随机信号处理mooc

2021年9月27日　　10:55

参考：《随机信号处理-西安电子科技大学-赵国庆》
https://www.bilibili.com/video/BV16s411p7iX
动态的随机过程-具有明确的时间概念

随机试验

三个特征

- 可重复性：可以在同一条件下多次进行
- 结果的可限定性：确定的结果范围
- 结果的随机性

样本空间

定义：随机试验中华所有可能结果的集合称为样本空间Ω

定义波雷尔实践域F

Ω中若干元素的集合称为F，满足下列性质

- 若A∈F，则¬A∈F，¬A=Ω-A
- Ω∈F
- 若Ai∈F，i=1,2,3···，则∪Ai∈F （可加性）

F的含义：在Ω中讨论是有意义的

概率空间

定义：设X(ω)为Ω中的一个函数，ω∈F，X(ω)=x∈R1（ω可以看成一个事件，x是随机变量），若满足：

- 非负性 P(X)≥0
- 完备性 P(Ω∞)=1
- 可列可加性 P(∪Xi)=ΣP(Xi)，对于任意i,j，Xi∪Xj=∅
  P为概率（测度）

（Ω，F，P）称为概率空间

要从古典模型脱离出来，在数学上进行讨论

随机变量的概念

从随机事件到随机数值

定义：函数X(ω)，ω∈Ω，X(ω)∈R1，X(ω)=x，之后的讨论就可以按照数值去讨论

讨论x，随机变量

- X(ω)=x∈R1中离散数值的集合，称之为离散的随机变量
- x∈R1中某个区间或全部，称之为连续的随机变量，例如噪声

离散随机变量

表格法

$\begin{pmatrix} x_i \\ P(x_i) \end{pmatrix}_{i=1}^{\infty}$

概率密度函数/概率分布

ΣP(xi)=1，P(xi)≥0

连续随机变量

定义：x的分布函数F(x)，概率密度函数f(x)

F(x)=P(X≤x)，X — 随机变量，x — R1中任意实数

F(x1)≤F(x2)，x2≥x1，单调不减

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$ f(x)为X的概率密度函数

$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \geq 0$

-∞为0，∞为1

离散随机变量也有F(x)=ΣP(xi)，xi≤x

引入δ函数

f(x)=ΣP(xi)δ(x-xi)

多维随机变量

x1，x2⋯xn∈R1

多维概率分布

$\Omega = \begin{pmatrix} x_1, x_2 \cdots x_n & \cdots\cdots \\ P(x_1 = x_1 \cdots x_n = x_n) & \end{pmatrix}$

$F_x(x_1, x_2 \cdots x_n)$ 多维

$\frac{\partial^n F_x(x_1, x_2 \cdots x_n)}{\partial x_1, x_2 \cdots x_n} = f_x(x_1, x_2 \cdots x_n)$ 多维概率密度函数

若 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 相互独立 $F_x(x_1, x_2 \cdots x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_x(x_i)$

随机变量函数的分布

以随机变量为自变量的函数g(x)称为随机变量函数

条件：已知随机变量x的分布，y=g(x)，y的分布一般是随机变量

$F(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(p)dp$

$f_Y(y)$ 概率密度函数

$\int_{-\infty}^{y} f_Y(p)dp = \int_{-\infty}^{x} f_x(q)dq$ 其中$x = g^{-1}(y)$

两侧对y求偏导

$f_Y(y) = f_x(g^{-1}(y)) \left| \frac{\partial g^{-1}(y)}{\partial y} \right|$ 雅可比变换

补充：雅可比变换 https://blog.csdn.net/haoshu1231/article/details/116978706

当$z' = f(z)$且q表示分布函数时：

$$q(\mathbf{z}') = q(\mathbf{z})\left|\det\frac{\partial f^{-1}}{\partial \mathbf{z}'}\right| = q(\mathbf{z})\left|\det\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}\right|^{-1}, \qquad (5)$$

这里补充记录下雅克比变换的数学知识。当我们知道x的概率分布时，雅可比变换是一种确定变量y的概率分布的代数方法，其中y是关于x的函数。首先定义：

- 变量x的概率密度函数为$f(x)$，累积分布函数为$F(x)$；
- 变量y的概率密度函数为$f(y)$，累积分布函数为$F(y)$；
- y与x具有函数关系，且呈单调递增

那么我们认为累积分布函数的变化是一致的：

$dF(y) = dF(x)$

从而有：

$|f(y)dy| = |f(x)dx|$

重构之后，可以得到：

$f(y) = \left|\frac{dx}{dy}\right| f(x)$ 其中，$\left|\frac{dx}{dy}\right|$就是神奇的Jacobian(雅克比行列式)

使用雅可比变换求y的分布（正态分布可以利用线性变换性质）

例：

已知x有概率密度函数$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$-\infty < x < \infty$，即标准正态分布N(0,1)，若有y=σx+a，求y的概率分布密度函数

解：

$x=(y-a)/\sigma=g^{-1}(y)$

$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty<y<\infty$，即为$N(a,\sigma^2)$

Tips: 求$g^{-1}(y)$时□能否写成x的显函数

随机变量的数字特征

数学期望（均值） E[x]

离散随机变量 $m_x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i P_i \quad P_i = P(x = x_i)$

连续随机变量 $m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx$

E[g(x)] 求均值的算子

性质：

a. E[c]=c
b. $E[kX]=km_x$
c. $E[X+Y]=m_x + m_y$

（2，3满足线性系统，E算子是一个线性算子）

a. 若X与Y独立，E[XY]=E[X]E[Y]

方差和标准差

方差 $D[X]=E[(x-m_x)^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f_x(x)dx$ 离散情况 $\sum_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 P_i$

标准差 $\sqrt{D[X]}$

性质：

a. D[c]=0
b. $D[x]=E[X^2]\text{-}(m_x)^2$ $E\left[X^2\right]$ 总功率 D[x]交流功率(起伏功率) $(m_x)^2$ 直流功率
c. D[x]≥0
d. 若X与Y不相关，D[X±Y]=D[X]±D[Y]

协方差和相关函数

$C(X,Y)=E[(x\text{-}m_x)(y\text{-}m_y)]=\iint_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)\left(y-m_y\right)f_{X,Y}(x,y)dxdy$

a. C(X,Y)=0，X，Y不相关
b. 若X，Y独立，则C(X,Y)=0
   独立肯定不相关，不相关不一定独立
c. C(aX,bY)=abC(X,Y)
d. 若C(X,X)，和方差一样
e. C(X,Y)=C(Y,X) 复随机变量不能随意交换
f. 若C(X,c)，其中c为常数，则C(X,c)=0
g. C(X,Y±Z)=C(X,Y)±C(X,Z)

相关函数 $R(X,Y)=E[XY]=\iint_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy$

$C(X,Y)=R(X,Y)\text{-}m_x m_y - m_y m_x + m_x m_y = R(X,Y)\text{-}m_x m_y$

所以 $R(X,Y)=C(X,Y)+m_x m_y$

相关函数比协方差函数多了各自直流量的乘积

若R(X,Y)=0，称之为正交

相关系数

对协方差函数进行归一化

$\rho(X,Y)=\frac{C(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$

由于 $|C(X,Y)|\le\sqrt{D(X)D(Y)}$

所以 $|\rho(X,Y)|\le 1$

不相关 $\rho(X,Y)=0$

若 $\rho(X,Y)=\pm 1$，全相关

C会收到能量大小的影响，ρ值表现两者的关系

随机变量的特征函数

特征函数是一个数学概念，并没有对应的物理意义

复随机变量

定义：若x，y为实随机变量，则z=x+jy为复随机变量

E[z]=E[x+jy]=$\iint_{□}^{□}(x+jy)f(x,y)dxdy = m_x + jm_y = m_z$

D[z]=E[$(z-m_z)^*(z-m_z)$] 为求模的平方取共轭=D[x]+D[Y]

$C[z_1,z_2] = E[\left(z_1 - m_{z_1}\right)^*(z_1 - m_{z_1})]$

$R[z_1,z_2] = E[z_1{}^*z_2]$

不相关 $C[z_1,z_2] = 0$

正交 $R[z_1,z_2] = 0$

独立 若$f(x_1,y_1,x_2,y_2)$=$f(x_1,y_1)f(x_2,y_2)$ 则z_1,z_2相互独立

随机变量的特征函数

定义：$\varphi_x(\lambda) = E\left[e^{j\lambda x}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda x} f_x(x)dx$

少了一个负号，不用ω，为了和傅里叶变换区分，只是为了利用其数学工具

特征函数的性质

1. $\varphi_x(\lambda)$，若$\lambda = 0$，则$\varphi_x(\lambda) = 1$
2. 若$\varphi_x(\lambda)$已知，若有$y = ax + b$，$\varphi_y(\lambda) = E\left[e^{j\lambda y}\right] = E\left[e^{j\lambda(ax+b)}\right] = e^{j\lambda b}E\left[e^{j\lambda ax}\right] = e^{j\lambda b}\varphi_x(a\lambda)$
3. 若x,y是独立的随机变量，z=x+y，则$\varphi_z(\lambda)$=$\varphi_x(\lambda)\varphi_y(\lambda)$
   $E\left[e^{j\lambda z}\right] = E\left[e^{j\lambda(x+y)}\right] = E\left[e^{j\lambda x}\cdot e^{j\lambda y}\right] = \varphi_x(\lambda)\varphi_y(\lambda)$
4. $f_x(x) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_x(\lambda)\, e^{-j\lambda x}d\lambda$

特征函数与矩函数的关系

矩：对随机变量本身的幂或随机变量减均值以后的幂，求概率平均，称为矩

原点矩：对随机变量本身的幂

中心矩：对随机变量减均值以后的幂

总的幂次称之为矩的阶数

均值：一阶原点矩

方差：二阶中心矩

协方差：两个变量的二阶中心矩

相关系数：二阶原点矩

求x的n阶原点矩 $E[x^n] = \dfrac{\partial^n \varphi_x(\lambda)}{j^n\,\partial\lambda^n}$

令λ=0 $\frac{\partial^n}{j^n\,\partial\lambda^n}\ E\left[e^{j\lambda x}\right] = \frac{1}{j^n}E\left[\frac{\partial^n e^{j\lambda x}}{\partial\lambda^n}\right] = \frac{1}{j^n}E\left[(jx)^n e^{j\lambda x}\right] = E\left[x^n e^{j\lambda x}\right]$ 带入λ=0 =E[x^n]

利用求导运算替代了n次积分运算

多维随机变量的特征函数

$\varphi_{x_1\cdots x_n}(\lambda_1\cdots\lambda_n)$=$E\left[e^{j(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)}\right]$ = n重积分 $\iint_{-\infty}^{\infty} f(x_1\cdots x_n)\, e^{j(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)}dx_1\cdots dx_n$

若$x_1\cdots x_n$相互独立 $\varphi_{x_1\cdots x_n}(\lambda_1\cdots\lambda_n) = \prod_{i=1}^{n}\varphi_{x_i}(\lambda_i)$

推广，求原点矩

记$\sum_{i=1}^{n} i_j$ 为 K

$E[x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}]=\frac{\partial^K}{j^K}\frac{[\varphi_{x_1 \cdots x_n}(\lambda_1 \cdots \lambda_n)]}{\partial x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}}$ 令所有的$\lambda_n = 0$

特征函数的目的：便于计算，利用傅里叶中的数学工具，解决之后的问题

切比雪夫不等式与极限定理

切比雪夫不等式

定理：$P(|x - m_x| \geq \varepsilon) \leq \frac{D[x]}{\varepsilon^2}$ ，$\varepsilon \in \forall R1$

证明：

若x为离散随机变量，左边=$\sum_{|x_i-m_x|\geq\varepsilon} P_i = \sum_{(x_i-m_x)^2\geq\varepsilon^2} P_i \leq$

$\sum_{(x_i-m_x)^2\geq\varepsilon^2} P_i \frac{(x_i-m_x)^2}{\varepsilon^2} \leq \sum \quad P_i \frac{(x_i-m_x)^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum \quad P_i (x_i-m_x)^2 = \frac{D[x]}{\varepsilon^2}$

告诉了某个随机变量的取值范围和方差的关系

（如果是连续变量，同理）

中心极限定理

1. 独立同分布$x_1 \cdots x_n$，$y = \sum_{i=1}^{n} x_i$
   的分布，当n足够大的时候，其概率分布趋于正态分布$N(nm, n\sigma^2)$
2. 独立不同分布但有相同的均值方差，n足够大，$y = \sum_{i=1}^{n} x_i$趋于正态分布$N\left(nm, n\sigma^2\right)$
3. 二项分布P，(1-P)，一次实验记为x_i
   可以看成定理1的一个具体应用
   m=P，$E[X^2]$=P，D[x]=P(1-P)
   正态分布为$N(np, np(1-p))$

Chapter One 随机过程

随机过程的基本概念

定义

1. 设随机试验E具有样本空间S，对S的任意元素e都按照某种规则，确定了一个样本函数x(e,t)，则S中全体元素构成的样本函数族成为随机过程 （每个样本都是时间的函数）
2. 对于任意给定的时间t，都有一个随机变量x(t)与之对应，则x(t)称为随机过程

两个特点：

1. 随着时间随机变化
2. 给定时间为随机变量

（以前没有讨论随机变量和时间的关系，只是单纯数值的概念）

分类

按时域和值域中的类型来划分

离散/连续

a. 离散随机序列 离散时域+离散值域 数字信号处理非常多
b. 连续随机序列 连续+离散
c. 离散随机过程 离散+连续
d. 连续随机过程 连续+连续 之后主要讨论这部分

概率分布

一维概率分布：给定一个时间t x(t)为随机变量，$F_x(x,t)=P(x(t)\ \le x)$

n维概率分布：在同一个时间过程中抽样了n次 $F_x(x_1\cdots x_n,t_1\cdots t_n)=P(x(t_1)\le x_1\cdots x(t_n)\le x_n)$

概率密度 一维离散随机过程/序列 $\begin{pmatrix}\frac{x_i(t)}{P_i(t)}\end{pmatrix}_i$ （不是分式是上下的两个值）

$f_x(x_1\cdots x_n,t_1\cdots t_n)=\frac{\partial^n F(x_1\cdots x_n,t_1\cdots t_n)}{\partial x_1\cdots\partial x_n}$

独立随机过程：白噪声

矩函数

均值：E[x(t)]=$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)f_x(x(t),t)dx(t)$

时间函数 m$_x(t)\ =\int_{-\infty}^{\infty}xf_x(x,t)dx$ 例如：一天内的平均温度，和所取时间有关

方差：D[x(t)]=E[(x(t) − m$_x$(t))^2]=E[x(t)^2] − m$_x(t)^2=\sigma_t^2(t)$

协方差：$C_x(t_1,t_2)=E[\left(x(t_1)-m_x(t_1)\right)\left(\left(x(t_2)-m_x(t_2)\right)\right]=E[x(t_1)x(t_1)]-m_x(t_1)m_x(t_2)$

相关函数：$R_x(t_1,t_2)=E[x(t_1)x(t_1)]=\iint_{-\infty}^{\infty}x_1x_2\,f_x(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2$

将复杂的问题，简化为两个时间之间的关系

特征函数

$\varphi_x(\lambda,t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\lambda x}f_x(x,t)dx=E\left[e^{j\lambda x(t)}\right]$

$\varphi_x\left(\lambda_1\cdots\lambda_n,t_1\cdots t_n\right)$=$E\left[e^{j(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x(t_i)}\right]$

依然没有意义，用于数学计算

特征函数和矩函数的关系同样适用

平稳随机过程

定义和分类

若$F_x(x_1\cdots x_n,t_1\cdots t_n)=F_x(x_1\cdots x_n,t_{1+\varepsilon}\cdots t_{n+\varepsilon})$，对于任意$\varepsilon\in$ R1，任意n < ∞，均满足，称x(t)为严格平稳的随机过程/强平稳的随机过程

此时一阶矩函数和时间无关，二阶矩函数和时间的间隔长度有关

广义平稳的随机过程/弱平稳

若，对于$\forall t$，$m_x(t)=m_x$，且$R_x(t_1,t_2)\equiv R_x(t_2,t_1)$，为广义平稳的随机过程

推论：$C_x(t_1,t_2)=R_x(t_1,t_2)-m_x(t_1)m_x(t_2)=R_x(t_1,t_2)-m_x^2=C_x(t_2,t_1)$

例：

噪声调幅信号 $X(t)=N(t)\cos(\omega t+\varphi)$

其中N(t)为广义平稳的随机过程，ω为常数，$\varphi\in[0,2\pi)$

上均匀分布的随机变量，证明X(t)为平稳随机过程

若φ为常数，不再是广义平稳过程

各态历经过程

定义时间平均算子$<g(x(t))>=lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}g(x(t))dt$

在一个足够长的时间内，计算均值，即使含有随机过程

定义各态历经过程

若X(t)任意阶的矩都与其时间平均以概率1相等（不相等的概率为0），则称其为各态历经过程

$P(|E[x^n(t)]-<x^n(t)>|\le\varepsilon)=1$，$\forall\varepsilon>0$

广义各态历经

只要求均值，相关函数满足

$E[x(t)]=lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)dt$

$E[x(t_1)x(t_1+\tau)]=lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x(t+\tau)dt$

随机过程范围很大，各态历经说明，只需要取其中一个时间足够长的样本，就可以代表全部

相关函数性质

相关系数与相关时间