1. Conceptos básicos y clasificación de las ecuaciones diferenciales

Cuando se plantean en términos matemáticos muchos problemas importantes y significativos de la ingeniería, las ciencias físicas y las ciencias sociales, se requiere determinar una ecuación que contiene una ó más derivadas de la función desconocida. Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones diferenciales (E.D.)**

Ejemplo 1.1. Segunda Ley de Newton

$$m\frac{d^2u(t)}{dt^2} = F\left[t, u(t), \frac{du(t)}{dt}\right]$$

donde $u(t)$ es la posición de una partícula sobre la cual actúa una fuerza F, que puede ser una función del tiempo t, la posición $u(t)$ y la velocidad $\dfrac{du(t)}{dt}$.

Definición 1.2. (Clasificación por Tipo)
Una clasificación más evidente se basa en el hecho de si la función desconocida depende de una sola variable independiente o de varias variables independientes.

i) Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO): En la ecuación diferencial sólo aparecen derivadas ordinarias, es decir, sólo aparecen derivadas respecto a una sola variable independiente.

ii) Ecuación Diferencial Parciales (EDP): En la ecuación diferencial aparecen derivadas parciales, esto es, aparecen derivadas parciales respecto a distintas variables independientes.

Ejemplo 1.3. 1. $y' + 5y = e^x$ ED Ordinaria

2. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$ ED Ordinaria

3. $y'' + cos(x)y = \tan x$ ED Ordinaria

4. $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$ ED Parcial

5. $\dfrac{dy(t)}{dt} + \dfrac{dx(t)}{dt} = 2x(t) + y(t)$ ED Ordinaria

6. $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ ED Parcial

7. $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}$ ED Parcial

Definición 1.4. (Clasificación según el orden)
El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en ella, sin importar si es ordinaria o parcial. De manera general, la ecuación

$$F\left[x, u(x), u'(x), u''(x), \ldots, u^{(n)}(x)\right] = 0$$

es una EDO de n-ésimo orden.

Ejemplo 1.5.

1. $y' + 5y = e^x$ EDO de primer orden
2. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$ EDO de tercer orden
3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$ EDO de segundo orden
4. $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$ EDP de segundo orden
5. $\dfrac{dy(t)}{dt} + \dfrac{dx(t)}{dt} = 2x(t) + y(t)$ EDO de primer orden
6. $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ EDP de segundo orden
7. $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}$ EDP de primer orden

Definición 1.6. (Clasificación por linealidad)
Se dice que una ecuación diferencial ordinaria

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

es **lineal** si F es una función lineal en las variables $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Es decir, si se trata de una ecuación diferencial de grado 1 en y y en todas sus derivadas, además cada coeficiente sólo depende de x. Se aplica una defínción similar para EDP's.
Por tanto, la ED ordinaria general de orden n es

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{1}$$

Una ecuación que no es de la forma (1) es **no lineal**.

Ejemplo 1.7.

1. $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$ EDO lineal
2. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$ EDO lineal
3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$ EDO no lineal

4. $y\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 1$ EDO lineal

5. $(1 - y^2) + x\dfrac{dy}{dx} = 0$ EDO no lineal

6. $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ EDP lineal

7. $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}$ EDP lineal

Definición 1.8. (Sistemas de ecuaciones diferenciales)
Otra clasificación de las ED depende del número de funciones desconocidas que intervienen. Si hay que determinar una sola función, entonces basta con una sola ecuación. Sin embargo, si existen dos o más funciones desconocidas, entonces se requiere un sistema de ecuaciones.

Ejemplo 1.9. 1. $\dfrac{dT}{dt} = K(T - T_m)$ Ley de enfriamiento de Newton

2. $\begin{cases} \dfrac{dH}{dt} = aH - \alpha HP \\ \\ \dfrac{dP}{dt} = -cP + \gamma HP \end{cases}$ Sistema Depredador-Presa

3. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + 3x = 15e^{-t} \\ \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} + 3y = 15t \end{cases}$

Definición 1.10. (Solución)
Una **solución** de la ecuación diferencial ordinaria

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

sobre el intervalo $\alpha < x < \beta$, es una función $Y = \phi(x)$ tal que existen $\phi', \phi'', \ldots, \phi^{(n)}$ y satisface

$$\phi^{(n)}(x) = f\left[x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \ldots, \phi^{(n-1)}(x)\right]$$

para todo x en $\alpha < x < \beta$.

Los **tipos de soluciones** que hay son

1. **Explícitas:** La variable dependiente y se expresa tan sólo en términos de la variable independiente x y constantes.

2. **Implícitas:** Se trata de una relación $G(x, y) = 0$ en la que no se puede despejar y mediante funciones elementales. Son soluciones todas las $y(x)$ que cumplen $G(x, y) = 0$.

Una ecuación diferencial puede tener una cantidad infinita de soluciones que corresponden a las posibles elecciones de valores para los parámetros.

Se dice que la familia n-paramétrica

$$G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

es la **solución general** de una ecuación diferencial de orden n si toda solución de esa ecuación se puede obtener partiendo de esa familia. Cada vez que se asignan valores a los parámetros se tiene una **solución particular**.

Ejemplo 1.11.

1. Las funciones $y_1(x) = \cos x$ y $y_2(x) = \operatorname{sen} x$ son soluciones particulares y explícitas de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$.
2. La función $\phi(x) = x^2 \ln x$ es una solución particular y explícita de la ecuación diferencial $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, para $x > 0$.
3. La familia de funciones $y(t) = c_1e^t + c_2te^t - te^t \operatorname{sen} t - 2e^t \cos t$ es una solución general y explícita de la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = te^t \operatorname{sen} t$.
4. La función $2y^2 \ln y - x^2 = 0$ es una solución particular e implícita de la ecuación diferencial $(x^2 + y^2)y' = xy$.
5. La familia de funciones $x + y = \tan^{-1}(y) + C$, con C una constante arbitraria; es una solución general e implícita de la ecuación diferencial $1 + y^2 + y^2y' = 0$.

Definición 1.12. Se denomina **problema de valor inicial (P.V.I)** al problema

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) ,$$

que se debe resolver sujeto a las condiciones

$$y'(x_0) = y_1', \; y''(x_0) = y_2'', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

De otro modo,

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \\ y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1', \; y''(x_0) = y_2'', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

donde $x_0, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ son constantes reales llamadas **condiciones iniciales**.

Nota. La interpretación geométrica del PVI es que de todas las soluciones de la ecuación diferencial, se busca la curva que pasa por el punto (x_0, y_0).

Ejemplo 1.13. 1. $\begin{cases} y'' + y = \dfrac{1}{1 + x^2} \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y' = \dfrac{3x^2y + y^2}{2x^3 + 3xy} \\ y(1) = -2 \end{cases}$