随机信号处理mooc

2021年9月27日 10:55

参考：《随机信号处理-西安电子科技大学-赵国庆》

https://www.bilibili.com/video/BV16s411p7iX

绪论

动态的随机过程-具有明确的时间概念

随机试验

三个特征

- 可重复性：可以在同一条件下多次进行
- 结果的可限定性：确定的结果范围
- 结果的随机性

样本空间

定义：随机试验中华所有可能结果的集合称为样本空间Ω

定义波雷尔实践域F

Ω中若干元素的集合称为F，满足下列性质

- 若A∈F，则¬A∈F，¬A=Ω-A
- Ω∈F
- 若Ai∈F，i=1,2,3…，则∪Ai∈F （可加性）

F的含义：在Ω中讨论是有意义的

概率空间

定义：设X(ω)为Ω中的一个函数，ω∈F，X(ω)=x∈R1（ω可以看成一个事件，x是随机变量），若满足：

- 非负性 P(X)≥0
- 完备性 P(Ω∞)=1
- 可列可加性 P(∪Xi)=ΣP(Xi)，对于任意i,j，Xi∪Xj=∅

  P为概率（测度）

（Ω，F，P）称为概率空间

要从古典模型脱离出来，在数学上进行讨论

随机变量的概念

从随机事件到随机数值

定义：函数X(ω)，ω∈Ω，X(ω)∈R1，X(ω)=x，之后的讨论就可以按照数值去讨论

讨论x，随机变量

- X(ω)=x∈R1中离散数值的集合，称之为离散的随机变量
- x∈R1中某个区间或全部，称之为连续的随机变量，例如噪声

离散随机变量

表格法

$\begin{pmatrix} x_i \\ P(x_i) \end{pmatrix}_{i=1}^{\infty}$

概率密度函数/概率分布

ΣP(xi)=1，P(xi)≥0

连续随机变量

定义：x的分布函数F(x)，概率密度函数f(x)

F(x)=P(X≤x)，X — 随机变量，x — R1中任意实数

F(x1)≤F(x2)，x2≥x1，单调不减

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$ f(x)为X的概率密度函数

$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \geq 0$

-∞为0，∞为1

离散随机变量也有F(x)=ΣP(xi)，xi≤x

引入δ函数

f(x)=ΣP(xi)δ(x-xi)

多维随机变量

x1，x2⋯xn∈R1

多维概率分布

$\Omega = \begin{pmatrix} x_1,x_2\cdots x_n \\ P(x_1=x_1\cdots x_n=x_n) \end{pmatrix} \cdots\cdots$

$F_x(x_1, x_2 \cdots x_n)$ 多维

$\frac{\partial^n F_x(x_1,x_2\cdots x_n)}{\partial x_1,x_2\cdots x_n} = f_x(x_1, x_2 \cdots x_n)$ 多维概率密度函数

若 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 相互独立 $F_x(x_1, x_2 \cdots x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_x(x_i)$

随机变量函数的分布

以随机变量为自变量的函数g(x)称为随机变量函数

条件：已知随机变量x的分布，y=g(x)，y的分布一般是随机变量

$F(y)=P(Y\leq y)=\int_{-\infty}^{y} f_Y(p)dp$

$f_Y(y)$ 概率密度函数

$\int_{-\infty}^{y} f_Y(p)dp = \int_{-\infty}^{x} f_x(q)dq$ 其中$x=g^{-1}(y)$

两侧对y求偏导

$f_Y(y) = f_x(g^{-1}(y)) \left| \frac{\partial g^{-1}(y)}{\partial y} \right|$ 雅可比变换

补充：雅可比变换 https://blog.csdn.net/haoshu1231/article/details/116978706

当$z' = f(z)$且q表示分布函数时：

$$q(\mathbf{z}') = q(\mathbf{z}) \left|\det \frac{\partial f^{-1}}{\partial \mathbf{z}'}\right| = q(\mathbf{z}) \left|\det \frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}\right|^{-1}, \quad (5)$$

这里补充记录下雅克比变换的数学知识。当我们知道x的概率分布时，雅可比变换是一种确定变量y的概率分布的代数方法，其中y是关于x的函数。首先定义：

- 变量x的概率密度函数为$f(x)$，累积分布函数为$F(x)$；
- 变量y的概率密度函数为$f(y)$，累积分布函数为$F(y)$；
- y与x具有函数关系，且呈单调递增

那么我们认为累积分布函数的变化是一致的：

$dF(y) = dF(x)$

从而有：

$|f(y)dy| = |f(x)dx|$

重构之后，可以得到：

$f(y) = \left|\frac{dx}{dy}\right| f(x)$ 其中，$\left|\frac{dx}{dy}\right|$就是神奇的Jacobian(雅克比行列式)

使用雅可比变换求y的分布（正态分布可以利用线性变换性质）

例：

已知x有概率密度函数$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$，-∞ < x < ∞，即标准正态分布N(0,1)，若有y=σx+a，求y的概率分布密度函数

解：

$x=(y-a)/\sigma=g^{-1}(y)$

$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < y < \infty$，即为$N(a,\sigma^2)$

Tips: 求$g^{-1}(y)$时□能否写成x的显函数

随机变量的数字特征

数学期望（均值） E[x]

离散随机变量 $m_x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i P_i \quad P_i = P(x = x_i)$

连续随机变量 $m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx$

E[g(x)] 求均值的算子

性质：

a. E[c]=c
b. $E[kX]=km_x$
c. $E[X+Y]=m_x + m_y$

（2，3满足线性系统，E算子是一个线性算子）

a. 若X与Y独立，E[XY]=E[X]E[Y]

方差和标准差

方差 $D[X]=E[(x-m_x)^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f_x(x)dx$ 离散情况 $\sum_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 P_i$

标准差 $\sqrt{D[X]}$

性质：

a. D[c]=0
b. $D[x]=E[X^2]-(m_x)^2$ $E\left[X^2\right]$ 总功率 D[x]交流功率(起伏功率) $(m_x)^2$ 直流功率
c. D[x]≥0
d. 若X与Y不相关，D[X±Y]=D[X]±D[Y]

协方差和相关函数

$C(X,Y)=E[(x-m_x)(y-m_y)]=\iint_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)\left(y-m_y\right)f_{X,Y}(x,y)dxdy$

a. C(X,Y)=0，X，Y不相关
b. 若X，Y独立，则C(X,Y)=0
   独立肯定不相关，不相关不一定独立
c. C(aX,bY)=abC(X,Y)
d. 若C(X,X)，和方差一样
e. C(X,Y)=C(Y,X) 复随机变量不能随意交换
f. 若C(X,c)，其中c为常数，则C(X,c)=0
g. C(X,Y±Z)=C(X,Y)±C(X,Z)

相关函数 $R(X,Y)=E[XY]=\iint_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy$

$C(X,Y)=R(X,Y)-m_x m_y-m_y m_x+m_x m_y=R(X,Y)-m_x m_y$

所以 $R(X,Y)=C(X,Y)+m_x m_y$

相关函数比协方差函数多了各自直流量的乘积

若R(X,Y)=0，称之为正交

相关系数

对协方差函数进行归一化

$\rho(X,Y)=\frac{C(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$

由于 $|C(X,Y)|\le\sqrt{D(X)D(Y)}$

所以 $|\rho(X,Y)|\le 1$

不相关 $\rho(X,Y)=0$

若$\rho(X,Y)=\pm1$，全相关

C会收到能量大小的影响，ρ值表现两者的关系

随机变量的特征函数

特征函数是一个数学概念，并没有对应的物理意义

复随机变量

定义：若x，y为实随机变量，则z=x+jy为复随机变量

$E[z]=E[x+jy]=\iint_{□}^{□}(x+jy)f(x,y)dxdy=m_x+jm_y=m_z$

$D[z]=E[(z-m_z)^*(z-m_z)]$ 为求模的平方取共轭=D[x]+D[Y]

$C[z_1,z_2]=E[\left(z_1-m_{z_1}\right)^*(z_1-m_{z_1})]$

$R[z_1,z_2]=E[z_1{}^*z_2]$

不相关 $C[z_1,z_2]=0$

正交 $R[z_1,z_2]=0$

独立 若$f(x_1,y_1,x_2,y_2)=f(x_1,y_1)f(x_2,y_2)$ 则z_1,z_2相互独立

随机变量的特征函数

定义：$\varphi_x(\lambda)=E\left[e^{j\lambda x}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\lambda x}f_x(x)dx$

少了一个负号，不用ω，为了和傅里叶变换区分，只是为了利用其数学工具

特征函数的性质

1. $\varphi_x(\lambda)$，若$\lambda=0$，则$\varphi_x(\lambda)=1$
2. 若$\varphi_x(\lambda)$已知，若有$y=ax+b$，$\varphi_y(\lambda)=E\left[e^{j\lambda y}\right]=E\left[e^{j\lambda(ax+b)}\right]=e^{j\lambda b}E\left[e^{j\lambda ax}\right]=e^{j\lambda b}\varphi_x(a\lambda)$
3. 若x,y是独立的随机变量，z=x+y，则$\varphi_z(\lambda)=\varphi_x(\lambda)\varphi_y(\lambda)$
   $E\left[e^{j\lambda z}\right]=E\left[e^{j\lambda(x+y)}\right]=E\left[e^{j\lambda x}\cdot e^{j\lambda y}\right]=\varphi_x(\lambda)\varphi_y(\lambda)$
4. $f_x(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_x(\lambda)\,e^{-j\lambda x}d\lambda$

特征函数与矩函数的关系

矩：对随机变量本身的幂或随机变量减均值以后的幂，求概率平均，称为矩

原点矩：对随机变量本身的幂

中心矩：对随机变量减均值以后的幂

总的幂次称之为矩的阶数

均值：一阶原点矩

方差：二阶中心矩

协方差：两个变量的二阶中心矩

相关系数：二阶原点矩

求x的n阶原点矩 $E[x^n]=\dfrac{\partial^n\varphi_x(\lambda)}{j^n\partial\lambda^n}$

令λ=0 $\frac{\partial^n}{j^n\partial\lambda^n}E\left[e^{j\lambda x}\right]=\frac{1}{j^n}E\left[\frac{\partial^n e^{j\lambda x}}{\partial\lambda^n}\right]=\frac{1}{j^n}E\left[(jx)^n e^{j\lambda x}\right]=E\left[x^n e^{j\lambda x}\right]$ 带入λ=0 =$E[x^n]$

利用求导运算替代了n次积分运算

多维随机变量的特征函数

$\varphi_{x_1\cdots x_n}(\lambda_1\cdots\lambda_n)=E\left[e^{j(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i)}\right]=$ n重积分 $\iint_{-\infty}^{\infty}f(x_1\cdots x_n)\,e^{j(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i)}dx_1\cdots dx_n$

若$x_1\cdots x_n$相互独立 $\varphi_{x_1\cdots x_n}(\lambda_1\cdots\lambda_n)=\prod_{i=1}^n\varphi_{x_i}(\lambda_i)$

推广，求原点矩

记$\sum_{i=1}^{n} i_j$ 为 K

$E[x_1{}^{i_1}\cdots x_n{}^{i_n}]=\frac{\partial^K}{j^K}\frac{[\varphi_{x_1\cdots x_n}(\lambda_1\cdots\lambda_n)]}{\partial x_1{}^{i_1}\cdots x_n{}^{i_n}}$ 令所有的$\lambda_n = 0$

特征函数的目的：便于计算，利用傅里叶中的数学工具，解决之后的问题

切比雪夫不等式与极限定理

切比雪夫不等式

定理：$P(|x-m_x| \geq \varepsilon) \leq \frac{D[x]}{\varepsilon^2}$ ，$\varepsilon \in \forall R1$

证明：

若x为离散随机变量，左边=$\sum_{|x_i-m_x|\geq\varepsilon} P_i = \sum_{(x_i-m_x)^2\geq\varepsilon^2} P_i \leq$

$\sum_{(x_i-m_x)^2\geq\varepsilon^2} P_i\frac{(x_i-m_x)^2}{\varepsilon^2} \leq \sum \quad P_i\frac{(x_i-m_x)^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum \quad P_i(x_i-m_x)^2 = \frac{D[x]}{\varepsilon^2}$

告诉了某个随机变量的取值范围和方差的关系

（如果是连续变量，同理）

中心极限定理

1. 独立同分布$x_1 \cdots x_n$，$y=\sum_{i=1}^{n} x_i$
   的分布，当n足够大的时候，其概率分布趋于正态分布$N(nm, n\sigma^2)$
2. 独立不同分布但有相同的均值方差，n足够大，$y=\sum_{i=1}^{n} x_i$趋于正态分布$N\left(nm, n\sigma^2\right)$
3. 二项分布P，(1-P)，一次实验记为x_i
   可以看成定理1的一个具体应用
   m=P，$E[X^2]$=P，D[x]=P(1-P)
   正态分布为$N(np, np(1-p))$

随机过程的基本概念

定义

1. 设随机试验E具有样本空间S，对S的任意元素e都按照某种规则，确定了一个样本函数x(e,t)，则S中全体元素构成的样本函数族成为随机过程 （每个样本都是时间的函数）
2. 对于任意给定的时间t，都有一个随机变量x(t)与之对应，则x(t)称为随机过程

两个特点：

1. 随着时间随机变化
2. 给定时间为随机变量

（以前没有讨论随机变量和时间的关系，只是单纯数值的概念）

分类

按时域和值域中的类型来划分

离散/连续

a. 离散随机序列 离散时域+离散值域 数字信号处理非常多
b. 连续随机序列 连续+离散

c. 离散随机过程 离散+连续
d. 连续随机过程 连续+连续 之后主要讨论这部分

概率分布

一维概率分布：给定一个时间t x(t)为随机变量，$F_x(x,t) = P(x(t) \le x)$

n维概率分布：在同一个时间过程中抽样了n次 $F_x(x_1 \cdots x_n, t_1 \cdots t_n) = P\left(x(t_1) \le x_1 \cdots x(t_n) \le x_n\right)$

概率密度 一维离散随机过程/序列 $\left(\frac{x_i(t)}{P_i(t)}\right)_i$ （不是分式是上下的两个值）

$f_x(x_1 \cdots x_n, t_1 \cdots t_n) = \frac{\partial^n F(x_1 \cdots x_n, t_1 \cdots t_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$

独立随机过程：白噪声

矩函数

均值：E[x(t)]=$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) f_x(x(t), t) dx(t)$

时间函数 $m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x,t) dx$ 例如：一天内的平均温度，和所取时间有关

方差：$D[x(t)]=E[(x(t)-m_x(t))^2]=E[x(t)^2]-m_x(t)^2=\sigma_t^2(t)$

协方差：$C_x(t_1,t_2) = E[\left(x(t_1) - m_x(t_1)\right)\left(\left(x(t_2) - m_x(t_2)\right)\right] = E\left[x(t_1)x(t_1)\right] - m_x(t_1)m_x(t_2)$

相关函数：$R_x(t_1,t_2) = E\left[x(t_1)x(t_1)\right] = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2\, f_x(x_1,x_2,t_1,t_2) dx_1 dx_2$

将复杂的问题，简化为两个时间之间的关系

特征函数

$\varphi_x(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda x} f_x(x,t) dx = E\left[e^{j\lambda x(t)}\right]$

$\varphi_x\left(\lambda_1 \cdots \lambda_n, t_1 \cdots t_n\right)=E\left[e^{j(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x(t_i)}\right]$

依然没有意义，用于数学计算

特征函数和矩函数的关系同样适用

平稳随机过程

定义和分类

若$F_x(x_1 \cdots x_n, t_1 \cdots t_n) = F_x(x_1 \cdots x_n, t_{1+\varepsilon} \cdots t_{n+\varepsilon})$，对于任意$\varepsilon \in \mathrm{R1}$，任意$n < \infty$，均满足，称x(t)为严格平稳的随机过程/强平稳的随机过程

此时一阶矩函数和时间无关，二阶矩函数和时间的间隔长度有关

广义平稳的随机过程/弱平稳

若，对于$\forall t$，$m_x(t) = m_x$，且$R_x(t_1,t_2) \equiv R_x(t_2,t_1)$，为广义平稳的随机过程

推论：$C_x(t_1,t_2) = R_x(t_1,t_2) - m_x(t_1)m_x(t_2) = R_x(t_1,t_2) - m_x^2 = C_x(t_2,t_1)$

例：

噪声调幅信号 $X(t)=N(t)\cos(\omega t+\varphi)$

其中N(t)为广义平稳的随机过程，ω为常数，$\varphi\in[0,2\pi)$
上均匀分布的随机变量，证明X(t)为平稳随机过程
若φ为常数，不再是广义平稳过程

各态历经过程

定义时间平均算子$< g(x(t)) > = lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}g(x(t))dt$
在一个足够长的时间内，计算均值，即使含有随机过程

定义各态历经过程
若X(t)任意阶的矩都与其时间平均以概率1相等（不相等的概率为0），则称其为各态历经过程
$P(|E[x^n(t)]-<x^n(t)>|\le\varepsilon)=1$，$\forall\varepsilon>0$
广义各态历经
只要求均值，相关函数满足
$E[x(t)]=lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)dt$
$E[x(t_1)x(t_1+\tau)]=lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x(t+\tau)dt$
随机过程范围很大，各态历经说明，只需要取其中一个时间足够长的样本，就可以代表全部

充要条件
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)C_x(\tau)d\tau=0$$
$\lim_{\tau\to\infty}C_x(\tau)=0$ 时间取的足够长，就认为相距τ的两个时间不相关

相关函数性质

1. $R_x(\tau)=R_x(-\tau)$ 相同的间隔时间，结果是相等的
2. $R_x(0)\ge 0$ 总平均功率
3. $|R_x(\tau)|\le R_x(0)$
   证明：$E\left[\left(X(t)-X(t+\tau)\right)^2\right]\ge 0$
   $E\left[X(t)^2+X(t+\tau)^2-2X(t)X(t+\tau)\right]\ge 0$
   $=R_x(0)+R_x(0)-2R_x(x)\ge 0$
   $=2R_x(0)-2R_x(x)\ge 0$
4. $\lim_{\tau\to\infty}R_x(\tau)=m_x^2$ 直流功率
5. 周期平稳的随机过程X(t)
   $R_x(\tau)=R_x(\tau+nT)$，其中n = 1,2,3 ⋯，T为周期
   X(t)=X(t+nT)
6. 非负定性
   $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_x\left(t_j-t_i\right)f(t_i)f\left(t_j\right)\ge 0$$，对于∀f，任意函数，$\forall t_i,\forall t_j\in R1$

相关系数与相关时间

相关系数：$r_x(\tau)=\frac{C_x(\tau)}{C_x(0)}\in[-1,1]$

归一化，去除了绝对能量的影响

相关时间：$\tau_0=\int_0^{\infty}r_x(\tau)d\,\tau$

反映变化的快慢

联合平稳随机过程

这里的联合指的是两个随机变量的关系

联合随机过程的概率分布与矩函数

假设X(t),Y(t)分别为两个实随机过程

则称 $F_{X+Y}(x_1\cdots x_n,t_1\cdots t_n;y_1\cdots y_m,t`_1\cdots t`_m)$
$=P_{X+Y}(X(t_1)\le x_1\cdots X(t_n)\le x_n;Y(t`_1)\le y_1\cdots Y(t`_m)\le y_m)$

为X(t),Y(t)的n+m维的联合概率分布

对连续的X(t),Y(t)，则有联合概率密度函数

$$f_{X+Y}(x_1\cdots x_n,t_1\cdots t_n;y_1\cdots y_m,t`_1\cdots t`_m)$$
$$=\frac{\partial^{n+m}F_{X+Y}(x_1\cdots x_n,t_1\cdots t_n;y_1\cdots y_m,t`_1\cdots t`_m)}{\partial x_1\cdots\partial x_n;\partial y_1\cdots\partial y_m}$$

若为离散$\left(\frac{x_{1i1}\cdots x_{nin},y_{1i`1}\cdots y_{mi`m}}{P(X(t_1)=X_{1i1}\cdots X(t_n)=X_{nin},\ Y(t_1)=Y_{1i1}\cdots Y(t_m)=Y_{mim})}\right)$

矩函数 二阶矩 二阶互相关矩/互相关函数

$$R_{X,Y}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]=\iint_{-\infty}^{\infty}xyf_{x+y}(x,y,t_1,t_2)dxdy$$

互协方差函数

$$C_{X,Y}(t_1,t_2)=E[(X(t_1)-m_x(t_1))(Y(t_2)-m_y(t_1))]=R_{X,Y}(t_1,t_2)-m_x(t_1)m_y(t_1)$$

联合平稳各态历经与矩函数

联合平稳

严格：

$$F_{X+Y}(x_1\cdots x_n,t_1\cdots t_n;y_1\cdots y_m,t`_1\cdots t`_m)$$
$$=F_{X+Y}(x_1\cdots x_n,t_1+\varepsilon\cdots t_n+\varepsilon;y_1\cdots y_m,t`_1+\varepsilon\cdots t`_m+\varepsilon)$$
$\forall n,m<\infty$，$\forall\varepsilon\in R1$

广义的联合平稳：

1. 各自广义平稳
2. 互相关函数或互协方差函数和时间起点无关
   $R_{X-Y}(t_1,t_2)=R_{X-Y}(t_2,t_1)$
   $C_{X,Y}(t_1,t_2)=C_{X,Y}(t_1,t_2)$

各态历经

广义：

1. X(t),Y(t)自身是各态历经的
2. $< X(t_1)Y(t_1+\tau) > = E[X(t_1)Y(t_1+\tau)]$

矩函数（在联合平稳，联合各态历经下）

互相关函数

1. $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$
2. $|R_{XY}(\tau)|^2 \le R_X(0)R_Y(0)$ 柯西不等式

   互相关系数

   $r_{XY}(\tau) = \frac{C_{XY}(\tau)}{\sqrt{C_X(0)C_Y(0)}} \in [-1,1]$

   $|C_{XY}(\tau)|^2 \le C_X(0)C_Y(0)$
3. $\lim_{\tau\to\infty} R_{XY}(\tau) = m_X m_Y$

离散时间随机过程

区别在于，只在规定的时间离散点上取值

为了方便，把时间限定在整数点上 T采样周期

定义

数值连续时间离散的随机过程，也称为离散时间随机过程（连续随机序列）

概率分布

$F_x(x_1 \cdots x_n, K_1 \cdots K_n) = P_x\left(X(K_1) \le x_1 \cdots X(K_n) \le x_n\right)$

$f_x(x_1 \cdots x_n, K_1 \cdots K_n) = \frac{\partial^n F_x(x_1 \cdots x_n, K_1 \cdots K_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$

数字特征

均值：$E[x(t)] = m_x(K)$

方差：$D[x(t)] = \sigma_x^2(K)$

相关函数：$R_X(K_1, K_2)$

协方差函数：$C_X(K_1, K_2)$

相关函数的性质

与连续时间相关函数性质一致，只有时间取样点离散化。

离散时间变换DFT

正态随机过程

一般正态随机过程

定义：若随机过程X(t)的任意n维概率密度函数满足下式

$f_x(x_1 \cdots x_n, t_1 \cdots t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}(X-M)^T C^{-1}(X-M)\right\}$

则称其为正态随机过程

其中，$|C|^{1/2}$为协方差的行列式，$X^T = (x_1 \cdots x_n)$，$M^T = (m_1 \cdots m_n)$

$m_i = E[X(t_i)] = m_x(t_i)$

C为n维方矩阵，协方差矩阵

$C_{ij} = E\left[(X_i - m_i)(X_j - m_j)\right]$

特征函数

$\varphi_x(\lambda_1 \cdots \lambda_n, t_1 \cdots t_n) = E\left[e^{j[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n]}\right]$

$=exp\left\{j\sum_{i=1}^{n}\lambda_i m_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2\lambda_i\lambda_j\right\}$

$\sigma_{ij}^2 = E[(x_i - m_i)(x_j - m_j)]$

（广义）平稳正态随机过程

$M^T = (m \cdots m)$

C协方差矩阵对角线元素$C_{ij} = \sigma^2$，且为对称阵，若将σ^2提取，则各项变为相关系数r_{ij}，若求C的行列式，则提取系数为σ^{2n}

$f_x(x_1 \cdots x_n, t_1 \cdots t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^2|r|^{\frac{1}{2}}}exp\left\{-\frac{1}{2}(X-M)^T C^{-1}(X-M)\right\}$

例：二阶正态随机过程的概率密度展开式

$f_x(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{(1-r^2)}}exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1 - m, x_2 - m)C^{-1}\begin{pmatrix}x_1 - m\\ x_2 - m\end{pmatrix}\right\}$

正态随机过程在通过线性变化之后还是正态随机过程

推论：

$E[x_1x_2x_3x_4] = E[x_1x_2]E[x_3x_4] + E[x_1x_3]E[x_2x_4] + E[x_1x_4]E[x_2x_3]$

如果证明从特征函数推导

<Add_Part>

这里有关平稳随机过程的谱分析缺了两节课，网上搜索进行补充

参考 https://blog.csdn.net/qq_41585683/article/details/112061203

确定性函数

傅里叶变换

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

信号做傅里叶变换需要满足两个条件：满足Dirichlet条件；在时间轴上绝对可积。

- Parseval等式：

$$\int_{-\infty}^{\infty}(f(t))^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega,$$

说明了时域积分与频域积分相等，能量守恒。

- 能量谱密度：

$$S(\omega) = |F(\omega)|^2$$

卷积

时域卷积 □ 频域乘积：

$$\mathscr{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega)F_2(\omega)$$

时域乘积 □ 频域卷积：

$$\mathscr{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

函数的相关函数

$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_2(t+\tau)dt$，称为$f_1(t)$和$f_2(t)$的互相关函数。

$R_{21}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t+\tau)f_2(t)dt$

$R_{12}(\tau)=R_{21}(-\tau)$

注意下标！

能量谱密度

$$R(\tau)\underset{\text{逆傅里叶变换}}{\overset{\text{傅里叶变换}}{\rightleftharpoons}}S(\omega)$$

τ=0时即为Parseval等式。

注意互能量谱的共轭位置：

$$S_{12}(\omega)=\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)$$

平稳随机信号

功率谱密度

假设平稳随机信号在有限时间上取值，在均方意义下计算其傅里叶变换。因为每条样本都可以进行傅里叶变换，所以每个频点的幅值都是一个随机变量。对得到的谱函数计算集平均，并令有限时间趋于无穷大，这就定义了平稳随机信号的功率谱密度。显然功率谱密度是实的且非负。

$$C(\tau)\underset{\text{逆傅里叶变换}}{\overset{\text{傅里叶变换}}{\rightleftharpoons}}P(\omega)$$

$P_{\xi\eta}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}C_{\xi\eta}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$

$C_{\xi\eta}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}P_{\xi\eta}(f)e^{j2\pi f\tau}df$，这里用$f$可以避免忘记乘$\frac{1}{2\pi}$。

为了统一，通常把功率谱密度也写作$S(f)$。

随机输入的线性系统

讨论的是线性、定常、时不变、因果的线性系统，输入是复平稳随机信号，考察输出。

卷积法

输入：$\xi(t)$，系统：$h(t)$

输出：

$\eta(t)=\int_0^t h(t-\tau)\xi(\tau)d\tau$

$E(\eta(t))=\int_0^t h(t-u)\mu_\xi(u)du$

$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}h(t_1-u)\int_0^{t_2}\overline{h(t_2-v)}R_{\xi\xi}(u,v)dudv$

功率谱密度法

输入：$\xi(t), \mu_\xi, R_{\xi\xi}(\tau), S_{\xi\xi}(f)$

系统：$h(t), H(jf)$

输出：

$E(\eta(t)) = \mu_\xi \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)du$

$S_{\eta\eta}(f) = |H(jf)|^2 S_{\xi\xi}(f)$，这里

这里可以看出有个缺点，就是只利用了系统的幅度信息，丢失了相位信息。

再做逆傅里叶变换就能得到输出的自协方差函数。

注意：

如果输入输出信号是联合平稳的，那么输入自相关函数与系统的冲激响应的卷积为输出与输入的互相关函数。如果只考察进入稳态后的系统输出，只要将信号在t=−∞时接入动态系统，那么当t>0时系统就已趋于稳态。

$$R_{\eta\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)R_{\xi\xi}(\tau - u)du$$

$$S_{\eta\xi}(f) = H(jf)S_{\xi\xi}(f)$$

这个时候可以保留相位特征，比较好！

例题

1. 给功率谱密度，让求相关函数和均方差。

   思路：计算傅里叶逆变换的协方差函数，令 τ = 0 \tau=0 τ=0得到均方差。

   注意：协方差函数和相关函数之间还差了个均值函数的平方。

2. 当函数不绝对可积时，给相关函数求功率谱密度。

   其实就是这几个特殊函数的傅立叶变换：

$$\mathscr{F}[\delta(t)] = 1, \mathscr{F}[\delta(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0}$$
$$\mathscr{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$
$$\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\omega), \mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$
$$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$$
$$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$$

3. 求输出的概率密度函数。

   思路：这种一般都是输入是高斯的，经过线性系统还是高斯的，只需要求均值和方差就行。最好这里频域用f，省的忘了2π。

   均值很容易求，方差一般要先求功率谱密度，在进行傅里叶反变换，得到自协方差函数，0时候的取值就是方差。

   在求傅里叶变化和逆变换的时候通常会用到这几个公式：

$$h(t) = e^{-\alpha t}u(t), H(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$
$$h(t) = e^{\alpha t}u(-t), H(j\omega) = \frac{1}{\alpha - j\omega}$$
$$h(t) = e^{-\alpha|t|}, H(j\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$
$$f(t-t_0) = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

4. 有时候也会让求输入和输出之间的关系。
   思路：输入和输出是联合高斯的。求输入输出的互相关就行（跟时间差有关）。
5. 给微分方程，求系统的冲激响应
   思路：冲激函数匹配法
   例如：

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+4e(t)$$

   先解齐次解

$$h(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-5t}$$

   代入冲激函数e(t)=δ(t)解系数

$$\begin{cases}\frac{d^2}{dt^2}h(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+d\Delta u(t)\\ \frac{d}{dt}h(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)\\ h(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)\end{cases}$$

   左右冲激函数匹配解得

   $a=1,b=-1,c=1$

   $h(0_+)=b+h(0_-)=-1;\frac{d}{dt}h(0_+)=c+\frac{d}{dt}h(0_-)=1$

   代入齐次解的式子即可解出$A_1=-\frac{4}{3},A_2=\frac{1}{3}$

   因为$a=1$，所以系统的冲激响应为：

   $h(t)=\delta(t)+(-\frac{4}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-5t})u(t)$

</Add_Part>

平稳随机过程的谱分析

对于一个具体的样本函数，可以进行频域分析；对于随机过程存在无穷多个样本函数，所以引入功率谱密度，利用某个时间段内的傅里叶变换的结果（为一个复数），取模的平方，记为功率谱；模平方可以利用取共轭计算。

对最后计算的结果求平均

平稳信号：不希望最后的结果不是时间的函数

虽然过程是随机的，但是在各个频率的能量分布是稳定的（和时间无关）

如果不平稳，最后的频谱结果仍然是时间函数

功率谱密度和相关函数的关系

维纳—辛钦定理

$G_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$ 有关随机的问题，在求解相关函数时，已经处理掉了

$R_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_x(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$ 从功率谱求解相关函数

具有明确的物理意义，表明一个随机信号的能量分布（频谱仪）

不能称为频谱，因为频谱是对确定信号而言的

功率谱密度的性质

1. $G_x(\omega)=G_x(-\omega)$ 对称性

2. $G_x(\omega) \ge 0$ 根据原始定义可知

联合平稳随机过程的互谱密度

定义：互谱密度

$$G_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_{XY}(\omega)\, e^{j\omega\tau} d\omega$$

例如雷达的发射信号和回波信号

性质：

1. $G_{XY}(\omega) = G_{YX}(-\omega)$
2. 若$G_{XY}(\omega) = a(\omega) + jb(\omega)$

   则：$G_{YX}(\omega)$中 $a(\omega) = a(-\omega)$，$b(\omega) = -b(-\omega)$