2.3. Ecuación de Bernoulli

Definición 2.9. Una ecuación diferencial no lineal de primer orden se dice una **ecuación de Bernoulli** si es de la forma, o que mediante manipulaciones algebraicas pertinentes, pueden llevarse a escribir como:

$$y' + p(x)y = g(x)y^n \ , \qquad \text{con } n \in \mathbb{R} \tag{19}$$

Observe que

i) Si $n = 0$, entonces la ecuación diferencial (19) se transforma en

$$y' + p(x)y = g(x)$$

Esta es la ecuación general de una EDO de primer orden lineal, que se resuelve por el método del factor integrante.

ii) Si $n = 1$, luego la ecuación diferencial (19) se escribe como

$$\begin{aligned} y' + p(x)y = g(x)y \quad &\Longrightarrow \quad y' + p(x)y - g(x)y = 0 \\ &\Longrightarrow \quad y' + [p(x) - g(x)]y = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Esta ecuación (20) es una ED de primer orden lineal, que se puede resolver por el método del factor integrante tomando $\mu(x) = \exp\left(\int [p(x) - g(x)]\, dx\right)$.

iii) Ahora si $n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ la ecuación diferencial no lineal (19) se puede reducir a una ED lineal usando la sustitución

$$v(x) = y^{1-n}(x) \tag{21}$$

Derivando (21) por medio de la regla de la cadena, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} &= (1-n)y^{(1-n)-1}\frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = (1-n)\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} \\ \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{y^n}{(1-n)}\frac{dv}{dx} \end{aligned}$$

Al reemplazar lo anterior en (19), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)y^n \quad &\Longrightarrow \quad \left[\frac{y^n}{(1-n)}\frac{dv}{dx}\right] + p(x)y = g(x)y^n \quad , \text{multiplicar por } \frac{1}{y^n} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx} + p(x)\frac{y}{y^n} = g(x) \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx} + p(x)y^{1-n} = g(x) \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx} + p(x)v = g(x) \quad , \text{multiplicar por } (1-n) \\ &\Longrightarrow \quad \frac{dv}{dx} + (1-n)p(x)v = (1-n)g(x) \end{aligned} \tag{22}$$

La ecuación (22) es una ED de primer orden lineal, que puede ser resulta por el método del factor integrante, tomando $\mu(x) = e^{\int (1-n)p(x)\,dx}$.

Ejemplo 2.10. Halle la solución general de la ecuación

$$x^2y' + 2xy = 5y^3 \tag{23}$$

Sol: Reescribamos la ecuación para llevarla a la forma general

$$x^2y' + 2xy = 5y^3 \quad \Longrightarrow \quad y' + \frac{2}{x}y = \frac{5}{x^2}y^3 \quad , x \neq 0 \tag{24}$$

Así la ecuación (23) se transforma en una ED de Bernoulli con $n = 3$. Considere la sustitución $v = y^{1-3} = y^{-2}$, luego por regla de la cadena

$$\frac{dv}{dx} = -2y^{-3}y' = -\frac{2}{y^3}y' \quad \Longrightarrow \quad y' = -\frac{1}{2}y^3\,\frac{dv}{dx}$$

Al reemplazar esto último en la ecuación (24), se obtiene

$$\begin{aligned}
y' + \frac{2}{x}y = \frac{5}{x^2}y^3 \quad &\Longrightarrow \quad \left[-\frac{1}{2}y^3\,\frac{dv}{dx}\right] + \frac{2}{x}y = \frac{5}{x^2}y^3 \\
&\Longrightarrow \quad -\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x}\,\frac{y}{y^3} = \frac{5}{x^2} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{dv}{dx} - \frac{4}{x}y^{-2} = \frac{5}{x^2} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{dv}{dx} - \frac{4}{x}v = -\frac{10}{x^2} \\
&\Longrightarrow \quad v' - \frac{4}{x}v = -\frac{10}{x^2}
\end{aligned} \tag{25}$$

Así se tiene una ED de primer orden lineal con $p(x) = -\frac{4}{x}$ y $g(x) = -\frac{10}{x^2}$. Luego por el método del factor integrante, se tiene

$$\mu(x) = e^{\int -4/x\,dx} = e^{-4\ln|x|} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}$$

Así la solución general de la ecuación (25) es

$$\begin{aligned}
v &= \frac{\displaystyle\int x^{-4}\cdot -\frac{10}{x^2}\,dx + c}{x^{-4}} = \frac{-10\displaystyle\int x^{-4}x^{-2}\,dx + c}{1/x^4} = x^4\left[-10\int x^{-6}\,dx + c\right] \\
&= x^4\left[-\frac{10}{-5}x^{-5} + c\right] = x^4\left[2x^{-5} + c\right] = 2x^{-1} + c\,x^4 \\
&= \frac{2}{x} + c\,x^4 = \frac{2 + c\,x^5}{x}
\end{aligned}$$

Dado que $v = y^{-2}$, entonces la solución general de la ecuación diferencial (23) es

$$y^{-2} = v = \frac{2+cx^5}{x} \implies \frac{1}{y^2} = \frac{2+c\,x^5}{x}$$
$$\implies y^2 = \frac{x}{2+c\,x^5}$$

□

Ejemplo 2.11. Halle la solución general de la ecuación

$$xy' - y = x^3y^4 \tag{26}$$

Sol: Reescribamos la ecuación para llevarla a la forma general

$$xy' - y = x^3y^4 \implies y' - \frac{1}{x}y = x^2y^4 \quad , x \neq 0 \tag{27}$$

Así la ecuación (26) se transforma en una ED de Bernoulli con $n = 4$. Considere la sustitución $v = y^{1-4} = y^{-3}$, luego por regla de la cadena

$$\frac{dv}{dx} = -3y^{-4}y' = -\frac{3}{y^4}y' \implies y' = -\frac{1}{3}y^4\,\frac{dv}{dx}$$

Al reemplazar esto último en la ecuación (27), se obtiene

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{x}y = x^2y^4 &\implies \left[-\frac{1}{3}y^4\,\frac{dv}{dx}\right] - \frac{1}{x}y = x^2y^4 \\ &\implies -\frac{1}{3}\,\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}\,\frac{y}{y^4} = x^2 \\ &\implies \frac{dv}{dx} + \frac{3}{x}y^{-3} = -3x^2 \\ &\implies \frac{dv}{dx} + \frac{3}{x}v = -3x^2 \\ &\implies v' + \frac{3}{x}v = -3x^2 \end{aligned} \tag{28}$$

Así se tiene una ED de primer orden lineal con $p(x) = \frac{3}{x}$ y $g(x) = -3x^2$. Luego por el método del factor integrante, se tiene

$$\mu(x) = e^{\int 3/x\,dx} = e^{3\ln|x|} = e^{\ln x^3} = x^3 \quad , \text{para } x > 0$$

Así la solución general de la ecuación (28) es

$$v = \frac{\displaystyle\int x^3 \cdot -3x^2\,dx + c}{x^3} = \frac{\displaystyle -3\int x^5\,dx + c}{x^3} = \frac{-\frac{3}{6}x^6 + c}{x^3}$$
$$= \frac{-\frac{1}{2}x^6 + c}{x^3} = \frac{\frac{-x^6+2c}{2}}{x^3} = \frac{-x^6+2c}{2x^3}$$

Dado que $v = y^{-3}$, entonces la solución general de la ecuación diferencial (26) es

$$\begin{aligned} y^{-3} = v = \frac{-x^6+2c}{2x^3} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{y^3} = \frac{-x^6+2c}{2x^3} \\ &\Longrightarrow \quad y^3 = \frac{x^3}{-x^6+2c} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.12. Halle la solución general de la ecuación

$$x^2y' + xy + \sqrt{y} = 0 \tag{29}$$

Sol: Reescribamos la ecuación para llevarla a la forma general

$$x^2y' + xy + \sqrt{y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2y' + xy = -\sqrt{y} \quad \Longrightarrow \quad y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}y^{1/2} \tag{30}$$

Así la ecuación (29) se transforma en una ED de Bernoulli con $n = 1/2$. Considere la sustitución $v = y^{1-1/2} = y^{1/2}$, luego por regla de la cadena

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}y^{-1/2}\,y' = \frac{1}{2y^{1/2}}y' \quad \Longrightarrow \quad y' = 2y^{1/2}\,\frac{dv}{dx}$$

Al reemplazar esto último en la ecuación (30), se obtiene

$$\begin{aligned} y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}y^{1/2} \quad &\Longrightarrow \quad \left[2y^{1/2}\,\frac{dv}{dx}\right] + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}y^{1/2} \\ &\Longrightarrow \quad 2\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}\,\frac{y}{y^{1/2}} = -\frac{1}{x^2} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{dv}{dx} + \frac{1}{2x}y^{1/2} = -\frac{1}{2x^2} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{dv}{dx} + \frac{1}{2x}v = -\frac{1}{2x^2} \\ &\Longrightarrow \quad v' + \frac{1}{2x}v = -\frac{1}{2x^2} \end{aligned} \tag{31}$$

Así se tiene una ED de primer orden lineal con $p(x) = \dfrac{1}{2x}$ y $g(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$. Luego por el método del factor integrante, se tiene

$$\mu(x) = e^{\int 1/2x\,dx} = e^{1/2\ln|x|} = e^{\ln x^{1/2}} = x^{1/2}$$

Por lo cual, la solución general de la ecuación (31) es

$$\begin{aligned} v &= \frac{\displaystyle\int x^{1/2}\cdot -\frac{1}{2x^2}\,dx + c}{x^{1/2}} = \frac{\displaystyle -\frac{1}{2}\int x^{1/2}x^{-2}\,dx + c}{x^{1/2}} = \frac{\displaystyle -\frac{1}{2}\int x^{-3/2}\,dx + c}{x^{1/2}} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}(-2x^{-1/2}) + c}{x^{1/2}} = \frac{x^{-1/2}+c}{x^{1/2}} = \frac{\frac{1}{x^{1/2}} + c}{x^{1/2}} = \frac{\frac{1+c\,x^{1/2}}{x^{1/2}}}{x^{1/2}} \\ &= \frac{1+c\,x^{1/2}}{x} = \frac{1+c\sqrt{x}}{x} \end{aligned}$$

Dado que $v = y^{1/2}$, entonces la solución general de la ecuación diferencial (29) es

$$\begin{aligned} y^{1/2} = v = \frac{1 + c\sqrt{x}}{x} \quad &\Longrightarrow \quad y = \left(\frac{1 + c\sqrt{x}}{x}\right)^2 \\ &\Longrightarrow \quad y = \frac{(1 + c\sqrt{x}\,)^2}{x^2} \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 2.13. Halle la solución general de la ecuación

$$y' - y\cos x = y^2(1 - \operatorname{sen} x)\cos x \tag{32}$$

Sol: La ecuación (32) es una ED de Bernoulli con $n = 2$. Considere la sustitución $v = y^{1-2} = y^{-1}$, luego por regla de la cadena

$$\frac{dv}{dx} = -y^{-2}y' = -\frac{1}{y^2}y' \quad \Longrightarrow \quad y' = -y^2\,\frac{dv}{dx}$$

Al reemplazar esto último en la ecuación (32), se obtiene

$$\begin{aligned} y' - y\cos x = y^2(1 - \operatorname{sen} x)\cos x \quad &\Longrightarrow \quad \left[-y^2\,\frac{dv}{dx}\right] - (\cos x)y = y^2(1 - \operatorname{sen} x)\cos x \\ &\Longrightarrow \quad \frac{dv}{dx} + (\cos x)\frac{y}{y^2} = -(1 - \operatorname{sen} x)\cos x \\ &\Longrightarrow \quad \frac{dv}{dx} + (\cos x)y^{-1} = -(1 - \operatorname{sen} x)\cos x \\ &\Longrightarrow \quad \frac{dv}{dx} + (\cos x)v = (\operatorname{sen} x - 1)\cos x \\ &\Longrightarrow \quad v' + (\cos x)v = (\operatorname{sen} x - 1)\cos x \end{aligned} \tag{33}$$

Así se tiene una ED de primer orden lineal con $p(x) = \cos x$ y $g(x) = (\operatorname{sen} x - 1)\cos x$. Luego por el método del factor integrante, se tiene

$$\mu(x) = e^{\int \cos x\,dx} = e^{\operatorname{sen} x}$$

Así la solución general de la ecuación (33) es

$$v = \frac{\displaystyle\int e^{\operatorname{sen} x} \cdot (\operatorname{sen} x - 1)\cos x\,dx + c}{e^{\operatorname{sen} x}} = \frac{\displaystyle\int (\operatorname{sen} x - 1)e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx + c}{e^{\operatorname{sen} x}}$$

Tome la sustitución $z = \operatorname{sen} x$, entonces $dz = \cos x\,dx$. Luego

$$v = \frac{\displaystyle\int (\operatorname{sen} x - 1)e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx + c}{e^{\operatorname{sen} x}} = \frac{\displaystyle\int (z - 1)e^{z}\,dz + c}{e^{\operatorname{sen} x}}$$

Usando integración por partes, tomando $u = z - 1$ y $dw = e^z$. Se tiene $du = dz$ y $w = e^z$. Así, se sigue

$$\begin{aligned} v &= \frac{\displaystyle\int (z-1)e^z\,dz + c}{e^{\operatorname{sen} x}} = \frac{(z-1)e^z - \displaystyle\int e^z\,dz + c}{e^{\operatorname{sen} x}} = \frac{(z-1)e^z - e^z + c}{e^{\operatorname{sen} x}} \\ &= \frac{ze^z - e^z - e^z + c}{e^{\operatorname{sen} x}} = \frac{ze^z - 2e^z + c}{e^{\operatorname{sen} x}} = \frac{(\operatorname{sen} x)e^{\operatorname{sen} x} - 2e^{\operatorname{sen} x} + c}{e^{\operatorname{sen} x}} \\ &= \frac{(\operatorname{sen} x)e^{\operatorname{sen} x}}{e^{\operatorname{sen} x}} - \frac{2e^{\operatorname{sen} x}}{e^{\operatorname{sen} x}} + \frac{c}{e^{\operatorname{sen} x}} = \operatorname{sen} x - 2 + c\,e^{-\operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

Dado que $v = y^{-1}$, entonces la solución general de la ecuación diferencial (32) es

$$\begin{aligned} y^{-1} = v = \operatorname{sen} x - 2 + c\,e^{-\operatorname{sen} x} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{y} = \operatorname{sen} x - 2 + c\,e^{-\operatorname{sen} x} \\ &\Longrightarrow \quad y = \frac{1}{\operatorname{sen} x - 2 + c\,e^{-\operatorname{sen} x}} \end{aligned}$$

$\square$