 1$，收敛；$\rho > 1$，发散；$\rho = 1$，此方法失效。

- 极限审敛法：若$\lim_{n\to\infty} nu_m = l > 0$，则级数发散；若$p > 1$且$\lim_{n\to\infty} n^p u_n = l \ (0 \le l < +\infty)$，则级数收敛。

- 对数判别法：$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = p$，$p > 1$，收敛；$p < 1$，发散；$p = 1$，此方法失效。

交错级数

莱布尼茨定理：如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$满足：$u_n \ge u_{n+1}$，$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则级数收敛，且其和$S < u_1$。

幂级数

概念：函数项级数、收敛点、和函数

定义

- 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$
- 若级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$当$x = x_0 (x_0 \neq 0)$时收敛，那么适合不等式$|x| < |x_0|$的一切$x$使这个幂级数绝对收敛。反之，若级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$当$x = x_0 (x_0 \neq 0)$时发散，那么适合不等式$|x| > |x_0|$的一切$x$使这个幂级数发散。
- 幂级数收敛的三种情况：
  - 仅在$x = 0$处收敛，$x \neq 0$时发散；
  - 对于$x \in (-\infty, +\infty)$都收敛且绝对收敛；
  - 对于$x \in (-R, +R)$时收敛且绝对收敛，之外的发散。R为**收敛半径。**
- 一个幂级数的收敛半径总存在，包含$0, +\infty$。
- 若$\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$，那么幂级数的收敛半径$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \rho \neq 0 \\ +\infty & \rho = 0 \\ 0 & \rho = +\infty \end{cases}$。
- 若$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$，那么幂级数的收敛半径$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \rho \neq 0 \\ +\infty & \rho = 0 \\ 0 & \rho = +\infty \end{cases}$。

性质

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = S_1(x) \pm S_2(x) \quad x \in (-R, +R)$
- $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n = S_1(x) S_2(x) \quad x \in (-R, +R)$
- $\frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \cdots$
- 和函数$S(x)$在收敛域上连续；
- 和函数$S(x)$在收敛域上可导，且可逐项求导，$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$；
- 和函数$S(x)$在收敛域上可积，且可逐项积分，$\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$。

函数展开成幂级数

- 泰勒级数：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
- 麦克劳林级数：$\sum_{n=0}^{n}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$
- 泰勒级数的收敛定理：设$f(x)$在$x=x_0$处任意阶可导，则泰勒级数在$|x-x_0|<R$内收敛于$f(x)$的充要条件是$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$，其中$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$。
- 常用的麦克劳林公式
  - $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \quad x\in(-1,1)$
  - $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad x\in(-1,1)$
  - $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad x\in(-\infty,+\infty)$
  - $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \quad x\in(-\infty,+\infty)$
  - $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad x\in(-\infty,+\infty)$
  - $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots \quad x\in(-1.1]$
  - $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$

    $x\in(-1,1)$
- 应用：近似计算、解微分方程

三角级数

定义 三角函数系的正交性

- 三角级数：$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$
- 正交是指在区间积分为零：
  - $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=0,\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=0,(n=1,2,3,\cdots)$
  - $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nxdx=0,(k,n=1,2,3,\cdots)$
  - $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx=0,\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nxdx=0,(k,n=1,2,3,\cdots,k\neq n)$

函数展开为傅里叶级数

- 傅里叶级数：$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx & n=0,1,2,3,\cdots \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx & n=1,2,3,\cdots \end{cases}$ 称为$f(x)$的傅里叶级数。

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

- 狄利克雷定理：设$f(x)$为周期为2π的周期函数，如果它满足：在一个周期内连续或者只有有限个第一类间断点，在一个周期内至多有有限个极值点，那么$f(x)$的傅里叶级数收敛。并且
  - 当x是连续点时，级数收敛于$f(x)$；
  - 当x是间断点时，级数收敛域$\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$。
- 对于周期为2π的函数的傅里叶级数展开分两步进行：
  - 计算a_n,b_n；
  - 讨论收敛情况。
- 对于周期为$2l$的函数的傅里叶级数展开分两步进行：
  - 计算展开式：$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}),(x\in C)$，其中
    $$\begin{cases} a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx & n=0,1,2,\cdots \\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx & n=1,2,3,\cdots \\ C=\left\{x\mid f(x)=\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]\right\} \end{cases}$$
  - 讨论收敛情况。