

## ЛЕКЦИЯ № 9

## Билинейные и квадратичные формы.

*Билинейные и квадратичные формы. Преобразование матрицы квадратичной формы при переходе к другому базису.*

## 1. Билинейные формы

**Определение.** Билинейной формой  $B(\vec{x}, \vec{y})$  на линейном пространстве  $V_n$  ( $\dim V_n = n$ ), называется отображение пары векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  в число,  $(B: V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{R})$ , если оно линейно по каждому аргументу:

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_n; \forall \beta \in \mathbb{R}$$

$$1) B(\vec{x} + \vec{z}, \vec{y}) = B(\vec{x}, \vec{y}) + B(\vec{z}, \vec{y})$$

$$2) B(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = B(\vec{x}, \vec{y}) + B(\vec{x}, \vec{z})$$

$$3) B(\beta \vec{x}, \vec{y}) = \beta B(\vec{x}, \vec{y}) = B(\vec{x}, \beta \vec{y})$$

В базисе  $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n\}$  билинейная форма может быть задана матрицей  $B\{b_{ij}\}; b_{ij} = B(\vec{e}_i; \vec{e}_j)$ ;

$$B = \begin{pmatrix} B(\vec{e}_1; \vec{e}_1) & \dots & B(\vec{e}_1; \vec{e}_n) \\ \dots & B(\vec{e}_i; \vec{e}_j) & \dots \\ B(\vec{e}_n; \vec{e}_1) & \dots & B(\vec{e}_n; \vec{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & b_{ij} & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Обозначим  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ .

**Теорема 1.** Если  $B(\vec{x}, \vec{y})$  - билинейная форма, то

$$\begin{aligned} B(\vec{x}, \vec{y}) &= (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & b_{ij} & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T B Y = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i y_j \end{aligned}$$

Пример 1:  $B(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 4x_2y_1 + x_2y_2 =$

$$(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix};$$

**Теорема 2.** При переходе к другому базису матрица билинейной формы меняется по следующему правилу:

$$B' = P^T B P$$

где P-матрица перехода от базиса S к базису S', B- матрица в базисе S, B' - матрица в базисе S'.

► Рассмотрим преобразование координат при переходе к другому базису. Пусть X - координаты вектора в базисе S, а X' - координаты вектора в базисе S'. Тогда

$$X = P X'; \ Y = P Y';$$

где P-матрица перехода от базиса S к базису S',

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = X^T B Y = (P X')^T B (P Y') = X'^T (P^T B P) Y' = X'^T B' Y' \Rightarrow$$

$$B' = P^T B P.$$

Используется формула  $(AB)^T = B^T A^T$  ◀

**Определение.** Рангом билинейной формы называется ранг ее матрицы в любом базисе.

**Следствие.** Ранг билинейной формы не зависит от базиса.

**Определение.** Билинейная форма называется *вырожденной*, если её ранг меньше размерности пространства, и *невырожденной*, если её ранг равен размерности пространства.

**Определение.** Билинейная форма называется **симметричной**, если  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n; B(\vec{x}, \vec{y}) = B(\vec{y}, \vec{x})$

**Теорема 3.** Билинейная форма симметричная тогда и только тогда, когда ее матрица симметричная.

► Билинейная форма симметричная  $\Rightarrow B(\vec{e}_i; \vec{e}_j) = B(\vec{e}_j; \vec{e}_i); \Rightarrow b_{ij} = b_{ji} \Rightarrow$  матрица B-симметричная.

Матрица B-симметричная  $\Rightarrow b_{ij} = b_{ji} \Rightarrow$

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = X^T B Y = (X^T B Y)^T = Y^T B^T X = Y^T B X = B(\vec{y}, \vec{x})$$

(так как это число)                      (так как B-симметрическая и  $B^T = B$ )

=> B симметричная билинейная форма. ◀

## 2. Квадратичные формы.

**Определение.** Функция  $\varphi(\vec{x}) = A(\vec{x}, \vec{x})$ , где  $A(\vec{x}, \vec{y})$  - симметричная билинейная форма, называется **квадратичной формой**.

Матрица квадратичной формы в базисе  $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n\}$ :

$$A = \begin{pmatrix} A(\vec{e}_1; \vec{e}_1) & \dots & A(\vec{e}_1; \vec{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ A(\vec{e}_n; \vec{e}_1) & \dots & A(\vec{e}_n; \vec{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A – симметричная матрица,  $a_{ij} = a_{ji}$

$$\varphi(\vec{x}) = (x_1 \dots x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

$(x_1 \dots x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  – векторно-матричная форма записи квадратичной формы;

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  – координатная форма записи квадратичной формы

Для квадратичной формы в базисе  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$$\varphi(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

Пример 2 Квадратичная форма  $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 - 3x_2x_3 + 7x_3^2$

Имеет матрицу:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1.5 \\ 0 & -1.5 & 7 \end{pmatrix}$ .

В матричной записи квадратичная форма имеет вид:

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 - 3x_2x_3 + 7x_3^2 = (x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1.5 \\ 0 & -1.5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

**Определение** Ранг квадратичной формы  $\varphi(\bar{x})$  – это ранг ее матрицы.

**Определение** Если  $\text{rang } \varphi(\bar{x}) = n = \dim V_n$ , то квадратичная форма называется **невыврожденной**. Иначе, если  $\text{rang } \varphi(\bar{x}) < n$ , то **вырожденной**.

Квадратичная форма из примера 2 невырожденная, т.к.  $\text{rang } A=3$ .

### Пример 3

Квадратичная форма  $\varphi(\bar{x}) = x_1^2 + 6x_1x_3$  имеет матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ Так как } \text{rang } A=2<3, \text{ данная квадратичная форма является}$$

вырожденной.

### Пример 4

В некотором базисе задана квадратичная форма

$$\varphi(\bar{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 6x_2x_3 - x_3^2$$

Выписать ее матрицу и найти ее значение на векторе  $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\varphi(\bar{a}) = (1 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0 \ -1 \ -2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$$

### **3. Преобразование матрицы квадратичной формы при переходе к другому базису:**

**Теорема 4.** Если  $A_1$  – матрица квадратичной формы в базисе  $B_1$ ,  $A_2$  – матрица квадратичной формы – матрица в базисе  $B_2$ ,  $P$  – матрица перехода от  $B_1$  к  $B_2$ , тогда  $A_2 = P^T A_1 P$

► Является следствием теоремы 2. ◄

### Пример 5

Базис  $B_1 = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ ; Базис  $B_2 = \{\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2; \vec{e}_2 - \vec{e}_1\}$ ;

$$\varphi_{B_1}(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2;$$

Выписать квадратичную форму в базисе  $B_2$ .

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = P^T A_1 P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{B_2}(\vec{y}) = 5y_1^2 + 8y_1y_2 + 5y_2^2;$$

### Пример 6.

Квадратичную форму  $\varphi(\vec{x}) = 7x_1^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 6x_2x_3 + 2x_3^2$

преобразовать к новым переменным:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ x_3 = y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

Запишем замену переменных в матричном виде:  $X = PY$ ;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда, согласно теореме 4 имеем

$$A_2 = P^T A_1 P$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Тогда квадратичная форма принимает вид:

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2,$$

Как мы видим, все коэффициенты при попарных произведениях обнулились и остались только слагаемые с квадратами переменных.