2. Ecuaciones diferenciales de primer orden

Se estudiarán las ecuaciones diferenciales de primer orden, estas se pueden escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Sin embargo, para una función arbitraria f, no existe un método general para resolver esta ecuación en términos de funciones elementales. En lugar de ello, se describen varios métodos, cada uno de ellos es aplicable a cierta subclase de ecuaciones

2.1. Ecuaciones lineales de primer orden

Considere las ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)\,, \tag{2}$$

donde f es una función dada de dos variables. Cualquier función diferencial $y = \phi(x)$ que satisface la ecuación (2) para x en algún intervalo, se llama solución de la ecuación diferencial.

Supongamos que la función $f(x, y)$ depende linealmente de la variable dependiente y. Así, la ecuación (2) se puede escribir en la forma

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{3}$$

y se denomina **ecuación lineal de primer orden**. (Se supondrá que p y g son funciones dadas y continuas en algún intervalo $\alpha < x < \beta$.)

Ejemplo 2.1. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}$$

Entonces, tiene las funciones $p(x) = 1/2$ y $g(x) = 3/2$.

Factores Integrantes

Si se desea resolver la ecuación lineal general de primer orden

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{3}$$

Para resolver la ED (3), se debe multiplicar por una función $\mu(x)$ adecuada, de tal manera que la ED se pueda llevar a una forma integrable, esta función $\mu(x)$ recibe el nombre de **factor integrante**. Este factor $\mu(x)$ se halla con la fórmula

$$\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\,dx\right) = e^{\int p(x)\,dx} \tag{4}$$

Note que $\mu(x) > 0$, dado que la función $e^x > 0$. Una vez obtenido $\mu(x)$, se puede encontrar una solución de la ecuación diferencial (3) que estará dada por

$$y = \frac{\int \mu(x)g(x)\,dx + c}{\mu(x)}\,dx \quad ,\text{con } c \text{ una constante y } \mu(x) \neq 0 \tag{5}$$

Dado que y, representa cualquier solución de un ED en la forma (3), entonces la expresión (5) se denomina **solución general** de la ecuación diferencial (3).

Nota. 1. Observe que al calcular el factor integrante $\mu(x)$, es necesario asegurarse de que la ecuación diferencial esté exactamente en la forma (3).

Obtención de la fórmula (4) y (5).

Si consideramos la ecuación diferencial

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{3}$$

La idea es multiplicar la ecuación por un factor integrante adecuado y llevarla en consecuencia a una forma integrable, este factor $\mu(x)$ que por el momento no está determinado. Entonces se tiene

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x) \tag{6}$$

El objetivo es elegir $\mu(x)$ de modo que el lado derecho de la ecuación (6) sea la derivada de alguna función. El término $\mu(x)y'$ sugiere que la función deseada podría ser el producto $\mu(x)y$. A fin de obtener la combinación $[\mu(x)y]' = \mu'(x)y + \mu(x)y'$ es necesario sumar y restar el término $\mu'(x)y$ en la lado derecho de la ecuación (6), luego

$$\begin{aligned}
\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x) \quad &\Longrightarrow \quad \mu(x)y' + [\mu'(x)y - \mu'(x)y] + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x) \\
&\Longrightarrow \quad [\mu(x)y' + \mu'(x)y] + [-\mu'(x)y + \mu(x)p(x)y] = \mu(x)g(x) \\
&\Longrightarrow \quad [\mu(x)y]' - [\mu'(x) - \mu(x)p(x)]y = \mu(x)g(x) \qquad (7)
\end{aligned}$$

Si hacemos que el segundo miembro del lado derecho de la ecuación (7) fuese cero, entonces la ecaución se transforma en

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x) \tag{8}$$

y el lado derecho (por lo menos) sería fácilmente integrable. A fin de lograr lo anterior, se debe elegir $\mu(x)$ de modo que

$$\mu'(x) - \mu(x)p(x) = 0 \tag{9}$$

Si suponemos que $\mu(x)$ es positiva (,esto es, $\mu(x) > 0$). Así

$$\begin{aligned}
\mu'(x) - \mu(x)p(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \mu'(x) = \mu(x)p(x) \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x) \\
&\Longleftrightarrow \quad \int \frac{d}{dx} = [\ln \mu(x)] \int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}\, dx = \int p(x)\, dx + k \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln \mu(x) = \int p(x)\, dx + k \\
&\Longleftrightarrow \quad \mu(x) = e^{\int p(x)\, dx + k}
\end{aligned}$$

Si se elije la constante $k = 0$ se obtiene la función más simple para $\mu(x)$, a saber

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\, dx}$$

Observe que $\mu(x)$ es positiva como se supuso.

Una vez encontrado $\mu(x)$ que cumple (9) y se regresa a la ecuación (8), entonces

$$\begin{aligned}
[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad \int [\mu(x)y]'\, dx = \int \mu(x)g(x)\, dx \\
&\Longleftrightarrow \quad \mu(x)y = \int \mu(x)g(x)\, dx + c \\
&\Longleftrightarrow \quad y = \frac{\int \mu(x)g(x)\, dx + c}{\mu(x)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.2. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^5 e^x \tag{10}$$

Sol: Dado que la ecuación (10) no tiene la forma (3), comencemos reescribiéndola

$$xy' - 4y = x^5 e^x \quad \Longrightarrow \quad y' - \frac{4}{x}y = x^4 e^x$$

Luego se tiene $p(x) = -\dfrac{4}{x}$ y $g(x) = x^4 e^x$. Así el factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x}\, dx} = e^{-4\int \frac{1}{x}\, dx} = e^{-4\ln x} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}$$

Entonces la solución general de la ecuación (10) es

$$\begin{aligned}
y &= \frac{\displaystyle\int x^{-4} \cdot x^4 e^x\, dx + c}{x^{-4}} = \frac{\displaystyle\int e^x\, dx + c}{\frac{1}{x^4}} \\
&= x^4 \left[\int e^x\, dx + c\right] = x^4 \left[e^x + c\right] \\
&= x^4 e^x + c\, x^4
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 2.3. Determine la solución del problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{c} y + 2y = e^{-x} \\ y(0) = 0{,}75 \end{array} \right. \tag{11}$$

Sol: Se puede ver que la ecuación (11) tiene la forma (3), luego se tiene $p(x) = 2$ y $g(x) = e^{-x}$. Así el factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$$

Entonces la solución general de la ecuación (11) es

$$\begin{aligned} y &= \frac{\displaystyle\int e^{2x} \cdot e^{-x}\,dx + c}{e^{2x}} = \frac{\displaystyle\int e^{x}\,dx + c}{e^{2x}} \\ &= \frac{e^{x} + c}{e^{2x}} = \frac{e^{x}}{e^{2x}} + \frac{c}{e^{2x}} = e^{-x} + ce^{-2x} \end{aligned} \tag{12}$$

Ahora, para satisfacer la condición inicial $y(0) = 0{,}75$, se sustituye $x = 0$ y $y = 0{,}75$ en la solución general (12), entonces

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} = 0{,}75 = y(0) = \cancelto{1}{e^{-(0)}} + c\cancelto{1}{e^{-2(0)}} = 1 + c \\ \Longrightarrow \quad c = \frac{3}{4} - 1 \quad \Longrightarrow \quad c = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Al reemplazar el valor de c en la solución general (12). De modo que la solución del PVI (11) es

$$y = e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$$

□

Ejemplo 2.4. Determine la solución del problema con valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{c} y' - 2xy = x \\ y(0) = 0 \end{array} \right. \tag{13}$$

Sol: Observe que la ecuación (13) tiene la forma (3), luego se tiene $p(x) = -2x$ y $g(x) = x$. Así el factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int -2x\,dx} = e^{-2\left(\frac{1}{2}x^2\right)} = e^{-x^2}$$

Entonces la solución general de la ecuación (13) es

$$y = \frac{\int e^{-x^2} \cdot x\,dx + c}{e^{-x^2}} = \frac{\int e^{-x^2} \cdot x\,dx + c}{\frac{1}{e^{x^2}}} = e^{x^2}\left[\int e^{-x^2} \cdot x\,dx + c\right]$$

Tome la sustitución $u = -x^2$, entonces $du = -2x\,dx$. Esto es, $-\frac{1}{2}\,du = x\,dx$. Continuando

$$\begin{aligned} y &= e^{x^2}\left[\int e^{-x^2}\cdot x\,dx + c\right] = e^{x^2}\left[\int e^{u}\cdot -\frac{1}{2}\,du + c\right] \\ &= e^{x^2}\left[-\frac{1}{2}\int e^{u}\,du + c\right] = e^{x^2}\left[-\frac{1}{2}e^{u} + c\right] \\ &= e^{x^2}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2} + c\right] = -\frac{1}{2} + c\,e^{x^2} \end{aligned} \tag{14}$$

Ahora, para satisfacer la condición inicial $y(0) = 0$, se sustituye en la solución general (14), entonces

$$\begin{aligned} 0 = y(0) &= -\frac{1}{2} + c\cancelto{1}{e^{(0)^2}} = -\frac{1}{2} + c \\ \implies \quad c &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Al reemplazar el valor de c en la solución general (14). De modo que la solución del PVI (13) es

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{x^2}$$

$\square$

2.2. Otras consideraciones acerca de las ecuaciones lineales

Queremos resolver cosas como ¿Un problema con valor inicial de este tipo siempre tiene una solución? ¿Es posible que tenga mas de una solución? ¿Es válida la solución para toda x o sólo para algún intervalo restringido alrededor del punto inicial?

Teorema 2.5. ***(Teorema de existencia y unicidad de la solución del PVI)***
*Si las funciones p y g son continuas en un intervalo abierto I, tal que $I = (\alpha, \beta)$ que contenga el punto $x = x_0$, entonces **existe** una función **única** $y = \phi(x)$ que satisface la ecuación diferencial*

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{15}$$

para toda $x \in I$, y que satisface la condición inicial

$$y(x_0) = y_0$$

en donde y_0 es un valor inicial arbitrario prescrito.

Nota. Como consecuencia del teorema 2.5 se tiene que la solución particular de la EDO en la forma (15) por el método del factor integrante es

$$y = \frac{\int_{x_0}^{x}\mu(t)g(t)\,dt + y_0}{\mu(t)}$$

donde $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$ y $y_0 = \phi(x_0)$ dada en la condición inicial.

Ejemplo 2.6. Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} xy' + 2y = 4x^2 \\ y(1) = 2 \end{cases} \tag{16}$$

Y determinar el intervalo más grande donde la solución es válida.

Sol: Dado que la ecuación (16) no tiene la forma (15), primero se reescribirá

$$xy' + 2y = 4x^2 \quad \Longrightarrow \quad y' + \frac{2}{x}y = 4x \ , \ x \neq 0$$

Luego se tiene $p(x) = \dfrac{2}{x}$ y $g(x) = 4x$. Así el factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2$$

Entonces la solución del PVI (16) es

$$\begin{aligned} y = \frac{\displaystyle\int_1^x t^2 \cdot 4t\,dt + 2}{t^2} &= \frac{\displaystyle\int_1^x 4t^3\,dt + 2}{x^2} = \frac{4\left[\frac{1}{4}t^4\right]_1^x + 2}{x^2} \\ &= \frac{t^4\big|_1^x + 2}{x^2} = \frac{(x^4 - 1^4) + 2}{x^2} = \frac{x^4 - 1 + 2}{x^2} = \frac{x^4 + 1}{x^2} \\ &= \frac{x^4}{x^2} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Dado que $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, como $x_0 = 1 \in (0, \infty)$ y además $p(x)$ y $g(x)$ son continuas en $(0, \infty)$, por tanto el intervalo más grande donde la solución del PVI (16) es válida es $(0, \infty)$. □

Ejemplo 2.7. Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} xy' + y = 2x \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Sol: Dado que la ecuación (17) no tiene la forma (15), primero la reescribiremos

$$xy' + y = 2x \quad \Longrightarrow \quad y' + \frac{1}{x}y = 2 \ , \ x \neq 0$$

Luego se tiene $p(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = 2$. Así el factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int 1/x\,dx} = e^{\ln|x|} = x \ , \quad \text{para } x > 0$$

Entonces la solución del PVI (17) es

$$\begin{aligned} y &= \frac{\displaystyle\int_1^x t\cdot 2\,dt + 0}{x} = \frac{\displaystyle\int_1^x 2t\,dt}{x} = \frac{2\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^x}{x} = \frac{t^2\big|_1^x}{x} \\ &= \frac{x^2-1^2}{x} = \frac{x^2-1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 2.8. Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' - 2y = x(e^{3x} - e^{2x}) \\ y(0) = 2 \end{cases} \tag{18}$$

Sol: La ecuación (18) tiene la forma (15), luego se tiene $p(x) = -2$ y $g(x) = x(e^{3x} - e^{2x})$. Así el factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int -2\,dx} = e^{-2x}$$

Entonces la solución del PVI (18) es

$$\begin{aligned} y &= \frac{\displaystyle\int_0^x e^{-2t}\cdot t(e^{3t} - e^{2t})\,dt + 2}{e^{-2x}} = \frac{\displaystyle\int_0^x te^{-2t}(e^{3t} - e^{2t})\,dt + 2}{\frac{1}{e^{2x}}} \\ &= e^{2x}\left[\int_0^x t(e^t - 1)\,dt + 2\right] \end{aligned}$$

Usando integración por partes, tomando $u = t$ y $dv = (e^t - 1)\,dt$. Entonces $du = dt$ y $v = e^t - t$. Así, se sigue que

$$\begin{aligned} y &= e^{2x}\left[\int_0^x t(e^t-1)\,dt + 2\right] = e^{2x}\left[t(e^t - t)\big|_0^x - \int_0^x (e^t - t)\,dt + 2\right] \\ &= e^{2x}\left[x(e^x - x) - \cancelto{0}{(0)(e^0 - 0)} - \left(e^t - \frac{1}{2}t^2\right)\Bigg|_0^x + 2\right] \\ &= e^{2x}\left[x(e^x - x) - \left(e^x - \frac{1}{2}x^2\right) + \left(e^{(0)} - \frac{1}{2}(0)^2\right) + 2\right] \\ &= e^{2x}\left[x(e^x - x) - \left(e^x - \frac{1}{2}x^2\right) + 1 + 2\right] = e^{2x}\left[xe^x - x^2 - e^x + \frac{1}{2}x^2 + 3\right] \\ &= e^{2x}\left[xe^x - e^x - \frac{1}{2}x^2 + 3\right] = xe^{3x} - e^{3x} - \frac{1}{2}x^2e^{2x} + 3e^{2x} \end{aligned}$$

$\square$