随机信号处理mooc（下）

2021年10月25日 9:22

参考：《随机信号处理-西安电子科技大学-赵国庆》
https://www.bilibili.com/video/BV16s411p7iX
因为太长了，做个分篇，这里是41-72集

白噪声通过线性系统

白噪声均值为0，功率谱在无穷区间均匀分布

$G_x(\omega)=\frac{N_0}{2}$， $-\infty<\omega<\infty$

$R_x(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}e^{j\omega\tau}d\omega$

$\int_0^{\infty}\delta(\tau)d\tau=\frac{1}{2}$

一般关系式

冲击响应函数/传递函数

h(t) H(w)

$G_y(\omega)=G_x(\omega)|H(\omega)|^2=\frac{N_0}{2}|H(\omega)|^2$

$R_y(\tau)=R_x(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)=\frac{N_0}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{N_0}{2}h(\tau)\otimes h(-\tau)$

前者一般用来计算输出过程功率谱，后者用来计算输出过程相关函数

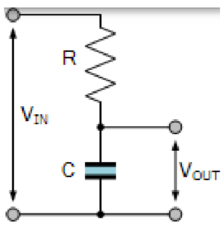
等效噪声通频带 Δf_n

说明输出后的等效宽度有多少

$\Delta f_n=\frac{\int_0^{\infty}G(\omega)d\omega}{2\pi|G(\omega_0)|}$ $|G(\omega_0)|=max|G(\omega)|$

反映了能量在频谱上的集中程度，越大代表分布越宽，频谱占据越宽变化越大

通过RC低频滤波器（积分器）



$H(\omega)=\frac{j\frac{1}{\omega c}}{R+j\frac{1}{\omega c}}$

$|H(\omega)|^2=\frac{(\frac{1}{\omega c})^2}{R^2+(\frac{1}{\omega c})^2}=\frac{1}{(R\omega c)^2+1}$

令$a=\frac{1}{RC}$ 则

$|H(\omega)|^2=\frac{a^2}{\omega^2+a^2}$

则有

$G_y(\omega)=G_x(\omega)|H(\omega)|^2=\frac{N_0}{2}\frac{a^2}{\omega^2+a^2}$

$$R_y(\tau)=\frac{N_0a^2}{2}\frac{2}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega^2+a^2}cos(\omega\tau)d\omega=\frac{N_0}{2}\frac{1}{2}ae^{-a|\tau|}=\frac{N_0}{4}ae^{-a|\tau|}$$

等效噪声通频带

$$\Delta f_n=\frac{\frac{N_0}{2}\int_0^{\infty}\frac{a^2}{\omega^2+a^2}d\omega}{2\pi\frac{N_0}{2}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{a^2}{\omega^2+a^2}d\omega=\frac{a}{4}=\frac{1}{4RC}$$

RC越大，过滤的高频分量越多，频带越小

相关系数

$$r_y(\tau)=\frac{C_y(\tau)}{C_y(0)}=\frac{R_y(\tau)}{R_y(0)}=\frac{\frac{N_0}{4}ae^{-a|\tau|}}{\frac{N_0}{4}a}=e^{-a|\tau|}$$

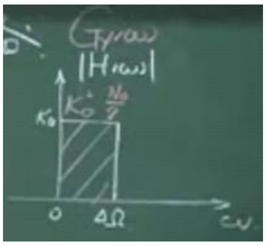
相关时间

$$\tau_0=\int_0^{\infty}a^{-a\tau}\,d\tau=\frac{1}{a}=RC=\frac{1}{4\Delta f_n}$$

相关时间和等效噪声通频带关系

几乎所有的$\tau_0\propto\frac{1}{\Delta f_n}$都成立

通过理想的低通滤波器



$$\left|H(\omega)\right|=\begin{cases}K_0 & |\omega|\le\Delta\Omega\\ 0 & others\end{cases}$$

$$G_y(\omega)=\frac{N_0}{2}{K_0}^2\ |\omega|\le\Delta\Omega$$

$$R_y(\tau)=\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{2}{2\pi}\int_0^{\infty}co\,s(\omega\tau)\,d\omega=\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{sin\Delta\Omega\tau}{\pi\tau}$$

频域矩形谱，时域为sin函数

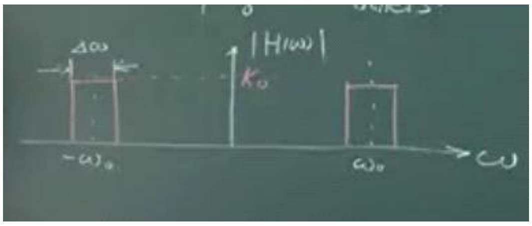
$$\Delta f_n=\frac{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\Delta\Omega}{2\pi\frac{N_0}{2}{K_0}^2}=\frac{\Delta\Omega}{2\pi}$$

即为矩形谱的宽度$\Delta\Omega$

$$r_y(\tau)=\frac{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{sin\Delta\Omega\tau}{\pi\tau}}{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{\Delta\Omega}{\pi}}=\frac{sin\Delta\Omega\tau}{\Delta\Omega\tau}$$

$$\tau_0=\int_0^{\infty}\frac{sin\Delta\Omega\tau}{\Delta\Omega\tau}d\tau=\frac{\pi}{2\Delta\Omega}=\frac{1}{4\Delta f_n}$$

通过理想的带通滤波器



$$\left|H(\omega)\right|=\begin{cases}K_0 & \left|\omega\pm\omega_0\right|\le\Delta\omega/2\\ 0\ others\end{cases}$$

$$G_y(\omega)=\frac{N_0}{2}{K_0}^2\ \left|\omega\pm\omega_0\right|\le\frac{\Delta\omega}{2}$$

$$R_y(\tau)=\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{2}{2\pi}\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}}co\,s(\omega\tau)\,d\omega=\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{1}{2\pi\tau}cos\omega_0\tau sin\frac{\Delta\omega\tau}{2}$$

在sin函数的基础上加了一个载波

$$\Delta f_n=\frac{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\Delta\omega}{2\pi\frac{N_0}{2}{K_0}^2}=\frac{\Delta\omega}{2\pi}=\Delta f$$

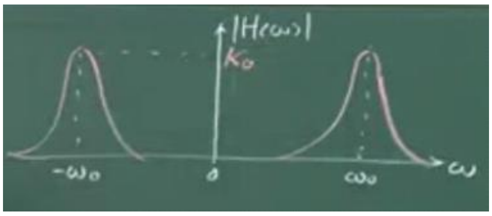
角频率转为物理频率

$$r_y(\tau)=\frac{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{1}{2\pi\tau}cos\omega_0\tau sin\frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{1}{2\pi}\frac{\Delta\omega}{2}}=\frac{2cos\omega_0\tau sin\frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\Delta\omega\tau}$$

相关时间不看载波，只看包络

$$\tau_0=\int_0^\infty\frac{2}{\Delta\omega\tau}sin\frac{\Delta\omega\tau}{2}d\tau=\frac{\pi}{\Delta\omega}=\frac{1}{2\Delta f_n}$$

通过高斯型带通滤波器



$$|H(\omega)|=K_0\,e^{-\frac{(\omega\pm\omega_0)^2}{2\beta^2}}\quad-\infty<\omega<\infty$$

$$G_y(\omega)=\frac{N_0}{2}{K_0}^2e^{-\frac{(\omega\pm\omega_0)^2}{\beta^2}}\quad-\infty<\omega<\infty$$

$$R_y(\tau)=\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\beta^2}}\ cos\omega\tau d\omega\ 令\ \omega-\omega_0=\omega'$$

$$=\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{{\omega'}^2}{\beta^2}}\cos(\omega_0+\omega')\,\tau d\omega'=\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{{\omega'}^2}{\beta^2}}\cos\omega'\,\tau d\omega' cos\omega_0\tau$$

$$=\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}cos\omega_0\tau e^{-\frac{\tau^2\beta^2}{4}}$$

$$\Delta f_n=\frac{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\beta^2}}d\omega}{2\pi\frac{N_0}{2}{K_0}^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\beta^2}}d\omega=\frac{\beta}{2\sqrt{\pi}}$$

$$r_y(\tau)=\frac{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}cos\omega_0\tau e^{-\frac{\tau^2\beta^2}{4}}}{\frac{N_0}{2}{K_0}^2\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}}=cos\omega_0\tau e^{-\frac{\tau^2\beta^2}{4}}$$

载波项依然存在

载波项依然不参加积分

$$\tau_0 = \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2\beta^2}{4}}\, d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} = \frac{1}{2\Delta f_n}$$

随机过程线性变换后的概率分布

输入为正态分布过程 输出仍为正态分布过程

证明：输入正态过程经过线性变换仍为正态过程

$$P(x_1```x_n, t_1```t_n) = P_x(X) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}} exp\left\{-\frac{1}{2}(X-M_x)^T C^{-1}(X-M_x)\right\}$$

线性变换

$Y = L[X]$

雅可比行列式

$$|J| = \left|\frac{\partial X}{\partial Y}\right| \ \ X = L^{-1}[Y]\ |J| = |L^{-1}| = \frac{1}{|L|}$$

$$P_Y(L^{-1}[Y]) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}|L|} exp\left\{-\frac{1}{2}(L^{-1}[Y]-M_x)^T C^{-1}(L^{-1}[Y]-M_x)\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}|L|} exp\left\{-\frac{1}{2}(Y-L[M_x])^T L^{-1T}C^{-1}L^{-1}(Y-LM_x)\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}|L|} exp\left\{-\frac{1}{2}(Y-L[M_x])^T Q^{-1}(Y-LM_x)\right\}$$

$Q^{-1} = (LCL^T)^{-1}$

$|LCL^T| = |L||C||L^T| = |L|^2|C| = Q$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|Q|^{\frac{1}{2}}} exp\left\{-\frac{1}{2}(Y-M_Y)^T Q^{-1}(Y-M_Y)\right\}$$

仅仅是协方差矩阵从C变为Q，均值从Mx变为My=L[Mx]

输入非正态分布宽谱过程 输出窄带线性系统近似为正态过程

输入为白噪声 输出有限带宽系统近似正态过程

后两条可以利用中心极限定理，带宽的比值，输入的谱很宽通过窄带系统的时候，无法及时响应，快速变化形成叠加，等效为正态随机过程

Chapter Three 平稳窄带随机过程

平稳窄带随机过程的表示

产生原因与特点

使用的系统都是窄带系统

原因：

1) 宽带输入经过窄带系统，输出变为窄带过程

$G_y(\omega) = G_x(\omega)|H(\omega)|^2$

一般无线电系统都存在非线性部分（在总的处理过程中都是线性的，除了部分必要的非线性处理）

2) 系统内噪声在输出端也是窄带随机过程

特点：

1) 具有明显和确定的中心频率ω_0

2) 振幅和相位变化远远慢于ω_0

表示

$x(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$

A(t)振幅调制 $\varphi(t)$相位调制

$x(t) = A(t)cos\varphi(t)cos\omega_0 t - A(t)sin\varphi(t)sin\omega_0 t = A_c(t)cos\omega_0 t - A_s(t)sin\omega_0 t$

$A_c(t) = A(t)cos\omega_0 t$

$A_s(t) = A(t)sin\omega_0 t$

Ac(t)与As(t)称为窄带信号x(t)的正交分量

解析信号与Hilbert变换

正弦信号的复信号表示

1) 时信号

$S(t) = Acos(\omega_0 t + \varphi)$

其中各项均为确定的常数

2) 复信号

$\tilde{S}(t) = Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)} = Ae^{j\varphi}e^{j\omega_0 t}$

$e^{j\omega_0 t}$ 复载波

$Ae^{j\varphi}$ 复包络

$R_e[\tilde{S}(t)] = S(t) = Acos(\omega_0 t + \varphi)$

$I_m[\tilde{S}(t)] = \hat{S}(t) = Asin(\omega_0 t + \varphi)$

3) 频谱关系

$$S(t) \Rightarrow S(\omega) = \frac{A}{2}2\pi[\delta(\omega - \omega_0)e^{j\varphi} + \delta(\omega + \omega_0)e^{-j\varphi}]$$
$$= A\pi[\delta(\omega - \omega_0)e^{j\varphi} + \delta(\omega + \omega_0)e^{-j\varphi}]$$

$$\hat{S}(t) \Rightarrow \hat{S}(\omega) = \frac{A\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0)e^{j\varphi} - \delta(\omega + \omega_0)e^{-j\varphi}]$$

$$\tilde{S} = S(t) + j\hat{S}(t) \Rightarrow 2A\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\varphi}$$

具有单边频谱特性

$$\tilde{S}(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega) & \omega \geq 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$$

高频窄带信号的复信号表示

1) 实信号

$S(t) = A(t)cos(\omega_0 t + \varphi(t))$

A(t) $\varphi(t)$为确定函数，ω_0为常数

2) 复信号

$\tilde{S}(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}e^{j\omega_0 t}$

$R_e[\tilde{S}(t)] = S(t) = A(t)cos\omega_0 tcos\varphi(t)$

$I_m[\tilde{S}(t)] = \hat{S}(t) = A(t)sin\omega_0 tsin\varphi(t)$

3) 频谱关系

$A(t)e^{j\varphi(t)} \Rightarrow \tilde{A}(\omega)$

$A(t)cos\varphi(t) \Rightarrow A(\omega)$

$S(t)\overset{}{\Rightarrow}\pi\left[\tilde{A}(\omega-\omega_0)+\tilde{A}(\omega+\omega_0)\right]$

$\hat{S}(t)\overset{}{\Rightarrow}\frac{\pi}{j}\left[\tilde{A}(\omega-\omega_0)-\tilde{A}(\omega+\omega_0)\right]$

$\tilde{S}(t)\overset{}{\Rightarrow}2\pi\tilde{A}(\omega-\omega_0)$

只在频率正方向有频谱，且能量不损失

保存了完整的幅度信息和相位信息

I Q信号

解析信号与hilbert变换

定义解析信号：

具有单边频谱特性的复信号

$\tilde{S}(t)=S(t)+j\hat{S}(t)$

称为解析信号

$$\tilde{S}(\omega)=\begin{cases}2S(\omega)\ \omega>0\\ S(\omega)\ \omega=0\\ 0\ \omega<0\end{cases}$$

$$\hat{S}(\omega)=\begin{cases}\frac{S(\omega)}{j}\omega>0\\ 0\ \omega=0\\ -\frac{S(\omega)}{j}\omega<0\end{cases}\overset{}{\Rightarrow}\frac{S(\omega)}{j}\operatorname{sgn}(\omega)$$

$$\operatorname{sgn}(\omega)=\begin{cases}1\ \omega>0\\ 0\ \omega=0\\ -1\ \omega<0\end{cases}$$

转换为时域，则有

$$\hat{S}(t)=S(t)\otimes\frac{1}{\pi t}=\frac{1}{\pi t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

定义hilbert变换：

1) 已知实部，求虚部（正变换）

$$\hat{S}(t)=S(t)\otimes\frac{1}{\pi t}$$

2) 已知虚部，求实部（反变换）

$$S(t)=\hat{S}(t)\otimes\frac{-1}{\pi t}$$

用于求解复信号的实部or虚部

例：已知信号$S(t)=cos\omega_0 t$ 求其hilbert变换和解析信号

$$\hat{S}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos\omega_0\tau}{t-\tau}d\tau$$

令 $\tau'=t-\tau$

$$\hat{S}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos\omega_0(t-\tau)}{\tau}d\tau=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{sin\omega_0\tau}{\tau}d\tau sin\omega_0 t=sin\omega_0 t$$

$\tilde{S}(t)=cos\omega_0 t+jsin\omega_0 t$

一般解法：从频域开始

$S(t)\overset{}{\Rightarrow}S(\omega)$

$$\hat{S}(t)=F^{-1}[\hat{S}(\omega)]=\frac{S(\omega)}{j}sgn(\omega)$$

如果是欧拉式，利用指数的性质

hilbert变换是一般方法，对所有信号适用

解析复随机过程

复随机过程

定义：若x(t)，y(t)为任意实随机过程，则称z(t)=x(t)+jy(t)为复随机过程

均值：

$$E[z(t)] = m_x(t) + jm_y(t) = m_z(t)$$

方差：

$$D[z(t)] = E\left[\left(z(t) - m_z(t)\right)^*\left(z(t) - m_z(t)\right)\right] = D[x(t)] + D\left[y(t)\right]$$

相关函数：

$$R_z\left(t_1, t_2\right) = E\left[\left(x\left(t_1\right) - jy\left(t_1\right)\right)\left(x\left(t_2\right) + jy\left(t_2\right)\right)\right]$$
$$= R_x\left(t_1, t_2\right) + R_y\left(t_1, t_2\right) + j[R_{xy}\left(t_1, t_2\right) - R_{yx}\left(t_1, t_2\right)]$$

互相关函数：

$$R_{z_1 z_2}\left(t_1, t_2\right) = E\left[\left(x_1\left(t_1\right) - jy_1\left(t_1\right)\right)\left(x_2\left(t_2\right) + jy_2\left(t_2\right)\right)\right]$$
$$= R_{x_1 x_2}\left(t_1, t_2\right) + R_{y_1 y_2}\left(t_1, t_2\right) + j[R_{x_1 y_2}\left(t_1, t_2\right) - R_{y_1 x_2}\left(t_1, t_2\right)]$$

解析复随机过程的相关函数和功率谱

定义：

若随机过程 $\tilde{x}(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$ ，若 $\hat{x}(t) = x(t) \otimes \frac{1}{\pi t}$

则称$\tilde{x}(t)$为解析复随机过程，其中$x(t)$，$\hat{x}(t)$为实随机过程

相关函数：

$$R_{\hat{x}x}(\tau) = R_{x\hat{x}}(-\tau)$$
$$R_{\hat{x}x}(\tau) = -R_x(\tau) \otimes \frac{1}{\pi\tau}$$
$$R_{x\hat{x}}(\tau) = R_x(\tau) \otimes \frac{1}{\pi\tau}$$
$$R_{x\hat{x}}(\tau) = -R_{\hat{x}x}(\tau)$$
$$R_{x\hat{x}}(-\tau) = -R_{x\hat{x}}(\tau)$$
$$R_x(\tau) = R_{\hat{x}}(\tau)$$
$$R_{\tilde{x}}(\tau) = 2[R_x(\tau) + jR_{x\hat{x}}(\tau)]$$

功率谱：

$$G_{\tilde{x}}(\omega) = 2G_x(\omega) + 2G_x(\omega)sgn(\omega)$$

证明：

1) $left = E\left[\hat{x}(t)\, x(t+\tau)\right]$
   $t + \tau = t'$
   $= E\left[\widehat{x(t')} x(t' - \tau)\right]$
   $= R_{x\hat{x}}(-\tau)$
2) $left = E[\hat{x}(t)\, x(t+\tau)] = E\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(p)}{\tau - p} dp x(t+\tau)\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_x(t + \tau - p)}{t - p} dp$
   $t - p = p'$
   $= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_x(p' + \tau)}{p'} dp'$
   $p' + \tau = p$
   $= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_x(p)}{p - \tau} dp$
   $= -R_x(\tau) \otimes \frac{1}{\pi\tau}$
3) $R_{x\hat{x}}(\tau) = E\left[x(t)\, \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(p)}{t + \tau - p} dp\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_x(p - t)}{t + \tau - p} dp$
   $p - t = p'$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_x(p')}{\tau-p'}dp'=R_x(\tau)\otimes\frac{1}{\pi\tau}$$

4) 根据2、3就可以得到
5) 利用之前的结果交换一下就可以了
6) $\hat{x}(t)=x(t)\otimes\frac{1}{\pi t}$

$$\frac{1}{\pi t}\Rightarrow\left|\mathrm{sgn}(\omega)/j\right|^2$$
$$G_{\hat{x}}(\omega)=G_x(\omega)\left|\mathrm{sgn}(\omega)/j\right|^2=G_x(\omega)$$
$$R_x(\tau)=R_{\hat{x}}(\tau)$$

7) 可以根据互相关函数的计算方式
8) 对第7进行傅里叶变化得到

窄带随机过程的复包络和统计特性

实窄带过程 $y(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\varphi(t)]$

复窄带过程 $\tilde{y}(t)=A(t)e^{j\varphi(t)}e^{j\omega_0 t}=\tilde{A}(t)e^{j\omega_0 t}=y(t)+j\hat{y}(t)$

1) $\tilde{y}(t)$的相关函数

$$R_{\tilde{y}}(\tau)=2[R_y(\tau)+jR_{y\hat{y}}(\tau)]=\mathrm{E}[\tilde{A}(t)^*e^{j\omega_0 t}\tilde{A}(t+\tau)e^{j\omega_0(t+\tau)}]=R_{\tilde{A}}(\tau)e^{j\omega_0\tau}$$

2) 功率谱

$$G_{\tilde{y}}(\omega)=\begin{cases}4G_y(\omega)\ \omega>0\\2G_y(\omega)\ \omega=0\\0\ \omega<0\end{cases}$$
$$=G_{\tilde{A}}(\omega-\omega_0)$$

3) 相互关系

$$R_y(\tau)=A(\tau)\cos\omega_0\tau$$
$$A(\tau)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}G_{\tilde{A}}(\omega)\,cos\,\omega_0\tau\,d\tau$$

证明:

$$left=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_y(\omega)\,e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}G_y(\omega)cos\omega\tau d\omega=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}G_{\tilde{y}}(\omega)cos\omega\tau d\omega$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}G_{\tilde{A}}(\omega-\omega_0)cos\omega\tau d\omega$$
$$\omega-\omega_0=\omega'$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\omega_0}^{\infty}G_{\tilde{A}}(\omega')cos(\omega_0+\omega')\tau d\omega=\frac{1}{4\pi}\int_{-\omega_0}^{\infty}G_{\tilde{A}}(\omega')cos\omega'\tau cos\,\omega_0\tau d\omega$$
$$=co\,s\,\omega_0\tau\frac{1}{4\pi}\int_{-\omega_0}^{\infty}G_{\tilde{A}}(\omega')cos\omega'\tau d\omega=right$$

4) 统计特性

$$y(t)=A_c(t)cos\omega_0 t-A_s(t)sin\omega_0 t$$
$$\hat{y}(t)=A_c(t)sin\omega_0 t+A_s(t)cos\omega_0 t$$
$$\begin{bmatrix}y(t)\\\hat{y}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cos\omega_0 t & -sin\omega_0 t\\sin\omega_0 t & cos\omega_0 t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_c(t)\\A_s(t)\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}A_c(t)\\A_s(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cos\omega_0 t & sin\omega_0 t\\-sin\omega_0 t & cos\omega_0 t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y(t)\\\hat{y}(t)\end{bmatrix}$$
$$A_c(t)=cos\omega_0 ty(t)+sin\omega_0 t\hat{y}(t)$$
$$A_s(t)=-sin\omega_0 ty(t)+cos\omega_0 t\hat{y}(t)$$

正交分量的自相关函数

$$R_c(\tau)=E[A_c(t)A_c(t+\tau)]$$
$$=E\left[\left(cos\omega_0 ty(t)+sin\omega_0 t\hat{y}(t)\right)\left(cos\omega_0(t+\tau)y(t+\tau)+sin\omega_0(t+\tau)\hat{y}(t+\tau)\right)\right]$$
$$=R_y(\tau)\left[cos\omega_0 tcos\omega_0(t+\tau)+sin\omega_0 tsin\omega_0(t+\tau)\right]$$
$$+R_{y\hat{y}}(\tau)\left[cos\omega_0 tsin\omega_0(t+\tau)-sin\omega_0 tcos\omega_0(t+\tau)\right]$$

$=R_y(\tau)cos\omega_0\tau+R_{y\hat{y}}(\tau)sin\omega_0\tau$
$=R_s(\tau)$
窄带过程中两个正交分量的自相关函数相等
$R_{cs}(\tau)=-R_{sc}(\tau)$
$R_{cs}(0)=-R_{sc}(0)=0$
互相关函数在同一时刻不相关/正交

例子：

设窄带随机过程y(t)具有一个对称的功率谱，其相关函数满足：
$R_y(\tau)=A(\tau)cos\omega_0\tau$
求相关函数$R_{\hat{y}}(\tau)R_{\tilde{y}}(\tau)$，方差$\sigma_{\hat{y}}^2\sigma_{\tilde{y}}^2$；进一步求解$R_c(\tau)R_s(\tau)\sigma_c^2\sigma_s^2R_{cs}(\tau)R_{sc}(\tau)$

解：

$R_y(\tau)=R_{\hat{y}}(\tau)=A(\tau)cos\omega_0\tau$
$R_{\tilde{y}}(\tau)=2\left[R_y(\tau)+jR_{y\hat{y}}(\tau)\right]=2\left(A(\tau)cos\omega_0\tau+jA(\tau)sin\omega_0\tau\right)$
$\sigma_{\hat{y}}^2=R_{\hat{y}}(0)=A(0)$
$\sigma_{\tilde{y}}^2=R_{\tilde{y}}(0)=2A(0)$
$R_c(\tau)=R_y(\tau)cos\omega_0\tau+R_{y\hat{y}}(\tau)sin\omega_0\tau=A(\tau)cos^2\omega_0\tau+A(\tau)sin^2\omega_0\tau=A(\tau)=R_s(\tau)$
$R_c(0)=\sigma_c^2=A(0)=\sigma_s^2$
$R_{cs}(\tau)=-R_y(\tau)sin\omega_0\tau+R_{y\hat{y}}(\tau)cos\omega_0\tau=-A(\tau)cos\omega_0\tau sin\omega_0\tau+A(\tau)sin\omega_0\tau cos\omega_0\tau=0$
$=R_{sc}(\tau)$
说明窄带随机过程的两个正交分量，是始终正交的

窄带正态过程包络和相位的概率分布

窄带正态噪声包络与相位的概率分布

窄带噪声
$n(t)=A(t)\cos\left[\omega_0t+\varphi(t)\right]=A_c(t)cos\omega_0t-A_s(t)sin\omega_0t$
正态噪声：$A_c(t)\ A_s(t)$ 满足0均值的正态分布

$$P\left(A_c\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{{A_c}^2}{2\sigma^2}}\ -\infty<A_c<\infty$$

$$P\left(A_s\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{{A_s}^2}{2\sigma^2}}\ -\infty<A_s<\infty$$

因为正交

$$P\left(A_cA_s\right)=P\left(A_c\right)P\left(A_s\right)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{{A_c}^2+{A_s}^2}{2\sigma^2}}\ -\infty<A_c,A_s<\infty$$

引入新随机变量A振幅φ相位
$A_c=Acos\varphi$
$A_s=Asin\varphi$

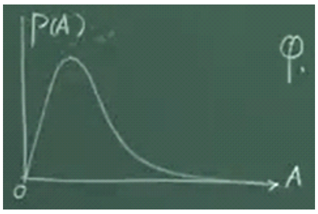
$$|J|=\begin{vmatrix}\frac{\partial A_c}{\partial A} & \frac{\partial A_c}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial A_s}{\partial A} & \frac{\partial A_s}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}cos\varphi & -Asin\varphi\\ sin\varphi & Acos\varphi\end{vmatrix}=A$$

$$P\left(A,\ \varphi\right)=\frac{A}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{A^2cos^2\varphi+A^2sin^2\varphi}{2\sigma^2}\right\}=\frac{A}{2\pi\sigma^2}e^{--\frac{A^2}{2\sigma^2}}\ \ 0\le A<\infty\ \ 0\le\varphi<2\pi$$

说明 φ在[0,2π)均匀分布

$$P\left(\varphi\right)=\frac{1}{2\pi}\ \ 0\le\varphi<2\pi$$

$P(A)=\frac{A}{\sigma^2}e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}}\ \ 0\le A<\infty$ Reily分布（瑞利分布）



φ和A独立

正态随机数：使用均匀分布结合反变换，就能得到

噪声的二维联合包络与相位的概率分布

$$P\left(A_cA_sA_{c\tau}A_{s\tau}\right)=P\left(A_cA_{c\tau}\right)P\left(A_sA_{s\tau}\right)$$

$$P\left(A_cA_{c\tau}\right)=\frac{1}{2\pi|C|^{\frac{1}{2}}}exp\left\{-\frac{1}{2}\left(A_c,A_{c\tau}\right)C^{-1}\begin{pmatrix}A_c\\A_{c\tau}\end{pmatrix}\right\}$$

$$|R|=\begin{vmatrix}\sigma^2 & R(\tau)\\R(\tau) & \sigma^2\end{vmatrix}=\sigma^4-R^2(\tau)$$

$$R^{-1}=\frac{1}{\sigma^4-R^2(\tau)}\begin{vmatrix}\sigma^2 & R(\tau)\\R(\tau) & \sigma^2\end{vmatrix}$$

$$P\left(A_cA_{c\tau}\right)=\frac{1}{2\pi(\sigma^4-R^2(\tau))^{\frac{1}{2}}}exp\left\{-\frac{\sigma^2[\left({A_c}^2+{A_{c\tau}}^2\right)-2A_cA_{c\tau}R(\tau)]}{2(\sigma^4-R^2(\tau))}\right\}$$

$$P\left(A_cA_sA_{c\tau}A_{s\tau}\right)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2(\sigma^4-R^2(\tau))}exp\{-\frac{\sigma^2[\left({A_c}^2+{A_{c\tau}}^2+{A_s}^2+{A_{s\tau}}^2\right)-2R(\tau)(A_cA_{c\tau}+A_sA_{s\tau})]}{2(\sigma^4-R^2(\tau))}\}$$

$$A_c=Acos\varphi$$
$$A_s=Asin\varphi$$
$$A_{c\tau}=A_\tau cos\varphi_\tau$$
$$A_{s\tau}=A_\tau sin\varphi_\tau$$

$$|J|=\begin{vmatrix}cos\varphi & -Asin\varphi & 0 & 0\\ sin\varphi & Acos\varphi & 0 & 0\\ 0\quad 0 & & cos\varphi_\tau & -A_\tau cos\varphi_\tau\\ 0\quad 0 & & sin\varphi_\tau & A_\tau cos\varphi_\tau\end{vmatrix}=AA_\tau$$

$$P\left(AA_\tau\varphi\varphi_\tau\right)=\frac{AA_\tau}{4\pi^2(\sigma^4-R^2(\tau))}exp\{-\frac{\sigma^2[\left(A^2+{A_\tau}^2\right)-2AA_\tau R(\tau)cos(\varphi-\varphi_\tau)]}{2(\sigma^4-R^2(\tau))}\}$$

相位分布和包络分布不再独立

$$P\left(AA_\tau\right)=\frac{AA_\tau}{\left(\sigma^4-R^2(\tau)\right)}e^{-\frac{\sigma^2\left(A^2+{A_\tau}^2\right)}{2(\sigma^4-R^2(\tau))}}I_0\left(-\frac{2AA_\tau R(\tau)}{2(\sigma^4-R^2(\tau))}\right)$$

I_0为零阶修正的bessd函数（贝塞尔函数）

加入正弦信号后合成包络与相位的概率分布

$S(t)=Acos(\omega_0t+\theta)$ A,ω_0为常数，θ为[0,2π]均匀分布的随机变量

$$S(t)=Acos\theta cos\omega_0t-Asin\theta sin\omega_0t$$
$$n(t)+S(t)$$

$$P\left(A_cA_s\mid\theta\right)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{(A_c-Acos\theta)^2+\left(A_s-Asin\theta\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

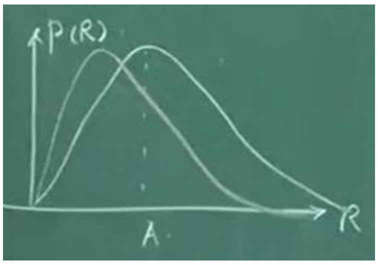
$$P\left(R,\varphi\mid\theta\right)=\frac{R}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{R^2+A^2-2ARcos(\varphi-\theta)}{2\sigma^2}\right\}$$

不独立

$$P(R)=\frac{R}{\sigma^2}exp\left\{-\frac{R^2+A^2}{2\sigma^2}\right\}I_0\left(-\frac{AR}{\sigma^2}\right)\quad R\geq 0$$

广义Reily分布/Rice分布（莱斯分布）（若A=0，则为Reily分布）

信号能量很小的时候，趋近于Reily分布；信号能量很大的时候，趋近于正态分布



包络和相位的分布取决于两个因素：信号的幅度和噪声的关系

噪声的大小：σ^2是噪声的功率

σ与A的比值，就是信噪比

信噪比越高，趋向于正态分布；信噪比越低，趋向于噪声的Reily分布

窄带随机过程包络平方的概率分布

窄带正态噪声包络平方的概率分布

$P(A)=\frac{A}{\sigma^2}e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}}\quad 0\le A$

$u=A^2$

非线性变换

$|J|=\left|\frac{\partial A}{\partial u}\right|=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$

$P(u)=\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\sigma^2}\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}\quad 0\le u$

$=\frac{1}{2\sigma^2}e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}$

服从指数分布

均值

$E(u)=\int_0^\infty\frac{u}{2\sigma^2}e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}du$

$\frac{u}{2\sigma^2}=x$

$=\int_0^\infty xe^{-x}2\sigma^2dx=2\sigma^2\Gamma(2)=2\sigma^2$

方差

$E\left(u^2\right)=\int_0^\infty\frac{u^2}{2\sigma^2}e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}du=(2\sigma^2)^2\int_0^\infty x^2e^{-x}dx=8\sigma^4$

$D[u]=E\left(u^2\right)-E(u)^2=4\sigma^4$

窄带正态噪声加正弦信号包络平方的概率分布

$P(R)=\frac{R}{\sigma^2}exp\left\{-\frac{R^2+A^2}{2\sigma^2}\right\}I_0\left(-\frac{AR}{\sigma^2}\right)\ \ R\ge 0$

$u=R^2$

$P(u)=\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\sigma^2}exp\left\{-\frac{u^2+A^2}{2\sigma^2}\right\}I_0\left(-\frac{\sqrt{u}A}{\sigma^2}\right)\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\ \ u\ge 0$

$P(u)=\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\sigma^2}exp\left\{-\frac{u^2+A^2}{2\sigma^2}\right\}I_0\left(-\frac{\sqrt{u}A}{\sigma^2}\right)\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\ \ u\ge 0$

$=\frac{1}{2\sigma^2}exp\left\{-\frac{u^2+A^2}{2\sigma^2}\right\}I_0\left(-\frac{\sqrt{u}A}{\sigma^2}\right)$

χ^2分布

背景：雷达收到了多个脉冲的叠加，没有目标就是噪声叠加χ^2分布，有目标就是噪声和正弦信号的叠加非中心的χ^2分布

χ^2分布：n个独立的N(0,1)平方和的概率分布服从χ^2分布

$P(u) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}\ u \geq 0$

n为自由度

$n = 2\ P(u) = \frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}}\ u \geq 0$

指数分布，两个正态分布的平方和分布

n一般取偶数

均值

$E(u)\ = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{\infty} u^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{u}{2}} du$

$\frac{u}{2} = x$

$= \frac{2}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty} (2x)^{\frac{n}{2}} e^{-x} du = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}} e^{-x} du = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{2\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2}+1\right)!} = n$

其中，有关伽马函数的定义：

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t \quad (\mathrm{Re}(z) > 0)$$

方差

$D[u] = E\left(u^2\right) - E(u)^2$

$E\left(u^2\right) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty} u^{\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{u}{2}} du = \frac{2}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty} (2x)^{\frac{n}{2}+1} e^{-x} dx = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}+1} e^{-x} dx$

$= \frac{4}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right) = 4\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}\right) = 2n\left(\frac{n}{2}+1\right)$

$D[u] = 2n$

非中心的χ^2分布

非中心χ^2分布：n个独立的N(0,1)加正弦信号包络平方和的概率分布服从非中心χ^2分布

$P(u) = \frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\frac{n-2}{4}} exp\left\{-\frac{\lambda+u}{2\sigma^2}\right\} I_{\frac{n}{2}-1}\left(-\frac{\sqrt{\lambda u}}{\sigma^2}\right)\ u \geq 0$

n表示自由度

$\lambda\ = \sum_{i=1}^{n} A_i^2$

雷达检测手册（直接查表得到结果）

雷达使用这一种方式做目标检测，称之为脉冲积累检测，能够累积的脉冲数也是有限的

Chapter Four 随机过程的非线性变换

概述

定义与分类

定义：不满足比例性，叠加性的变换均为非线性变换

分类：

按时间特性分为

1) 无惰性非线性变换

   若有$y(t)=f[x(t)]$

   则有$y(t-\tau)=f[x(t-\tau)]\ \forall\tau\in R^1$

   输出立即随输入变化而变化，而与输入前没有关系

2) 有惰性非线性变换

   输入与当前及以前的输入都有关系

判断条件：看系统中是否存在惰性元件

研究的问题与解决的方法

1) 研究问题
   a. 分布：已知输入的分布，求解输出的分布

      雅可比变换
   b. 矩函数：已知输入的矩函数求输出的矩函数

      均值、方差、相关函数、功率谱
2) 解决的方法

   对于分布就是雅可比变换

   对于矩函数
   a. 直接法

      按非线性变换定义直接求解

      $E[y]=\int_{-\infty}^{\infty}f[x(t)]P_{x(t)}dx(t)$

      $E[y^2]=\int_{-\infty}^{\infty}f[x(t)]^2P_{x(t)}dx(t)$

      $D[y]=E[y^2]-(E[y])^2$

      $R_y(\tau)=E[y(t)y(t+\tau)]$

      $=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f[x(t)]f[x(t+\tau)]P\big(x(t),x(t+\tau)\big)dx(t)dx(t+\tau)$
   b. 变换法

      利用相关函数和功率谱的关系，利用功率谱来求相关函数
   c. 缓变包络法

      利用窄带过程的条件，展开ω_0的级数，求包络的统计特性

随机过程非线性变换的直接方法（检波）

平稳正态噪声通过全波平方率器件（全波平方率检波）

1) 全波平方率

   $y=bx^2$
2) 均值

   $E[y]=bE[x^2]$

   若x(t)零均值 σ^2为x(t)方差

   $E[y]=bE[x^2]=b\sigma^2$

   相关函数

   $R_y(\tau)=E[bx^2(t)bx^2(t+\tau)]=b^2E[x^2(t)x^2(t+\tau)]$

$= b^2\left[E\left[x^2(t)\right]E\left[x^2(t+\tau)\right] + 2E\left[x(t)x(t+\tau)\right]E\left[x(t)x(t+\tau)\right] +\right] = b^2\left[\sigma^4 + 2R_x^2(\tau)\right]$

$D(y) = E[y^2] - (E[y])^2 = R_y(0) - (E[y])^2 = 3b^2\sigma^4 - (b\sigma^2)^2 = 2b^2\sigma^4$

均值平方代表直流信号的功率，方差代表的输出过程中起伏信号功率，$R_y(0)$为总功率

$G_y(\omega) = b^2\sigma^4\delta(\omega) + 2b^2G_x(\omega)\otimes G_x(\omega)$

平稳正态噪声加正弦信号通过全波平方率器件

$x(t) = S(t) + n(t)$

$S(t) = Acos(\omega_0 t + \varphi(t))$ $\varphi \in [0,2\pi)$ 均匀分布的随机变量

$$E[y] = bE\left[\left(S(t) + n(t)\right)^2\right] = b\left[\frac{A^2}{2} + \sigma^2\right]$$

$$R_y(\tau) = b^2\left[\left(S(t) + n(t)\right)^2\left(S(t+\tau) + n(t+\tau)\right)^2\right]$$

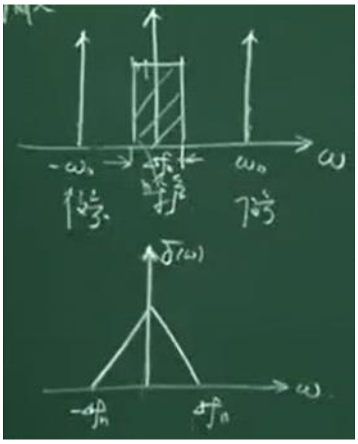
$$= b^2[\frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{8}cos2\omega_0\tau + A^2\sigma^2 + 2A^2cos\omega_0\tau R_n(\tau) + \sigma^4 + 2R_n^2(\tau)]$$

$G_y(\omega)$

$$= \left(b^2\frac{A^2}{4} + A^2\sigma^2b^2 + \sigma^4\right)\delta(\omega) + b^2A^2\left(G_n(\omega-\omega_0) + G_n(\omega+\omega_0)\right) + 2b^2G_n(\omega)\otimes G_n(\omega)$$

$$+ \frac{A^2}{16}(\delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0))$$

差拍法和和拍法定性分析功率谱



从图形上展示结果

厄米特多项式法（输入必须为平稳正态零均值过程）

定义：

1) 第一种定义

$$H_k(z) = (-1)^k e^{\frac{z^2}{2}}\frac{\partial^k e^{-\frac{z^2}{2}}}{\partial z^k}$$

是一个多项式

2) 迭代方式/差分方程方式

$H_{k+1}(z) = zH_k(z) - kH_{k-1}(z)$

$H_0(z) = 1$

$H_1(z) = z$

性质

1) 厄米特多项式为奇或偶的多项式

k为奇则为奇多项式，k为偶则为偶多项式

2) 若为奇次 $H_k(0) = 0$

若为偶次

$H_k(0) = (-1)^k(k-1)!!$

!!是跳着计算的，隔一个相乘

3）有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int H_k(z)H_j(z)e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\begin{cases}0 & k\neq j\\ k! & k=j\end{cases}$$

结果

$$R_y(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_x^k(\tau)}{k!}C_k^2$$

$$C_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\sigma z)H_k(z)e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

通常只取前二三项

平稳正态零均值噪声通过半波线性率器件（半波线性检波）

使用厄米特多项式计算

半波线性率器件定义

$$\mathrm{y}=\begin{cases}bx & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

输出相关函数分析

$$R_y(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_x^k(\tau)}{k!}C_k^2$$

$$C_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}b\sigma xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{b\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{b\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

$$C_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}b\sigma x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$\frac{x^2}{2}=y$$

$$=\frac{b\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}2ye^{-y}\frac{1}{\sqrt{2}}y^{-\frac{1}{2}}dy=\frac{b\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}y^{\frac{1}{2}}ye^{-y}dy=\frac{b\sigma}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{b\sigma}{2}$$

$$C_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}b\sigma xH_2(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{b\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}x(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=\frac{b\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}x^3e^{-\frac{x^2}{2}}dx-\frac{b\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

如果是连续函数，直接推导

如果是分段的，可以使用厄米特多项式

随机过程非线性变换的变换（变换—拉氏变换）

转移函数（和传输函数在概念上有区分，存在大于0）

定义：将非线性变换函数

$$F(\omega)=\int_0^{\infty}f(x)e^{-x\omega}dx$$

x(t)是输入过程；因为无惰性，所以省略t；f(x)是非线性变化函数；

c称为$F(\omega)$的解析域

$$f(x)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c F(\omega)e^{x\omega}d\omega\quad x\geq 0$$

推广：

$$F_-(\omega) = \int_{-\infty}^{0} f(x)e^{-x\omega}dx$$

存在解析域C_-

$$f(x) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{c-} F_-(\omega)e^{x\omega}d\omega \quad x < 0$$

非线性变换输出过程的矩函数（广义平稳正态零均值）

输出过程的相关函数

$$R_y(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{R_x^k(\tau)}{k!}h_{0,k}^2$$

$$h_{0,k} = \frac{1}{2\pi j}\oint_c F(\omega)\omega^k e^{\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}d\omega$$

$h_{0,k}^2$与k有关的常数

加一个正弦信号

$S(t) = Acos(\omega_0 t + \theta)$ $\theta \in [0,2\pi)$ 均匀分布，且与噪声无关

$$R_y(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{R_x^k(\tau)}{k!}\sum_{0}^{\infty}\varepsilon_m cos\omega_0 k\tau \; h_{m,k}^2$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 2 & m = 1,2\cdots \end{cases}$$

$$h_{m,k} = \frac{1}{2\pi j}\oint_c F(\omega)\omega^k e^{\frac{\omega^2\sigma^2}{2}} I_m(\omega A)d\omega$$

使用厄米特多项式求解时，不能加正弦信号，会破坏前置条件（零均值），但现在可以

普赖斯法（广义平稳正态零均值，对于非线性变换函数经过若干次求导，可以成为δ函数，比如非无穷次的多项式）

结果：

$$\frac{\partial^k R_y(\tau)}{\partial r^k} = \sigma^{2k}E\left[\frac{\partial f^k(x_1)}{\partial x_1^k}\frac{\partial f^k(x_2)}{\partial x_2^k}\right]$$

x1,x2之间的时间差为τ

利用微分方程求解$R_y(\tau)$

不可加正弦信号

随机过程非线性变换的缓变包络法（窄带过程）

无负载反作用的缓变包络法（无高频滤波器，因为负载基本都是低频）

输入为窄带随机过程

$$x(t) = A(t)cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

系统无惰性

$$y = f(x) = f(Acos\varphi) \quad A \rightarrow A(t) \quad \varphi \rightarrow \omega_0 t + \varphi(t)$$

y是φ的周期函数，可以展开傅里叶级数

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(A)cosk\varphi \quad a_0(A) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(Acos\varphi)d\varphi \quad a_k(A) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(Acos\varphi)cosk\varphi d\varphi$$

$$E[y] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k(A)cosk\varphi\right] = E[a_0(A)]$$

为直流分量

相关函数$t, t+\tau$时间

$$R_y(\tau)=E\left[y_t y_{y+\tau}\right]=E\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_k(A)cosk\varphi\sum_{m=0}^{\infty}a_m(A_\tau)cosm\varphi_\tau\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}E[a_k(A)a_k(A_\tau)cosk\varphi cosk\varphi_\tau]$$

当k=0时，即为低频功率

$=E[a_0(A)a_0(A_\tau)]$

直流功率为$(E[a_0(A)])^2$

总功率

$$R_y(0)=\sum_{k=0}^{\infty}E[a_k^2(A)\frac{1}{2}(1+cos2k\varphi)]$$

无高频滤波体现在$cos2k\varphi$

有负载反作用的缓变包络法（有高频滤波器）

变换函数 $y=bA$

A为输入过程的包络，b为常数，称为检波效率

只有噪声时

输入

$$P_x(A)=\frac{A}{\sigma^2}e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}}\quad 0\le A$$

输出

$$P_y(y)=\frac{y}{(b\sigma)^2}e^{-\frac{y^2}{2(b\sigma)^2}}\quad 0\le y$$

加入信号后

$$P(R)=\frac{R}{\sigma^2}exp\left\{-\frac{R^2+A^2}{2\sigma^2}\right\}I_0\left(-\frac{AR}{\sigma^2}\right)\ \ R\ge 0$$

输出仍为Rice分布

输入为窄带随机过程

针对电路系统中的非线性电路，在雷达中表现为：检波器（平方率检波器，半波线性检波器）；限幅器，对接收机输入端的保护，不希望后端信号处理能量过大，避免饱和

随机过程通过限幅器的分析

限幅对概率分布的影响

限幅特性

1) 双向硬限幅

$$y=\begin{cases}a_0 & x\ge u_L\\ sx & u_L\ge x\ge -u_L\\ -a_0 & x\le -u_L\end{cases}$$

2) 双向软限幅

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}k\sigma_L}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2\sigma_L^2}}dt$$

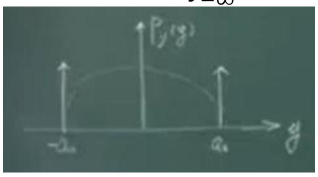
误差函数积分（可查表）$y\epsilon[-\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}]$

对概率分布的影响

X的概率分布P(x)

双向硬限幅：

$$P_y(y)=\begin{cases}\delta(y-a_0)P(x\geq u_L) & P(x\geq u_L)=\int_{U_L}^{\infty}P(x)dx \quad x\geq u_L\\ \frac{1}{s}P_x\left(\frac{y}{s}\right) & u_L\geq x\geq -u_L\\ \delta(y+a_0)P(x\leq -u_L) & P(x\leq -u_L)=\int_{-\infty}^{-U_L}P(x)dx \quad x\leq -u_L\end{cases}$$



双向软限幅：

$$dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}k\sigma_L}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_L^2}}dx$$

$$J=\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right|=\sqrt{2\pi}k\sigma_L e^{\frac{x^2}{2\sigma_L^2}}$$

设x为零均值正态过程

$$P(y)=|J|P(x)=\frac{\sqrt{2\pi}k\sigma_L}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{x^2}{2\sigma_L^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}=\frac{\sigma_L k}{\sigma}e^{-\frac{x^2}{2}(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{1}{\sigma_L^2})}$$

1) $\sigma_L=\sigma$ 均匀分布

$$P(y)=k \quad y\epsilon[-\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}]$$

2) $\sigma_L>\sigma$ 仍为正态分布，方差减少

3) $\sigma_L<\sigma$ 马鞍分布

限幅对功率谱的影响

限幅特性（脉冲限幅/阶跃函数）

$$y=\begin{cases}a_0 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

相关函数—普赖斯法

$$\frac{\partial^k R_y(\tau)}{\partial r^k}=\sigma^{2k}E\left[\frac{\partial f^k(x_1)}{\partial x_1^k}\frac{\partial f^k(x_2)}{\partial x_2^k}\right]$$

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial r}=\sigma^2E[a_0\delta(x_1)a_0\delta(x_2)|=\sigma^2a_0^2\iint\frac{\delta(x_1)\delta(x_2)}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2-2rx_1x_2}{2\sigma^2(1-r^2)}}dx_1dx_2$$

$$=\frac{a_0^2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}$$

$$R_y(\tau)=\int\frac{a_0^2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}dr=\frac{a_0^2}{2\pi}arcsinr+C \quad r\in[-1,1]$$

$$R_y(0)=\frac{a_0^2}{2\pi}\frac{\pi}{2}+C=\frac{a_0^2}{4}+C=\frac{a_0^2}{2}$$

根据离散分布随机变量的特性

$$C=\frac{a_0^2}{4}$$

$$R_y(\tau)=\frac{a_0^2}{4}(1+arcsinr(\tau))$$

噪声和正弦信号通过限幅中放

接收机信号增益主要在中频放大器，容易出现限幅现象

关心信噪比
近似公式

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \left(\frac{S}{N}\right)_i \frac{1+2\left(\frac{S}{N}\right)_i}{\frac{4}{\pi}+\left(\frac{S}{N}\right)_i}$$

1) 若输入信噪比$\left(\frac{S}{N}\right)_i \gg 1$
   可以近似为
   $$\left(\frac{S}{N}\right)_o \approx 2\left(\frac{S}{N}\right)_i$$
   输出信噪比改善了
2) 若输入信噪比$\left(\frac{S}{N}\right)_i \ll 1$
   $$\left(\frac{S}{N}\right)_o \approx \left(\frac{S}{N}\right)_i \frac{\pi}{4}$$
   稍微损失一些

“恃强凌弱”的非线性特性，但没有太大的变化

无线电系统输出端信噪比的计算

能量的分解

无线电系统的分类：线性系统；非线性系统

1) 线性系统
   输入：信号功率—Si　　噪声功率—Ni
   输出：线性系统—Si·G　Ni·G+△N（系统内噪声）
   输出信噪比
   $$\frac{S_iG}{N_iG+\Delta N}=\frac{S_i}{N_i+\Delta N/G}=\frac{S_i}{N_i(1+\frac{\Delta N}{N_iG})}=\left(\frac{S}{N}\right)_i\frac{1}{1+\frac{\Delta N}{N_iG}}$$
   其中$1+\frac{\Delta N}{N_iG}=F$为系统的噪声系数
   $$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\left(\frac{S}{N}\right)_i/F$$
   理想无线电系统F=1
   选用低噪声的放大器
2) 非线性系统
   输入：信号 噪声
   输出：信号与信号作用 $R_{ss}(\tau)\Rightarrow R_{ss}(0)$—输出信号功率
   　　　噪声与噪声作用 $R_{nn}(\tau)\Rightarrow R_{nn}(0)$—输出噪声功率
   　　　信号与噪声互作用 $R_{ns}(\tau)\Rightarrow R_{ns}(0)$ 不确定
   a. 作为信号 — 信号检测
   $$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{R_{ss}(0)+R_{ns}(0)+R_{sn}(0)}{R_{nn}(0)}$$
   b. 作为噪声 — 参数测量
   $$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{R_{ss}(0)}{R_{nn}(0)+R_{ns}(0)+R_{sn}(0)}$$