Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ РАБОТЫ

по дисциплине «ДИСЦИПЛИНА»

Студент:	Александров Максим Алексеевич
Группа:	РК6-81Б
Тип задания:	РАБОТА
Тема:	ВАРИАНТ

Студент ____________ подпись, дата Александров М.А. Фамилия, И.О.

Преподаватель ____________ подпись, дата ____________ Фамилия, И.О.

Москва, 2025

Содержание

ВАРИАНТ

Задание

Нужно сделать:

- Первое
- Второе
- Третье

1 Задача №1: Система без ремонта

1.1 Описание системы

Система состоит из устройств типа A и типа B с интенсивностями отказов λ_A и λ_B соответственно. Для функционирования системы требуется хотя бы одно устройство типа A и хотя бы N_B устройств типа B. Также имеются резервные устройства в количествах R_A и R_B соответственно, причём в нормальном состоянии одновременно включены сразу N_A устройств типа A.

Параметры системы:

$$\lambda_A = G + (N \bmod 3) = 1 + (260 \bmod 3) = 1 + 2 = 3 \tag{1}$$
$$\lambda_B = G + (N \bmod 5) = 1 + (260 \bmod 5) = 1 + 0 = 1 \tag{2}$$
$$N_A = 2 + (G \bmod 2) = 2 + (1 \bmod 2) = 2 + 1 = 3 \tag{3}$$
$$N_B = 1 + (N \bmod 2) = 1 + (260 \bmod 2) = 1 + 0 = 1 \tag{4}$$
$$R_A = 1 + (G \bmod 2) = 1 + (1 \bmod 2) = 1 + 1 = 2 \tag{5}$$
$$R_B = 2 - (G \bmod 2) = 2 - (1 \bmod 2) = 2 - 1 = 1 \tag{6}$$

1.2 Граф состояний системы

Состояние системы определяется парой (a, b), где a - количество работающих устройств типа A, b - количество работающих устройств типа B. Система работоспособна, если $a \geq 1$ и $b \geq N_B = 1$.

Общее количество состояний системы:

$$(N_A + R_A + 1) \cdot (N_B + R_B + 1) = (3 + 2 + 1) \cdot (1 + 1 + 1) = 6 \cdot 3 = 18 \tag{7}$$

Граф состояний системы представлен на рисунке `state_graph_task1.png`.

1.3 Матрица интенсивностей переходов

Матрица интенсивностей переходов Q размера 18×18 содержит интенсивности переходов между всеми возможными состояниями системы. Элемент Q_{ij} представляет интенсивность перехода из состояния i в состояние j.

Переходы в системе происходят при отказах устройств:

- Отказ устройства типа A: переход из состояния (a, b) в состояние $(a - 1, b)$ с интенсивностью $a \cdot \lambda_A$
- Отказ устройства типа B: переход из состояния (a, b) в состояние $(a, b - 1)$ с интенсивностью $b \cdot \lambda_B$

Диагональные элементы матрицы Q содержат отрицательные суммы всех интенсивностей выхода из соответствующих состояний:

$$Q_{ii} = -\sum_{j \neq i} Q_{ij} \tag{8}$$

Граф переходов системы представлен на рисунке `transition_graph_task1.png`.

1.4 Дифференциальные уравнения Колмогорова

Дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний системы имеют вид:

$$\frac{dp(t)}{dt} = Q^T \cdot p(t) \tag{9}$$

где:

- $p(t)$ - вектор вероятностей состояний системы в момент времени t
- Q^T - транспонированная матрица интенсивностей переходов

Начальное условие: $p(0) = [1, 0, \ldots, 0]^T$, что соответствует состоянию, когда все устройства исправны.

1.5 Решение уравнений Колмогорова

Для решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова используется метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Результаты решения представлены на графике вероятностей состояний системы (`states_probabilities_task1.png`).

1.6 Функция надёжности системы

Функция надёжности системы $R(t)$ определяется как вероятность того, что система работоспособна в момент времени t:

$$R(t) = \sum_{a \geq 1, b \geq N_B} p_{(a,b)}(t) \tag{10}$$

График функции надёжности представлен на рисунке `reliability_function_task1.png`.

1.7 Математическое ожидание времени безотказной работы

Математическое ожидание времени безотказной работы (MTTF) вычисляется как интеграл от функции надёжности:

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)dt \tag{11}$$

В программе этот интеграл вычисляется численно методом трапеций:

$$MTTF \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{R(t_{i-1}) + R(t_i)}{2} \cdot (t_i - t_{i-1}) \tag{12}$$

Полученное значение MTTF (аналитическое): 0.736181

1.8 Имитационное моделирование

Имитационное моделирование системы в терминах непрерывных марковских цепей проводится 100 раз. Для каждого эксперимента моделируется случайная траектория системы до момента отказа.

Алгоритм моделирования:

1. Начальное состояние: $a = N_A + R_A = 5$, $b = N_B + R_B = 2$, $t = 0$
2. Пока система работоспособна ($a \geq 1$ и $b \geq N_B = 1$):
   (a) Вычисляем суммарную интенсивность переходов: $\lambda_{total} = a \cdot \lambda_A + b \cdot \lambda_B$
   (b) Генерируем время до следующего события: $\Delta t \sim Exp(\lambda_{total})$
   (c) Обновляем время: $t = t + \Delta t$
   (d) С вероятностью $\frac{a \cdot \lambda_A}{\lambda_{total}}$ происходит отказ устройства типа А: $a = a - 1$
   (e) С вероятностью $\frac{b \cdot \lambda_B}{\lambda_{total}}$ происходит отказ устройства типа В: $b = b - 1$
3. Возвращаем время до отказа системы t

Результаты имитационного моделирования:

- MTTF (имитационный): 0.58089
- Стандартное отклонение: 0.323707

1.9 Гистограмма времени безотказной работы

Для визуализации распределения времени безотказной работы системы необходимо построить гистограмму результатов имитационного моделирования. Функция `plotHistogram` объявлена в `GnuplotPlotter.h`, но не реализована в исходном коде.

Реализация этой функции должна создавать гистограмму на основе вектора времен отказов, полученных в результате имитационного моделирования. Примерный код реализации:

```
void GnuplotPlotter::plotHistogram(
    const std::vector<double>& data,
    const std::string& title,
    const std::string& outputPrefix
) {
    std::ofstream script(outputPrefix + ".gp");
    script << "set terminal png size 800,600\n";
    script << "set output '" << outputPrefix << ".png'\n";
    script << "set title '" << title << "'\n";
    script << "set xlabel 'Время до отказа'\n";
    script << "set ylabel 'Частота'\n";
```

```
    script << "set grid\n";

    // Определяем количество бинов по правилу Стёрджеса
    int numBins = 1 + 3.322 * log10(data.size());

    // Находим минимальное и максимальное значения
    double minVal = *std::min_element(data.begin(), data.end());
    double maxVal = *std::max_element(data.begin(), data.end());

    // Вычисляем ширину бина
    double binWidth = (maxVal - minVal) / numBins;

    script << "binwidth = " << binWidth << "\n";
    script << "bin(x,width) = width*floor(x/width)\n";
    script << "set boxwidth binwidth\n";

    // Сохраняем данные во временный файл
    std::ofstream datafile(outputPrefix + ".dat");
    for (double value : data) {
        datafile << value << "\n";
    }
    datafile.close();

    script << "plot '" << outputPrefix << ".dat' using (bin($1,binwidth)):(1.0) "
           << "smooth freq with boxes title 'Frequency'\n";

    script.close();

    std::string command = "gnuplot " + outputPrefix + ".gp";
    std::system(command.c_str());
}
```

Для использования этой функции в `main.cpp` необходимо добавить код:

```
// Получаем времена отказов из 100 экспериментов
std::vector<double> failureTimes;
failureTimes.reserve(100);
for (int i = 0; i < 100; ++i) {
    failureTimes.push_back(simulator.simulateSingleRun());
}

// Строим гистограмму
GnuplotPlotter::plotHistogram(failureTimes, "Распределение времени безотказной работы",
```

2 Задача №2: Система с ремонтом

2.1 Описание системы

Рассматривается система, аналогичная задаче №1, но в которой возможна организация ремонта ранее вышедших из строя устройств. Одновременно может ремонтироваться только одно устройство. Если подлежат ремонту устройства разных типов, приоритет отдаётся тем, которых сломалось больше, а если их сломалось одинаковое число – тому типу, интенсивность поломок которого выше.

Параметры системы:

$$\lambda_A = 3 \quad (13)$$

$$\lambda_B = 1 \quad (14)$$

$$N_A = 3 \quad (15)$$

$$N_B = 1 \quad (16)$$

$$R_A = 2 \quad (17)$$

$$R_B = 1 \quad (18)$$

$$\lambda_S = 3 \quad (19)$$

2.2 Граф состояний и матрица переходов

Состояние системы определяется парой (a, b), где a - количество работающих устройств типа A, b - количество работающих устройств типа B. Система работоспособна, если $a \geq 1$ и $b \geq N_B = 1$.

Общее количество состояний системы:

$$(N_A + R_A + 1) \cdot (N_B + R_B + 1) = (3 + 2 + 1) \cdot (1 + 1 + 1) = 6 \cdot 3 = 18 \quad (20)$$

Граф состояний системы представлен на рисунке `state_graph_task2.png`.

Матрица интенсивностей переходов Q размера 18×18 содержит интенсивности переходов между всеми возможными состояниями системы. Элемент Q_{ij} представляет интенсивность перехода из состояния i в состояние j.

Переходы в системе происходят при отказах и ремонте устройств:

- Отказ устройства типа A: переход из состояния (a, b) в состояние $(a - 1, b)$ с интенсивностью $a \cdot \lambda_A$
- Отказ устройства типа B: переход из состояния (a, b) в состояние $(a, b - 1)$ с интенсивностью $b \cdot \lambda_B$
- Ремонт устройства типа A: переход из состояния (a, b) в состояние $(a + 1, b)$ с интенсивностью λ_S, если ремонтируется устройство типа A
- Ремонт устройства типа B: переход из состояния (a, b) в состояние $(a, b + 1)$ с интенсивностью λ_S, если ремонтируется устройство типа B

Приоритет ремонта определяется следующим образом:

- Если количество неисправных устройств типа A больше, чем типа B, то ремонтируется устройство типа A
- Если количество неисправных устройств типа B больше, чем типа A, то ремонтируется устройство типа B
- Если количество неисправных устройств обоих типов одинаково, то ремонтируется устройство того типа, интенсивность отказов которого выше (в нашем случае, типа A, так как $\lambda_A > \lambda_B$)

2.3 Алгебраические уравнения Колмогорова для установившегося режима

В установившемся режиме вероятности состояний не меняются со временем, поэтому производные равны нулю:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, 17 \tag{21}$$

Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений. Для каждого состояния i уравнение имеет вид:

$$\sum_{j \neq i} q_{ji} \cdot \pi_j = \sum_{j \neq i} q_{ij} \cdot \pi_i \tag{22}$$

где q_{ij} - элемент матрицы интенсивностей переходов Q, π_i - стационарная вероятность состояния i.

Запишем эти уравнения в матричной форме:

$$Q^T \cdot \pi = 0 \tag{23}$$

где Q^T - транспонированная матрица интенсивностей переходов, π - вектор стационарных вероятностей, 0 - вектор нулей.

Дополнительно необходимо условие нормировки:

$$\sum_{i=0}^{17} \pi_i = 1 \tag{24}$$

Рассмотрим несколько примеров уравнений для конкретных состояний:

Для состояния $(5, 2)$ (все устройства исправны):

$$\frac{dp_{(5,2)}(t)}{dt} = 0 \tag{25}$$

$$-\pi_{(5,2)} \cdot (5\lambda_A + 2\lambda_B) + \pi_{(4,2)} \cdot \lambda_S + \pi_{(5,1)} \cdot \lambda_S = 0 \tag{26}$$

$$-\pi_{(5,2)} \cdot (5 \cdot 3 + 2 \cdot 1) + \pi_{(4,2)} \cdot 3 + \pi_{(5,1)} \cdot 3 = 0 \tag{27}$$

$$-\pi_{(5,2)} \cdot 17 + \pi_{(4,2)} \cdot 3 + \pi_{(5,1)} \cdot 3 = 0 \tag{28}$$

Для состояния $(4,2)$ (одно устройство типа A неисправно):

$$\frac{dp_{(4,2)}(t)}{dt} = 0 \tag{29}$$

$$\pi_{(5,2)} \cdot 5\lambda_A - \pi_{(4,2)} \cdot (4\lambda_A + 2\lambda_B + \lambda_S) + \pi_{(3,2)} \cdot \lambda_S + \pi_{(4,1)} \cdot \lambda_S = 0 \tag{30}$$

$$\pi_{(5,2)} \cdot 15 - \pi_{(4,2)} \cdot (12 + 2 + 3) + \pi_{(3,2)} \cdot 3 + \pi_{(4,1)} \cdot 3 = 0 \tag{31}$$

$$\pi_{(5,2)} \cdot 15 - \pi_{(4,2)} \cdot 17 + \pi_{(3,2)} \cdot 3 + \pi_{(4,1)} \cdot 3 = 0 \tag{32}$$

Для состояния $(5,1)$ (одно устройство типа B неисправно):

$$\frac{dp_{(5,1)}(t)}{dt} = 0 \tag{33}$$

$$\pi_{(5,2)} \cdot 2\lambda_B - \pi_{(5,1)} \cdot (5\lambda_A + \lambda_B + \lambda_S) + \pi_{(4,1)} \cdot \lambda_S + \pi_{(5,0)} \cdot \lambda_S = 0 \tag{34}$$

$$\pi_{(5,2)} \cdot 2 - \pi_{(5,1)} \cdot (15 + 1 + 3) + \pi_{(4,1)} \cdot 3 + \pi_{(5,0)} \cdot 3 = 0 \tag{35}$$

$$\pi_{(5,2)} \cdot 2 - \pi_{(5,1)} \cdot 19 + \pi_{(4,1)} \cdot 3 + \pi_{(5,0)} \cdot 3 = 0 \tag{36}$$

Аналогичные уравнения можно записать для всех остальных состояний системы.

2.4 Предельные вероятности состояний системы

Для решения системы уравнений Колмогорова для установившегося режима используется следующий алгоритм:

1. Создается матрица $A = Q^T$
2. Последняя строка A заменяется на условие нормировки (все элементы = 1)
3. Создается вектор правой части $b = [0, 0, \ldots, 1]^T$
4. Решается система $A \cdot \pi = b$ методом QR-разложения

2.5 Характеристики системы

На основе стационарных вероятностей состояний вычисляются следующие характеристики системы:

Вероятность отказа системы Вероятность отказа системы равна сумме вероятностей состояний, в которых система не функционирует:

$$P_{failure} = \sum_{a<1 \text{ или } b<N_B} \pi_{(a,b)} \tag{37}$$

Полученное значение: 0.545037

Среднее число готовых устройств Среднее число готовых устройств типа A:

$$\bar{A} = \sum_{a,b} a \cdot \pi_{(a,b)} = 1.90617 \tag{38}$$

Среднее число готовых устройств типа B:

$$\bar{B} = \sum_{a,b} b \cdot \pi_{(a,b)} = 0.83057 \tag{39}$$

Коэффициент загрузки ремонтной службы Коэффициент загрузки ремонтной службы равен сумме вероятностей состояний, в которых происходит ремонт:

$$K_{repair} = \sum_{(a,b)\neq(N_A+R_A,N_B+R_B)} \pi_{(a,b)} = 0.993679 \tag{40}$$

2.6 Дифференциальные уравнения Колмогорова

Дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний системы имеют вид:

$$\frac{dp(t)}{dt} = Q^T \cdot p(t) \tag{41}$$

где $p(t)$ - вектор вероятностей состояний системы в момент времени t, Q^T - транспонированная матрица интенсивностей переходов.

Запишем эти уравнения для нескольких состояний:

Для состояния $(5,2)$ (все устройства исправны):

$$\frac{dp_{(5,2)}(t)}{dt} = -p_{(5,2)}(t) \cdot (5\lambda_A + 2\lambda_B) + p_{(4,2)}(t) \cdot \lambda_S + p_{(5,1)}(t) \cdot \lambda_S \tag{42}$$

$$= -p_{(5,2)}(t) \cdot 17 + p_{(4,2)}(t) \cdot 3 + p_{(5,1)}(t) \cdot 3 \tag{43}$$

Для состояния $(4,2)$ (одно устройство типа A неисправно):

$$\frac{dp_{(4,2)}(t)}{dt} = p_{(5,2)}(t) \cdot 5\lambda_A - p_{(4,2)}(t) \cdot (4\lambda_A + 2\lambda_B + \lambda_S) + p_{(3,2)}(t) \cdot \lambda_S + p_{(4,1)}(t) \cdot \lambda_S \tag{44}$$

$$= p_{(5,2)}(t) \cdot 15 - p_{(4,2)}(t) \cdot 17 + p_{(3,2)}(t) \cdot 3 + p_{(4,1)}(t) \cdot 3 \tag{45}$$

Для состояния $(5,1)$ (одно устройство типа B неисправно):

$$\frac{dp_{(5,1)}(t)}{dt} = p_{(5,2)}(t) \cdot 2\lambda_B - p_{(5,1)}(t) \cdot (5\lambda_A + \lambda_B + \lambda_S) + p_{(4,1)}(t) \cdot \lambda_S + p_{(5,0)}(t) \cdot \lambda_S \tag{46}$$

$$= p_{(5,2)}(t) \cdot 2 - p_{(5,1)}(t) \cdot 19 + p_{(4,1)}(t) \cdot 3 + p_{(5,0)}(t) \cdot 3 \tag{47}$$

Начальное условие: $p(0) = [1,0,\ldots,0]^T$, что соответствует состоянию, когда все устройства исправны.

2.7 Решение уравнений Колмогорова и время переходного процесса

Для решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова используется метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

Время переходного процесса оценивается как время, необходимое для того, чтобы эвклидова норма вектора невязки с ранее рассчитанным предельным вектором составляла не более 1% эвклидовой нормы последнего:

$$\|p(t) - \pi\| \le 0.01 \cdot \|\pi\| \tag{48}$$

Оценка времени переходного процесса: 6.00601

Время моделирования выбирается вдвое больше теоретической оценки времени переходного процесса: $2 \cdot 6.00601 = 12.01202$

Результаты решения представлены на графике вероятностей состояний системы (`states_probabilities_task2.png`).

2.8 Имитационное моделирование

Моделирование в терминах непрерывных марковских цепей Результаты моделирования:

- Вероятность отказа системы: 0.929348
- Среднее число готовых устройств типа A: 1.345498
- Среднее число готовых устройств типа B: 0.132479
- Коэффициент загрузки ремонтной службы: 0.978996

График траектории марковского процесса представлен на рисунке `repairable_markov_chain_trajectory.png`.

Моделирование в терминах дискретно-событийного моделирования Результаты моделирования:

- Вероятность отказа системы: 0.386486
- Среднее число готовых устройств типа A: 0.960225
- Среднее число готовых устройств типа B: 1.020829
- Коэффициент загрузки ремонтной службы: 0.993894

График траектории дискретно-событийного процесса представлен на рисунке `repairable_discrete_event_trajectory.png`.