Ecuaciones lineales de Segundo Orden

Sec 3.1 Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

(Ec. homogéneas con coeficientes constantes

E.D.O Segundo orden

1 $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x) \quad , \quad P(x) \neq 0$

P, Q, R, G continuos en un intervalo I.

¿Cómo es un P.V.I?

Condiciones Iniciales $\underline{y(x_0)=y_0}$, $\underline{y'(x_0)=\tilde{y}_0}$

$x_0 \in I$, $y_0, \tilde{y}_0$ números reales

La E.D.O (1) se denomina homogénea si

$F(x)=0$

Consideremos inicialmente EDO lineales de Segundo Orden Homogéneas y con coeficientes constantes.

$\rightarrow \quad ay'' + by' + cy = 0 \quad (*)$ a, b, c constantes

$a \neq 0$

<u>Proposición</u>: Sea $y = \varphi_1(x)$ $y = \varphi_2(x)$ soluciones de $(*)$

y sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Entonces

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) \text{ también es solución}$$

de $(*)$.

<u>Obs</u>: Sea $y = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$ $\quad y'' = r(re^{rx}) = r^2 e^{rx}$

$$y'' = r^2 e^{rx}$$

Al reemplazar en (*) $ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

$e^{rx} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{ar^2 + br + c = 0}$ (2)

La ecuación (2) se llama Ec característica de (*)

La Ec (2) tiene dos raíces que pueden ser reales y distintas, reales y repetidas, y complejas.

$ay'' + by' + cy = 0 \quad a \neq 0$ E.D.O segundo orden, homogénea y con coeficientes constantes.

Dada la Ec. característica $ar^2 + br + c = 0$ ✓ dependiendo como sean las raíces daremos la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$

Tenemos 3 casos.

Caso 1: $ar^2+br+c=0$ tiene raíces reales y distintos $(b^2-4ac>0)$

Supongamos que r_1 y r_2 son las raíces de la Ec Característica. Entonces $y_1(x)=e^{r_1x}$ y $y_2(x)=e^{r_2x}$ son soluciones de la E.D.O $\circledast$ y por la proposición

$$y(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}, \quad C_1, C_2 \text{ constantes}$$

será la solución general de $\circledast$.

Ejemplo: Hallar la solución general de $y'' - 3y' - 7y = 0$

Sol: La Ec. Característica de $y'' - 3y' - 7y = 0$ es

$r^2 - 3r - 7 = 0$, cuyas raíces son

$$r = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-7)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9+28}}{2}$$

$$r = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$$. Así $r_1 = \frac{3+\sqrt{37}}{2}$ y $r_2 = \frac{3-\sqrt{37}}{2}$

Luego la solución general es

$$y(x) = c_1 e^{\left(\frac{3+\sqrt{37}}{2}\right)x} + c_2 e^{\left(\frac{3-\sqrt{37}}{2}\right)x}$$

Ejemplo: Hallar la solución del P.V.I.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad \underline{y(0) = 2, \; y'(0) = 3}$$

Sol: la Ec característica de $y'' + 5y' + 6y = 0$ es

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \iff (r+3)(r+2) = 0$$

$$\iff r = -3 \text{ ó } r = -2$$

Así las raíces son $r_1 = -3$ y $r_2 = -2$

Por lo tanto la solución general es:

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$$ ✓

Como $y(0) = 2$ y $y'(0) = 3$

$$y(0) = C_1 e^{-3(0)} + C_2 e^{-2(0)} = C_1 + C_2 = 2$$

$$\boxed{C_1 + C_2 = 2}$$ ✓

$$y'(x) = -3C_1 e^{-3x} - 2C_2 e^{-2x}$$

$$y'(0) = -3C_1 e^{-3(0)} - 2C_2 e^{-2(0)} = 3$$

$$\boxed{-3C_1 - 2C_2 = 3}$$ ✓

$$C_1 + C_2 = 2 \Longrightarrow \cancel{3C_1} + 3C_2 = 6$$

$$-3C_1 - 2C_2 = 3 \qquad \cancel{-3C_1} - 2C_2 = 3$$

$$C_2 = 9 \quad y \quad C_1 + 9 = 2$$

$$C_1 = 2 - 9$$

$$C_1 = -7$$

$$C_1 = -7 \quad , \quad C_2 = 9$$

finalmente, la solución del P.V.I es

$$y(x) = -7e^{-3x} + 9e^{-2x}$$ ✓

Proyecto

$a y'' + b y' + c y = 0$ ✓

① reales $r_1 \neq r_2$
② complejos
③ repetidos

→ Ingrese $a = 4$ ✓, $b = -3$ ✓, $c = 5$ ✓

Ec Característica r_1, r_2

→ Condición $b^2 - 4ac > 0$

→ La solución general es

caso i) $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ ✓

caso ii) $y(x) = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x$

caso iii) $y(x) = c_1 e^{r x} + c_2 x e^{r x}$ ✓

Caso ii) $ay'' + by' + cy = 0 \quad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac < 0$

Sec 3.4 Raíces Complejas de la Ec. Característica $ar^2 + br + c = 0$

Definición [Fórmula de Euler] $\quad i = \sqrt{-1}$

$$e^{ix} = \cos x + i\,\text{sen}\,x \quad , \quad e^{i\mu x} = \cos(\mu x) + i\,\text{sen}(\mu x), \ \mu \in \mathbb{R}$$

$$e^{(\lambda + \mu i)x} = e^{\lambda x} e^{i\mu x} = e^{\lambda x}(\cos \mu x + i\,\text{sen}(\mu x)), \ \mu, \lambda \in \mathbb{R}$$

Dada la Ec. $ar^2 + br + c = 0$, como $b^2 - 4ac < 0$, entonces la Ec. tiene dos raíces complejas conjugadas, digamos

$r_1 = \lambda + \mu i$ y $r_2 = \lambda - \mu i$ $(\mu \neq 0,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

entonces

$y_1(x) = e^{r_1 x} = e^{(\lambda + \mu i)x}$, y $y_2(x) = e^{r_2 x} = e^{(\lambda - \mu i)x}$

son soluciones de la EDO $ay'' + by' + cy = 0$ (*)

$$\frac{1}{2} y_1(x) + \frac{1}{2} y_2(x) = u(x) = e^{\lambda x} \cos(\mu x)$$

$$\frac{1}{2i} y_1(x) - \frac{1}{2i} y_2(x) = V(x) = e^{\lambda x} \operatorname{sen}(\mu x)$$

wronskiano

$W(u, v) \neq 0$

se obtiene la solución general de (*)

Solución general

$y(x) = C_1 u(x) + C_2 v(x)$

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + C_2 e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x}$$ (Solución real)

C_1, C_2 son constantes

$r_1 = \ldots = \lambda + \mu i$

$r_2 = \ldots = \lambda - \mu i$

Ejemplo: $16y'' - 8y' + 145y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$

Resolver P.V.I / sol: la Ec característica es: $16r^2 - 8r + 145 = 0$

$16r^2 - 8r + 145 = 0$ y sus raíces son:
$a \quad b \quad c$

$$r = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(16)(145)}}{2(16)} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 9280}}{32}$$

$$r = \frac{8 \pm \sqrt{-9216}}{32} = \frac{8 \pm \sqrt{9216}\,\sqrt{-1}}{32} = \frac{8 \pm 96i}{32}$$

$$r = \frac{8}{32} \pm \frac{96}{32}i = \frac{1}{4} \pm 3i$$

Así $r_1 = \underbrace{\frac{1}{4}}_{\lambda} + \underbrace{3}_{\mu}i$ y $r_2 = \underbrace{\frac{1}{4}}_{\lambda} - \underbrace{3}_{\mu}i$, $\lambda = 1/4$, $\mu = 3$

La solución general es

$$y(x) = c_1 e^{1/4 x} \cos(3x) + C_2 e^{1/4 x} \operatorname{sen}(3x), \quad C_1, C_2 \text{ Constante}$$

Como $y(0) = -2$ y $y'(0) = 1$,

$$y(0) = C_1 e^{1/4(0)} \cos(3(0)) + \cancel{C_2 e^{1/4(0)} \operatorname{sen}(3(0))}^{\to 0} = -2$$

$$\boxed{C_1 = -2}$$

Hallar y' (tarea) $y'(0) = 1$, $\boxed{C_2 = 1/2}$ Verificar!

finalmente la solución del P.V.I es

$$y(x) = -2e^{1/4x}\cos(3x) + \frac{1}{2}e^{1/4x}\operatorname{sen}(3x)$$

Caso iii) Raíces repetidas (Sec. 3.5)

$ay'' + by' + cy = 0 \quad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac = 0 \quad (b^2 = 4ac).$

la Ec. característica $ar^2 + br + c = 0$ tiene raíces repetidas (reales) $r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$

$$r = \frac{-b \pm \cancel{\sqrt{b^2 - 4ac}}^{\,0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

Tenemos una solución $y_1(x) = e^{rx} = e^{-b/2a\,x}$

D'Alembert, propone $y_2(x) = V(x)y_1(x)$, $\boxed{V(x) = x}$

$y_2(x) = x e^{-b/2a\,x}$ y por la proposición, la solución

general será $y(x) = C_1 e^{\overset{r}{\left(-\frac{b}{2a}\right)}x} + C_2 x e^{\overset{r}{\left(-\frac{b}{2a}\right)}x}$, C_1, C_2 constantes.

Ejemplo: Solucionar el P.V.I $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$

$y(0) = 2$, $y'(0) = 1/3$

Sol: Primero, la Ec. característica es

$$r^2 - r + \frac{1}{4} = 0 \iff \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$r \qquad \frac{1}{2}$$

$$\cancel{2}(r)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) = r$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{\cancel{1 - 4(1)\left(\frac{1}{4}\right)}}^{\,\to 0}}{2(1)} = \frac{1}{2}$$

Luego la solución general es:

$$y(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{\frac{1}{2}x} \quad ✓$$

Como $y(0) = 2$ $\quad y'(0) = 1/3$

$C_1 = 2$, $C_2 = -2/3$ $\qquad$ Verificar!

La solución del P.V.I es

$$y(x) = 2e^{1/2 x} - \frac{2}{3} x e^{1/2 x}$$ ✓