

Tesina di Robust Control

# Satellite Attitude Control

Indice .....	1
1 Descrizione dell'impianto .....	2
1.1 Generalità.....	2
1.2 Sensori .....	3
1.3 Attuatori .....	4
1.4 Modello LTI.....	5
1.5 Parametri incerti.....	6
2 Analisi preliminari su come realizzare il Controllore.....	9
2.1 Prototipi di funzioni di trasferimento a ciclo chiuso.....	9
2.2 Traduzione delle specifiche di progetto .....	9
2.3 Funzioni di sensitività desiderate .....	10
2.4 Scelta delle funzioni di peso.....	11
3 Robustezza dell'impianto.....	14
3.1 Analisi robusta .....	14
3.2 Controllo $H_\infty$ .....	17
3.3 Controllo $\mu$ – Sintesi.....	18

# 1 Descrizione dell'impianto

Il seguente elaborato nasce dalla necessità di contribuire a rendere stabile l'orbita dei satelliti artificiali. La figura 1.1(a) mostra una rappresentazione artistica di un satellite geosincrono per le telecomunicazioni.

## 1.1 Analisi Generali

Il satellite è immaginabile come una sonda orbitante, la cui missione deve durare il più a lungo possibile. In virtù di ciò è richiesto un fine sistema di orientamento stellare tale da preservare nello spazio e nel tempo la stabilità dell'oggetto. È possibile immaginare l'oggetto come composto da un modulo principale, il quale comprende l'apparato sensoristico dell'oggetto, le antenne di telecomunicazione, i retrorazzi per il suo moto orbitale e una coppia gemella di pannelli solari per l'alimentazione di tutto il sistema. Il pacco strumenti è montato attraverso una struttura a traliccio stratificata al modulo principale e termina con un dispositivo di puntamento orbitante detto: "Sensore di Stella".

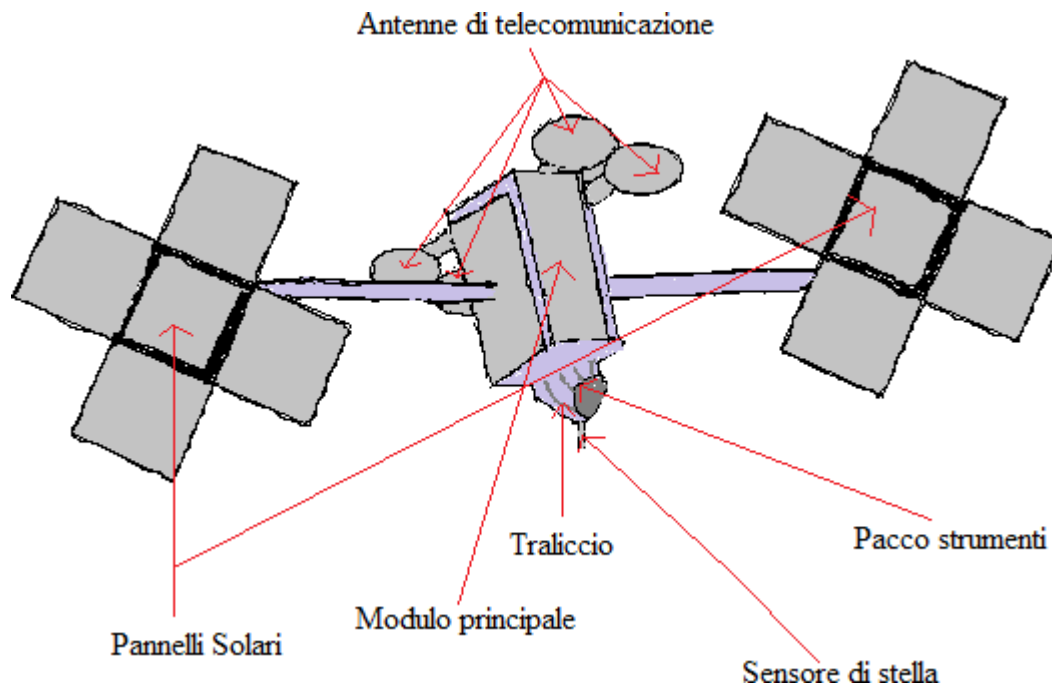


Figura 1.1(a)

Lo schematico del satellite è mostrato in figura 1.1(b). Il modulo

principale è pensato come una massa ruotante la cui normale forma un angolo  $\theta_1$  con la verticale puntante alla stella scelta come riferimento, mentre il pacco strumenti come una seconda massa ruotante la cui normale forma un angolo  $\theta_2$  con la suddetta verticale. La struttura a traliccio, connettente il modulo principale e il pacco strumenti è assimilabile ad una struttura elastica con attrito di massa trascurabile. I momenti torcenti di disturbo, dovuti alle pressioni di radiazione solare, l'effetto delle micro-meteorite, e le perturbazioni orbitali sono trascurabili ai fini degli scopi della trattazione. È richiesto di progettare le dinamiche del satellite in modo da avere un tempo di assestamento al più di 20 secondi e una sovra-elongazione complessiva inferiore o uguale al 15% del valore a regime. Le dinamiche del satellite includono parametri che possono variare ed è richiesto che il controllo funzioni per ogni variazione degli stessi negli intervalli di variazione prefissati.

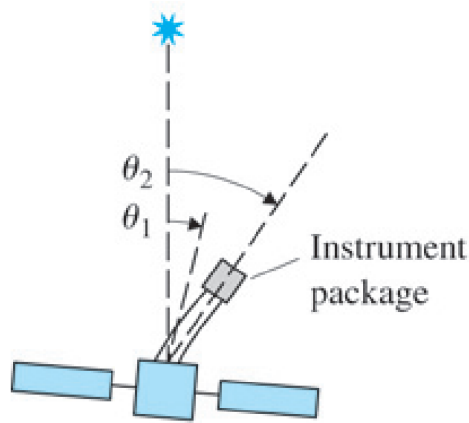


Figura 1.1(b)

## 1.1 Sensori

Per stabilizzare il carico utile rispetto al modulo principale del satellite si fa uso di uno strumento di misura chiamato Sensore di Stella, (Star Tracker). Esso equivale a una lente telescopica di dimensioni ridotte, capace di acquisire la nitida immagine di una stella e di tenerla centrata nel fuoco della sua lente. In questo modo è necessario acquisire solo la posizione angolare  $\theta_2$ . Lo strumento in sé permette di raggiungere alte performance di accuratezza, ma basse performance di precisione. Per risolvere tale problema viene integrato nel sistema di misura un giroscopio, il quale permette di ottenere una misura media temporalmente stabile, aumentando le performance di precisione del sistema. La misura, effettuata dallo Star Tracker, risulta nel complesso proporzionata a  $\theta_2$ .

## 1.3 Attuatori

Per la scelta degli attuatori bisogna considerare diverse alternative per adempiere a differenti specifiche di progetto, come: peso, potenza erogata, accuratezza, tempo di vita, affidabilità. Per l'applicazione della torsione richiesta è possibile considerare: getti di gas caldo, ruote di reazione o giroscopi, torsioni magnetiche, gradienti gravitazionali. I getti di gas caldo conferiscono una buona potenza ma sono i meno accurati, mentre le ruote di reazione sono sufficientemente precise ma possono trasferire solo momenti istantanei, viceversa le torsioni magnetiche sono tali da garantire continuità temporale nel trasferimento del momento richiesto. In ultima istanza i gradienti gravitazionali sono quelli che trasferiscono la minore potenza e condizionano la forma stessa del satellite, anche se presentano la maggiore stabilità temporale. Per gli scopi della trattazione verranno considerati getti di gas caldo in modo da snellire la trattazione pur rimanendo adeguatamente accurati.

## 1.4 Modello LTI

Modellizzando il modulo principale e il pacco strumenti con una coppia di dischi ruotanti, presentanti rispettivamente momenti di inerzia  $J_1$  e  $J_2$ , e il traliccio con una molla di costante elastica angolare  $k$  e un coefficiente di attrito viscoso angolare  $\beta$ , si ottiene il modello lineare tempo invariante illustrato in figura 1.2.

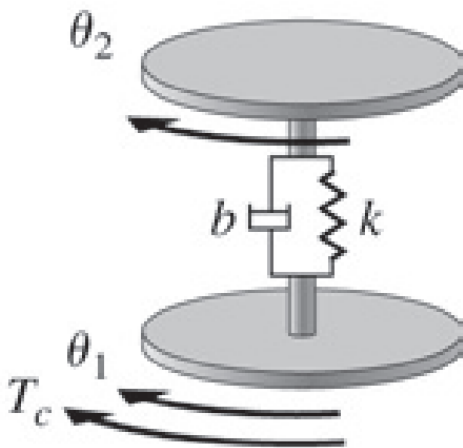


Figura 1.2

Dove  $T_c$  rappresenta il momento torcente applicato al modulo principale. Le equazioni della dinamica sono le seguenti:

$$\begin{cases} J_1 \frac{d^2}{dt^2} \theta_1 + \beta \frac{d}{dt} (\theta_1 - \theta_2) + k(\theta_1 - \theta_2) = T_c \\ J_2 \frac{d^2}{dt^2} \theta_2 + \beta \frac{d}{dt} (\theta_2 - \theta_1) + k(\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases}$$

Scegliendo la seguente tripla di variabili di ingresso, stato, uscita:

$$u = T_c \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad y = \theta_2$$

Si ottiene il seguente modello:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{J_2} x_1 - \frac{\beta}{J_2} x_2 + \frac{k}{J_2} x_3 + \frac{\beta}{J_2} x_4 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{k}{J_1} x_1 + \frac{\beta}{J_1} x_2 - \frac{k}{J_1} x_3 - \frac{\beta}{J_1} x_4 + \frac{1}{J_1} u \\ y = x_1 \end{cases}$$

O equivalentemente in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J_2} & -\frac{\beta}{J_2} & \frac{k}{J_2} & \frac{\beta}{J_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_1} & \frac{\beta}{J_1} & -\frac{k}{J_1} & -\frac{\beta}{J_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + 0u$$

## 1.5 Parametri Incerti

La missione del satellite è influenzata dalle intense escursioni termiche causate dal differente irraggiamento solare e dalla conseguente differente ionizzazione dei materiali ad opera del vento solare. È lecito supporre che i momenti d'inerzia del modulo principale e del carico utile non varino significativamente per effetto delle fluttuazioni termiche, ma il viceversa vale per la costante elastica e il coefficiente d'attrito viscoso angolari. Non potendo determinare con esattezza la dipendenza temporale di  $k$  e  $\beta$ , ciò che si è fatto è stato condurre uno studio dettagliato dei due parametri al fine di individuare, in base alle condizioni di funzionamento di interesse del satellite, degli opportuni range variazionali degli stessi e la loro mutua dipendenza funzionale. La figura 1.3(a) illustra i risultati ottenuti mentre la figura 1.3(b) riporta la superficie di incertezza individuata da tutte le possibili coppie di parametri.

$$\begin{aligned} 0.09 &\leq k \leq 0.4 \\ 0.038\sqrt{\frac{k}{10}} &\leq \beta \leq 0.2\sqrt{\frac{k}{10}} \end{aligned}$$

Figura 1.3(a)

F  
i

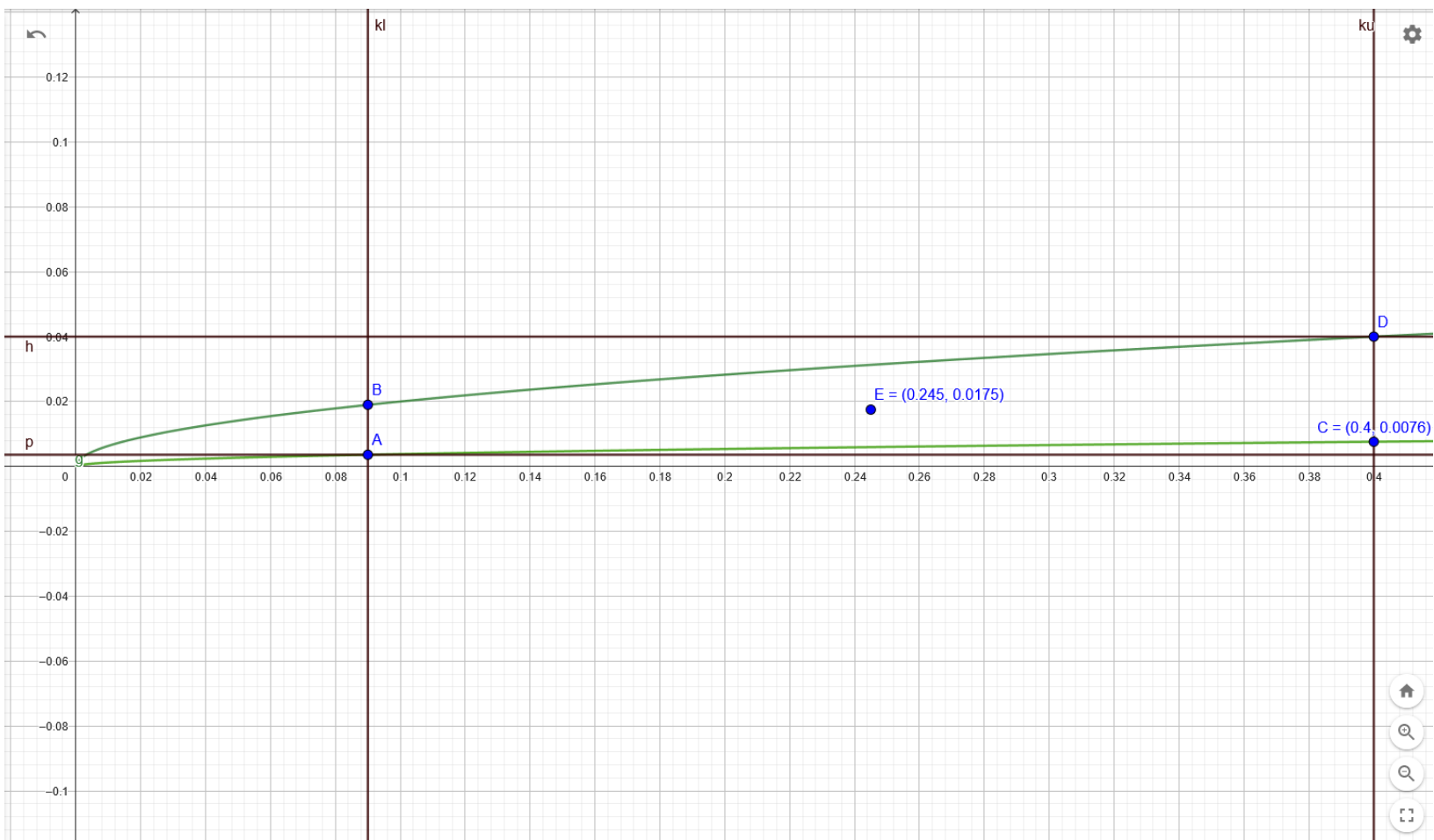


Figura 1.3(b)

Fissando i parametri  $J_1$  e  $J_2$  rispettivamente a  $1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  e a  $0.1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  si ricava la seguente funzione di trasferimento dell'impianto:

$$P(s) = \frac{10\beta s + 10k}{s^2(s^2 + 11\beta s + 11k)}$$

La seguente tabella 1 riassume i cinque impianti individuati, illustrandone i parametri caratteristici e le funzioni di trasferimento. Ciò sarà utile per caratterizzare le funzioni di peso per il controllo robusto successivamente



Parametri	Funzioni di Trasferimento
(0.09, 0.0036)	$\frac{0.036s + 0.9}{s^2(s^2 + 0.0396s + 0.99)}$
(0.09, 0.019)	$\frac{0.19s + 0.9}{s^2(s^2 + 0.209s + 0.99)}$
(0.4, 0.0076)	$\frac{0.076s + 4}{s^2(s^2 + 0.0836s + 4.4)}$
(0.4, 0.04)	$\frac{0.4s + 4}{s^2(s^2 + 0.44s + 4.4)}$
(0.245, 0.0175)	$\frac{0.175s + 2.45}{s^2(s^2 + 0.1925s + 2.695)}$

Tabella 1

## 2 Analisi preliminari su come realizzare il Controllore

Prima di passare al controllo robusto, è giusto fare alcune considerazioni e alcune premesse, su come andare a realizzare il controllore.

### 2.1 Prototipi di funzioni di trasferimento a ciclo chiuso

Le specifiche di progetto coinvolgono solo l'inseguimento del riferimento, (in quanto si ritiene trascurabile il contributo dei disturbi in catena diretta affliggenti il sistema). Una possibilità è data dalla progettazione della funzione di sensitività diretta e complementare riferita all'uscita. I prototipi di tali funzioni di trasferimento desiderate sono costruiti a partire dalla funzione di trasferimento del guadagno a ciclo aperto e sono illustrati di seguito:

$$L_D = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$
$$S_D = (1 + L_D)^{-1} = \left( \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \right)^{-1} = \frac{s(s + 2\zeta\omega_n)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$
$$T_D = (1 - S_D)$$

### 2.2 Traduzione delle specifiche di progetto

Le specifiche da rispettare riguardano il tempo di assestamento, (non superiore ai 20 s), e la sovra- elongazione percentuale, (non superiore al 15%). Le specifiche di progetto sono, pertanto, traducibili al seguente modo:

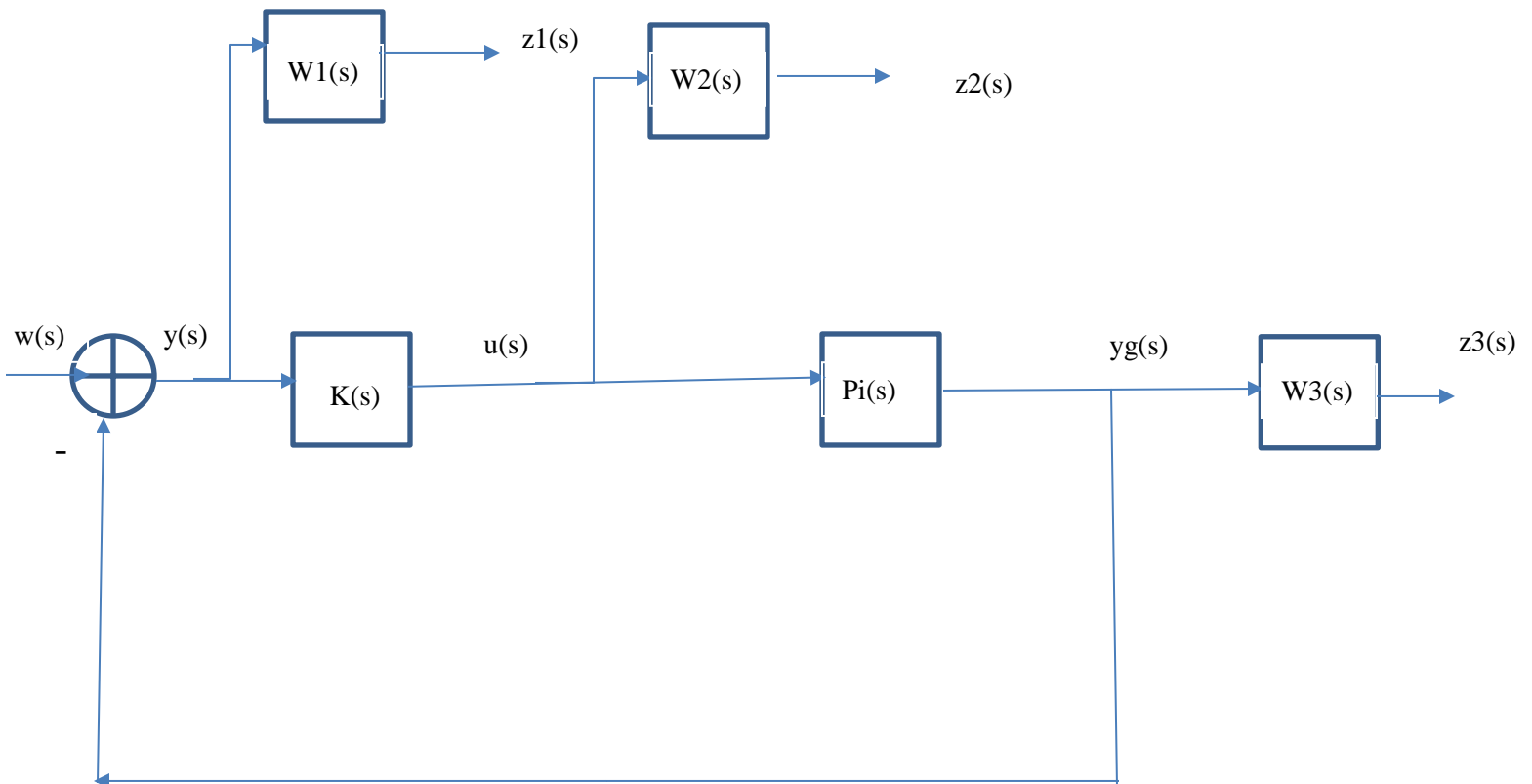
$$S_{\%} = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \leq 0.15 \Rightarrow \xi \geq 0.517$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \leq 20 \text{ s} \Rightarrow \omega_n \geq 0.3868 \text{ rad/s}$$

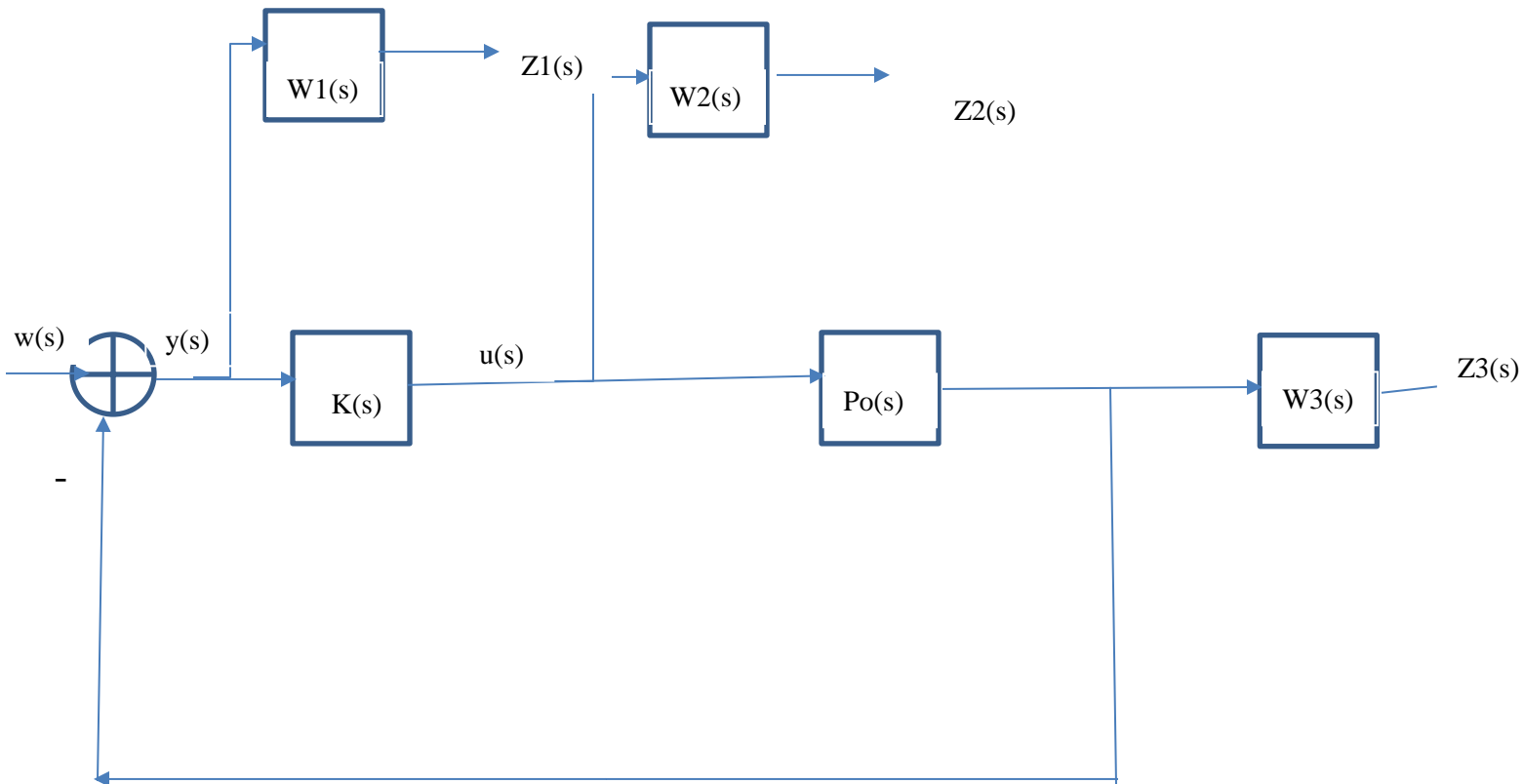
## 2.3 Funzioni di sensitività desiderate

Impostando  $\xi=0.55$  e  $\omega_n=0.4$  rad/s si ottengono le seguenti funzioni di sensitività diretta e complementare:

$$S_D = \frac{s^2+0.44s}{s^2+0.44s+0.16} \quad T_D = \frac{0.16}{s^2+0.44s+0.16}$$



## 2.4 Scelta delle funzioni di peso



La scelta delle funzioni peso è guidata dall'obiettivo di voler minimizzare le norme infinito delle funzioni di sensitività diretta e complementare. Sappiamo che la diretta è la funzione di trasferimento tra disturbo e uscita del sistema, mentre la complementare è quella tra rumore di misura e uscita. È opportuno minimizzare la sensitività diretta sulle basse frequenze perché i disturbi si trovano in bassa frequenza e la complementare sulle alte frequenze perché i rumori di misura sono in alta frequenza. Per questi motivi si scelgono funzioni di peso che dipendono anche dalla frequenza e in particolare si sceglie una funzione di peso  $W_1$  alta in bassa frequenza e una funzione  $W_3$  alta in alta frequenza che sono riconducibili rispettivamente agli spettri di disturbo in catena diretta e rumore di misura. Con queste scelte facciamo in modo che

$$\|S\| < \epsilon_1 \text{ per } \omega < \omega_1$$

$$\|T\| < \epsilon_2 \text{ per } \omega > \omega_2$$

che possono essere viste come specifiche closed loop per un sistema MIMO in generale. Nel nostro caso (SISO)

$$|S| < \frac{1}{|W_1|}$$

$$|T| < \frac{1}{|W_3|}$$

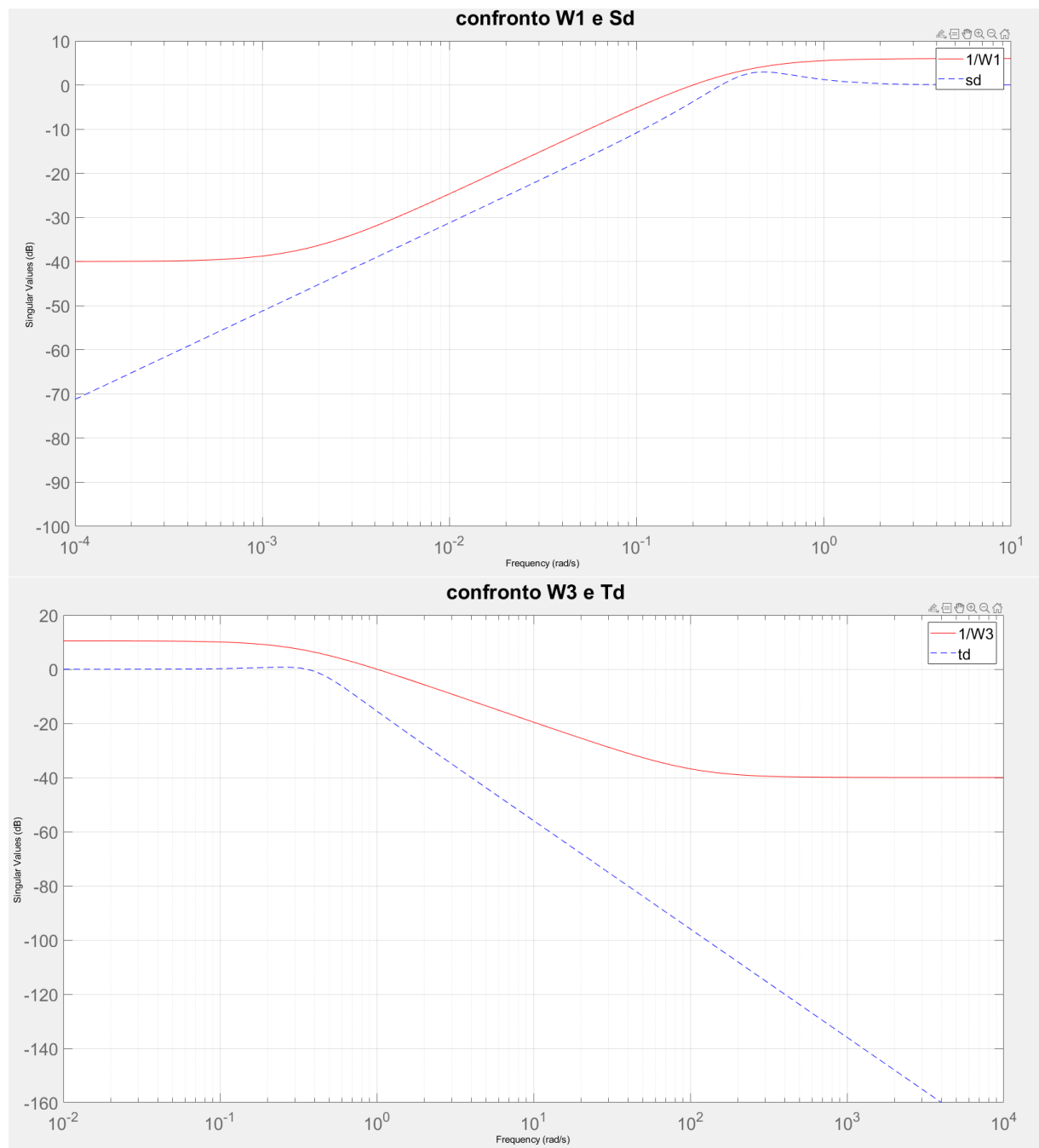


Figura 2.1

## 3 Controllo Robusto

Per parlare di controllo robusto , vi è bisogno che il sistema a ciclo chiuso risulti stabile anche in presenza di incertezze, che possono dunque variare . Nel nostro problema abbiamo ben due parametri incerti :  $b$  e  $k$ . Lo scopo sarà dunque quello di realizzare un controllore in grado di risultare robusto in presenza di parametri incerti. Prima della sintesi però , è necessario eseguire un'analisi robusta del problema.

### 3.1 Analisi Robusta

Abbiamo detto che nel nostro problema abbiamo un'incertezza, che ora però dobbiamo andare a modellare . Modellizzando l'incertezza come moltiplicativa, si assicura così la stabilità data la presenza del doppio polo nell'origine. Parlare di incertezza moltiplicativa significa dire che avremo un impianto incerto del seguente tipo:

$$P_i(s) = P_0(s)(1 + W_\Delta(s) * \Delta_n(s))$$

$P_i(s)$  risulta essere il nostro impianto incerto, mentre  $P_0(s)$  è il nostro impianto nominale scelto.  $\Delta_n(s)$  e  $W_\Delta(s)$  non sono altro che il nostro Delta , che può essere visto nel seguente modo:

$$\Delta(s) = W_\Delta(s)\Delta_N(s), \text{ con } \|\Delta_N(j\omega)\|_\infty \leq 1$$

Come detto precedentemente abbiamo scelto un'incertezza moltiplicativa per risolvere il problema del doppio polo nell'origine , visto che avremo così la seguente equazione:

$$\Delta_o(s) = P_0^{-1}(P - P_0)$$

A differenza di un'incertezza additiva dove avremmo avuto :

$$\Delta_a(s) = P - P_0$$

Prima di procedere alla realizzazione dell'impianto, rimane però un ultimo punto da analizzare, ovvero come viene scelta la funzione di peso  $W_\Delta(s)$ . Ciò che è stato fatto, è stato scegliere una funzione che maggiorasse per ogni  $\omega$  tutte le curve ( $D_m$ ), corrispondenti al  $\Delta_o(s)$  sopracitato. In base alla formula dell'incertezza moltiplicativa, tali curve rappresentano le differenze normalizzate tra i vari modelli considerati e il nominale, in modo da andare a considerare tutti i possibili valori dei parametri che possiamo avere.

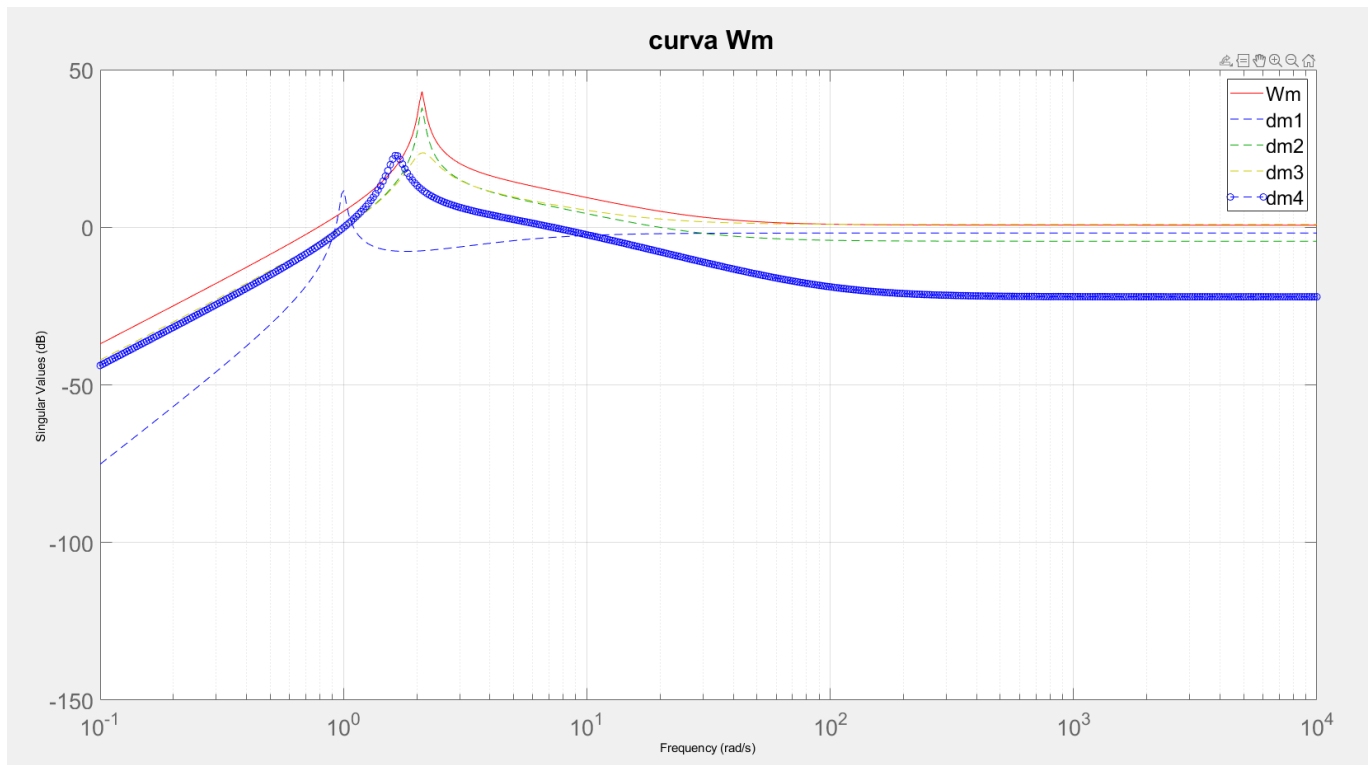


Figura 3.1

Modellata la nostra incertezza, se si considerassero i controllori utilizzati dalla traccia, non si riuscirebbe a garantire una stabilità robusta e dunque bisogna fare dei passi aggiuntivi. Detto ciò, passiamo ora alla realizzazione del nostro impianto:



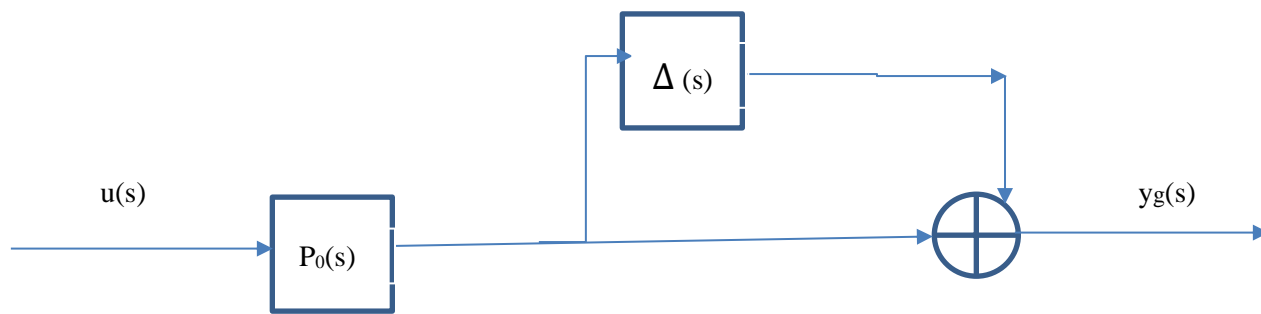


Figura 3.2

Il seguente impianto (Figura 3.2) rappresenta il nostro impianto Incerto Pinc, ovvero con il nominale e l'aggiunta del delta. Da ciò passiamo poi all'impianto completo che è del tipo:

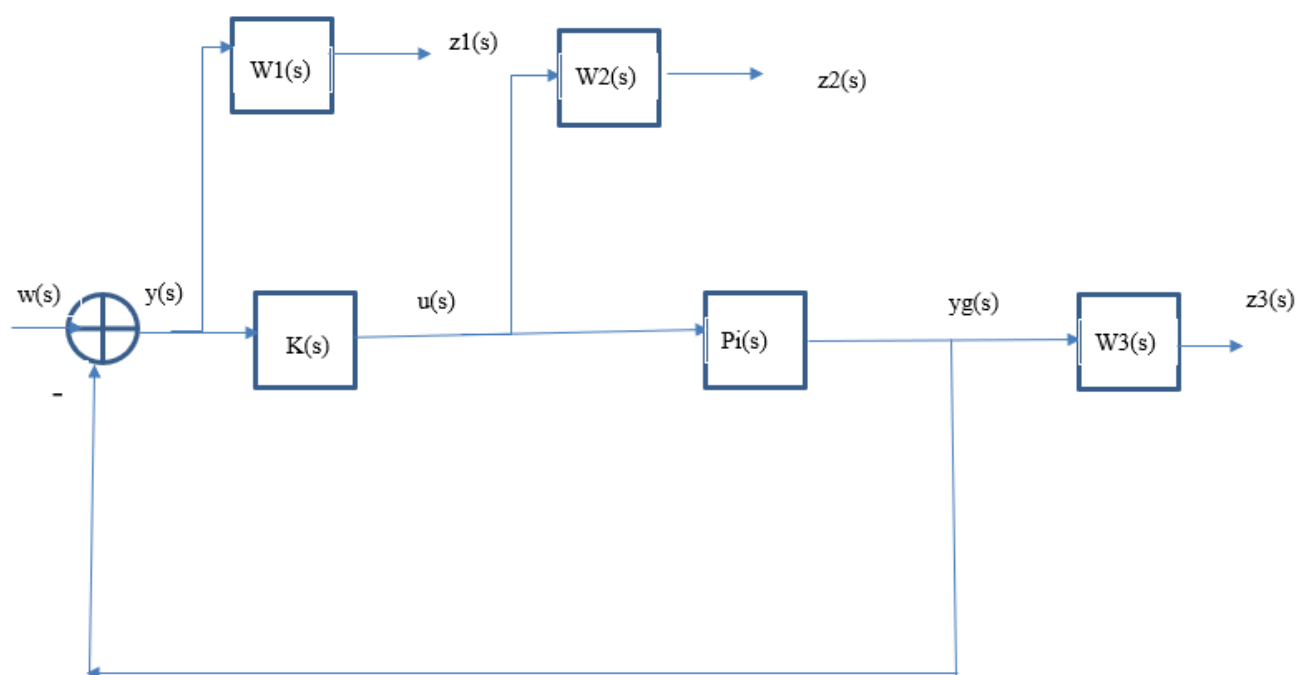


Figura 3.3

### 3.1 Controllo $H_\infty$

Per iniziare, si è provato a realizzare un controllo  $H_{inf}$  basato sull'impianto in figura 3.3. Per fare ciò, si è realizzata la forma TITO del seguente impianto e poi tramite matlab ci si è ricavato il controllore.

$$\begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ z3 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W1(s) & -W1(s)Pi(s) \\ 0 & W2(s) \\ 0 & W3(s)Pi(s) \\ 1 & -Pi(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

Prima di poter ricavare il controllore si è proceduto alla verifica delle seguenti ipotesi:

$(A, B_1)$  controllabile e  $(A, C_1)$

osservabile  $(A, B_2)$  stabilizzabile e

$(A, C_2)$  rilevabile

dove  $B_1$  è la matrice degli ingressi esogeni e  $C_1$  è la matrice delle uscite di interesse,  $B_2$  è la matrice dell'ingresso di controllo e  $C_1$  è la matrice dell'uscita di controllo del sistema TITO. L'obiettivo di questo controllo è quello di andare a minimizzare il nostro  $|Tzw|_\infty$ , facendo in modo che risulti minore di un certo gamma. Nel controllo  $H_{inf}$  però, non si riesce a garantire stabilità robusta e analogamente le performance sono pessime.

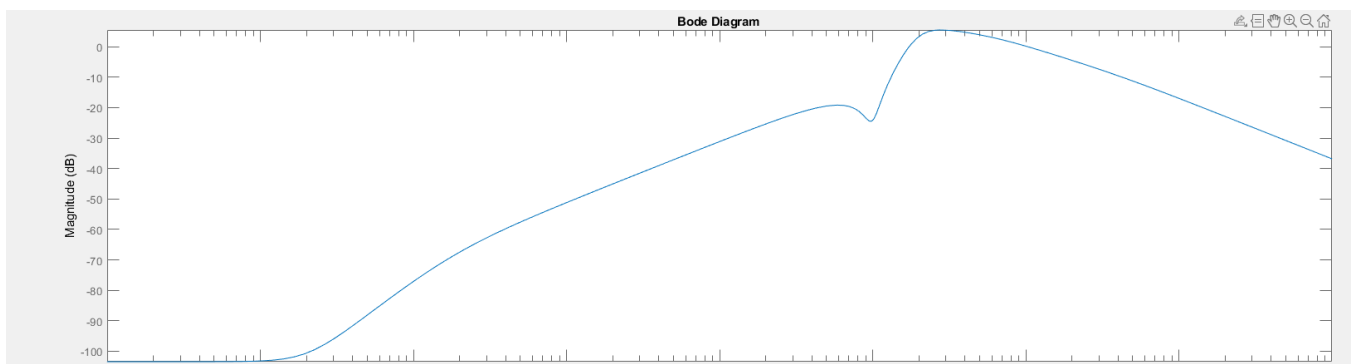


Figura 3.4

### 3.2 Controllo $\mu$ – Sintesi

Questo tipo di controllo si basa sui valori singolari strutturati. Si passa ad un modello di incertezza che si dice strutturato che specifica quali uscite si chiudono su quali ingressi della matrice delle incertezze. Di conseguenza la matrice sarà strutturalmente diagonale e si andrà a considerare una norma che tiene conto di questa particolare forma della matrice ovvero la norma  $\mu$  :

$$\|Q\|_{\mu} = \sup_{\omega} \mu(Q(j\omega))$$

dove  $\mu(Q(j\omega))$  si definisce valore singolare strutturato della matrice  $Q$ :

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \text{ se } \det(I - Q\Delta) \neq 0 \forall \Delta \in BD_{\infty} \\ 1 \\ \hline \min_{\Delta \in BD_{\infty}} \{ \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) : \det(I - Q\Delta) = 0 \} \end{array} \right.$$

Per la realizzazione si è dunque realizzato il sistema TITO tramite il connect di matlab, realizzando l'impianto citato precedentemente e da ciò si è riuscito a ricavare un controllore che ha garantito analisi robusta e performance robuste.

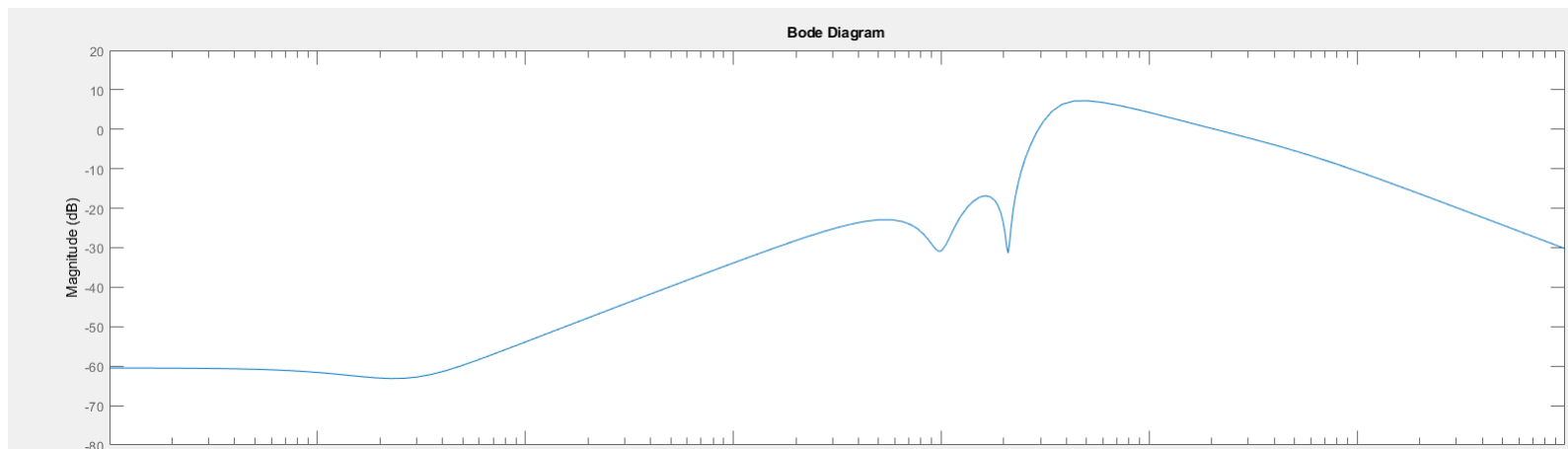
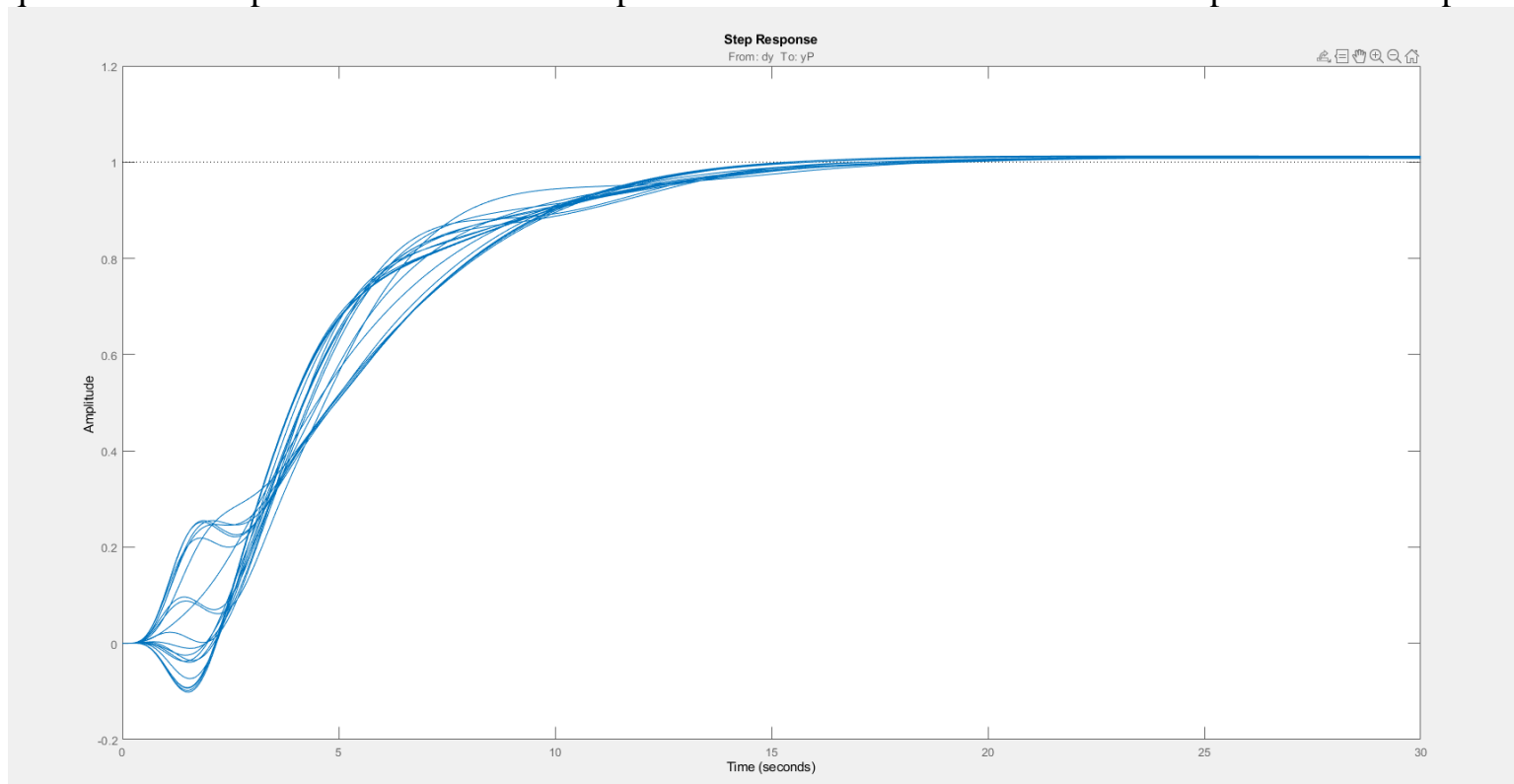
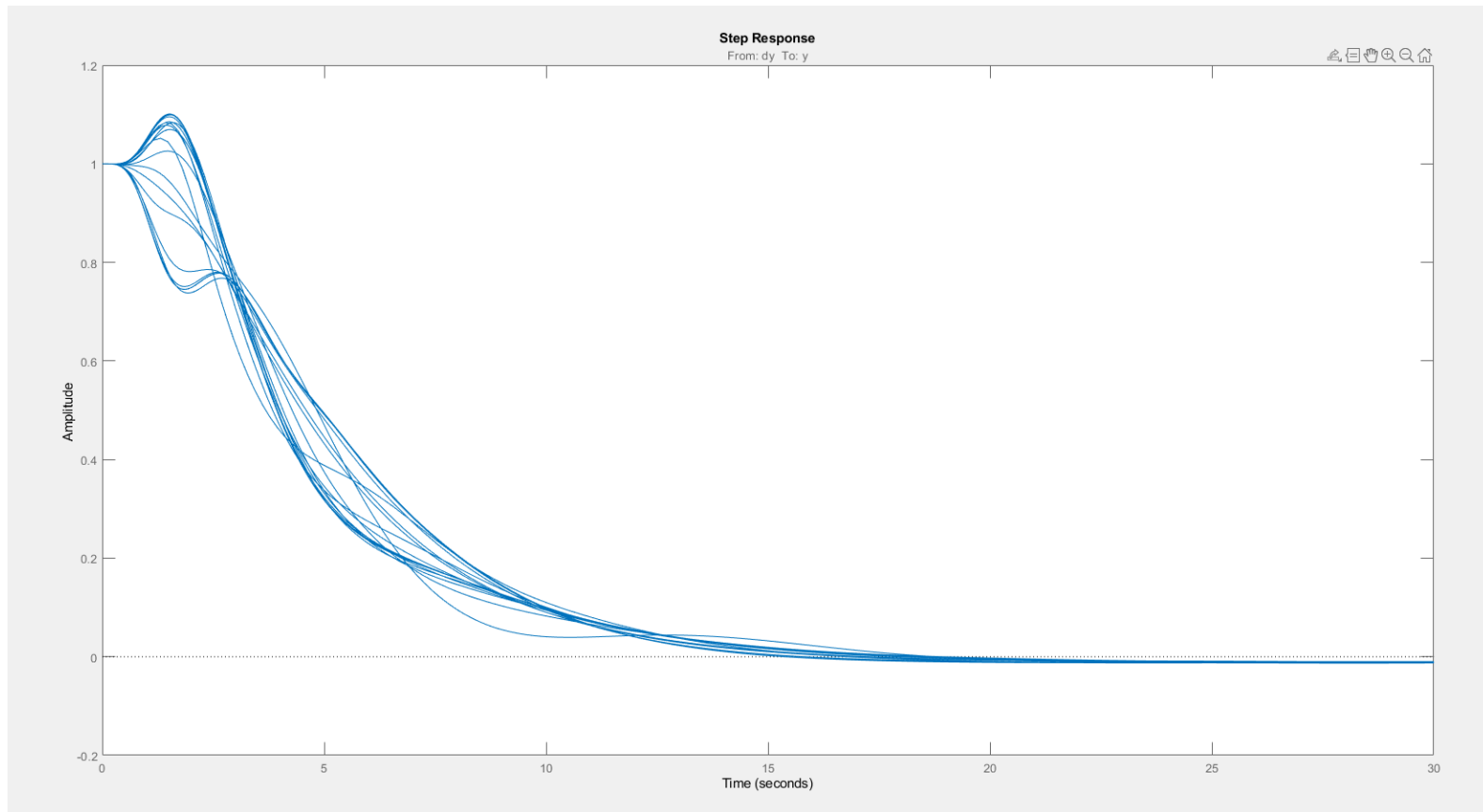


Figura 3.5

Andando inoltre ad analizzare le funzioni di sensitività diretta e complementare ottenute, si evince come queste rispettivamente le specifiche citate nel primo capitolo.



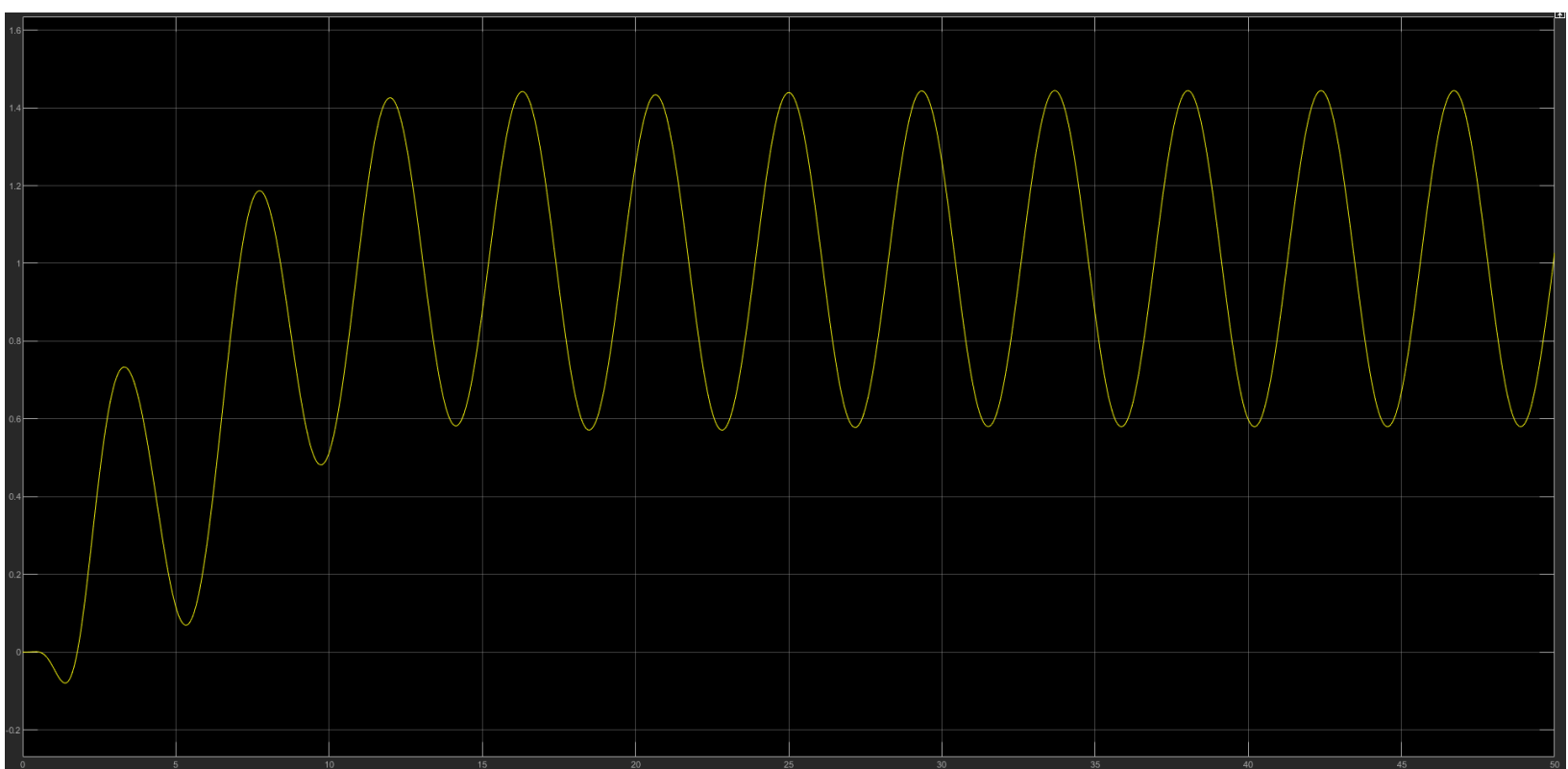


Si riportano inoltre i report di matlab sull'analisi di stabilità robusta e delle performance

```
System is robustly stable for the modeled uncertainty.
-- It can tolerate up to 359% of the modeled uncertainty.
-- There is a destabilizing perturbation amounting to 359% of the modeled uncertainty.
-- This perturbation causes an instability at the frequency 1.45 rad/seconds.
```

```
The performance level 1.5 is robust to the modeled uncertainty.
-- The gain remains below 1.5 for up to 151% of the modeled uncertainty.
-- There is a bad perturbation amounting to 151% of the modeled uncertainty.
-- This perturbation causes a gain of 1.5 at the frequency 1.86 rad/seconds.
```

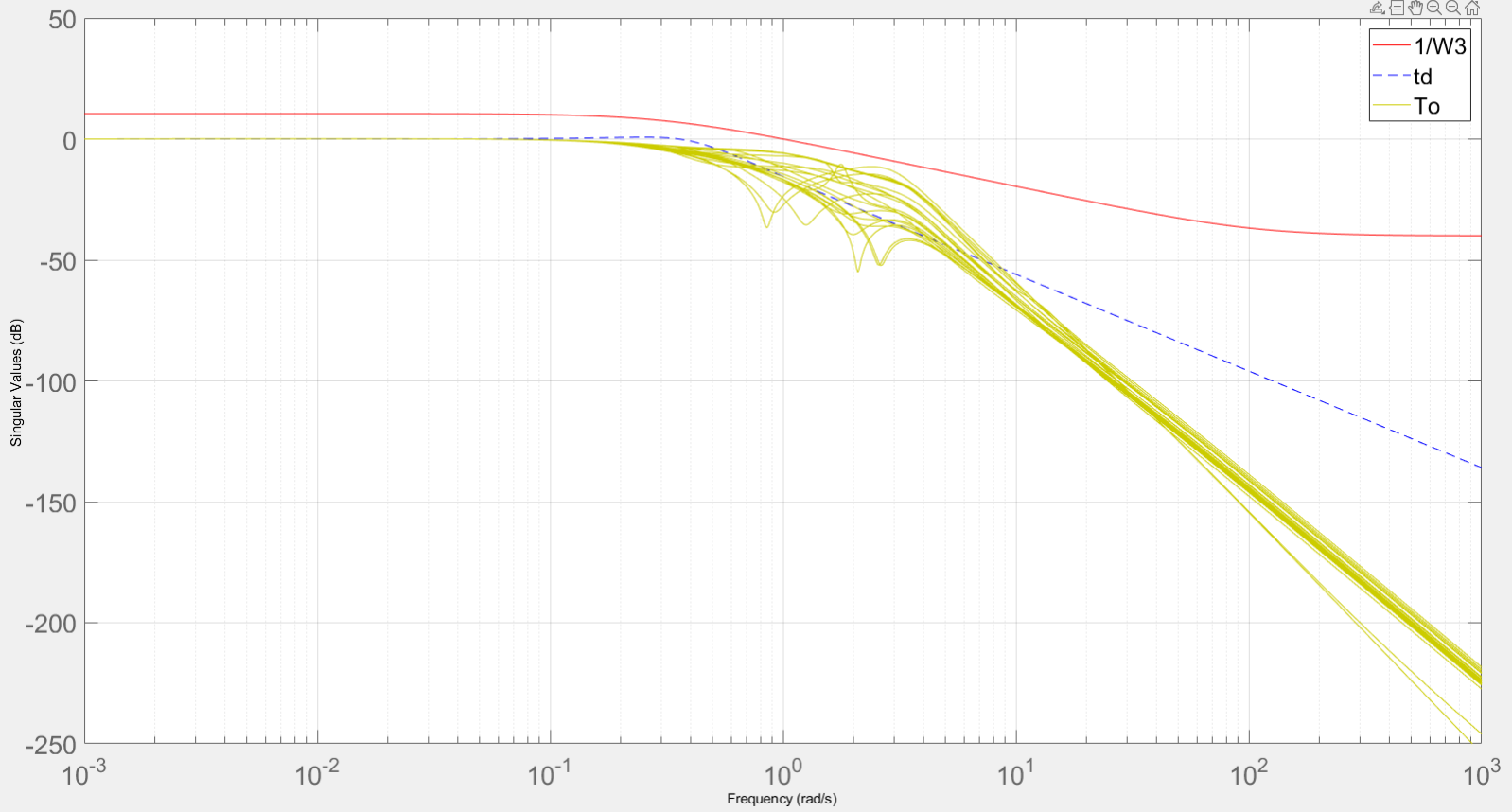
Per concludere, si riporta anche una simulazione simulink con riferimento 1 nel WCU



## 4 Conclusioni

Tutto ciò visto è stato fatto per un sistema nominale che si trovasse all'interno del range stabilito in base ai parametri incerti. Analogamente, se provassimo a prendere altri sistemi nominali, il tutto risulterebbe comunque uguale. Infine viene mostrato un confronto tra le Sensisitivà desiderate, i reciproci delle funzioni di peso associate e le Sensitività trovate.

confronto  $1/W_3$ ,  $T_d$  e  $T_o$



confronto  $1/W1$ ,  $S_d$  e  $S_o$

