新东方在线考研

2016 新东方在线考研数学(一)强化课程配套讲义

授课教师：张宇

欢迎使用新东方在线电子教材

目录

第二讲：一元函数微积分学

2.方程根

1) 存在性：零点定理 $f(a)\cdot f(b)<0,\Rightarrow \xi\ (\ =)$

2) 唯一性：$\begin{cases} \text{单调性}\begin{cases} f'(x)>0,\Rightarrow f(x)\nearrow \\ f'(x)<0,\Rightarrow f(x)\searrow \end{cases} \\ \text{罗尔原话：若}f^{n}(x)=0\text{至多}k\text{个根，则}f^{(n-1)}(x)=0\text{至多}k+1\text{个根} \end{cases}$

例 3：证明 $\ln x-e^{x}+\int_{0}^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=0$ 有且仅有两个根。

3.不等式

本质：利用导数研究单调性的问题

例 4 设 $f(x), g(x)$ 在 $\left[a, b\right]$ 上连续，且 $f(x)\nearrow, 0 \le g(x) \le 1$，证明：

（I）$0 \le \int_a^x g(t)dt \le x-a, x \in \left[a, b\right]$;

（II）$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx$.

应用：

1、物理应用(理工类同学)

①$\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ②静水压力 ③抽水做功 ④质点引力

2、经济应用(经管类同学)

①边际成本 ②弹性 ③积分

各位同学，上述两部分请同学自行按照老师讲的区分，物理应用数一数二同学看即可，经济应用数三同学看。这部分内容老师没讲知识性内容，所以就没给大家区分数一数二数三。

第三讲：多元函数微分学

1、概念

2、计算——微分法

3、应用——极值与最值

一、概念

1、极限的存在性

第一种定义：设二元函数 $f(p)=f(x,y)$ 的定义域为 $D, P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点。如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当点 $P(x,y)\in D\bigcap \overset{0}{U}(P_0,\delta)$ 时，都有

$$\left|f(P)-A\right|=\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon$$

成立，那么就称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{或} f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0))$$

以上是按集合论知识（以点集趋向方式）定义多元极限，通俗来说，只要 (x,y) 是有定义的，且满足 $\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$，这里自然排出了 (x_0,y_0) 邻域内的无定义点，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\dfrac{1}{2}$。

第二种定义：若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的去心邻域内有定义，且 (x,y) 以任意方式趋向于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)\to A$，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$。

故，由于 $\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$ 在实轴虚轴无定义，于是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$ 不存在。

【注】除洛必达法则、单调有界准则、穷举法可照搬一元函数求极限的方法。如

①等价无穷小替换　　②无穷小乘以有界=无穷小　　③夹逼准则

例题 1： $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$

例题 2：求 $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ y\to\frac{1}{2}}}\dfrac{\tan(x^2+2xy+y^2-1)}{x+y-1}$

例题 3：求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

例题 4：求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}$

例题 5：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$

此外，关于累次极限，要与上边讲到的极限区分开来（变量的趋向是有先后顺序的）：

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

例题：已知 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x},(x,y)\neq(0,0)$，分别求

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$。

2、连续性

定义： 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续。

【注】：若上式不相等，则称 $f(x,y)$ 不连续（间断），但多元函数不讨论间断类型。

3、偏导数的存在性

定义：

$$f_x^{'}(x_0,y_0)\triangleq\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$f_y^{'}(x_0,y_0)\triangleq\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

例题：设 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^6}}$，求 $f_x^{'}(0,0)$， $f_y^{'}(0,0)$

4、可微性 $z=f(x,y)$

判断可微性的步骤：

①全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$；

②线性增量 $A\Delta x+B\Delta y$，其中 $A=f_x^{'}(x_0,y_0)$，$B=f_y^{'}(x_0,y_0)$；

③ $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0,\Rightarrow$ 可微.

【注】$\Rightarrow \Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$，即

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-(A\Delta x+B\Delta y)=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}) \quad ①$$

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)-(A(x-x_0)+B(y-y_0))=o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}) \quad ②$$

全微分： 定义法： $dz\Big|_{(x_0,y_0)}=f_x^{'}(x_0,y_0)dx+f_y^{'}(x_0,y_0)dy$ ③

公式法： $dz=f_x^{'}(x,y)dx+f_y^{'}(x,y)dy=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ ④

例题：设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0,$$

求 $dz\Big|_{(0,1)}=f_x^{'}(0,1)dx+f_y^{'}(0,1)dy$.

5、偏导数的连续性

设 $z = f(x, y)$，

① 用定义求 $f_x^{'}(x_0, y_0)$， $f_y^{'}(x_0, y_0)$；

② 用公式求 $f_x^{'}(x, y)$， $f_y^{'}(x, y)$；

③ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_x^{'}(x, y) ?= f_x^{'}(x_0, y_0)$ 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_y^{'}(x, y) ?= f_y^{'}(x_0, y_0)$，若同时成立，函数在$(x_0, y_0)$处偏导数是连续的。

逻辑关系：

$$5 \Rightarrow 4 \begin{cases} \Rightarrow 2 \Rightarrow 1 \\ \Rightarrow 3 \end{cases}$$

二、计算（多元微分法）

1、链式求导规则

$$z = f(u, v, w), u = u(y), v = v(x, y), w = w(x)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx}$$

2、无论 z 对谁求导，也无论 z 已经求了几阶导，求导后的新函数任然具有与原函数完全相同的复合结构.

3、注意书写规范

例题 1：设 $z = f(e^x \cos y, x^2 + y^2)$，其中 f 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

例题 2　　已知函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，

$$f(1,1)=2,\ f_1'(1,1)=0,\ f_2'(1,1)=0,\ z=f(x+y,f(x,y))，求 \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$$

三、应用——极值与最值

1、理论依据　$z=f(x,y)$

① 函数取极值的必要条件

设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处，一阶偏导数存在且取极值，则 $f_x'(x_0,y_0)=0$，$f_y'(x_0,y_0)=0$。

【注】　1）适用于三元及以上

2）非充分条件

$$极值点\begin{cases}1)\ 在驻点中找\\2)\ 在不可偏导点找\end{cases}$$

② 函数取极值的充分条件

记$\begin{cases} f''_{xx}(x_0,y_0)=A \\ f''_{xy}(x_0,y_0)=B \\ f''_{yy}(x_0,y_0)=C \end{cases}$， 则$\Delta=B^2-AC\begin{cases} <0\begin{cases} A<0\Rightarrow \text{极大} \\ A>0\Rightarrow \text{极小} \end{cases} \\ >0\Rightarrow \text{不是极值点} \\ =0\Rightarrow \text{失效} \end{cases}$ （Δ=0 时用定义法）

【注】此方法不适用于三元及以上

③条件极值与拉格朗日乘数法

问题提法：求目标函数$u=f(x,y,z)$在约束条件$\begin{cases} \varphi(x,y,z)=0 \\ \psi(x,y,z)=0 \end{cases}$下的极值，则

1）构造辅助函数

$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$，其中$x,y,z,\lambda,\upsilon$为五个独立变量。

2）得：$\begin{cases} F'_x=0 \\ F'_y=0 \\ F'_z=0 \\ F'_\lambda=0 \\ F'_\mu=0 \end{cases}$，

3）解上述方程组$\Rightarrow P(x_i,y_i,z_i),(i=1,2,\cdots)$，根据实际情况，必存在最值，所得即所求。

2、例题分析

例题 1：设$f(x,y)=kx^2+2kxy+y^2$在点$(0,0)$处取得极小值，求k的取值范围。

例题 2：求$u=\sqrt{(1+x)^2+(1+y)^2}$在约束条件$x^2+y^2+xy=3$下的最大值。

【注】总的来说，解无定法，观察得之。

观察的方法：①变量的对称性法（如 $x=y,x=-y$）

②特殊取值试探法（如令 $\lambda=0$）

③将 $F_x^{'}=0,F_y^{'}=0$ 中的 λ 消去，得 x,y 的关系，带入 $F_\lambda^{'}=0$ 中

例题 3：求 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值与最小值

第四讲：二重积分

综述：

一、概念与性质

二、计算结构（基础题和技术题）

基础题：直角系、极系

技术题：换序、对称性、形心公式的逆用

三、综合题

一、概念与性质

1、概念比较

定积分：若$\int_a^b f(x)dx$中$dx>0$，则$\int_b^a f(x)dx$中$dx<0$

二重积分：$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$中$d\sigma$严格大于 0

2、对称性$d\sigma>0$

1）普通对称性

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma & f(x,y)=f(-x,y)\\ 0 & f(x,y)=-f(-x,y)\end{cases}$$

例题：设D由$y=x^3,y=1,x=-1$围成，则$I=\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)d\sigma=(\ )$。

A. 0　　B. $2\iint\limits_{D_1} xyd\sigma$　　C. $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin yd\sigma$　　D. $2\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)d\sigma$

其中，D_1为D在第一象限的部分.

2）轮换对称性

① $\iint\limits_{D_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\le 1}(2x^2+3y^2)dxdy ?= \iint\limits_{D_2:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}\le 1}(2y^2+3x^2)dydx$ 答案是相等的。

② $\iint\limits_{D:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\le 1}(2x^2+3y^2)dxdy ?= \iint\limits_{D:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{4}\le 1}(2y^2+3x^2)dydx$ 答案是相等的。

定义：若将 D 中的 $x \leftrightarrow y \Rightarrow$ 发现 D 不变，$\Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(y,x)dxdy$，叫轮换对称性。

例题：$I=\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma$，$D=\left\{(x,y)\middle| \begin{array}{l} x^2+y^2\le 1 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{array}\right\}$

自练：计算 $I=\iint\limits_D \sin(x^3+y^3)d\sigma$，$D=\{(x,y)|\ |x|+|y|\le 1\}$

二、计算

1、 基础题

1）直角坐标系：

$$I=\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \\ \int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\end{cases}$$ （下限<上限）

2）极坐标系：$d\sigma=dr\cdot rd\theta$，$\begin{cases}x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta\end{cases}$

$$I=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

2、技术题

3）换序

例题 1： 交换积分次序$\int_{-1}^0 dy\int_2^{1-y} f(x,y)dx=$____.

例：$\int_0^{2\pi} dx\int_0^{\sin x} f(x,y)dy=$______.

例题 2：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{1+\cos\theta}^{2} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr =$_____.

4）对称性（见前边）

5）形心公式的逆用

若 D 为规则图形，$\Rightarrow \begin{cases} \iint\limits_D x d\sigma = \bar{x} S_D \\ \iint\limits_D y d\sigma = \bar{y} S_D \end{cases}$

例题：计算 $I = \iint\limits_D (x+y) d\sigma$，其中 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le x + y + 1\}$。

三、综合题分析

例题 1：计算 $I = \iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y} d\sigma$， $D = \{(x,y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$.

例题 2：计算 $I=\iint\limits_{D} r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$，$D=\left\{(r,\theta)\middle|\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4},0\le r\le\sec\theta\right\}$。

提示：点火公式：

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9 xdx=\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 xdx=\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

第五讲：微分方程

综述：　1、概念及其应用

2、一阶方程的求解

3、高阶方程的求解

一、概念及其应用

1、 $F(x,y,y^{'},y^{''},\cdots y^{(n)})=0$

2、阶数——方程中 y 的最高阶导数的阶数。

3、通解——解中所含独立常数的个数=方程阶数。

例题 1：设 $y=y(x)$ 为 $y^{''}-2y^{'}+4y=0$ 的满足 $y(x_0)>0,y^{'}(x_0)=0$ 的解，则 $f(x)$ 在 x_0 处_____.

【注】若把上述条件换成 $y^{(4)}-2y^{'''}-5y^{''}-2y^{'}+e^{\cos x}=0$，$y^{'}(x_0)=y^{''}(x_0)=y^{'''}(x_0)=0$

例题 2：设 $p(x)$ 与 $q(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$q(x)<0$，且设 $y=y(x)$ 为方程

$y^{''}+p(x)y^{'}+q(x)y=0$ 满足 $y(a)=y(b)=0$ 的解，

求 $y(x)$ 的表达式，$\forall x\in[a,b]$.

二、一阶方程的求解

1、变量可分离型

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=g(x)h(y)\Rightarrow\int\frac{dy}{h(y)}=\int g(x)dx+C$$

例题：求 $y^{'}+y^2\tan x=\tan x$ 的通解。

【注】① $\ln *$，* 不知正负，积分出来一定要加绝对值号，

② $y=1, y=-1$ 也是解 $\Rightarrow$ 丢解但不丢分。

在非线性系统中，通解不等于全部解。$y=1, y=-1$ 是奇解。

在线性系统中，通解一定是全部解。

2、齐次型 $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$

通过变量替换，令 $u=\frac{y}{x} \Rightarrow y=u\cdot x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot x+u\cdot 1 \Rightarrow \frac{du}{dx}\cdot x+u=f(u)$，就化为变量可分离型了。

例题：求 $ydx-(x+\sqrt{x^2+y^2})dy=0,(y>0)$ 的通解.

3、一阶线性型

$a(x)y'+b(x)y=c(x), a(x)\neq 0$ 转化为 $y'+p(x)y=q(x), p(x), q(x)$ 已知

$$\Rightarrow e^{\int pdx}\cdot y^{'}+e^{\int pdx}\cdot p\cdot y=e^{\int pdx}\cdot q$$

$$\Rightarrow (y\cdot e^{\int pdx})^{'}=e^{\int pdx}\cdot q$$

$$\Rightarrow y\cdot e^{\int pdx}=\int e^{\int pdx}\cdot qdx+c$$

$$\Rightarrow y=e^{-\int pdx}[\int e^{\int pdx}\cdot qdx+c]$$

例题：求 $y^{'}=\dfrac{y}{2x}+\dfrac{x^2}{2y}$ 的通解.

【注】尚有两种类型的方程，貌似二阶，实可降阶。

① $y^{''}=f(x,y^{'})$ 型

令 $y^{'}=p\Rightarrow y^{''}=p^{'}\Rightarrow p^{'}=f(x,p)$

② $y^{''}=f(y,y^{'})$ 型

令 $y^{'}=p\Rightarrow y^{''}=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}\Rightarrow\dfrac{dp}{dx}p=f(y,p)$

三、高阶方程的求解

1、齐次的：$y^{''}+py^{'}+qy=0$　　p,q 为常数

①写特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0\Rightarrow\lambda_1,\lambda_2$

1）若 $\Delta>0\Rightarrow\lambda_1\neq\lambda_2$，得通解 $y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}$

2）若 $\Delta=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，此时得通解 $y=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}=(c_1+c_2x)e^{\lambda x}$

3）若 $\Delta<0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta_i$，得通解 $y=(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)e^{\alpha x}$。

例题：设 $\cos x$ 与 xe^x 为 4 阶常系数线性齐次微分方程的两个解，则首项系数为 1 的该方程为______.

2、非齐次的：非齐次的通解=齐次的通解+非齐次的特解 y^*

1）$y^{''}+py^{'}+qy=e^{\alpha x}\cdot\rho_m(x)$　　　　$y^{''}-4y=e^x(2x+3)$

设　$y^*=e^{\alpha x}Q_m(x)\cdot x^k$　　　　设 $y^*=e^x(Ax+B)\cdot x^0$

一看：自由项中的 α　　　　一看：$\alpha=1$

二算：$\lambda^2+p\lambda+q=0\Rightarrow\lambda_1,\lambda_2$　　　　二算：$\lambda^2-4=0\Rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=-2$

三比：$k=\begin{cases}0 & \alpha\neq\lambda_1,\alpha\neq\lambda_2\\ 1 & \alpha=\lambda_1 or \alpha=\lambda_2\\ 2 & \alpha=\lambda_1=\lambda_2\end{cases}$　　　　三比：$k=0$

2）$y^{''}+py^{'}+qy=e^{\alpha x}[\rho_m(x)\cos\beta x+\rho_n(x)\sin\beta x]$　　　　$y^{''}+4y=2\cos 2x$

设 $y^*=e^{\alpha x}[Q_l^1(x)\cos\beta x+Q_l^2(x)\sin\beta x]\cdot x^k$　　　　设 $y^*=e^{0x}[A\cdot\cos 2x+B\sin 2x]\cdot x^1$

一看：自由项中$\alpha,\beta \Rightarrow \alpha \pm \beta i$　　一看：$0 \pm 2i$

二看：$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$　　二看：$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i$

三比：$k = \begin{cases} 0 & \lambda_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i \\ 1 & \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \end{cases}$　　三比：$k = 1$

【注】 $l = \max\{m, n\}$

第六讲：无穷级数

综述： 1、数项级数的判敛

2、幂级数的收敛域

3、展开与求和

引言

1、概念（本质）

无穷级数：$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots u_n + \cdots$，其中$S_n = u_1 + u_2 + \cdots u_n$

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，反之不成立.

2、分类

常数项级数：① $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ （$u_n \geq 0$）　　正项级数

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ （$u_n > 0$）　　交错级数

③ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ （u_n无符号限制） 任意项级数

函数项级数：④ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 幂级数

一、数项级数的判敛

1、正项级数$(\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geq 0)$的判敛

①收敛原则（考抽象）

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 有上界

例题 设$a_n > 0, (n = 1, 2, \cdots)$，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n$，

则数列$\{S_n\}$有界和数列$\{a_n\}$收敛有什么关系?

②比较判别法

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数，且$u_n \le v_n$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n 收 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n 收$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n 发 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n 发$$

③比较判别法的极限形式（大题）

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} \overset{\frac{0}{0}}{=} \begin{cases} 0 \Rightarrow u_n 小 \Rightarrow \begin{cases} \sum v_n 收 \Rightarrow \sum u_n 收 \\ \sum u_n 发 \Rightarrow \sum v_n 发 \end{cases} \\ \infty \Rightarrow v_n 小 \Rightarrow \begin{cases} \sum u_n 收 \Rightarrow \sum v_n 发 \\ \sum v_n 发 \Rightarrow \sum u_n 发 \end{cases} \\ A \ne 0 \Rightarrow u_n, v_n 同敛散 \end{cases}$$

④比值判别法（达朗贝尔判别法）

设$\sum u_n$ 为正项级数，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \begin{cases} < 1 \Rightarrow 收 \\ > 1 \Rightarrow 发 \\ = 1 \Rightarrow 失效 \end{cases}$$ 失效的转用比较法。

⑤根植判别法（柯西判别法）

设$\sum u_n$ 为正项级数，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho\begin{cases}<1 & \Rightarrow \quad 收\\ >1 & \Rightarrow \quad 发\\ =1 & \Rightarrow \quad 失效\end{cases}$$ 失效的转用比较法。

例题 1：判别下列级数的敛散性

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})]$

例题 2：判别 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$ 在 $x=2,3$ 处的敛散性.

例题 3：设 $\{a_n\},\{b_n\},0<a_n<\frac{\pi}{2},0<b_n<\frac{\pi}{2},\cos a_n-a_n=\cos b_n$，

且 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛. 证明：

（I） $\lim_{n\to\infty}a_n=0$；

（II）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$收敛.

2、交错级数（$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \quad (u_n > 0)$）的判敛

①莱布尼茨判别法

若$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \quad (u_n > 0)$满足：

1）$\lim_{n\to\infty}u_n = 0$，

2）$u_n \geq u_{n+1}$

$\Rightarrow$级数收敛

②例子

例题 1：判别$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$的敛散性.

例题 2：判别$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$的敛散性.

3、任意项级数（$\sum_{n=1}^{\infty}u_n, u_n$无符号限制）的判敛

1）思路上：$\sum u_n \to \sum |u_n|$

2）理论上：若$\sum |u_n|$收敛$\Rightarrow \sum u_n$绝对收敛

若$\sum |u_n|$发散但$\sum u_n$收敛$\Rightarrow \sum u_n$条件收敛

例题 1：判断$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$是绝对收敛还是条件收敛.

例题 2 ：设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$收敛，判别$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |a_n|}{\sqrt{n^2+\alpha}}$的敛散性($\alpha > 0$)

二、幂级数的收敛域

1、幂级数

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \end{cases}$$

1）具体到$x = x_0$，代入$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0{}^n \Rightarrow$判敛

若收敛，称x_0为收敛点；若发散，称x_0为发散点。

2）目标：找到所有的收敛点的集合$\Rightarrow$收敛域

2 阿贝尔定理

3、求收敛域的程序（统一）

①$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)| \geq 0$

②用比值判别法：$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \rho(x) < 1$

用根值判别法：$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \rho(x) < 1$

$\Rightarrow$收敛区间I_x

③单独讨论 I_x 的两个端点 $a, b \Rightarrow$ 收敛域

例题：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域为_____.

三、展开与求和

1、展开

$$\text{标准：}\ y(x)=\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n\end{cases}$$

例题 1：将 $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-2}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

例题 2：将 $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数。

2、求和 $\sum a_n x^n = y(x)$

例题 1：求 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n, |x|<1.$

例题 2：求 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}, |x|<1.$

第七讲：傅里叶级数

综述：1、狄氏收敛性定理

2、函数展开成傅氏级数

一、狄氏收敛性定理

设 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期，在 $[-l,l]$ 上满足：

①连续或只有有限个第一类间断点

②只有有限个极值点

则 $f(x)$ 的傅里叶级数 $s(x)$ 在 $[-l,l]$ 上处处收敛，且

$$S(x)=\begin{cases} f(x) \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \\ \dfrac{f(l-0)+f(-l+0)}{2} \end{cases}$$

其中，第一种情况中的 x 为连续点，第二种情况中的 x 为间断点，第三种情况中的 l 为端点

例题：设 $f(x)=\begin{cases} x+1 & -1\le x\le 0 \\ x-1 & 0<x\le 1 \end{cases}$ 的周期为 2 的傅里叶级数为 $S(x)$，

则在 $x=-\dfrac{1}{2},x=0,x=1,x=\dfrac{3}{2}$ 处 $S(x)$ 分别收敛于____，_____，_____，______.

二、周期为 $2l$ 的函数的傅里叶展开

$$f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l})$$

①在 $[-l,l]$ 上 $f(x)$ 的展开，$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx \\ a_n = \dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx \\ b_n = \dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx \end{cases}$

② $f(x)$ 是奇/偶时在 $[-l,l]$ 上的展开，

1）奇函数时，$a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx$

2）偶函数时，$a_0 = \dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, a_n = \dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx, b_n = 0$

③在 $[0,l]$ 上 $f(x)$ 展开成正弦或余弦级数

1）作奇延拓，将 $f(x)$ 延拓为奇函数，可展成正弦级数

2）作偶延拓，将 $f(x)$ 延拓为偶函数，可展成余弦级数

例题 1　设 $f(x) = \left|x - \dfrac{1}{2}\right|, b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx, n = 1, 2, \cdots$

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$，则求 $S(-\dfrac{9}{4})$.

例题 2　将 $f(x)=1-x^2, 0\le x\le \pi$ 展开成余弦级数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

第八讲：多元函数积分学的预备知识

综述：1、向量代数与空间解析几何

2、多元微分学的几何应用

3、场论初步

一、代数与几何

1、向量运算及其应用

设 $\vec{a}=\left\{a_x,a_y,a_z\right\},\vec{b}=\left\{b_x,b_y,b_z\right\},\vec{c}=\left\{c_x,c_y,c_z\right\}$ ，都为非零向量，则

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

② $\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$

③ $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=0\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0$

2、平面与直线

① 平面

点法式：已知点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，法向量 $\vec{\eta}(A,B,C)$，则平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

② 直线

点向式：已知点，$P_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量为 $\vec{\tau}(l,m,n)$，则直线方程为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

3、曲线与曲面（重点）

① 曲线在坐标面上的投影曲线

以 Γ 投至 xoy 面为例

（1）将 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 中的 z 消去 $\Rightarrow\varphi(x,y)=0$

（2）则投影曲线包含于曲线 $\begin{cases}\varphi(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$ 中，其他投影类推。

例题:将空间曲线 $\begin{cases}2z-y=0\\ x^2+y^2+z^2-yz=1\end{cases}$ 投影至 xoy 面，求其投影曲线及所围区域.

② 旋转曲面方程（重点）

1）问题提法：将$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$绕$L:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$旋转一周所得曲面$\Sigma$。

2）求法：

已知：L上的点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量$\Gamma(l,m,n)$，设Γ上的任意一点$M_1(x_1,y_1,z_1)$，

M_1 绕 L 旋转得到一个纬圆，在纬圆上任取一点 $P(x,y,z)$，则有关系式

$\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|=\left|\overrightarrow{M_0P}\right|$ 和 $\overrightarrow{M_1P}\perp\vec{\Gamma}$ 成立，且 M_1 满足 $\tau:\begin{cases}F(x,y,=z)\\G(x,y,=z)\end{cases}$，即

$$\begin{cases}\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|=\left|\overrightarrow{M_0P}\right|\\ \overrightarrow{M_1P}\perp\vec{\Gamma}\\ M_1\text{满足}\begin{cases}F(M_1)=0\\G(M_1)=0\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\text{消去}x_1,y_1,z_1\Rightarrow f(x,y,z).$$

3）例题

例题 1：求$\Gamma:\begin{cases}x-y+2z-1=0\\x-3y-2z+1=0\end{cases}$绕$y$轴旋转一周所得曲面$\Sigma$的方程.

例题 2：设直线 L 过 $A(1,0,0), B(0,1,1)$，将 L 绕 z 轴旋转一周所得曲面 Σ，求 Σ 的方程.

二、多元微分学的几何应用

1、曲面的切平面

① $\Sigma : F(x,y,z)=0$（隐式）

法向量：$\vec{\eta}=\left\{F_x^{'}|_{P_0}, F_y^{'}|_{P_0}, F_z^{'}|_{P_0}\right\}$

② $\Sigma : z=f(x,y)$（显式）$\Rightarrow F(x,y,z)=f(x,y)-z=0$

法向量：$\vec{\eta}=\left\{f_x^{'}|_{P_0}, f_y^{'}|_{P_0}, -1\right\}$

例题：求曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为_____.

2、曲线的切线

① $\Gamma:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$，$t$ 为参数　　　切向量 $\vec{\tau} = \left\{ x'(t)|_{t_0}, y'(t)|_{t_0}, z'(t)|_{t_0} \right\}$

② $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$　　　η_1, η_2 分别为 F, G 的法向量

则可取切线的方向向量为 $\vec{\tau} = \overrightarrow{\eta_1} \times \overrightarrow{\eta_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x'|_{P_0} & F_y'|_{P_0} & F_z'|_{P_0} \\ G_x'|_{P_0} & G_y'|_{P_0} & G_z'|_{P_0} \end{vmatrix} = \{l, m, n\}$

例题：设点 P 为椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面与 xoy 面垂直，求点 P 的轨迹 C.

三、场论初步

$u=u(x,y)$ 数量场， 例如温度场

$\vec{u}=\vec{u}(x,y)$ 向量场， 例如引力场

1、方向导数 $u=u(x,y)$

（1）定义法

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|_{P_0} \triangleq \lim_{t\to 0^+}\frac{u(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\sin\alpha)-u(x_0,y_0)}{t}$$

（2）公式法

若 $u(x,y)$ 在 P_0 处可微，则 $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}|_{P_0}=u_x^{'}|_{P_0}\cdot\cos\alpha+u_y^{'}|_{P_0}\cdot\sin\alpha$

例题：设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，求 $f_x^{'}(0,0)$，$f_y^{'}(0,0)$，$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}|_{(0,0)}$. $\forall\vec{l}$

2、梯度 $u=u(x,y)$

$$\overrightarrow{grad}\,u|_{P_0}=\left\{u_x^{'}|_{P_0},u_y^{'}|_{P_0}\right\}$$

3、两者的关系 $\vec{l^0}=\left\{\cos\alpha,\sin\alpha\right\}$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}|_{P_0}=u_x^{'}|_{P_0}\cdot\cos\alpha+u_y^{'}|_{P_0}\cdot\sin\alpha$$

$$=\overrightarrow{grad}\,u|_{P_0}\bullet\vec{l^0}$$

$$=\left|\overrightarrow{grad}\,u|_{P_0}\right|\cdot\left|\vec{l^0}\right|\cdot\cos\theta$$

当 $\theta=0,\cos\theta=1$，即 $\vec{l^0}//\overrightarrow{grad}\,u|_{P_0}$ 时， $\max\left\{\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}|_{P_0}\right\}=\left|\overrightarrow{grad}\,u|_{P_0}\right|$

4、散度 $\vec{u}=\vec{u}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$

$$div\,\vec{u}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

5、旋度

$$\overline{rot}\,\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

第九讲：三重积分

综述：1、概念与性质

2、计算

一、概念与性质

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)d\upsilon$$

把 $f(x,y,z)$ 当成是密度函数 $\rho(x,y,z)$，这样就可以把三重积分理解为密度乘以体积.

二、计算结构

$$①基础题\begin{cases}坐标系（直、柱、球）\\ 计算\begin{cases}先一后二法（直、柱）\\ 先二后一法（直、柱）\\ 球：\gamma\to\varphi\to\theta\end{cases}\end{cases}$$

$$②技术题\begin{cases}换序\\ 形心公式\\ 对称性（普通、轮换）\end{cases}$$

1、基础题

①坐标系

1）直角系：$dv = dxdydz$

2）柱面系：$dv = d\theta \cdot rdrdz$

3）球面系：$dv = r^2 \sin\varphi d\theta d\varphi dr$，$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$

$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)d\upsilon = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr$$

例题 1：计算 $I = \iiint\limits_{\Omega} zd\upsilon$，其中 Ω 是由 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ z = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ 围成的.

【提示】①若 Ω 为旋转体；② $f(x,y,z) = \varphi(z)$，这两种情况优先用先二后一法

例题 2 ：计算 $I = \iiint\limits_{\Omega} zd\upsilon$，其中 $\Omega = \left\{(x,y,z) \middle| z \le \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{3}z, 0 \le z \le 4\right\}$

2、技术题

① 换序

例题　计算 $I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_{x+y}^1 \frac{\sin z}{z}dz$.

②形心公式

$$\begin{cases} \bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} x d\upsilon}{\iiint\limits_{\Omega} d\upsilon} \\ \bar{y}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} y d\upsilon}{\iiint\limits_{\Omega} d\upsilon} \\ \bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z d\upsilon}{\iiint\limits_{\Omega} d\upsilon} \end{cases}$$

例题：计算$I=\iiint\limits_{\Omega}(2x+y-z)d\upsilon$，$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|(x-1)^2+(y-2)^2+z^2\le a^2,a>0\right\}$

③ 对称性 $I=\iiint\limits_{\Omega}fd\upsilon$

1）普通

以关于xoz面对称为例，$I=\begin{cases}2\iiint\limits_{\Omega_1}fd\upsilon & f(x,y,z)=f(x,-y,z)\\ 0 & f(x,y,z)=-f(x,-y,z)\end{cases}$

2）轮换$dv=dxdydz$（直角系）

若将Ω中的x与y对调，发现Ω不变，则$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)d\upsilon=\iiint\limits_{\Omega}f(y,x,z)d\upsilon$

例题：$I=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)d\upsilon$，$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le a^2,\quad a>0\right\}$

第十讲：线面积分

第一型曲线积分

综述：1、概念

2、计算结构

一、概念

① 定积分$\int_a^b f(x)dx$推广到第一型曲线积分$\int_L f(x,y)ds$

② $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}>0$

③ 伪二元函数$f(x,y)=f(x,y(x))$，其中$L:y=y(x)$

二、计算结构

① 基础题——化为定积分

② 技术题
（1）边界方程代入被积函数
（2）形心公式
（3）对称性（普通、轮换）

1、基础题——化为定积分　一投二代三计算

① $L:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}\quad \alpha\le t\le\beta$

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$

② $L:\begin{cases}y=y(x)\\x=x\end{cases}\quad a\le x\le b$

$$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y_x')^2}dx$$

③ $L:r=r(\theta),\ \alpha\le\theta\le\beta$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+(r'(\theta))^2}d\theta$$

2、技术题

① 代入

② 形心公式

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\int_L xds}{\int_L ds} \\ \bar{y} = \dfrac{\int_L yds}{\int_L ds} \end{cases}$$

③对称性

1）普通对称性

$$\int_L f(x,y)ds = \begin{cases} 2\int_{L_1} f(x,y)ds & f(x,y)=f(-x,y) \\ 0 & f(x,y)=-f(-x,y) \end{cases}$$

2）轮换对称性　　直角系下 $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

若将 L 中的 x 与 y 对调，发现 L 不变，则 $\int_L f(x,y)ds = \int_L f(y,x)ds$

例题：计算 $I=\oint_L (x\sin\sqrt{x^2+y^2}+x^2+3y^2-5y)ds$，其中 L: $\dfrac{x^2}{3}+(y-1)^2=1$，其周长为 a.

第一型曲面积分

综述：1、概念

2、计算结构

一、概念

① 由二重积分 $\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$（$d\sigma>0$）推广到的第一型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$（$dS>0$）

② $dS=\sqrt{1+(z_x^{'})^2+(z_y^{'})^2}dxdy$，其中 $\Sigma: z=z(x,y)$

③ 伪三元 $f(x,y,z)=f(x,y,z(x,y))$，关键是代入

二、计算结构

① 基础题——化为二重积分

② 技术题
（1）边界方程代入被积函数
（2）形心公式
（3）对称性

1、基础题——化为二重积分

做三件事（无逻辑先后）

（1） 将 Σ 投影（如到 xoy 面）$\Rightarrow D_{xy}$

（2） 将 $\Sigma\begin{cases} z=z(x,y) \\ F(x,y,z)=0 \end{cases}$ 代入 $f(x,y,z)$

（3） 计算 $dS=\sqrt{1+(z_x^{'})^2+(z_y^{'})^2}dxdy$

$$\Rightarrow \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z_x^{'})^2+(z_y^{'})^2}dxdy$$

【注意】一个隐蔽的计算陷阱：

Σ 投影至某个坐标面时，Σ 上任何两点的投影点不能重合（$z=z(x,y)$ 为单值函数）；

若重合，则 （1） 转投其他面；

（2） 分成若干个投影不会重合的面。

2、技术题

① 代入

② 形心公式

$$\begin{cases} \bar{x}=\dfrac{\iint\limits_{\Sigma} xdS}{\iint\limits_{\Sigma} dS} \\ \bar{y}=\dfrac{\iint\limits_{\Sigma} ydS}{\iint\limits_{\Sigma} dS} \end{cases}$$

③ 对称性

1）普通对称性

$$I=\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\begin{cases} 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS & f(x,y,z)=f(x,-y,z) \\ 0 & f(x,y,z)=-f(x,-y,z) \end{cases}$$

2）轮换对称性 $dS=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy$

若 Σ 中 x 与 y 轮换，则发现方程不变，则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\Sigma} f(y,x,z)dS$

例题：设 Σ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in\Sigma$，π 为 Σ 在点 P 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 是点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离，求 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{z}{\rho(x,y,z)}dS$.

第二型曲线积分

综述：1、概念

2、计算

一、概念——做功

$W=\int_L dW=\int_L Pdx+Qdy$，其中 $P(x,y)=P(x,y(x)),Q(x,y)=Q(x,y(x))$

二、计算结构

①基础题——化为定积分

（1）边界方程代入被积函数

②技术题　（2）对称性

（3）格林公式

1、基础题——化为定积分

设 $L:\begin{cases} y=y(t) \\ x=x(t) \end{cases}$　$t:\alpha\to\beta$，则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

2、技术题

①代入

②对称性（与前有别）

$$I=\int_L Q(x,y)dy=\begin{cases} 0 & Q(x,y)=Q(-x,y) \\ 2\int_{L_1} Q(x,y)dy & Q(x,y)=-Q(-x,y) \end{cases}$$

3、格林公式

$$\oint_{L^+} Pdx+Qdy=\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma$$

成立的要求：① L 封闭且取正向（围着边界跑，左手在 D 内的方向就是正向）

② $P,Q,\dfrac{\partial Q}{\partial x},\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 内连续。

例题 1：已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分 $I=\int_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$.

例题 2：计算 $I=\oint_{L^+}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 $L:x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$（星形线）

第二型曲面积分

综述：1、概念

2、计算结构

一、概念——通量

流场 $\vec{u}=\vec{u}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$，$d\vec{S}=\{dydz,dzdx,dxdy\}$

第二型曲面积分 $S=\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$

二、计算结构

① 基础题——化为二重积分

（1）代入

② 技术题 （2）对称性

（3）高斯公式

1、基础题——化为二重积分

① 如 $\Sigma\to D_{xy}$

② 代入

③ $dxdy\to\pm dxdy$，因为 $dxdy$ 是有方向的

$$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z(x,y))dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))\pm dxdy$$

2、技术题

① 代入

② 对称性

$$I=\iint_{\Sigma}Q(x,y,z)dzdx=\begin{cases}0 & Q(x,y,z)=Q(x,-y,z)\\ 2\iint_{\Sigma_1} & Q(x,y,z)=-Q(x,-y,z)\end{cases}$$

③高斯公式

$$\oiint_{\Sigma_{外}} \quad =\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv$$

例题：计算 $I=\oiint_{\Sigma_{外}}\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$，$\Sigma$ 由 $\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\ z=R\\ z=-R\end{cases}$ 所围成，取外侧