2.4. Ecuaciones separables

Consideremos la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{34}$$

Ahora se tratarán las ecuaciones que pueden ser no lineales, es decir, es decir, ecuaciones en las que f depende de una manera no lineal de la variable independiente y. A menudo es conveniente escribir la ecuación (34) en la forma

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{35}$$

En caso de que M sea una función solo de x y N sea una función sólo de y, entonces la ecuación (35) se transforma en

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad M(x) = -N(y)\frac{dy}{dx} \quad \Longrightarrow \quad M(x)\,dx = -N(y)\,dy$$

Definición 2.14. se dice que una ecuación diferencial de la forma

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{36}$$

es una ED **separable**, porque si se escribe en la forma diferencial

$$M(x)\,dx = -N(y)\,dy \tag{37}$$

Entonces cada miembro de la ecuación depende solamente de una de las variables. La solución general de este tipo de ecuaciones se da por

$$\int M(x)\,dx = -\int N(y)\,dy$$

Ejemplo 2.15. Demostrar que la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2} \tag{38}$$

es separable y a continuación, encontrar una ecuación para sus curvas integrales.

Sol: Comencemos reescribiendo la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2} \quad &\Longrightarrow \quad (1 - y^2)\frac{dy}{dx} = x^2 \\ &\Longrightarrow \quad (1 - y^2)\,dy = x^2\,dx \end{aligned}$$

Es claro que la ecuación (38) se puede llevar a la forma de separable.

Ahora solucionemos la ecuación (38)

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2} \quad &\Longrightarrow \quad (1-y^2)\,dy = x^2\,dx \\
&\Longrightarrow \quad \int (1-y^2)\,dy = \int x^2\,dx \\
&\Longrightarrow \quad y - \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}x^3 + c_1 \ , \quad c_1 \text{ contante} \\
&\Longrightarrow \quad 3y - y^3 = x^3 + 3c_1 \\
&\Longrightarrow \quad -x^3 - 3y - y^3 = c \ , \quad c \text{ contante}
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 2.16. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$(1+x)\,dy - y\,dx = 0 \tag{39}$$

Sol: Note que la ecuación (39) es separable, se puede reescribir como

$$
\begin{aligned}
(1+x)\,dy - y\,dx = 0 \quad &\Longrightarrow \quad (1+x)\,dy = y\,dx \\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{1+x}\,dx
\end{aligned}
$$

Integrando ambos lados de la igualdad, se tiene

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{1+x}\,dx \quad &\Longrightarrow \quad \ln|y| = \ln|x+1| + c_1 \\
&\Longrightarrow \quad \ln|y| = \ln|x+1| + \ln|c| \ , \quad \text{con } c_1 = \ln|c| \text{ constante} \\
&\Longrightarrow \quad \ln|y| = \ln|c(x+1)| \\
&\Longrightarrow \quad y = c(x+1)
\end{aligned}
$$

Por tanto, la solución del PVI (39) es

$$y = c(x+1)$$

□

Ejemplo 2.17. Resolver el problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)} \ , \quad y(0) = -1 \tag{40}$$

Sol: Note que la ecuación (40) es separable, puesto que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)} \quad \Longrightarrow \quad 2(y-1)\,dy = (3x^2+4x+2)\,dx$$

Integrando ambos lados de la igualdad, se tiene

$$\int 2(y-1)\,dy = \int (3x^2+4x+2)\,dx \implies 2\left(\frac{1}{2}y^2 - y\right) = \frac{3}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 + 2x + c$$
$$\implies y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c$$

Ahora, tomando la condición inicial donde $x = 0$ e $y = -1$, entonces

$$(-1)^2 - 2(-1) = (0)^3 + 2(0)^2 + 2(0) + c \implies 1 + 2 = c \implies c = 3$$

Por tanto, la solución del PVI (40) es

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

Si se desea conocer la solución de forma explícita, se puede despejar en este caso

$$\begin{aligned} y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3 &\implies y^2 - 2y + 1 = x^3 + 2x^2 + 2x + 3 + 1 \\ &\implies (y-1)^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 4 \\ &\implies y - 1 = \pm\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \\ &\implies y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \end{aligned}$$

$\square$

Nota. Por otro lado, como consecuencia del teorema 2.5, si la ecuaión diferencial de la forma (36), se prescribe una condición inicial $y(x_0) = y_0$, entonces la solución del PVI se obtiene

$$\int_{x_0}^{x} M(t)\,dt = -\int_{y_0}^{y} N(t)\,dt$$

Ejemplo 2.18. Resolver el problema con valor inicial

$$y' = \frac{y\cos x}{1+2y^2}\ , \quad y(0) = 1 \tag{41}$$

Sol: Note que la ecuación (41) se puede llevar a la forma separable

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{y\cos x}{1+2y^2} &\implies (1+2y^2)\,dy = y\cos x\,dx \\ &\implies \frac{(1+2y^2)}{y}\,dy = \cos x\,dx \\ &\implies \left(\frac{1}{y} + \frac{2y^2}{y}\right)\,dy = \cos x\,dx \\ &\implies \left(\frac{1}{y} + 2y\right)\,dy = \cos x\,dx \end{aligned}$$

Integrando ambos lados de la igualdad, se tiene que la solución del PVI (41) es

$$\begin{aligned}
\int_1^y \left(\frac{1}{t}+2t\right)\,dt = \int_0^x \cos t\,dt \quad &\Longrightarrow \quad \left[\ln t + t^2\right]_1^y = \operatorname{sen} t\Big|_0^x \\
&\Longrightarrow \quad \ln y + y^2 - \cancelto{0}{\ln 1} - 1^2 = \operatorname{sen} x - \cancelto{0}{\operatorname{sen} 0} \\
&\Longrightarrow \quad \ln y + y^2 = 1 + \operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.19. Solucionar el problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\,, \quad y(4) = 3 \tag{42}$$

Sol: Note que la ecuación (42) se puede llevar a la forma separable

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \Longrightarrow \quad y\,dy = -x\,dx$$

Integrando ambos lados de la igualdad, se tiene que la solución del PVI (42) es

$$\begin{aligned}
\int_4^y t\,dt = -\int_3^x t\,dt \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}t^2\Big|_4^y = -\frac{1}{2}t^2\Big|_3^x \\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(y^2-4^2\right) = -\frac{1}{2}\left(x^2-3^2\right) \\
&\Longrightarrow \quad y^2 - 16 = -x^2 + 9 \\
&\Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = 25
\end{aligned}$$

□