МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
„МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ“

Барашев Виктор Павлович
Унучек Светлана Александровна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

МОСКВА 2012

ББК 22.176я73
Б24
УДК 519(075)

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор кафедры автоматизации научных исследований факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова Ф.С. Зайцев,

доцент института бизнеса, психологии и управления А.М. Мнацаканов.

Барашев В.П., Унучек С.А. Дискретная математика : Учебное пособие Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования „Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики“- М., 2012. -268 с., электронное издание

В основе настоящего пособия положен курс лекций и практических занятий по дискретной математике, который на протяжении многих лет читается студентам различных факультетов МГТУ МИРЭА.

В пособии рассмотрены следующие темы: минимизация ДНФ, полнота систем булевых функций, экстремальные задачи на графах и задача об оптимальном назначении, вошедшие в программу подготовки специалистов и бакалавров очной и очно-заочной форм обучения. По каждой теме даны теоретические сведения (основные определения и теоремы), приведены решения типовых задач, приложены задачи для самостоятельного решения.

Табл.124, Ил.149, Библиогр.: 9 назв.

Издается в электронном виде по решению редакционно-издательского совета Московского государственного технического университета радиотехники, электроники и автоматики.

Электронное издание, номер государственной регистрации 0321200633 от 7 марта 2012 года.

ISBN 978-5-7339-0919-2

Введение

В основе настоящего пособия положен курс лекций и практических занятий по дискретной математике, который читается студентам дневного отделения факультета РТС МИРЭА.

Дискретная математика -раздел математики, основанный на изучении величин, принимающих различные строго фиксированные (так называемые ***"дискретные"***) значения.

В целом дискретная математика включает в себя теорию чисел, математическую логику, k-значную алгебру, теорию кодирования, теорию алгоритмов и т.д.

В нашем курсе мы будем изучать только функции, зависящие от двух чисел (0 и 1) и теорию графов. Изучение двузначной логики связано с развитием вычислительной техники и информатики. Компьютеры состоят из элементов с двумя устойчивыми состояниями. Одно состояние означает отсутствие сигнала (электрического, магнитного, оптического и т.д.) и обычно обозначается числом 0, второе - наличие сигнала (число 1). Функционирование элементов компьютера описывается логическими функциями, в которых символ "0" имеет логическую трактовку "ЛОЖЬ" ("нет") , а символ "1" - "ИСТИНА" ("да"). По этой причине изучение и применение дискретной математики необходимо при разработке различных средств радио- и вычислительной техники.

Глава 1

Элементы теории множеств

1.1 Введение в теорию множеств

1.1.1 Основные понятия теории множеств

Будем считать понятие ***множества*** неопределяемым. Договорим-ся,что множество задано, если его элементы однозначно определены.

Обычно множества задаются 2 способами: либо *перечислением* элементов; либо путем указания *характеристического свойства*, то есть свойства, которому удовлетворяют все элементы данного множества, и только они. Элементы принято задавать строчными (маленькими) латинскими буквами, а сами множества - прописными (заглавными) латинскими буквами. Для символьного задания множеств используют фигурные скобки, внутри которых либо указывается характеристическое свойство, либо перечисляются элементы множества. При задании характеристических свойств часто употребляются слова "существует", "для всех" , "такой, что" и т.д. Для удобства записи эти слова часто заменяют символами (так называемыми *кванторами*). Например, символ $\exists$ (*квантор существования*) заменяет слово "существует"; символ $\forall$ (*квантор общности*) - слова "для всех" , "для любого".

Пример 1.1. Множество A_1 задано с помощью характеристического свойства:

$$A_1 = \{m \quad | \quad m \text{ - остаток от деления натурального числа на } 4\}.$$

Очевидно,что $A_1 = \{0; 1; 2; 3\}$ - то же самое множество, но заданное перечислением элементов.

Определение 1.1. Если a есть один из объектов множества A, то говорят, что a есть ***элемент*** A, или «***a принадлежит A***» и обозначается $a \in A$.
Непринадлежность a множеству A обозначается $a \notin A$.

Определение 1.2. ***Множество A есть подмножество множества B*** (обозначение $A \subseteq B$), если каждый элемент A одновременно является элементом B; то есть, если $x \in A$, то $x \in B$.

В частности, каждое множество есть подмножество самого себя.

A не является подмножеством множества B ($A \nsubseteq B$), если существует элемент A, не принадлежащий B.

Определение 1.3. ***Пустое множество*** (обозначение $\varnothing$)- есть множество, не содержащее элементов.

Определение 1.4. Множества A и B, либо состоящие из одних и тех же элементов, либо являющиеся пустыми, называются ***равными*** (обозначение $A = B$).

Определение 1.5. Если число элементов в множестве конечно, множество называется ***конечным***. Число n элементов в конечном множестве называется ***мощностью*** множества (обозначение $|A| = n$).

Пустое множество считается подмножеством любого множества, то есть

$$\varnothing \subseteq A, \qquad \forall A.$$

Определение 1.6. ***Универсальное множество*** или ***универсум*** есть такое множество, что все рассматриваемые множества являются его подмножеством.

1.1.2 Операции над множествами

Пусть множество U - универсум, A и B - его подмножества.

Определение 1.7. ***Пересечением множеств*** *A и B* (обозначение $A \cap B$) называется множество, состоящее из всех тех, и только тех элементов, которые принадлежат A и B одновременно .

$$A \cap B = \{x \in U \quad | \quad x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Аналогично вводится пересечение любого числа множеств.

Определение 1.8. Пусть $I = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$.

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k = \{x \in U \quad | \quad x \in A_i, \forall i \in I\}.$$

Определение 1.9. ***Объединением множеств*** *A и B* (обозначение $A \cup B$) называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.

$$A \cup B = \{x \in U \quad | \quad x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Объединение множеств в общем случае определим так:

Определение 1.10. Пусть $I = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = \{x \in U \quad | \quad \exists i \in I : x \in A_i\}.$$

Определение 1.11. ***Разностью двух множеств*** *A и B* (обозначение $A \backslash B$) называется множество, состоящее из всех тех, и только тех элементов A, которые не содержатся в B.

$$A \backslash B = \{x \in U \quad | \quad x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Определение 1.12. ***Дополнение множества*** *A* ($\overline{A}$) - это множество элементов универсума, не принадлежащих A.

$$\overline{A} = U \backslash A = \{x \quad | \quad x \in U \text{ и } x \notin A\}$$

1.1.3 Основные свойства множеств

Для множеств справедливы следующие **тождества (законы)**:
1) закон идемпотентости

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

2) закон тождества

$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cap U = A$$

3) закон дополнения

$$A \cup \overline{A} = U$$
$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

4) закон двойного дополнения

$$\overline{\overline{A}} = A$$

5) свойство коммутативности (переместительный закон)

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

6) свойство ассоциативности (сочетательный закон)

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

7) свойство дистрибутивности (распределительный закон)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

8) закон поглощения

$$(A \cup B) \cap A = A$$
$$(A \cap B) \cup A = A$$

9) закон де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

10) свойство разности

$$A \backslash B = A \cap \overline{B}$$

1.2 Перестановки, размещения, сочетания

Определение 1.13. Число $P_n = n!$ называется ***числом перестановок из n элементов.***

Определение 1.14. Число $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ называется ***числом размещений из*** n ***элементов по*** m.

Определение 1.15. Число $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ называется ***числом сочетаний из*** n ***элементов по*** m.

Теорема 1.1 (биномиальная теорема)**.** *Для любого положительного целого числа n справедливо равенство*

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m}.$$

Глава 2

Булевы функции и способы их задания.

2.1 Определение булевой функции

Определение 2.1. Набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in \{0,1\}$, $\forall i = \overline{1,n}$ называется ***булевым*** или ***двоичным*** набором *(**вектором**)*.

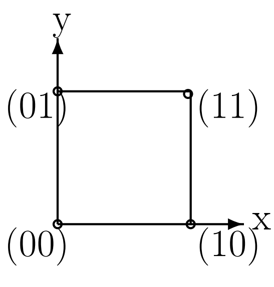
Элементы α_i набора называют ***компонентами*** или ***координатами***. Число n называется ***длиной*** набора $\widetilde{\alpha}$.

Определение 2.2. *Множество всех двоичных наборов длины n образует* ***n-мерный булев (двоичный) куб*** *и обычно обозначается* $\mathbb{B}^n$.

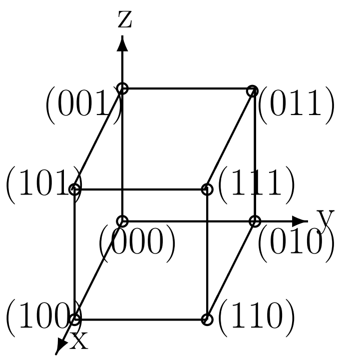
Другими словами, булев куб $\mathbb{B}^n$ - совокупность всех различных двоичных наборов длины n.

Пример 2.1. Изобразим булев куб графически.

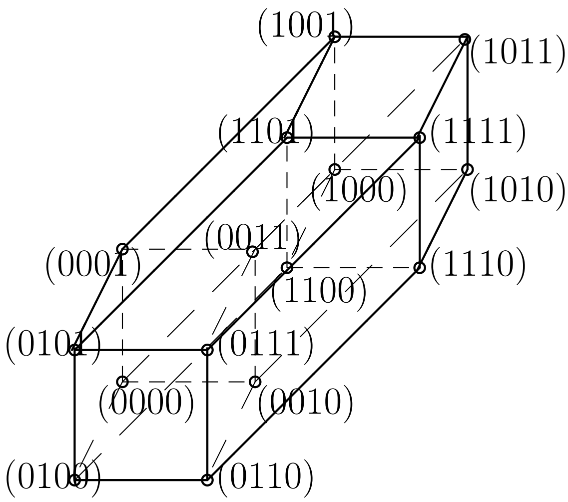
а) **Булев куб** $\mathbb{B}^2$



б) **Булев куб** $\mathbb{B}^3$



в) **Булев куб** $\mathbb{B}^4$



Замечание 2.1. Как видно из рисунка, для куба размерности $n \geqslant 4$ графическое изображение теряет наглядность.

Теорема 2.1. *Количество двоичных наборов длины n равно* 2^n *:*

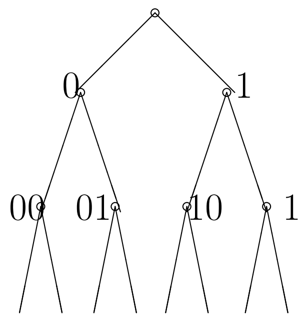
$$|\mathbb{B}^n| = 2^n.$$

Доказательство. 1 способ

Рассмотрим произвольный булев набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

При $n = 1$ $\quad \mathbb{B}^1 = \{0, 1\}$ $\quad |\mathbb{B}^1| = 2 = 2^1$.

При $n = 2$ $\quad \mathbb{B}^2 = \{00, 01, 10, 11\}$ $\quad |\mathbb{B}^2| = 4 = 2^2$.



И так далее. Так как на каждом ярусе дерева число ветвей, ведущих от корня, удваивается, то на n-ом ярусе число ветвей (число булевых наборов) равно 2^n.

2 способ (методом математической индукции)

Базис индукции

Для $n = 1$ $\quad |\mathbb{B}^1| = 2^1 \quad$, то есть утверждение теоремы верно .

Индуктивный переход

Пусть теорема доказана для $k = n - 1$, то есть $\quad |\mathbb{B}^{n-1}| = 2^{n-1}$.

Докажем тождество для $k = n$.

Набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ длины n отличается от набора $\widetilde{\beta} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$ длины n-1 наличием одной координаты $\alpha_n \in \{0, 1\}$. Таким образом, набор $\widetilde{\alpha}$ может принимать 2 значения: $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)$ либо $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 1)$. Так количество всех наборов $\widetilde{\beta}$ равно 2^{n-1}, то различных наборов $\widetilde{\alpha}$ в 2 раза больше, то есть $|\mathbb{B}^n| = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$. $\square$

Определение 2.3. Каждому двоичному набору $\widetilde{\alpha} \in \mathbb{B}^n$ можно взаимно однозначно сопоставить целое неотрицательное число

$$P(\widetilde{\alpha}) = \alpha_n \cdot 2^0 + \alpha_{n-1} \cdot 2^1 + \alpha_{n-2} \cdot 2^2 + \cdots + \alpha_2 \cdot 2^{n-2} + \alpha_1 \cdot 2^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot 2^{n-i}.$$

Это число $P(\widetilde{\alpha})$ называют ***номером набора*** $\widetilde{\alpha}$.

Например, набору $\widetilde{\alpha}_1 = (01001)$ соответствует номер $P(\widetilde{\alpha}_1) = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 = 1 + 8 = 9$. Очевидно, что набор $\widetilde{\alpha}$ - двоичное разложение своего номера $P(\widetilde{\alpha})$.

Из определения номера следует, что $0 \leq P(\widetilde{\alpha}) \leq 2^n - 1$.

Определение 2.4. Функция $\widetilde{f}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, областью определения которой является n-мерный булев куб $\mathbb{B}^n$, а множеством значений - множество $\mathbb{B} \in \{0, 1\}$, называется ***булевой функцией*** или ***функцией алгебры логики***.

Набор символов переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ обычно обозначается $\widetilde{x}$ (то есть $\widetilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$).

Множество всех булевых функций, зависящих от n переменных, принято обозначать через $\mathbb{P}_2(n)$.

2.2 Способы задания булевых функций

2.2.1 Табличный способ задания

Любую булеву функцию $f(\widetilde{x})$ при $n \geq 1$ можно задать таблицей $T(f)$, в которой двоичные наборы $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ выписываются строго в порядке возрастания их номеров (так называемое ***стандартное*** или ***лексикографическое*** расположение наборов). Булевы наборы располагают в левой части таблицы, а соответствующее данному набору значение функции - в правой. Такая таблица называется ***таблицей истинности*** булевой функции.

	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
$P(\widetilde{\sigma}) = 0$	0	0	$\cdots$	0	0	$f(0, 0, \ldots, 0, 0)$
$P(\widetilde{\sigma}) = 1$	0	0	$\cdots$	0	1	$f(0, 0, \ldots, 0, 1)$
$P(\widetilde{\sigma}) = 2$	0	0	$\cdots$	1	0	$f(0, 0, \ldots, 1, 0)$
			$\cdots$			$\cdots$
$P(\widetilde{\sigma}) = 2^n - 3$	1	1	$\cdots$	0	1	$f(1, 1, \ldots, 0, 1)$
$P(\widetilde{\sigma}) = 2^n - 2$	1	1	$\cdots$	1	0	$f(1, 1, \ldots, 1, 0)$
$P(\widetilde{\sigma}) = 2^n - 1$	1	1	$\cdots$	1	1	$f(1, 1, \ldots, 1, 1)$

Замечание 2.2. Так как $|\mathbb{B}^n| = 2^n$, то таблица истинности булевой функции, зависящей от n переменных, содержит ровно 2^n строк.

Замечание 2.3. Таблица истинности задаёт любую функцию алгебры логики единственным образом.

Пример 2.2. Табличный способ задания функции двух переменных:

	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

2.2.2 Векторный способ задания булевой функции

Так как левая часть таблицы истинности любой двоичной функции n переменных одинакова, различаются лишь правые части, то булевы функции удобно задавать ***вектором значений***

$$\widetilde{f} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2^n-2}, \alpha_{2^n-1}),$$

где координата α_i равна значению функции $f(\widetilde{x})$ на наборе $\widetilde{\sigma}_i$, имеющем номер i (то есть, $f(\widetilde{\sigma_i}) = \alpha_i, P(\widetilde{\sigma_i}) = i$).

При векторном задании функции столбец из правой части таблицы истинности переписывают в виде вектора-строки.

Пример 2.3. $\widetilde{f}(x_1, x_2) = (0110)$ - векторный способ задания функции из примера 2.2.

Замечание 2.4. Длина вектора-строки булевой функции n переменных равна 2^n. И наоборот - соответствующий показатель степени двойки булевого набора при векторном задании функции определяет число переменных этой функции.

Замечание 2.5. Вектор значений двоичной функции также задаёт её единственным образом.

Теорема 2.2. *Число булевых функций, зависящих от n переменных, равно* 2^{2^n} *:*

$$|\mathbb{P}_2(n)| = 2^{2^n}.$$

Доказательство. Так как длина вектора значений двоичной функции n переменных равна $k = 2^n$, а различные функции имеют различные векторы значений, то число различных функций совпадает с количеством различных наборов длины k. Число всех наборов длины k равно $2^k = 2^{2^n}$. То есть, $|\mathbb{P}_2(n)| = 2^{2^n}$. $\square$

2.2.3 Носитель функции алгебры логики

Определение 2.5. Наборы, на которых значение функции равно 1, называют ***единичными наборами*** . Множество всех единичных наборов данной функции - ***единичным множеством*** или ***носителем*** булевой функции N_f.

$$N_f = \{\widetilde{\sigma} \in \mathbb{B}_n | f(\widetilde{\sigma}) = 1\}$$

Аналогично, наборы, на которых значение функции равно 0, называют ***нулевыми наборами*** . Множество всех нулевых наборов данной функции - ***дополнением к носителю*** двоичной функции $\overline{N_f}$.

$$\overline{N_f} = N_{\overline{f}} = \{\widetilde{\sigma} \in \mathbb{B}_n \mid f(\widetilde{\sigma}) = 0\}$$

Очевидно, что для задания булевой функции достаточно указать либо только носитель функции, либо только дополнение к нему. Перечисление единичных (нулевых) наборов определяет еще один способ задания булевой функции - ***с помощью носителя***.

Замечание 2.6. Так как все двоичные наборы принадлежат либо носителю, либо его дополнению, то $\mid N_f \mid + \mid \overline{N_f} \mid = 2^n$.

Пример 2.4. Указать носитель и его дополнение для функции из примера 2.2.

Решение.

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Подчеркнем в таблице истинности функции наборы, на которых значение функции равно 1. Эти наборы принадлежат носителю N_f. Неподчеркнутые наборы составляют дополнение к множеству N_f.

Выпишем оба множества: $N_f = \{(01), (10)\}$; $\overline{N_f} = \{(00), (11)\}$.

2.2.4 Геометрический способ задания двоичной функции

К геометрическим способам задания булевых функций относятся изображение функции на булевом кубе и карты Карно.

На булевом кубе обычно изображаются функции, зависящие не более чем от 3 переменных. Это связано со сложностью изображения и отсутствием наглядности двоичных кубов $\mathbb{B}^n$ при $n \geqslant 4$ (см. замечание 2.1 после примера 2.1 на стр. 10).

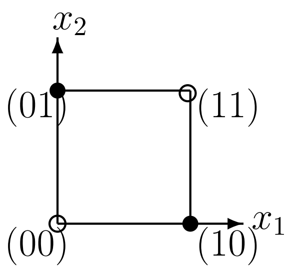
На кубе $\mathbb{B}^2$ или $\mathbb{B}^3$ отмечают двоичные наборы (вершины куба), затем каким-либо образом выделяют наборы носителя. Мы будем закрашивать вершины носителя в черный цвет. Вершины, принадлежащие дополнению к носителю, останутся белыми.

Карты Карно можно рассматривать как некую плоскую развертку $n-$мерного куба $\mathbb{B}^n$. Подробно они будут изучены в разделе 6.1 на странице 90.

Замечание 2.7. Геометрическое изображение любой булевой функции задаёт её единственным образом. И наоборот, любую двоичную функцию можно изобразить на кубе, притом едиственным образом.

Пример 2.5. Изобразить геометрически функцию $\widetilde{f}(x_1, x_2) = (0110)$ из примера 2.2.

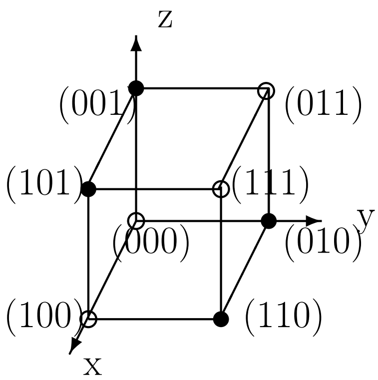
Решение. Обозначим вершины носителя на двоичном кубе черным цветом:



Пример 2.6. Изобразить геометрически функцию, заданную вектором $\widetilde{f} = (0110\,0110)$.

Решение. Поскольку длина вектора значений функции равна $8 = 2^3$, функция зависит от 3-х переменных (см. замечание 2.4 на стр.13). Строим трехмерную систему координат, рисуем единичный куб. Носитель данной функции содержит 4 набора: $N_f = \{(001), (010), (101), (110)\}$. Отмечаем эти вершины на кубе.

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0



Мы изучили 4 способа задания булевых функций. Еще один способ, с помощью формул, мы изучим в пункте 2.3.3 на стр. 19.

2.2.5 Способы задания функций алгебры логики, изучаемые в нашем курсе:

1. Таблица истинности
2. Вектор значений
3. Носитель функции либо его дополнение
4. Геометрический способ
5. Формула

2.3 Элементарные булевы функции

2.3.1 Двоичные функции одной переменной

Логических функций одной переменной $2^{2^1} = 2^2 = 4$. Перечислим таблицы истинности всех функций .

а)

x	x
0	0
1	1

$f_1(x) = x$ - `тождественная` функция .

Какое бы значение (0 или 1) не принимала переменная x, значение тождественной функции совпадает со значением переменной.

б)

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

$f_2(x) = \overline{x} = \neg x$ - функция `отрицание, инверсия`, логическое "`НЕ`" (в информатике часто обозначается "`NOT`").

Какое бы значение не принимала переменная x, функция "отрицание" принимает противоположное значение .

в)

x	0
0	0
1	0

$f_3(x) \equiv 0$ - функция `тождественный нуль` .

Вне зависимости от значений переменной x, значение функции всегда равно нулю.

г)

x	1
0	1
1	1

$f_4(x) \equiv 1$ - функция `тождественная единица` .

Значение функции всегда равно единице.

2.3.2 Булевы функции двух переменной

Всего двоичных функций двух переменных $2^{2^2} = 2^4 = 16$. Однако, лишь семь из них имеют свои названия. Именно с их таблицами истинности мы сейчас познакомимся .

а)

x	y	xy
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$f_1(x, y) = x \cdot y = x \wedge y = x\&y = xy$ - функция `конъюнкция`, логическое `умножение`, логическое "`И`" (в информатике обычно обозначается "`AND`").

Замечание 2.8. Логическое умножение булевых переменных 0 и 1 соответствует обычному умножению чисел 0 и 1.

Замечание 2.9. $xy = min(x, y)$.

б)

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$f_2(x, y) = x \vee y$ - функция `дизъюнкция`, `логическое сложение`, "`логическое ИЛИ`" ("`OR`").

Замечание 2.10. $x \vee y = max(x, y)$.

в)

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$f_3(x, y) = x \oplus y$ - функция `сложение по модулю 2`, `"исключающее ИЛИ"` (`"XOR"`).

Замечание 2.11. Значение данной функции равно остатку от деления обычной алгебраической суммы чисел x и y на 2.

Замечание 2.12. На двоичных наборах (00), (01) и (10), на которых сумма чисел x и y не превышает 1, оба сложения (логическое и по модулю 2) равны между собой. Различаются эти функции алгебры логики только на наборе (11).

г)

x	y	$x \sim y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$f_4(x, y) = x \sim y = x \equiv y$ - функция `эквивалентность`, `"логическое тождество"`.

Замечание 2.13. Значение функции "эквивалентность" на каждом наборе противоположно значению функции "сложение по модулю 2". Справедливо тождество $x \sim y = \overline{x \oplus y}$.

д)

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$f_5(x, y) = x \to y = x \supset y$ - функция `импликация`, `"логическое следование"`.

Замечание 2.14. "Импликация" - единственная из перечисленных функций, которая не обладает свойством коммутативности, то есть

$$x \to y \not\equiv y \to x$$

.

Замечание 2.15. Мнемоническое правило для запоминания: из "лжи" может следовать всё, что угодно; из "истины" следует только истина.

е)

x	y	$x \vert y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$f_6(x,y) = x|y$ - функция штрих Шеффера, "НЕ И" ("NOT AND").

Замечание 2.16. $x|y = \overline{xy}$.

ж)

x	y	$x \downarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$f_7(x,y) = x \downarrow y$ - функция стрелка Пирса, "НЕ ИЛИ" ("NOT OR").

Замечание 2.17. $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$.

Вышеперечисленные функции одной и двух переменных называются ***элементарными булевыми функциями***. Остальные двоичные функции двух и более переменных можно выразить через элементарные с помощью формул.

2.3.3 Формулы

Определение 2.6. Функция F называется ***суперпозицией*** функций f,f_1,f_2, $\ldots, f_m$, если имеет место равенство $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), g_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$, где каждая из функций $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ совпадает либо с одной из переменных (тождественная функция), либо с одной из функций f_1,f_2, $\ldots, f_m$.

Формулой называется выражение, описывающее эту суперпозицию.

Пример 2.7.

а) Функция $f_1(x,y) = x|y = \overline{x\&y}$ является суперпозицией функций "отрицание" ($\neg$) и "конъюнкция" (&). При этом $x|y$ и $\overline{x\&y}$ - формулы, описывающие эту суперпозицию.

б) Функция $f_2(x,y,z) = x \vee y \to (x \vee z)$ является суперпозицией функций "дизъюнкция" ($\vee$) и "импликация " ($\to$).

Таким образом, *формулы задают* ещё один удобный *способ задания булевых функций.*

Определение 2.7. Если функция задана формулой, то говорят, что формула ***реализует*** или ***представляет*** данную функцию.

Замечание 2.18. Как видно из примера 2.7 а), одна и та же функция может задаваться несколькими формулами. В отличие от остальных способов задания, представление булевой функции формулой не единственно.

Определение 2.8. Формулы, реализующие одну и ту же функцию, называются ***эквивалентными*** или ***равносильными***.

Для доказательства эквивалентности формул строят таблицу истинности или вектор значений соответствующих функций и сравнивают их. В случае равенства полученных функций формулы, их реализующие, равносильны.

Пример 2.8. Формулы $x|y$ и $\overline{x\&y}$ из примера 2.7 а) эквивалентны.

2.3.4 Приоритет выполнения булевых функций

1. Сначала выполняются все действия в скобках.
2. Функция "отрицание переменной" выполняется прежде других булевых функций. При этом учитывают, что, в случае инверсии некоторой формулы, скобки вокруг этой формулы могут быть опущены. Так, в примере 2.7 а) в формуле $\overline{x\&y}$ отсутствуют скобки : $\overline{x\&y} = \overline{(x\&y)}$, поэтому сначала вычисляют выражение $x\&y$, а затем инвертируют его значение.
3. Логическое умножение (&) выполняется раньше, чем сложение (и логическое ($\vee$), и по модулю два ($\oplus$)).

Замечание 2.19. Порядок выполнения функций алгебры логики совпадает с порядком выполнения одноименных функций в математике.

2.3.5 Алгоритм определения таблицы истинности булевой функции по формуле

1. Определяем множество всех переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, входящих в формулу.
2. Определяем порядок выполнения элементарных функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$ в соответствии с приоритетом выполнения функций алгебры логики.
3. Для каждого набора $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{B}^n$ вычисляем значение каждой функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$, входящей в формулу.
4. Самый правый столбец таблицы соответствует вектору значений функции, заданной исходной формулой.

Пример 2.9. Построить таблицу истинности функции $\widetilde{f} = \overline{(x_1 \to x_2) \vee (x_1 \oplus x_3)x_2}$ и указать носитель.

Решение.

1. Очевидно, что $f(\widetilde{x})$ - функция трех переменных x_1, x_2, x_3.
2. Определим порядок действий.

$$\widetilde{f} = \overset{5}{\overline{(x_1 \overset{1}{\to} x_2) \overset{4}{\vee} (x_1 \overset{2}{\oplus} x_3) \overset{3}{\&}\, x_2}}$$

   Сначала выполняются действия в скобках ($\to$ и $\oplus$), затем умножение ($\&$), потом логическое сложение ($\vee$). Отрицание выполняется последним, так как инвертируется формула, а не переменная.

3. Разобьём формулу на 5 элементарных функций:

$$\begin{aligned} &f_1 = x_1 \to x_2; \\ &f_2 = x_1 \oplus x_3; \\ &f_3 = f_2 \& x_2; \\ &f_4 = f_1 \vee f_3; \\ &f_5 = \neg f_4. \end{aligned}$$

   Каждой из этих функций соответствует столбец в таблице истинности:

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1	0

Последний столбец таблицы равен вектору значений заданной функции

$$\widetilde{f}(x_1, x_2, x_3) = (00001100).$$

4. Найдем носитель исходной функции, выписывая те наборы, на которых значение функции равно 1 (эти наборы подчеркнуты):

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$N_f = \{(100), (101)\}$$

Пример 2.10. Построить таблицу истинности функции

$$\widetilde{g} = ((x \vee y) \,|\, (z \to y)) \,\&\overline{(x \vee z) \sim (y \oplus z)}.$$

Решение.

1. Функция $g(\widetilde{x})$ также является функцией трех переменных.

2. Определим порядок действий.

$$\widetilde{g} = \left(\left(x \overset{1}{\vee} y \right) \overset{3}{|} \left(z \overset{2}{\rightarrow} y \right) \right) \overset{8}{\&} \overline{\left(x \overset{4}{\vee} z \right) \overset{6}{\sim} \left(y \overset{5}{\oplus} z \right)}^{\,7}.$$

3. Построим таблицу истинности функции $g(\widetilde{x})$.

x_1	x_2	x_3	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0

4. Получили, что $g(\widetilde{x}) = (\,0000\ 0000\,)$. Функция принимает значения "ложь" на всех двоичных наборах. Носитель этой функции не содержит ни одного двоичного набора, то есть является пустым множеством.

Определение 2.9. Функция, принимающая значение "ложь" на всех двоичных наборах, называется ***тождественно-ложной***. Функция, принимающая значение "истина" на всех двоичных наборах, называется ***тождественно-истинной***.

2.3.6 Основные эквивалентности (законы) алгебры логики

1. Коммутативность (переместительный закон)

$$x \circ y = y \circ x, \text{ где } \circ \in \{\&, \vee, \oplus, \sim, |, \downarrow\}$$

2. Ассоциативность (сочетательный закон)

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \text{ где } \circ \in \{\&, \vee, \oplus, \sim\}$$

3. Дистрибутивность (распределительный закон)

   (a) дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции

   $$x\&(y \vee z) = (x\&y) \vee (x\&z)$$

   (b) дистрибутивность конъюнкции относительно сложения по модулю 2

   $$x\&(y \oplus z) = (x\&y) \oplus (x\&z)$$

   (c) дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции

   $$x \vee (y\&z) = (x \vee y)\&(x \vee z)$$

4. Законы де Моргана

   $$\text{(a)}\ \overline{x\&y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$
   $$\text{(b)}\ \overline{x \vee y} = \overline{x}\&\overline{y}$$

5. Закон двойного отрицания

   $$\overline{\overline{x}} = x$$

6. Законы поглощения

   $$\text{(a)}\quad x \vee xy = x$$
   $$\text{(b)}\ x(x \vee y) = x$$

7. Идемпотентность

   $$x\&x = x \qquad\qquad x \vee x = x$$

8. Закон противоречия

   $$x\&\overline{x} = 0$$

9. Закон "исключенного третьего "

   $$x \vee \overline{x} = 1$$

10. Свойства констант

$$x\&0 = 0 \qquad x \vee 0 = x \qquad x \oplus 0 = x$$
$$x\&1 = x \qquad x \vee 1 = 1 \qquad x \oplus 1 = \overline{x}$$

11. Закон склеивания
$$\overline{x}y \vee xy = y$$
12. Законы сложениия по модулю два
$$x \oplus x = 0$$
$$x \oplus \overline{x} = 1$$
$$\overline{x}y \oplus xy = y$$

В справедливости этих эквивалентностей можно убедиться путем построения таблиц истинности соответствующих им функций.

Замечание 2.20. Функции алгебры логики (умножение, логическое сложение и сумма по модулю два) иногда похожи на обычные аналогичные арифметические действия, а иногда - нет. Так, например, переместительный и сочетательный законы будут выполняться при замене логических функций на алгебраические. Свойства (a) и (b) распределительного закона также справедливы, а свойство (c) в арифметике не выполняется. Булевы константы "0" и "1" также не являются числами в обычном смысле: для константы "0" выполняются все свойства констант, а для "1" верно только свойство умножения ($x \cdot 1 = x$).

2.4 Задачи для самостоятельного решения

Найти вектор значений следующих функций:

1. $\widetilde{f}_1 = \overline{(x\&\overline{y}) \sim (x \to z)} \downarrow ((y \oplus z) \,|\, (x \vee z))\,;$
2. $\widetilde{f}_2 = ((\overline{x} \downarrow y) \,\&\, (\overline{y} \vee z)) \sim \overline{(x \oplus z) \to (y|z)};$
3. $\widetilde{f}_3 = \overline{(x \vee y) \,|\, (\overline{y} \sim z)} \,\&\, ((x \downarrow z) \oplus (y \to x))\,;$
4. $\widetilde{f}_4 = \overline{(x \downarrow y) \vee (y|\overline{z})} \to ((x \oplus \overline{z}) \sim (y \cdot z))\,;$
5. $\widetilde{f}_5 = ((x|y) \downarrow (z \to \overline{x})) \oplus \overline{(\overline{x} \sim z) \,\&\, (y \vee z)}.$

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. $\widetilde{f}_1 =$ (0000 0110);

2. $\widetilde{f}_2 = (\ 1110\ 0011\ );$

3. $\widetilde{f}_3 = (\ 0010\ 0110\ );$

4. $\widetilde{f}_4 = (\ 1101\ 1111\ );$

5. $\widetilde{f}_5 = (\ 1010\ 1100\ ).$

Глава 3

Специальные представления булевых функций

3.1 Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Введем обозначение:

$$x^\alpha = \begin{cases} \overline{x}, & \alpha = 0 \\ x, & \alpha = 1 \end{cases},$$

то есть,

$$x^0 = \overline{x}, \qquad x^1 = x.$$

Рассмотрим два случая:

а) $\alpha = 0 \quad x^0 = \overline{x} = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$, то есть, $\begin{matrix} 0^0 = 1 \\ 1^0 = 0 \end{matrix}$

б) $\alpha = 1 \quad x^1 = x = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$, то есть, $\begin{matrix} 1^1 = 1 \\ 0^1 = 0 \end{matrix}$

Так как $\begin{matrix} 0^0 = 1^1 = \alpha^\alpha = 1 \\ 1^0 = 0^1 = \alpha^{\overline{\alpha}} = \overline{\alpha}^\alpha = 0 \end{matrix}$, то $x^\alpha = 1$ тогда, и только тогда, когда $x = \alpha$.

Докажем равенство $x^\alpha = x \oplus \alpha \oplus 1$

Так как $\begin{matrix} \text{если } \alpha = 0, & \text{то } x^0 = \overline{x} = x \oplus 1 \\ \text{если } \alpha = 1, & \text{то } x^1 = x = x \oplus 1 \oplus 1 \end{matrix}$, равенство выполняется для всех возможных α и является тождеством.

Справедливость тождества $x^\sigma = x \sim \sigma = x\sigma \vee \overline{x\sigma}$ предоставляем доказать читателю самостоятельно.

Определение 3.1. Логическое произведение переменных и их отрицаний $K = x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} \cdots x_{i_s}^{\sigma_{i_s}}, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n$ называется ***элементарной конъюнкцией.***

Пример 3.1. $K_1 = x_1 x_3$; $K_2 = x_1 \overline{x}_2 x_3$; $K_3 = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$ - элементарные конъюнкции.

Определение 3.2. ***Элементарной*** называется ***дизъюнкция*** $D = x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \vee x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} \vee \ldots \vee x_{i_s}^{\sigma_{i_s}}, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n,$ представляющая собой логическую сумму переменных и их отрицаний.

Пример 3.2. Элементарными дизъюнкциями являются:

$$D_1 = x_1 \vee x_3; \qquad D_2 = x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3; \qquad D_3 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3.$$

Замечание 3.1. В элементарные конъюнкции и дизъюнкции не могут входить одинаковые переменные, а также одновременно переменная и её отрицание. Например, конъюнкции $K_4 = x_1 x_3 \overline{x}_1$ и $K_5 = x_1 \overline{x}_2 x_3 x_1$ не относятся к элементарным.

Определение 3.3. Количество переменных и их отрицаний, входящих в элементарную конъюнкцию (элементарную дизъюнкцию) называется её ***рангом.***

Пример 3.3. Вычислим ранг элементарных конъюнкций из примера 3.1:

$$r_1 = 2; \qquad r_2 = 3; \qquad r_3 = 3.$$

Определение 3.4. ***Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)*** -это формула, в которой логическая функция представлена в виде дизъюнкции элементарных конъюнкций.

Пример 3.4. $\widetilde{f}_{\text{днф}} = K_1 \vee K_2 = x_1 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3.$

Определение 3.5. ***Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)*** -это формула, в которой булева функция представлена в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций.

Пример 3.5. $\widetilde{f}_{\text{кнф}} = D_2D_3 = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$.

Замечание 3.2. Учитывая приоритет выполнения булевых операций (см. пункт 2.3.4 на стр. 20), в ДНФ скобки обычно не пишутся. При записи КНФ скобки писать обязательно, так как иначе в формуле нарушается порядок логических действий.

Определение 3.6. Сумма рангов элементарных конъюнкций (дизъюнкций), входящих в дизъюнктивную нормальную форму (конъюнктивную нормальную форму) называется ***рангом*** или ***сложностью нормальной формы*** .

Пример 3.6. $r(\text{днф}) = r_1 + r_2 = 2 + 3 = 5$ - ранг ДНФ функции из примера 3.4.

$r(\text{кнф}) = r_2 + r_3 = 3 + 3 = 6$ - ранг КНФ функции из примера 3.5.

Замечание 3.3. Рассмотрим некоторую функцию алгебры логики, заданную в виде ДНФ, и упростим формулу:

$$f_{\text{ДНФ}}(\widetilde{x}) = x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_2x_4 = x_1\overline{x}_2(1 \vee x_3) \vee x_2x_4 = x_1\overline{x}_2 \vee x_2x_4.$$

Так как формула, полученная в результате преобразований, также является ДНФ исходной функции, то представление булевой функции в виде ДНФ , вообще говоря, не единственно. При этом ранг исходной ДНФ равен 7, а упрощенной - 4.

Аналогично можно показать, что и КНФ задает функцию во многих случаях не единственным образом, причем различные КНФ одной и той же функции могут иметь разные ранги.

3.2 Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Теорема 3.1. *О разложении булевой функции по одной переменной*

Всякую функцию алгебры логики $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при любом m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ можно представить в виде

$$f(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = \\ = \overline{x}_m f(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n) \vee \\ \vee x_m f(x_1, \ldots, x_{m-1}, 1, x_{m+1}, \ldots, x_n). \quad (3.1)$$

Это равенство называется **разложением функции по переменной** x_m, *а функции* $f(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ *и* $f(x_1, \ldots, x_{m-1}, 1, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ - **компонентами разложения.**

Доказательство. Рассмотрим произвольный набор переменных $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{B}^n$. Покажем, что при подстановке данного набора в правую и левую части соотношения (3.1), обе части равенства принимают одно и то же значение.

α_m может принимать 2 значения: 0 или 1. Рассмотрим оба варианта.

$$\alpha_m = 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{\alpha}_m = 1 \;\Leftrightarrow \\ \overline{\alpha}_m \cdot f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, 0, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) \vee \\ \vee \alpha_m \cdot f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, 1, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) = \\ = \overline{0} \cdot f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, 0, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) \vee \\ \vee 0 \cdot f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, 1, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) = \\ = 1 \cdot f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, 0, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) \vee \\ \vee 0 \cdot f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, 1, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) = \\ = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, 0, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) = \\ = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n).$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_m = 1 \ \Leftrightarrow \ \overline{\alpha}_m = 0 \ \Leftrightarrow \quad & \\
& \overline{\alpha}_m \cdot f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, 0, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) \vee \\
& \vee \alpha_m \cdot f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, 1, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) = \\
& = \overline{1} \cdot f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, 0, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) \vee \\
& \vee 1 \cdot f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, 1, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) = \\
& = 0 \cdot f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, 0, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) \vee \\
& \vee 1 \cdot f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, 1, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) = \\
& = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, 1, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) = \\
& \qquad = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n).
\end{aligned}
$$

При выводе мы использовали тождества $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = 0$ и $A \vee 0 = A$.

Итак, мы получили:

$$
\begin{aligned}
f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = & \\
& = \overline{\alpha}_m \cdot f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, 0, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) \vee \\
& \vee \alpha_m \cdot f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, 1, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) = \\
& \qquad = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n).
\end{aligned}
$$

Так как $\widetilde{\alpha}$ - произвольный двоичный набор, равенство (3.1) выполняется для всех $\widetilde{\alpha} \in \mathbb{B}^n$, и, значит, является тождеством. Заметим, что $x_m^{\sigma_m} = 1 \Leftrightarrow x_m = \sigma_m$. Тогда тождество (3.1) можно представить следующим образом:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = & \\
& = x_m^{\sigma_m} f(x_1, \ldots, x_{m-1}, \sigma_m, x_{m+1}, \ldots, x_n).
\end{aligned}
$$

$\square$

Аналогично доказываются две следующие теоремы.

Теорема 3.2. <u>*О разложении функции по нескольким переменным*</u> *Всякую функцию алгебры логики $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при любом m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ можно представить в виде*

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = & \\
= \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{m-1}, \sigma_m) \in \mathbb{B}^m} & x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_{m-1}^{\sigma_{m-1}} x_m^{\sigma_m} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{m-1}, \sigma_m, \\
& \qquad x_{m+1}, \ldots, x_n),
\end{aligned}
$$

Это равенство называется ***разложением функции по переменным*** $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Теорема 3.3. <u>*О разложении функции по всем переменным*</u>

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\widetilde{\sigma} \in \mathbb{B}^n} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_{n-1}^{\sigma_{n-1}} x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, \sigma_n).$$

Если $f(x_1, x_2, \ldots x_n) \not\equiv 0$, то, удалив логические слагаемые, для которых $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n) = 0$, получим

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\widetilde{\sigma} \in N_f} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_{n-1}^{\sigma_{n-1}} x_n^{\sigma_n}.$$

Найденное разложение называется **Совершенной Дизъюнктивной Нормальной Формой (СДНФ).**

Замечание 3.4. В СДНФ входят элементарные конъюнкции, имеющие одинаковый ранг n, где n- количество переменных.

$$r_{\text{сднф}} = |N_f| \cdot n$$

Замечание 3.5. СДНФ имеет максимальный ранг среди всех ДНФ, реализующих данную функцию.

Теорема 3.4. *Любая булева функция может быть представлена булевой формулой, являющейся суперпозицией дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.*

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1. Пусть функция $f(\widetilde{x}) \not\equiv 0$. Тогда, согласно теореме 3.3, эту функцию можно представить в виде СДНФ, то есть формулы, содержащей элементарные функции $\vee, \&, \neg$.

2. Если функция является тождественным нулем $(f(\widetilde{x}) \equiv 0)$, то её можно представить, например, в виде формулы $f(\widetilde{x}) = x_1 \cdot \overline{x}_1$, являющейся суперпозицией конъюнкции и отрицания.

□

3.2.1 Алгоритм построения СДНФ булевой функции

1. Находим носитель функции $N_f = \{\widetilde{\sigma} \in \mathbb{B}^n | f(\widetilde{\sigma}) = 1\}$, то есть те двоичные наборы $\widetilde{\sigma}$, на которых значение функции равно 1.
2. Для каждого набора $\widetilde{\sigma}$ из носителя выписываем элементарную конъюнкцию $K_\sigma = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}$.

   Если значение i- той координаты в наборе $\widetilde{\sigma}$ равно нулю $(\sigma_i = 0)$, то переменная x_i входит в элементарную конъюнкцию с отрицанием; если же $\sigma_i = 1$, то без отрицания.
3. Составляем СДНФ, соединяя полученные конъюнкции знаком дизъюнкции.

Пример 3.7. Найти СДНФ функции, заданной вектором значений $\widetilde{f} = (01001100)$. Вычислить ранг полученной формулы.

Решение.

1. Так как длина вектора значений равна $8 = 2^3$, то функция зависит от трех переменных. Представим функцию таблично.

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

2. Подчеркнем все наборы носителя и сопоставим каждому набору $\widetilde{\sigma} \in N_f$ элементарную конъюнкцию.

x	y	z	f	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\Rightarrow\quad K_1 = x^0y^0z^1 = \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$\Rightarrow\quad K_2 = x^1y^0z^0 = x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}$
1	0	1	1	$\Rightarrow\quad K_3 = x^1y^0z^1 = x\cdot\overline{y}\cdot z$
1	1	0	0	
1	1	1	0	

3. Выписываем СДНФ:

$$f_{\text{сднф}} = K_1 \vee K_2 \vee K_3 = \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z \vee x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z} \vee x\cdot\overline{y}\cdot z$$

и вычисляем её ранг $r_{\text{сднф}} = 9$.

3.3 Совершенная конъюнктивная нормальная форма

Теорема 3.5. *Любая функция алгебры логики, отличная от тождественной единицы ($f(\widetilde{x}) \not\equiv 1$), может быть представлена в виде формулы* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge\limits_{\widetilde{\sigma}\in\overline{N}_f}(x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \cdots \vee x_{n-1}^{\overline{\sigma}_{n-1}} \vee x_n^{\overline{\sigma}_n})$.

Такое представление двоичной функции называется **Совершенной Конъюнктивной Нормальной Формой (СКНФ).**

Доказательство. Рассмотрим функцию, $\overline{f}(\widetilde{x})$ противоположную данной. Так как $f(\widetilde{x}) \not\equiv 1$, то $\overline{f}(\widetilde{x}) \not\equiv 0$, и, значит, функцию $\overline{f}(\widetilde{x})$ можно представить в виде СДНФ:

$$\overline{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\widetilde{\sigma}\,\in\, N_{\overline{f}}} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\cdots x_{n-1}^{\sigma_{n-1}}x_n^{\sigma_n} =$$

$$= \bigvee_{\widetilde{\sigma}\,\in\,\overline{N}_f} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\cdots x_{n-1}^{\sigma_{n-1}}x_n^{\sigma_n} \quad (3.2)$$

Логическое тождество $A = B$ не изменится, если к обеим его частям применить операцию отрицания, то есть, $A = B \quad\Leftrightarrow\quad \overline{A} = \overline{B}$.

Проинвертируем обе части равенства (3.2):

$$\overline{\overline{f}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{\bigvee_{\widetilde{\sigma} \in \overline{N}_f} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_{n-1}^{\sigma_{n-1}} x_n^{\sigma_n}}.$$

К левой части тождества применим закон двойного отрицания

$$\overline{\overline{f}}(\widetilde{x}) = f(\widetilde{x}),$$

а к правой- законы де Моргана (см. пункт 4 на стр. 19)

$$\begin{cases} \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y} \\ \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \end{cases},$$

обобщив их на произвольное количество переменных

$$\begin{cases} \overline{\bigwedge\limits_{i=1,\ldots,m} x_i} = \bigvee\limits_{i=1,\ldots,m} \overline{x}_i \\ \overline{\bigvee\limits_{i=1,\ldots,m} x_i} = \bigwedge\limits_{i=1,\ldots,m} \overline{x}_i \end{cases}.$$

Получим

$$f(\widetilde{x}) = \bigwedge_{\widetilde{\sigma} \in \overline{N}_f} \overline{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_{n-1}^{\sigma_{n-1}} x_n^{\sigma_n}} = \bigwedge_{\widetilde{\sigma} \in \overline{N}_f} (\overline{x_1^{\sigma_1}} \vee \overline{x_2^{\sigma_2}} \vee \cdots \vee \overline{x_{n-1}^{\sigma_{n-1}}} \vee \overline{x_n^{\sigma_n}})$$

Так как

$$\overline{x^{\sigma}} = x^{\sigma} \oplus 1 = (x \oplus \sigma \oplus 1) \oplus 1 = x \oplus (\sigma \oplus 1) \oplus 1 = x \oplus \overline{\sigma} \oplus 1 = x^{\overline{\sigma}},$$

окончательно получим:

$$f(\widetilde{x}) = \bigwedge_{\widetilde{\sigma} \in \overline{N}_f} (x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \cdots \vee x_{n-1}^{\overline{\sigma}_{n-1}} \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}).$$

□

Замечание 3.6. $r_{\text{сднф}} + r_{\text{скнф}} = n \cdot 2^n$, где n- количество переменных.

3.3.1 Алгоритм построения СКНФ булевой функции

1. Находим дополнение к носителю функции $\overline{N}_f = \{\widetilde{\sigma} \in \mathbb{B}^n | f(\widetilde{\sigma}) = 0\}$, то есть те двоичные наборы $\widetilde{\sigma}$, на которых значение функции равно 0.

2. Для каждого набора $\widetilde{\sigma}$ из дополнения к носителю выписываем элементарную дизъюнкцию $D_\sigma = x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}$.

   Если значение i- той координаты в наборе $\widetilde{\sigma}$ равно единице ($\sigma_i = 1$), то переменная x_i входит в элементарную конъюнкцию с отрицанием; если же $\sigma_i = 0$, то без отрицания.

3. Составляем СКНФ, соединяя полученные дизъюнкции знаком конъюнкции.

Пример 3.8. Представить функцию $\widetilde{f} = (01001100)$ из примера 3.7 в виде СКНФ.

Решение.

1. Подчеркнем все булевы двоичные наборы, принадлежащие дополнению к носителю и сопоставим каждому набору $\widetilde{\sigma} \in \overline{N}_f$ элементарную дизъюнкцию.

x	y	z	f	
0	0	0	0	$\Rightarrow\ D_1 = x^{\overline{0}} \vee y^{\overline{0}} \vee z^{\overline{0}} = x^1 \vee y^1 \vee z^1 = x \vee y \vee z$
0	0	1	1	
0	1	0	0	$\Rightarrow\ D_2 = x^{\overline{0}} \vee y^{\overline{1}} \vee z^{\overline{0}} = x^1 \vee y^0 \vee z^1 = x \vee \overline{y} \vee z$
0	1	1	0	$\Rightarrow\ D_3 = x^{\overline{0}} \vee y^{\overline{1}} \vee z^{\overline{1}} = x^1 \vee y^0 \vee z^0 = x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$
1	0	0	1	
1	0	1	1	
1	1	0	0	$\Rightarrow\ D_4 = x^{\overline{1}} \vee y^{\overline{1}} \vee z^{\overline{0}} = x^0 \vee y^0 \vee z^1 = \overline{x} \vee \overline{y} \vee z$
1	1	1	0	$\Rightarrow\ D_5 = x^{\overline{1}} \vee y^{\overline{1}} \vee z^{\overline{1}} = x^0 \vee y^0 \vee z^0 = \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$

2. Получаем СКНФ:

$$f_{\text{скнф}} = D_1 \& D_2 \& D_3 \& D_4 \& D_5 = \\ = (x \vee y \vee z)(x \vee \overline{y} \vee z)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}). \quad (3.3)$$

   Её ранг равен 15.

Пример 3.9. Построить таблицу истинности, найти носитель функции, СДНФ и СКНФ булевой функции, заданной формулой

$$f(x, y, z) = ((x \downarrow z) \oplus (y \sim z)) \mid \overline{(x \vee y)\&(z \to x)}.$$

Решение.

1. Установим порядок выполнения двоичных функций

$$f(x, y, z) = ((x \overset{1}{\downarrow} z) \overset{3}{\oplus} (y \overset{2}{\sim} z)) \overset{8}{\mid} \overset{7}{\overline{((x \overset{4}{\vee} y) \overset{6}{\&} (z \overset{5}{\to} x))}}$$

2. Разобьем формулу на элементарные функции:

$$\begin{aligned} f_1 &= x \downarrow z \\ f_2 &= y \sim z \\ f_3 &= f_1 \oplus f_2 \\ f_4 &= x \vee y \\ f_5 &= z \to x \\ f_6 &= f_4 \& f_5 \\ f_7 &= \overline{f}_6 \\ f_8 &= f_3 \mid f_7 \end{aligned}$$

3. Вычислим значение элементарных функций $f_1, \ldots, f_8$ на всех двоичных наборах:

x	y	z	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1

4. Таблица истинности T_f заданной функции:

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

5. Сопоставим всем наборам носителя элементарные конъюнкции:

x	y	z	f		
0	0	0	1	$\rightrightarrows$	$K_1 = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$
0	0	1	1	$\rightrightarrows$	$K_2 = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z$
0	1	0	1	$\rightrightarrows$	$K_3 = \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}$
0	1	1	0		
1	0	0	1	$\rightrightarrows$	$K_4 = x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$
1	0	1	1	$\rightrightarrows$	$K_5 = x \cdot \overline{y} \cdot z$
1	1	0	1	$\rightrightarrows$	$K_6 = x \cdot y \cdot \overline{z}$
1	1	1	1	$\rightrightarrows$	$K_7 = x \cdot y \cdot z$

6. Итак, СДНФ заданной функции равна

$$
\begin{gathered}
f_{\text{сднф}} = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5 \vee K_6 \vee K_7 = \\
= \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \vee \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} \vee x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee x \cdot \overline{y} \cdot z \vee x \cdot y \cdot \overline{z} \vee x \cdot y \cdot z.
\end{gathered}
$$

Её ранг $r_{\text{сднф}} = 21$.

7. Найдем СКНФ заданной функции. Она совпадает с элементарной дизъюнкцией, соответствующей единственному набору, на котором функция принимает нулевое значение.

$$
f_{\text{скнф}} = D_1 = x \vee \overline{y} \vee \overline{z}; \qquad r_{\text{скнф}} = 3.
$$

Замечание 3.7. Очевидно, что порядок выполнения операций алгебры логики может задаваться, вообще говоря, не единственным образом. Так, в приведенном выше примере возможен и такой порядок действий:

$$f(x,y,z) = ((x \overset{1}{\downarrow} z) \overset{6}{\oplus} (y \overset{2}{\sim} z)) \overset{8}{|} \overset{7}{\overline{(x \overset{3}{\vee} y) \overset{5}{\&} (z \overset{4}{\to} x)}} \, .$$

3.3.2 Выражение сложения по модулю 2, эквивалентности и импликации через другие элементарные функции

Используя алгоритмы представления функций в виде СДНФ и СКНФ, выразим основные элементарные функции через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание:

1. $x \oplus y = (x\overline{y}) \vee (\overline{x}y) = (x \vee y)\&(\overline{x} \vee \overline{y})$
2. $x \sim y = \overline{x \oplus y} = xy \vee (\overline{x}\&\overline{y}) = (x \vee \overline{y})\&(\overline{x} \vee y)$
3. $x \to y = \overline{x} \vee y.$

3.4 Многочлен Жегалкина

Определение 3.7. ***Многочленом Жегалкина*** называется формула вида

$$P(\widetilde{x}) =$$
$$= a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_nx_n \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus \ldots \oplus a_{12\ldots n}x_1x_2 \cdots x_n.$$

Другими словами, многочлен Жегалкина - сумма по модулю два попарно различных элементарных конъюнкций, не содержащих отрицаний переменных (многочлен по модулю 2).

Пример 3.10. Многочленами Жегалкина являются следующие формулы:

$$f_1(\widetilde{x}) = 1 \oplus x_1 \oplus x_1x_2x_3;$$
$$f_2(\widetilde{x}) = x_1x_2 \oplus x_1x_3.$$

Теорема 3.6 (И.И.Жегалкина)**.** *Всякая булева функция представима в виде многочлена Жегалкина, причем единственным образом (с точностью до порядка слагаемых и порядка сомножителей в конъюнкциях).*

Доказательство. Если функция $f(\widetilde{x}) \equiv const$, то она уже представлена в виде многочлена Жегалкина.

Пусть $f(\widetilde{x}) \not\equiv const$, тогда функцию можно представить в виде СДНФ:

$$f(\widetilde{x}) = \bigvee_{\widetilde{\sigma} \in N_f} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_{n-1}^{\sigma_{n-1}} x_n^{\sigma_n}.$$

Учитывая, что

$$x^{\alpha} \cdot x^{\overline{\alpha}} = 0,$$

получаем

$$(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n})(x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}) \equiv 0$$

при $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

Поскольку первые 3 строки таблиц истинности для функций двух переменных "дизъюнкция" и "сложение по модулю 2" совпадают, то $x \vee y = x \oplus y$ при $x \cdot y = 0$. Поэтому, учитывая, что в СДНФ нет одинаковых логических слагаемых, булеву функцию "дизъюнкция" в СДНФ можно заменить на функцию "сложение по модулю 2".

Функция принимает вид

$$f(\widetilde{x}) = \bigoplus_{\widetilde{\sigma} \in N_f} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_{n-1}^{\sigma_{n-1}} x_n^{\sigma_n}.$$

Используя равенство $x^{\sigma} = x \oplus \sigma \oplus 1$, заменяем в полученной формуле все x^{σ} на $x \oplus \sigma \oplus 1$. Раскрываем скобки; учитывая тождество $x \oplus x = 0$, приводим подобные, вычеркивая пары одинаковых слагаемых. В результате этих преобразований получим многочлен Жегалкина.

Существование многочлена Жегалкина доказано. Докажем его единственность.

В общем виде многочлен Жегалкина можно представить формулой

$$f(\widetilde{x}) = \bigoplus_{(i_1, i_2, \ldots, \text{ß}_k)} \alpha_{i_1 i_2 \ldots \text{ß}_k} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \qquad \alpha_{i_1 i_2 \ldots \text{ß}_k} \in \{0, 1\}.$$

Число различных конъюнкций $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_k}$ равно числу всех подмножеств из n элементов, то есть 2^n. Число различных многочленов равно числу всех подмножеств множества конъюнкций, то есть 2^{2^n}. Таким образом, число всех многочленов Жегалкина, зависящих от n переменных, равно числу всех булевых функций n переменных (см. теорему 2.2). Из этого, как следствие, делаем вывод о единственности представления булевой функции многочленом Жегалкина. $\square$

3.5 Различные алгоритмы построения многочлена Жегалкина

3.5.1 Алгоритм 1 (посредством СДНФ)

1. Строим СДНФ функции, отличной от нуля (функция $f(\widetilde{x}) \equiv 0$ уже представлена в виде многочлена Жегалкина).
2. Заменяем все символы "$\vee$" на "$\oplus$".
3. Выносим за скобки одинаковые сомножители и упрощаем полученную формулу, применяя тождество
$$xy \oplus x\overline{y} = x(y \oplus \overline{y}) = x \cdot 1 = x.$$
4. Все отрицания переменных $\overline{x}_i$ заменяем на выражение $x_i \oplus 1$ (в силу равенства $\overline{x}_i = x_i \oplus 1$).
5. Раскрываем скобки, учитывая сочетательный и распределительный законы функций алгебры логики.
6. Приводим подобные члены, вычеркивая пары одинаковых слагаемых (согласно тождеству $x \oplus x = 0$).
7. В результате проведенных преобразований получаем многочлен Жегалкина заданной функции.

Пример 3.11. Представить функцию $\widetilde{f} = (01001101)$ в виде многочлена Жегалкина.

Решение.

Представим функцию в виде СДНФ
$$f_{\text{СДНФ}} = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \vee x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee x \cdot \overline{y} \cdot z \vee x \cdot y \cdot z$$
Упростим представление данной функции , используя приведенный выше алгоритм:
$$f_(\widetilde{x}) = \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z\vee x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}\vee x\cdot\overline{y}\cdot z\vee x\cdot y\cdot z = \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z\oplus x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}\oplus x\cdot\overline{y}\cdot z\oplus x\cdot y\cdot z =$$
$$= \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \oplus x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \oplus xz(\overline{y} \oplus y) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \oplus x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \oplus x \cdot z =$$
$$= (x \oplus 1)(y \oplus 1)z \oplus x(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus xz =$$
$$= \underline{xyz} \oplus yz \oplus \underline{\underline{xz}} \oplus z \oplus \underline{xyz} \oplus \underline{\underline{xz}} \oplus xy \oplus x \oplus xz = yz \oplus xz \oplus z \oplus xy \oplus x.$$

Итак, $f_(\widetilde{x}) = yz \oplus xz \oplus z \oplus xy \oplus x$- представление заданной функции многочленом Жегалкина.

3.5.2 Алгоритм 2 (метод неопределенных коэффициентов)

1. Выписываем в общем виде многочлен Жегалкина функции n переменных

$$P(\widetilde{x}) = \\ = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_nx_n \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus \ldots \\ \ldots \oplus a_{12\ldots n}x_1x_2\cdots x_n.$$

2. Для каждого набора $\widetilde{\alpha} \in \mathbb{B}^n$ составляем уравнение $P(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$, где $P(\widetilde{\alpha})$- выражение, получаемое из многочлена Жегалкина $P(\widetilde{x})$ при подстановке вместо $\widetilde{x}$ двоичного набора $\widetilde{\alpha}$. Получаем систему из 2^n линейных уравнений (количество уравнений равно количеству двоичных наборов) с 2^n неизвестными (неизвестными являются коэффициенты $a_0, a_1, a_2 \ldots a_{12\ldots n}$). Определитель системы равен 1, система имеет единственное решение.

3. Решая систему, находим все коэффициенты.

4. Подставляя найденные коэффициенты в $P(\widetilde{x})$, получаем искомый многочлен Жегалкина.

Пример 3.12. Представить функцию $\widetilde{f} = (01001101)$ из примера 3.11 в виде многочлена Жегалкина методом неопределенных коэффициентов.

Решение.

1. Многочлен Жегалкина функции 3 переменных в общем виде задаётся формулой

$$P(x, y, z) = \\ = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{123}x_1x_2x_3.$$

2. Для наглядности зададим функцию таблично.

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Последовательно подставляя наборы в стандартном (лексикографическом) порядке, получаем систему уравнений.

$$\begin{cases} f(000) = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_3 \cdot 0 \oplus a_{12} \cdot 0 \cdot 0 \oplus a_{13} \cdot 0 \cdot 0 \oplus \\ \qquad \oplus a_{23} \cdot 0 \cdot 0 \oplus a_{123} \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \\ f(001) = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_{12} \cdot 0 \cdot 0 \oplus a_{13} \cdot 0 \cdot 1 \oplus \\ \qquad \oplus a_{23} \cdot 0 \cdot 1 \oplus a_{123} \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 = 1 \\ f(010) = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 0 \oplus a_{12} \cdot 0 \cdot 1 \oplus a_{13} \cdot 0 \cdot 0 \oplus \\ \qquad \oplus a_{23} \cdot 1 \cdot 0 \oplus a_{123} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \\ f(011) = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_{12} \cdot 0 \cdot 1 \oplus a_{13} \cdot 0 \cdot 1 \oplus \\ \qquad \oplus a_{23} \cdot 1 \cdot 1 \oplus a_{123} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \\ f(100) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_3 \cdot 0 \oplus a_{12} \cdot 1 \cdot 0 \oplus a_{13} \cdot 1 \cdot 0 \oplus \\ \qquad \oplus a_{23} \cdot 0 \cdot 0 \oplus a_{123} \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 = 1 \\ f(101) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_{12} \cdot 1 \cdot 0 \oplus a_{13} \cdot 1 \cdot 1 \oplus \\ \qquad \oplus a_{23} \cdot 0 \cdot 1 \oplus a_{123} \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 = 1 \\ f(110) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 0 \oplus a_{12} \cdot 1 \cdot 1 \oplus a_{13} \cdot 1 \cdot 0 \oplus \\ \qquad \oplus a_{23} \cdot 1 \cdot 0 \oplus a_{123} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \\ f(111) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_{12} \cdot 1 \cdot 1 \oplus a_{13} \cdot 1 \cdot 1 \oplus \\ \qquad \oplus a_{23} \cdot 1 \cdot 1 \oplus a_{123} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \end{cases}$$

Заметим: если строго придерживаться стандартного порядка, каждое последующее уравнение содержит ровно один новый неизвестный коэффициент. Решаем полученную систему уравнений, учитывая, что $0 \oplus 0 = 0$ и $1 \oplus 1 = 0$.

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 \oplus a_3 = 1 \\ a_0 \oplus a_2 = 0 \\ a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23} = 0 \\ a_0 \oplus a_1 = 1 \\ a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{13} = 1 \\ a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12} = 0 \\ a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ 0 \oplus a_3 = 1 \\ 0 \oplus a_2 = 0 \\ 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{23} = 0 \\ 0 \oplus a_1 = 1 \\ 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{13} = 1 \\ 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{12} = 0 \\ 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{123} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_3 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_{23} = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_{13} = 1 \\ a_{12} = 1 \\ a_{123} = 0 \end{cases}$$

3. Подставляя найденные коэффициенты в $P(\widetilde{x})$, получаем многочлен Жегалкина заданной функции

$$f(\widetilde{x}) = x \oplus z \oplus xy \oplus xz \oplus yz.$$

С точностью до слагаемых, многочлен совпал с формулой, полученной в примере 3.11.

3.5.3 Алгоритм 3 (метод треугольника)

1. Выписываем левую часть таблицы истинности. Напомним, что она одинакова для всех булевых функций n переменных.

2. Вектор значений функции размещаем в правой части, но не вертикально, а в той же строке, что и набор, состоящий из всех нулей. Эта строка в таблице истинности первая.

3. Попарно складываем по модулю 2 пары соседних значений в строке, учитывая, что $\begin{matrix} 0 \oplus 0 = 0 \\ 0 \oplus 1 = 1 \\ 1 \oplus 0 = 1 \\ 1 \oplus 1 = 0 \end{matrix}$.

Результат записываем на 1 строку ниже. Получаем строку, содержащую на 1 элемент меньше, чем в векторе значений.

4. Складываем соседние значения в полученной строке, каждый раз записывая результат в нижней строке и уменьшая на 1 число элементов. Последняя строка, расположенная соответственно набору из всех единиц, содержит только одну цифру.

5. Левые значения полученных строк равны коэффициентам многочлена Жегалкина n переменных $P(\widetilde{x})$. Подставляя вычисленные коэффициенты в $P(\widetilde{x})$, получаем многочлен Жегалкина исходной функции.

Пример 3.13. Представить функцию $\widetilde{f} = (01001101)$ из предыдущих примеров в виде многочлена Жегалкина, используя метод треугольника.

Решение.

x	y	z	
0	0	0	$\diagdown$ 0 $\diagdown$ 1 0 0 1 1 0 1
0	0	1	$\diagdown$ 1 $\diagdown$ 1 0 1 0 1 1
0	1	0	$\diagdown$ 0 $\diagdown$ 1 1 1 1 0
0	1	1	$\diagdown$ 1 $\diagdown$ 0 0 0 1
1	0	0	$\diagdown$ 1 $\diagdown$ 0 0 1
1	0	1	$\diagdown$ 1 $\diagdown$ 0 1
1	1	0	$\diagdown$ 1 $\diagdown$ 1
1	1	1	$\diagdown$ 0 $\diagdown$

Выделенные в правой части числа равны значениям коэффициентов при соответствующих конъюнкциях в многочлене Жегалкина. Индекс многочлена равен номеру ненулевой переменной в левой части. Например,(000) $\rightrightarrows$ α_0, (010) $\rightrightarrows$ α_2, (110) $\rightrightarrows$ α_{12} (переменные нумеруются слева направо). И значения коэффициентов

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_3 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_{23} = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_{13} = 1 \\ a_{12} = 1 \\ a_{123} = 0 \end{cases}$$, и представление функции в виде многочлена Жегалкина $f(\widetilde{x}) = x \oplus z \oplus xy \oplus xz \oplus yz$ уже получено в предыдущем примере.

3.6 Задачи для самостоятельного решения

1. Найти СДНФ, СКНФ и многочлен Жегалкина булевых функций, заданных вектором значений:

1. $\widetilde{f_1} = (\ 1100\ 1100\ )$;
2. $\widetilde{f_2} = (\ 1101\ 1010\ )$;
3. $\widetilde{f_3} = (\ 1001\ 0001\ )$;
4. $\widetilde{f_4} = (\ 0110\ 1111\ )$.

2. Построить таблицу истинности, найти носитель функции, СДНФ, СКНФ и многочлен Жегалкина булевой функции, заданной формулой $\widetilde{f_5} = ((x \vee y) \oplus (x \& z)) \sim \overline{((\bar{x} \to y) \mid (y \downarrow z))}$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1.1. $f_{\text{сднф}_1} = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \vee x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee x \cdot \overline{y} \cdot z$; $r_{\text{сднф}_1} = 12$; $f_{\text{скнф}_1} = (x \vee \overline{y} \vee z) \& (x \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \& (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \& (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$; $r_{\text{скнф}_1} = 12$; $f_{\text{мн.Жег.}_1} = 1 \oplus y$.

1.2. $f_{\text{сднф}_2} = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \vee \overline{x} \cdot y \cdot z \vee x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee x \cdot y \cdot \overline{z}$; $r_{\text{сднф}_2} = 15$; $f_{\text{скнф}_2} = (x \vee \overline{y} \vee z) \& (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \& (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$; $r_{\text{скнф}_2} = 9$; $f_{\text{мн.Жег.}_2} = 1 \oplus y \oplus yz \oplus xz \oplus xy \oplus xyz$.

1.3. $f_{\text{сднф}_3} = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot y \cdot z \vee x \cdot y \cdot z$; $r_{\text{сднф}} = 9$; $f_{\text{скнф}_3} = (x \vee y \vee \overline{z}) \& (x \vee \overline{y} \vee z) \& (\overline{x} \vee y \vee z) \& (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \& (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)$; $r_{\text{скнф}_3} = 15$; $f_{\text{мн.Жег.}_3} = 1 \oplus z \oplus y \oplus x \oplus xz \oplus xy \oplus xyz$.

1.4. $f_{\text{СДНФ}_4} = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \vee \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} \vee x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee x \cdot \overline{y} \cdot z \vee x \cdot y \cdot \overline{z} \vee x \cdot y \cdot z$; $r_{\text{СДНФ}_4} = 18$; $f_{\text{СКНФ}_4} = (x \vee y \vee z)\&(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})$; $r_{\text{СКНФ}_4} = 6$; $f_{\text{мн.Жег.}_4} = z \oplus y \oplus x \oplus xz \oplus xy$.

2. $\widetilde{f}_5 = (\ 1111\ 0111\ )$;
$f_{\text{СДНФ}_5} = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \vee \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot y \cdot z \vee x \cdot \overline{y} \cdot z \vee x \cdot y \cdot \overline{z} \vee x \cdot y \cdot z$; $r_{\text{СДНФ}_5} = 21$; $f_{\text{СКНФ}_5} = \overline{x} \vee y \vee z$; $r_{\text{СКНФ}_5} = 3$; $f_{\text{мн.Жег.}_5} = 1 \oplus x \oplus xz \oplus xy \oplus xyz$.

Глава 4

Геометрический метод минимизации булевых функций

4.1 Постановка задачи минимизации

4.1.1 Основные определения

Ранее (см. главу 3) мы уже показывали, что любую двоичную функцию, не являющуюся константой, можно представить в виде ДНФ (например, СДНФ). Кроме того, представление функции в виде ДНФ не является однозначным для данной функции. Различные ДНФ, реализующие одну и ту же булеву функцию, могут иметь различный ранг (см. замечание 3.3 на стр. 29). Совершенная ДНФ имеет максимальный ранг среди ДНФ данной функции.

Попытаемся представить любую функцию алгебры логики в виде ДНФ, имеющей как можно меньший ранг.

Определение 4.1. Элементарная конъюнкция

$$K = x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} \cdots x_{i_s}^{\sigma_{i_s}}, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n$$

называется ***импликантой*** булевой функции $f(\widetilde{x})$, если её носитель является подмножеством носителя функции f:

$$N_K \subseteq N_f.$$

Другими словами, если K- импликанта, то на всех двоичных наборах выполняются тождества:

а) $K \vee f = f$ б) $K \cdot f = K$.

Из определения следует, что на всех двоичных наборах, на которых импликанта обращается в единицу, функция f также обращается в единицу. На тех наборах, на которых функция обращается в нуль, импликанта также обращается в нуль, значит, нулей у импликанты функции не меньше, чем у самой функции.

Все элементарные конъюнкции, входящие в СДНФ функции f, являются импликантами данной функции.

Пример 4.1. Дана двоичная функция $\widetilde{f}(x, y, z) = (0101\,0001)$.

Элементарные конъюнкции $\begin{array}{l} K_1 = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \\ K_2 = \overline{x} \cdot z \end{array}$ - её импликанты,

так как $\begin{array}{l} N_{K_1} = \{\ (001)\ \} \subseteq N_f = \{\ (001), (011), (111)\ \}, \\ N_{K_2} = \{\ (001), (011)\ \} \subseteq N_f = \{\ (001), (011), (111)\ \}. \end{array}$

Конъюнкция $K_3 = \overline{y}z$ импликантой функции f не является, поскольку $N_{K_3} = \{\ (001), (101)\ \} \nsubseteq N_f = \{\ (001), (011), (111)\ \}$.

Определение 4.2. Импликанта K булевой функции $f(\widetilde{x})$ называется ***простой***, если конъюнкция, полученная из K вычеркиванием хотя бы одной переменной или её отрицания, уже не является импликантой для функции f.

Пример 4.2. Дана двоичная функция $\widetilde{f}(x, y, z) = (0101\,0001)$.

Импликанта $K_1 = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z$ не является простой для функции $\widetilde{f}(x, y, z) = (0101\ 0001)$ из примера 4.1, так как импликанта $K_2 = \overline{x} \cdot z$, образованная вычеркиванием $\overline{y}$ из K_1 также является импликантой для f.

Импликанта $K_2 = \overline{x} \cdot z$, является простой импликантой функции f, поскольку импликанты $K_4 = \overline{x}$ и $K_5 = z$, полученные из K_2 удалением $\overline{x}$ и z соответственно, не являются импликантами данной функции.

Определение 4.3. Пусть K - импликанта функции $f(\widetilde{x})$.

Множество $N_K = \{\widetilde{\sigma} \in \mathbb{B}^n \mid K(\widetilde{\sigma}) = 1\}$ называется ***интервалом*** функции f, соответствующим импликанте K.

Другими словами, ***интервал*** - это носитель конъюнкции.

Определение 4.4. Если вершина булевого куба является подмножеством интервала, говорят, что вершина ***покрывается*** интервалом.

Определение 4.5. Интервал, не содержащийся ни в каком другом интервале функции f, называется ***максимальным интервалом***.

Максимальные интервалы функции f взаимно однозначно соответствуют её простым импликантам.

Определение 4.6. ДНФ, являющаяся дизъюнкцией всех простых импликант, называется ***сокращенной ДНФ*** (обычно обозначается ДНФ$_{\text{сокр}}$).

Из определения следует, что сокращенная ДНФ для каждой логической функции определяется однозначно.

Определение 4.7. Импликанта называется ***избыточной***, если после её удаления получается ДНФ, реализующая ту же самую функцию, что и исходная ДНФ.

Пример 4.3. Рассмотрим функцию $f_{\text{ДНФ}_1}(\widetilde{x}) = x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_2x_4$ из замечания 3.3 на стр. 29.

Мы уже показали, что эту функцию можно представить также в виде $f_{\text{ДНФ}_2}(\widetilde{x}) = x_1\overline{x}_2 \vee x_2x_4$. Значит, импликанта $K_1 = x_1\overline{x}_2x_3$ - избыточна для функции f.

Удаление любой из импликант $K_2 = x_1\overline{x}_2$ и $K_3 = x_2x_4$ приводит к функциям, не тождественным исходной функции f (убедиться в этом можно, сравнив носители функций). Поэтому K_1 и K_2 не являются избыточными для f.

Определение 4.8. Простая импликанта K называется ***ядровой***, если существует хотя бы один набор $\widetilde{\alpha}$ такой, что $K(\widetilde{\alpha}) = 1$, и в то же время $K_i(\widetilde{\alpha}) = 0, \quad \forall\ K_i \neq K$, где K_i - простая импликанта для функции f.

Используя понятие *избыточной импликанты*, можно определить *ядровую импликанту* следующим образом:

Определение 4.9. Простая импликанта K называется ***ядровой***, если она не является избыточной относительно сокращенной ДНФ.

Определение 4.10. Дизъюнкция всех ядровых импликант называется ***ядром*** или ***ядровой ДНФ*** данной функции.

Определение 4.11. ДНФ данной функции называется ***тупиковой*** , если удаление из неё любой элементарной конъюнкции или переменной приводит к ДНФ, не реализующей данную функцию.

Очевидно, что тупиковую ДНФ можно получить из сокращенной путем отбрасывания избыточных импликант. Следующее определение эквивалентно определению 4.11 :

Определение 4.12. ДНФ данной функции называется ***тупиковой***, если она не содержит избыточных импликант.

Определение 4.13. ***Минимальной*** называется ДНФ функции алгебры логики, имеющая наименьший ранг среди всех ДНФ, реализующих данную функцию.

Минимальная ДНФ всегда является тупиковой. Обратное неверно.

Минимальная ДНФ для данной функции может быть не единственна.

Определение 4.14. Задача построения минимальной ДНФ произвольной булевой функции называется ***проблемой минимизации*** функции алгебры логики.

Замечание 4.1. Очевидно, что

$$r(\text{ДНФ}_{\text{min}}) \leqslant r(\text{ДНФ}_{\text{сокр}}) \leqslant r(\text{СДНФ}).$$

Замечание 4.2. Ядровая ДНФ входит во все тупиковые ДНФ данной функции.

4.1.2 Алгоритм построения минимальной ДНФ

обычно состоит из следующих этапов:

1. Строим сокращенную ДНФ данной функции.
2. Определяем ядро.
3. Находим все тупиковые ДНФ, вычисляем их ранги.
4. Среди всех тупиковых выбираем те, которые имеют наименьший ранг - минимальные ДНФ.

4.2 Геометрический метод построения минимальной ДНФ булевых функций трех переменных

4.2.1 Задание функции на двоичном кубе

При нахождении минимальной ДНФ геометрическим методом заданную функцию сначала изображают на булевом кубе $\mathbb{B}^3$ (см пункт 2.2.4 на стр. 15). Напомним, что для функций, зависящих от 4 и более переменных, геометрический способ задания не является наглядным, поэтому мы будем применять его только для функций трех переменных.

Пример 4.4. Изобразить на булевом кубе функцию, заданную вектором значений

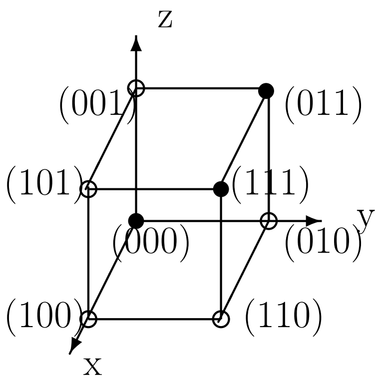
$$\begin{array}{ll} \text{а)} & f_1(\widetilde{x}) = (1001\,0001); \\ \text{б)} & f_2(\widetilde{x}) = (0101\,0111); \\ \text{в)} & f_3(\widetilde{x}) = (0110\,1110). \end{array}$$

Решение.

а) $f_1(\widetilde{x}) = (1001\,0001)$

$$N_{f_1} = \{\ (000), (011), (111)\ \}$$

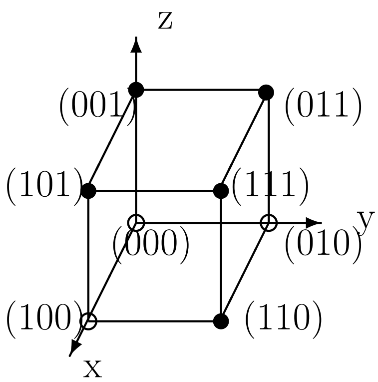
x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1



б) $f_2(\widetilde{x}) = (0101\;0111)$

$$N_{f_2} = \{\;(001), (011), (101), (110), (111)\;\}$$

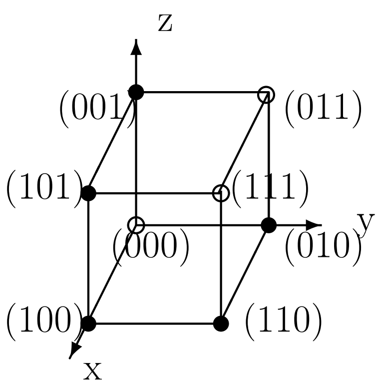
x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



в) $f_3(\widetilde{x}) = (0110\;1110)$

$$N_{f_3} = \{\;(001), (010), (100), (101), (110)\;\}$$

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0



4.2.2 Грани булевого куба

Определение 4.15. Пусть

$$(\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_s}), \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n$$

- фиксированный двоичный набор.

Множество всех вершин $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ n-мерного булевого куба $\mathbb{B}^n$ таких, что $\alpha_{i_1} = \sigma_{i_1},\ \alpha_{i_2} = \sigma_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_s} = \sigma_{i_s}$ называется $(n-s)$**- *мерной гранью*** двоичного куба.

Очевидно, что любой интервал является гранью куба. Поэтому между интервалами и гранями можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Для получения максимальных интервалов функции, заданной геометрически, вершины куба, принадлежащие носителю, объединяют в геометрические фигуры, состоящие из 2^k, $0 \leqslant k \leqslant 3$ вершин - k-мерные грани :

куб (объединение $2^3 = 8$ двоичных наборов - 3-мерная грань $\mathbb{B}^3$)

грань (объединение $2^2 = 4$ двоичных наборов - 2-мерная грань $\mathbb{B}^3$)

ребро (объединение $2^1 = 2$ двоичных наборов - 1-мерная грань $\mathbb{B}^3$)

изолированная вершина ($2^0 = 1$ двоичный набор - 0-мерная грань $\mathbb{B}^3$).

Для этого сначала выделяют все ребра, обе вершины которых принадлежат носителю. Затем ребра объединяют в грани, а грани в куб.

Пример 4.5. Изобразить на булевом кубе все максимальные интервалы для функций

а) $f_1(\widetilde{x}) = (1001\ 0001)$

б) $f_2(\widetilde{x}) = (0101\ 0111)$

в) $f_3(\widetilde{x}) = (0110\ 1110)$

из примера 4.4

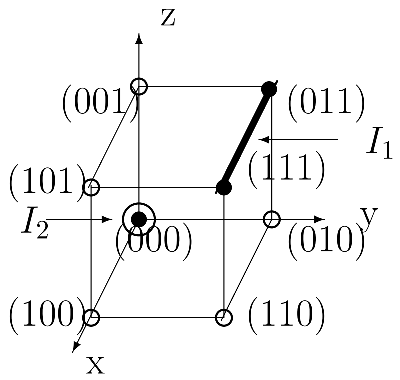
Решение.

а) $f_1(\widetilde{x}) = (1001\ 0001)$

Только две вершины носителя (011) и (111) образуют ребро. Соединим их, выделяя на кубе. Получили максимальный интервал $I_1 = \{\ (011), (111)\ \}$ - 1-мерную грань $\mathbb{B}^3$.

Набор (000) объединить с другими наборами носителя в ребро невозможно. Эта вершина образует максимальный интервал $I_2 = \{\ (000)\ \}$, содержащий только один набор (0-мерная грань $\mathbb{B}^3$).

Очевидно, что других максимальных интервалов у данной функции нет.



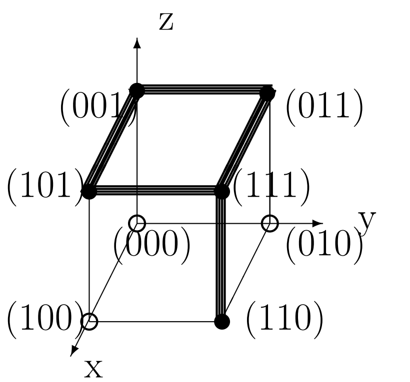
б) $\quad f_2(\widetilde{x}) = (0101\,0111)$

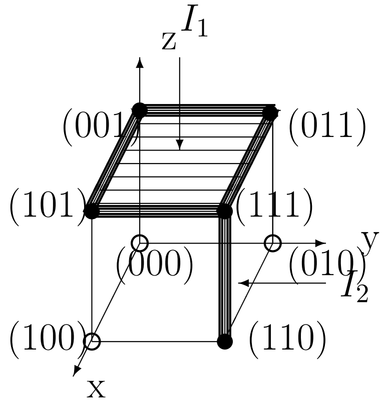
5 пар вершин носителя данной функции можно объединить в ребра. Выделим их на кубе. Очевидно, что 4 ребра образуют одну грань (2-мерную грань $\mathbb{B}^3$). Заштрихуем эту грань на рисунке, выделяя максимальный интервал $I_1 = \{\ (001), (011), (101), (111)\ \}$.

Ребра вошедшие в грань, являются интервалами данной функции, но не образуют *максимальные* интервалы, так как они вошли в бо́льший интервал. Поэтому отдельно данные ребра не помечаем.

Ребро, соединяющее вершины (110) и (111), не вошло в I_1 и является максимальным интервалом. Обозначим его $I_2 = \{\ (110), (111)\ \}$.

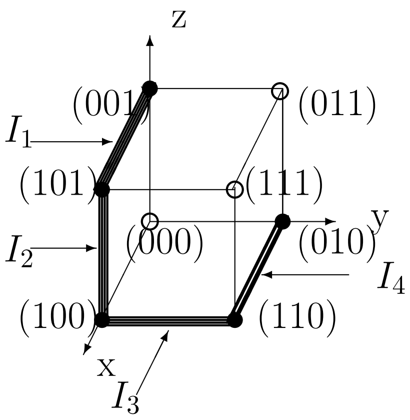
Кроме выделенных, максимальных интервалов нет.





в) $\quad f_3(\widetilde{x}) = (0110\,1110)$

Соединим соседние пары вершин. Наборов из носителя, образующих весь куб или грань куба, нет. Все максимальные интервалы - ребра куба (1-мерные грани $\mathbb{B}^3$)



$$
\begin{aligned}
I_1 &= \{\ (001), (101)\ \} \\
I_2 &= \{\ (101), (100)\ \} \\
I_3 &= \{\ (100), (110)\ \} \\
I_4 &= \{\ (110), (010)\ \}
\end{aligned}
$$

4.2.3 Сокращенная ДНФ

Как упоминалось ранее (см. стр. 50), каждому максимальному интервалу функции взаимно однозначно соответствует простая импликанта.

При нахождении простых импликант двоичные наборы в максимальном интервале удобно записывать в столбец. Затем нужно вычеркнуть столбцы, соответствующие переменным, координаты которых меняют свои значения. Оставшимся столбцам ставим в соответствие простую импликанту, записывая переменную (её номер равен номеру столбца) с отрицанием, если соответствующее значение переменной в столбце равно 0, и без отрицания, если значение равно 1 (аналогично элементарным конъюнкциям в СДНФ). Дизъюнкция всех полученных простых импликант равна сокращенной ДНФ.

Пример 4.6. Построить сокращенные ДНФ для функций

$$
\begin{array}{ll}
\text{а)} & f_1(\widetilde{x}) = (1001\,0001) \\
\text{б)} & f_2(\widetilde{x}) = (0101\,0111) \\
\text{в)} & f_3(\widetilde{x}) = (0110\,1110)
\end{array}
$$

из примера 4.4

Решение.

а) $f_1(\widetilde{x}) = (1001\,0001)$

$$
I_1 = \left\{ \begin{array}{c} (\cancel{0}11) \\ (\cancel{1}11) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_1 = x_2x_3
$$

$$I_2 = \{\ (000)\ \} \quad \leftrightarrow \quad K_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$$

$$\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_1) = K_1 \vee K_2 = x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$$

б) $f_2(\widetilde{x}) = (0101\ 0111)$

$$I_1 = \left\{ \begin{array}{c} (001) \\ (011) \\ (101) \\ (111) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_1 = x_3$$

$$I_2 = \left\{ \begin{array}{c} (110) \\ (111) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_2 = x_1x_2$$

$$\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_2) = K_1 \vee K_2 = x_3 \vee x_1x_2$$

в) $f_3(\widetilde{x}) = (0110\ 1110)$

$$I_1 = \left\{ \begin{array}{c} (001) \\ (101) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_1 = \overline{x}_2x_3$$

$$I_2 = \left\{ \begin{array}{c} (101) \\ (100) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_2 = x_1\overline{x}_2$$

$$I_3 = \left\{ \begin{array}{c} (100) \\ (110) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_3 = x_1\overline{x}_3$$

$$I_4 = \left\{ \begin{array}{c} (110) \\ (010) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_4 = x_2\overline{x}_3$$

$$\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_3) = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 = \overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_2\overline{x}_3$$

Замечание 4.3. Чем больше вершин покрыто максимальным интервалом, тем меньше ранг соответствующей ему простой импликанты.

4.2.4 Ядро функции

В геометрической форме понятие ядра можно сформулировать следующим образом:

Определение 4.16. Максимальный интервал называется ***ядровым***, если он покрывает хотя бы одну вершину, не покрытую другими интервалами.

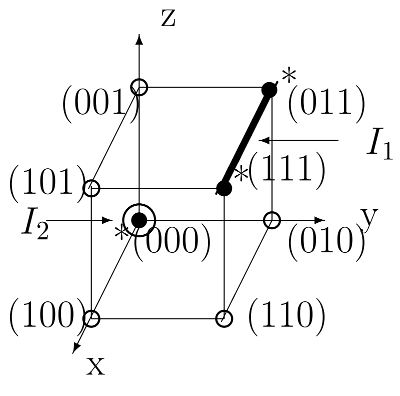
Импликанта, соответствующая ядровому интервалу, называется ***ядровой***. Логическая сумма ядровых импликант называется ***ядром*** булевой функции.

Пример 4.7. Построить ядровые ДНФ для функций
а) $f_1(\widetilde{x}) = (1001\ 0001)$
б) $f_2(\widetilde{x}) = (0101\ 0111)$ из примера 4.4 .
в) $f_3(\widetilde{x}) = (0110\ 1110)$

Решение. Отметим вершины, покрытые одним и только одним максимальным интервалом, особым образом, например, символом "*".

Интервалы, содержащие помеченные "*" вершины, и соответствующие этим интервалам импликанты являются ядровыми. Дизъюнкция ядровых импликант - ядро функции.

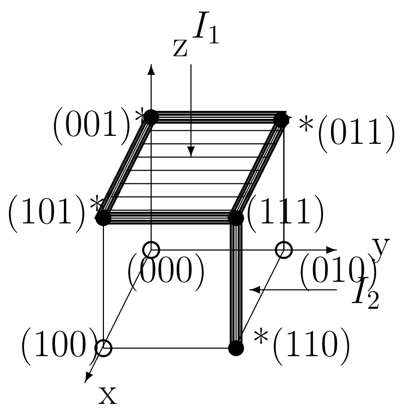
а) $f_1(\widetilde{x}) = (1001\ 0001)$



Все вершины функции f_1 покрыты только одним интервалом, поэтому оба интервала I_1, I_2 и соответствующие им импликанты K_1, K_2 - ядровые.

$$ДНФ_{ядр}(f_1) = ДНФ_{сокр}(f_1) = K_1 \vee K_2 = x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$$

б) $f_2(\widetilde{x}) = (0101\ 0111)$



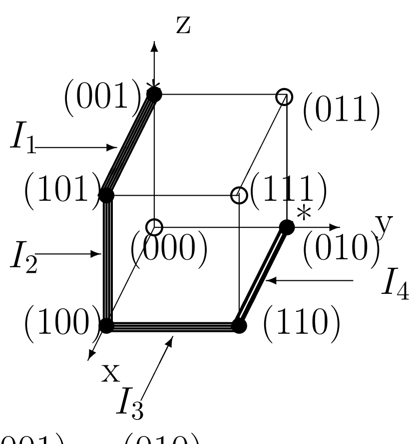
Вершина (110) покрыта только интервалом I_2. Согласно определению, этот интервал и соответствующая импликанта $K_2 = x_1x_2$ - ядровые.

Вершина (111) содержится в двух интервалах и "*" не отмечена.

Остальные вершины входят только в ядровый интервал I_1, импликанта $K_1 = x_3$ - ядровая.

$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_2) = \text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_2) = K_1 \vee K_2 = x_1x_2 \vee x_3$$

в) $f_3(\widetilde{x}) = (0110\ 1110)$



Каждая из вершин (001) и (010) покрыта только одним интервалом, I_1 и I_4 соответственно. Эти интервалы и импликанты K_1 и K_4 - ядровые.

Вершины (101), (100) и (110) покрыты двумя интервалами и "*" не помечены. Интервалы I_2 и I_3 не содержат отмеченных "*" вершин и ядровыми не являются.

$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_3) = K_1 \vee K_4 = x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2x_3$$

4.2.5 Тупиковые и минимальные ДНФ

Вычеркиваем все вершины, входящие в ядро. Остальные вершины носителя покрываем неядровыми интервалами минимальным образом.

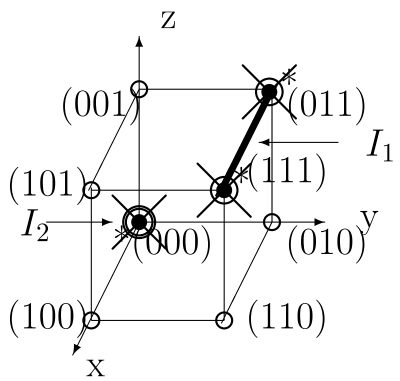
Пример 4.8. Найти все тупиковые и минимальные ДНФ для функций

$$\begin{array}{ll} \text{а)} & f_1(\widetilde{x}) = (1001\ 0001) \\ \text{б)} & f_2(\widetilde{x}) = (0101\ 0111) \\ \text{в)} & f_3(\widetilde{x}) = (0110\ 1110) \end{array}$$

из примера 4.4.

Решение.

а) $f_1(\widetilde{x}) = (1001\ 0001)$

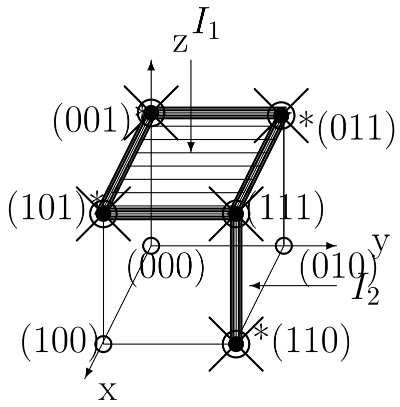


После вычеркивания ядровых интервалов все вершины носителя функции f_1 оказываются вычеркнутыми. Это говорит о том, что все вершины покрыты ядром и тупиковая ДНФ совпадает с ядровой и сокращенной. Эта формула будет задавать и минимальную ДНФ.

$$\text{ДНФ}_{\text{мин}}(f_1) = \text{ДНФ}_{\text{туп}}(f_1) = \text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_1) = \text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_1) = \\ = x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{мин}}(f_1)) = 5.$$

б) $f_2(\widetilde{x}) = (0101\ 0111)$



Вершина (110) покрыта только интервалом I_2. Согласно определению, этот интервал и соответствующая импликанта $K_2 = x_1x_2$ - ядровые.

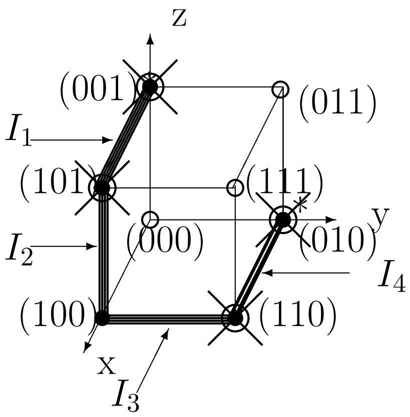
Вершина (111) содержится в двух интервалах и "*" не отмечена.

Остальные вершины входят только в ядровый интервал I_1, импликанта $K_1 = x_3$ - ядровая.

$$\text{ДНФ}_{\text{мин}}(f_2) = \text{ДНФ}_{\text{туп}}(f_2) = \text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_2) = \text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_2) = \\ = x_1x_2 \vee x_3;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{мин}}(f_2)) = 3.$$

в) $f_3(\widetilde{x}) = (0110\ 1110)$



Каждый из ядровых интервалов I_1 и I_4 покрывает по 2 вершины. В результате их вычеркивания остается одна вершина (100). Она содержится в двух интервалах I_2 и I_3. Для того, чтобы покрыть вершину, достаточно одного из них. Значит, тупиковые ДНФ будут содержать ядро и одну из импликант - K_2 или K_3 (эти импликанты избыточны для функции f_3). Других тупиковых ДНФ у данной функции нет.

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f_3) = \text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_3) \vee K_2 = x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_2;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}) = 6.$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f_3) = \text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_3) \vee K_3 = x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_3;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}) = 6.$$

Так как ранг обеих тупиковых ДНФ одинаков, обе формулы являются минимальными ДНФ функции f_3.

$$\text{ДНФ}_{\text{мин}_1}(f_3) = \text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f_3) = x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_2;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_1}) = 6.$$
$$\text{ДНФ}_{\text{мин}_2}(f_3) = \text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f_3) = x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_3;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_2}) = 6.$$

4.2.6 Функция Патрика

Находить тупиковые ДНФ также можно, применяя вспомогательную функцию - функцию Патрика.

Функция Патрика представляет собой КНФ, в которой каждому набору из носителя взаимно однозначно соответствует элементарная дизъюнкция (количество сомножителей в функции Патрика равно $\mid N_f \mid$). Каждый логический сомножитель представляет собой перечисление через знак дизъюнкции всех импликант, покрывающих данную вершину.

Упрощаем функцию Патрика, применяя логические тождества

$$A \cdot A = A$$
$$A \vee AB = A$$
$$A(A \vee B) = A$$

По функции, полученной в результате преобразований, выписываем ядровую и тупиковые ДНФ. Ядро образует логическая сумма импликант, стоящих перед скобками. Тупиковые ДНФ получим, раскрыв скобки. Теперь функция Патрика имеет вид ДНФ. Каждой тупиковой ДНФ соответствует логическое слагаемое в преобразованной функции Патрика.

Пример 4.9. Найти все тупиковые и минимальные ДНФ для функций

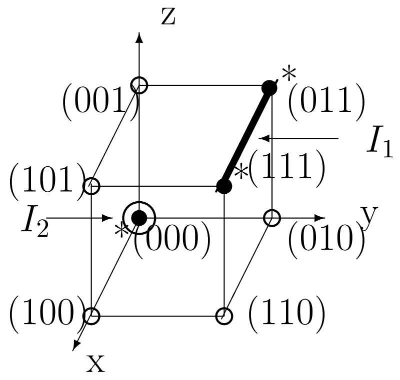
а) $f_1(\widetilde{x}) = (1001\,0001)$

б) $f_2(\widetilde{x}) = (0101\,0111)$ из примера 4.4, используя функцию Патрика.

в) $f_3(\widetilde{x}) = (0110\,1110)$

Решение.

а) $f_1(\widetilde{x}) = (1001\,0001)$

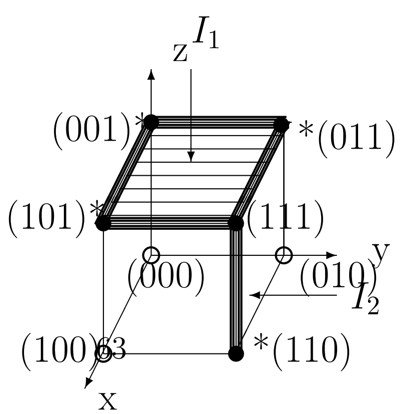


Носитель функции f_1 содержит 3 вершины, каждая покрыта только одним интервалом. Значит, каждый из трех сомножителей в искомой КНФ содержит одну импликанту, покрывающую данную вершину. Перечисляя наборы в порядке их следования в таблице истинности, получаем функцию Патрика $P_{f_1} = (K_2)(K_1)(K_1) = K_1K_2$. Последнее тождество получили, применяя закон идемпотентности $K_1 \cdot K_1 = K_1$. Так как полученная ДНФ содержит одно слагаемое K_1K_2, соответствующее и ядровой, и тупиковой ДНФ, то

$$\text{ДНФ}_{\text{мин}}(f_1) = \text{ДНФ}_{\text{туп}}(f_1) = K_1 \vee K_2 = x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{мин}}(f_1)) = 5.$$

б) $f_2(\widetilde{x}) = (0101\,0111)$



Соответствующие наборам носителя сомножители в функции Патрика опять зададим в порядке возрастания их номеров. Вершина (111) покрыта двумя интервалами I_1 и I_2 (ей соответствует последняя скобка в КНФ), остальные наборы носителя покрываются одним интервалом.

$$P_{f_2} = (K_1)(K_1)(K_1)(K_2)(K_1 \vee K_2) = K_1K_2.$$

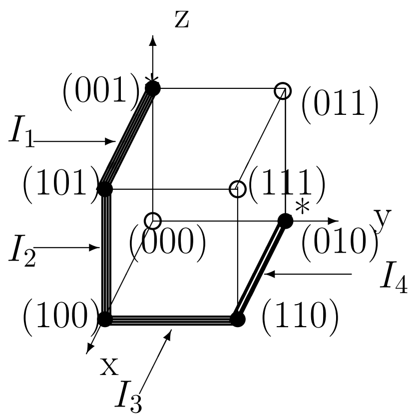
Упрощая формулу, сначала применили тождество $A \cdot A = A$, затем закон поглощения $A(A \vee B) = A$.

Аналогично предыдущему примеру,

$$\text{ДНФ}_{\text{мин}}(f_2) = \text{ДНФ}_{\text{туп}}(f_2) = K_1 \vee K_2 = x_1x_2 \vee x_3;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{мин}}(f_2)) = 3.$$

в) $f_3(\widetilde{x}) = (0110\ 1110)$



Каждый из наборов носителя (001) и (010) покрывается только одним интервалом . Этим вершинам соответствуют в функции Патрика сомножители (K_1) и (K_4). Вершина (100) покрыта интервалами I_2 и I_3, соответствующий ей сомножитель - $(K_2 \vee K_3)$. Аналогично, вершинам (101) и (110) сопоставлены дизъюнкции $(K_1 \vee K_2)$ и $(K_3 \vee K_4)$. Задавая вершины в стандартном порядке, получаем

$$P_{f_3} = (K_1)(K_4)(K_2 \vee K_3)(K_1 \vee K_2)(K_3 \vee K_4) = K_1K_4(K_2 \vee K_3).$$

В этой формуле импликанта K_1 поглотила скобку $(K_1 \vee K_2)$, а K_4 - $(K_3 \vee K_4)$.

Выражение K_1K_4 перед скобками задает ядровую ДНФ

$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_3) = K_1 \vee K_4 = x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2x_3.$$

Раскроем скобки в функции Патрика. Получаем 2 логических слагаемых $K_1K_2K_4$ и $K_1K_3K_4$, которым соответствуют две тупиковые ДНФ

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f_3) = K_1 \vee K_2 \vee K_4 = x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_2;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f_3) = K_1 \vee K_3 \vee K_4 = x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_3.$$

Вычислив их ранг, определяем, что обе тупиковые ДНФ являются минимальными.

$$\text{ДНФ}_{\text{мин}_1}(f_3) = x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_2;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{мин}_2}(f_3) = x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_3.$$

Пример 4.10. Найти сокращенную, ядровую, все тупиковые и все минимальные ДНФ для функции $f(\widetilde{x}) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$.

Решение.

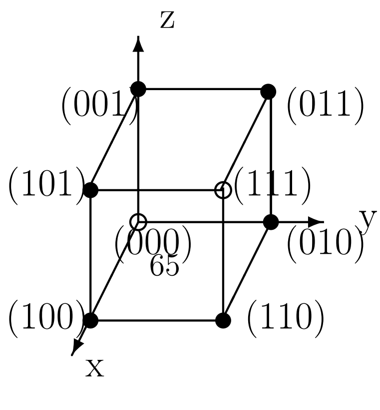
Построим таблицу истинности заданной функции. Сначала вычислим все конъюнкции, затем просуммируем все столбцы по модулю 2, учитывая, что сумма пар одинаковых слагаемых равна нулю.

x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	f
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

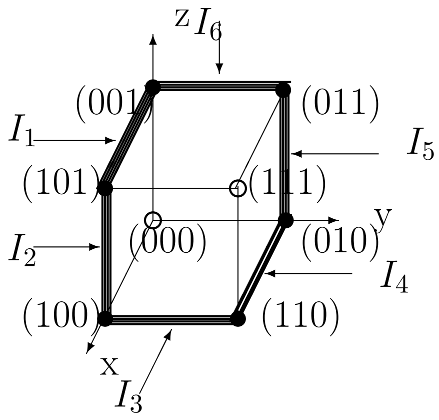
Носитель функции

$$N_f = \{\ (001), (010), (011), (100), (101), (110)\ \}.$$

Изобразим функцию на булевом кубе.



Объединим вершины носителя в максимальные интервалы. Максимальных интервалов, покрывающих все 8 вершин (весь куб) или 4 вершины (грань куба), нет. Все максимальные интервалы соединяют пары соседних вершин и являются ребрами куба (1-мерными гранями булевого куба). Таких интервалов шесть - $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$.



Выпишем наборы, покрытые этими интервалами, и найдем соответствующие данным ребрам простые импликанты.

$$
\begin{array}{lcl}
I_1 = \{\ (001), (101)\ \} & \leftrightarrow & K_1 = \overline{x}_2 x_3 \\
I_2 = \{\ (101), (100)\ \} & \leftrightarrow & K_2 = x_1 \overline{x}_2 \\
I_3 = \{\ (100), (110)\ \} & \leftrightarrow & K_3 = x_1 \overline{x}_3 \\
I_4 = \{\ (110), (010)\ \} & \leftrightarrow & K_4 = x_2 \overline{x}_3 \\
I_5 = \{\ (010), (011)\ \} & \leftrightarrow & K_5 = \overline{x}_1 x_2 \\
I_6 = \{\ (011), (001)\ \} & \leftrightarrow & K_6 = \overline{x}_1 x_3
\end{array}
$$

Дизъюнкция всех простых импликант образует сокращенную ДНФ.

$$
\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f) = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5 \vee K_6 =
$$
$$
= \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \vee x_1 \overline{x}_3 \vee x_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 \vee \overline{x}_1 x_3.
$$

Каждая вершина носителя покрыта ровно двумя интервалами. Вершин, покрытых только одним интервалом, нет. Значит, нет и ядровых интервалов и импликант. Ядровой ДНФ также нет.

Для нахождения всех тупиковых ДНФ воспользуемся функцией Патрика. Так как носитель состоит из 6 наборов, функция Патрика содержит 6 сомножителей. Каждая вершина покрыта двумя интервалами, поэтому каждый сомножитель представляет собой дизъюнкцию двух импликант. Для удобства упрощения функции, наборы в функции Патрика перечислим в следующем порядке: (001),(101),(100),(110),(010),(011).

$$P = (K_1 \vee K_2)(K_2 \vee K_3)(K_3 \vee K_4)(K_4 \vee K_5)(K_5 \vee K_6)(K_6 \vee K_1)$$

Рассмотрим любые две соседние скобки. В общем виде их произведение имеет вид $(A \vee B)(B \vee C) = AB \vee BB \vee AC \vee BC$. Так как $BB = B$, и $AB \vee B = B$, то $(A \vee B)(B \vee C) = B \vee AC$.

Перемножив пары соседних скобок и, упорядочив простые импликанты в порядке возрастания номеров (в силу коммутативности конъюнкции), получим

$$\begin{gathered} P = (K_1 \vee K_2)(K_2 \vee K_3)(K_3 \vee K_4)(K_4 \vee K_5)(K_5 \vee K_6)(K_6 \vee K_1) = \\ = (K_1K_3 \vee K_2)(K_3K_5 \vee K_4)(K_1K_5 \vee K_6) = \\ = (K_1K_3K_5 \vee K_2K_3K_5 \vee K_1K_3K_4 \vee K_2K_4)(K_1K_5 \vee K_6) = \\ = K_1K_3K_5 \vee \underline{K_1K_2K_3K_5} \vee \underline{K_1K_3K_4K_5} \vee K_1K_2K_4K_5 \vee \\ \vee \underline{K_1K_3K_5K_6} \vee K_2K_3K_5K_6 \vee K_1K_3K_4K_6 \vee K_2K_4K_6 \end{gathered}$$

Эту функцию можно упростить, применив закон поглощения к подчеркнутым слагаемым:

$$\begin{gathered} K_1K_3K_5 \vee \underline{K_1K_2K_3K_5} = K_1K_3K_5 \\ K_1K_3K_5 \vee \underline{K_1K_3K_4K_5} = K_1K_3K_5 \\ K_1K_3K_5 \vee \underline{K_1K_3K_5K_6} = K_1K_3K_5. \end{gathered}$$

$$P = K_1K_3K_5 \vee K_1K_2K_4K_5 \vee K_2K_3K_5K_6 \vee K_1K_3K_4K_6 \vee K_2K_4K_6.$$

Остается еще 5 логических слагаемых, соответствующих пяти тупиковым ДНФ

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f) = K_1 \vee K_3 \vee K_5 = \overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2;$$

$$r_1 = 6;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f) = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5 = \overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2;$$

$$r_2 = 8;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_3}(f) = K_2 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_6 = x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_1x_3;$$

$$r_3 = 8;$$

$$ДНФ_{туп_4}(f) = K_1 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_6 = \overline{x}_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_3;$$

$$r_4 = 8;$$

$$ДНФ_{туп_5}(f) = K_2 \vee K_4 \vee K_6 = x_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_3;$$

$$r_5 = 6.$$

Две тупиковые ДНФ ($ДНФ_{туп_1}$ и $ДНФ_{туп_5}$) имеют наименьший ранг, равный 6, и являются минимальными.

$$ДНФ_{мин_1}(f) = ДНФ_{туп_1}(f) = \overline{x}_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2;\ r(ДНФ_{мин_1}) = 6$$

$$ДНФ_{мин_2}(f) = ДНФ_{туп_5}(f) = x_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_3;\ r(ДНФ_{мин_2}) = 6.$$

4.3 Задачи для самостоятельного решения

Геометрическим методом найти сокращенную, ядровую, все тупиковые и минимальные ДНФ булевых функций:

1. $\widetilde{f_1} = (\ 1001\ 1100\ );$
2. $\widetilde{f_2} = (\ 1011\ 0101\ );$
3. $\widetilde{f_3} = (\ 1011\ 1101\ );$
4. $\widetilde{f_4} = (\ 1111\ 1100\ );$
5. $\widetilde{f_5} = (\ 1001\ 1110\ );$
6. $\widetilde{f_6} = (\ 0011\ 1110\ );$
7. $\widetilde{f_7} = (\ 0101\ 1111\ ).$

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. $ДНФ_{сокр}(f_1) = ДНФ_{ядр}(f_1) = ДНФ_{туп}(f_1) = ДНФ_{мин}(f_1) =$

$$= \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2;$$

$$r(ДНФ_{туп}) = r(ДНФ_{мин}) = 7.$$

2. $$\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_2) = \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_2) = \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee x_1 x_3;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f_2) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_1}(f_2) = \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_3;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_1}) = 6;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f_2) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_2}(f_2) = \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_2}) = 6.$$

3. $$\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_3) = \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_3) - \text{отсутствует};$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f_3) = \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_1 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}) = 8;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f_3) = \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}) = 8;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_3}(f_3) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_1}(f_3) = \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_2 x_3;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_3}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_1}) = 6;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_4}(f_3) = \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_4}) = 8;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_5}(f_3) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_2}(f_3) = \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_5}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_2}) = 6.$$

4. $\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_4) = \text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_4) = \text{ДНФ}_{\text{туп}}(f_4) = \text{ДНФ}_{\text{мин}}(f_4) =$

$$\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}}) = 2.$$

5. $\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_5) = \text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_5) = \text{ДНФ}_{\text{туп}}(f_5) = \text{ДНФ}_{\text{мин}}(f_5) =$

$$\overline{x}_1 x_2 x_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_3;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}}) = 9.$$

6. $$\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_6) = \overline{x}_1 x_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_6) = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1\overline{x}_2;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f_6) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_1}(f_6) = \overline{x}_1 x_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_1}) = 6;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f_6) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_2}(f_6) = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_2}) = 6.$$

7. $\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_7) = \text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_7) = \text{ДНФ}_{\text{туп}}(f_7) = \text{ДНФ}_{\text{мин}}(f_7) =$

$$= x_1 \vee x_3;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}}) = 2.$$

Глава 5

Метод Квайна - Мак-Класки минимизации булевых функций

5.1 Склейка соседних наборов

Определение 5.1. Два набора $\widetilde{\sigma}_1$ и $\widetilde{\sigma}_2$ называются ***соседними***, если они отличаются ровно в одной координате:

$$\begin{aligned}\widetilde{\sigma}_1 &= (\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_{k-1}}, 0, \sigma_{i_{k+1}}, \dots, \sigma_{i_s});\\ \widetilde{\sigma}_2 &= (\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_{k-1}}, 1, \sigma_{i_{k+1}}, \dots, \sigma_{i_s}).\end{aligned}$$

У соседних наборов число координат, равных единице, различается на 1.

Геометрически на булевом кубе соседние наборы образуют ребра куба.

Для соседних наборов $\widetilde{\sigma}_1$ и $\widetilde{\sigma}_2$ определяют ***операцию склейки***, поставив этим наборам в соответствие набор

$$\widetilde{\sigma} = (\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_{k-1}}, -, \sigma_{i_{k+1}}, \dots, \sigma_{i_s}).$$

Символ "$-$" заменяет координату, значение которой на этих наборах различно.

Например, наборы $\begin{array}{l}\widetilde{\sigma}_1 = (101\ 0\ 01)\\ \widetilde{\sigma}_2 = (101\ 1\ 01)\end{array}$ - соседние наборы;

результат их склейки $\widetilde{\sigma} = (101 - 01)$.

Наборы $\begin{array}{l}\widetilde{\sigma}_3 = (\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,)\\ \widetilde{\sigma}_2 = (\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,)\end{array}$ соседними не являются, так как различаются в двух координатах, и склейке не подлежат.

Пусть наборам $\widetilde{\sigma}_1$ и $\widetilde{\sigma}_2$ соответствуют элементарные конъюнкции

$$K_1 = x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} \cdots x_{i_{k-1}}^{\sigma_{i_{k-1}}} x_{i_k} x_{i_{k+1}}^{\sigma_{i_{k+1}}} \cdots x_{i_s}^{\sigma_{i_s}};$$
$$K_2 = x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} \cdots x_{i_{k-1}}^{\sigma_{i_{k-1}}} \overline{x}_{i_k} x_{i_{k+1}}^{\sigma_{i_{k+1}}} \cdots x_{i_s}^{\sigma_{i_s}}.$$

Тогда операция склейки соответствует упрощению формулы

$$\begin{aligned} &K_1 \vee K_2 = \\ &= x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} \cdots x_{i_{k-1}}^{\sigma_{i_{k-1}}} x_{i_k} x_{i_{k+1}}^{\sigma_{i_{k+1}}} \cdots x_{i_s}^{\sigma_{i_s}} \vee x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} \cdots x_{i_{k-1}}^{\sigma_{i_{k-1}}} \overline{x}_{i_k} x_{i_{k+1}}^{\sigma_{i_{k+1}}} \cdots x_{i_s}^{\sigma_{i_s}} = \\ &= x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} \cdots x_{i_{k-1}}^{\sigma_{i_{k-1}}} x_{i_{k+1}}^{\sigma_{i_{k+1}}} \cdots x_{i_s}^{\sigma_{i_s}} (x_{i_k} \vee \overline{x}_{i_k}) = \\ &= x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} \cdots x_{i_{k-1}}^{\sigma_{i_{k-1}}} x_{i_{k+1}}^{\sigma_{i_{k+1}}} \cdots x_{i_s}^{\sigma_{i_s}}. \end{aligned}$$

В геометрической форме склейка означает объединение двух соседних вершин в интервал - ребро.

5.2 Алгоритм Квайна - Мак-Класки

Алгоритм рассмотрим на конкретном примере.

Пример 5.1. Найти сокращенную, ядровую, все тупиковые и все минимальные ДНФ для булевой функции $\widetilde{f} = (0101\ 0111)$ методом Квайна - Мак-Класки.

Решение.

1. Находим носитель функции $N_f = \{\widetilde{\sigma} \in \mathbb{B}^n | f(\widetilde{\sigma}) = 1\}$.

   В нашем примере $N_f = \{\ (001),\ (011),\ (101),\ (110),\ (111)\ \}$.

2. Размещаем наборы носителя по классам по количеству единиц в наборе. Для функции n переменных таких классов $n+1$:

$$S_0, S_1, \ldots, S_n.$$

S_0	
S_1	(001)
S_2	(011)
	(101)
	(110)
S_3	(111)

Набор помещаем в класс S_i, если он содержит ровно i единиц. Некоторые классы могут быть пустыми. Двоичные наборы записываем в 1 столбец таблицы.

3. Каждый набор из класса S_i пытаемся склеить с каждым набором из соседнего класса S_{i+1}. Наборы, помещенные не в соседние классы, склейке не подлежат, так как различаются более чем в одной координате (количество единиц у этих наборов различается более, чем на 1).

$$\begin{array}{ll l}
S_1 & (001) & \text{- соседние наборы} \\
S_2 & (011) & \\
\cline{2-2}
 & (0\text{-}1) & \text{- результат склейки} \\
S_1 & (001) & \text{- соседние наборы} \\
S_2 & (101) & \\
\cline{2-2}
 & (\text{-}01) & \text{- результат склейки}
\end{array}$$

Не все наборы из соседних классов являются соседними и склеиваются между собой.

$$\begin{array}{lll}
S_1 & (001) & \text{- соседними не являются} \\
S_2 & (110) & \quad \text{и не склеиваются}
\end{array}$$

Продолжаем склейку, пока есть пары соседних наборов.

$$\begin{array}{ll}
S_2 & (011) \\
S_3 & (111) \\
\cline{2-2}
 & (\text{-}11)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
S_2 & (101) \\
S_3 & (111) \\
\cline{2-2}
 & (1\text{-}1)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
S_2 & (110) \\
S_3 & (111) \\
\cline{2-2}
 & (11\text{-})
\end{array}$$

Результат склейки соседних наборов из классов S_i и S_{i+1} записываем во второй столбец. Количество единиц в нем равно i, поэтому склейку помещаем в строку, соответствующую классу S_i.

После склейки всех соседних классов класс S_n оказывается пустым.

Все наборы, участвующие в склейке, помечаем каким-либо символом, например, "$*$".

В нашем примере таблица принимает вид

S_0		
S_1	(001) *	(0-1)
		(-01)
S_2	(011) *	(-11)
	(101) *	(1-1)
	(110) *	(11-)
S_3	(111) *	

Заметим, что в первом столбце все наборы помечены "$*$".

4. Склеиваем наборы из соседних классов, расположенные во 2 столбце. В дальнейшей склейке участвуют наборы, имеющие прочерк на одинаковых местах.

   Например, наборы $\begin{matrix} (\ 0-1\ ) \\ (\ 1-1\ ) \end{matrix}$ - соседние,

   результат их склейки - $(-\,-1\ )$,

   а наборы $\begin{matrix} (\ 0-1\ ) \\ (\ -11\ ) \end{matrix}$ соседними не являются.

   Результат повторной склейки размещаем в правый столбец в строку, соответствующую количеству единиц в наборе. Соседние наборы опять помечаем "$*$".

   Так продолжаем до тех пор, пока есть наборы, которые могут быть склеены.

   Заметим, что в каждом последующем столбце количество пустых классов увеличивается по крайней мере на 1. Это значит, что в таблице будет не более, чем n столбцов и процесс на каком-либо шаге завершится.

   В заданном примере таблица содержит 3 столбца.

S_0			
S_1	(001) *	(0-1) *	(- -1)
		(-01) *	(- -1)
S_2	(011) *	(-11) *	
	(101) *	(1-1) *	
	(110) *	(11-)	
S_3	(111) *		

Заметим, что после повторной склейки всегда появляются пары одинаковых наборов, в нашем случае (- -1). Геометрически повторная склейка соответствует объединению 4 ребер в одну грань. Одну из одинаковых склеек можно вычеркнуть.

5. Выписываем множество всех наборов из всех столбцов, которые не участвовали в склейке. Эти наборы не помечены "$*$". Такие наборы образуют максимальные интервалы, им соответствуют простые импликанты. Импликанты задаются так же, как и в геометрическом методе.

S_0			
S_1	(001) *	(0-1) * (-01) *	$\underline{\underline{(--1)}}$
S_2	(011) * (101) * (110) *	(-11) * (1-1) * $\underline{\underline{(11-)}}$	
S_3	(111) *		

В нашем примере таких наборов два (они выделены в таблице): (11-) и (- -1).

$$(11-) \ \leftrightarrow K_1 = x_1x_2$$
$$(--1) \leftrightarrow K_2 = x_3$$

6. Находим сокращенную ДНФ.

   Для нашей задачи $\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f) = K_1 \vee K_2 = x_1x_2 \vee x_3$.

7. Составляем таблицу покрытия. Количество строк в таблице равно числу простых импликант, а количество столбцов равно количеству наборов в носителе. Если $j-$я вершина покрыта $i-$тым интервалом (то есть, значения несклеенных переменных в импликанте совпадают с соответствующими координатами набора), элемент, находящийся на пересечении $i-$той строки и $j-$го столбца, помечаем каким-либо символом, например,"1". Так как каждая склейка соответствует двум наборам, то количество меток в строке равно 2^k, где k - количество склеенных переменных.

   Каждая строка и каждый столбец таблицы покрытия должны содержать хотя бы 1 метку.

	(001)	(011)	(101)	(110)	(111)
K_1 (11-)				1	1
K_2 (- -1)	1	1	1		1

8. Ядровую ДНФ удобно задавать по таблице покрытия, отмечая столбцы, содержащие только одну метку. Единственная в столбце метка означает, что набор, соответствующий столбцу, покрывается только одним интервалом (в геометрическом методе мы помечали аналогичные вершины символом $"*"$). Все строки, содержащие такие метки, соответствуют ядровым интервалам и импликантам. В таблице покрытия ядровые импликанты обычно обозначают буквой "Я". Соединяя эти импликанты знаком "дизъюнкция" , получаем ядро функции.

	(001)*	(011)*	(101)*	(110)*	(111)
ЯK_1 (11-)				1	1
ЯK_2 (- -1)	1	1	1		1

В рассматриваемом примере отмеченных столбцов 4, находятся метки в строках, соответствующих ядровым импликантам K_1 и K_2.

$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f) = \text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f) = K_1 \vee K_2 = x_1 x_2 \vee x_3;$$

9. По таблице покрытия составляем функцию Патрика. Количество логических сомножителей в искомой функции совпадает с количеством столбцов в таблице, а количество логических слагаемых в каждой дизъюнкции равно числу меток в соответствующем столбце.

   В заданном примере первые 4 столбца содержат по одной метке, значит, и первые 4 сомножителя в КНФ содержат по одной простой импликанте. В последнем столбце расположены две метки, поэтому пятый сомножитель функции Патрика представляет собой дизъюнкцию двух простых импликант.

   $$P = (K_2)(K_2)(K_2)(K_1)((K_1 \vee K_2) = K_1 \cdot K_2 \cdot (K_1 \vee K_2) = K_1 \cdot K_2.$$

При упрощении функции Патрика, как обычно, применялись логические тождества:

$$A \cdot A = A$$
$$A(A \vee B) = A.$$

В результате преобразований получили, что $P = K_1 \cdot K_2$ - функция Патрика состоит из одного слагаемого K_1K_2. Ему соответствует одна тупиковая ДНФ. Так как все скобки сократились, то ядровая ДНФ совпадает с тупиковой (мы подтвердили результат, полученный на предыдущем шаге алгоритма). Эта же ДНФ является и минимальной.

$$\text{ДНФ}_{\text{мин}}(f) = \text{ДНФ}_{\text{туп}}(f) = \text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f) = K_1 \vee K_2 = x_1x_2 \vee x_3;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{мин}}(f)) = 3.$$

Заметим, что находить ядровую ДНФ дважды не обязательно. Пункт 8 алгоритма можно пропускать.

Пример 5.2. Найти сокращенную, ядровую, все тупиковые и все минимальные ДНФ для булевой функции $\widetilde{f} = (1101\ 0001\ 1000\ 1111)$ методом Квайна.

Решение.

1. Построим таблицу истинности булевой функции. Так как длина вектора значений равна $16 = 2^4$, то функция зависит от 4 переменных.

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Носитель функции

$$N_f = \{\ (0000), (0001), (0011), (0111),\\ (1000), (1100), (1101), (1110), (1111)\ \}.$$

2. Разобьем носитель по классам S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 по количеству единиц в наборе.

S_0	(0000)
S_1	(0001)
	(1000)
S_2	(0011)
	(1100)
S_3	(0111)
	(1101)
	(1110)
S_4	(1111)

3. Применим операцию склейки к наборам из соседних классов. Результат помещаем во 2 столбец. Все наборы, которые участвуют в склейке, помечаем "$*$".

S_0	(0000)*	(000-)
		(-000)
S_1	(0001)*	(00-1)
	(1000)*	(1-00)
S_2	(0011)*	(0-11)
	(1100) *	(110-)
		(11-0)
S_3	(0111)*	(-111)
	(1101)*	(11-1)
	(1110)*	(111-)
S_4	(1111) *	

Обратим внимание, что набор, состоящий из всех нулей (он расположен в классе S_0), склеивается со всеми наборами из класса S_1, а набор из всех единиц - со всеми наборами из класса S_3.

4. Применим операцию склейки к наборам из второго столбца, также помечая соседние наборы. Результат записываем в 3 столбец.

S_0	(0000)*	$\underline{\underline{\text{(000-)}}}$	
		$\underline{\underline{\text{(-000)}}}$	
S_1	(0001)*	$\underline{\underline{\text{(00-1)}}}$	
	(1000)*	$\underline{\underline{\text{(1-00)}}}$	
S_2	(0011)*	$\underline{\underline{\text{(0-11)}}}$	$\underline{\underline{\text{(11–)}}}$
	(1100) *	(110-)*	~~(11–)~~
		(11-0)*	
S_3	(0111)*	$\underline{\underline{\text{(-111)}}}$	
	(1101)*	(11-1)*	
	(1110)*	(111-)*	
S_4	(1111) *		

Убедимся, что в третьем столбце появилась пара одинаковых склеенных наборов. Вычеркиваем один из них. Больше нет наборов, к которым можно было бы применить операцию склейки. Все наборы, не участвовавшие в склейке, дважды подчеркиваем.

5. Находим простые импликанты, соответствующие дважды подчеркнутым наборам. Выписываем сокращенную ДНФ.

$$
\begin{aligned}
(000-) &\leftrightarrow K_1 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \\
(-000) &\leftrightarrow K_2 = \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \\
(00-1) &\leftrightarrow K_3 = \overline{x}_1\overline{x}_2 x_4 \\
(1-00) &\leftrightarrow K_4 = x_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \\
(0-11) &\leftrightarrow K_5 = \overline{x}_1 x_3 x_4 \\
(-111) &\leftrightarrow K_6 = x_2 x_3 x_4 \\
(11--) &\leftrightarrow K_7 = x_1 x_2
\end{aligned}
$$

$$
\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f) = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5 \vee K_6 \vee K_7 =
$$
$$
= \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 x_4 \vee x_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2
$$

6. Составим таблицу покрытия.

	(0000)	(0001)	(0011)	(0111)	(1000)	(1100)	(1101)	(1110)	(1111)
K_1 (000-)	1	1							
K_2 (-000)	1				1				
K_3 (00-1)		1	1						
K_4 (1-00)					1	1			
K_5 (0-11)			1	1					
K_6 (-111)				1					1
K_7 (11-)						1	1	1	1

Для самопроверки заметим, что в каждой строчке, соответствующей наборам, участвовавшим в одной склейке (один " - " в наборе), стоят по 2 метки " 1 " , а в дважды склеивавшемся наборе - 4 метки.

7. Найдем ядровую ДНФ. Столбцы, содержащие по одной метке, соответствуют наборам (1101) и (1110). Обведем эти метки.

	(0000)	(0001)	(0011)	(0111)	(1000)	(1100)	(1101)	(1110)	(1111)
K_1 (000-)	1	1							
K_2 (-000)	1				1				
K_3 (00-1)		1	1						
K_4 (1-00)					1	1			
K_5 (0-11)			1	1					
K_6 (-111)				1					1
ЯK_7 (11-)						1	1	1	1

Обведенные метки расположены в строке, относящейся к импликанте $K_7 = (11-) = x_1x_2$. Только эта импликанта является ядровой.

$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f) = K_7 = x_1x_2.$$

8. Составим функцию Патрика для заданной функции. Количество скобок в ней равно 9, так как $\mid N_f \mid = 9$.

$$P = (K_1 \vee K_2)(K_1 \vee K_3)(K_3 \vee K_5)(K_5 \vee K_6)\cdot \\ \cdot (K_2 \vee K_4)(K_4 \vee K_7)(K_7)(K_7)(K_6 \vee K_7).$$

Все скобки, содержащие импликанту K_7, вычеркиваем, применив закон поглощения $A(A \vee B) = A$.

Первую и вторую, третью и четвертую скобки попарно перемножаем, также применяя закон поглощения. Получим

$$P = K_7(K_1 \vee K_2K_3)(K_3K_6 \vee K_5)(K_2 \vee K_4) = \\ = K_7(K_1K_3K_6 \vee K_2K_3K_6 \vee K_1K_5 \vee K_2K_3K_5)(K_2 \vee K_4) = \\ = K_7(\underline{K_1K_2K_3K_6} \vee \underline{\underline{K_2K_3K_6}} \vee K_1K_2K_5 \vee \overbrace{K_2K_3K_5} \vee \\ \vee K_1K_3K_4K_6 \vee \underline{K_2K_3K_4K_6} \vee K_1K_4K_5 \vee \overbrace{K_2K_3K_4K_5}).$$

Опять применим закон поглощения. Дважды подчеркнутая конъюнкция $K_2K_3K_6$ поглощает конъюнкции $K_1K_2K_3K_6$ и $K_2K_3K_4K_6$, подчеркнутые одной линией; конъюнкция $K_2K_3K_5$ поглощает $K_2K_3K_4K_5$.

$$P = K_7(K_2K_3K_6 \vee K_1K_2K_5 \vee K_2K_3K_5 \vee K_1K_3K_4K_6 \vee K_1K_4K_5).$$

Выражение K_7, стоящее перед скобками, соответствует ядровой ДНФ.

$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f) = K_7 = x_1x_2.$$

Мы подтвердили результат, полученный с помощью таблицы покрытия.

Раскроем скобки в функции Патрика.

$$P = K_2K_3K_6K_7 \vee K_1K_2K_5K_7 \vee K_2K_3K_5K_7 \vee \\ \vee K_1K_3K_4K_6K_7 \vee K_1K_4K_5K_7.$$

Пять логических слагаемых определяют пять тупиковых ДНФ. Выписываем эти ДНФ, находим их ранг, определяем минимальные ДНФ.

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_1}(f) = K_2 \vee K_3 \vee K_6 \vee K_7 = \\ = \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2;$$

$$r_1 = 11;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_2}(f) = K_1 \vee K_2 \vee K_5 \vee K_7 = \\ = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_3x_4 \vee x_1x_2;$$

$$r_2 = 11;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_3}(f) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_3}(f) = K_2 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_7 = \\ = \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_1x_3x_4 \vee x_1x_2;$$

$$r_3 = 11;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_4}(f) = K_1 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_6 \vee K_7 = \\ = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_4 \vee x_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2;$$

$$r_4 = 14;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_5}(f) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_4}(f) = K_1 \vee K_4 \vee K_5 \vee K_7 = \\ = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_3x_4 \vee x_1x_2;$$

$$r_5 = 11.$$

Пример 5.3. Найти сокращенную, ядровую, все тупиковые и все минимальные ДНФ для булевой функции $\widetilde{f} = (0010\ 0011\ 1100\ 1101)$ методом Квайна.

Решение.

1. Таблица истинности заданной функции

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Носитель данной функции

$$N_f =$$
$$= \{\ (0010), (0110), (0111), (1000), (1001), (1100), (1101), (1111)\ \}.$$

2. Применим операцию склейки ко всем наборам из соседних классов. Все наборы, которые участвуют в склейке, как и в предыдущих примерах, помечаем "$*$". Получается следующая таблица

S_0			
S_1	(0010)* (1000)*	(0-10) (100-)* (1-00)*	(1-0-) ~~(1-0-)~~
S_2	(0110)* (1001) * (1100)*	(011-) (1-01)* (110-)*	
S_3	(0111)* (1101)*	(-111) (11-1)	
S_4	(1111) *		

3. Выписываем простые импликанты и находим сокращенную ДНФ.

$$
\begin{array}{rcl}
(0-10) & \leftrightarrow & K_1 = \overline{x}_1 x_3 \overline{x}_4 \\
(011-) & \leftrightarrow & K_2 = \overline{x}_1 x_2 x_3 \\
(-111) & \leftrightarrow & K_3 = x_2 x_3 x_4 \\
(11-1) & \leftrightarrow & K_4 = x_1 x_2 x_4 \\
(1-0-) & \leftrightarrow & K_5 = x_1 \overline{x}_3
\end{array}
$$

$$
\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f) = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5 =
$$

$$
= \overline{x}_1 x_3 \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_4 \vee x_1 \overline{x}_3.
$$

4. Составим таблицу покрытия. Обведем единственные в столбце метки.

		(0010)	(0110)	(0111)	(1000)	(1001)	(1100)	(1101)	(1111)
ЯK_1	(0-10)	1	1						
K_2	(011-)		1	1					
K_3	(-111)			1					1
K_4	(11-1)							1	1
ЯK_5	(1-0-)				1	1	1	1	

Выпишем ядровую ДНФ.

$$
\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f) = K_1 \vee K_5 = \overline{x}_1 x_3 \overline{x}_4 \vee x_1 \overline{x}_3.
$$

5. По таблице покрытия составим функцию Патрика .

$$
\begin{aligned}
P = & \\
= (K_1) & \underbrace{(K_1 \vee K_2)}_{\text{поглощается } K_1} (K_2 \vee K_3)(K_5)(K_5)(K_5) \underbrace{(K_4 \vee K_5)}_{\text{поглощ.} K_5} (K_3 \vee K_4) = \\
& = K_1 K_5 (K_2 \vee K_3)(K_3 \vee K_4) = \\
& = K_1 K_5 (K_2 K_3 \vee \underbrace{K_3 K_3}_{K_3} \vee K_2 K_4 \vee K_3 K_4) = \\
& = K_1 K_5 (\underbrace{K_2 K_3}_{\text{поглощается } K_3} \vee K_3 \vee K_2 K_4 \vee \underbrace{K_3 K_4}_{\text{поглощается } K_3}) = \\
& = K_1 K_5 (K_3 \vee K_2 K_4).
\end{aligned}
$$

Убедимся, что ядровая ДНФ , равная дизъюнкции импликант, стоящих перед скобками в упрощенной функции Патрика

$$
\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f) = K_1 \vee K_5 = \overline{x}_1 x_3 \overline{x}_4 \vee x_1 \overline{x}_3,
$$

совпадает с формулой, полученной с помощью таблицы покрытия.

Раскрывая скобки в функции Патрика, получаем 2 логических слагаемых, соответствующих двум тупиковым ДНФ.

$$
P = K_1 K_3 K_5 \vee K_1 K_2 K_4 K_5.
$$

Выписываем полученные ДНФ, находим их ранг, определяем минимальную ДНФ.

$$
\begin{aligned}
\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_1}(f) = K_1 \vee K_3 \vee K_5 = & \\
= \overline{x}_1 x_3 \overline{x}_4 \vee x_2 x_3 x_4 \vee x_1 \overline{x}_3;
\end{aligned}
$$

$$
r_1 = 8;
$$

$$
\begin{aligned}
\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f) = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5 = & \\
= \overline{x}_1 x_3 \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_4 \vee x_1 \overline{x}_3;
\end{aligned}
$$

$$
r_2 = 11.
$$

5.3 Задачи для самостоятельного решения

Методом Квайна найти сокращенную, ядровую, все тупиковые и минимальные ДНФ булевых функций.

1. $\widetilde{f_1} = (\ 0011\ 1101\ )$;
2. $\widetilde{f_2} = (\ 0111\ 1110\ )$;
3. $\widetilde{f_3} = (1010\ 0111\ 1010\ 0000)$;
4. $\widetilde{f_4} = (1011\ 1010\ 1110\ 1010)$;
5. $\widetilde{f_5} = (1101\ 1011\ 1100\ 1010)$;
6. $\widetilde{f_6} = (1110\ 0110\ 1110\ 0110)$;
7. $\widetilde{f_7} = (0010\ 0010\ 0111\ 1110)$;
8. $\widetilde{f_8} = (1010\ 1110\ 0011\ 0001)$;
9. $\widetilde{f_9} = (1100\ 1010\ 1101\ 0010)$;
10. $\widetilde{f_{10}} = (1110\ 0110\ 0100\ 0111)$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1.
$$\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_1) = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_1) = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f_1) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_1}(f_1) = \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \vee x_2 x_3;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_1}) = 6;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f_1) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_2}(f_1) = \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \vee x_1 x_3;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_2}) = 6.$$

2.
$$\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_2) = \overline{x}_1 x_3 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \vee x_1 \overline{x}_3 \vee x_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_2) - \text{отсутствует};$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f_2) = \overline{x}_1 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \vee x_1 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}) = 8;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f_2) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_1}(f_2) = \overline{x}_1x_3 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_1}) = 6;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_3}(f_2) = \overline{x}_1x_3 \vee \overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_2\overline{x}_3;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_3}) = 8;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_4}(f_2) = \overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_4}) = 8;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_5}(f_2) = \overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_5}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_2}) = 6.$$

3. $$\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_3) = \overline{x}_1x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_4;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_3) = \overline{x}_1x_2x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_4;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f_3) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_1}(f_3) = \overline{x}_1x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_4;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_1}) = 8;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f_3) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_2}(f_3) = \overline{x}_1x_2x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_4;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_2}) = 8.$$

4. $\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_4) = \text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_4) = \text{ДНФ}_{\text{туп}}(f_4) = \text{ДНФ}_{\text{мин}}(f_4) =$
$$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_4;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}}) = 7.$$

5. $$\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_5) = \overline{x}_1\overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_1x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_2\overline{x}_4;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_5) = \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_2\overline{x}_4;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f_5) = \overline{x}_1\overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_2\overline{x}_4;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}) = 10;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f_5) = \text{ДНФ}_{\text{мин}}(f_5) = \overline{x}_1x_3x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_2\overline{x}_4;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}}) = 7.$$

6. $$\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_6) = \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_3x_4 \vee x_3\overline{x}_4;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_6) = \overline{x}_3x_4 \vee x_3\overline{x}_4;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f_6) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_1}(f_6) = \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_3x_4 \vee x_3\overline{x}_4;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_1}) = 6;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f_6) = \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_3x_4 \vee x_3\overline{x}_4;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_2}) = 6.$$

7. $\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_7) = x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_1\overline{x}_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2\overline{x}_4 \vee x_3\overline{x}_4;$
$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_7) = x_3\overline{x}_4;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f_7) = \text{ДНФ}_{\text{мин}}(f_7) = x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_3\overline{x}_4;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}}) = 8;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f_7) = x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_1\overline{x}_3x_4 \vee x_1x_2\overline{x}_4 \vee x_3\overline{x}_4;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}) = 11;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_3}(f_7) = x_1\overline{x}_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_3\overline{x}_4;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_3}) = 11;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_4}(f_7) = x_1\overline{x}_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_4 \vee x_3\overline{x}_4;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_4}) = 11.$$

8. $$\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_8) = \overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_3x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_4;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_8) = \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_3x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_4;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f_8) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_1}(f_8) = \overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_3x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_4;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_1}) = 11;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f_8) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_2}(f_8) = \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_3x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_4;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_2}) = 11.$$

9. $$\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_9) = \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 x_2\overline{x}_4 \vee x_2 x_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2 x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_9) = x_2 x_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2 x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f_9) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_1}(f_9) = \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_2 x_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2 x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_1}) = 11;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f_9) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_2}(f_9) = \overline{x}_1 x_2\overline{x}_4 \vee x_2 x_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2 x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_2}) = 11.$$

10. $$\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_{10}) =$$

$$= \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 x_3\overline{x}_4 \vee x_2 x_3\overline{x}_4 \vee x_1 x_2 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x}_3 x_4;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_{10}) = \overline{x}_3 x_4;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f_{10}) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_3\overline{x}_4 \vee x_2 x_3\overline{x}_4 \vee x_1 x_2 x_4 \vee \overline{x}_3 x_4;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}) = 14;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f_{10}) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_1}(f_1 0) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_3\overline{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x}_3 x_4;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_1}) = 11;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_3}(f_{10}) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_2}(f_1 0) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 x_3\overline{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x}_3 x_4;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_3}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_2}) = 11;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_4}(f_{10}) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_3}(f_1 0) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee x_2 x_3\overline{x}_4 \vee x_1 x_2 x_4 \vee \overline{x}_3 x_4;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_4}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_3}) = 11;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_5}(f_{10}) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_5}(f_1 0) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee x_2 x_3\overline{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x}_3 x_4;$$

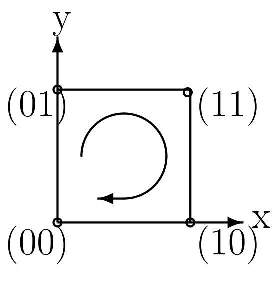
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_5}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_4}) = 11;$$

Глава 6

Метод Карно минимизации булевых функций

6.1 Представление функции алгебры логики картой Карно

Любую булеву функцию можно представить ***картой Карно***. Наиболее удобно и наглядно этим способом изображать функцию 4 переменных. Для этого рисуют прямоугольную таблицу 4×4. Строки обычно соответствуют переменным x_1 и x_2, а столбцы- переменным x_3 и x_4. Наборы, соответствующие переменным, следуют не в стандартном (лексикографическом) порядке, а следующим образом: $00, 01, 11, 10$ (то есть два последних двоичных набора длины 2 меняют местами). Такое расположение наборов соответствует их размещению на координатной плоскости по направлению по часовой стрелке.



$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

При таком порядке следования наборов соседние наборы оказываются расположенными рядом. Наборы 00 и 10 являются соседними, поэтому на карте Карно все соседние строки и столбцы, включая крайние, определяют соседние наборы. Отсюда еще одно название карты Карно- ***булев тор.***

В полученной квадратной таблице каким-либо символом (например, 1 или $\vee$) отмечают только вершины, принадлежащие носителю. Чтобы соответствие номеров наборов носителя и элементов карты Карно было взаимно однозначным, вектор значений функции размещают в таблице Карно следующим образом:

> Первую четверку значений записывают в первую строку, поменяв местами пару последних значений в четверке. Аналогично поступают со второй четверкой. Это обусловлено переменой мест значений 11 и 10 переменных x_3 и x_4.
>
> Третью четверку вектора значений функции располагают в четвертой строке, а четвертую- в третьей, не забыв поменять местами 3 и 4 элемент в каждой четверке. Такое расположение координат вектора значений функции связано с тем, что значения 11 и 10 у переменных x_1 и x_2 в карте Карно поменяли местами.

Аналогичного результата можно добиться, записывая значения переменных на каждом наборе носителя в элементы таблицы, находящиеся на пересечении соответствующих переменным строк и столбцов.

Пример 6.1. Изобразить с помощью карты Карно двоичную функцию $\widetilde{f} = (1000\ 0101\ 1100\ 0111)$.

Решение.

1. В первых двух четверках вектора значений функции (1000 и 0101) меняем местами последние две цифры и записываем их в две первых строки карты Карно (указываем только наборы носителя!):

   $$10\overset{\frown}{00} \mapsto 1000$$

   $$01\overset{\frown}{01} \mapsto 0110$$

2. Третью четверку (1100), поменяв местами третий и четвертый элементы, помещаем в четвертую строку таблицы.

   $$11\overset{\frown}{00} \mapsto 1100$$

3. В четвертой четверке (0111) меняем местами два последних значения и записываем её в третью строку карты Карно.

   $$01\overset{\frown}{11} \mapsto 0111$$

4. Получим следующую таблицу.

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1			
01		1	1	
11		1	1	1
10	1	1		

5. Убедимся, что булева функция изображена верно. Для этого найдем носитель функции.

$$N_f =$$
$$= \{ (0000), (0101), (0111), (1000), (1001), (1101), (1110), (1111) \}.$$

Рассмотрим первый по порядку набор носителя ((0000)). Все четыре переменные входят в этот набор с нулевыми значениями. Это означает, что символ „1", соответствующий данному набору, находится на пересечении первой строки (эта строка соответствует нулевым значениям первых двух переменных) и первого столбца (нулевые значения переменных x_3 и x_4).

Элемент карты Карно, соответствующий набору (0101), расположен на пересечении второй строки и второго столбца, так как на этом наборе $x_1x_2 = x_3x_4 = 01$.

Следующему по порядку набору носителя, (0111), соответствует символ „1", который является пересечением второй строки ($x_1x_2 = 01$) и третьего столбца ($x_3x_4 = 11$).

Два следующих набора носителя ((1000) и (1001)) располагаем в четвертой строке, так как эта строка соответствует единичным значениям переменных x_1 и x_2, в первом ($x_3x_4 = 00$) и втором ($x_3x_4 = 01$) столбцах соответственно.

Остальные наборы помещаем в третью строку, так как переменные x_1 и x_2 на этих наборах входят со значениями, равными 1. Столбцы,на пересечении которых расположены данные элементы таблицы, соответствуют значениям переменных x_3 и x_4.

6.2 Алгоритм Карно минимизации булевых функций

Алгоритм Карно рассмотрим на следующем примере.

Пример 6.2. Минимизировать с помощью карты Карно двоичную функцию $\widetilde{f} = (1000\ 0101\ 1100\ 0111)$ из примера 6.1 .

Решение.

1. Изобразим булеву функцию с помощью карты Карно (см. пример 6.1) .

2. Объединим вершины носителя в максимальные интервалы. Максимальными интервалами являются прямоугольные фигуры, покрывающие 2^n наборов, стоящих рядом, например:

   - $2^4 = 16$ вершин, образующих квадрат 4×4 (весь булев куб $\mathbb{B}^4$)

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

   - $2^3 = 8$ вершин, образующих 2 рядом стоящие строки или 2 столбца (напомним, соседними являются также 1 и 4 строки и столбцы)

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11				
10				

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01				
11				
10	1	1	1	1

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11		1	1	
10		1	1	

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11	1			1
10	1			1

- $2^2 = 4$ вершины, образующих:

а) строку

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01				
11				
10				

б)столбец

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00			1	
01			1	
11			1	
10			1	

в) квадрат 2×2

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11				
10				

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00				
01	1			1
11	1			1
10				

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11				
10	1	1		

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1			1
01				
11				
10	1			1

- $2^1 = 2$ вершины, стоящие рядом

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00				
01				
11	1	1		
10				

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00				1
01				1
11				
10				

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00			1	
01				
11				
10			1	

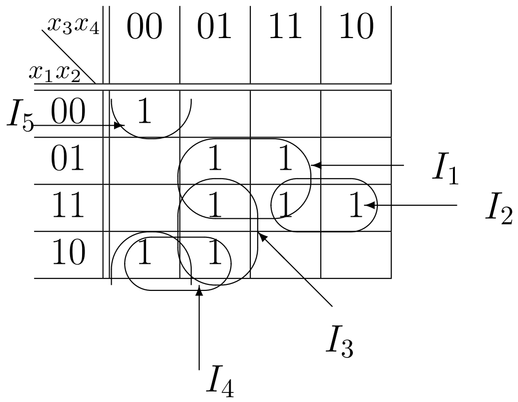
$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00				
01	1			1
11				
10				

- $2^0 = 1$ вершина (точечный интервал)

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00				
01			1	
11				
10				

Фигуры, уже включенные в интервал, объединяющий большее количество вершин, максимальными интервалами не являются (например, пары вершин, входящие в квадрат).

В нашем примере наборы носителя ни куб $\mathbb{B}^4$, ни пары соседних строк (столбцов) не образуют. Максимальный интервал, объединяющий 4 вершины, один - квадрат 2×2. Обозначим этот интервал I_1. Еще 4 максимальных интервала $I_2, \ldots, I_5$ образуют пары рядом стоящих вершин. Заметим, что наборы носителя (0000) и (1000) являются соседними, так как расположены в соседних 1 и 4 строках. Эта пара наборов образует интервал I_5.



3. Так же, как и в предыдущих методах, выписываем простые импликанты, соответствующие максимальным интервалам. Для задания набора, входящего в интервал, берем номер строки (значения первых двух переменных) и номер столбца (значения 3 и 4 переменных), на пересечении которых стоит "1".

$$I_1 = \left\{ \begin{array}{c} (0101) \\ (0111) \\ (1101) \\ (1111) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_1 = x_2 x_4$$

$$I_2 = \left\{ \begin{array}{c} (1111) \\ (1110) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_2 = x_1 x_2 x_3$$

$$I_3 = \left\{ \begin{array}{c} (1101) \\ (1001) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_3 = x_1 \overline{x}_3 x_4$$

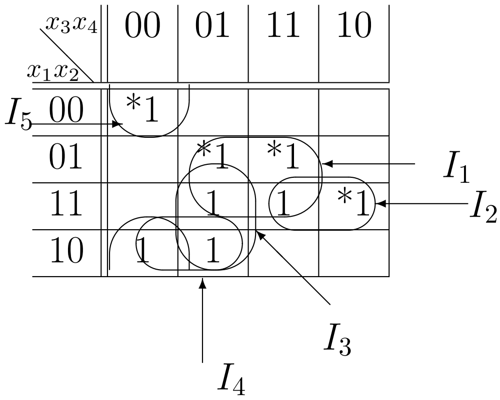
$$I_4 = \left\{ \begin{array}{c} (1000) \\ (1001) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_4 = x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$$

$$I_5 = \left\{ \begin{array}{c} (0000) \\ (1000) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_5 = \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$$

4. Записываем сокращенную ДНФ, объединяя простые импликанты знаком "дизъюнкция".

$$\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f) = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5 = \\ = x_2x_4 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$$

5. Находим вершины, покрытые только одним максимальным интервалом. Интервалы, покрывающие такие вершины, и соответствующие им импликанты являются ядровыми, их дизъюнкция - ядровой ДНФ. В нашем примере вершины, покрытые одним интервалом, отмечены символом "*". Таких наборов 4: (0101), (0111), (1110) и (0000). Первые 2 из этих наборов покрыты ядровым интервалом I_1, вершина (1110)- ядровым интервалом I_2, а набор (0000)- ядровым интервалом I_5. Импликанты K_1, K_2, K_5 - ядровые.



$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f) = K_1 \vee K_2 \vee K_5 = x_2x_4 \vee x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$$

6. По карте Карно выписываем функцию Патрика. Как и в предыдущих методах, количество логических произведений (количество скобок) равно мощности носителя $|N_f|$, а число логических слагаемых в каждом сомножителе равно числу интервалов, покрывающих соответствующий набор носителя. Порядок перечисления конъюнкций произволен. Для удобства в нашем примере перечислим наборы по строкам:

$$P =$$
$$= (K_5)(K_1)(K_1)\underbrace{(K_1 \vee K_3)(K_1 \vee K_2)}_{\text{поглощается } K_1}(K_2)\underbrace{(K_4 \vee K_5)}_{\text{поглощ.} K_5}(K_3 \vee K_4) =$$
$$= \underbrace{K_1K_2K_5}_{\text{ядро}}(K_3 \vee K_4) = \underbrace{K_1K_2K_3K_5}_{\text{туп}_1} \vee \underbrace{K_1K_2K_4K_5}_{\text{туп}_2}.$$

Конъюнкция перед скобками соответствует ядру функции

$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f) = K_1 \vee K_2 \vee K_5 = x_2x_4 \vee x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4.$$

Ядровая ДНФ совпала с ядром, полученным с помощью карты Карно.

Два логических слагаемых в функции Патрика определяют две тупиковые ДНФ.

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_1}(f) = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_5 =$$
$$= x_2x_4 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4;$$

$$r_1 = 11;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_1}(f) = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5 =$$
$$= x_2x_4 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4;$$
$$r_2 = 11.$$

Пример 6.3. Найти сокращенную, ядровую, все тупиковые и все минимальные ДНФ для булевой функции $\widetilde{f} = (1111\ 1111\ 1010\ 0101)$ методом Карно.

Решение.

1. Заполним карту Карно в соответствии с расположением наборов на булевом торе (см. пункт 6.1).

   $1111 \mapsto 1111$ - первая строка карты Карно

   $1111 \mapsto 1111$ - вторая строка карты Карно

   $1010 \mapsto 1001$ - четвертая строка карты Карно

   $0101 \mapsto 0110$ - третья строка карты Карно

   Карта Карно заданной булевой функции имеет следующий вид:

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10	
00	1	1	1	1	
01	1	1	1	1	I_1
11		1	1		I_3
10	1			1	I_2

   Максимальный интервал I_1 образован двумя соседними строками. Еще 2 максимальных интервала образуют квадраты из вершин, так как 4 вершины, расположенные в углах карты Карно, образуют один максимальный интервал (напомним, что крайние строки и столбцы являются соседними).

2. Найдем простые импликанты и сокращенную ДНФ.

$$I_1 = \left\{ \begin{array}{c} (0000) \\ (0001) \\ (0011) \\ (0010) \\ (0100) \\ (0101) \\ (0111) \\ (0110) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_1 = \overline{x}_1$$

$$I_2 = \left\{ \begin{array}{c} (0000) \\ (0010) \\ (1000) \\ (1010) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_2 = \overline{x}_2\overline{x}_4$$

$$I_3 = \left\{ \begin{array}{c} (0101) \\ (0111) \\ (1101) \\ (1111) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_3 = x_2x_4$$

$$\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f) \quad = \quad K_1 \ \vee \ K_2 \ \vee \ K_3 \quad = \quad \overline{x}_1 \ \vee \ \overline{x}_2\overline{x}_4 \ \vee \ x_2x_4$$

3. Построим ядро функции.

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10	
00	1	*1	*1	1	
01	*1	1	1	*1	I_1
11		*1	*1		I_3
10	*1			*1	I_2

Все максимальные интервалы содержат вершины, не покрываемые другими интервалами, и являются ядровыми.

$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f) = \text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f) = K_1 \vee K_2 \vee K_3 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee x_2x_4;$$

4. Составим функцию Патрика, перечисляя наборы по строкам карты Карно:

$$P = \underbrace{(K_1 \vee K_2)}_{\text{поглощается } K_1} (K_1)(K_1) \underbrace{(K_1 \vee K_2)}_{\text{поглощается } K_1} (K_1) \underbrace{(K_1 \vee K_3)}_{\text{поглощается } K_1}$$
$$\underbrace{(K_1 \vee K_3)}_{\text{поглощается } K_1} (K_1)(K_3)(K_3)(K_2)(K_2) = \underbrace{K_1K_2K_3}_{\text{ядро}}.$$

Очевидно, что ядровая ДНФ в данном примере совпадает с сокращенной, тупиковой и минимальной ДНФ.

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}}(f) = \text{ДНФ}_{\text{мин}}(f) = \text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f) = \text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f) =$$
$$= K_1 \vee K_2 \vee K_3 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee x_2x_4;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f)) = 5.$$

Пример 6.4. Методом Карно минимизировать функцию

$$\widetilde{f} = (0101\ 1100\ 1101\ 1010).$$

Решение.

1. Заполним карту Карно, поменяв местами последние пары значений в каждой четверке и 3 и 4 четверку.

   $0101 \mapsto$ 0110 - первая строка карты Карно

   $1100 \mapsto$ 1100 - вторая строка карты Карно

   $1101 \mapsto$ 1110 - четвертая строка карты Карно

   $1010 \mapsto$ 1001 - третья строка карты Карно

2. Отметим на карте Карно максимальные интервалы. Учитывая, что крайние строки таблицы являются соседними, объединим 4 набора с двоичными номерами (0001), (0011), (1001) и (1011) в квадрат I_1. Еще 6 пар рядом стоящих вершин (с номерами (0001) и (0101), (0100) и (0101), (0100) и (1100), (1100) и (1000), (1100) и (1110), (1000) и (1001) соответственно) также образуют максимальные интервалы.

	$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10	
I_2	00		1	1		I_1
I_4	01	1	1			I_3
I_5	11	1			1	I_6
	10	1	1	1		I_7

3. Найдем простые импликанты и сокращенную ДНФ.

$$I_1 = \left\{ \begin{array}{c} (0001) \\ (0011) \\ (1001) \\ (1011) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_1 = \overline{x}_2 x_4$$

$$I_2 = \left\{ \begin{array}{c} (0001) \\ (0101) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_2 = \overline{x}_1 \overline{x}_3 x_4$$

$$I_3 = \left\{ \begin{array}{c} (0100) \\ (0101) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_3 = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3$$

$$I_4 = \left\{ \begin{array}{c} (0100) \\ (1100) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_4 = x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4$$

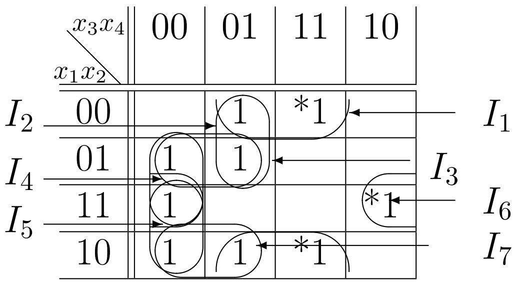
$$I_5 = \left\{ \begin{array}{c} (1100) \\ (1000) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_5 = x_1 \overline{x}_3 \overline{x}_4$$

$$I_6 = \left\{ \begin{array}{c} (1100) \\ (1110) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_6 = x_1 x_2 \overline{x}_4$$

$$I_7 = \left\{ \begin{array}{c} (1000) \\ (1001) \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_7 = x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$$

$$\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f) = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5 \vee K_6 \vee K_7 =$$
$$= \overline{x}_2 x_4 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_3 x_4 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee x_1 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee x_1 x_2 \overline{x}_4 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3.$$

4. Отметим вершины, покрытые только одним интервалом и найдем ядровую ДНФ.



Интервалы I_1 и I_6 содержат вершины, не покрытые другими интервалами, и являются ядровыми.

$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f) = K_1 \vee K_6 = \overline{x}_2 x_4 \vee x_1 x_2 \overline{x}_4.$$

5. Функция Патрика для заданной функции:

$$P = \underbrace{(K_1 \vee K_2)}_{\text{поглощается } K_1} (K_1)(K_3 \vee K_4)(K_2 \vee K_3) \underbrace{(K_4 \vee K_5 \vee K_6)}_{\text{поглощается } K_6}(K_6)$$

$$(K_5 \vee K_7) \underbrace{(K_1 \vee K_7)}_{\text{поглощается } K_1} (K_1) = K_1K_6(K_3 \vee K_4)(K_2 \vee K_3)(K_5 \vee K_7) =$$

$$= K_1K_6(\underbrace{K_2K_3}_{\text{поглощается } K_3} \vee K_2K_4 \vee \underbrace{K_3K_3}_{K_3} \vee \underbrace{K_3K_4}_{\text{поглощается } K_3})(K_5 \vee K_7) =$$

$$= K_1K_6(K_3 \vee K_2K_4)(K_5 \vee K_7) =$$

$$= \underbrace{K_1K_6}_{\text{ядро}}(K_3K_5 \vee K_2K_4K_5 \vee K_3K_7 \vee K_2K_4K_7) =$$

$$= \underbrace{K_1K_3K_5K_6}_{\text{ДНФ}_{\text{туп }_1}} \vee \underbrace{K_1K_2K_4K_5K_6}_{\text{ДНФ}_{\text{туп }_2}} \vee \underbrace{K_1K_3K_6K_7}_{\text{ДНФ}_{\text{туп }_3}} \vee \underbrace{K_1K_2K_4K_6K_7}_{\text{ДНФ}_{\text{туп }_4}}.$$

6. Убедимся, что ядровая ДНФ, найденная ранее, совпадает с дизъюнкцией импликант, стоящих перед скобками в функции Патрика:

$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f) = K_1 \vee K_6 = \overline{x}_2 x_4 \vee x_1 x_2 \overline{x}_4.$$

7. Выпишем все тупиковые ДНФ и найдем их ранг. Укажем минимальные ДНФ заданной функции:

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_1}(f) = K_1 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_6 =$$
$$= \overline{x}_2 x_4 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee x_1 x_2 \overline{x}_4;$$

$$r_1 = 11;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f) = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5 \vee K_6 =$$
$$= \overline{x}_2 x_4 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_3 x_4 \vee x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee x_1 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee x_1 x_2 \overline{x}_4;$$

$$r_2 = 14;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_3}(f) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_2}(f) = K_1 \vee K_3 \vee K_6 \vee K_7 =$$
$$= \overline{x}_2 x_4 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_4 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3;$$

$$r_3 = 11;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_4}(f) = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_6 \vee K_7 =$$
$$= \overline{x}_2 x_4 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_3 x_4 \vee x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee \vee x_1 x_2 \overline{x}_4 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3;$$

$$r_4 = 14.$$

Пример 6.5. Используя алгоритм Карно, найти сокращенную, ядровую, все тупиковые и все минимальные ДНФ для булевой функции

$$\widetilde{f} = (1101\ 1011\ 0000\ 0100).$$

Решение.

1. Заполним карту Карно.

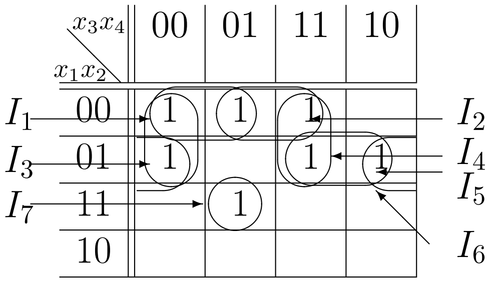
   $1101 \mapsto\ 1110$

   $1011 \mapsto\ 1011$

   $0000 \mapsto\ 0000$ - четвертая строка карты Карно

   $0100 \mapsto\ 0100$ - третья строка карты Карно

2. Объединим наборы носителя в максимальные интервалы. Всего интервалов 7: шесть пар рядом стоящих вершин и один точечный интервал, покрывающий вершину (1101).



3. Найдем простые импликанты и сокращенную ДНФ.

$$I_1 = \left\{ \begin{matrix} (0000) \\ (0001) \end{matrix} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_1 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$$

$$I_2 = \left\{ \begin{matrix} (0001) \\ (0011) \end{matrix} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2 x_4$$

$$I_3 = \left\{ \begin{matrix} (0000) \\ (0100) \end{matrix} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_3 = \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4$$

$$I_4 = \left\{ \begin{matrix} (0011) \\ (0111) \end{matrix} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_4 = \overline{x}_1 x_3 x_4$$

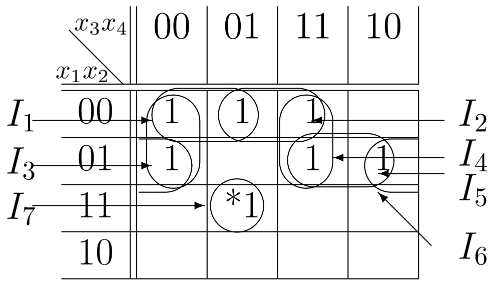
$$I_5 = \left\{ \begin{matrix} (0111) \\ (0110) \end{matrix} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_5 = \overline{x}_1 x_2 x_3$$

$$I_6 = \left\{ \begin{matrix} (0100) \\ (0110) \end{matrix} \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_6 = \overline{x}_1 x_2\overline{x}_4$$

$$I_7 = \left\{ \ (1101) \ \right\} \quad \leftrightarrow \quad K_7 = x_1 x_2\overline{x}_3 x_4$$

$$\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f) = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5 \vee K_6 \vee K_7 =$$
$$= \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 x_3 x_4 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2\overline{x}_4 \vee x_1 x_2\overline{x}_3 x_4.$$

4. Только вершина (1101) покрыта одним интервалом. Это значит, что ядровая ДНФ состоит только из одной простой импликанты.



$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f) = K_7 = x_1x_2\overline{x}_3x_4.$$

5. Составим функцию Патрика, записав произведения в порядке, соответствующем строкам карты Карно:

$$\begin{aligned}
P &= \\
&= (K_1 \vee K_3)(K_1 \vee K_2)(K_2 \vee K_4)(K_3 \vee K_6)(K_4 \vee K_5)(K_5 \vee K_6)(K_7) = \\
&= K_7(K_1K_1 \vee \underbrace{K_1K_2 \vee K_1K_3}_{\text{поглощается } K_1} \vee K_2K_3)(K_2K_3 \vee K_2K_6 \vee K_3K_4 \vee K_4K_6) \\
&\qquad (\underbrace{K_4K_5}_{\text{поглощается } K_5} \vee K_4K_6 \vee K_5K_5 \vee \underbrace{K_5K_6}_{\text{поглощается } K_5}) = \\
&= K_7(K_1 \vee K_2K_3)(K_2K_3 \vee K_2K_6 \vee K_3K_4 \vee K_4K_6)(K_4K_6 \vee K_5) = \\
&= K_7(\underbrace{K_1K_2K_3}_{\text{поглощается } K_2K_3} \vee K_1K_2K_6 \vee K_1K_3K_4 \vee K_1K_4K_6 \vee K_2K_3 \vee \\
&\vee \underbrace{K_2K_3K_6}_{\text{поглощается } K_2K_3} \vee \underbrace{K_2K_3K_4}_{\text{поглощается } K_2K_3} \vee \underbrace{K_2K_3K_4K_6}_{\text{поглощается } K_2K_3})(K_5 \vee K_4K_6) = \\
&= K_7(K_1K_2K_6 \vee K_1K_3K_4 \vee K_1K_4K_6 \vee K_2K_3)(K_5 \vee K_4K_6) = \\
&= K_7(K_1K_2K_5K_6 \vee K_1K_3K_4K_5 \vee \underbrace{K_1K_4K_5K_6}_{\text{поглощается } K_1K_4K_6} \vee K_2K_3K_5 \vee \\
&\vee \underbrace{K_1K_2K_4K_6}_{\text{поглощается } K_1K_4K_6} \vee \underbrace{K_1K_3K_4K_6}_{\text{поглощается } K_1K_4K_6} \vee K_1K_4K_6 \vee K_2K_3K_4K_6) = \\
&= \underbrace{K_7}_{\text{ядро}}(K_1K_2K_5K_6 \vee K_1K_3K_4K_5 \vee K_2K_3K_5 \vee \\
&\qquad \vee K_1K_4K_6 \vee K_2K_3K_4K_6) =
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{K_1K_2K_5K_6K_7}_{\text{ДНФ}_{\text{туп }_1}} \vee \underbrace{K_1K_3K_4K_5K_7}_{\text{ДНФ}_{\text{туп }_2}} \vee \underbrace{K_2K_3K_5K_7}_{\text{ДНФ}_{\text{туп }_3}} \vee$$

$$\vee \underbrace{K_1K_4K_6K_7}_{\text{ДНФ}_{\text{туп }_4}} \vee \underbrace{K_2K_3K_4K_6K_7}_{\text{ДНФ}_{\text{туп }_5}}.$$

6. $$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f) = K_7 = x_1x_2\overline{x}_3x_4$$

7. Выпишем все тупиковые ДНФ и найдем их ранг. Среди всех тупиковых ДНФ найдем минимальные ДНФ :

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f) = K_1 \vee K_2 \vee K_5 \vee K_6 \vee K_7 =$$
$$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3x_4;$$
$$r_1 = 16;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f) = K_1 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5 \vee K_7 =$$
$$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3x_4;$$
$$r_2 = 16;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_3}(f) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_1}(f) = K_2 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_7 =$$
$$\overline{x}_1\overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3x_4;$$
$$r_3 = 13;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_4}(f) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_2}(f) = K_1 \vee K_4 \vee K_6 \vee K_7 =$$
$$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3x_4;$$
$$r_4 = 13;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_5}(f) = K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_6 \vee K_7 =$$
$$\overline{x}_1\overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3x_4;$$
$$r_4 = 16.$$

6.3 Задачи для самостоятельного решения

Методом Карно найти сокращенную, ядровую, все тупиковые и минимальные ДНФ булевых функций.

1. $\widetilde{f_1} = (1010\ 0111\ 1010\ 0000)$;
2. $\widetilde{f_2} = (1011\ 1010\ 1110\ 1010)$;
3. $\widetilde{f_3} = (1101\ 1011\ 1100\ 1010)$;
4. $\widetilde{f_4} = (1110\ 0110\ 1110\ 0110)$;
5. $\widetilde{f_5} = (0010\ 0010\ 0111\ 1110)$;
6. $\widetilde{f_6} = (1010\ 1110\ 0011\ 0001)$;
7. $\widetilde{f_7} = (1100\ 1010\ 1101\ 0010)$;
8. $\widetilde{f_8} = (1110\ 0110\ 0100\ 0111)$;
9. $\widetilde{f_9} = (0011\ 0011\ 1100\ 0101)$;
10. $\widetilde{f_{10}} = (0000\ 0111\ 0000\ 1110)$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения
Ответы к задачам $1 \div 8$ см. в предыдущей главе на стр. 86.

9.
$$\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_9) = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_4 \vee \overline{x}_1x_3;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_9) = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_3;\,;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f_9) = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_3;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}) = 11;$$
$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f_9) = \text{ДНФ}_{\text{мин}}(f_9) = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_4 \vee \overline{x}_1x_3;$$
$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}}) = 8.$$

10. $\text{ДНФ}_{\text{сокр}}(f_{10}) = \overline{x}_1x_2x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_2x_3\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2\overline{x}_4;$

$$\text{ДНФ}_{\text{ядр}}(f_{10}) - \text{отсутствует};$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}(f_{10}) = \overline{x}_1x_2x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2\overline{x}_4;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}) = 12;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}(f_{10}) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_1}(f_{10}) = \overline{x}_1x_2x_4 \vee x_2x_3\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_2}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_1}) = 9;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_3}(f_{10}) = \overline{x}_1x_2x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4 \vee x_2x_3\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_4;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_3}) = 12;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_4}(f_{10}) = x_2\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_2x_3\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_4}) = 12;$$

$$\text{ДНФ}_{\text{туп}_5}(f_{10}) = \text{ДНФ}_{\text{мин}_2}(f_{10}) = x_2\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_4;$$

$$r(\text{ДНФ}_{\text{туп}_1}) = r(\text{ДНФ}_{\text{мин}_2}) = 9.$$

Глава 7

Основные замкнутые классы

7.1 Замыкание. Замкнутые множества

Определение 7.1. ***Замыканием*** множества $\boldsymbol{K}$ функций алгебры логики называется совокупность всех функций из P_2, являющихся суперпозициями функций из множества $\boldsymbol{K}$. Замыкание множества $\boldsymbol{K}$ обозначается $[K]$.

Определение 7.2. Множество $\boldsymbol{K}$ называется ***функционально замкнутым,*** если замыкание множества совпадает с самим множеством:

$$[K] = K.$$

Замкнутые множества называют также ***замкнутыми классами.***

Пример 7.1.

а) Класс $K_1 = \{1, x_1 \& x_2\}$. Его замыканием является множество

$$[K_1] = \{1, a_1x_1 \& a_2x_2 \& \ldots \& a_ix_i \& \ldots \& a_nx_n; \quad n = 1, 2, \ldots i \ldots; \\ a_i \in \{0, 1\}; i = \overline{1, n}\}.$$

Класс K_1 не замкнут, так как $f_1 = x_1 \& x_2 \& x_3 \in [K_1]$, но $f_1 \notin K_1$.

б) Класс $K_2 = \{1, x_1 \vee x_2\}$. Его замыканием является множество

$$[K_2] = \{1, a_1x_1 \vee a_2x_2 \vee \ldots \vee a_ix_i \vee \ldots \vee a_nx_n; \quad n = 1, 2, \ldots i \ldots; \\ a_i \in \{0, 1\}; i = \overline{1, n}\}.$$

Класс K_2 также не замкнут, так как $f_2 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \in [K_2]$, но $f_2 \notin K_2$.

Основные свойства замыкания:

- $$K_1 \subseteq K_2 \;\Rightarrow\; [K_1] \subseteq [K_2]$$
- $$[K_1 \cup K_2] \;\supseteq\; [K_1] \cup [K_2]$$
- $$[K] \;\supseteq\; K$$
- $$[[K]] = [K]$$

7.2 Классы T_σ, сохраняющие константу σ

Определение 7.3. ***Классом*** T_0, ***сохраняющим константу 0,*** называется множество булевых функций, для которых выполнено равенство $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$:

$$T_0 = \{f(\widetilde{x}) \in P_2 \quad | \quad f(0, 0, \ldots, 0) = 0\}.$$

Аналогично определяется ***класс*** T_1, ***сохраняющий константу 1:***

$$T_1 = \{f(\widetilde{x}) \in P_2 \quad | \quad f(1, 1, \ldots, 1) = 1\}.$$

Пример 7.2. Определить принадлежность функций f_1, f_2, f_3, f_4 классам T_0 и T_1.

а) $\widetilde{f}_1 = (\underline{0}011\ 011\underline{\underline{1}})$

$$f_1(\underline{000}) = \underline{0} \quad \Longleftrightarrow \quad f_1 \in T_0 \quad ; \quad f_1(\underline{\underline{111}}) = \underline{\underline{1}} \quad \Longleftrightarrow \quad f_1 \in T_1$$

б) $\widetilde{f}_2 = (\underline{1}010\ 101\underline{\underline{0}})$

$$f_2(\underline{000}) = \underline{1} \quad \Longleftrightarrow \quad f_2 \notin T_0 \quad ; \quad f_2(\underline{\underline{111}}) = \underline{\underline{0}} \quad \Longleftrightarrow \quad f_2 \notin T_1$$

в) $\widetilde{f}_3 = (\underline{0}110\ 011\underline{\underline{0}})$

$$f_3(\underline{000}) = \underline{0} \quad \Longleftrightarrow \quad f_3 \in T_0 \quad ; \quad f_3(\underline{\underline{111}}) = \underline{\underline{0}} \quad \Longleftrightarrow \quad f_3 \notin T_1$$

г) $\widetilde{f}_4 = (\underline{1}011\ 110\underline{\underline{1}})$

$$f_4(\underline{000}) = \underline{1} \quad \Longleftrightarrow \quad f_4 \notin T_0 \quad ; \quad f_4(\underline{\underline{111}}) = \underline{\underline{1}} \quad \Longleftrightarrow \quad f_4 \in T_1$$

Замечание 7.1. Для того, чтобы определить принадлежность функции к классу T_0, достаточно знать значение функции только на одном двоичном наборе: наборе, состоящем из всех нулей (значения функций на этом наборе в приведенном выше примере подчеркнуты одной чертой). Этот набор является самым первым набором в таблице истинности и в векторе значений функции. Аналогично, для определения принадлежности функции к классу T_1, достаточно знать значение функции только на одном двоичном наборе: наборе, состоящем из всех единиц (значения функций на данном наборе в примере подчеркнуты двумя чертами). Этот набор является последним набором в таблице истинности и в векторе значений функции.

Замечание 7.2. Как видно из приведенного выше примера, классы T_0 и T_1 пересекаются только частично: одна и та же функция может принадлежать или не принадлежать обоим классам либо одному из них.

Замечание 7.3. Так как суперпозиция функций включает в себя подстановку

а) тождественной функции

б) подстановку других функций,

то для доказательства замкнутости любого класса K булевых функций необходимо рассмотреть два случая:

1. тождественная функция $f(x) = x \in K$
2. любая суперпозиция функций $f, f_1, \ldots, f_m \in K$ также принадлежит классу K :
$$F = f(f_1, \ldots, f_m) \in K.$$

Теорема 7.1. *Класс T_0 является функционально замкнутым, то есть*
$$[T_0] = T_0.$$

Доказательство.

1. Очевидно, что $f(x) = x \in T_0$

2. Пусть функции $f, f_1, f_2, \ldots, f_m \in T_0$. Докажем, что любая суперпозиция функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$ также принадлежит этому классу, то есть

$$f, f_1, f_2, \ldots, f_m \in T_0 \Rightarrow F = f(f_1, f_2, \ldots, f_m) \in T_0.$$

$$\begin{aligned} f, f_1, f_2, \ldots, f_m \in T_0 \Leftrightarrow f(0,0,\ldots,0) = f_1(0,0,\ldots,0) = \\ = f_2(0,0,\ldots,0) = \cdots = f_m(0,0,\ldots,0) = 0 \end{aligned}$$

Найдем значение функции F на наборе, состоящем из всех нулей.

$$\begin{aligned} &F(0,0,\ldots,0) = \\ &\quad = f(f_1(0,0,\ldots,0), f_2(0,0,\ldots,0), \ldots, f_m(0,0,\ldots,0)) = \\ &\qquad = f(0,0,\ldots,0) = 0. \end{aligned}$$

Мы получили, что функция F на наборе, состоящем из всех нулей, принимает значение 0, то есть $F \in T_0$.

$\square$

Аналогично доказывается

Теорема 7.2. *Класс T_1 является функционально замкнутым, то есть*

$$[T_1] = T_1.$$

Теорема 7.3. *Класс T_0 содержит $\frac{1}{2} \cdot 2^{2^n}$ функций, зависящих от n переменных:*

$$|T_0| = 2^{2^n-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{2^n}.$$

Доказательство. $f \in T_0 \Leftrightarrow f(0,0,\ldots,0) = 0$, то есть вектор значений функции принимает вид $\widetilde{f} = (0, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2^n})$. Это означает, что число различных функций в классе T_0 равно числу различных двоичных наборов $(0, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2^n})$. Длина этого набора равна $k = 2^n - 1$. Всего число различных наборов длины k равно $2^k = 2^{2^n-1}$. Таким образом, $|T_0| = 2^{2^n-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{2^n}$. $\square$

7.3 Класс S самодвойственных функций

Определение 7.4. Функция $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***двойственной*** к функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если выполняется равенство

$$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n).$$

Для любой булевой функции можно задать двойственную ей.

Пример 7.3. Построить таблицу истинности функции, двойственной к $\widetilde{f}_1 = (0011\ 0111)$.

Решение.

x_1	x_2	x_3	f_1
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Построим таблицу истинности функции f_1 и вычислим значения, которые принимает двойственная к ней функция на всех двоичных наборах.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_1^*
0	0	0	0	0
0	0	1	0	
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

По определению двойственной функции

$$f_1^*(0,0,0) = \overline{f}_1(\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}) =$$
$$= \overline{f}_1(1,1,1) = \overline{1} = 0.$$

x_1	x_2	x_3	f_1	f_1^*
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

$$f_1^*(0,0,1) = \overline{f}_1(\overline{0},\overline{0},\overline{1}) = \\ = \overline{f}_1(1,1,0) = \overline{1} = 0.$$

И так далее вычисляем значения двойственной функции в каждой строке таблицы истинности.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_1^*
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

$$f_1^*(0,1,0) = \overline{f}_1(\overline{0},\overline{1},\overline{0}) = \overline{f}_1(1,0,1) = 0;$$
$$f_1^*(0,1,1) = \overline{f}_1(\overline{0},\overline{1},\overline{1}) = \overline{f}_1(1,0,0) = 1;$$
$$f_1^*(1,0,0) = \overline{f}_1(\overline{1},\overline{0},\overline{0}) = \overline{f}_1(0,1,1) = 0;$$
$$f_1^*(1,0,1) = \overline{f}_1(\overline{1},\overline{0},\overline{1}) = \overline{f}_1(0,1,0) = 0;$$
$$f_1^*(1,1,0) = \overline{f}_1(\overline{1},\overline{1},\overline{0}) = \overline{f}_1(0,0,1) = 1;$$
$$f_1^*(1,1,1) = \overline{f}_1(\overline{1},\overline{1},\overline{1}) = \overline{f}_1(0,0,0) = 1.$$

Окончательно получаем таблицу истинности двойственной к f_1 функции.

Определение 7.5. ***Наборы*** $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n)$ называются ***противоположными.***

Например, $\widetilde{\alpha_1} = (10110)$ и $\widetilde{\beta}_1 = (01001)$– противоположные наборы.

Наборы $\widetilde{\alpha_2} = (01110)$ и $\widetilde{\beta}_1 = (10011)$ противоположными не являются, так как $(\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{1}\,\overline{1}\,\overline{0}) = (10001) \neq (10011)$.

Замечание 7.4. Противоположные наборы расположены симметрично относительно центра таблицы истинности.

Замечание 7.5. Для определения значений двойственной функции на наборе $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ мы инвертируем значение функции на противоположном, то есть симметричном относительно центра таблицы истинности, наборе. Поэтому, для задания вектора значений функции, двойственной к данной, достаточно переписать вектор значения исходной функции справа налево, инвертируя его.

Пример 7.4. Найти функцию, двойственную к $\widetilde{f}_2 = (1010\,1010)$.

Решение. Используя замечание 7.5, для нахождения двойственной функции перепишем вектор значений исходной функции слева направо. Получим

$$(\overleftarrow{1010\,1010}) \mapsto (0101\,0101).$$

Инвертируем полученный набор:

$$(\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\;\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}) = (1010\,1010);$$

$$f_2^* = (1010\,1010).$$

Пример 7.5. Построить вектор значений функции, двойственной к

$$\widetilde{f}_3 = (1011\,0110).$$

Решение. Аналогично предыдущему примеру

$$(\overleftarrow{1011\,0110}) \mapsto (0110\,1101) \mapsto (\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{1}\,\overline{0}\;\overline{1}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}) = (1001\,0010);$$

$$f_3^* = (1001\,0010).$$

Определение 7.6. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***самодвойственной,*** если она двойственна сама себе.

Множество всех самодвойственных функций образует класс, который обычно обозначают ***класс S:***

$$S = \{f(\widetilde{x}) \in \mathbb{P}_2 \mid f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)\}.$$

Функция является самодвойственной тогда и только тогда, когда на противоположных наборах она принимает противоположные значения. Таким образом, вектор значений самодвойственной функции принимает вид

$$\widetilde{f} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2^{n-1}-1}, \alpha_{2^{n-1}} \,|\, \overline{\alpha}_{2^{n-1}}, \overline{\alpha}_{2^{n-1}-1}, \ldots, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_1).$$

Теорема 7.4. *Число самодвойственных функций, зависящих от n переменных, равно $\sqrt{2^{2^n}}$:*

$$|S| = \sqrt{2^{2^n}}.$$

Доказательство. Так как вектор значений самодвойственной функции имеет вид

$$\widetilde{f} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2^{n-1}-1}, \alpha_{2^{n-1}} \,|\, \overline{\alpha}_{2^{n-1}}, \overline{\alpha}_{2^{n-1}-1}, \ldots, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_1),$$

то любая самодвойственная функция однозначно определяется половиной своего вектора значений, то есть набором длины

$$k = \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}.$$

Значит, число самодвойственных функций n переменных равно числу различных двоичных наборов длины k. Количество таких наборов равно

$$2^k = 2^{2^{n-1}} = \sqrt{2^{2^n}}.$$

Таким образом,

$$|S| = \sqrt{2^{2^n}}.$$

□

Определять, является ли функция самодвойственной, можно несколькими способами.

7.3.1 Алгоритм 1 определения самодвойственности булевой функции

1. Вычислить вектор значений функции, двойственной к данной.
2. Сравнить полученный вектор с вектором значений исходной функции. Если оба вектора тождественно совпали, то функция является самодвойственной. Несовпадение двух векторов хотя бы в одной координате говорит о том, что исходная функция не является самодвойственной.

Пример 7.6.

а) Функция $\widetilde{f_1} = (0011\ 0111)$ не является самодвойственной ($f_1 \notin S$), так как
$$f_1^* = (0001\ 0011) \neq (0011\ 0111) = f_1.$$

б) Функция $\widetilde{f_2} = (1010\ 1010) \in S$ (f_2- самодвойственная функция), так как
$$f_2^* = f_2.$$

Так как самодвойственная функция однозначно определяется только половиной своего вектора значений, то удобнее пользоваться следующим алгоритмом:

7.3.2 Алгоритм 2 определения самодвойственности булевой функции

1. Делим вектор значений функции пополам. Получаем два набора меньшей длины.
2. Берем любую полученную половину (обычно берут правую), переписываем её справа налево и инвертируем (все нули заменяем на единицы и наоборот).
3. Если полученный набор совпадает с оставшейся (левой) половиной вектора значений, то функция является самодвойственной. При несовпадении строк хотя бы в одной координате, делаем вывод: функция несамодвойственна.

Пример 7.7. Исследовать функцию на самодвойственность:
а) $\widetilde{f_3} = (0110\ 0110)$; б) $\widetilde{f_4} = (1110\ 1000)$

Решение.
а) $\widetilde{f_3} = (0110\ 0110)$
$(0110\,|\,\underline{0110})$ - делим вектор значений функции пополам;
(0110) - берем правую половину,
$(\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{1}\,\overline{0})$ - переписываем её справа налево
(1001) - и инвертируем её.

Так как $(0110) \neq (1001)$, то функция не является самодвойственной ($f_3 \notin S$);

б) $\widetilde{f}_4 = (1110\,1000)$

$(1110\,|\,1000)$ - делим вектор значений функции пополам;

$(\overleftarrow{1000})$ - берем правую половину,

$(\overline{0}\,\overline{0}\,\overline{0}\,\overline{1})$ - переписываем её справа налево

(1110) - и инвертируем её.

Так как $(1110) \equiv (1110)$, то функция самодвойственна ($f_4 \in S$).

7.3.3 Алгоритм 3 определения самодвойственности булевой функции

1. Находим середину вектора значений функции.
2. Сравниваем значения функции на наборах, симметричных относительно середины.
3. Если при таком сравнении все полученные значения функции противоположны, то функция является самодвойственной. В противном случае функция несамодвойственна.

Использование данного алгоритма будет дано ниже, при применении леммы о несамодвойственной функции.

Замечание 7.6. Тождественная функция $f_1(x) = x$ и её отрицание $f_2(x) = \overline{x}$ являются самодвойственными функциями одной переменной. Константы 0 и 1 к самодвойственным функциям не относятся. В справедливости этого замечания можно убедиться, применив к каждой из перечисленных функций алгоритм определения самодвойственности двоичных функций.

Теорема 7.5. *Класс S самодвойственных функций замкнут :*

$$[S] = S.$$

Доказательство.

1. $f(x) = x \in S$ (см. замечание 7.6)

2. Докажем, что, если функции $f(x_1,\dots,x_m), f_1(x_1,\dots,x_{n_1}),\dots,f_m(x_1,\dots,x_{n_m}) \in S$, то и их суперпозиция $F = f(f_1(x_1,\dots,x_{n_1}),\dots,f_m(x_1,\dots,x_{n_m})) \in S$.

   По определению самодвойственной функции

$$f(x_1,\dots,x_m), f_1(x_1,\dots,x_{n_1}),\dots,f_m(x_1,\dots,x_{n_m}) \in S \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1,\dots,x_m) = f^*(x_1,\dots,x_m) = \overline{f}(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_m) \\ f_1(x_1,\dots,x_{n_1}) = f_1^*(x_1,\dots,x_{n_1}) = \overline{f}_1(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_{n_1}) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_{n_m}) = f_m^*(x_1,\dots,x_{n_m}) = \overline{f}_m(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_{n_m}) \end{cases}$$

   Найдем функцию, двойственную к функции

$$F = f(f_1(x_1,\dots,x_{n_1}),\dots,f_m(x_1,\dots,x_{n_m})).$$

$$\begin{aligned} &F^*(x_1,\dots,x_n) = \\ &= \underbrace{\overline{F}(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n) = \overline{f}(f_1(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_{n_1}),\dots,f_m(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_{n_m}))}_{\text{по определению самодвойственной функции}} = \\ &= \underbrace{\overline{f}(\overline{\overline{f}}_1(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_{n_1}),\dots,\overline{\overline{f}}_m(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_{n_m}))}_{\text{применяем закон двойного отрицания к } f_1,\dots,f_m} = \\ &= \overline{f}(\overline{\underbrace{\overline{f}_1(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_{n_1})}_{f_1^*(x_1,\dots,x_{n_1})\equiv f_1}},\dots,\overline{\underbrace{\overline{f}_m(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_{n_m})}_{f_m^*(x_1,\dots,x_{n_m})\equiv f_m}}) = \\ &= \overline{f}(\overline{f}_1(x_1,\dots,x_{n_1}),\dots,\overline{f}_m(x_1,\dots,x_{n_m})) = \\ &= f^*(f_1(x_1,\dots,x_{n_1}),\dots,f_m(x_1,\dots,x_{n_m})) = \\ &\qquad = f(f_1(x_1,\dots,x_{n_1}),\dots,f_m(x_1,\dots,x_{n_m})). \end{aligned}$$

□

Лемма S (лемма о несамодвойственной функции). *Из несамодвойственной функции $f(x_1,\dots,x_n)$ путем подстановки в неё вместо переменных $x_1,\dots,x_n$ функций x и $\overline{x}$ можно получить несамодвойственную функцию одной переменной 0 или 1.*

Доказательство. По условию теоремы $f(x_1,\dots,x_n) \notin S$, то есть

$$f(x_1,\dots,x_n) \not\equiv \overline{f}(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n).$$

Это означает, что существует хотя бы один набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такой, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq \overline{f}(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n) \Leftrightarrow f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$. В наборе $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ \alpha_i \in \{0, 1\}$ заменим все $\alpha_i = 1$ на $x^1 = x$, а все $\alpha_i = 0$ - на $x^0 = \overline{x}$.

Полученная функция одной переменной $\varphi(x) = f(x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n})$ является константой.

Проверим это. Так как $x^\alpha = x \oplus \alpha \oplus 1$, то

$$\begin{cases} 0^\alpha = 0 \oplus \alpha \oplus 1 = \alpha \oplus 1 = \overline{\alpha} \\ 1^\alpha = 1 \oplus \alpha \oplus 1 = \alpha \oplus 0 = \alpha \end{cases}$$

$$\varphi(0) = f(0^{\alpha_1}, \ldots, 0^{\alpha_n}) = f(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \\ = f(1^{\alpha_1}, \ldots, 1^{\alpha_n}) = \varphi(1).$$

Так как $\varphi(0) = \varphi(1)$, то $\varphi(x) \equiv const$. $\square$

Пример 7.8. Получить из функций
а) $\widetilde{f_1} = (0011\ 0111)$; б) $\widetilde{f_2} = (0110\ 0110)$
константу каким-либо способом .

Решение.

а) Несамодвойственность функции $\widetilde{f_1} = (0011\ 0111)$ установлена в примере 7.6, п. а) .

Найдем хотя бы одну пару противоположных наборов, на которой нарушается самодвойственность. Так как самодвойственные функции расположены симметрично относительно середины таблицы, просматриваем значения функции, двигаясь от краев таблицы к её середине (либо наоборот), пока не найдем пару одинаковых значений функции (таким образом можно устанавливать самодвойственность функций - см. алгоритм 3).

x_1	x_2	x_3	f_1
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Такой парой наборов являются наборы (010) и (101): $f_1(0,1,0) = f_1(1,0,1) = 1$. Значение функции на этих наборах равно 1, поэтому по лемме S мы можем получить только константу 1.

Из пары противоположных наборов $\widetilde{\alpha}_1 = (010)$ и $\widetilde{\alpha}_2 = (101)$ выбираем тот, в котором количество единиц больше, то есть набор $\widetilde{\alpha}_2 = (101)$. Все единицы в этом наборе заменяем на функцию x, все нули - на $\overline{x}$. Получаем набор $\gamma = (x, \overline{x}, x)$.

Найденная функция одной переменной - искомая функция "тождественная единица": $\varphi(x) = f_1(x, \overline{x}, x) \equiv 1$. Докажем это.

Так как $\begin{array}{l} \varphi(0) = f_1(0,\overline{0},0) = f_1(0,1,0) = 1 \\ \varphi(1) = f_1(1,\overline{1},1) = f_1(1,0,1) = 1 \end{array}$, то таблица истинности

x	$\varphi(x)$
0	1
1	1

полученной функции $\varphi(x)$ совпадает с таблицей истинности функции $f(x) \equiv 1$, то есть $\varphi(x) \equiv 1$.

б) $\widetilde{f_2} = (0110\ 0110) \notin S$ - см. пример 7.7, п. а) .

Не обязательно противоположные наборы искать по таблице истинности. Просмотр вектора значений функции дает тот же результат:

$$\widetilde{f_2} = (0110\ 0110).$$

Самодвойственность нарушается на паре крайних наборов (000) и (111), так как $f_2(0,0,0) = f_2(1,1,1) = 0$.

Получим функцию "тождественный ноль"на наборе, состоящем из большего количества единиц, то есть на наборе $\widetilde{\alpha}_2 = (111)$. Опять заменим все единицы на x, все нули - на $\overline{x}$, получим набор $\gamma = (x, x, x)$.

$\varphi(x) = f_2(x,x,x) \equiv 0$, так как $\begin{array}{l} \varphi(0) = f_2(0,0,0) = 0 \\ \varphi(1) = f_2(1,1,1) = 0 \end{array}$.

Замечание 7.7. Самодвойственность функции f_2 нарушается на всех парах противоположных наборов.

Пример 7.9. Выразить из функции $\widetilde{f} = (1100\ 1101\ 0011\ 1101)$ константу всеми возможными способами.

Решение.

Проверим, что $f \notin S$, применяя второй алгоритм определения самодвойственности функции:

$$\begin{array}{c}
(1\,1\,0\,0\ \ 1\,1\,0\,1\,|\,0\,0\,1\,1\ \ 1\,1\,0\,1)\\
(1\,0\,1\,1\ \ 1\,1\,0\,0)\\
(\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{1}\ \ \overline{1}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{0})\\
(0\,1\,0\,0\ \ 0\,0\,1\,1)\\
(1\,1\,0\,0\ \ 1\,1\,0\,1) \not\equiv (0\,1\,0\,0\ \ 0\,0\,1\,1) \Rightarrow f \notin S.
\end{array}$$

Самодвойственность нарушена, можно применять лемму S. Для удобства изображения отметим на рисунке только те наборы, на которых нарушается самодвойственность.

$$\widetilde{f} = (1100\ 1101\ 0011\ 1101)$$

Так как по условию задачи нужно выразить константу всеми возможными способами, то берем все 8 наборов, на которых нарушается самодвойственность:

$$\begin{array}{c}
f(0000) = f(1111) = 1\\
f(0100) = f(1011) = 1\\
f(0101) = f(1010) = 1\\
f(0110) = f(1001) = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\widetilde{\alpha}_1 = (0000) \ \rightrightarrows\ \widetilde{\gamma}_1 = (\overline{x},\overline{x},\overline{x},\overline{x}) \ \rightrightarrows\ \varphi_1(x) = f(\overline{x},\overline{x},\overline{x},\overline{x}) \equiv 1\\
\widetilde{\alpha}_2 = (1111) \ \rightrightarrows\ \widetilde{\gamma}_2 = (x,x,x,x) \ \rightrightarrows\ \varphi_2(x) = f(x,x,x,x) \equiv 1\\
\widetilde{\alpha}_3 = (0100) \ \rightrightarrows\ \widetilde{\gamma}_3 = (\overline{x},x,\overline{x},\overline{x}) \ \rightrightarrows\ \varphi_3(x) = f(\overline{x},x,\overline{x},\overline{x}) \equiv 1\\
\widetilde{\alpha}_4 = (1011) \ \rightrightarrows\ \widetilde{\gamma}_4 = (x,\overline{x},x,x) \ \rightrightarrows\ \varphi_4(x) = f(x,\overline{x},x,x) \equiv 1\\
\widetilde{\alpha}_5 = (0101) \ \rightrightarrows\ \widetilde{\gamma}_5 = (\overline{x},x,\overline{x},x) \ \rightrightarrows\ \varphi_5(x) = f(\overline{x},x,\overline{x},x) \equiv 1\\
\widetilde{\alpha}_6 = (1010) \ \rightrightarrows\ \widetilde{\gamma}_6 = (x,\overline{x},x,\overline{x}) \ \rightrightarrows\ \varphi_2(x) = f(x,\overline{x},x,\overline{x}) \equiv 1\\
\widetilde{\alpha}_7 = (0110) \ \rightrightarrows\ \widetilde{\gamma}_7 = (\overline{x},x,x,\overline{x}) \ \rightrightarrows\ \varphi_7(x) = f(\overline{x},x,x,\overline{x}) \equiv 0\\
\widetilde{\alpha}_8 = (1001) \ \rightrightarrows\ \widetilde{\gamma}_8 = (x,\overline{x},\overline{x},x) \ \rightrightarrows\ \varphi_8(x) = f(x,\overline{x},\overline{x},x) \equiv 0
\end{array}$$

Мы получили 8 различных способов выражения константы из несамодвойственной функции.

7.4 Класс M монотонных функций

Определение 7.7. Для наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ выполнено ***отношение предшествования*** (набор $\widetilde{\alpha}$ предшествует набору $\widetilde{\beta}$), если выполнены неравенства

$$\begin{cases} \alpha_1 \leqslant \beta_1 \\ \alpha_2 \leqslant \beta_2 \\ \quad\vdots \\ \alpha_n \leqslant \beta_n \end{cases}$$

Операция предшествования обозначается следующим образом:

$$\widetilde{\alpha} \preccurlyeq \widetilde{\beta}.$$

Например, $\widetilde{\alpha} = (1010001), \widetilde{\beta} = (1010111)$.

Так как $\begin{cases} 1 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant 0 \\ 1 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant 0 \\ 0 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant 1 \\ 1 \leqslant 1 \end{cases}$, то $\widetilde{\alpha} \preccurlyeq \widetilde{\beta}$.

Замечание 7.8. Очевидно, что если $\widetilde{\alpha} \preccurlyeq \widetilde{\beta}$, $\widetilde{\beta} \preccurlyeq \widetilde{\gamma}$, то $\widetilde{\alpha} \preccurlyeq \widetilde{\gamma}$.

Замечание 7.9. Не любые пары наборов находятся в отношении предшествования.

Например, $\widetilde{\alpha} = (010)$, $\widetilde{\beta} = (101)$.

Не выполнено ни отношение предшествования $\widetilde{\alpha} \preccurlyeq \widetilde{\beta}$ (так как $\alpha_2 = 1 > 0 = \beta_2$), ни отношение $\widetilde{\beta} \preccurlyeq \widetilde{\alpha}$ (так как $\beta_1 = 1 > 0 = \alpha_1$).

Замечание 7.10. Следование в таблице истинности является необходимым, но не достаточным условием предшествования наборов.

Подтверждением этому является пример из замечания 7.9. Набор $\widetilde{\alpha}$ расположен в таблице истинности раньше набора $\widetilde{\beta}$, но $\widetilde{\alpha} \not\preccurlyeq \widetilde{\beta}$.

Определение 7.8. Функция $f(\widetilde{x})$ называется ***монотонной,*** если для любых наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ таких, что $\widetilde{\alpha} \preccurlyeq \widetilde{\beta}$ выполнено неравенство $f(\widetilde{\alpha}) \leqslant f(\widetilde{\beta})$.

Замечание 7.11. Очевидно, что функции одной переменной $0, 1, x$ являются монотонными, а $f(x) = \overline{x}$ - немонотонная функция, так как $(0) \preccurlyeq (1)$, но $f(0) = 1 > 0 = f(1)$.

Множество всех монотонных функций образует класс M.

7.4.1 Алгоритм 1 определения монотонности булевой функции

1. Находим носитель функции $N_f = \{\widetilde{\sigma} \in \mathbb{B}^n \mid f(\widetilde{\sigma}) = 1\}$.
2. Для каждого набора σ из носителя находим соответствующий ему класс монотонности, в который помещаем все наборы длины n, которым предшествует набор σ :
$$\sigma \in N_f \mapsto M_\sigma = \{\widetilde{\alpha} \in \mathbb{B}^n \mid \widetilde{\sigma} \preccurlyeq \widetilde{\alpha}\}.$$
3. Проверяем, является ли класс монотонности M_σ подмножеством носителя. Если да, алгоритм продолжаем (переход к пункту 2).
4. Если для всех классов M_σ выполнено условие $M_\sigma \subset N_f$, то функция $f(\widetilde{x})$ монотонна ($f(\widetilde{x}) \in M$).

   Как только встречается набор $\widetilde{\alpha}$ такой, что $\widetilde{\sigma} \preccurlyeq \widetilde{\alpha}$, но $f(\widetilde{\alpha}) \notin N_f$, алгоритм прекращает свою работу. Функция $f(\widetilde{x})$ немонотонна, так как не выполняется определение монотонной функции:
$$\widetilde{\sigma} \preccurlyeq \widetilde{\alpha},$$
   но
$$\underbrace{f(\widetilde{\sigma}) = 1}_{\text{т.к.} \widetilde{\sigma} \in N_f} > \underbrace{0 = f(\widetilde{\alpha})}_{\text{т.к.} \widetilde{\alpha} \notin N_f}.$$

Пример 7.10. Являются ли функции

а) $\widetilde{f_1} = (0011\,0111)$

б) $\widetilde{f_2} = (1010\,1010)$

в) $\widetilde{f_3} = (0101\,1011)$

монотонными?

Решение.

а) $\widetilde{f_1} = (0011\,0111)$

1. Выпишем наборы, на которых значение функции равно 1:
$$N_{f_1} = \{(010), (011), (101), (110), (111)\}.$$

2. Рассмотрим набор $\widetilde{\sigma}_1 = (010) \in N_{f_1}$.
$$\widetilde{\sigma}_1 \mapsto M_{\sigma_1} = \{(010), (011), (110), (111)\}.$$
В класс M_{σ_1} поместим все наборы, которым предшествует набор $\widetilde{\sigma}_1 = (010)$, то есть все наборы $\widetilde{\alpha} \in \mathbb{B}^3$, для которых выполняются отношения предшествования $\widetilde{\sigma_1} = (010) \preccurlyeq \widetilde{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$.
Это значит, что должны выполняться неравенства $\begin{cases} 0 \leqslant \alpha^1 \\ 1 \leqslant \alpha^2 \\ 0 \leqslant \alpha^3 \end{cases}$.
Очевидно, что неравенства будут верны для $\begin{cases} \alpha^1 \in \{0, 1\} \\ \alpha^2 \in \{1\} \\ \alpha^3 \in \{0, 1\} \end{cases}$.
Все возможные наборы $\widetilde{\alpha}$, которые удовлетворяют системе, перечислены в классе M_{σ_1}.

3. Так как все наборы из класса M_{σ_1} принадлежат носителю, продолжаем работу алгоритма.

4. Возьмем следующий набор носителя $\widetilde{\sigma}_2 = (011)$.
$$\widetilde{\sigma}_2 \mapsto M_{\sigma_2} = \{(011), (111)\}.$$
Аналогично,
$$\widetilde{\sigma}_2 = (011) \preccurlyeq \widetilde{\beta} = (\beta^1, \beta^2, \beta^3) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 0 \leqslant \beta^1 \\ 1 \leqslant \beta^2 \\ 1 \leqslant \beta^3 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \beta^1 \in \{0, 1\} \\ \beta^2 = 1 \\ \beta^3 = 1 \end{cases}$$

5. $M_{\sigma_2} \in N_{f_1}$, значит, берем следующий набор носителя $\widetilde{\sigma}_3 = (101)$.
$$\widetilde{\sigma}_3 \mapsto M_{\sigma_3} = \{(101), (111)\} \subset N_{f_1}.$$
6. Аналогично $\widetilde{\sigma}_4 = (110)$;
$$\widetilde{\sigma}_4 \mapsto M_{\sigma_4} = \{(110), (111)\} \subset N_{f_1}.$$
7. Последний набор носителя $\widetilde{\sigma}_5 = (111)$.
$$\widetilde{\sigma}_5 \mapsto M_{\sigma_5} = \{(111)\} \subset N_{f_1}.$$
8. Так как все классы монотонности $M_\sigma \in N_{f_1}$, то $f_1(\widetilde{x}) \in M$ (функция f_1 монотонна).

б) $\widetilde{f}_2 = (1010\ 1010)$

1. $$N_{f_2} = \{(000), (010), (100), (110)\}.$$
2. Возьмем набор $\widetilde{\sigma}_1 = (000) \in N_{f_2}$ и найдем все наборы $\widetilde{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$, которым предшествует набор $\widetilde{\sigma}_1$:
$$\widetilde{\sigma}_1 = (000) \preccurlyeq \widetilde{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} 0 \leqslant \alpha^1 \\ 0 \leqslant \alpha^2 \\ 0 \leqslant \alpha^3 \end{cases} \Leftrightarrow \ \begin{cases} \alpha^1 \in \{0, 1\} \\ \alpha^2 \in \{0, 1\} \\ \alpha^3 \in \{0, 1\} \end{cases},$$
то есть в класс монотонности M_{σ_1} попадают все возможные двоичные наборы длины 3:
$$M_{\sigma_1} = \mathbb{B}^3 = \{(000), (001), (010), (011), (100), (101), (110), (111)\}.$$
3. Набор $\widetilde{\alpha}_1 = (001) \in M_{\sigma_1}$, но $\widetilde{\alpha}_1 = (001) \notin N_{f_2}$, значит, функция f_2 немонотонна, поскольку $\widetilde{\sigma}_1 = (000) \preccurlyeq \widetilde{\alpha}_1 = (001)$,
при этом $f_2(000) = 1 > 0 = f_2(001)$.

в) $\widetilde{f}_2 = (0101\ 1011)$

1. $$N_{f_3} = \{(001), (011), (100), (110), (111)\}.$$
2. $$\widetilde{\sigma}_1 = (001) \ \mapsto \ M_{\sigma_1} = \{(001), (011), (101), (111)\}.$$
3. $\widetilde{\sigma}_1 = (001) \in N_{f_3} \Leftrightarrow f_3(001) = 1$, но $\widetilde{\alpha}_1 = (101) \notin N_{f_3} \Leftrightarrow f_3(101) = 0$, определение монотонной функции не выполнено: $\widetilde{\sigma}_1 = (001) \preccurlyeq \widetilde{\alpha}_1 = (101)$,
но $\quad f_3(001) > f_3(101) \ \Leftrightarrow \ f_3 \notin M$.

Замечание 7.12. Количество наборов в классе монотонности M_σ равно 2^k, где k - количество нулей в наборе σ.

Замечание 7.13. Классу монотонности, соответствующему набору из всех нулей, принадлежат все двоичные наборы $\sigma \in \mathbb{B}^n$, то есть $\widetilde{\sigma} = (0, 0, \ldots, 0) \mapsto M_\sigma = \mathbb{B}^n$ (так как набор $\widetilde{\sigma} = (0, 0, \ldots, 0)$ предшествует всем булевым наборам длины n).

<u>Вывод 1:</u> Если $f(0, 0, \ldots, 0) = 1$ и в векторе значений функции есть хоть один ноль, то функция $f(\widetilde{x})$ немонотонна.

Монотонность нарушается, по крайней мере, на паре наборов $\widetilde{\sigma} = (0, 0, \ldots, 0)$ и наборе $\widetilde{\alpha}$ таком, что $f(\widetilde{\alpha}) = 0$.

Замечание 7.14. Набор, состоящий из всех единиц, принадлежит классам монотонности всех двоичных наборов, поскольку все булевы наборы предшествуют набору из всех единиц.

<u>Вывод 2:</u> Если $f(1, 1, \ldots, 1) = 0$ и в векторе значений функции есть хоть одна единица, то функция $f(\widetilde{x})$ немонотонна.

Монотонность нарушается, по крайней мере, на паре наборов $\widetilde{\sigma} = (1, 1, \ldots, 1)$ и наборе $\widetilde{\alpha}$ таком, что $f(\widetilde{\alpha}) = 1$.

7.4.2 Алгоритм 2 определения монотонности булевой функции

1. Делим вектор значений функции $f(\widetilde{x}) = (\alpha^0\alpha^1 \ldots \alpha^{2^n-1})$ на две равные части. Получаем два набора $\widetilde{\alpha}_0 = (\alpha^0\alpha^1 \ldots \alpha^{2^{n-1}-1})$ и $\widetilde{\alpha}_1 = (\alpha^{2^{n-1}}\alpha^{2^{n-1}+1} \ldots \alpha^{2^n-1})$.

2. Если отношение предшествования $\widetilde{\alpha}_0 \preccurlyeq \widetilde{\alpha}_1$ для полученных векторов $\widetilde{\alpha}_0$ и $\widetilde{\alpha}_1$ не выполнено, то функция не является монотонной.

3. В противном случае каждый из векторов $\widetilde{\alpha}_{i_0}$, $i_0 \in \{0, 1\}$ делим на две равные части; получаем наборы $\widetilde{\alpha}_{i_0 i_1}$, $i_0 \in \{0, 1\}$, $i_1 \in \{0, 1\}$, длина которых равна половине длины наборов $\widetilde{\alpha}_{i_0}$, и проверяем, выполнено ли отношение предшествования у полученных пар векторов $\widetilde{\alpha}_{i_0 0} \preccurlyeq \widetilde{\alpha}_{i_0 1}; i_0 \in \{0, 1\}$.

   Если не выполнено хотя бы одно из отношений $\widetilde{\alpha}_{i_0 0} \preccurlyeq \widetilde{\alpha}_{i_0 1}$, то функция не принадлежит классу монотонных функций.

4. Иначе опять делим двоичные векторы пополам и так далее. Алгоритм прекращает свою работу в двух случаях: либо для полученных наборов не выполнено отношение предшествования ($f(\widetilde{x}) \notin M$), либо длина всех векторов $\widetilde{\alpha}_{i_0 i_1 \ldots i_{n-1}}$, $i_k \in \{0,1\}$, $k = \overline{0,\ldots,n-1}$ равна 1. Если отношение предшествования выполняется для всех пар наборов (включая наборы единичной длины), функция монотонна.

Пример 7.11. Исследовать функции из примера 7.10 на монотонность

Решение.

а) $\widetilde{f}_1 = (0011\,0111)$

1. Делим вектор значений функции пополам:
$$\widetilde{\alpha}_0 = (0011),\ \widetilde{\alpha}_1 = (0111).$$

2. Так как $(0011) \preccurlyeq (0111)$ (покоординатно выполнено неравенство $\alpha_{i_0} \leqslant \alpha_{i_1}$), то делим наборы $\widetilde{\alpha}_0$ и $\widetilde{\alpha}_1$ пополам.

3.
$$\widetilde{\alpha}_0 = (0011) \mapsto \begin{cases} \widetilde{\alpha}_{00} = (00) \\ \widetilde{\alpha}_{01} = (11) \end{cases} ; \quad (00) \preccurlyeq (11)$$
$$\widetilde{\alpha}_1 = (0111) \mapsto \begin{cases} \widetilde{\alpha}_{10} = (01) \\ \widetilde{\alpha}_{11} = (11) \end{cases} ; \quad (01) \preccurlyeq (11)$$
Так как для обеих пар векторов $\widetilde{\alpha}_{i_0 i_1}$, $i_0 \in \{0,1\}$, $i_1 \in \{0,1\}$ отношение предшествования выполняется, делим наборы длины 2 еще раз пополам.

4. Получаем 8 наборов длины 1:
$$\widetilde{\alpha}_{00} = (00) \mapsto \begin{cases} \widetilde{\alpha}_{000} = (0) \\ \widetilde{\alpha}_{001} = (0) \end{cases} ; \quad (0) \preccurlyeq (0)$$
$$\widetilde{\alpha}_{01} = (11) \mapsto \begin{cases} \widetilde{\alpha}_{010} = (1) \\ \widetilde{\alpha}_{011} = (1) \end{cases} ; \quad (1) \preccurlyeq (1)$$
$$\widetilde{\alpha}_{10} = (01) \mapsto \begin{cases} \widetilde{\alpha}_{100} = (0) \\ \widetilde{\alpha}_{101} = (1) \end{cases} ; \quad (0) \preccurlyeq (1)$$
$$\widetilde{\alpha}_{11} = (11) \mapsto \begin{cases} \widetilde{\alpha}_{110} = (1) \\ \widetilde{\alpha}_{111} = (1) \end{cases} ; \quad (1) \preccurlyeq (1)$$

Так как для всех пар векторов $\widetilde{\alpha}_{i_0 i_1 i_2}$, $i_0 \in \{0,1\}, i_1 \in \{0,1\}, i_2 \in \{0,1\}$ отношение предшествования выполнено, функция $\widetilde{f}_1$ монотонна.

б) $\widetilde{f}_2 = (1010\ 1010)$

1. $$\widetilde{\alpha}_0 = (1010),\ \widetilde{\alpha}_1 = (1010); \quad (1010) \preccurlyeq (1010)$$

2. $$\widetilde{\alpha}_0 = (1010) \mapsto \begin{cases} \widetilde{\alpha}_{00} = (10) \\ \widetilde{\alpha}_{01} = (10) \end{cases}; \quad (10) \preccurlyeq (10)$$

$$\widetilde{\alpha}_1 = (1010) \mapsto \begin{cases} \widetilde{\alpha}_{10} = (10) \\ \widetilde{\alpha}_{11} = (10) \end{cases}; \quad (10) \preccurlyeq (10)$$

3. $$\widetilde{\alpha}_{00} = (10) \mapsto \begin{cases} \widetilde{\alpha}_{000} = (1) \\ \widetilde{\alpha}_{001} = (0) \end{cases}; \quad (1) \not\preccurlyeq (0)$$

Так как отношение предшествования не выполнено, алгоритм прекращает работу; функция $\widetilde{f}_2$ немонотонна.

в) $\widetilde{f}_3 = (0101\ 1011)$

$$\widetilde{\alpha}_0 = (0101),\ \widetilde{\alpha}_1 = (1011); \quad (0101) \not\preccurlyeq (1011)$$

Так как отношение предшествования не выполнено во второй координате, алгоритм прекращает работу; $\widetilde{f}_3 \notin M$.

Теорема 7.6. *Класс монотонных функций замкнут:*

$$[M] = M.$$

Доказательство. Для доказательства замкнутости класса M рассмотрим 2 случая (см. замечание 7.3).

1. $f(x) = x \in M$ (см. замечание 7.11).

2. Любая суперпозиция $F = f(f_1, \dots, f_m)$ монотонных функций $f, f_1, \dots, f_m$ также является монотонной функцией. Докажем, что, из $f, f_1, \dots, f_m \in M \;\Rightarrow\; F = f(f_1, \dots, f_m) \in M$.

   По определению монотонной функции

$$f_1, \dots, f_m \in M \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} :\ \widetilde{\alpha} \preccurlyeq \widetilde{\beta} \;\Rightarrow\; f_1(\widetilde{\alpha}) \leqslant f_1(\widetilde{\beta}), \dots f_m(\widetilde{\alpha}) \leqslant f_m(\widetilde{\beta}).$$

Поэтому
$$(f_1(\widetilde{\alpha}), \ldots, f_m(\widetilde{\alpha})) \preccurlyeq (f_1(\widetilde{\beta}), \ldots, f_m(\widetilde{\beta})).$$
В силу монотонности функции f имеем $\forall \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}: \ \widetilde{\alpha} \preccurlyeq \widetilde{\beta} \ \Rightarrow$ $f(\widetilde{\alpha}) \leqslant f(\widetilde{\beta})$, то есть $f(f_1(\widetilde{\alpha}), \ldots, f_m(\widetilde{\alpha})) \preccurlyeq f(f_1(\widetilde{\beta}), \ldots, f_m(\widetilde{\beta}))$.

Получили, что
$$F(\widetilde{\alpha}) = f(f_1(\widetilde{\alpha}), \ldots, f_m(\widetilde{\alpha})) \preccurlyeq f(f_1(\widetilde{\beta}), \ldots, f_m(\widetilde{\beta})) = F(\widetilde{\beta})$$
для всех $\widetilde{\alpha} \preccurlyeq \widetilde{\beta}$, значит, $F(\widetilde{\alpha}) \preccurlyeq F(\widetilde{\beta})$, то есть $F \in M$.

$\square$

Лемма М (лемма о немонотонной функции).*Из немонотонной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ путем подстановки в неё вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$ функций x, 0 и 1 можно получить немонотонную функцию одной переменной $\overline{x}$.*

Доказательство. Из немонотонности функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ следует, что существует хотя бы одна пара двоичных наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ таких, что $\widetilde{\alpha} \preccurlyeq \widetilde{\beta}$, но $f(\widetilde{\alpha}) > f(\widetilde{\beta})$.

Это означает, что $\begin{cases} f(\widetilde{\alpha}) = 1 \\ f(\widetilde{\beta}) = 0 \end{cases}$, то есть $f(\widetilde{\alpha}) = \overline{f}(\widetilde{\beta})$.

Так как $\widetilde{\alpha} \preccurlyeq \widetilde{\beta}$, то $\begin{cases} \alpha_1 \leqslant \beta_1 \\ \alpha_2 \leqslant \beta_2 \\ \quad\vdots \\ \alpha_n \leqslant \beta_n \end{cases}$, значит, координаты α_i и β_i либо равны ($\alpha_i = \beta_i$), либо, если $\alpha_i < \beta_i$, то $\begin{cases} \alpha_i = 0 \\ \beta_i = 1 \end{cases}$.

Без ограничения общности будем считать, что наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ различаются в первых k координатах, то есть
$$\begin{cases} \widetilde{\alpha} = (0, 0, \ldots, 0, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) \\ \widetilde{\beta} = (1, 1, \ldots, 1, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) \end{cases}$$
Заменим первые k координат на x, остальные оставляем без изменения. Получили функцию одной переменной
$$\varphi(x) = f(x, x, \ldots, x, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Покажем,что $\varphi(x) = \overline{x}$:

$$\begin{cases} \varphi(0) = (0, 0, \ldots, 0, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\widetilde{\alpha}) = 1 = \overline{0} \\ \varphi(1) = (1, 1, \ldots, 1, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\widetilde{\beta}) = 0 = \overline{1} \end{cases}$$

Так как таблица истинности $\begin{array}{c|c} x & \varphi(x) \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$ полученной функции $\varphi(x)$ совпадает с таблицей истинности функции $f(x) = \overline{x}$, то $\varphi(x) = \overline{x}$. □

Пример 7.12. Получить функцию $\overline{x}$ из немонотонных функций
а) $\widetilde{f_2} = (1010\ 1010)$; б) $\widetilde{f_3} = (0101\ 1011)$.

Решение.

Немонотонность функций $\widetilde{f_2} = (1010\ 1010)$ и $\widetilde{f_3} = (0101\ 1011)$ установлена в примерах 7.10 и 7.11 (п. б) и в)).

`1 способ` (с использованием алгоритма 1)

а) Найдем хотя бы одну пару наборов, на которой нарушается монотонность. Такой парой являются наборы $\widetilde{\sigma_1} = (000)$ и $\widetilde{\alpha}_1 = (001)$: $\widetilde{\sigma_1} \preccurlyeq \widetilde{\alpha}_1$, но $f_2(000) = 1 > 0 = f_2(001)$ (см. пример 7.10, п. б)).

Наборы $\widetilde{\sigma_1}$ и $\widetilde{\alpha}_1$ отличаются только в третьей координате, поэтому первые две координаты в наборе оставляем без изменений. Третью координату заменяем на функцию x. Получаем набор $\gamma = (0, 0, x)$.

Найденная функция одной переменной $\underline{\varphi(x) = f_2(0, 0, x)}$ - искомая функция "отрицание". Докажем это.

Так как $\begin{array}{l} \varphi(0) = f_2(0,0,0) = 1 \\ \varphi(1) = f_2(1,1,1) = 0 \end{array}$, то таблица истинности $\begin{array}{c|c} x & \varphi(x) \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$ полученной функции $\varphi(x)$ совпадает с таблицей истинности функции $f(x) = \overline{x}$, то есть $\underline{\varphi(x) = \overline{x}}$.

б) $\widetilde{f_3} = (0101\ 1011)$

Наборы, на которых нарушается монотонность функции $\widetilde{f_3}$, уже получены в примере 7.10, п. в) :

$$\begin{array}{l} \widetilde{\sigma_1} = (001) \\ \widetilde{\alpha}_1 = (101) \end{array}, \ \widetilde{\sigma_1} \preccurlyeq \widetilde{\alpha}_1, \ 1 = f_3(001) > f_3(101) = 0.$$

Наборы $\widetilde{\sigma}_1$ и $\widetilde{\alpha}_1$ различаются в первой координате; соответствующую этой координате переменную x_1 заменяем на функцию x. Остальные координаты входят в набор $\gamma = (x, 0, 1)$ без изменений.

$$\underline{\varphi(x) = f_3(\gamma) = f_3(x, 0, 1)}$$

$$\begin{array}{l} \varphi(0) = f_3(0,0,1) = 1 \\ \varphi(1) = f_3(1,0,1) = 0 \end{array} \Rightarrow \underline{\varphi(x) = \overline{x}}.$$

`2 способ нахождения наборов, на которых нарушается монотонность` (с использованием алгоритма 2).

а) В примере 7.11, п. б) мы получили, что $\widetilde{\alpha}_{000} = (1) \npreceq \widetilde{\alpha}_{001} = (0)$. Индексы (000) и (001) при наборах $\widetilde{\alpha}$ единичной длины соответствуют двоичным наборам, на которых нарушается монотонность.

б) При установлении немонотонности функции f_3 в примере 7.11, п. в) мы выяснили, что отношение предшествования нарушено для наборов (0101) и (1011) во второй координате.

x_1	x_2	x_3	f_3
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

С помощью таблицы истинности найдем наборы , на которых нарушается монотонность. Данные наборы в таблице подчеркнуты (это вторые по порядку наборы от центра в каждой половине таблицы).
Наборы (001) и (101) - искомые.
Далее решение совпадает с решением первым способом.

Замечание 7.15. Несмотря на то, что с помощью алгоритма 2 проще устанавливать монотонность функции, чаще используют алгоритм 1, так как в процессе его работы не только определяется монотонность, но и сразу находятся наборы, на которых она нарушается. Данные наборы мы используем для выражения функции $\overline{x}$. Это особенно важно, когда $\overline{x}$ нужно выразить из немонотонной функции всеми возможными способами.

Пример 7.13. Получить функцию $\overline{x}$ из функции $\widetilde{g} = (0000\ 0011\ 0000\ 1001)$ всеми возможными способами.

Решение.

1. Сначала исследуем функцию $g(\widetilde{x})$ на монотонность, применяя алгоритм 1.

   Найдем носитель функции

   $$N_g = \{(0110), (0111), (1100), (1111)\}.$$

   Каждому набору $\widetilde{\sigma}$ из носителя сопоставим класс монотонности.

   $$\widetilde{\sigma}_1 = (0110) \;\mapsto\; M_{\sigma_1} = \{(0110), (0111), (1110), (1111)\}.$$

   Набор $\widetilde{\alpha}_1 = (1110) \in M_{\sigma_1}$, но $\widetilde{\alpha}_1 \notin N_g$. Функция немонотонна, можно применять лемму М.

   На паре наборов $\widetilde{\sigma}_1 = (0110)$ и $\widetilde{\alpha}_1 = (1110)$ нарушается монотонность. Получим функцию $\overline{x}$ на этой паре наборов.

   $$\gamma_1 = (x, 1, 1, 0);\ \underline{\varphi_1(x) = g(x, 1, 1, 0) = \overline{x}};$$

   $$\varphi_1(0) = g(0, 1, 1, 0) = 1 = \overline{0}\varphi_1(1) = g(1, 1, 1, 0) = 0 = \overline{1}$$

2. $$\widetilde{\sigma}_2 = (0111) \;\mapsto\; M_{\sigma_2} = \{(0111), (1111)\} \subset N_g.$$

3. $$\widetilde{\sigma}_3 = (1100) \;\mapsto\; M_{\sigma_3} = \{(1100), (1101), (1110), (1111)\}.$$

   Наборы $\widetilde{\beta}_1 = (1101)$ и $\widetilde{\beta}_2 = (1110)$ также не принадлежат носителю. Значит, функцию $\overline{x}$ можно выразить ещё двумя способами:

   а) $\begin{matrix}\widetilde{\sigma}_3 = (1100)\\ \widetilde{\beta}_1 = (1101)\end{matrix} \;\mapsto\; \gamma_2 = (1, 1, 0, x);\ \underline{\varphi_2(x) = g(1, 1, 0, x) = \overline{x}};$

   б) $\begin{matrix}\widetilde{\sigma}_3 = (1100)\\ \widetilde{\beta}_2 = (1110)\end{matrix} \;\mapsto\; \gamma_3 = (1, 1, 0, x);\ \underline{\varphi_3(x) = g(1, 1, x, 0) = \overline{x}}.$

   Убедиться в том, что $\varphi_2(x) = \varphi_3(x) = \overline{x}$ можно также, как и в предыдущих примерах.

4. $$\widetilde{\sigma}_4 = (1111) \;\mapsto\; M_{\sigma_4} = \{(1111)\} \subset N_g.$$

   Больше наборов, на которых нарушается монотонность, нет. Значит, других способов получить $\overline{x}$ в данном примере не имеется.

7.5 Класс L линейных функций

Определение 7.9. Функция $f(\widetilde{x})$ называется ***линейной,*** если её многочлен Жегалкина не содержит конъюнкций.

Например, функции $f_1(\widetilde{x}) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_4,\ f_2(\widetilde{x}) = 1 \oplus x_1 \oplus x_3$ являются линейными.

Функции $f_3(\widetilde{x}) = x_1 \cdot x_2 \oplus x_4$ и $f_2(\widetilde{x}) = 1 \oplus x_1 \cdot x_3$ - нелинейные функции.

Напомним, что способы построения многочлена Жегалкина описаны в п. 3.5 на стр. 41.

Замечание 7.16. Все функции одной переменной

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \overline{x} = x \oplus 1,\ f_3(x) \equiv 0,\ f_4(x) \equiv 1$$

являются линейными функциями.

Множество всех линейных функций образует класс L.

Теорема 7.7. *Класс L линейных функций замкнут:*

$$[L] = L.$$

Доказательство.

1. $f(x) = x \in L$ (см. замечание 7.16).

2. Докажем, что любая суперпозиция $F = f(f_1, \ldots, f_m)$ линейных функций $f, f_1, \ldots, f_m$ также является линейной функцией. Докажем, что:

$$f, f_1, \ldots, f_m \in L \ \Rightarrow\ F = f(f_1, \ldots, f_m) \in L.$$

По определению линейной функции

$$f, f_1, \ldots, f_m \in L \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f = a_{00} \oplus a_{01}x_1 \oplus a_{02}x_2 \oplus \ldots \oplus a_{0m}x_m \\ f_1 = a_{10} \oplus a_{11}x_1 \oplus a_{12}x_2 \oplus \ldots \oplus a_{1n}x_n \\ f_2 = a_{20} \oplus a_{21}x_1 \oplus a_{22}x_2 \oplus \ldots \oplus a_{2n}x_n \\ \vdots \\ f_m = a_{m0} \oplus a_{m1}x_1 \oplus a_{m2}x_2 \oplus \ldots \oplus a_{mn}x_n \end{cases},\ aij \in \{0, 1\}.$$

$$
\begin{aligned}
F = f(f_1, \ldots, f_m) = a_{00} \oplus a_{01} f_1 \oplus a_{02} f_2 \oplus \ldots \oplus a_{0m} f_m = \\
= a_{00} \oplus a_{01} \cdot (a_{10} \oplus a_{11} x_1 \oplus a_{12} x_2 \oplus \ldots \oplus a_{1n} x_n) \oplus \\
\oplus a_{02} \cdot (a_{20} \oplus a_{21} x_1 \oplus a_{22} x_2 \oplus \ldots \oplus a_{2n} x_n) \oplus \ldots \\
\oplus a_{0m} \cdot (a_{m0} \oplus a_{m1} x_1 \oplus a_{m2} x_2 \oplus \ldots \oplus a_{mn} x_n).
\end{aligned}
$$

Приведем подобные слагаемые, вынося за скобки одинаковые переменные:

$$
\begin{aligned}
F = a_{00} \oplus a_{01}a_{10} \oplus a_{02}a_{20} \oplus \ldots \oplus a_{0m}a_{m0} \oplus \\
\oplus x_1(a_{01}a_{11} \oplus a_{02}a_{21} \oplus \ldots \oplus a_{0m}a_{m1}) \oplus x_2(a_{01}a_{12} \oplus a_{02}a_{22} \oplus \ldots \oplus a_{0m}a_{m2}) \oplus \\
\ldots \oplus x_n(a_{01}a_{1n} \oplus a_{02}a_{2n} \oplus \ldots \oplus a_{0m}a_{mn}) = \\
= \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n x_n,
\end{aligned}
$$

$$
\text{где} \begin{cases}
\alpha_0 = a_{00} \oplus a_{01}a_{10} \oplus a_{02}a_{20} \oplus \ldots \oplus a_{0m}a_{m0} \\
\alpha_1 = a_{01}a_{11} \oplus a_{02}a_{21} \oplus \ldots \oplus a_{0m}a_{m1} \\
\alpha_2 = a_{01}a_{12} \oplus a_{02}a_{22} \oplus \ldots \oplus a_{0m}a_{m2} \\
\vdots \\
\alpha_n = a_{01}a_{1n} \oplus a_{02}a_{2n} \oplus \ldots \oplus a_{0m}a_{mn}
\end{cases} .
$$

Мы получили, что многочлен Жегалкина функции F не содержит конъюнкций, то есть $F \in L$.

□

Теорема 7.8. *Число линейных функций, зависящих от n переменных, равно 2^{n+1}, то есть*

$$|L| = 2^{n+1}.$$

Доказательство.

$$f(\widetilde{x}) \in L \;\Leftrightarrow\; f(\widetilde{x}) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n x_n.$$

Значит, любая линейная функция взаимнооднозначно определяется двоичным набором $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ длины $n+1$.

Число различных линейных функций равно количеству различных двоичных наборов длины $n+1$, то есть 2^{n+1}.
Получили:

$$|L| = 2^{n+1}.$$

□

Теорема 7.9 (необходимое условие линейности функции)**.** *Если линейная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ отлична от константы, то количество единиц в её векторе значений равно числу нулей, то есть*

$$|N_f| = \frac{1}{2} 2^n.$$

Доказательство. Пусть

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n x_n \in L.$$

Так как $f \not\equiv const$, то хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ не равен нулю. Без ограничения общности будем считать, что $\alpha_1 \neq 0$, то есть

$$f(\widetilde{x}) = x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n x_n \oplus \alpha_0.$$

Рассмотрим уравнение

$$x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n x_n \oplus \alpha_0 = 1.$$

Очевидно, что множество решений этого уравнения совпадает с N_f. Это означает, что число различных решений равно количеству наборов в носителе функции.

Добавим к обеим частям уравнения выражение $\alpha_2 x_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n x_n \oplus \alpha_0$ и упростим левую часть, используя тождество

$$A \oplus A = 0.$$

Получим:

$$x_1 = \alpha_2 x_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n x_n \oplus \alpha_0 \oplus 1.$$

Так как значение переменной x_1 однозначно определяется из данного уравнения коэффициентами $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, число различных решений равно количеству двоичных наборов $(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ длины $n-1$. Всего таких наборов 2^{n-1}, то есть

$$|N_f| = 2^{n-1} = \frac{1}{2} 2^n.$$

□

Замечание 7.17. Условия теоремы являются необходимыми, но не достаточными. То есть, из того, что вектор значений функции содержит поровну нулей и единиц, не следует, что функция линейна.

Например, $\begin{array}{l} \widetilde{f_1} = (1010\ 1010) = 1 \oplus x_3 \in L \\ \widetilde{f_2} = (0001\ 0111) = x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2 \notin L \end{array}$, хотя число нулей и единиц в векторе значений обеих функций совпадает

$$(|N_{f_1}| = 4 = 2^2 = 2^{3-1} = |N_{f_2}|).$$

Для получения многочлена Жегалкина булевых функций $\widetilde{f_1}$ и $\widetilde{f_2}$ мы использовали алгоритм 3 - метод треугольника (см. п. 3.5.3 на стр. 44). Выделенная в таблице колонка соответствует коэффициентам многочлена:

x_1	x_2	x_3								
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	
0	1	0	0	0	0	0	0	0		
0	1	1	0	0	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0				
1	0	1	0	0	0					
1	1	0	0	0						
1	1	1	0							

x_1	x_2	x_3								
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	
0	1	0	0	1	0	0	1	0		
0	1	1	1	1	0	1	1			
1	0	0	0	1	1	0				
1	0	1	1	0	1					
1	1	0	1	1						
1	1	1	0							

В дальнейшем мы будем пользоваться следующим следствием:

Следствие 7.9.1. *Если количество нулей и единиц в векторе значений функции, отличной от константы, различно, то функция нелинейна.*

Лемма L (лемма о нелинейной функции). *Из нелинейной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ путем подстановки в неё вместо переменных $x_1, \dots, x_n$ функций одной переменной x, y, 0, 1, $\overline{x}$ и $\overline{y}$ можно получить одну из нелинейных функций: конъюнкцию или дизъюнкцию. Точнее, существует представление конъюнкции или дизъюнкции в виде суперпозиции констант, отрицаний и функции f.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \notin L$. Это означает, что её многочлен Жегалкина содержит хотя бы одну конъюнкцию. Согласно теореме Жегалкина (см. теорему 3.6) любую булеву функцию можно представить в виде

$$f(\widetilde{x}) =$$
$$= a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \dots \oplus a_n x_n \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus \dots \oplus a_{12\dots n} x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Так как $f(\widetilde{x})$ нелинейна, хотя бы один из коэффициентов $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{12\dots n}$ не равен нулю.

Возьмём самую короткую конъюнкцию $K = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ из представления функции в виде многочлена Жегалкина.

Рассмотрим функцию двух переменных $\varphi(x, y)$, полученную из $f(\widetilde{x})$ подстановкой:

вместо переменной x_{i_1} - функции x,
вместо переменной x_{i_2} - функции y,
вместо переменных $x_{i_3}, x_{i_4}, \dots, x_{i_k}$ - константы 1,
вместо остальных переменных - константы 0.

Тогда

$$\varphi(x, y) = x_{i_1} x_{i_2} \oplus \alpha x_{i_1} \oplus \beta x_{i_2} \oplus \gamma = xy \oplus \alpha x \oplus \beta y \oplus \gamma,$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$ - коэффициенты, зависящие от конкретной функции f.

Все возможные функции $\varphi(x, y)$ (в зависимости от значений коэффициентов α, β, γ) перечислены в следующей таблице:

α, β, γ	$\varphi(x, y)$	эквивалентные формулы	искомая суперпозиция
000	xy		xy
001	$xy \oplus 1$	$\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$	$\overline{x} \vee \overline{y}$
010	$xy \oplus y$	$(x \oplus 1)y = \overline{x}y$	$\overline{x}y$
011	$xy \oplus y \oplus 1$	$(x \oplus 1)y \oplus 1 = \overline{\overline{x}y} = x \vee \overline{y}$	$x \vee \overline{y}$
100	$xy \oplus x$	$x(y \oplus 1) = x\overline{y}$	$x\overline{y}$
101	$xy \oplus x \oplus 1$	$x(y \oplus 1) \oplus 1 = \overline{x\overline{y}} = \overline{x} \vee y$	$\overline{x} \vee y$
110	$xy \oplus x \oplus y$	$x(y \oplus 1) \oplus y =$ $= x(y \oplus 1) \oplus (y \oplus 1) \oplus 1 =$ $= x\overline{y} \oplus \overline{y} \oplus 1 = (x \oplus 1)\overline{y} \oplus 1 =$ $= \overline{x}\,\overline{y} \oplus 1 = \overline{\overline{x}\,\overline{y}} = x \vee y$	$x \vee y$
111	$xy \oplus x \oplus y \oplus 1$	$x(y \oplus 1) \oplus (y \oplus 1) =$ $= x\overline{y} \oplus \overline{y} = (x \oplus 1)\overline{y} = \overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,\overline{y}$

При выводе формул в таблице использовались законы де Моргана, двойного отрицания и логическое тождество $A \oplus 1 = \overline{A}$ (см. основные эквивалентности алгебры логики в п. 2.3.6 на стр. 23).

Для каждого набора значений (α, β, γ) получили выражение функции f либо в виде конъюнкции, либо в виде дизъюнкции. □

Пример 7.14. Выразить конъюнкцию или дизъюнкцию из функции

$$f_2(\widetilde{x}) = (0001\ 0111).$$

Решение.

Так как

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = (0001\ 0111) = x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2 \notin L,$$

то к функции $f_2(\widetilde{x})$ можно применить лемму L.

Многочлен Жегалкина функции f_2 содержит 3 конъюнкции ранга 2. Поэтому можно брать любую из них, например, $K_1 = x_2x_3$. В неё входят переменные x_2 и x_3.

Рассмотрим набор $\gamma = (0, x_2, x_3)$, в который переменные x_2 и x_3 входят без изменений, а переменная x_1, не вошедшая в K_1, заменена на 0.

Вычислим значение многочлена Жегалкина на этом наборе (подставляя $x_1 = 0$):

$$f_2(0, x_2, x_3) = x_2x_3 \oplus 0 \cdot x_3 \oplus 0 \cdot x_2 = x_2x_3.$$

Заменив переменную x_2 на x, а x_3 - на y в обеих частях полученного равенства, получим функцию двух переменных - конъюнкцию

$$\varphi_1(x, y) = f_2(0, x, y) = xy.$$

Очевидно, что для получения конъюнкции из функции f_2 можно было взять конъюнкции $K_2 = x_1x_3$ или $K_3 = x_1x_2$.

Проделав аналогичные действия, получим

$$\varphi_2(x, y) = f_2(x, 0, y) = xy$$
$$\varphi_3(x, y) = f_2(x, y, 0) = xy$$

Пример 7.15. Получить с помощью леммы L функцию xy или $x \vee y$ из функции $f_3(\widetilde{x}) = (1101\ 1100)$.

Решение.

Так как количество единиц в векторе значений равно 5, а количество нулей - 3, то, согласно следствию 7.9.1 к необходимому признаку нелинейности функции (теорема 7.9), функция f_3 нелинейна.

Представим данную функцию в виде многочлена Жегалкина:

x_1	x_2	x_3								
0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	
0	1	0	1	0	1	0	1	1		
0	1	1	1	1	1	1	0			
1	0	0	0	0	0	1				
1	0	1	0	0	1					
1	1	0	0	1						
1	1	1	1							

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = (1101\ 1100) = 1 \oplus x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3.$$

Самой короткой конъюнкцией является $K_1 = x_2x_3$.

Вычислим значение функции f_3 на наборе $\gamma = (0, x_2, x_3)$. Получим

$$f_3(0, x_2, x_3) = 1 \oplus x_2 \oplus x_2x_3 \oplus 0 \cdot x_2x_3 = 1 \oplus x_2 \oplus x_2x_3.$$

Упростим полученное равенство, вынося за скобки одинаковые сомножители (в данном случае x_2), применяя тождество

$$A \oplus 1 = \overline{A}$$

и законы де Моргана:

$$f_3(0, x_2, x_3) =$$
$$= 1 \oplus x_2 \oplus x_2x_3 = 1 \oplus x_2 \cdot (1 \oplus x_3) = 1 \oplus x_2\overline{x_3} = \overline{x_2\overline{x_3}} = \overline{x_2} \vee \overline{\overline{x_3}} = \overline{x_2} \vee x_3.$$

Так как переменная x_2 входит в полученную формулу отрицанием, заменим её на $\overline{x}$, а переменную x_3 - на y.

$$\varphi(x, y) = f_3(0, \overline{x}, y) = x \vee y.$$

Из нелинейной функции f_3 мы получили функцию "дизъюнкция".

Пример 7.16. Исследовать функцию $\widetilde{g} = (0000\ 1111\ 0011\ 0011)\}$ на принадлежность классу L. В случае линейности выразить всеми возможными способами функции конъюнкцию и дизъюнкцию.

Решение.

Найдем многочлен Жегалкина для функции $\widetilde{g}$, используя 3 алгоритм.

x_1	x_2	x_3	x_4																
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1		
0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0			
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0				
0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0					
0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0						
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0							
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0								
1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0									
1	0	1	0	1	1	0	0	1	1										
1	0	1	1	0	1	0	1	0											
1	1	0	0	1	1	1	1												
1	1	0	1	0	0	0													
1	1	1	0	0	0														
1	1	1	1	0															

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2.$$

Задавая все возможные значения переменным x_1, x_2, x_3 и x_4 (всего 24 варианта), получим различные функции двух переменных.

1. $g(0, 0, x_3, x_4) = 0 \oplus 0 \cdot x_3 \oplus 0 \cdot 0 = 0$ - получили линейную функцию; лемма L не применима, функции xy или $x \vee y$ получить невозможно;
2. $g(0, 1, x_3, x_4) = 1 \oplus 0 \cdot x_3 \oplus 0 \cdot 0 = 1 \ \in L$ - аналогично;
3. $g(1, 0, x_3, x_4) = 0 \oplus 1 \cdot x_3 \oplus 1 \cdot 0 = x_3 \ \in L$
4. $g(1, 1, x_3, x_4) = 1 \oplus 1 \cdot x_3 \oplus 1 \cdot 1 = x_3 \ \in L$
5. $g(0, x_2, 0, x_4) = x_2 \oplus 0 \cdot 0 \oplus 0 \cdot x_2 = x_2 \ \in L$
6. $g(0, x_2, 1, x_4) = x_2 \oplus 0 \cdot 1 \oplus 0 \cdot x_2 = x_2 \ \in L$
7. $g(1, x_2, 0, x_4) = x_2 \oplus 1 \cdot 0 \oplus 1 \cdot x_2 = 0 \ \in L$
8. $g(1, x_2, 1, x_4) = x_2 \oplus 1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot x_2 = 1 \ \in L$

Так как обе конъюнкции в многочлене Жегалкина содержат по две переменных, и в каждую входит переменная x_1, то подстановка $x_1 = 0$ даёт линейную функцию. Поскольку получить конъюнкцию или дизъюнкцию из линейной функции нельзя, больше такие подстановки не рассматриваем.

Так как многочлен Жегалкина не зависит от переменной x_4 (такая переменная называется ***фиктивной***), подстановки вида $(x_1, \alpha_1, \alpha_2, x_4)$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$ дают нам формулу, содержащую только переменную x_1. Опять получаем линейную функцию, лемму L применять не можем.

Рассмотрим оставшиеся варианты. Поскольку x_4 - фиктивная переменная, то подстановки $(x_1, x_2, x_3, 0)$ и $(x_1, x_2, x_3, 1)$ дают одинаковый результат.

9. $g(x_1, x_2, 0, 0) = g(x_1, x_2, 0, 1) = x_2 \oplus x_1 \cdot 0 \oplus x_1x_2 = x_2 \oplus x_1x_2 =$

$$= (1 \oplus x_1)x_2 = \overline{x_1}x_2;$$

$$\begin{cases} x_1 \leftrightarrow \overline{x} \\ x_2 \leftrightarrow y \end{cases} \qquad \underline{\varphi_{1,2}(x, y) = g(\overline{x}, y, 0, 0) = g(\overline{x}, y, 0, 1) = xy}$$

10. $g(x_1, x_2, 1, 0) = g(x_1, x_2, 1, 1) = x_2 \oplus x_1 \cdot 1 \oplus x_1x_2 = x_2 \oplus x_1 \oplus x_1x_2 =$

$$= x_2 \oplus x_1(1 \oplus x_2) = x_2 \oplus 1 \oplus 1 \oplus x_1\overline{x_2} = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \oplus 1 = \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}} = x_1 \vee x_2;$$

$$\begin{cases} x_1 \leftrightarrow x \\ x_2 \leftrightarrow y \end{cases} \qquad \underline{\varphi_{3,4}(x, y) = g(x, y, 1, 0) = g(x, y, 1, 1) = x \vee y}$$

11. $g(x_1, 0, x_3, 0) = g(x_1, 0, x_3, 1) = 0 \oplus x_1 \cdot x_3 \oplus x_1 \cdot 0 = x_1x_3;$

$$\begin{cases} x_1 \leftrightarrow x \\ x_2 \leftrightarrow y \end{cases} \qquad \underline{\varphi_{5,6}(x, y) = g(x, 0, y, 0) = g(x, 0, y, 1) = xy}$$

12. $g(x_1, 1, x_3, 0) = g(x_1, 1, x_3, 1) = 1 \oplus x_1 \cdot x_3 \oplus x_1 \cdot 1 = 1 \oplus x_1 \cdot x_3 \oplus x_1 =$ $= 1 \oplus x_1(1 \oplus x_3) = 1 \oplus x_1\overline{x_3} = \overline{x_1\overline{x_3}} = \overline{x_1} \vee x_3;$

$$\begin{cases} x_1 \leftrightarrow \overline{x} \\ x_3 \leftrightarrow y \end{cases} \qquad \underline{\varphi_{7,8}(x, y) = g(\overline{x}, 1, y, 0) = g(\overline{x}, 1, y, 1) = x \vee y}$$

7.6 Задачи для самостоятельного решения

1. Проверить принадлежность функций основным замкнутым классам T_0, T_1, S, M, L. Применить, где это возможно, леммы S, M, L.

1. $\widetilde{f_1} = (\ 0110\ 0001\ )$;
2. $\widetilde{f_2} = (\ 1101\ 0001\ )$;
3. $\widetilde{f_3} = (\ 1001\ 0110\ )$;
4. $\widetilde{f_4} = (\ 0101\ 0111\ )$;
5. $\widetilde{f_5} = (\ 0110\ 1111\ )$;
6. $\widetilde{f_6} = (\ 0110\ 1110\ )$;
7. $\widetilde{f_7} = (\ 1001\ 1100\ )$;
8. $\widetilde{f_8} = (\ 1011\ 0101\ )$;
9. $\widetilde{f_9} = (\ 1111\ 1100\ )$;
10. $\widetilde{f_{10}} = (\ 0101\ 1111\ )$.

2. Найти среди функций f_1 и f_2 несамодвойственную и по лемме S (о несамодвойственной функции) выразить всеми возможными способами все константы.

1. $\widetilde{f_1} = (1100\ 1011)$, $\quad \widetilde{f_2} = (1010\ 1010)$;
2. $\widetilde{f_1} = (1111\ 0000)$, $\quad \widetilde{f_2} = (1100\ 0010)$;
3. $\widetilde{f_1} = (1100\ 0011)$, $\quad \widetilde{f_2} = (1101\ 0100)$;
4. $\widetilde{f_1} = (1100\ 1101\ 0100\ 1100)$, $\quad \widetilde{f_2} = (1111\ 1000\ 1011\ 0100)$;
5. $\widetilde{f_1} = (0001\ 0111\ 0001\ 0111)$, $\quad \widetilde{f_2} = (0001\ 1110\ 1000\ 1000)$;
6. $\widetilde{f_1} = (0001\ 1011\ 0010\ 0111)$, $\quad \widetilde{f_2} = (0011\ 1001\ 0110\ 1100)$;
7. $\widetilde{f_1} = (0100\ 1101\ 0100\ 1101)$, $\quad \widetilde{f_2} = (0011\ 1100\ 1111\ 0000)$.

3. Найти среди функций f_1 и f_2 немонотонную и по лемме M (о немонотонной функции) выразить всеми возможными способами $\bar{x}$.

1. $\widetilde{f_1} = (0001\,0111)$, $\widetilde{f_2} = (0110\,0011)$;

2. $\widetilde{f_1} = (0011\,0111)$, $\widetilde{f_2} = (0110\,1101)$;

3. $\widetilde{f_1} = (0101\,1011)$, $\widetilde{f_2} = (0101\,1111)$;

4. $\widetilde{f_1} = (0000\,0111\,1110\,1111)$, $\widetilde{f_2} = (0000\,0101\,0000\,0101)$;

5. $\widetilde{f_1} = (0000\,1111\,1001\,1111)$, $\widetilde{f_2} = (0000\,0011\,0001\,0011)$;

6. $\widetilde{f_1} = (0000\,0101\,0001\,0101)$, $\widetilde{f_2} = (0000\,0111\,1100\,1111)$;

7. $\widetilde{f_1} = (0000\,0011\,0000\,1111)$, $\widetilde{f_2} = (0000\,1111\,1010\,1111)$.

4. Найти среди функций f_1 и f_2 нелинейную и по лемме L (о нелинейной функции) выразить всеми возможными способами конъюнкцию и дизъюнкцию.

1. $\widetilde{f_1} = (1010\,1010)$, $\widetilde{f_2} = (1001\,0101)$;

2. $\widetilde{f_1} = (1001\,0110)$, $\widetilde{f_2} = (1100\,1010)$;

3. $\widetilde{f_1} = (1001\,1100)$, $\widetilde{f_2} = (1010\,1010)$;

4. $\widetilde{f_1} = (0000\,0010\,1101\,1111)$, $\widetilde{f_2} = (1100\,0011\,0011\,1100)$;

5. $\widetilde{f_1} = (0000\,0011\,0110\,1111)$, $\widetilde{f_2} = (1001\,1001\,1001\,1001)$;

6. $\widetilde{f_1} = (0110\,1001\,0110\,1001)$, $\widetilde{f_2} = (0000\,0011\,1001\,1111)$;

7. $\widetilde{f_1} = (0000\,0011\,1010\,1111)$, $\widetilde{f_2} = (0110\,0110\,1001\,1001)$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1.
1. $\widetilde{f_1} \in T_0$; $\widetilde{f_1} \in T_1$; $\widetilde{f_1} \notin S$; $\widetilde{f_1} \notin M$; $\widetilde{f_1} \notin L$;
2. $\widetilde{f_2} \notin T_0$; $\widetilde{f_2} \in T_1$; $\widetilde{f_2} \notin S$; $\widetilde{f_2} \notin M$; $\widetilde{f_2} \notin L$;
3. $\widetilde{f_3} \notin T_0$; $\widetilde{f_3} \notin T_1$; $\widetilde{f_3} \in S$; $\widetilde{f_3} \notin M$; $\widetilde{f_3} \in L$;
4. $\widetilde{f_4} \in T_0$; $\widetilde{f_4} \in T_1$; $\widetilde{f_4} \notin S$; $\widetilde{f_4} \in M$; $\widetilde{f_4} \notin L$;
5. $\widetilde{f_5} \in T_0$; $\widetilde{f_5} \in T_1$; $\widetilde{f_5} \notin S$; $\widetilde{f_5} \notin M$; $\widetilde{f_5} \notin L$;
6. $\widetilde{f_6} \in T_0$; $\widetilde{f_6} \notin T_1$; $\widetilde{f_6} \notin S$; $\widetilde{f_6} \notin M$; $\widetilde{f_6} \notin L$;
7. $\widetilde{f_7} \notin T_0$; $\widetilde{f_7} \notin T_1$; $\widetilde{f_7} \notin S$; $\widetilde{f_7} \notin M$; $\widetilde{f_7} \notin L$;

8. $\widetilde{f_8} \notin T_0$; $\widetilde{f_8} \in T_1$; $\widetilde{f_8} \notin S$; $\widetilde{f_8} \notin M$; $\widetilde{f_8} \notin L$;
9. $\widetilde{f_9} \notin T_0$; $\widetilde{f_9} \notin T_1$; $\widetilde{f_9} \notin S$; $\widetilde{f_9} \notin M$; $\widetilde{f_9} \notin L$;
10. $\widetilde{f_{10}} \in T_0$; $\widetilde{f_{10}} \in T_1$; $\widetilde{f_{10}} \notin S$; $\widetilde{f_{10}} \in M$; $\widetilde{f_{10}} \notin L$.

2.
1. $\widetilde{f_1} \notin S$, $\widetilde{f_2} \in S$;
2. $\widetilde{f_1} \in S$, $\widetilde{f_2} \notin S$;
3. $\widetilde{f_1} \notin S$, $\widetilde{f_2} \in S$;
4. $\widetilde{f_1} \in S$, $\widetilde{f_2} \notin S$;
5. $\widetilde{f_1} \in S$, $\widetilde{f_2} \notin S$;
6. $\widetilde{f_1} \in S$, $\widetilde{f_2} \notin S$;
7. $\widetilde{f_1} \in S$, $\widetilde{f_2} \notin S$.

3.
1. $\widetilde{f_1} \in M$, $\widetilde{f_2} \notin M$;
2. $\widetilde{f_1} \in M$, $\widetilde{f_2} \notin M$;
3. $\widetilde{f_1} \notin M$, $\widetilde{f_2} \in M$;
4. $\widetilde{f_1} \notin M$, $\widetilde{f_2} \in M$;
5. $\widetilde{f_1} \notin M$, $\widetilde{f_2} \in M$;
6. $\widetilde{f_1} \in M$, $\widetilde{f_2} \notin M$;
7. $\widetilde{f_1} \in M$, $\widetilde{f_2} \notin M$.

4.
1. $\widetilde{f_1} \in L$, $\widetilde{f_2} \notin L$;
2. $\widetilde{f_1} \in L$, $\widetilde{f_2} \notin L$;
3. $\widetilde{f_1} \notin L$, $\widetilde{f_2} \in L$;
4. $\widetilde{f_1} \notin L$, $\widetilde{f_2} \in L$;
5. $\widetilde{f_1} \notin L$, $\widetilde{f_2} \in L$;
6. $\widetilde{f_1} \in L$, $\widetilde{f_2} \notin L$;
7. $\widetilde{f_1} \notin L$, $\widetilde{f_2} \in L$.

Глава 8

Полнота систем функций

8.1 Примеры полных систем

Мы знаем, что любую функцию алгебры логики можно представить в виде формулы через элементарные функции $\overline{x}$, $x \vee y$, $x\&y$, например, в виде СДНФ или СКНФ (см. главу 3).

Определение 8.1. Система функций $\Sigma = \{f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots \mid f_i \in \mathbb{P}_2, \ \forall i\}$ называется **полной,** если любую булеву функцию можно выразить в виде формулы через функции этой системы, то есть $[\Sigma] = \mathbb{P}_2$.

Теорема 8.1. *Пусть даны две системы функций из* $\mathbb{P}_2$: $\Sigma_1 = \{f_1, f_2, \ldots\}$ *и* $\Sigma_2 = \{g_1, g_2, \ldots\}$.

Если система Σ_1 *полна и каждая её функция выражается в виде формул через функции системы* Σ_2, *то система функций* Σ_2 *также полна.*

Рассмотрим примеры полных систем.

1. Система $\mathbb{P}_2$ (множество всех булевых функций) является полной системой.

2. Система $\Sigma_1 = \{\overline{x}, \ x \vee y, \ x\&y\}$ представляет собой полную систему, так как, согласно теореме 3.4, любую булеву функцию можно представить формулой, являющейся суперпозицией дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

3. Системы $\Sigma_2 = \{\overline{x},\ x \vee y\}$ и $\Sigma_3 = \{\overline{x},\ x\&y\}$ также полны согласно теореме 8.1, так как по законам де Моргана $x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$; $xy = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$ можно выразить функции полной системы Σ_1 через функции системы Σ_2 и Σ_3.

4. Система $\Sigma_4 = \{x|y\}$ является полной системой, так как $\overline{x} = x|x$, $(x|y)|(x|y) = \overline{x|y} = xy$ (в справедливости этих формул легко убедиться, построив таблицы истинности левых и правых частей равенств), функции полной системы Σ_2 выражены через функции системы Σ_4.

5. Полнота системы $\Sigma_5 = \{x \downarrow y\}$, согласно теореме 8.1, следует из полноты системы Σ_3 и тождеств
$$x \downarrow x = \overline{x},\ (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = \overline{x \downarrow y} = x \vee y.$$

6. Система $\Sigma_6 = \{1,\ x \oplus y,\ x\&y\}$ является полной, так как по теореме Жегалкина любую булеву функцию можно представить в виде многочлена Жегалкина, то есть формулы, выраженной через функции системы Σ_6.

8.2 Критерий Поста функциональной полноты

Теорема 8.2 (Э.Поста)**.** *Система двоичных функций $\Sigma = \{f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots\}$ полна тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из основных замкнутых классов T_0, T_1, S, M и L.*

Доказательство.

Необходимость. Требуется доказать, что, если система функций полна ($[\Sigma] = \mathbb{P}_2$), то она целиком не содержится ни в одном из классов $K \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$.

Ранее мы доказали, что каждый из классов K замкнут ($[K] = K$). При этом $[K] \neq \mathbb{P}_2$, $K \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$.

Рассмотрим таблицу принадлежности функций одной переменной основным замкнутым классам. Если функция содержится в классе, соответствующий элемент таблицы равен „+ “; „- “- в противоположном случае.

f	T_0	T_1	S	M	L
$\overline{x}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
0	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
1	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$

Так как все столбцы различны, то и классы попарно различны.

Докажем необходимость от противного.

Пусть $\Sigma = \{f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots\} \in K$, где $K \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$. Тогда по свойству замыкания (см. стр. 111) $[\Sigma] \subseteq [K]$. Получили, что $\mathbb{P}_2 = [\Sigma] \subseteq [K] \neq \mathbb{P}_2$, то есть $\mathbb{P}_2 \neq \mathbb{P}_2$ - противоречие. Необходимость доказана.

Достаточность. Так как система функций $\Sigma = \{f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots\}$ не содержится целиком ни в одном из классов T_0, T_1, S, M и L, то из этой системы можно выделить не более 5 функций, при этом

$$f_{i_1} \notin T_0,\ f_{i_2} \notin T_1,\ f_{i_3} \notin S,\ f_{i_4} \notin M,\ f_{i_5} \notin L.$$

Доказательство достаточности теоремы - это

8.2.1 Алгоритм получения функций $0,\ 1,\ \overline{x},\ x \vee y,\ x\&y$ из системы функций Σ

1. **Получение функций** $0,\ 1,\ \overline{x}$.

   Так как леммы L и M используют константы, сначала выразим функции 0 и 1 через систему функций Σ.

   $$f_{i_1}(\widetilde{x}) \notin T_0 \ \Leftrightarrow\ f_{i_1}(0, 0, \ldots, 0) = 1.$$

   Возможны 2 случая:

   a) $f_{i_1}(1, 1, \ldots, 1) = 1$

   Так как $f_{i_1}(0, 0, \ldots, 0) = f_{i_1}(\overline{0}, \overline{0}, \ldots, \overline{0}) = 1$, то $f_{i_1}(\widetilde{x}) \notin S$ и по лемме S можно получить константу 1:
   $\underline{\varphi_1(x) = f_{i_1}(x, x, \ldots, x) \equiv 1}$ - выразили константу 1 через $\underline{\text{функцию } f_{i_1}(\widetilde{x}) \in \Sigma}$.

   В этом случае константа 0 получается из функции $f_{i_2}(\widetilde{x}) \notin T_1$:

   $$f_{i_2}(\widetilde{x}) \notin T_1 \ \Leftrightarrow\ f_{i_2}(1, 1, \ldots, 1) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\underline{\varphi_2(x) = f_{i_2}(\varphi_1(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_1(x)) = f_{i_2}(f_{i_1}, f_{i_1}, \ldots, f_{i_1}) \equiv 0}.$$

Обе константы уже получены, функцию $\overline{x}$ можем выразить по лемме М из немонотонной функции f_{i_4}.

б) $f_{i_1}(1, 1, \ldots, 1) = 0$

Рассмотрим наборы $\widetilde{\alpha} = (0, 0, \ldots, 0)$ и $\widetilde{\beta} = (1, 1, \ldots, 1)$.

Найдем значение функции $f_{i_1}(\widetilde{x})$ на этих наборах:

$$\widetilde{\alpha} \preccurlyeq \widetilde{\beta},$$

но

$$f_{i_1}(\widetilde{\alpha}) = f_{i_1}(0, 0, \ldots, 0) = 1 > f_{i_1}(1, 1, \ldots, 1) = f_{i_1}(\widetilde{\beta}) = 0$$

$$\Rightarrow \ f_{i_1}(\widetilde{x}) \notin M.$$

По лемме М можно получить функцию $\overline{x}$.

Наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ противоположны, все значения их координат различны. Все координаты этих наборов заменяем на x. Получим набор $\gamma = (x, x, \ldots, x)$.

$$\underline{\varphi_1(x) = f_{i_1}(\gamma) = f_{i_1}(x, x, \ldots, x) = \overline{x}},$$

так как

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = f_{i_1}(0, 0, \ldots, 0) = 1 \\ \varphi_1(1) = f_{i_1}(1, 1, \ldots, 1) = 0 \end{cases}$$

В этом случае у нас есть функция $\overline{x}$, выраженная через функцию $f_{i_1}(\widetilde{x}) \in \Sigma$, и по лемме S мы можем получить по крайней мере одну из констант из несамодвойственной функции f_{i_3}.

Оставшуюся константу можно выразить через функции f_{i_1} и f_{i_3}, либо опять применяя лемму S (если есть соответствующая пара противоположных наборов), либо используя формулы

$$\begin{array}{c} \overline{0} = 1 \\ \overline{1} = 0 \end{array}.$$

Заметим, что применять эти тождества можно только после того, как получили одну из констант и функцию "отрицание".

2. **Получение функций** $x \vee y$ **и** $x \& y$

Константы 0, 1 и функция $\overline{x}$ уже выражены через функции системы f_{i_1}, f_{i_2}, f_{i_3} и f_{i_4}.

По лемме L можно получить одну из функций дизъюнкцию или конъюнкцию из нелинейной функции f_{i_5}. Вторую нелинейную функцию можно получить из уже полученной формулы, применяя законы де Моргана $\begin{cases} x \vee y = \overline{\overline{x} \& \overline{y}} \\ x \& y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} \end{cases}$

Таким образом, используя функции $f_{i_1},\ f_{i_2},\ f_{i_3},\ f_{i_4},\ f_{i_5} \in \Sigma$ мы получили полную систему $\Sigma_1 = \{\overline{x},\ x \vee y,\ x \& y\}$. Значит, по теореме 8.1, и исходная система функций Σ полна.

$\square$

Замечание 8.1. Необходимо строго придерживаться порядка получения функций $0,\ 1,\ \overline{x},\ x \vee y,\ x \& y$. Например, нельзя применять лемму L, подставляя вместо одной переменной константу, если эта функция еще не выражена через функции системы.

Замечание 8.2. Исследовать систему функций $\Sigma = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ на полноту удобно, используя так называемую ***таблицу Поста*** (ещё одно название - ***критериальная таблица***).

	T_0	T_1	S	M	L
f_1					
f_2					
$\vdots$					
f_k					

Количество строк в таблице равно количеству функций k (каждая i-ая строка соответствует функции f_i). Количество столбцов равно 5. Каждый столбец соответствует одному из 5 основных замкнутых классов T_0, T_1, S, M и L. Соответствующий элемент таблицы равен „+ “, если $f_i \in K$, и „- “- в противоположном случае.

Вывод : Согласно теореме Поста система функций полна тогда и только тогда, когда в каждом столбце таблицы есть хотя бы один минус.

В связи с этим, нет необходимости заполнять таблицу полностью: если в столбце стоит хотя бы один минус, переходим к следующему столбцу.

Для получения „- “в столбце, соответствующего классу M, удобно пользоваться выводами о немонотонности (см. замечание 7.13 на стр. 128); в столбце, соответствующем классу L - следствием 7.9.1 к необходимому признаку линейности функции (см. теорему 7.9).

Пример 8.1. Доказать с помощью теоремы Поста полноту системы функций $\Sigma = \{f_1, f_2\}$, где $f_1(\widetilde{x}) = (1010\ 1010)$, $f_2(\widetilde{x}) = (0011\ 0101)$. Выразить основные булевы функции $0,\ 1,\ \overline{x},\ x\&y,\ x\vee y$ через функции системы Σ.

Решение.

I. Заполним таблицу Поста

1. $f_1(000) = 1 \ \Leftrightarrow \widetilde{f_1} \notin T_0;$ $\qquad f_2(000) = 0 \ \Leftrightarrow \widetilde{f_2} \in T_0;$
   $f_1(111) = 0 \ \Leftrightarrow \widetilde{f_1} \notin T_1;$ $\qquad f_2(111) = 1 \ \Leftrightarrow \widetilde{f_2} \in T_1.$
2. $\widetilde{f_1} \in S$; (см. пример 7.6 п.б)
   Для определения самодвойственности функции $\widetilde{f_2}$ воспользуемся алгоритмом 2 проверки самодвойственности функции.
   $$\widetilde{f_2} = (0011\,0101)$$
   $$(0011\,|\,\overleftarrow{0101)}$$
   $$(1010)$$
   $$(\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0})$$
   $$(0101)$$
   Так как $(0011) \neq (0101)$, то функция $\widetilde{f_2}$ не является самодвойственной.
3. Так как $f_1(000) = 1$, а $f_1(001) = 0$, то, согласно выводу 1 из замечания 7.13 на странице 128, функция $\widetilde{f_1}$ немонотонна: $(000) \preccurlyeq (001)$, а $f_1(000) = 1 > f_1(001) = 0$)
   Исследуем функцию $\widetilde{f_2}$ на монотонность, используя алгоритм 2 определения монотонности функции:
   $$f_2(\widetilde{x}) = (0011\,0101)$$
   $$\widetilde{\alpha}_0 = (0011) \not\preccurlyeq \widetilde{\alpha}_1 = (0101) \ \Leftrightarrow \ \widetilde{f_1} \notin M.$$
   Заметим, что можно было не исследовать функцию $\widetilde{f_2}$ на принадлежность классам T_0, T_1 и M, так как в соответствующих столбцах таблицы уже есть „- “.

4. Выше было установлено:

$$f_1(\widetilde{x}) = 1 \oplus x_3 \in L.$$

Так как следствие 7.9.1 к необходимому признаку линейности булевой функции (теорема 7.9) применить нельзя, проверим линейность функции $\widetilde{f_2}$ с помощью 3 алгоритма представления функции в виде многочлена Жегалкина (метода треугольника):

x_1	x_2	x_3								
0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	
0	1	0	1	1	1	0	0	0		
0	1	1	0	0	1	0	0			
1	0	0	0	1	1	0				
1	0	1	1	0	1					
1	1	0	1	1						
1	1	1	0							

$$f_2(\widetilde{x}) = x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2 \notin L$$

5. Получили следующую таблицу:

	T_0	T_1	S	M	L
f_1	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
f_2	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$

Так как в каждом столбце таблицы есть хотя бы один „минус“, то система не содержится целиком ни в одном из основных замкнутых классов T_0, T_1, S, M и L, и, по теореме Поста, полна.

II. Выразим элементарные булевы функции $0,\ 1,\ \overline{x},\ x\&y,\ x \vee y$ через функции $\widetilde{f_1}$ и $\widetilde{f_2}$.

1. Сначала выразим функции одной переменной. Эти функции удобно получать на крайних наборах таблицы истинности, то есть на наборах (000) и (111).

Замечание 8.3. Рассмотрим получение функций одной переменной на примере булевой функции g.
В зависимости от принадлежности функции g классам T_0 и T_1, возможны следующие варианты:

а) $\begin{array}{c||c|c} & T_0 & T_1 \\ \hline\hline g_1 & - & - \end{array} \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} g_1(0,\ldots,0) = 1 \, > \, g_1(1,\ldots,1) = 0; \\ g_1 \notin M; \end{array}$

$\begin{cases} \widetilde{\alpha} = (0,0,\ldots,0) \\ \widetilde{\beta} = (1,1,\ldots,1) \end{cases}$ На паре наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ нарушается монотонность, можно применять лемму М:

$$\underline{\varphi_1(x) = g_1(x,x,\ldots,x) = \overline{x}}$$

б) $\begin{array}{c||c|c} & T_0 & T_1 \\ \hline\hline g_2 & - & + \end{array} \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} g_2(0,\ldots,0) = 1 \, = \, g_2(1,\ldots,1) = 1; \\ g_2 \notin S. \end{array}$

На паре наборов $\begin{cases} \widetilde{\alpha} = (0,0,\ldots,0) \\ \widetilde{\beta} = (1,1,\ldots,1) \end{cases}$ нарушается самодвойственность. Применим лемму S, выразив константу 1.
Возьмём тот из наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$, который содержит больше единиц (то есть $\widetilde{\beta} = (1,1,\ldots,1)$), заменив все „1“ на x:

$$\underline{\varphi_2(x) = g_2(x,x,\ldots,x) \equiv 1}; \quad \begin{array}{l} \varphi_2(0) = g_2(0,0,\ldots,0) = 1 \\ \varphi_2(1) = g_2(1,1,\ldots,1) = 1 \end{array}$$

в) $\begin{array}{c||c|c} & T_0 & T_1 \\ \hline\hline g_3 & + & - \end{array} \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} g_3(0,\ldots,0) = 0 \, = \, g_3(1,\ldots,1) = 0; \\ g_3 \notin S. \end{array}$

Аналогично пункту б) получим константу 0:

$$\underline{\varphi_3(x) = g_3(x,x,\ldots,x) \equiv 0}; \quad \begin{array}{l} \varphi_3(0) = g_2(0,0,\ldots,0) = 0 \\ \varphi_3(1) = g_2(1,1,\ldots,1) = 0 \end{array}$$

г) Так как $g_4(0,0,\ldots,0) = 0 \, < \, g_4(1,1,\ldots,1) = 1$,

$\begin{array}{c||c|c} & T_0 & T_1 \\ \hline\hline g_4 & + & + \end{array}$ то на паре наборов $\begin{cases} \widetilde{\alpha} = (0,0,\ldots,0) \\ \widetilde{\beta} = (1,1,\ldots,1) \end{cases}$ ни монотонность, ни самодвойственность не нарушаются.

Константы и функцию $\overline{x}$ ***на этой паре наборов*** получить нельзя. В этом случае переходим к той функции, у которой есть минус в первых двух столбцах таблицы Поста (случаи а, б или в). Такая функция по теореме Поста обязательно есть среди функций Σ. Выражаем через неё все возможные функции одной переменной. Функцию g_4, возможно, будем использовать позже для получения тех элементарных функций, которые не смогли выразить через остальные функции системы.

Так как $f_1 \notin M$, $\quad f_1(000) = 1 > f_1(111) = 0$, то функцию $\overline{x}$ удобно получить из функции f_1 на крайних наборах таблицы истинности (случай а):

$$\begin{cases} \widetilde{\alpha} = (000) \\ \widetilde{\beta} = (111) \end{cases}$$
$$\widetilde{\gamma} = (x, x, x)$$

$$\underline{\varphi_1(x) = f_1(x, x, x) = \overline{x}}, \qquad \text{так как} \quad \begin{matrix} \varphi_1(0) = f_1(000) = 1 \\ \varphi_1(1) = f_1(111) = 0 \end{matrix}$$

2. Функция f_2 принадлежит классам T_0 и T_1, поэтому на наборах (000) и (111) функции одной переменной получить не можем (случай г).

Константы 0 и 1 выразим из несамодвойственной функции f_2 (так как $f_1 \in S$, то лемма S к функции f_1 не применима).

$$\widetilde{f_2} = (0011\;0101).$$

На парах противоположных наборов (001) и (110); (010) и (101) нарушается самодвойственность функции f_2. Выразим константы, используя те наборы, которые содержат больше единиц, заменив "1"на x, "0 на $\overline{x}$:

$$\widetilde{\alpha}_1 = (110) \;\mapsto\; \widetilde{\gamma}_1 = (x, x, \overline{x})$$

$$\underline{\varphi_2(x) = f_2(x, x, \overline{x}) \equiv 0},$$

так как

$$\varphi_2(0) = f_2(00\overline{0}) = f_2(001) = 0$$
$$\varphi_2(1) = f_2(11\overline{1}) = f_2(110) = 0$$

$$\underline{f_2(x,x,f_1(x,x,x)) \equiv 0}.$$

$$\widetilde{\alpha}_2 = (101) \ \mapsto \ \widetilde{\gamma}_2 = (x, \overline{x}, x)$$

$$\underline{\varphi_3(x) = f_2(x, \overline{x}, x) \equiv 1},$$

так как

$$\varphi_3(0) = f_2(0\overline{0}0) = f_2(010) = 1$$
$$\varphi_3(1) = f_2(1\overline{1}1) = f_2(101) = 1$$

$$\underline{f_2(x, f_1(x,x,x), x) \equiv 1}.$$

Замечание 8.4. Мы выбираем наборы, содержащие наименьшее количество нулей, чтобы при выражении 0 и 1 набор $\widetilde{\gamma}$ содержал как можно меньше функций $\overline{x}$.

3. Нелинейные функции $x\&y$ и $x \vee y$ выразим из нелинейной функции f_2 (к функции $f_1 \in L$ лемма L не применима).

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2.$$

Многочлен Жегалкина функции f_2 содержит 2 конъюнкции ранга 2. Возьмем, например, $K = x_1x_3$. Переменные x_1 и x_3, входящие в K, оставим без изменения, переменную x_2 заменим на 0.

Вычислим значение функции f_2 на наборе $\widetilde{\gamma} = (x_1, 0, x_3)$:

$$f_2(x_1, 0, x_3) = 0 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \cdot 0 = x_1x_3$$

Заменим $x_1 \ \leftrightarrow \ x$; $\ x_3 \ \leftrightarrow \ y$; $\qquad \underline{\varphi_4(x,y) = f_2(x,0,y) = xy}$

Подставим формулу для функции 0:

$$\underline{f_2(x, f_2(x,x,f_1(x,x,x)), y) = xy}$$

4. Для получения дизъюнкции применим законы де Моргана $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$, навесив отрицание на обе части полученного тождества $f_2(x_1,0,x_3) = x_1x_3$:

$$\overline{f_2(x_1, 0, x_3)} = \overline{x_1\, x_3}$$

$$\overline{f_2}(x_1, 0, x_3) = \overline{x_1} \vee \overline{x_3}$$

Заменим $\overline{x}_1 \ \leftrightarrow \ x$; $\ \overline{x}_3 \ \leftrightarrow \ y$; $\qquad \underline{\varphi_5(x,y) = \overline{f}_2(\overline{x}, 0, \overline{y}) = x \vee y}$

Подставим функции одной переменной, выраженные через функции системы

$$\overline{f}_2(f_1(x,x,x), f_2(x,x,f_1(x,x,x)), f_1(y,y,y)) = x \vee y$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned}&\underline{f_1(f_2(f_1(x,x,x), f_2(x,x,f_1(x,x,x)), f_1(y,y,y)),}\\ &\qquad\underline{f_2(f_1(x,x,x), f_2(x,x,f_1(x,x,x)), f_1(y,y,y)),}\\ &\qquad\underline{f_2(f_1(x,x,x), f_2(x,x,f_1(x,x,x), f_1(y,y,y))) = x \vee y}\end{aligned}$$

Пример 8.2. Проверить полноту системы $\Sigma_2 = \{f, g\}$, где $\tilde{f} = (1001\ 1001)$, $\tilde{g} = (0110\ 1010)$. В случае полноты системы представить формулами над Σ_2 функции $0, 1, \neg, \&, \vee$.

Решение.

I. Заполним таблицу Поста для системы функций Σ_2.

1. $f(000) = 1 \ \Leftrightarrow \widetilde{f} \notin T_0;$ $\qquad g(000) = 0 \ \Leftrightarrow \widetilde{g} \in T_0;$
   $f(111) = 1 \ \Leftrightarrow \widetilde{f} \in T_1;$ $\qquad g(111) = 0 \ \Leftrightarrow \widetilde{g} \notin T_1.$

   Замечание 8.5. Несмотря на то, что проверять функцию g на принадлежность классу T_0 не обязательно (в соответствующем столбце таблицы уже получен "минус"), первые два столбца таблицы всегда будем заполнять полностью, чтобы использовать замечание 8.3 при выражении функций одной переменной на крайних наборах функции системы.

2. Исследуем самодвойственность функций системы:
$$\widetilde{f} = (1001\ 1001)$$
$$(1001\,|\,1001)$$
$$\overleftarrow{(1001)}$$
$$(\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{0}\,\overline{1})$$
$$(1001) \neq (0110) \ \Leftrightarrow \ \widetilde{f} \notin S.$$

3. Так как $f(000) = 1$, а в векторе значений функции f есть нули, то, согласно выводу 1 из замечания 7.13 на странице 128, функция f не монотонна.

Не будем исследовать принадлежность функции g классам S и M, так как система Σ_2 не содержится целиком в этих классах.

4. Так как вектор значений обеих заданных функций содержит равное количество нулей и единиц, без многочлена Жегалкина определить нелинейную функцию нельзя.

$$f(\widetilde{x}) = x_2 \oplus x_3 \oplus 1 \in L$$
$$g(\widetilde{x}) = x_3 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1x_2 \notin L$$

Представить функции системы в виде многочлена Жегалкина предлагаем читателю самостоятельно.

5. Система целиком не содержится ни в одном из основных замкнутых классов T_0, T_1, S, M и L, и, по теореме Поста, полна.

	T_0	T_1	S	M	L
f	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
g	$+$	$-$	?	?	$-$

Если соответствующий элемент таблицы Поста не заполнялся, ставим знак вопроса.

II. Выразим основные элементарные функции 0, 1, $\overline{x}$, $x\&y$, $x \vee y$ через функции f и $\widetilde{g}$.

1. Начинаем с крайних наборов в таблице истинности, то есть наборов (000) и (111).

   Так как $f(000) = f(111) = 1$, то на этих наборах нарушается самодвойственность (случай б) из замечания 8.3). Заменив в наборе (111) все „1“ на x, получаем константу 1:

   $$\underline{\varphi_1(x) = f(x,x,x) \equiv 1,} \qquad \text{так как} \quad \begin{array}{l} \varphi_1(0) = f(000) = 1 \\ \varphi_1(1) = f(111) = 1 \end{array}.$$

2. Так как $g(000) = g(111) = 0$, функция g также несамодвойственна (случай в) из замечания 8.3). Аналогично предыдущему случаю, получаем функцию 0:

   $$\underline{\varphi_2(x) = g(x,x,x) \equiv 0,} \qquad \text{так как} \quad \begin{array}{l} \varphi_2(0) = g(000) = 0 \\ \varphi_2(1) = g(111) = 0 \end{array}.$$

3. Функцию $\overline{x}$ получим из немонотонной функции f.
   Для этого найдем любую пару наборов, на которой нарушается монотонность, например, (000) (так как $f(000) = 1$) и любой из наборов $\widetilde{\alpha}$, на котором $f(\widetilde{\alpha}) = 0$. Таких наборов 4;

возьмем первый по порядку следования в таблице истинности, то есть $\widetilde{\beta} = (001)$.

$$(000) \preccurlyeq (001), \quad f(000) = 1 \; > \; f(001) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\alpha} = (000) \\ \widetilde{\beta} = (001) \end{array} \right.$$
$$\widetilde{\gamma} = (0, 0, x)$$

$\underline{\varphi_3(x) = f(0,0,x) = \overline{x}}$, так как $\begin{array}{l} \varphi_3(0) = f(000) = 1 \\ \varphi_3(1) = f(001) = 0 \end{array}$

$$\underline{f(g(x,x,x), g(x,x,x), x) = \overline{x}}$$

4. Нелинейные функции $x\&y$ и $x \vee y$ выразим через нелинейную функцию g (к функции f лемма L не применима).

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_3 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2.$$

Многочлен Жегалкина функции g содержит единственную конъюнкцию $K = x_1 x_2$. Оставляем переменные x_1 и x_2 без изменения, вместо x_3 подставим 0.
Вычислим значение функции g на наборе $\widetilde{\gamma} = (x_1, x_2, 0)$:

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, 0) &= 0 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 = \\ &= x_1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus (1 \oplus x_1) x_2 = \overline{x}_1 \oplus 1 \oplus \overline{x}_1 x_2 = \overline{x}_1 (1 \oplus x_2) \oplus 1 = \\ &= \overline{x}_1 \, \overline{x}_2 \oplus 1 = \overline{\overline{x}_1 \, \overline{x}_2} = x_1 \vee x_2 \end{aligned}$$

Заменим $x_1 \; \leftrightarrow \; x; \;\; x_2 \; \leftrightarrow \; y;$ $\qquad \underline{\varphi_4(x,y) = g(x,y,0) = x \vee y}$

$$\underline{g(x, y, g(x,x,x)) = x \vee y}$$

5. Функцию "конъюнкция"можно получить, применяя законы де Моргана и навешивая отрицание на обе части полученного тождества $g(x_1, x_2, 0) = x_1 \vee x_2$:

$$\overline{g(x_1, x_2, 0)} = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \, \overline{x_2}$$

Заменяем $\overline{x}_1 \; \leftrightarrow \; x; \;\; \overline{x}_2 \; \leftrightarrow \; y;$ $\qquad \underline{\varphi_5(x,y) = \overline{g}(\overline{x}, \overline{y}, 0) = x \, y}$

Получаем формулу для "конъюнкции":

$$
\begin{aligned}
\overline{g}(\overline{x},\overline{y},0) &= f(0,0,g(\overline{x},\overline{y},0)) = \\
&= f(g(x,x,x),g(x,x,x),g(\overline{x},\overline{y},0)) = \\
&= \underline{f}\,\underline{(g(x,x,x),g(x,x,x),}\,\underline{g}\,\underline{(f(g(x,x,x),g(x,x,x),x)},\\
&\qquad \underline{f(g(y,y,y),g(y,y,y),y),g(x,x,x)))}\,\underline{=x\,y}.
\end{aligned}
$$

Пример 8.3. Проверить полноту системы $\Sigma_3 = \{f\}$, где

$$\tilde{f} = (1100\;1000).$$

Представить формулами над Σ_3 функции $0, 1, \neg, \&, \vee$.

Решение.

I. Исследуем систему функций Σ_3 на полноту.

1. $f(000) = 1 \Leftrightarrow \widetilde{f} \notin T_0$; $\quad f(111) = 0 \Leftrightarrow \widetilde{f} \notin T_1$;
2. $$\widetilde{f} = (1100\;1000)$$
   $$(1100\,|\,1000)$$
   $$(\overleftarrow{1000})$$
   $$(\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{0}\,\overline{0})$$
   $$(1100) \neq (0111) \;\Leftrightarrow\; \widetilde{f} \notin S.$$
3. Так как $f(000) = 1$, а в векторе значений функции f есть нули, то, согласно выводу 1 из замечания 7.13 на странице 128, функция f немонотонна.
4. Так как $|N_f| = 3 \neq \frac{1}{2}2^3 = 4$, то, согласно следствию 7.9.1 к необходимому признаку линейности булевой функции (теорема 7.9), $f \notin L$.
5. Таблица Поста:

	T_0	T_1	S	M	L
f	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

Так как в каждом столбце таблицы есть хотя бы один „минус“, то система функций не содержится целиком ни в одном из основных замкнутых классов T_0, T_1, S, M и L, и, согласно критерию Поста, полна.

II. Выразим функции 0, 1, $\neg$, &, $\vee$ через функцию f.

1. Так как $f(000) = 1 > f(111) = 0$, на паре наборов (000) и (111) нарушается монотоннность.

$$\begin{cases} \widetilde{\alpha} = (000) \\ \widetilde{\beta} = (111) \end{cases}$$
$$\widetilde{\gamma} = (x, x, x)$$

$$\underline{\varphi_1(x) = f(x, x, x) = \overline{x}}.$$

2. Получение констант.

$$\widetilde{f} = (1100\ 1000).$$

На паре противоположных наборов (010) и (101) значение функции f одинаково и равно 0. На этой паре можно получить функцию 0. Возьмем набор (101), так как он содержит больше единиц. Единицы в наборе (101) заменяем на x; нули - на функцию "отрицание". Получим набор $\widetilde{\gamma} = (x, \overline{x}, x)$.

$$\underline{\varphi_2(x) = f(x, \overline{x}, x) \equiv 0};$$

$$\underline{f(x, f(x, x, x), x) \equiv 0}.$$

3. Поскольку пар противоположных наборов, на которых значение функции f равно 1, нет, для выражения константы 1 воспользуемся тождеством $\overline{0} = 1$:

$$f(x, \overline{x}, x) \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{f}(x, \overline{x}, x) \equiv \overline{0} \equiv 1$$

$$\underline{\varphi_3(x) = \overline{f}(x, \overline{x}, x) \equiv 1}.$$

$$\overline{f}(x, f(x, x, x), x) \equiv 1$$

$$\underline{f(f(x, f(x, x, x), x), f(x, f(x, x, x), x), f(x, f(x, x, x), x)) \equiv 1}$$

- формула для выражения функции 1 через функцию f (заметим, что функции 0 и $\overline{x}$ уже выражены через f)

4. $$f(x_1, x_2, x_3) = 1 \oplus x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2x_3.$$

Возьмем кратчайшую конъюнкцию $K = x_1x_3$. Оставляем переменные x_1 и x_3 без изменения, вместо x_2 подставим 0. Вычислим значение функции f на наборе $\widetilde{\gamma} = (x_1, 0, x_3)$:

$$f(x_1, 0, x_3) = 1 \oplus 0 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \cdot 0 \cdot x_3 = 1 \oplus x_1x_3 = \overline{x_1x_3} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_3$$

Заменим $\overline{x}_1 \leftrightarrow x$; $\overline{x}_3 \leftrightarrow y$; $\qquad \underline{\varphi_4(x,y) = f(\overline{x}, 0, \overline{y}) = x \vee y}$

$$f(\overline{x}, f(x,\overline{x},x), \overline{y}) =$$
$$= \underline{f(f(x,x,x), f(x, f(x,x,x), x), f(y,y,y)) = x \vee y}$$

- формула для выражения функции "дизъюнкция" через функцию f

5. Навесив отрицание на обе части полученного тождества $f(x_1, 0, x_3) = x_1 \vee x_3$ и применив законы де Моргана, получим:
$$\overline{f(x_1, 0, x_3)} = \overline{x_1 \vee x_3} = \overline{x_1}\,\overline{x_3}$$
Заменяем $x_1 \leftrightarrow x$; $x_3 \leftrightarrow y$; $\qquad \underline{\varphi_5(x,y) = \overline{f}(x, 0, y) = x\,y}$
$$\overline{f}(x, f(x, f(x,x,x), x), y) = x\,y$$

$$\underline{f(f(x, f(x, f(x,x,x), x), y), f(x, f(x, f(x,x,x), x), y),}$$
$$\underline{f(x, f(x, f(x,x,x), x), y)) = x\,y}$$

- формула для выражения функции "конъюнкция" через функцию f.

8.3 Задачи для самостоятельного решения

1. Проверить полноту системы функций $\Sigma = \{f_1, f_2\}$. В случае полноты системы представить формулами над Σ функции $0, 1, \neg, \&, \vee$.

1. $\widetilde{f_1} = (0001\ 0111)$, $\quad \widetilde{f_2} = (1001\ 0110)$;
2. $\widetilde{f_1} = (1001\ 0111)$, $\quad \widetilde{f_2} = (1100\ 1001)$;
3. $\widetilde{f_1} = (0111\ 0100)$, $\quad \widetilde{f_2} = (1000\ 1011)$;
4. $\widetilde{f_1} = (0000\ 0011\ 0101\ 1111)$, $\quad \widetilde{f_2} = (0000\ 0001\ 0111\ 0111)$;
5. $\widetilde{f_1} = (0100\ 0111\ 0100\ 1101)$, $\quad \widetilde{f_2} = (1110\ 0101\ 0101\ 1000)$;

6. $\widetilde{f_1} = (1101\,0001\,0111\,0100)$, $\widetilde{f_2} = (0000\,0010\,1011\,1111)$;

7. $\widetilde{f_1} = (0100\,0100\,1101\,1101)$, $\widetilde{f_2} = (1101\,1011\,0010\,0100)$;

8. $\widetilde{f_1} = (0111\,1100\,1100\,0001)$, $\widetilde{f_2} = (1101\,1001\,0110\,0100)$.

2. Доказать полноту системы Σ, состоящую из функции f. Представить формулами над Σ функции $0, 1, -, \&, \vee$.

1. $\widetilde{f} = (1000\,1010)$;
2. $\widetilde{f} = (1101\,1010)$;
3. $\widetilde{f} = (1100\,1110)$;
4. $\widetilde{f} = (1000\,1110\,0011\,0110)$;
5. $\widetilde{f} = (1100\,1001\,0001\,1110)$;
6. $\widetilde{f} = (1111\,1110\,1010\,1010)$;
7. $\widetilde{f} = (1000\,0000\,0111\,0000)$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. Неполная система;
2. полная система;
3. полная система;
4. неполная система;
5. полная система;
6. неполная система;
7. неполная система;
8. неполная система.

Глава 9

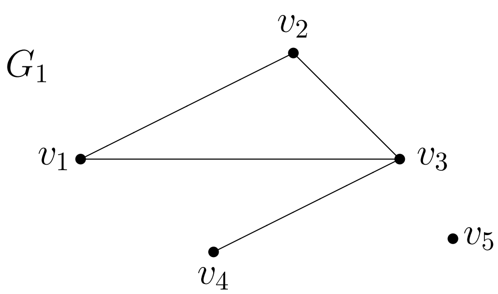
Графы

9.1 Основные определения теории графов

Определение 9.1. ***Графом*** называется упорядоченная пара множеств $G =< V, E >$, где V - непустое конечное множество, элементы которого называются ***вершинами*** графа. E - конечное множество пар элементов множества V (не обязательно различных); элементы множества E называются ***ребрами*** графа.

Графы удобно представлять рисунками, в которых вершины изображаются точками, а ребра - отрезками, соединяющими соответствующие вершины.

Пример 9.1. Граф $G_1 =< V_1, E_1 >$, где $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$, $E = \{ \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\} \}$ можно изобразить следующим образом:



Рассмотрим ребро $l_{ij} = \{v_i, v_j\}$ графа $G =< V, E >$.

Определение 9.2. Вершины v_i и v_j, соединенные ребром, называются ***смежными***.

Ребро $l_{ij} = \{v_i, v_j\}$ называют ***инцидентным*** к вершинам v_i и v_j, вершины v_i и v_j - инцидентными к ребру l_{ij}.

Говорят, что ребро l_{ij} ***соединяет*** вершины v_i и v_j; v_i и v_j называют ***концами*** ребра l_{ij}.

Пример 9.2. В графе $G_1 =< V_1,\, E_1 >$ из примера 9.1 вершины v_1 и v_2 являются смежными; v_1 и v_3, v_2 и v_3, v_3 и v_4 - также пары смежных вершин. При этом вершины v_1 и v_4 смежными не являются. Вершина v_5 не смежна ни с одной вершиной из G_1.

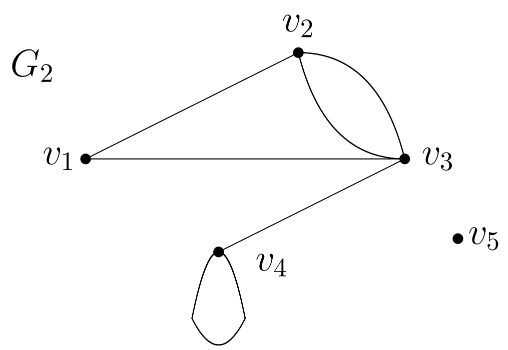
Определение 9.3. Ребро, соединяющее некоторую вершину саму с собой, называется ***петлей.***

Различные ребра $l_{ij_{(k)}} = \{v_i, v_j\}$ и $l_{ij_{(s)}} = \{v_i, v_j\}$ $(k \neq s)$, инцидентные одной и той же паре вершин v_i и v_j, называются ***кратными.***

Пример 9.3. В графе $G_2 =< V_2,\, E_2 >$, где $V = \{\, v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4,\, v_5 \,\}$,

$$E = \{\, \{v_1,\, v_2\},\, \{v_1,\, v_3\},\, \{v_2,\, v_3\},\, \{v_2,\, v_3\},\, \{v_3,\, v_4\},\, \{v_4,\, v_4\} \,\}$$

ребро $\{v_4,\, v_4\}$ - петля; ребра, соединяющие вершины v_2 и v_3, - кратные.



Замечание 9.1. Если граф содержит кратные ребра, более удобным способом задания графа является указание кратности ребер в фигурных скобках после перечисления концов ребра. Например, граф G_2 из примера 9.3 удобнее задать следующим образом:

$$G_2 =< V_2,\, E_2 >, \;\; V = \{\, v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4,\, v_5 \,\},$$

$$E = \{\, \{v_1,\, v_2,\, 1\},\, \{v_1,\, v_3,\, 1\},\, \{v_2,\, v_3, 2\,\},\, \{v_3,\, v_4,\, 1\},\, \{v_4,\, v_4,\, 1\} \,\}.$$

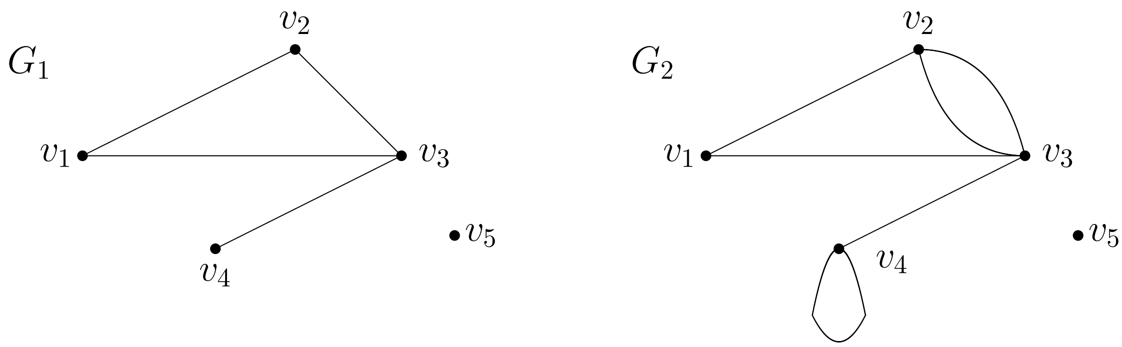
Определение 9.4. Два различных ребра называются ***смежными,*** если они имеют по крайней мере одну общую вершину.

Замечание 9.2. Все кратные ребра в графе являются смежными.

Пример 9.4. Ребра $\{v_1, v_2\}$ и $\{v_1, v_3\}$ из предыдущх примеров смежные, так как имеют общую вершину v_1. Ребра $\{v_1, v_3\}$ и $\{v_3, v_4\}$ также смежны (общая вершина v_3). Ребра $\{v_1, v_2\}$ и $\{v_3, v_4\}$ не имеют общих вершин и смежными не являются.

Определение 9.5. Граф без петель и кратных ребер называется ***простым.***

Пример 9.5.



G_1 - простой граф. Граф G_2 простым не является.

Определение 9.6. Граф $G =< V, E >$, множество E ребер которого является *неупорядоченными* парами вершин, называется ***неориентированным*** графом.

Для неориентированного графа $\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\}$.

Пример 9.6. Графы G_1 и G_2 из предыдущих примеров - неориентированные.

Определение 9.7. Граф $G = < V,\, E >$, множество E ребер которого является *упорядоченными* парами вершин, называется ***ориентированным*** графом.

Ребра ориентированного графа обычно называются ***дугами***.

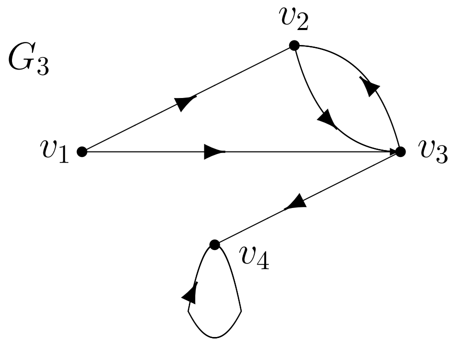
Для ориентированного графа $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$.

При графическом изображении направление дуги ориентированного графа обычно указывают стрелками.

Определение 9.8. Первая по порядку вершина, инцидентная ребру ориентированного графа, называется его ***началом,*** вторая - ***концом.***

Говорят, что ребро ориентированного графа ***выходит*** из начала и ***входит*** в конец ребра.

Пример 9.7.

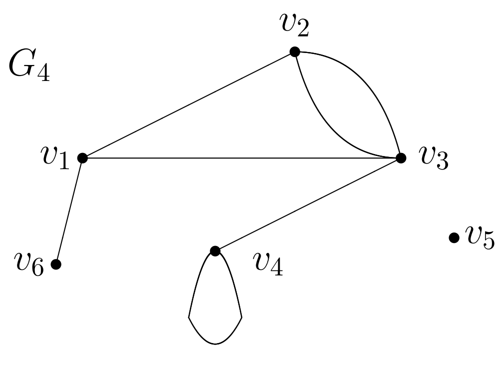


Граф G_3 - ориентированный граф. Вершина v_1 является началом ребра $\{v_1, v_2\}$, вершина v_2 - его концом.

Определение 9.9. ***Степенью (валентностью)*** вершины v графа называется число инцидентных ей ребер. При этом петля учитывается дважды.

Обычно степень вершины v обозначается $deg(v)$.

Пример 9.8.



$deg(v_1) = 3$
$deg(v_2) = 3$
$deg(v_3) = 4$
$deg(v_4) = 3$
$deg(v_5) = 0$
$deg(v_6) = 1$

Определение 9.10. Вершина v графа называется ***изолированной,*** если $deg(v) = 0$.

Пример 9.9. Вершина v_5 графа G_4 из предыдущего примера является изолированной.

Определение 9.11. Вершина v называется ***висячей,*** если $deg(v) = 1$.

Пример 9.10. Вершина v_6 графа G_4 из примера 9.8 является висячей.

Теорема 9.1 (Лемма о рукопожатиях)**.** *Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу ребер:*

$$\sum_{v_i \in V} deg(v_i) = 2|E|.$$

Доказательство. Так как каждое ребро графа соединяет 2 вершины (не обязательно различные), степень каждой вершины увеличивается на 1 за счет каждого ребра. Таким образом, в сумму степеней всех вершин каждое ребро вносит 2 единицы, поэтому сумма в 2 раза превышает число ребер. □

Следствие 9.1.1. *Сумма степеней вершин графа всегда четное число.*

Теорема 9.2. *В любом графе число вершин нечетной степени четно.*

Доказательство. Докажем теорему от противного.

Пусть утверждение теоремы неверно, тогда имеется нечетное количество вершин, степени которых нечетны.

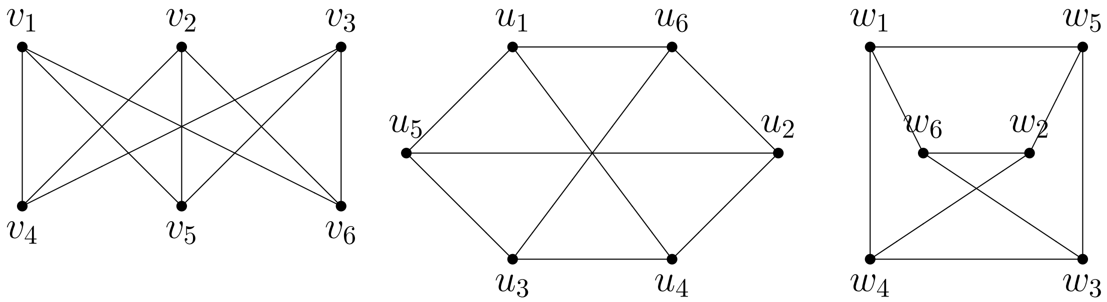
По следствию к предыдущей теореме, сумма степеней вершин с четными степенями четна. Сумма степеней всех вершин графа равна сумме степеней вершин с нечетными степенями плюс сумма степеней вершин с четными степенями. Так как сумма нечетного числа и четного всегда нечетное число, то сумма степеней всех вершин графа - нечетное число, что противоречит следствию 9.1.1 к теореме 9.1.

Таким образом, теорема верна. □

Определение 9.12. Графы $G_1 =< V_1,\, E_1 >$ и $G_2 =< V_2,\, E_2 >$ называются ***изоморфными***, если существует такое взаимнооднозначное отображение $\varphi :\ V_1 \to V_2$, при котором для любых двух вершин первого графа $v_i,\, v_j\ \in V_1$ число соединяющих их ребер равно числу ребер, соединяющих соответствующие им вершины второго графа $\varphi(v_i)$ и $\varphi(v_j)$.

Пример 9.11. Графы G_1, G_2, G_3 изоморфны.

Выполняется отображение $v_i \leftrightarrow u_i \leftrightarrow w_i$.



G_1 G_2 G_3

9.2 Способы задания графов

В предыдущем пункте уже рассмотрены 2 способа задания графов:

1). Перечисление элементов множеств вершин и ребер $G =< V,\, E >$;

2). Графический.

При рассмотрении первого способа становится очевидным, что для графа, не содержащего изолированных вершин, задание множества вершин V является избыточным. Отсюда следует еще один способ задания графа:

3). Список ребер графа.

Каждый элемент этого списка соответствует ребру; в нем заданы номера вершин, инцидентных данному ребру.

Для *неориентированного* графа порядок вершин в каждом элементе произволен, ребра задаются в фигурных скобках.

Для *ориентированного* графа первым в упорядоченной паре стоит вершина, являющаяся началом ребра, а вторым - конец ребра. Дуги перечисляются в круглых скобках.

При изображении графов, заданных списком ребер, сначала определяют множество вершин. Графы, задаваемые списком ребер, при изображении различаются в зависимости от расположения вершин на рисунке. При этом все изображенные по одному списку графы являются изоморфными.

Чаще всего вершины на рисунке располагают по кругу и соединяют соответствующими ребрами из списка.

Для удобства изображения граф можно нарисовать так, чтобы количество пересекающихся ребер в нем было минимальным.

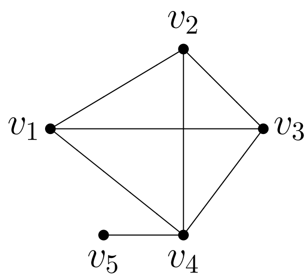
Пример 9.12.

а)

$$G_1 = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \\ \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}\}$$

- неориентированный граф. Его изображение:

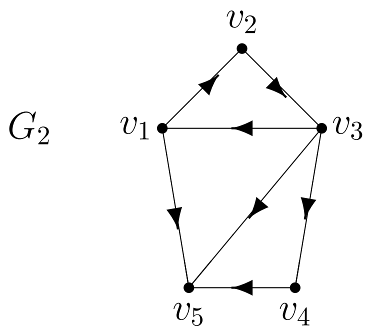
G_1



б) Граф

$$G_2 = \{(v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_2, v_3), \{v_3, v_4\}, \\ \{v_3, v_5\}, (v_3, v_1), \{v_4, v_5\}\}$$

- ориентированный:



4). Матрица инцидентности.

Пусть $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ - множество вершин графа G;
$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ - множество его ребер.

Тогда граф можно задать матрицей $A_{m\times n} = \{a_{ij}\}$, называемой ***матрицей инцидентности.*** $A_{m\times n}$ имеет m строк и n столбцов; столбцы соответствуют вершинам графа, строки - ребрам.

Элементы матрицы $A_{m\times n} = \{a_{ij}\}$ инцидентности *неориентированного* графа G равны

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } e_i \text{ инцидентно вершине } v_j; \\ 2, & \text{если ребро } e_i \text{ - петля,} v_j \text{ - инцидентная ей вершина ;} \\ 0, & \text{в остальных случаях .} \end{cases}$$

В матрице $A_{m\times n} = \{a_{ij}\}$ инцидентности *ориентированного* графа G

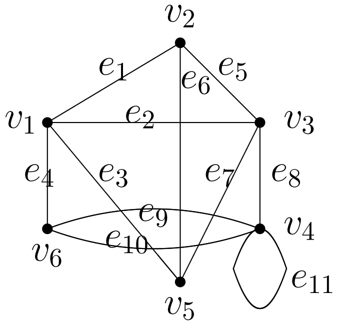
$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если вершина } v_j \text{ - начало ребра } e_i; \\ 1, & \text{если вершина } v_j \text{ - конец ребра } e_i; \\ 2, & \text{если ребро } e_i \text{ - петля,} v_j \text{ - инцидентная ей вершина ;} \\ 0, & \text{в остальных случаях .} \end{cases}$$

Пример 9.13.

а) $G_1 = \{V_1, E_1\}$, где $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,

$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}\}.$$

G_1



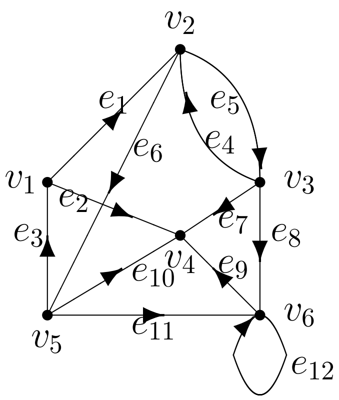
$A_{11\times 6} =$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
e_1	1	1	0	0	0	0
e_2	1	0	1	0	0	0
e_3	1	0	0	0	1	0
e_4	1	0	0	0	0	1
e_5	0	1	1	0	0	0
e_6	0	1	0	0	1	0
e_7	0	0	1	0	1	0
e_8	0	0	1	1	0	0
e_9	0	0	0	1	0	1
e_{10}	0	0	0	1	0	1
e_{11}	0	0	0	2	0	0

б) $G_2 = \{V_2, E_2\}$, где $V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}.$$

G_2



$A_{12\times 6} =$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
e_1	-1	1	0	0	0	0
e_2	-1	0	0	1	0	0
e_3	1	0	0	0	-1	0
e_4	0	1	-1	0	0	0
e_5	0	-1	1	0	0	0
e_6	0	-1	0	0	1	0
e_7	0	0	-1	1	0	0
e_8	0	0	-1	0	0	1
e_9	0	0	0	1	0	-1
e_{10}	0	0	0	1	-1	0
e_{11}	0	0	0	0	-1	1
e_{12}	0	0	0	0	0	2

Свойство матрицы инцидентности неориентированного графа:

- Сумма элементов любого столбца равна степени соответствующей вершины, то есть

$$deg(v_j) = \sum_i a_{ij}$$

.

5). Матрица смежности.

Определение 9.13. ***Матрицей смежности*** неориентированного графа $G =< V, E >$ называется матрица $A_{n\times n} = (a_{ij})$, где a_{ij} - число ребер, соединяющих вершины i и j; n - количество вершин в графе.

Пример 9.14.

Для графа G_1 из предыдущего примера матрица смежности равна

$$A_{6\times 6} \quad = \quad \begin{array}{c|cccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ v_5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_6 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

`Свойства матрицы смежности неориентированного графа:`

- Все элементы матрицы - неотрицательные числа.
- Матрица является симметрической, то есть $A^T = A$.
- Сумма элементов i-той строки (столбца) равна степени соответствующей вершины :

$$\sum_j a_{ij} = deg(v_i)$$

$$\sum_i a_{ij} = deg(v_j)$$

Матрицы инцидентности и смежности задают единственный с точностью до изоморфизма граф.

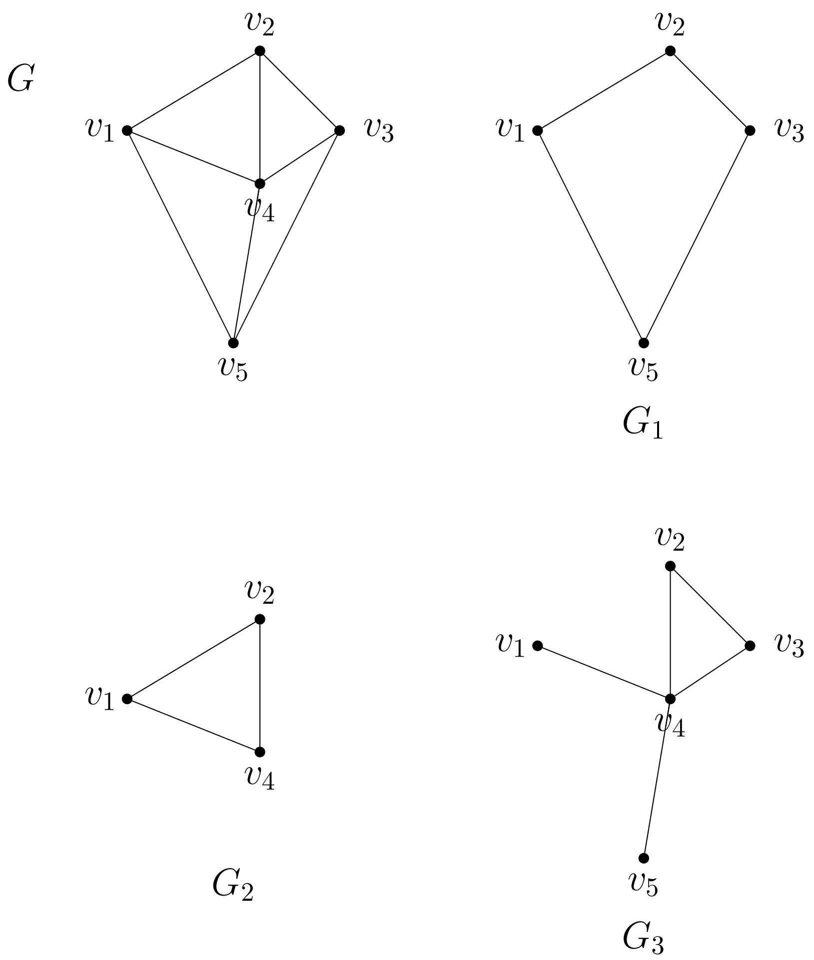
9.3 Графы специального вида

В этом разделе мы будем рассматривать только *простые* графы (то есть графы без кратных ребер и петель).

Определение 9.14. ***Граф*** *$G_1 = < V_1, E_1 >$ называется подграфом* графа $G = < V, E >$ (обозначается $G_1 \preccurlyeq G$), если $V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$.

Каждая вершина подграфа G_1 является вершиной исходного графа G, каждое ребро G_1 - ребро G.

Пример 9.15. Графы G_1, G_2 и G_3 являются подграфами графа G.



Определение 9.15. Пусть задан *неориентированный* граф $G = < V, E >$, $V = \{ v_1, v_2, \dots, v_k \}$, $E = \{ e_1, e_2, \dots, e_l \}$.

Маршрутом из вершины v_i в вершину v_j называется конечная последовательность ребер $\{v_i, v_{i_1}\}$, $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}$, $\dots$, $\{v_{i_{s-1}}, v_{i_s}\}$, $\{v_{i_s}, v_j\}$. Количество ребер в маршруте называется его ***длиной***.

Вершину v_i называют ***начальной вершиной*** маршрута, v_j - его ***конечной вершиной***.

Определение 9.16. Пусть задан *ориентированный* граф

$$G = < V, E >, \ V = \{ v_1, v_2, \dots, v_k \}, \ E = \{ e_1, e_2, \dots, e_l \}.$$

Путем из вершины v_i в вершину v_j называется конечная последовательность ребер (v_i, v_{i_1}), (v_{i_1}, v_{i_2}), $\dots$, $(v_{i_{s-1}}, v_{i_s})$, (v_{i_s}, v_j). Количество ребер в пути называется его ***длиной***.

Вершину v_i называют ***начальной вершиной*** пути, v_j - его ***конечной вершиной***.

Путь или маршрут часто указывают, перечисляя его вершины:

$$v_i \to v_{i_1} \to v_{i_2} \to \dots \to v_{i_{s-1}} \to v_{i_s} \to v_j.$$

Каждые 2 последовательных ребра маршрута $\{v_{i_{k-1}}, v_{i_k}\}$ и $\{v_{i_k}, v_{i_{k+1}}\}$ имеют общую вершину v_{i_k} и являются смежными.

Пример 9.16. Последовательности ребер

а) $$\{v_1, v_5\};$$

б) $$\{v_1, v_4\}, \{v_4, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5\};$$

в) $$\{v_1, v_4\}, \{v_4, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}$$

являются маршрутами из v_1 в v_5 в графе G из примера 9.15.
v_1 - начальная вершина маршрута, v_5 - его конечная вершина.

Определение 9.17. ***Тривиальным*** называется маршрут длины 0.

Определение 9.18. Маршрут называется ***цепью,*** если все его ребра различны; ***простой цепью*** - если все его вершины различны, за исключением, быть может, начальной и конечной.

Если начальная и конечная вершины цепи совпадают, цепь называют ***замкнутой.***

Циклом в графе называют замкнутую цепь, содержащую по крайней мере одно ребро; ***простым циклом*** - цикл, в котором все вершины, за исключением начальной и конечной, различны.

Пример 9.17. Маршруты из п. а), б), в) предыдущего примера - цепи, причем а) и б) - простые цепи.

г) $\{v_1, v_4\}$, $\{v_4, v_2\}$, $\{v_2, v_1\}$, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_4, v_5\}$ - пример маршрута, не являющегося цепью.

д) Последовательность ребер $\{v_1, v_4\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_5, v_1\}$ является простым циклом.

Теорема 9.3. *Пусть $G = < V, E >$ - граф. Если существует маршрут из вершины v_i в вершину v_j, тогда существует и простая соединяющая их цепь.*

Доказательство. Пусть маршрут из v_i в v_j не является простой цепью. Тогда существует по крайней мере одна вершина v_m, встречающаяся в нем не менее двух раз, и маршрут имеет вид

$$v_i \to v_{i_1} \to \ldots \to v_m \to v_{m+1} \to \ldots \to v_m \to \ldots \to v_j.$$

Удалив из маршрута последовательность ребер $v_{m+1} \to \ldots \to v_m$, снова получим маршрут из v_i в v_j.

Если при этом он не будет простой цепью, процедуру можно повторить. Так как число ребер в конечном маршруте конечно, процесс удаления ребер конечен.

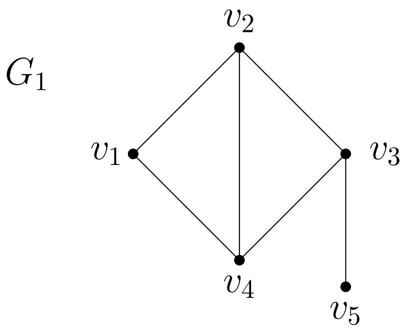
В результате получим простую цепь из v_i в v_j. □

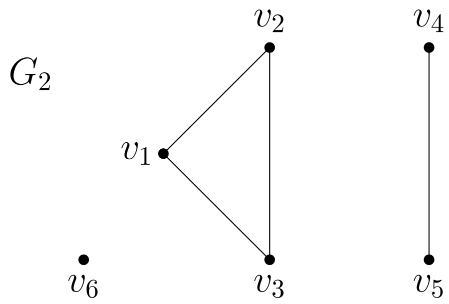
Определение 9.19.

Граф G называется ***связным,*** если имеется маршрут между любыми его двумя различными вершинами.

Пример 9.18. а) G_1 - связный граф.

б) Граф G_2 - не является связным, так как не существует маршрута, например, из v_2 в v_4, из v_1 в v_6 и так далее.





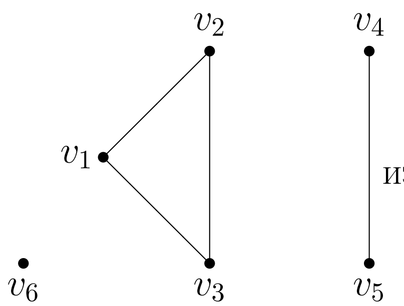
Теорема 9.4. *Граф G является связным тогда и только тогда, когда между любыми двумя его вершинами существует простая цепь.*

Доказательство. непосредственно следует из теоремы 9.3 и определения 9.19 связного графа. □

Определение 9.20. Подграф G_1 графа G называется ***компонентой (компонентой связности),*** если G_1 - максимальный связный подграф графа G.

Пример 9.19.

Граф G_2

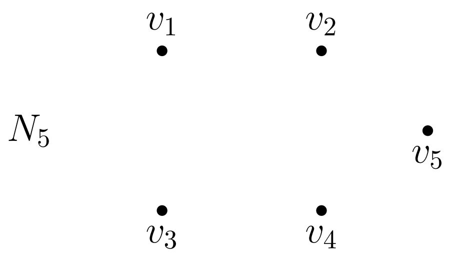


из предыдущего примера

имеет три компоненты связности.

Определение 9.21. ***Пустым (вполне несвязным)*** называется граф, в котором нет ребер.
Пустой граф с n вершинами обычно обозначается N_n.

Пример 9.20.



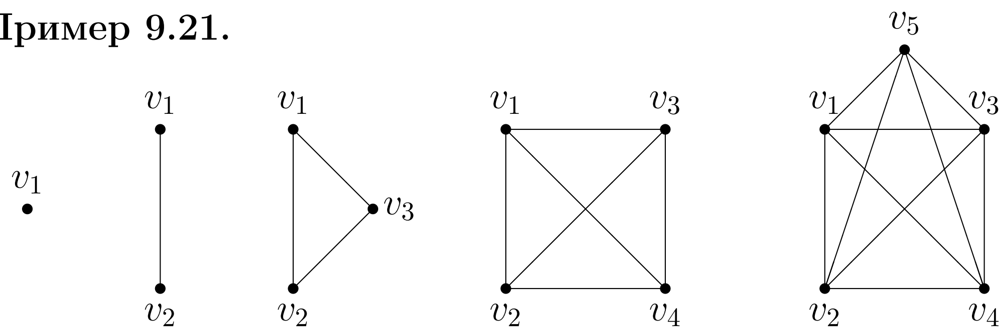
Замечание 9.3. У пустого графа все вершины изолированы.

Определение 9.22. ***Полным*** называется граф, любые две вершины которого смежны.
Обозначение полного графа с n вершинами K_n.

`Свойство полного графа с` n `вершинами` K_n`:`

- Число ребер в графе K_n равно $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Пример 9.21.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

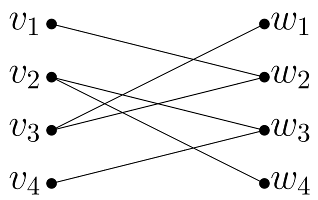
Определение 9.23. ***Двудольным*** называется граф, множество вершин которого можно разбить на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 (на две ***доли***) и при этом каждое ребро графа соединяет какую-либо вершину из V_1 с какой-либо вершиной из V_2, но никакие две вершины из одного множества не являются смежными.

Заметим, что вершины двудольного графа можно "раскрасить" (каждой вершине приписать некоторый цвет) в два цвета так, что вершины из одного подмножества (доли) будут окрашены в один цвет, а каждое ребро будет иметь концы разного цвета.

Определение 9.24. ***Полным двудольным графом*** называется двудольный граф, в котором каждая вершина из V_1 смежна с каждой вершиной из V_2.
Полный двудольный граф, у которого $|V_1| = n$, $|V_2| = m$ (n и m - количество вершин в соответствующей доле), обозначается через $K_{n,m}$.

Очевидно, что в графе $K_{n,m}$ количество ребер равно $n \cdot m$.

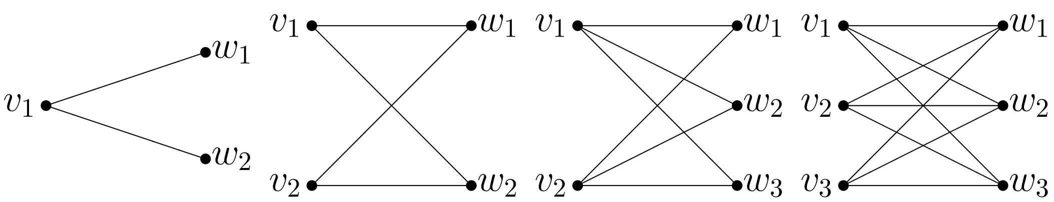
Пример 9.22.



G_1

G_1 - двудольный граф, не являющийся полным.
$V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$; $W_1 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$

Пример 9.23.
$K_{1,2}$, $K_{2,2}$, $K_{2,3}$ и $K_{3,3}$ - полные двудольные графы.



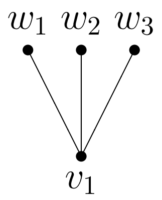
$K_{1,2}$ $K_{2,2}$ $K_{2,3}$ $K_{3,3}$

Теорема 9.5 (Д.Кёнинг). *Граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нем отсутствуют циклы нечетной длины.*

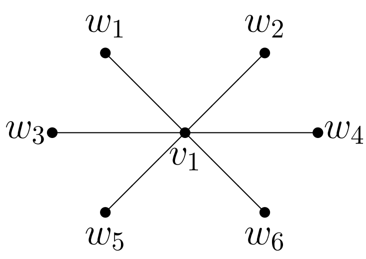
Определение 9.25. ***Звёздным*** называют граф $K_{1,n}$.

Пример 9.24.

$K_{1,3}$ и $K_{1,6}$ - звёздные графы.



$K_{1,3}$



$K_{1,6}$

Очевидно, что у звёздного графа $K_{1,n}$ n висячих вершин $(deg(v_i) = 1)$ и одна вершина степени n.

Глава 10

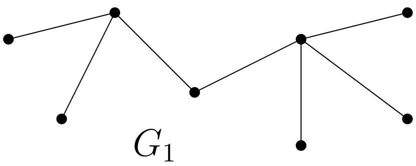
Деревья

10.1 Определение и свойства деревьев

Определение 10.1. ***Дерево* -** это связный граф без циклов.
***Лес* -** граф, компонентами которого являются деревья.

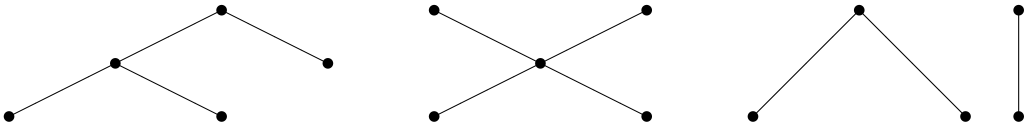
Пример 10.1.

а) Граф G_1 - дерево



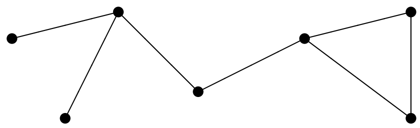
G_1

б) G_2 - лес, состоящий из 4 компонентов (деревьев)



G_2

в) Граф G_3 не является деревом (граф содержит цикл из трех вершин, так называемый ***"треугольник"***).



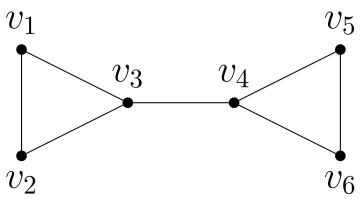
G_3

Понятие *дерева* широко используется во многих областях математики и информатики. Например, как инструмент при вычислениях в теории множеств и теории вероятностей , как удобный способ хранения данных, способ сортировки или поиска данных.

Лес и *дерево* обладают многими важными свойствами.

Определение 10.2. Ребро графа, удаление которого увеличивает количество компонент связности графа, называется ***мостом.***

Пример 10.2.



Ребро $\{v_3, v_4\}$ - мост.

Лемма. *Ребро в графе является мостом тогда, и только тогда, когда оно не входит ни в один цикл.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть некоторое ребро e_i является мостом. Докажем, что не существует цикла, содержащего данное ребро.

Предположим, что это не так, то есть существует цикл, включающий в себя ребро e_i. Удалив ребро e_i, заменим его на последовательность ребер, образующих цикл вместе с данным ребром. Любые две вершины, входящие в компоненту связности, которой принадлежит e_i, остаются связными, число компонент связности не увеличивается, что противоречит определению моста.

Достаточность. Пусть некоторое ребро e_i не входит ни в один цикл. Допустим, что при удалении данного ребра его концы остаются связными. Это говорит о том, что существует маршрут, соединяющий оба конца. Объединим этот маршрут и ребро e_i. Получили цикл, что противоречит условию леммы.

□

Теорема 10.1. *Граф является лесом тогда, и только тогда, когда каждое ребро графа - мост.*

Доказательство. По определению, лес - граф без циклов. Значит, ни одно ребро не входит ни в какой цикл, то есть все ребра - мосты. □

Теорема 10.2. *Граф G является деревом тогда и только тогда, когда любые две его вершины соединены ровно одной простой цепью.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть G - дерево. Докажем, что любые его две вершины v_i и v_j соединены ровно одной простой цепью.

В силу связности дерева существует хотя бы один маршрут из v_i в v_j. Предположим, что таких путей по меньшей мере два. Объединив маршруты, получаем цикл - противоречие с определением дерева.

Достаточность. Докажем, что, если в графе G любые две вершины v_i и v_j соединены ровно одной простой цепью, то G - дерево.

Так как любые две вершины графа соединены цепью, то, в силу теоремы 9.4, граф связен.

Если бы в графе был цикл, то любые две вершины этого цикла соединялись по крайней мере двумя простыми цепями. Значит, G не содержит циклов и связен. По определению G - дерево.

□

Теорема 10.3. *В каждом дереве число вершин на единицу больше числа ребер.*

Доказательство. Пусть G - дерево с n вершинами.

Согласно теореме 10.1 каждое ребро дерева является мостом. Удаление каждого моста, согласно определению 10.2, увеличивает количество компонент связности на 1.

Так как дерево - связный граф, то исходный граф G имеет одну компоненту связности. Удалив любое ребро, получаем 2 компоненты связности. Удалив 2 моста, имеем 3 компоненты связности. В общем случае, удалив i ребер, получаем $i+1$ компоненту связности.

И так далее, удалив все мосты, получаем n компонент связности - изолированных вершин. Значит, процедуру удаления применяли к $n-1$ мосту. Таким образом, в исходном графе G было $n-1$ ребро. □

Остальные `свойства деревьев` сформулируем в следующей теореме, которая дается без доказательства.

Теорема 10.4. *Для графа G с n вершинами следующие утверждения эквивалентны:*

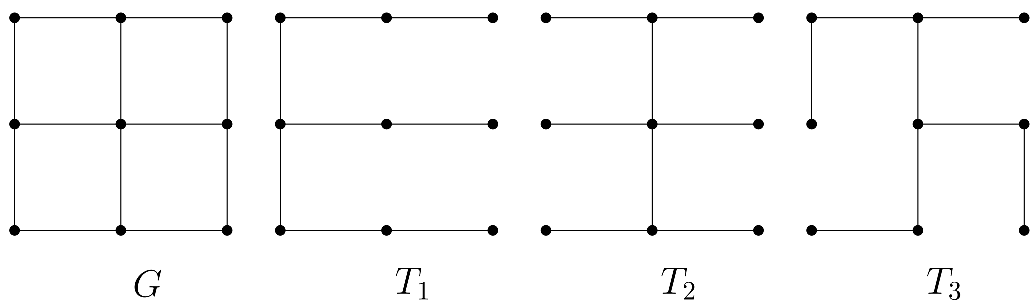
1. *G - дерево;*
2. *G не содержит циклов и имеет $n-1$ ребро;*
3. *G связен и имеет $n-1$ ребро;*
4. *G связен и каждое его ребро является мостом;*
5. *G не содержит циклов, но добавление любого ребра приводит к образованию ровно одного цикла.*

Следствие 10.4.1. *В дереве, содержащем не менее двух вершин, по крайней мере две вершины являются висячими.*

10.2 Остовные деревья

Определение 10.3. ***Остовом (остовным деревом)*** графа G называется подграф T, являющийся деревом и содержащий все вершины графа G.

Пример 10.3.



Деревья T_1, T_2 и T_3 - остовы графа G.

Теорема 10.5. *У каждого связного графа G существует подграф T, который является остовным деревом.*

Доказательство. Пусть граф G содержит цикл. Если ребро $\{v_i, v_j\}$ входит в цикл, то существует по крайней мере два маршрута из v_i в v_j. Удалим ребро $\{v_i, v_j\}$, маршрут из v_i в v_j все равно существует. Если, после удаления ребра, граф еще содержит цикл, удалим ребро $\{v_k, v_s\}$, входящее в цикл. Будем удалять ребра, пока все циклы не будут удалены. Поскольку количество ребер в графе конечно, процесс удаления также конечен.

В итоге получим связный граф без циклов, то есть дерево. □

Определение 10.4. Граф называется ***взвешенным,*** если каждому его ребру e поставлено в соответствие неотрицательное число $\lambda(e)$ - ***вес ребра.***
Весом графа $G =< V, E >$ называют сумму весов всех его ребер:

$$\lambda(G) = \sum_{e \in E} \lambda(e)$$

Если бы вершины графа обозначали города, то вес ребра мог бы означать расстояние между городами, стоимость проезда и т.п. .

Определение 10.5. ***Минимальным остовом*** графа G называется остов, вес которого меньше или равен весу любого другого остовного дерева графа G.

Рассмотрим задачу.

Имеется n пунктов, которые объединяют в единую телефонную сеть. Для любых двух пунктов v_i и v_j известна стоимость прокладки кабеля l_{ij}. Требуется проложить кабель таким образом, чтобы любые два пункта имели телефонную связь, и при этом суммарная стоимость прокладки кабеля была бы минимальной.

Эту задачу удобно решать с помощью графов. Очевидно, что искомая схема будет соответствовать минимальному остову в полном графе с n вершинами. На языке графов задачу можно сформулировать следующим образом: в данном полном графе найти остов, имеющий наименьший вес.

Существует несколько методов построения минимального остова простого связного взвешенного (не обязательно полного) графа G. Мы рассмотрим два из них - алгоритмы Краскала и Прима.

10.2.1 Алгоритм Краскала построения минимального остова в графе

Идея метода состоит в том, чтобы создавать дерево T, выбирая ребра с наименьшим весом так, чтобы не возникал цикл.

1. Упорядочим ребра в порядке возрастания их весов.
2. Включаем в остов все вершины исходного графа.
3. Включаем в остов T первое ребро из списка.
4. Включаем в T следующие в списке ребра заданного графа, не образующие циклов с уже включенными в остов ребрами.

   Алгоритм заканчивается, когда в остов включено $n-1$ ребро (n - количество вершин в исходном графе).

10.2.2 Алгоритм Прима построения минимального остова в графе

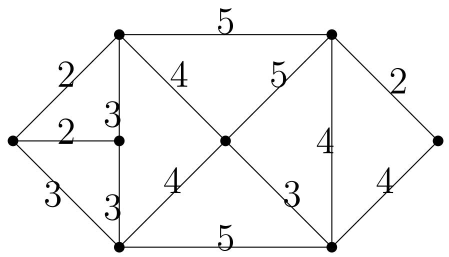
Алгоритм похож на предыдущий; различие состоит в том, что строим последовательность деревьев, увеличивая на каждом шаге количество вершин в дереве.

1. Возьмем произвольную вершину v_1 из множества вершин графа V. Из всех ребер, смежных с v_1, возьмем ребро с наименьшим весом. Сформируем дерево T_1.
2. Пусть дерево T_k уже сформировано. Если имеется вершина, не принадлежащая T_k, выбираем ребро с наименьшим весом, смежное с ребром дерева T_k. Получили дерево T_{k+1}.
3. Предыдущий шаг продолжаем, пока есть вершины графа, не принадлежащие остову (то есть до тех пор, пока граф не станет связным).

Пример 10.4. Построить минимальный остов графа, изображенного на рисунке, используя:

а) алгоритм Краскала;

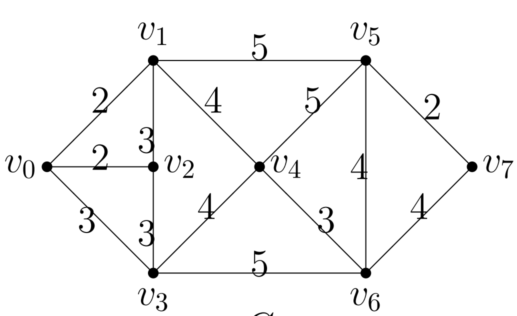
б) алгоритм Прима.



G

Решение.

Сначала для удобства обозначим вершины графа. Порядок нумерации вершин не важен.

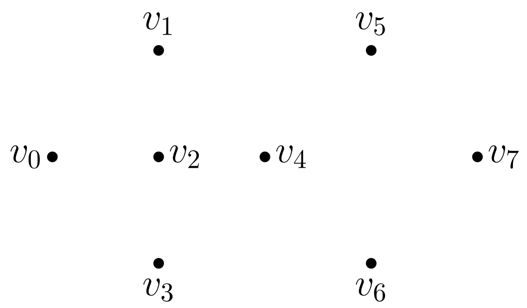


G

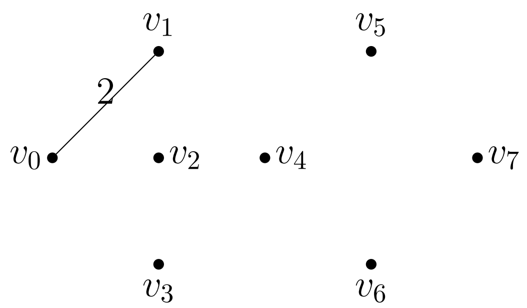
а) Алгоритм Краскала.

1. Выписываем ребра в порядке возрастания их длин:
   Ребра длины 2: $\{v_0, v_1\}$, $\{v_0, v_2\}$, $\{v_5, v_7\}$;
   Ребра длины 3: $\{v_0, v_3\}$, $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\{v_4, v_6\}$;
   Ребра длины 4: $\{v_1, v_4\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_5, v_6\}$, $\{v_6, v_7\}$;
   Ребра длины 5: $\{v_1, v_5\}$, $\{v_3, v_6\}$, $\{v_4, v_5\}$.

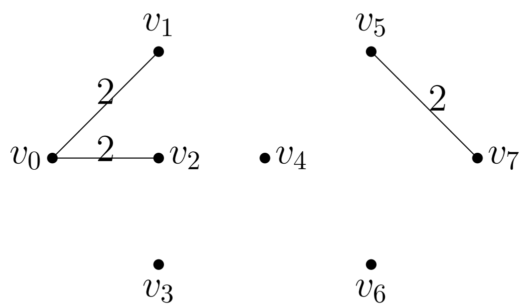
2. Включаем в остов все восемь вершин графа.



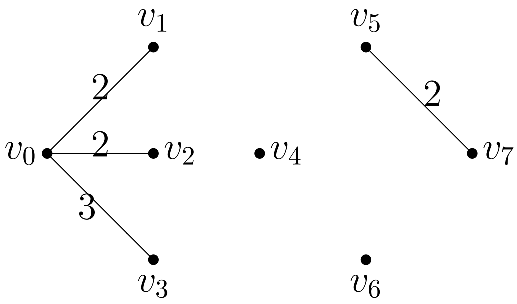
3. Включаем в остов ребро $\{v_0, v_1\}$ - первое ребро из списка.



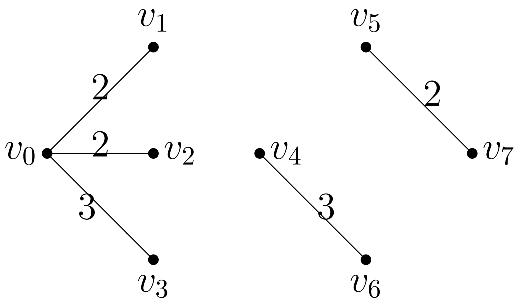
4. Включаем в T ребра $\{v_0, v_2\}$ и $\{v_5, v_7\}$, так как они не образуют цикла с ребром $\{v_0, v_1\}$. Количество ребер в дереве равно 3.



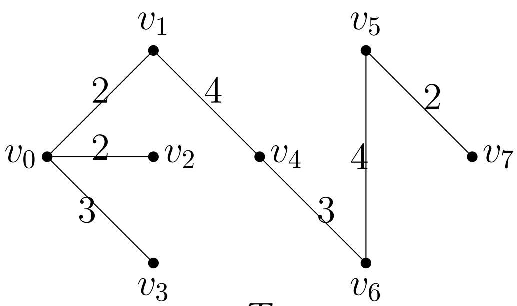
5. Ребро $\{v_0, v_3\}$ длины 3 также включаем в остов. Количество ребер 4.



6. Ребра $\{v_1, v_2\}$ и $\{v_2, v_3\}$ в остов не включаем, так как они образуют циклы с уже включенными в дерево ребрами. Ребро $\{v_4, v_6\}$ не образует цикла с ребрами из T, включаем его в остов. Количество ребер в T равно пяти.



7. Ребро $\{v_1, v_4\}$ длины 3 включаем в остов, а ребро $\{v_3, v_4\}$ - нет (образуется цикл). Ребро $\{v_5, v_6\}$ включаем в остов.



T

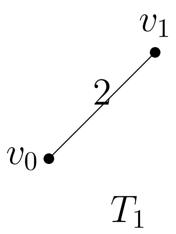
Количество ребер на данном этапе работы алгоритма равно 7, что ровно на единицу меньше, чем количество вершин. Алгоритм заканчивает работу. Вес остова равен

$$\sum_{l} = 3 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 = 20.$$

Замечание 10.1. При другой нумерации вершин мы получили бы другую последовательность ребер, и остов получился бы отличным от построенного. Несмотря на то, что минимальный остов не единственнен для данного графа, вес всех полученных остовов будет одинаков.

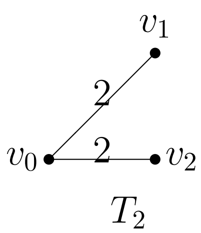
б) Алгоритм Прима.

1.



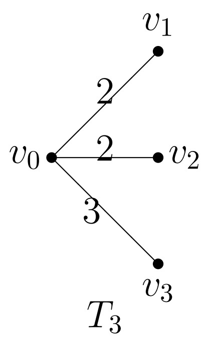
Возьмем вершину v_0 и ребро, инцидентное данной вершине и имеющее наименьший вес. Таких ребер два. Возьмем любое из них, например, $\{v_0, v_1\}$. Получили дерево T_1.

2.

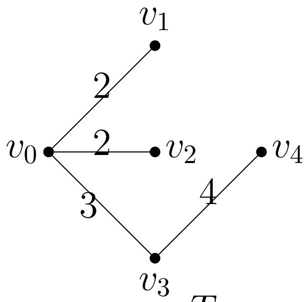


Из ребер, смежных с ребром $\{v_0, v_1\}$, наименьшую длину имеет ребро $\{v_0, v_2\}$. Включив его в остов, получаем дерево T_2.

3.



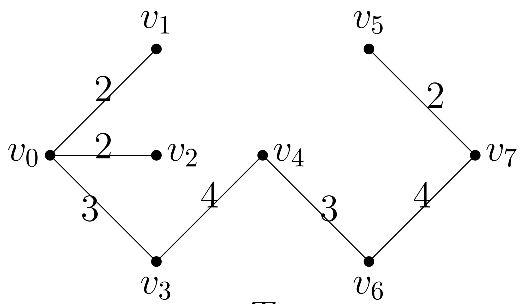
Следующим включаем ребро $\{v_0, v_3\}$. Образовали дерево T_3.

4. 

T_4

Опять два ребра, смежных с T_3, имеют наименьший вес. Это ребра $\{v_1, v_4\}$ и $\{v_3, v_4\}$. Возьмем ребро $\{v_3, v_4\}$.

5. Следующими в остов последовательно включаем ребра $\{v_4, v_6\}$, $\{v_6, v_7\}$ и $\{v_5, v_7\}$.



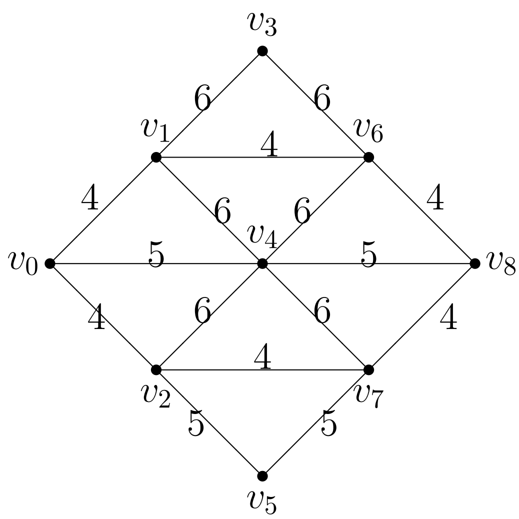
T

6. Все вершины включены в остов, заканчиваем работу алгоритма.

   Вес полученного дерева

$$\sum_{l} = 3 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 = 20.$$

Пример 10.5. Построить минимальный остов графа, изображенного на рисунке.

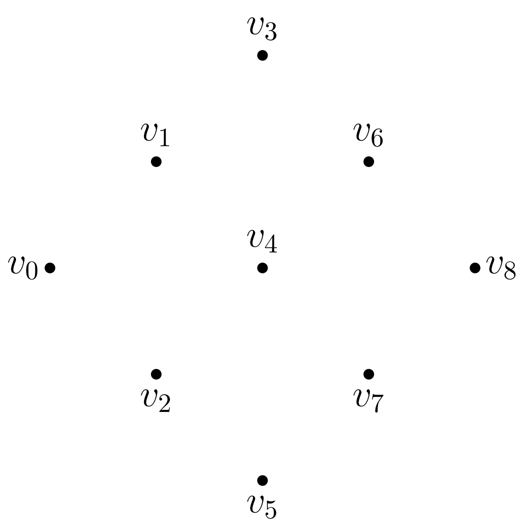


Решение.

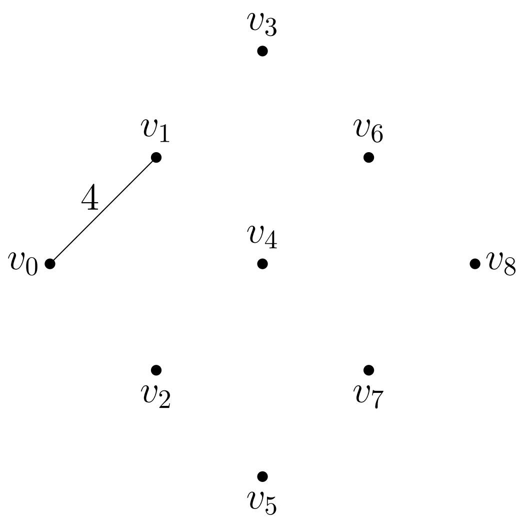
Воспользуемся алгоритмом Краскала.

1. Выписываем ребра в порядке возрастания их длин:
   Ребра длины 4: $\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_7\}, \{v_6, v_8\}, \{v_7, v_8\}$;
   Ребра длины 5: $\{v_0, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_4, v_8\}, \{v_5, v_7\}$;
   Ребра длины 6: $\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_6\}, \{v_4, v_7\}$.

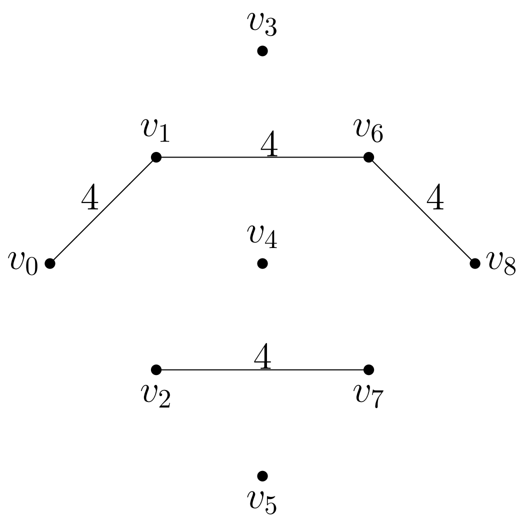
2. Включаем в остов все вершины графа.



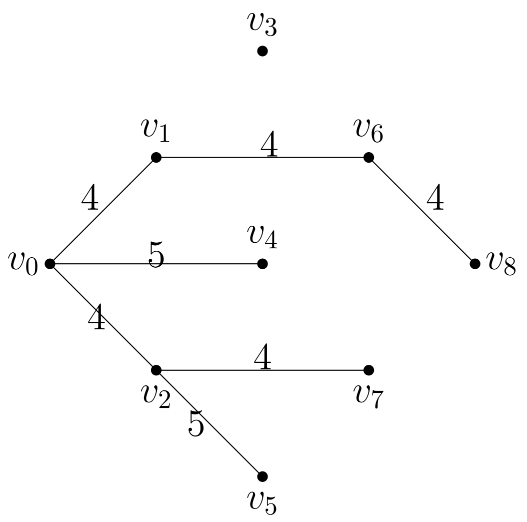
3. Включаем в остов T ребро $\{v_0, v_1\}$ - первое ребро из списка.



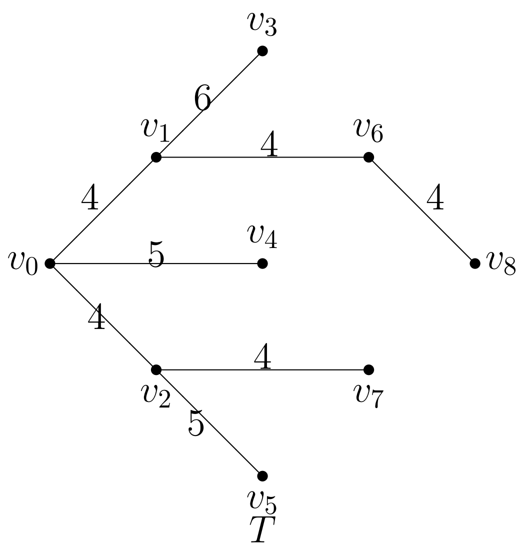
4. Включаем в остов ребра $\{v_0, v_2\}$, $\{v_1, v_6\}$, $\{v_2, v_7\}$ и $\{v_6, v_8\}$, так как они не образуют цикла с ребром $\{v_0, v_1\}$. Ребро $\{v_7, v_8\}$ с весом 4 в остов не включаем. Количество ребер в дереве равно 4.



5. Ребра $\{v_0, v_4\}$ и $\{v_2, v_5\}$длины 5 включаем в остов, а ребра $\{v_5, v_7\}$ и $\{v_4, v_8\}$ - нет (образуются циклы). Количество ребер на данном этапе работы алгоритма равно 7.



6. Переходим к ребрам с весом 6. Ребро $\{v_1, v_3\}$ включаем в остов. Количество ребер в дереве равно 8, что на 1 меньше количества вершин.



T

Минимальный остов построен. Его вес равен

$$\sum_l = 5 \times 4 + 2 \times 5 + 1 \times 6 = 36.$$

10.3 Задачи для самостоятельного решения

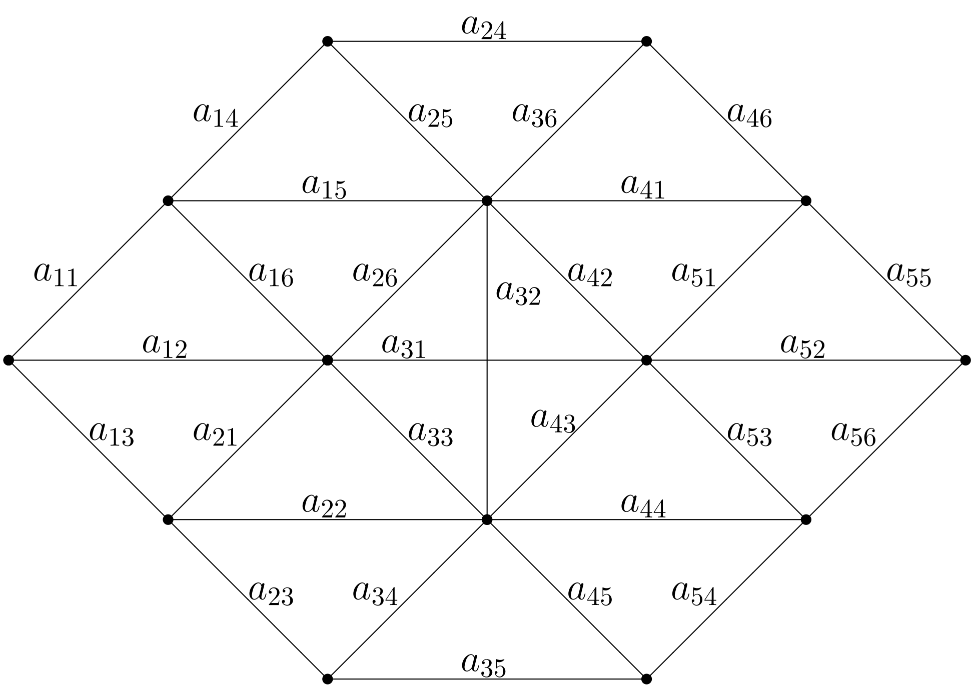
1. Найти минимальный остов графа, заданного списком взвешенных ребер:

1. $(\{v_0, v_1\}, 3)$, $(\{v_0, v_4\}, 3)$, $(\{v_0, v_2\}, 4)$, $(\{v_1, v_3\}, 3)$,$(\{v_1, v_6\}, 4)$, $(\{v_1, v_4\}, 4)$, $(\{v_2, v_4\}, 1)$, $(\{v_2, v_7\}, 1)$, $(\{v_2, v_5\}, 3)$, $(\{v_3, v_6\}, 3)$, $(\{v_4, v_6\}, 2)$, $(\{v_4, v_8\}, 3)$, $(\{v_4, v_7\}, 1)$, $(\{v_5, v_7\}, 1)$, $(\{v_6, v_8\}, 2)$, $(\{v_7, v_8\}, 2)$;

2. $(\{v_0, v_1\}, 4)$, $(\{v_0, v_4\}, 5)$, $(\{v_0, v_2\}, 4)$, $(\{v_1, v_3\}, 3)$, $(\{v_1, v_6\}, 3)$, $(\{v_1, v_4\}, 3)$, $(\{v_2, v_4\}, 4)$, $(\{v_2, v_7\}, 6)$, $(\{v_2, v_5\}, 5)$, $(\{v_3, v_6\}, 4)$, $(\{v_4, v_6\}, 3)$, $(\{v_4, v_8\}, 5)$, $(\{v_4, v_7\}, 6)$, $(\{v_5, v_7\}, 5)$, $(\{v_6, v_8\}, 6)$, $(\{v_7, v_8\}, 5)$;

3. $(\{v_0, v_1\}, 4)$, $(\{v_0, v_4\}, 4)$, $(\{v_0, v_2\}, 4)$, $(\{v_1, v_3\}, 2)$, $(\{v_1, v_6\}, 5)$, $(\{v_1, v_4\}, 2)$, $(\{v_2, v_4\}, 3)$, $(\{v_2, v_7\}, 5)$, $(\{v_2, v_5\}, 3)$, $(\{v_3, v_6\}, 2)$, $(\{v_4, v_6\}, 2)$, $(\{v_4, v_8\}, 5)$, $(\{v_4, v_7\}, 3)$, $(\{v_5, v_7\}, 3)$, $(\{v_6, v_8\}, 5)$, $(\{v_7, v_8\}, 4)$.

2. Найти остов минимальной длины графа G, в котором длины ребер равны соответствующим элементам a_{ij} матрицы A.



1. $A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix};$

2. $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 & 6 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix};$

3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 5 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix};$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1.

1. $\sum_l = 16;$
2. $\sum_l = 32;$
3. $\sum_l = 23;$

2.

1. $\sum_l = 55;$
2. $\sum_l = 43;$
3. $\sum_l = 37;$
4. $\sum_l = 30.$

Глава 11

Алгоритм поиска кратчайшего пути во взвешенном графе.

11.1 Постановка задачи

Даны населенные пункты $A, B, \ldots, S$, связанные сетью автодорог. Известна стоимость проезда между каждыми двумя пунктами N и M, связанными дорогой. Требуется найти такой маршрут из A в S, чтобы стоимость проезда была бы наименьшей.

Данную задачу, как и большинство задач логистики, можно решать с помощью графов.

Рассмотрим простой взвешенный граф G, то есть граф без кратных ребер и петель, каждому ребру которого приписано неотрицательное число - его **вес.** Каждому населенному пункту $A, B, \ldots, S$ соответствует вершина графа $v_0, v_1, \ldots, v_n$. Стоимость проезда - вес (длина) соответствующего ребра. Если автосообщения между пунктами нет, то и соответствующее ребро в графе отсутствует.

На языке графов задача формулируется следующим образом: *Требуется найти маршрут из вершины v_0 в вершину v_n графа G такой, что сумма длин ребер, входящих в этот путь, минимальна.*

Такой путь обычно называют **кратчайшим.**

Кратчайший путь удобно находить с помощью алгоритма Дейкстры. Существует несколько версий данного алгоритма, рассмотрим одну из них.

В процессе изучения алгоритма мы будем использовать символ „∞“. Под „∞“ в этом алгоритме понимают величину, для которой выполнены свойства:

а) $min(n, \infty) = n$, $\forall n \geqslant 0$, то есть все целые числа n меньше „∞“.

б) $min(\infty, \infty) = \infty$

в) $n + \infty = \infty + \infty = \infty$

В процессе работы алгоритма каждой вершине v_i ставим в соответствие метку $\lambda(v_i) = \rho(v_0, v_i)$ - расстояние от вершины v_0 до v_i. Длину ребра $\{v_i, v_j\}$ обозначим через $l(v_i, v_j)$.

11.2 Алгоритм Дейкстры

I Прямой ход - **нахождение длины кратчайшего пути**.

1. Всем вершинам $v_0, v_1, \ldots, v_n$ графа G ставим в соответствие метку $\lambda(v_i) = \infty$, $\forall i = \overline{0, \ldots, n}$.
2. Делаем вершину v_0 *постоянной*, заменив её метку на 0 ($\lambda(v_0) = 0$). Остальные вершины оставляем *временными.*
3. Рассматриваем все смежные с v_0 вершины. Всем вершинам v_{ik}, смежным с v_0, меняем величину метки с $\lambda(v_{ik}) = \infty$ на $\lambda(v_{ik}) = l(v_0, v_{ik})$ - длину (вес) ребра $\{v_0, v_{ik}\}$. Выбираем вершину v_{is}, расстояние до которой от v_0 наименьшее. Делаем вершину v_{is} *постоянной.* Остальные вершины (за исключением v_0) - *временные.*
4. Находим расстояние от вершины v_0 до каждой вершины v_{in}, смежной с v_{is}, вдоль пути, проходящего через вершину v_{is}. Это расстояние равно

   $$\rho(v_0, v_{in}) = l(v_0, v_{is}) + l(v_{is}, v_{in}).$$

   Если найденное расстояние меньше, чем значение метки вершины ($\rho(v_0, v_{in}) < \lambda(v_{in})$), то заменяем величину метки:

   $$\lambda(v_{in}) = \rho(v_0, v_{in}).$$

   Среди всех вершин выбираем вершину с наименьшим значением метки (наименьшим расстоянием до v_0). Данная вершина становится *постоянной.*

5. Пусть вершина v_k, имеющая метку $\lambda(v_k) = \rho(v_0, v_k)$ является *постоянной* на данном этапе алгоритма. Для каждой вершины v_j, смежной с v_k, проверяем метку.
   Если выполнено неравенство $\lambda(v_k)+l(v_k, v_j) < \lambda(v_j)$ (или, что то же самое, $\rho(v_0, v_k) + l(v_k, v_j) < \rho(v_0, v_j)$), то значение метки вершины v_j заменяем на $\lambda(v_k) + l(v_k, v_j)$. Таким образом, величина метки вершины v_j уменьшится.
6. Находим *временную* вершину с наименьшей меткой. Делаем её *постоянной.*
   На каждом шаге алгоритма ровно одна *временная* вершина (с наименьшей величиной метки) переходит из разряда *временных* в разряд *постоянных*, после чего значение её метки уже не меняется.
7. Шаги 5 и 6 продолжаем до тех пор, пока вершина v_n не станет *постоянной.*
8. Если v_n - *постоянная* вершина, то величина приписанной ей метки $\lambda(v_n) = \rho(v_0, v_n)$ - есть длина кратчайшего пути из v_0 в v_n.
   Заметим, что значение меток удобно записывать в таблицу, помечая *постоянную* метку. На графе отмечаем только величины *постоянных* меток.

II Обратный ход - **нахождение кратчайшего пути**.

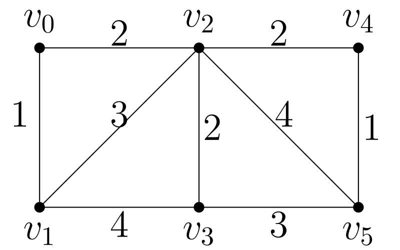
1. Просматривая смежные с v_n вершины, находим ребро $\{v_{js}, v_n\}$, для которого выполнено равенство $l(v_{js}, v_n) = \lambda(v_n) - \lambda(v_{js})$, то есть длина ребра равна разности меток вершин его концов. Вершина v_{js} входит в кратчайший путь: $v_n \to v_{js}$.
2. Пусть вершина v_{jk} входит в кратчайший путь. Изучая смежные с ней ребра, находим ребро $\{v_{jk}, v_{jl}\}$, для которого верно равенство $l(v_{jk}, v_{jl}) = \lambda(v_{jk}) - \lambda(v_{jl})$. Это означает, что вершина v_{jl} также входит в кратчайший путь:
$$v_n \to v_{js} \to \ldots \to v_{jk} \to v_{jl}.$$
3. Продолжаем искать вершины аналогично предыдущему шагу алгоритма, пока не дойдем до вершины v_0.

Искомый кратчайший путь:

$$v_0 \to \ldots \to v_{jl} \to v_{jk} \to \ldots \to v_{js} \to v_n,$$

его длина равна $\lambda(v_n)$.

Пример 11.1. Найти кратчайший путь из вершины v_0 в вершину v_5 в графе, заданном рисунком.



Решение.

I Прямой ход (нахождение длины кратчайшего пути).

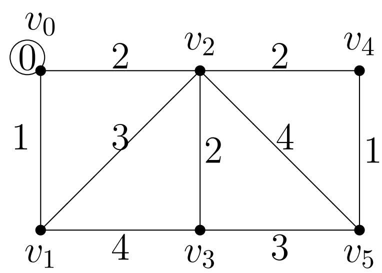
1.

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
∞	∞	∞	∞	∞	∞

Всем вершинам $v_0, v_1, \ldots, v_5$ графа ставим в соответствие метку, равную „∞“.

2. Вершине v_0 приписываем метку 0, метки остальных вершин по-прежнему равны „∞“. Вершина v_0 - *постоянная*, все остальные вершины - *временные*.
Для наглядности *постоянные* вершины помечаем в таблице и на графе.

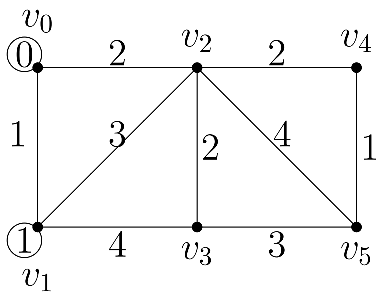
v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞



3. Вершинам v_1 и v_2, смежным с v_0, задаем метки, равные длинам ребер.

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	∞	∞	∞	∞	∞
–	$\boxed{1}$	2	∞	∞	∞

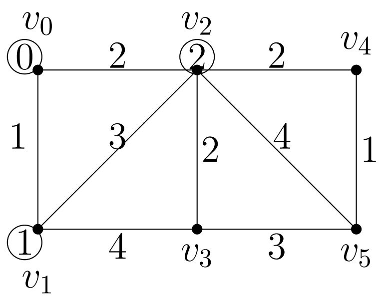
Вершина v_1 имеет наименьшую среди всех вершин метку, равную 1 (вершина v_0 уже не рассматривается), и становится *постоянной.*



4. Проверим метки у вершин v_2 и v_3, смежных с *постоянной* вершиной v_1.
   Так как $\lambda(v_2) = 2$, $\lambda(v_1) + l(v_1, v_2) = 1 + 3 = 4 > 2 = \lambda(v_2)$, то у вершины v_2 метку, равную 2, оставляем без изменений.
   Поскольку $\lambda(v_3) = \infty$, $\lambda(v_1) + l(v_1, v_3) = 1 + 4 = 5 < \infty = \lambda(v_3)$, то величину метки вершины v_3 уменьшаем: $\lambda(v_3) = \lambda(v_1) + l(v_1, v_3) = 1 + 4 = 5$.
   Наименьшую метку среди всех вершин имеет вершина v_2, которая становится *постоянной.*

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	∞	∞	∞	∞	∞
–	1	2	∞	∞	∞
–	–	$\boxed{2}$	5	∞	∞

Вершины v_0 и v_1 ранее получили свои постоянные метки и из дальнейшего рассмотрения исключаются.



5. Исследуем метки вершин v_3, v_4 и v_5, смежных с *постоянной* вершиной v_2. Вершина v_1, несмотря на то, что также смежна с v_2, более не рассматривается.

$$\lambda(v_3) = 5, \lambda(v_2) + l(v_2, v_3) = 2 + 2 = 4 \ < \ 5 = \lambda(v_3),$$

значит, метку уменьшаем:

$$\lambda(v_3) = \lambda(v_2) + l(v_2, v_3) = 2 + 2 = 4;$$

$$\lambda(v_4) = \infty, \lambda(v_2) + l(v_2, v_4) = 2 + 2 = 4 \ < \ \infty = \lambda(v_4).$$

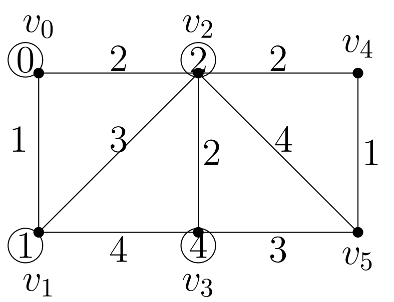
$$\Rightarrow \lambda(v_4) = 4;$$

$$\lambda(v_5) = \infty, \lambda(v_2) + l(v_2, v_5) = 2 + 4 = 6 \ < \ \infty = \lambda(v_5),$$

$$\Rightarrow \lambda(v_5) = 6.$$

В нашей таблице две вершины имеют метку, равную 4. В качестве *постоянной* можно выбрать любую из этих вершин. Выберем вершину, расположенную в таблице левее, то есть вершину v_3.

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	∞	∞	∞	∞	∞
–	1	2	∞	∞	∞
–	–	2	5	∞	∞
–	–	–	$\boxed{4}$	4	6

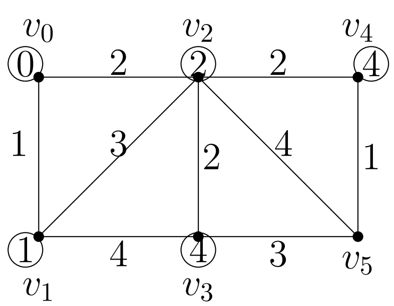


6. Вершина v_5 смежна с v_3 (остальные смежные с v_3 вершины уже постоянны).

$$\lambda(v_5) = 6, \lambda(v_3) + l(v_3, v_5) = 4 + 3 = 7 \ > \ 6 = \lambda(v_5);$$

метка $\lambda(v_5)$ остается без изменений.

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	∞	∞	∞	∞	∞
–	1	2	∞	∞	∞
–	–	2	5	∞	∞
–	–	–	4	4	6
–	–	–	–	$\boxed{4}$	6

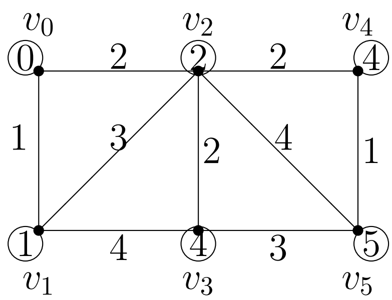


7. $\lambda(v_5) = 6$, $\lambda(v_4) + l(v_4, v_5) = 4 + 1 = 5 \, < \, 6 = \lambda(v_5)$,

$$\Rightarrow \lambda(v_5) = 5.$$

Вершина v_5 стала постоянной, получив метку $\lambda(v_5) = 5$, равную длине кратчайшего пути из v_0 в v_5.

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	∞	∞	∞	∞	∞
–	1	2	∞	∞	∞
–	–	2	5	∞	∞
–	–	–	4	4	6
–	–	–	–	4	6
–	–	–	–	–	$\boxed{5}$



Прямой ход алгоритма завершен.

II Обратный ход (нахождение кратчайшего пути).

1. Вершина v_5 смежна с тремя вершинами v_2, v_3, v_4. Проверим, для какой из вершин выполнено равенство

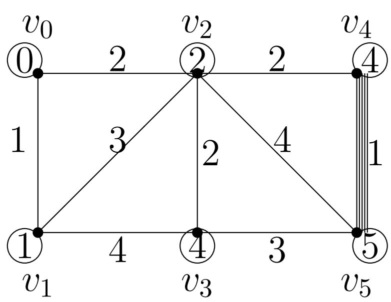
$$\lambda(v_5) - \lambda(v_i) = l(v_5, v_i).$$

v_2: $\lambda(v_5) - \lambda(v_2) = 5 - 2 = 3 \neq 4 = l(v_5, v_2)$;

v_3: $\lambda(v_5) - \lambda(v_3) = 5 - 4 = 1 \neq 3 = l(v_5, v_3)$;

v_4: $\lambda(v_5) - \lambda(v_4) = 5 - 4 = 1 = l(v_5, v_4)$.

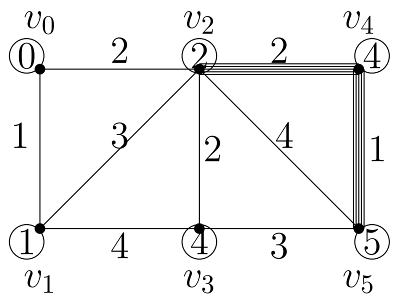
Так как только для вершины v_4 равенство верно, она входит в кратчайший путь: $v_5 \xrightarrow{1} v_4$.



2. Только вершина v_2 смежна с вершиной v_4, для неё разность меток концов ребра равна длине ребра:

$$\lambda(v_4) - \lambda(v_2) = 4 - 2 = 2 = l(v_4, v_2).$$

$$v_5 \xrightarrow{1} v_4 \xrightarrow{2} v_2.$$



3. Вершины v_0, v_1 и v_4 смежны с вершиной v_2.

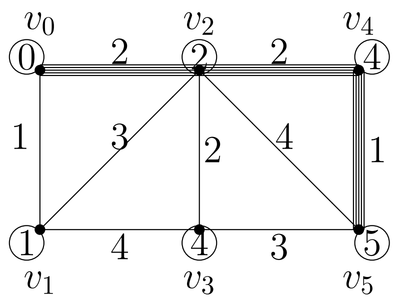
   v_0: $\lambda(v_2) - \lambda(v_0) = 2 - 2 = 0 = l(v_2, v_0);$

   v_1: $\lambda(v_2) - \lambda(v_1) = 2 - 1 = 1 \neq 3 = l(v_2, v_1);$

   v_3: $\lambda(v_2) - \lambda(v_3) = 2 - 4 = -2 \neq 2 = l(v_2, v_3).$

   Вершина v_0 входит в кратчайший путь:

$$v_5 \xrightarrow{1} v_4 \xrightarrow{2} v_2 \xrightarrow{2} v_0.$$

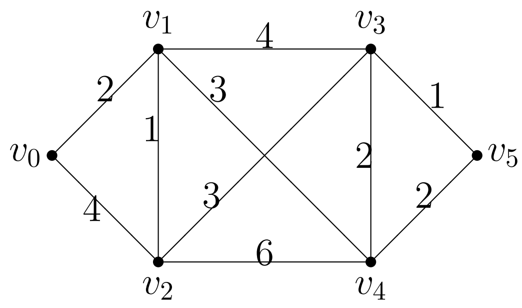


Ответ: Кратчайший путь из вершины v_0 в вершину v_5:

$$v_0 \to v_2 \to v_4 \to v_5,$$

его длина равна 5.

Пример 11.2. Найти кратчайший путь из вершины v_0 в вершину v_5 в графе, заданном рисунком.



Решение.

I Прямой ход (нахождение длины кратчайшего пути).

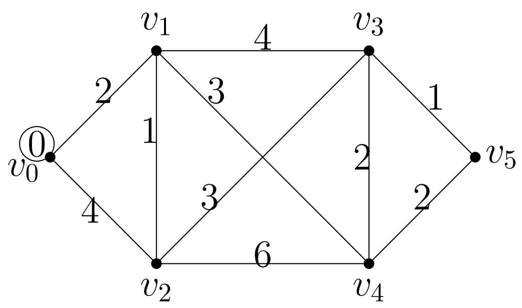
1. Как в предыдущем примере, метки вершин будем перечислять в таблице:

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
∞	∞	∞	∞	∞	∞

Всем вершинам $v_0, v_1, \ldots, v_5$ графа ставим в соответствие метку, равную „∞“.

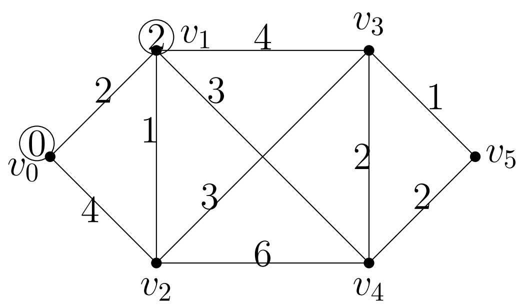
2.

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞



3.

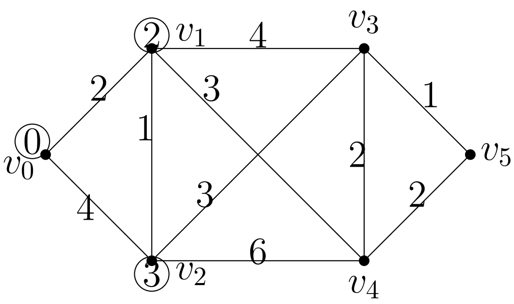
v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	∞	∞	∞	∞	∞
–	$\boxed{2}$	4	∞	∞	∞



4. $$\lambda(v_1) + l(v_1, v_2) = 2 + 1 = 3 \; < \; 4 = \lambda(v_2),$$

$$\Rightarrow \lambda(v_2) = \lambda(v_1) + l(v_1, v_2) = 2 + 1 = 3.$$

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	∞	∞	∞	∞	∞
–	2	4	∞	∞	∞
–	–	$\boxed{3}$	6	5	∞

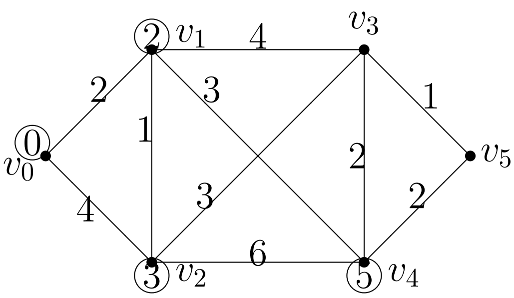


5. $$\lambda(v_2) + l(v_2, v_3) = 3 + 3 = 6 = \lambda(v_3),$$
метку $\lambda(v_3)$ оставляем без изменений;

$$\lambda(v_2) + l(v_2, v_4) = 3 + 6 = 9 \ > \ 5 = \lambda(v_4);$$

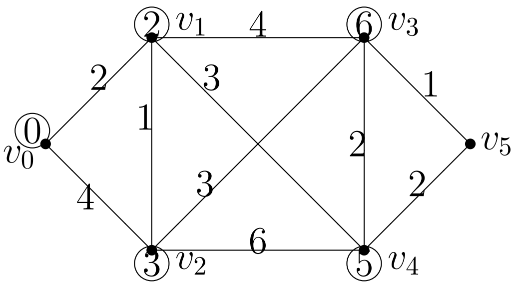
метку $\lambda(v_4)$ оставляем без изменений;

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	∞	∞	∞	∞	∞
–	2	4	∞	∞	∞
–	–	3	6	5	∞
–	–	–	6	$\boxed{5}$	∞



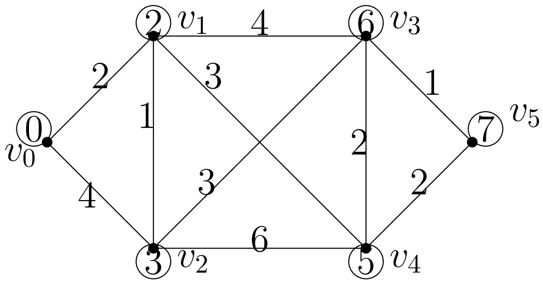
6. $\lambda(v_4) + l(v_4, v_5) = 5 + 2 = 7 \ < \ \infty = \lambda(v_5), \Rightarrow \lambda(v_5) = 7.$

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	∞	∞	∞	∞	∞
–	2	4	∞	∞	∞
–	–	3	6	5	∞
–	–	–	6	5	∞
–	–	–	$\boxed{6}$	–	7



7. $$\lambda(v_3) + l(v_3, v_5) = 6 + 1 = 7 = \lambda(v_5),$$
метку не меняем.
Вершина v_5 стала постоянной, получив метку $\lambda(v_5) = 7$, равную длине кратчайшего пути из v_0 в v_5.

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	∞	∞	∞	∞	∞
–	2	4	∞	∞	∞
–	–	3	6	5	∞
–	–	–	6	5	∞
–	–	–	–	–	$\boxed{7}$



Прямой ход алгоритма завершен.

II Обратный ход (нахождение кратчайшего пути).

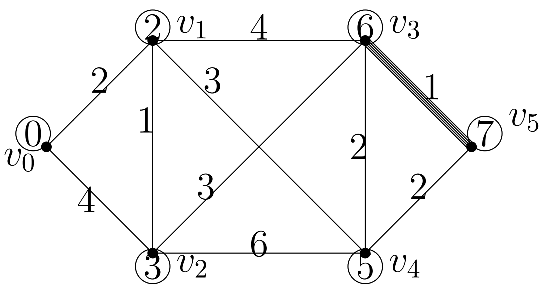
1. Вершина v_5 смежна с двумя вершинами v_3 и v_4. Для обеих вершин равенство $\lambda(v_5) - \lambda(v_i) = l(v_5, v_i)$ верно:

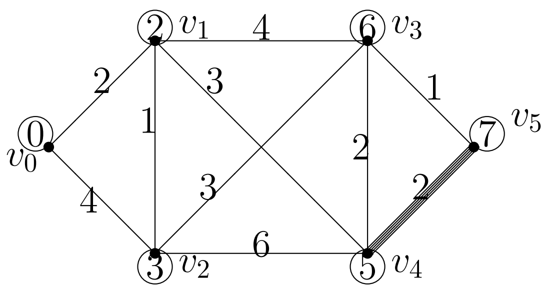
v_3: $\qquad \lambda(v_5) - \lambda(v_3) = 7 - 6 = 1 = l(v_5, v_3);$

v_4: $\qquad \lambda(v_5) - \lambda(v_4) = 7 - 5 = 2 = l(v_5, v_4).$

Значит, имеем два кратчайших пути:

$v_5 \xrightarrow{1} v_3 \qquad\qquad v_5 \xrightarrow{2} v_4$





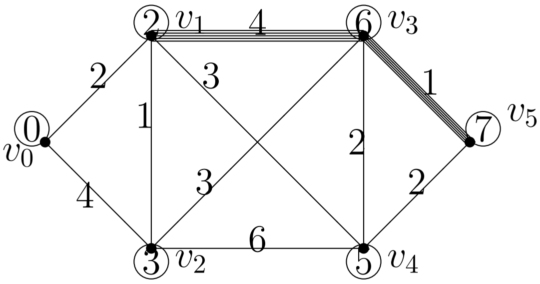
2. Путь 1: вершина v_3 смежна с v_1,v_2,v_4 и v_5. Для двух вершин (v_1 и v_2) разность меток равна длине соединяющего их ребра:

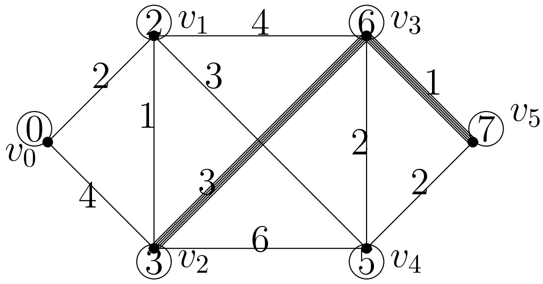
$$\lambda(v_3) - \lambda(v_1) = 6 - 2 = 4 = l(v_3, v_1)4;$$

$$\lambda(v_3) - \lambda(v_2) = 6 - 3 = 3 = l(v_3, v_2).$$

Опять получаем два маршрута:

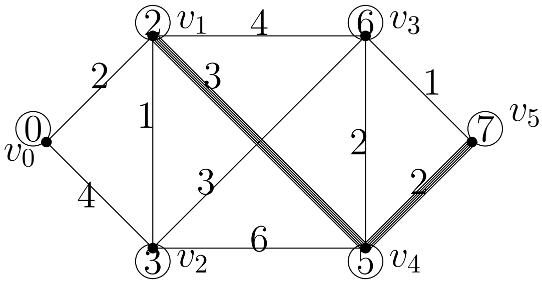
$v_5 \xrightarrow{1} v_3 \xrightarrow{4} v_1$ (путь 1.1) $\qquad$ $v_5 \xrightarrow{1} v_3 \xrightarrow{3} v_2$ (путь 1.2)





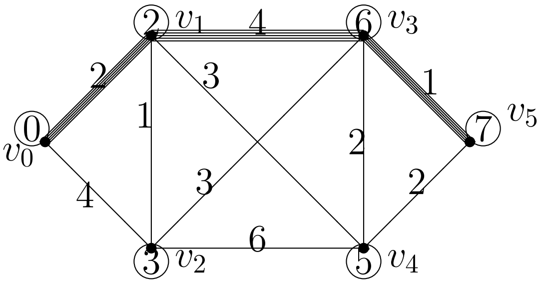
Путь 2: вершина v_4 смежна с вершинами v_1,v_2,v_3 и v_5. Только для вершины v_1 верно равенство: $\lambda(v_4) - \lambda(v_1) = 5 - 2 = 3 = l(v_4, v_1)$.
Путь 2 можно продолжить следующим образом:

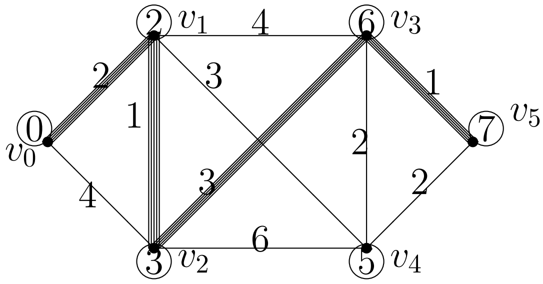
$$v_5 \xrightarrow{2} v_4 \xrightarrow{3} v_1$$



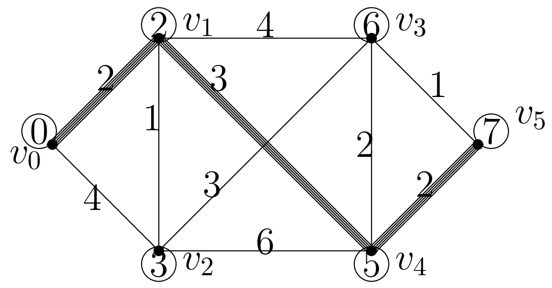
3. Рассмотрим продолжения полученных путей:

$v_5 \xrightarrow{1} v_3 \xrightarrow{4} v_1 \xrightarrow{2} v_0$ (путь 1.1) $\quad$ $v_5 \xrightarrow{1} v_3 \xrightarrow{3} v_2 \xrightarrow{1} v_1 \xrightarrow{2} v_0$ (путь 1.2)





$$v_5 \xrightarrow{2} v_4 \xrightarrow{3} v_1 \xrightarrow{2} v_0 \text{ (путь 2)}$$



Несмотря на то, что мы получили 3 кратчайших пути:

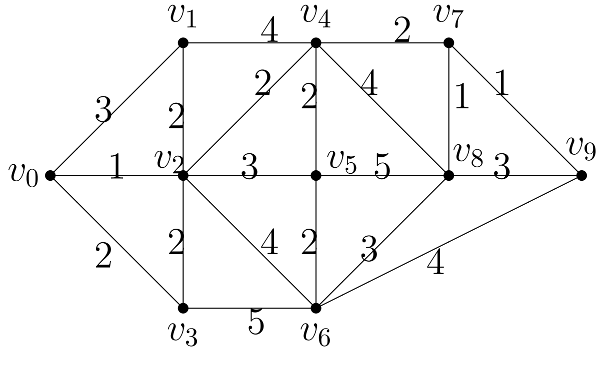
$$v_0 \to v_1 \to v_3 \to v_5,$$

$$v_0 \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_5,$$

$$v_0 \to v_1 \to v_4 \to v_5,$$

все они имеют одинаковую длину 7, то есть все являются кратчайшими.
Заметим, что рассматривать все пути нет необходимости, достаточно выбрать любой из них.

Пример 11.3. Найти кратчайший путь из вершины v_0 в вершину v_9 в графе, заданном рисунком.

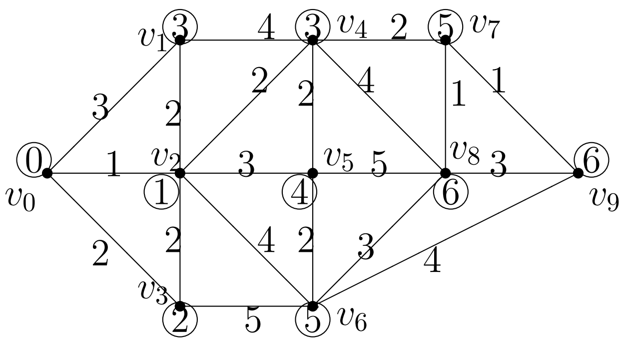


Решение.

Заполним таблицу значений меток всех вершин файла:

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
–	3	$\boxed{1}$	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞
–	3	–	$\boxed{2}$	3	4	5	∞	∞	∞
–	$\boxed{3}$	–	–	3	4	5	∞	∞	∞
–	–	–	–	$\boxed{3}$	4	5	∞	∞	∞
–	–	–	–	–	$\boxed{4}$	5	5	7	∞
–	–	–	–	–	–	$\boxed{5}$	5	7	∞
–	–	–	–	–	–	–	$\boxed{5}$	7	9
–	–	–	–	–	–	–	–	$\boxed{6}$	6
–	–	–	–	–	–	–	–	–	$\boxed{6}$

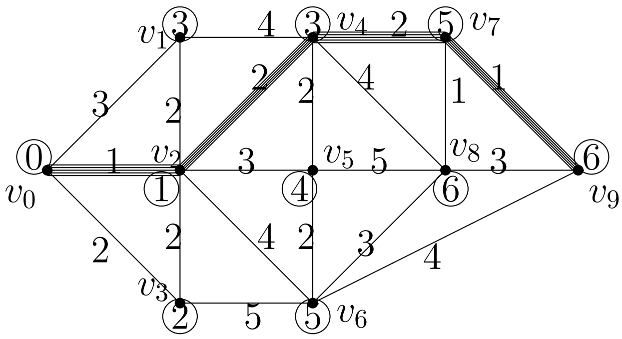
Вершины графа получают следующие метки:



Кратчайший путь равен:

$$v_0 \xrightarrow{1} v_2 \xrightarrow{2} v_4 \xrightarrow{2} v_7 \xrightarrow{1} v_9.$$

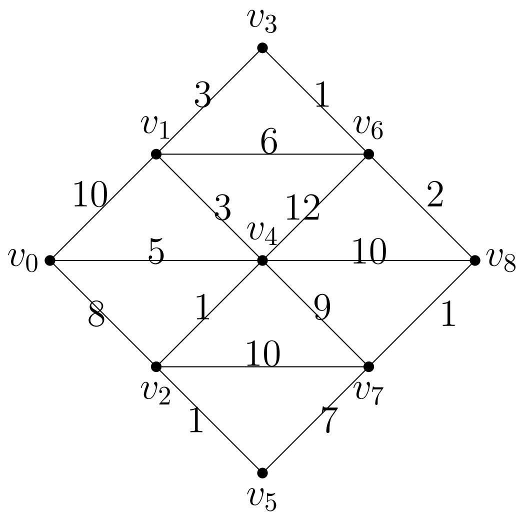
Длина кратчайшего пути равна 9.



Пример 11.4. Найти кратчайший путь из вершины v_0 в вершину v_8 в графе, заданном списком взвешенных ребер:
$\{(\{v_0, v_1\}, 10)$, $(\{v_0, v_4\}, 5)$, $(\{v_0, v_2\}, 8)$, $(\{v_1, v_3\}, 3)$, $(\{v_1, v_6\}, 6)$, $(\{v_1, v_4\}, 3)$, $(\{v_2, v_4\}, 1)$, $(\{v_2, v_7\}, 10)$, $(\{v_2, v_5\}, 1)$, $(\{v_3, v_6\}, 1)$, $(\{v_4, v_6\}, 12)$, $(\{v_4, v_8\}, 10)$, $(\{v_4, v_7\}, 9)$, $(\{v_5, v_7\}, 7)$, $(\{v_6, v_8\}, 2)$, $(\{v_7, v_8\}, 1)\}$.

Решение.

Несмотря на то, что графы принято изображать, располагая вершины по кругу, мы воспользуемся более удобным способом. Очевидно, что в списке смежные ребра указаны рядом. Поэтому целесообразно изобразить граф на рисунке, размещая смежные вершины рядом:

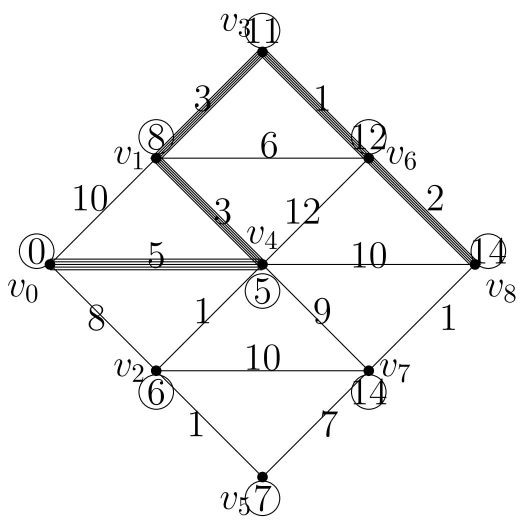


Список значений меток вершин данного графа приведен в таблице:

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
—	10	8	∞	$\boxed{5}$	∞	∞	∞	∞
—	8	$\boxed{6}$	∞	—	∞	17	14	15
—	8	—	∞	—	$\boxed{7}$	17	14	15
—	$\boxed{8}$	—	∞	—	—	17	14	15
—	—	—	$\boxed{11}$ —	—		14	14	15
—	—	—	—	—	—	$\boxed{12}$	14	15
—	—	—	—	—	—	—	$\boxed{14}$	14
—	—	—	—	—	—	—	—	$\boxed{14}$

Длина кратчайшего пути равна 14.
Сам путь найдем, используя обратный ход алгоритма Дейкстры:

$$v_0 \xrightarrow{5} v_4 \xrightarrow{3} v_1 \xrightarrow{3} v_3 \xrightarrow{1} v_6 \xrightarrow{2} v_8.$$



11.3 Задачи для самостоятельного решения

1. Найти кратчайший путь, соединяющий вершины v_0 и v_8 в графе, заданном списком взвешенных ребер.

1. $(\{v_0, v_1\}, 6)$, $(\{v_0, v_4\}, 10)$, $(\{v_0, v_2\}, 14)$, $(\{v_1, v_3\}, 8)$, $(\{v_1, v_6\}, 10)$, $(\{v_1, v_4\}, 2)$, $(\{v_2, v_4\}, 4)$, $(\{v_2, v_7\}, 4)$, $(\{v_2, v_5\}, 4)$, $(\{v_3, v_6\}, 4)$, $(\{v_4, v_6\}, 8)$, $(\{v_4, v_8\}, 12)$, $(\{v_4, v_7\}, 10)$, $(\{v_5, v_7\}, 2)$, $(\{v_6, v_8\}, 4)$, $(\{v_7, v_8\}, 1)$;

2. $(\{v_0, v_1\}, 5)$, $(\{v_0, v_4\}, 22)$, $(\{v_0, v_2\}, 4)$, $(\{v_1, v_3\}, 3)$, $(\{v_1, v_6\}, 6)$, $(\{v_1, v_4\}, 9)$, $(\{v_2, v_4\}, 16)$, $(\{v_2, v_7\}, 15)$, $(\{v_2, v_5\}, 9)$, $(\{v_3, v_6\}, 2)$, $(\{v_4, v_6\}, 3)$, $(\{v_4, v_8\}, 4)$, $(\{v_4, v_7\}, 6)$, $(\{v_5, v_7\}, 7)$, $(\{v_6, v_8\}, 11)$, $(\{v_7, v_8\}, 3)$;

3. $(\{v_0, v_1\}, 2)$, $(\{v_0, v_4\}, 6)$, $(\{v_0, v_2\}, 8)$, $(\{v_1, v_3\}, 8)$, $(\{v_1, v_6\}, 14)$, $(\{v_1, v_4\}, 2)$, $(\{v_2, v_4\}, 2)$, $(\{v_2, v_7\}, 10)$, $(\{v_2, v_5\}, 4)$, $(\{v_3, v_6\}, 5)$, $(\{v_4, v_6\}, 12)$, $(\{v_4, v_8\}, 18)$, $(\{v_4, v_7\}, 12)$, $(\{v_5, v_7\}, 4)$, $(\{v_6, v_8\}, 6)$, $(\{v_7, v_8\}, 6)$.

2. Найти кратчайший путь от вершины v_0 до вершины v_{13} в графе G_1, заданном списком ребер.

1. $(\{v_0,v_1\},3)$, $(\{v_0,v_4\},6)$, $(\{v_0,v_2\},2)$, $(\{v_1,v_3\},2)$, $(\{v_1,v_6\},9)$, $(\{v_1,v_4\},2)$, $(\{v_2,v_4\},4)$, $(\{v_2,v_7\},8)$, $(\{v_2,v_5\},1)$, $(\{v_3,v_8\},5)$, $(\{v_3,v_6\},6)$, $(\{v_4,v_6\},6)$, $(\{v_4,v_9\},8)$, $(\{v_6,v_7\},5)$, $(\{v_4,v_7\},4)$, $(\{v_5,v_7\},7)$, $(\{v_5,v_{10}\},8)$, $(\{v_6,v_8\},2)$, $(\{v_6,v_{11}\},4)$, $(\{v_6,v_9\},3)$, $(\{v_7,v_9\},4)$, $(\{v_7,v_{12}\},5)$, $(\{v_7,v_{10}\},1)$, $(\{v_8,v_{11}\},4)$, $(\{v_9,v_{11}\},1)$, $(\{v_9,v_{13}\},3)$, $(\{v_9,v_{12}\},1)$, $(\{v_{10},v_{12}\},3)$, $(\{v_{11},v_{13}\},2)$, $(\{v_{12},v_{13}\},2)$;

2. $(\{v_0,v_1\},1)$, $(\{v_0,v_4\},2)$, $(\{v_0,v_2\},3)$, $(\{v_1,v_3\},9)$, $(\{v_1,v_6\},8)$, $(\{v_1,v_4\},2)$, $(\{v_2,v_4\},1)$, $(\{v_2,v_7\},5)$, $(\{v_2,v_5\},2)$, $(\{v_3,v_8\},2)$, $(\{v_3,v_6\},1)$, $(\{v_4,v_6\},7)$, $(\{v_4,v_9\},2)$, $(\{v_6,v_7\},2)$, $(\{v_4,v_7\},5)$, $(\{v_5,v_7\},1)$, $(\{v_5,v_{10}\},1)$, $(\{v_6,v_8\},4)$, $(\{v_6,v_{11}\},7)$, $(\{v_6,v_9\},5)$, $(\{v_7,v_9\},3)$, $(\{v_7,v_{12}\},5)$, $(\{v_7,v_{10}\},2)$, $(\{v_8,v_{11}\},3)$, $(\{v_9,v_{11}\},11)$, $(\{v_9,v_{13}\},13)$, $(\{v_9,v_{12}\},7)$, $(\{v_{10},v_{12}\},5)$, $(\{v_{11},v_{13}\},2)$, $(\{v_{12},v_{13}\},6)$;

3. $(\{v_0,v_1\},5)$, $(\{v_0,v_4\},2)$, $(\{v_0,v_2\},3)$, $(\{v_1,v_3\},3)$, $(\{v_1,v_6\},3)$, $(\{v_1,v_4\},2)$, $(\{v_2,v_4\},2)$, $(\{v_2,v_7\},10)$, $(\{v_2,v_5\},1)$, $(\{v_3,v_8\},2)$, $(\{v_3,v_6\},1)$, $(\{v_4,v_6\},6)$, $(\{v_4,v_9\},9)$, $(\{v_6,v_7\},6)$, $(\{v_4,v_7\},11)$, $(\{v_5,v_7\},9)$, $(\{v_5,v_{10}\},5)$, $(\{v_6,v_8\},2)$, $(\{v_6,v_{11}\},1)$, $(\{v_6,v_9\},4)$, $(\{v_7,v_9\},2)$, $(\{v_7,v_{12}\},3)$, $(\{v_7,v_{10}\},4)$, $(\{v_8,v_{11}\},1)$, $(\{v_9,v_{11}\},2)$, $(\{v_9,v_{13}\},9)$, $(\{v_9,v_{12}\},6)$, $(\{v_{10},v_{12}\},7)$, $(\{v_{11},v_{13}\},11)$, $(\{v_{12},v_{13}\},3)$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1.

1. $l_{min}=17$; $v_0{\to}v_1{\to}v_4{\to}v_2{\to}v_7{\to}v_8$;

2. $l_{min}=17$; $v_0{\to}v_1{\to}v_3{\to}v_6{\to}v_4{\to}v_8$;

3. $l_{min}=20$; $v_0{\to}v_1{\to}v_4{\to}v_2{\to}v_5{\to}v_7{\to}v_8$;

2.

1. $l_{min}=15$; $v_0{\to}v_1{\to}v_4{\to}v_7{\to}v_{10}{\to}v_{12}{\to}v_{13}$;

2. $l_{min}=16$; $v_0{\to}v_2{\to}v_5{\to}v_7{\to}v_6{\to}v_3{\to}v_8{\to}v_{11}{\to}v_{13}$;

3. $l_{min}=18$; $v_0{\to}v_4{\to}v_1{\to}v_6{\to}v_{11}{\to}v_9{\to}v_7{\to}v_{12}{\to}v_{13}$.

Глава 12

Задача об оптимальном назначении

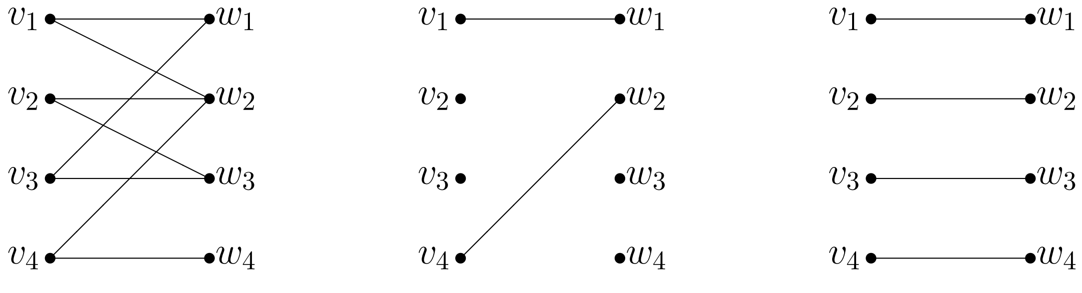
12.1 Паросочетания

Напомним, что **двудольным** называется граф, множество вершин которого можно разбить на два непересекающихся подмножества V и W (на две ***доли***) и при этом каждое ребро графа соединяет какую-либо вершину из V с какой-либо вершиной из W, но никакие две вершины из одного множества не являются смежными.
Двудольный граф, множество вершин которого распадается на два подмножества V и W, обычно обозначается $G =< (V, W), E >$.

Определение 12.1. ***Паросочетанием*** в двудольном графе G называется подмножество попарно несмежных ребер графа.

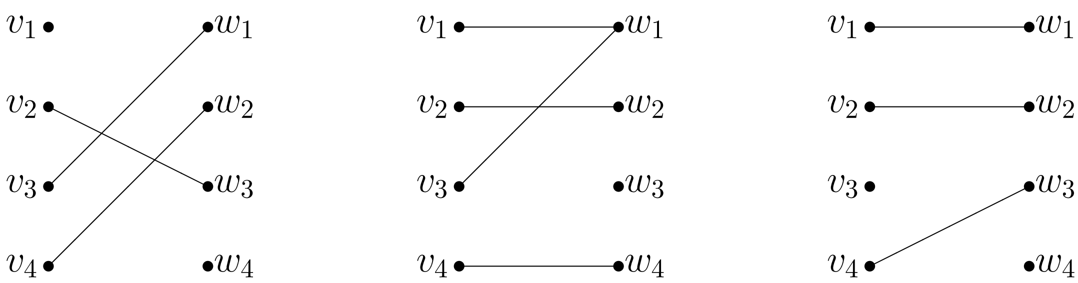
Вспомним, что ребра в двудольном графе $G =< (V, W), E >$ соединяют вершины из доли V с вершинами доли W.

Пример 12.1.
Двудольный граф G задан графически:



G $\qquad$ Π_1 $\qquad$ Π_2

Π_1, Π_2 и Π_3 - паросочетания в графе G.



Π_3 $\qquad$ Π_4 $\qquad$ Π_5

Граф Π_4 не является паросочетанием в данном графе, так как ребра $\{v_1, w_1\}$ и $\{v_3, w_1\}$ смежны.
Π_5 также не является паросочетанием в G, так как ребра $\{v_4, w_3\}$ в графе G нет.

Определение 12.2. Паросочетание *П* в двудольном графе G называется ***полным,*** если к нему нельзя добавить ни одного ребра, несмежного с ребрами паросочетания.

Определение 12.3. Паросочетание *П* в двудольном графе G называется ***максимальным,*** если никакое другое паросочетание в G не содержит ребер больше, чем *П*.

Определение 12.4. Пусть $G =< (V, W), E >$ - двудольный граф, множество вершин которого можно разбить на две доли V и W. Паросочетание *П* в графе G называется ***совершенным,*** если для всякой вершины из V найдется инцидентное ей ребро, то есть $|\Pi| = |V|$.

Максимальное парасочетание всегда полное. Обратное неверно.

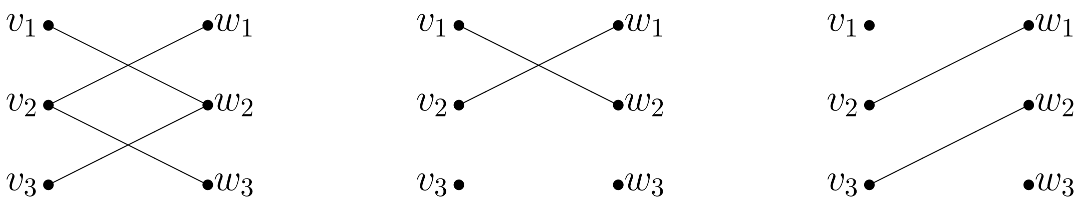
Совершенное парасочетание всегда максимальное. Обратное неверно.

Пример 12.2.

Паросочетание Π_2 в графе G из предыдущего примера является полным, максимальным и совершенным.
Паросочетание Π_3 является полным, при этом ни максимальным, ни

совершенным не является.
Паросочетание Π_1 не является ни полным, ни максимальным, ни совершенным.

Пример 12.3.



G $\qquad$ Π_1 $\qquad$ Π_2

Π_1 и Π_2 являются максимальными паросочетаниями, но не являются совершенными, так как $|\Pi| = 2$ (в паросочетание входят 2 ребра), а $|V| = 3$ (левая доля графа состоит из 3 вершин).

12.2 Венгерский алгоритм

12.2.1 Постановка задачи

Задача 12.1. *Пусть имеется n работников и m работ. Известно, какие работы может выполнять каждый из рабочих. Требуется распределить работу между работниками так, чтобы наибольшее количество людей получило работу, которую они могут выполнять. Все ли работники получат работу?*

Решим эту задачу при помощи графов. Работникам соответствуют вершины v_i двудольного графа $G =< (V, W), E >$ $(v_i \in V)$; работам - вершины w_j $(w_j \in W)$.
Если i-тый рабочий выполняет j-тую работу, то в графе существует ребро $\{v_i, w_j\}$. Если i-тый рабочий не может выполнять j-тую работу, то ребра $\{v_i, w_j\}$ в графе нет .

Таким образом, на языке графов задача формулируется следующим образом: *найти максимальное паросочетание в двудольном графе. Существует ли в графе совершенное сочетание?*

Решение этой задачи удобно находить, используя ***алгоритм отыскания максимального паросочетания***, так называемый

венгерский алгоритм, названный так в честь Гарольда Куна, впервые предложившего данный алгоритм.

Ответ на вопрос о существовании совершенного паросочетания дает нам теорема Ф.Холла.

12.2.2 Основные определения. Теорема Холла

Определение 12.5. Ребра, вошедшие в полное паросочетание, называются ***толстыми,*** а не вошедшие - ***тонкими.***

Определение 12.6. Вершины, инцидентные толстым ребрам, называются ***насыщенными.*** Остальные вершины графа G называются ***ненасыщенными.***

Определение 12.7. Цепь в двудольном графе называется ***чередующейся***, если она последовательно соединяет тонкие и толстые ребра.

Определение 12.8. Чередующаяся цепь называется ***тонкой***, если она соединяет две ненасыщенные вершины.

Очевидно, что тонкая цепь начинается и заканчивается тонким ребром. Это значит, что число тонких ребер в тонкой цепи на единицу больше, чем толстых.

Определение 12.9. Пусть $S \subset V$ - подмножество вершин V графа $G =< (V, W), E >$. ***Окружением*** множества S называется множество $\varphi(S) = \bigcup\limits_{v \in S} \varphi(v) \backslash S$, где $\varphi(v)$ - множество вершин, смежных с вершиной v.

То есть, окружением множества S является подмножество вершин из W, каждая из которых смежна хотя бы с одной вершиной из S.

Теорема 12.1 (Ф. Холл). *Совершенное паросочетание в двудольном графе $G =< (V, W), E >$ существует тогда, и только тогда, когда $\forall S \subset V$ выполнено неравенство: $|\varphi(S)| \geqslant |S|$, то есть тогда, когда число вершин во множестве S не превосходит количества смежных с ней вершин.*

12.2.3 Алгоритм отыскания максимального паросочетания в двудольном графе(венгерский алгоритм)

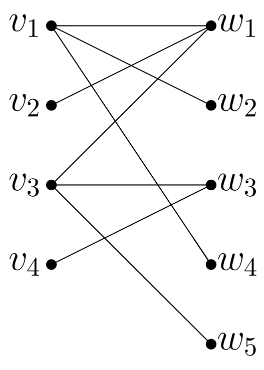
1. Просматривая в произвольном порядке ребра двудольного графа G, включаем в паросочетание Π первое по порядку ребро; затем те ребра, которые не смежны ни с одним из уже включенных в паросочетание. Так действуем до тех пор, пока не получим полное паросочетание.

2. Для найденного полного паросочетания ищем тонкую цепь. Если её нет, то полное паросочетание является максимальным. Алгоритм завершает работу.

3. Если тонкая цепь существует, из полного паросочетания исключаем те толстые ребра, которые вошли в тонкую цепь. При этом включаем в паросочетание все тонкие ребра найденной цепи. Так как количество тонких ребер в цепи на 1 больше числа толстых ребер, то мощность паросочетания (количество ребер в Π) увеличится на 1.

   Переходим к пункту 2 (опять ищем тонкую цепь).

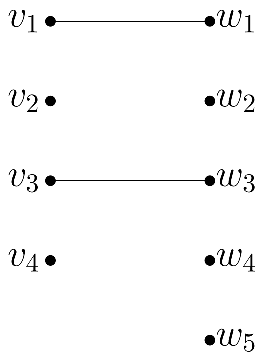
Пример 12.4. Найти максимальное паросочетание в графе G:



G

Решение.

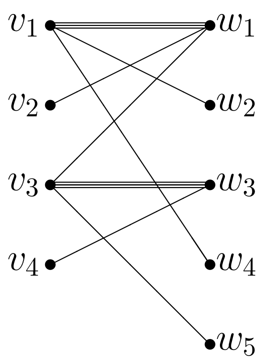
1. Найдем полное паросочетание в графе G. Для этого построим паросочетание, в которое войдут все вершины исходного графа G.



Π_1

Включим в Π_1 ребро $\{v_1, w_1\}$ (первое из ребер, изображенных на рисунке).
Ребра $\{v_1, w_2\}$, $\{v_1, w_4\}$, $\{v_2, w_1\}$ и $\{v_3, w_1\}$, следующие сверху вниз за ребром $\{v_1, w_1\}$ при изображении графа, включать в паросочетание нельзя, так как они смежны с уже включенным в паросочетание ребром.
Включим в Π_1 ребро $\{v_3, w_3\}$, так как оно не смежно с ребром $\{v_1, w_1\}$.
Все остальные ребра смежны с ребрами из Π_1.
Значит, $\Pi_1 = \{\{v_1, w_1\}, \{v_3, w_3\}\}$ - полное паросочетание.

2.



G

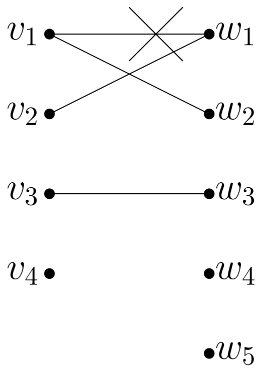
Ребра $\{v_1, w_1\}$ и $\{v_3, w_3\}$ - толстые ребра графа G, все остальные - тонкие.
Попробуем найти тонкую цепь. Вершины v_2, w_2, v_4, w_4 и w_5 - ненасыщенные вершины. Тонкой цепью, соединяющей вершины v_2 и w_2, является последовательность ребер

$$v_2 \mapsto w_1 \mapsto v_1 \mapsto w_2.$$

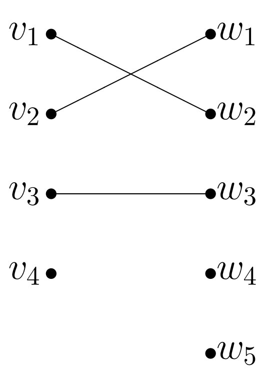
При этом ребра $\{v_2, w_1\}$ и $\{v_1, w_2\}$ - тонкие, ребро $\{v_1, w_1\}$ - толстое.

3. Исключим из Π_1 толстое ребро $\{v_1, w_1\}$, включим 2 тонких ребра $\{v_2, w_1\}$ и $\{v_1, w_2\}$.
Паросочетание $\Pi_2 = \{\{v_1, w_2\}, \{v_2, w_1\}, \{v_3, w_3\}\}$ - полное.

$$|\Pi_2| = 3 = |\Pi_1| + 1.$$

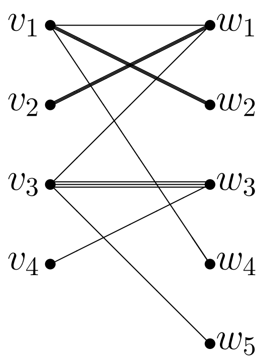


Π_2



Π_2

4.



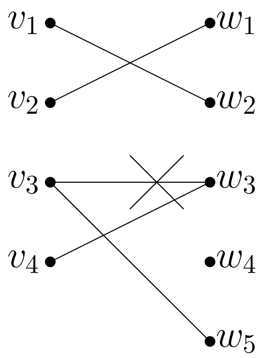
G

Опять ищем тонкую цепь.
Последовательность ребер

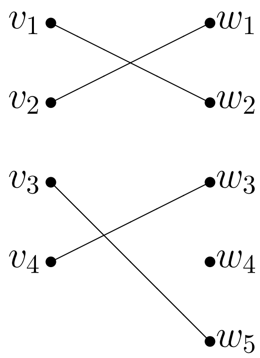
$$v_4 \mapsto w_3 \mapsto v_3 \mapsto w_5$$

- искомая цепь, соединяющая ненасыщенные вершины v_4 и w_5.
Ребра $\{v_4, w_3\}$ и $\{v_3, w_5\}$, входящие в данную цепь - тонкие, ребро $\{v_3, w_3\}$ - толстое.

5. Исключим ребро $\{v_3, w_3\}$ из паросочетания Π_2, включив тонкие ребра.



Π_3



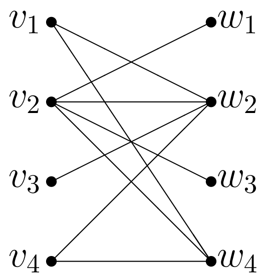
Π_3

$$\Pi_3 = \{\{v_1, w_2\}, \{v_2, w_1\}, \{v_4, w_3\}, \{v_3, w_5\}\}$$

- полное паросочетание.

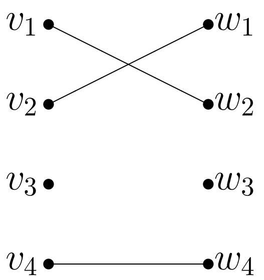
6. Так как ненасыщенная вершина w_4 в графе одна, тонкой цепи, соединяющей две ненасыщенные вершины, нет. Алгоритм закончен. Паросочетание Π_3 - искомое максимальное.
   Так как $|\Pi_3| = 4 = |V|$, то Π_3 является также совершенным паросочетанием.

Пример 12.5. Найти максимальное паросочетание в графе G:



G

Решение.



Π_1

$\Pi_1 = \{\{v_1, w_2\}, \{v_2, w_1\}, \{v_4, w_4\}\}$ - полное паросочетание.
Несмотря на то, что вершины v_3 и w_3 ненасыщенные, Π_1 - максимальное паросочетание, так как тонкой цепи (то есть цепи с чередованием тонких и толстых ребер), соединяющей эти две вершины, нет. Значит, Π_1 - максимальное, хотя и не совершенное паросочетание.

12.3 Задача об оптимальном назначении

12.3.1 Постановка задачи

Задача 12.2. *n работников выполняют n работ. Каждый i рабочий выполняет j работу с эффективностью $c_{ij} \geqslant 0$. Требуется распределить работу между работниками таким образом, чтобы суммарная эффективность работ была бы максимальной.*

Данная задача обычно называется ***задачей об оптимальном назначении***. Эффективность выполнения работ как правило задается квадратной матрицей $C_{n\times n} = \{c_{ij}\}$, элементом c_{ij} которой является эффективность выполнения i-тым рабочим j-той работы (строки матрицы соответствуют работникам, столбцы - выполняемым работам).

Задачу удобно формулировать с помощью графов.

Дан двудольный граф $G =< (V, W), E >$, ребра $\{v_i, w_j\}$ которого имеют вес c_{ij} (вес ребра равен эффективности выполняемой работы), множество V вершин соответствует рабочим, множество W - работам. В графе G требуется выделить такое совершенное паросочетание $\boldsymbol{\Pi}$, чтобы сумма весов ребер, вошедших в $\boldsymbol{\Pi}$, была бы максимальной среди сумм весов всех возможных совершенных паросочетаний графа G.

Эту задачу обычно решают с помощью следующего алгоритма.

12.3.2 Алгоритм поиска оптимального назначения

1. В каждой строке матрицы эффективности находим максимальный элемент $a_i = \max\limits_{j=\overline{1,\ldots,n}} c_{ij}$ и подчеркиваем его (очевидно, что таких элементов в строке может быть несколько). Всем строкам приписываем метки, равные a_i, всем столбцам - метки $b_j = 0$.

2. Строим двудольный граф $G =< (V, W), E >$, соответствующий подчеркнутым элементам. Число вершин в обеих долях равно n - порядку матрицы эффективности ($|V| = |W| = n$).

   Если элемент c_{ij} матрицы $C_{n\times n}$ подчеркнут, то в графе G рисуем ребро $\{v_i, w_j\}$ с весом c_{ij}. Ребро $\{v_i, w_j\}$ соединяет вершину v_i из левой доли графа G с вершиной w_j из правой доли.

3. Используя венгерский алгоритм, выделяем в графе G максимальное паросочетание.

4. Если построенное паросочетание совершенно ($|\Pi| = |V| = n$), то найденное паросочетание - искомое оптимальное назначение. Алгоритм заканчивает свою работу (переход к пункту 7 нашего алгоритма).

5. Если $|\Pi| \neq |V| = n$, то, согласно теореме Холла, среди вершин V графа G можно выделить такое подмножество вершин S, что

$|S| > |\varphi(S)|$, где $\varphi(S)$ - окружение множества S (вершины из W, смежные с вершинами из S). Находим множество $S \subset V$, удовлетворяющее указанному неравенству.

Метки a_i, соответствующие вершинам из S, понижаем на 1. Остальные метки, приписанные строкам, не меняем. Метки b_j, соответствующие вершинам из $\varphi(S)$, повышаем на 1. Остальные метки, приписанные столбцам, оставляем без изменения.

6. Находим такие элементы c_{ij} в матрице эффективности, что значение элемента равно сумме меток, приписанных строке i и столбцу j, на пересечении которых он находится: $c_{ij} = a_i + b_j$. Подчеркиваем эти элементы и переходим к пункту 2.

7. (Окончание работы алгоритма).
Выписываем найденное совершенное паросочетание $\boldsymbol{\Pi}$. Оно задает оптимальное распределение работ между работниками. Суммируем веса всех ребер, вошедших в паросочетание. Полученная сумма $\Sigma_{\text{эфф}}$ - максимальная эффективность выполнения всех работ.

   Заметим, что оптимальное распределение всех работ между работниками может быть не единственным, но их суммарная эффективность $\Sigma_{\text{эфф}}$ одинакова для всех совершенных паросочетаний, полученных в результате работы данного алгоритма.

8. Делаем проверку полученного назначения. Эффективность $\Sigma_{\text{эфф}}$, равная сумме весов ребер, вошедших в итоговое паросочетание $\boldsymbol{\Pi}$, должна равняться сумме меток всех строк и всех столбцов на момент завершения алгоритма:

$$\Sigma_{\text{эфф}} = \sum_i a_i + \sum_j b_j.$$

Пример 12.6. Решить задачу об оптимальном назначении с матрицей эффективности $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 8 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

Решение.

1. Находим максимальные элементы каждой строки, подчеркиваем их.

2. Метки a_i, приписанные строкам, равны максимальным элементам строки:

$$a_1 = \max\{4, 6, 5, 5\} = 6,\ a_2 = \max\{3, 9, 8, 4\} = 9,$$

$$a_3 = \max\{5, 7, 5, 6\} = 7,\ a_4 = \max\{4, 6, 8, 4\} = 8.$$

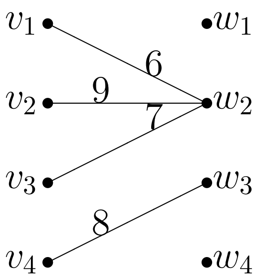
Все метки, приписанные столбцам, равны 0:

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0.$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 6 \\ 9 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & \underline{6} & 5 & 5 \\ 3 & \underline{9} & 8 & 4 \\ 5 & \underline{7} & 5 & 6 \\ 4 & 6 & \underline{8} & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Метки строк a_i записываем левее элементов матрицы напротив соответствующей строки, метки столбцов b_j - выше элементов матрицы напротив соответствующего столбца.

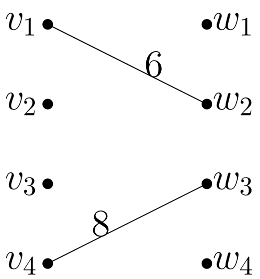
3. Строим граф G_1, ребра которого соответствуют подчеркнутым элементам матрицы C.



G_1

Так как $|V| = |W| = 4$, каждая доля графа G_1 содержит по 4 вершины.
В графе G_1 4 ребра.
Подчеркнутому элементу $c_{12} = 6$ соответствует ребро $\{v_1, w_2\}$;
элементу $c_{22} = 9$ - ребро $\{v_2, w_2\}$;
элементу $c_{32} = 7$ - ребро $\{v_3, w_2\}$;
элементу $c_{43} = 8$ - ребро $\{v_4, w_3\}$.

4. Находим максимальное паросочетание Π_1 в графе G_1.



Π_1

В него входит 2 ребра: ребро $\{v_4, w_3\}$ и любое из ребер, инцидентных вершине w_2, например, ребро $\{v_1, w_2\}$.

5. Поскольку $|\Pi_1| = 2 \neq |V| = 4$, паросочетание Π_1 не является совершенным. Значит, по теореме Холла найдется такое подмножество S вершин из левой доли, что выполняется неравенство

$|S| > |\varphi(S)|$, где $\varphi(S)$ - окружение множества S.
В качестве множества S можно взять все вершины из V, так как в графе G_1 количество вершин, смежных с вершинами из V меньше, чем число вершин в V:

$$|V| = 4 > |\varphi(V)| = 2.$$

Мы возьмем только 3 вершины из левой доли: $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, отбросив ребро $\{v_4, w_3\}$ графа G_1, так как вершины v_4 и w_3 инцидентны только одному ребру.
Все вершины множества S смежны только с вершиной w_2:

$$S = \{v_1, v_2, v_3\},\ \varphi(S) = \{w_2\};\ |S| = 3 > |\varphi(S)| = 1.$$

6. Понизим на 1 метки, приписанные вершинам v_1, v_2 и v_3:

$$a_1 = 6 - 1 = 5,\ a_2 = 9 - 1 = 8,\ a_3 = 7 - 1 = 6.$$

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & \uparrow 0 & 0 & 0 \\ \hline 5 & \downarrow 6 & 4 & \underline{6} & 5 & 5 \\ 8 & \downarrow 9 & 3 & \underline{9} & 8 & 4 \\ 6 & \downarrow 7 & 5 & \underline{7} & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 4 & 6 & \underline{8} & 4 \end{array}\right)$$

Метку, приписанную вершине w_2, повысим на 1:

$$b_2 = 0 + 1 = 1.$$

Метки, приписанные остальным вершинам, оставляем без изменения.

7. Находим в матрице С элементы $c_{ij} = a_i + b_j$, значение которых равно сумме меток, приписанных строке i и столбцу j, на пересечении которых находится элемент c_{ij}. Все уже подчеркнутые элементы удовлетворяют этому равенству. Найдем другие элементы, для которых это равенство верно и дважды подчеркнем их.
В первой строке таких элементов два:

$$c_{13} = 5 = a_1 + b_3 = 5 + 0;$$
$$c_{14} = 5 = a_1 + b_4 = 5 + 0.$$

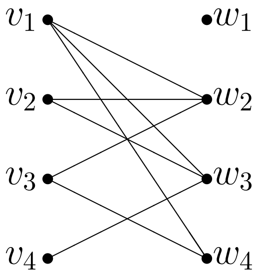
$$\left(\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 4 & \underline{6} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{5}} \\ 8 & 3 & \underline{9} & \underline{\underline{8}} & 4 \\ 6 & 5 & \underline{7} & 5 & \underline{\underline{6}} \\ 8 & 4 & 6 & \underline{8} & 4 \end{array}\right)$$

В двух следующих строках таких элементов по одному:

$$c_{23} = 8 = a_2 + b_3 = 8 + 0;$$
$$c_{34} = 6 = a_3 + b_4 = 6 + 0.$$

В последней строке таких элементов нет.

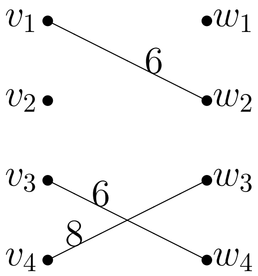
8. Построим граф G_2, ребра которого соответствуют подчеркнутым элементам матрицы C.



G_2

Все ребра графа G_1 являются также ребрами графа G_2. Добавляются ребра, соответствующие дважды подчеркнутым элементам матрицы.

9. Находим максимальное паросочетание Π_2 в графе G_2.



Π_2

В него входит 3 ребра.
Так как $|\Pi_2| = 3 \neq |V| = 4$, паросочетание Π_2 не является совершенным.

10. По теореме Холла найдется такое подмножество S вершин из V, что его окружение содержит меньшее количество вершин. В S войдут все вершины из V, так как они смежны с тремя вершинами из W:

$$S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},\ \varphi(S) = \{w_2, w_3, w_4\};\ |S| = 4 > |\varphi(S)| = 3.$$

11. Вершины из S приписанные им метки понижают на 1 :

$$a_1 = 5 - 1 = 4,\ a_2 = 8 - 1 = 7,\ a_3 = 6 - 1 = 5,\ a_4 = 8 - 1 = 7.$$

Вершины из множества $\varphi(S)$ приписанные им метки повышают на 1:

$$b_2 = 1 + 1 = 2,\ b_3 = 0 + 1 = 1,\ b_4 = 0 + 1 = 1.$$

$$\left(\begin{array}{cc|cccc}
 & & 0 & 2 & 1 & 1 \\
 & & 0 & \uparrow 1 & \uparrow 0 & \uparrow 0 \\
\hline
4 & \downarrow 5 & 4 & \underline{6} & \underline{\underline{5}} & \underline{5} \\
7 & \downarrow 8 & 3 & \underline{9} & \underline{\underline{8}} & 4 \\
5 & \downarrow 6 & 5 & \underline{7} & 5 & \underline{\underline{6}} \\
7 & \downarrow 8 & 4 & 6 & \underline{8} & 4
\end{array}\right)$$

Метка $b_1 = 0$, приписанная вершине w_1, остается без изменения.

12. Находим в матрице эффективности элементы $c_{ij} = a_i + b_j$.

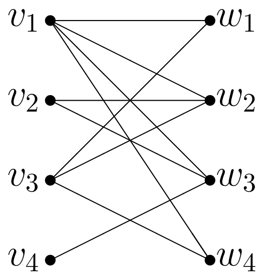
$$\left(\begin{array}{c|cccc} & 0 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 4 & \underline{\underline{\underline{4}}} & \underline{6} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{5}} \\ 7 & 3 & \underline{9} & \underline{\underline{8}} & 4 \\ 5 & \underline{\underline{\underline{5}}} & \underline{7} & 5 & \underline{\underline{6}} \\ 7 & 4 & 6 & \underline{8} & 4 \end{array}\right)$$

Кроме всех уже подчеркнутых элементов, для которых это равенство верно, подчеркнем еще два элемента:

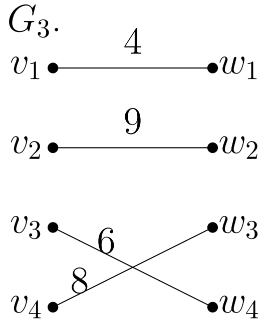
$$c_{11} = 4 = a_1 + b_1 = 4 + 0;$$
$$c_{31} = 5 = a_3 + b_1 = 5 + 0.$$

Других элементов, для которых было бы выполнено равенство, нет.

13. Строим граф G_3, ребра которого соответствуют всем подчеркнутым элементам матрицы C и находим максимальное паросочетание Π_3 в графе G_3.



G_3



Π_3

$|\Pi_3| = 4 = |V| = 4$; паросочетание Π_3 - совершенное.

14. Оптимальное распределение работ между работниками:

$$\Pi_3 = \{(\{v_1, w_1\}, 4),\ (\{v_2, w_2\}, 9),\ (\{v_3, w_4\}, 6),\ (\{v_4, w_3\}, 8)\};$$

$$\Sigma_{\text{эфф}} = 4 + 9 + 6 + 8 = 27$$

- суммарная максимальная эффективность всех выполняемых работ.

15. Проверка:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 4 + 7 + 5 + 7 = 23;$$
$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 0 + 2 + 1 + 1 = 4;$$
$$\sum_{1}^{4} a_i + b_j = 23 + 4 = 27 = \Sigma_{\text{эфф}} \text{ (верно).}$$

Пример 12.7. Решить задачу об оптимальном назначении с матрицей эффективности $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

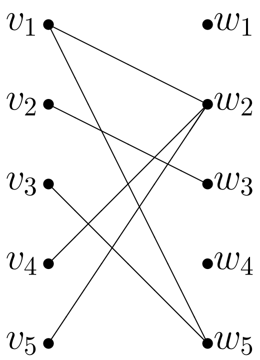
Решение.

1. Найдем и подчеркнем максимальные элементы в строке.

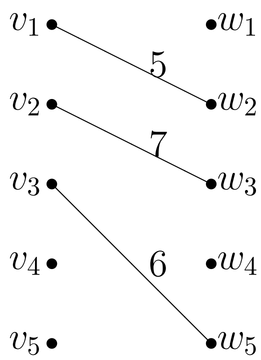
$$\left(\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 2 & \underline{5} & 4 & 2 & \underline{5} \\ 7 & 4 & 3 & \underline{7} & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 3 & 4 & \underline{6} \\ 5 & 3 & \underline{5} & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & \underline{6} & 5 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

В первой строке 2 максимальных элемента, подчеркиваем оба. Приписываем строкам и столбцам соответствующие метки:
$a_1 = 5$, $a_2 = 7$, $a_3 = 6$, $a_4 = 5$, $a_5 = 6$;
$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$.

2. Строим граф G_1, находим в нем максимальное паросочетание Π_1.



G_1



Π_1

Поскольку $|\Pi_1| = 3 \neq |V| = 5$, паросочетание Π_1 не является совершенным.

3. Находим множества S и $\varphi(S)$:

$$S = \{v_1, v_3, v_4, v_5\},\ \varphi(S) = \{w_2, w_5\};\ |S| = 4 > |\varphi(S)| = 2.$$

Так как ребро $\{v_2, w_3\}$ инцидентно только двум вершинам, концы ребра в множества S и $\varphi(S)$ не включены.

4. Метки, приписанные вершинам v_1, v_3, v_4 и v_5, понижаем на 1, а метки, приписанные вершинам w_2 и w_5, повышаем на 1.

$$a_1 = 5 - 1 = 4,\ a_3 = 6 - 1 = 5,\ a_4 = 5 - 1 = 4,\ a_5 = 6 - 1 = 5.$$

$$b_2 = 0+1 = 1,\ b_5 = 0+1 = 1.$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccccc}
 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
 & & 0 & \uparrow 0 & 0 & 0 & \uparrow 0\\
\hline
4 & \downarrow 5 & 2 & \underline{5} & 4 & 2 & \underline{5}\\
7 & 7 & 4 & 3 & \underline{7} & 4 & 6\\
5 & \downarrow 6 & 4 & 2 & 3 & 4 & \underline{6}\\
4 & \downarrow 5 & 3 & \underline{5} & 2 & 3 & 4\\
5 & \downarrow 6 & 2 & \underline{6} & 5 & 2 & 3
\end{array}\right)$$

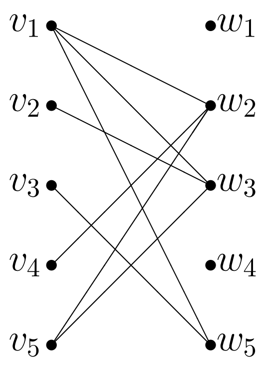
Метки, приписанные остальным вершинам, оставляем без изменения.

5. Находим в матрице С элементы $c_{ij} = a_i + b_j$, значение которых равно сумме соответствующих меток.

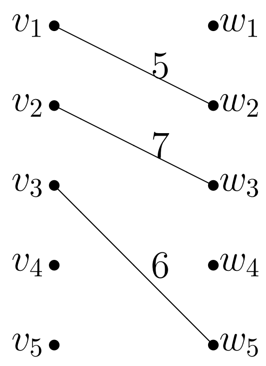
$$\left(\begin{array}{c|ccccc}
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
\hline
4 & 2 & \underline{5} & \underline{\underline{4}} & 2 & \underline{5}\\
7 & 4 & 3 & \underline{7} & 4 & 6\\
5 & 4 & 2 & 3 & 4 & \underline{6}\\
4 & 3 & \underline{5} & 2 & 3 & 4\\
5 & 2 & \underline{6} & \underline{\underline{5}} & 2 & 3
\end{array}\right)$$

Все уже подчеркнутые элементы удовлетворяют этому равенству. Найдем другие элементы, для которых это равенство верно и дважды подчеркнем их.

6. Строим новый граф G_2. Максимальное паросочетание Π_2 в данном графе совпадает с Π_1 и не является совершенным.



G_2



Π_2

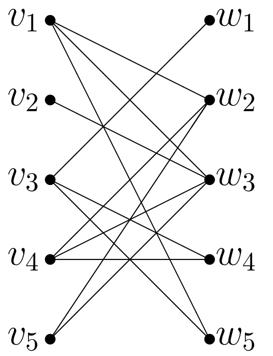
7. $$S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = V,$$

$$\varphi(S) = \{w_2, w_3, w_5\};\ |S| = 5 > |\varphi(S)| = 3.$$

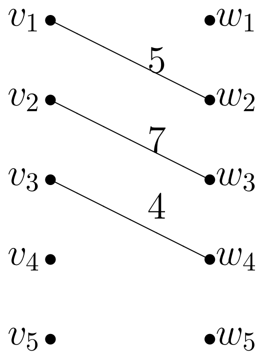
8. Все метки, приписанные строкам, понижаем на 1.
Метки, приписанные вершинам w_2, w_3 и w_5 на 1 повышаем.
Метки b_1 и b_4 оставляем без изменения.

$$
\left(\begin{array}{cc|ccccc}
 & & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\
 & & 0 & \uparrow 1 & \uparrow 0 & 0 & \uparrow 1 \\
\hline
3 & \downarrow 4 & 2 & \underline{5} & \underline{\underline{4}} & 2 & \underline{5} \\
6 & \downarrow 7 & 4 & 3 & \underline{7} & 4 & 6 \\
4 & \downarrow 5 & 4 & 2 & 3 & 4 & \underline{6} \\
3 & \downarrow 4 & 3 & \underline{5} & 2 & 3 & 4 \\
4 & \downarrow 5 & 2 & \underline{6} & \underline{\underline{5}} & 2 & 3
\end{array}\right)
\qquad
\left(\begin{array}{c|ccccc}
 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\
\hline
3 & 2 & \underline{5} & \underline{\underline{4}} & 2 & \underline{5} \\
6 & 4 & 3 & \underline{7} & 4 & 6 \\
4 & \underline{\underline{\underline{4}}} & 2 & 3 & \underline{\underline{\underline{4}}} & \underline{6} \\
3 & \underline{\underline{\underline{3}}} & \underline{5} & 2 & \underline{\underline{\underline{3}}} & 4 \\
4 & 2 & \underline{6} & \underline{\underline{5}} & 2 & 3
\end{array}\right)
$$

9. Опять находим элементы, равные сумме меток. Строим граф G_3 и находим полное паросочетание Π_3^1 .

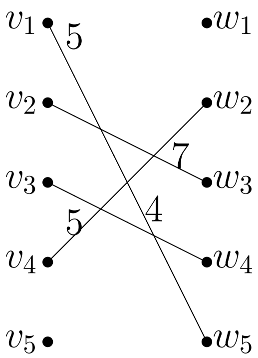


G_3



Π_3^1

10. Для построения максимального паросочетания воспользуемся венгерским алгоритмом.



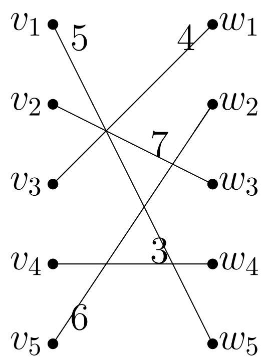
Π_3^2

Поскольку существует путь

$$v_4 \mapsto w_2 \mapsto v_1 \mapsto w_5,$$

соединяющий ненасыщенные вершины v_4 и w_5, увеличиваем количество ребер в паросочетании, заменив ребро $\{v_1, w_2\}$ на ребра $\{v_4, w_2\}$ и $\{v_1, w_5\}$.

11. Маршрут $v_5 \mapsto w_2 \mapsto v_4 \mapsto w_4 \mapsto v_3 \mapsto w_1$ соединяет ненасыщенные вершины v_5 и w_1.



Π_3

Заменим ребра $\{v_4, w_2\}$ и $\{v_3, w_4\}$ на три ребра $\{v_5, w_2\}$, $\{v_4, w_4\}$ и $\{v_3, w_1\}$.

$$|\Pi_3| = 5 = |V| = 5,$$

паросочетание Π_3 - совершенное.

12. Оптимальное распределение работ между работниками:

$$\Pi_3 = \{(\,\{v_1, w_5\}, 5),\ (\{v_2, w_3\}, 7),\ (\{v_3, w_1\}, 4),$$
$$= (\{v_4, w_4\}, 3),\ (\{v_5, w_2\}, 6)\,\};$$

$$\Sigma_{\text{эфф}} = 5 + 7 + 4 + 3 + 6 = 25$$

- суммарная максимальная эффективность всех выполняемых работ.

13. Проверка:

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = 3 + 6 + 4 + 3 + 4 = 20;$$
$$\sum_{j=1}^{5} b_j = 0 + 2 + 1 + 0 + 2 = 5;$$
$$\sum_{1}^{4} a_i + b_j = 20 + 5 = 25 = \Sigma_{\text{эфф}} \text{ (верно).}$$

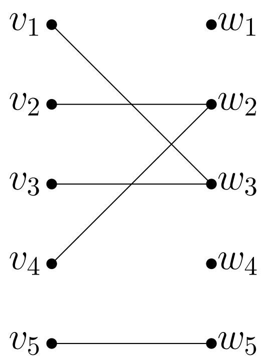
Пример 12.8. Решить задачу об оптимальном назначении с матрицей эффективности $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 & 5 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 2 & 3 \\ 5 & 11 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

Решение.

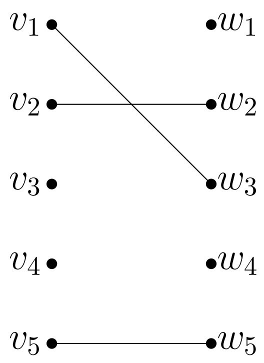
1. Найдем и подчеркнем максимальные элементы в строке.

$$\left(\begin{array}{c|ccccc}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
7 & 4 & 6 & \underline{7} & 5 & 1 \\
9 & 2 & \underline{9} & 4 & 5 & 2 \\
8 & 4 & 7 & \underline{8} & 2 & 3 \\
11 & 5 & \underline{11} & 4 & 3 & 3 \\
8 & 4 & 1 & 3 & 2 & \underline{8}
\end{array}\right)$$

2. Строим граф G_1, находим в нем максимальное паросочетание Π_1.



G_1



Π_1

$|\Pi_1| = 3 \neq |V| = 5$, паросочетание Π_1 не является совершенным.

3. Находим множества S и $\varphi(S)$:

$$S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},\ \varphi(S) = \{w_2, w_3\};\ |S| = 4 > |\varphi(S)| = 2.$$

4. Изменяем метки, приписанные вершинам.

$$\left(\begin{array}{cc|ccccc}
 & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & 0 & \uparrow 0 & \uparrow 0 & 0 & 0 \\
\hline
6 & \downarrow 7 & 4 & 6 & \underline{7} & 5 & 1 \\
8 & \downarrow 9 & 2 & \underline{9} & 4 & 5 & 2 \\
7 & \downarrow 8 & 4 & 7 & \underline{8} & 2 & 3 \\
10 & \downarrow 11 & 5 & \underline{11} & 4 & 3 & 3 \\
8 & 8 & 4 & 1 & 3 & 2 & \underline{8}
\end{array}\right)
\qquad
\left(\begin{array}{c|ccccc}
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
6 & 4 & 6 & \underline{7} & 5 & 1 \\
8 & 2 & \underline{9} & 4 & 5 & 2 \\
7 & 4 & 7 & \underline{8} & 2 & 3 \\
10 & 5 & \underline{11} & 4 & 3 & 3 \\
8 & 4 & 1 & 3 & 2 & \underline{8}
\end{array}\right)$$

Неподчеркнутых элементов матрицы, значение которых равно сумме соответствующих меток, на данном шаге алгоритма нет. Это означает, что ребра в двудольном графе не добавляются, граф G_2 совпадает с G_1, паросочетание Π_2 - с Π_1.

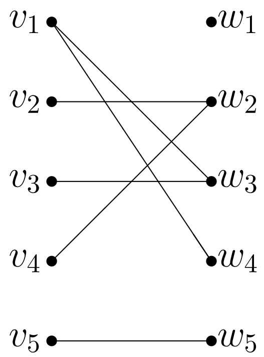
5. Множества S и $\varphi(S)$ также остаются без изменений:

$$S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},\ \varphi(S) = \{w_2, w_3\};\ |S| = 4 > |\varphi(S)| = 2.$$

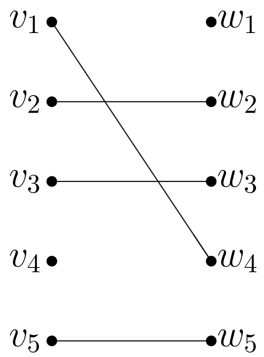
Повышаем и понижаем метки, приписанные тем же вершинам , что и на предыдущем шаге.

$$\left(\begin{array}{cc|ccccc} & & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ & & 0 & \uparrow 1 & \uparrow 1 & 0 & 0 \\ \hline 5 & \downarrow 6 & 4 & 6 & \underline{7} & 5 & 1 \\ 7 & \downarrow 8 & 2 & \underline{9} & 4 & 5 & 2 \\ 6 & \downarrow 7 & 4 & 7 & \underline{8} & 2 & 3 \\ 9 & \downarrow 10 & 5 & \underline{11} & 4 & 3 & 3 \\ 8 & 8 & 4 & 1 & 3 & 2 & \underline{8} \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 4 & 6 & \underline{7} & \underline{\underline{5}} & 1 \\ 7 & 2 & \underline{9} & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 7 & \underline{8} & 2 & 3 \\ 9 & 5 & \underline{11} & 4 & 3 & 3 \\ 8 & 4 & 1 & 3 & 2 & \underline{8} \end{array}\right)$$

6. Добавилось одно новое ребро. Строим двудольный граф G_3.



G_3



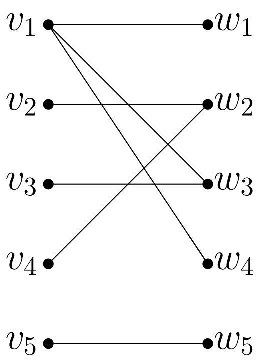
Π_3

7. $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\varphi(S) = \{w_2, w_3, w_4\}$; $|S| = 4 > |\varphi(S)| = 3$.

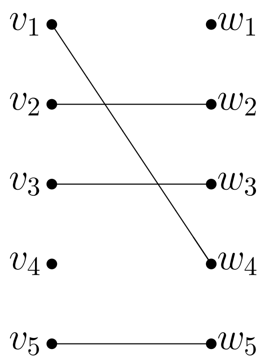
8. Изменяем метки, приписанные вершинам.

$$\left(\begin{array}{cc|ccccc} & & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ & & 0 & \uparrow 2 & \uparrow 2 & \uparrow 0 & 0 \\ \hline 4 & \downarrow 5 & 4 & 6 & \underline{7} & \underline{\underline{5}} & 1 \\ 6 & \downarrow 7 & 2 & \underline{9} & 4 & 5 & 2 \\ 5 & \downarrow 6 & 4 & 7 & \underline{8} & 2 & 3 \\ 8 & \downarrow 9 & 5 & \underline{11} & 4 & 3 & 3 \\ 8 & 8 & 4 & 1 & 3 & 2 & \underline{8} \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 4 & \underline{\underline{\underline{4}}} & 6 & \underline{7} & \underline{\underline{5}} & 1 \\ 6 & 2 & \underline{9} & 4 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 7 & \underline{8} & 2 & 3 \\ 8 & 5 & \underline{11} & 4 & 3 & 3 \\ 8 & 4 & 1 & 3 & 2 & \underline{8} \end{array}\right)$$

9. Строим граф G_4 и находим в нем полное паросочетание Π_4 .



G_4



Π_4

10. Паросочетание Π_4 является максимальным, но не является совершенным. Значит, по теореме Холла существует такое множество $S \subset V$: $|S| > |\varphi(S)|$. Так как окружение множества $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ состоит из 4 вершин: $\varphi(S) = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ (то есть $|S| = 4 = |\varphi(S)|$), данное множество нам не подходит.
    В качестве множества S возьмем, например, вершины v_2 и v_4, смежные с одной вершиной w_2:

$$S = \{v_2, v_4\},\ \varphi(S) = \{w_2\};\ |S| = 2 > |\varphi(S)| = 1.$$

11. Понижаем метки у вершин v_2 и v_4, повышаем метку вершины w_2.

$$\left(\begin{array}{cc|ccccc} & & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ & & 0 & \uparrow 3 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 4 & 4 & \underline{\underline{\underline{4}}} & 6 & \underline{7} & \underline{\underline{5}} & 1 \\ 5 & \downarrow 6 & 2 & \underline{9} & 4 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 7 & \underline{8} & 2 & 3 \\ 7 & \downarrow 8 & 5 & \underline{11} & 4 & 3 & 3 \\ 8 & 8 & 4 & 1 & 3 & 2 & \underline{8} \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 4 & \underline{\underline{\underline{4}}} & 6 & \underline{7} & \underline{\underline{5}} & 1 \\ 5 & 2 & \underline{9} & 4 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 7 & \underline{8} & 2 & 3 \\ 7 & 5 & \underline{11} & 4 & 3 & 3 \\ 8 & 4 & 1 & 3 & 2 & \underline{8} \end{array}\right)$$

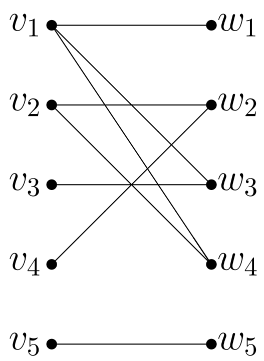
    Новые ребра не появились; граф G_5 совпадает с G_4, паросочетание Π_5 - с Π_4.
    Множества S и $\varphi(S)$ также остаются без изменений:

$$S = \{v_2, v_4\},\ \varphi(S) = \{w_2\};\ |S| = 2 > |\varphi(S)| = 1.$$

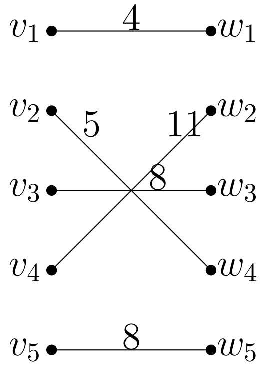
12. Изменяем метки, приписанные вершинам.

$$
\left(\begin{array}{cc|ccccc}
 & & 0 & 5 & 3 & 1 & 0 \\
 & & 0 & \uparrow 4 & 3 & 1 & 0 \\
\hline
4 & 4 & \underline{\underline{\underline{4}}} & 6 & \underline{7} & \underline{\underline{5}} & 1 \\
4 & \downarrow 5 & 2 & \underline{9} & 4 & 5 & 2 \\
5 & 5 & 4 & 7 & \underline{8} & 2 & 3 \\
6 & \downarrow 7 & 5 & \underline{11} & 4 & 3 & 3 \\
8 & 8 & 4 & 1 & 3 & 2 & \underline{8}
\end{array}\right)
\quad
\left(\begin{array}{c|ccccc}
 & 0 & 5 & 3 & 1 & 0 \\
\hline
4 & \underline{\underline{\underline{4}}} & 6 & \underline{7} & \underline{\underline{5}} & 1 \\
4 & 2 & \underline{9} & 4 & \underline{\underline{\underline{5}}} & 2 \\
5 & 4 & 7 & \underline{8} & 2 & 3 \\
6 & 5 & \underline{11} & 4 & 3 & 3 \\
8 & 4 & 1 & 3 & 2 & \underline{8}
\end{array}\right)
$$

13. Строим граф G_6 и находим в нем максимальное паросочетание Π_6 .



G_4



Π_4

14. Оптимальное распределение работ между работниками:

$$\Pi_6 = \{(\{v_1, w_1\}, 4),\ (\{v_2, w_4\}, 5),\\ (\{v_3, w_3\}, 8),\ (\{v_4, w_2\}, 11),\ (\{v_5, w_5\}, 8)\};$$

$\Sigma_{\text{ эфф}} = 4 + 5 + 8 + 11 + 8 = 36$ - суммарная максимальная эффективность всех выполняемых работ.

15. Проверка:

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = 4 + 4 + 5 + 6 + 8 = 27;$$
$$\sum_{j=1}^{5} b_j = 0 + 5 + 3 + 1 + 0 = 9;$$
$$\sum_{1}^{4} a_i + b_j = 27 + 9 = 36 = \Sigma_{\text{ эфф}} \text{ (верно).}$$

12.4 Задачи для самостоятельного решения

Решить задачу об оптимальном назначении с заданной матрицей эффективностей.

1. $C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 & 6 \\ 5 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 7 \\ 6 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$;

2. $C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

4. $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 4 & 8 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

5. $C = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 7 & 5 & 7 \\ 7 & 12 & 11 & 8 & 10 \\ 9 & 11 & 8 & 5 & 8 \\ 8 & 7 & 10 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$;

6. $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 5 & 9 \\ 4 & 5 & 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

7. $C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 & 7 & 7 \\ 9 & 12 & 6 & 11 & 10 \\ 5 & 9 & 5 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 3 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & 7 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. $\Sigma_{\text{эфф}} = 26$;
2. $\Sigma_{\text{эфф}} = 22$;
3. $\Sigma_{\text{эфф}} = 17$;
4. $\Sigma_{\text{эфф}} = 26$;
5. $\Sigma_{\text{эфф}} = 46$;
6. $\Sigma_{\text{эфф}} = 24$;
7. $\Sigma_{\text{эфф}} = 40$.

Глава 13

Сети. Потоки.

13.1 Основные определения.

Рассмотрим ориентированный граф $G =< V, E >$ без петель, в котором каждой дуге (ребру, имеющему направление) l ставится в соответствие неотрицательное число $c(l)$, называемое ***пропускной способностью дуги.***

Обозначим через $M^+(v)$ множество дуг, для которых вершина v является началом; через $M^-(v)$ - множество дуг, для которых v - конец.

Определение 13.1. ***Транспортной сетью*** $G =< V, E >$ называется ориентированный граф без петель, все дуги l которого имеют пропускную способность $c(l) \geqslant 0$, и имеющий две выделенные вершины v_0 и v_n такие, что:

1. $$M^-(v_0) = 0;$$
2. $$M^+(v_n) = 0.$$

Вершина v_0 называется ***источником*** (все дуги в этой вершине только начинаются и ни одна не заканчивается).

Вершина v_n называется ***стоком*** (все дуги заканчиваются в стоке и ни одна не начинается).

Все вершины в транспортной сети, отличные от источника и стока, называются ***промежуточными***.

Определение 13.2. ***Потоком*** в транспортной сети называется неотрицательная функция $\varphi(l)$, заданная на дугах сети, такая, что:

1. для любой дуги $l \in E$ выполнено неравенство $\varphi(l) \leqslant c(l)$;
2. для всех промежуточных вершин $v \in V$ выполнено равенство

$$\sum_{l \in M^-(v)} \varphi(l) = \sum_{l \in M^+(v)} \varphi(l).$$

Таким образом, поток по каждой дуге не превышает пропускной способности дуги. Сумма потоков по дугам, заходящим в произвольную промежуточную вершину, равен сумме потоков по дугам, исходящим из этой вершины.

Замечание 13.1. Поток не возникает и не накапливается в промежуточных вершинах.

Транспортная сеть является математической моделью распределения жидкости (например, нефти) или газа в трубопроводе, движения потоков транспорта по сети автодорог и так далее.

Определение 13.3. ***Величиной потока*** $|\varphi|$ называют сумму потоков по дугам, исходящим из источника:

$$|\varphi| = \sum_{l \in M^+(v_0)} \varphi(l).$$

Замечание 13.2. Величина потока равна также суммарному потоку, заходящему в сток:

$$|\varphi| = \sum_{l \in M^-(v_n)} \varphi(l).$$

Определение 13.4. Поток φ^* в транспортной сети $G =< V, E >$ называется ***максимальным потоком***, если его величина не меньше величины любого потока φ в этой сети: $|\varphi|^* \geqslant |\varphi|$.

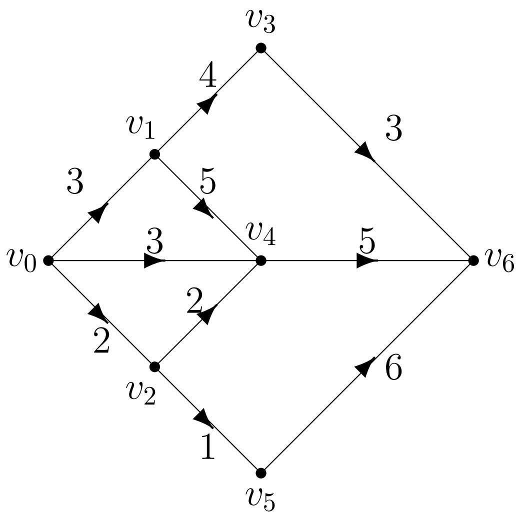
Замечание 13.3. Очевидно, что в одной и той же сети может быть несколько максимальных потоков, но их величины совпадают.

Определение 13.5. Пусть φ - поток в сети $G =< V, E >$. Дуга $l \in E$ называется ***насыщенной***, если поток по ней равен её пропускной способности:

$$\varphi(l) = c(l).$$

Определение 13.6. ***Разрезом*** называется множество E_1 дуг ориентированного графа ($E_1 \subseteq E$), для которого любая простая ориентированная цепь из источника в сток проходит через дугу, принадлежащую разрезу E_1.

Пример 13.1.



Данный граф является транспортной сетью: все ребра графа имеют направление и пропускные способности; источником является вершина v_0, а стоком - вершина v_6.

Разрезами в заданной транспортной сети являются, например, следующие множества ребер:

а) $E_1 = \{\ (v_0, v_1),\ (v_0, v_2),\ (v_0, v_4)\ \}$;

б) $E_2 = \{\ (v_3, v_6),\ (v_4, v_6),\ (v_2, v_5)\ \}$;

в) $E_3 = \{\ (v_3, v_6),\ (v_4, v_6),\ (v_5, v_6)\ \}$;

г) $E_4 = \{\ (v_1, v_3),\ (v_1, v_4),\ (v_0, v_4),\ (v_2, v_4),\ (v_2, v_5)\}$;

Определение 13.7. ***Пропускной способностью*** разреза называется сумма пропускных способностей всех дуг разреза.
Пропускная способность разреза E обычно обозначается $\sum(E)$.

Пример 13.2. Пропускные способности разрезов из предыдущего примера:

а) $\sum(E_1) = c(v_0, v_1) + c(v_0, v_2) + c(v_0, v_4) = 3 + 2 + 3 = 8;$

б) $\sum(E_2) = c(v_3, v_6) + c(v_4, v_6) + c(v_2, v_5) = 3 + 5 + 1 = 9;$

в) $\sum(E_3) = c(v_3, v_6) + c(v_4, v_6) + c(v_5, v_6) = 3 + 5 + 6 = 14;$

г) $\sum(E_4) = c(v_1, v_3) + c(v_1, v_4) + c(v_0, v_4) + c(v_2, v_4) + c(v_2, v_5) = 15.$

Определение 13.8. Разрез с наименьшей пропускной способностью называется ***минимальным разрезом***.

13.2 Теорема Форда - Фалкерсона

.

Теорема 13.1 (Л. Форд, Д. Фалкерсон)**.** *Величина максимального потока в транспортной сети равна пропускной способности минимального разреза.*

Доказательство. Поскольку поток по каждой дуге не превышает пропускной способности дуги, то и величина любого потока не превышает пропускной способности любого разреза. Таким образом, величина максимального потока не может быть больше, чем пропускная способность минимального разреза.

Осталось доказать, что существует разрез, пропускная способность которого равна величине максимального потока.

Пусть φ - максимальный поток. Разобьем множество всех вершин V транспортной сети на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2. В V_1 включим все вершины v_k, удовлетворяющие следующему условию: существует простая цепь из v_0 в v_k такая, что любое ребро $\{v_i, v_{i+1}\}$ пути соответствует либо ненасыщенной дуге (v_i, v_{i+1}), либо дуге (v_{i+1}, v_i), через которую проходит ненулевой поток. Вершины v_j, не вошедшие в V_1, включим в множество V_2.

Очевидно, что источник $v_0 \in V_1$. Докажем, что сток $v_n \in V_2$.

Пусть это не так и $v_n \in V_1$. Это означает, что существует простая цепь из v_0 в v_k такая, что все ребра либо соответствуют ненасыщенным дугам (v_i, v_{i+1}), либо дугам (v_{i+1}, v_i) с ненулевым потоком.

Выберем положительное число a, удовлетворяющее условиям:

1. a не превышает ни одно число, необходимое для насыщения дуг (v_i, v_{i+1});

2. a не превышает потока через любую дугу (v_{i+1}, v_i) с ненулевым потоком.

Увеличим потоки через ненасыщенные дуги (v_i, v_{i+1}) на число a, а потоки через дуги (v_{i+1}, v_i) с ненулевым потоком уменьшаем на число a. Величина потока φ увеличится на a, что противоречит тому, что φ - максимальный поток. Мы получили, что $v_n \in V_2$.

Множество всех дуг $E_1 = \{\ (v_{i_k}, v_{i_s})\ \}$, где $v_{i_k} \in V_1$, а $v_{i_s} \in V_2$, является разрезом, так как все пути из источника в сток проходят по данным ребрам. Все дуги (v_{i_k}, v_{i_s}) являются либо насыщенными, либо дугами с нулевым потоком (иначе вершина v_{i_s} также принадлежала бы множеству V_1). Из этого следует, что пропускная способность разреза E_1 равна сумме пропускных способностей дуг (v_{i_k}, v_{i_s}), и, значит, величине потока φ. Таким образом, E_1 - искомый разрез. $\square$

13.3 Алгоритм поиска максимального потока в транспортной сети

.

1. Строим граф перестроек G': в граф G' входят все вершины исходной транспортной сети G. Все дуги l графа G заменяем на две дуги l' и l'' графа G' следующим образом:

   а) дуга l' сонаправлена дуге l и их пропускные способности равны: $c(l') = c(l)$.

   Пропускная способность дуги l' называется ***остаточной пропускной способностью*** дуги l.

б) дуга l'' направлена в сторону, противоположную дуге l, и на данном этапе алгоритма имеет нулевую пропускную способность: $c(l'') = 0$.

Пропускная способность дуги l'' называется ***реверсной пропускной способностью*** дуги l.

Величину потока $|\varphi|$ полагаем равной нулю: $|\varphi| = 0$.

2. В графе перестроек G' ищем любой путь L из источника в сток по дугам с ненулевой пропускной способностью.

   Если такого пути нет, то максимальный поток найден; переходим к пункту 4.

   Если путь из источника в сток существует, находим величину $\triangle\ \varphi$, равную минимальному значению пропускных способностей дуг, вошедших в путь и параллельных пути. Таким образом, $\triangle\ \varphi$ - значение потока, прошедшего по дугам пути.

   Величину потока $|\varphi|$ увеличиваем на число $\triangle\ \varphi$.

3. В графе перестроек G' дугам, вошедшим в путь L, меняем пропускные способности по следующим правилам:

   а) пропускную способность дуги l', сонаправленной пути, уменьшаем на величину $\triangle\ \varphi$.

   б) пропускную способность дуги l'', направленной в противоположную пути сторону, увеличиваем на $\triangle\ \varphi$.

   Заметим, что
$$c(l') + c(l'') = c(l), \quad \forall l \in E.$$

   Пропускные способности всех остальных дуг оставляем без изменений.

   С измененным графом перестроек G' переходим к пункту 2.

4. Если в графе перестроек G' пути из источника в сток по ребрам с ненулевой пропускной способностью (с учетом реверсных пропускных способностей дуг) нет, величина потока $|\varphi|$ соответствует максимальному потоку.

   Построим данный поток. Для этого строим граф G'', в который включаем все вершины и все дуги исходной транспортной сети

G. Величины потоков по дугам l в сети $G^{''}$ полагаем равными реверсным пропускным способностям дуг $l^{''}$ графа перестроек $G^{'}$.

Проверяем, выполняются ли свойства потока в графе $G^{''}$:

а) $$\sum_{l \in M^{+}(v_0)} \varphi(l) = |\varphi|$$

Суммарный поток, выходящий из источника, равен величине потока $|\varphi|$.

б) $$\sum_{l \in M^{-}(v_n)} \varphi(l) = |\varphi|$$

Суммарный поток, заходящий в сток, равен величине потока $|\varphi|$.

в) $$\sum_{l \in M^{-}(v)} \varphi(l) = \sum_{l \in M^{+}(v)} \varphi(l)$$

Сумма потоков по дугам, заходящим в каждую промежуточную вершину, равна сумме потоков по дугам, исходящим из этой вершины.

Заметим, что перечисленные свойства должны выполняться для всех потоков в транспортной сети (не только для максимальных).

5. Находим минимальный разрез. Для этого все вершины, в которые существует путь из источника в графе перестроек $G^{'}$, помещаем во множество V_1. Все остальные вершины - во множество V_2. Очевидно, что множество вершин сети V удовлетворяет тождествам:

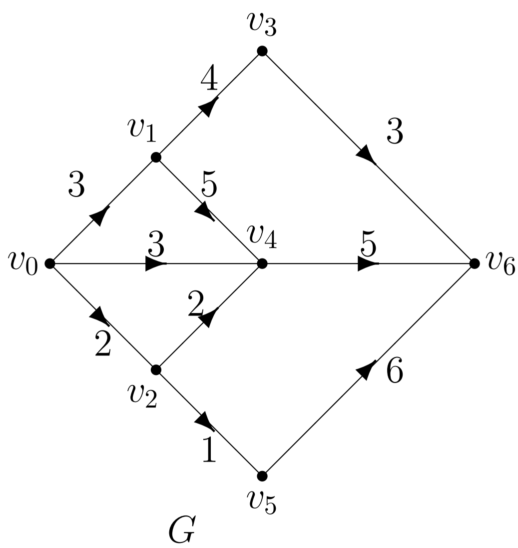
$$V = V_1 \bigcup V_2; \; V_1 \bigcap V_2 = \emptyset.$$

При этом $v_0 \in V_1, \quad v_n \in V_2$ (иначе существует путь из v_0 в v_n и максимальный поток еще не найден).

Разрез образуют все дуги (v_{i_k}, v_{i_s}) такие, что $v_{i_k} \in V_1, \quad v_{i_s} \in V_2$.

6. Ищем суммарную пропускную способность насыщенных дуг (v_{i_k}, v_{i_s}). Эта сумма, равная пропускной способности найденного минимального разреза, согласно теореме Форда - Фалкерсона, равна величине максимального потока $|\varphi|$.

Пример 13.3. Найти максимальный поток в транспортной сети из примера 13.1.



G

Решение.

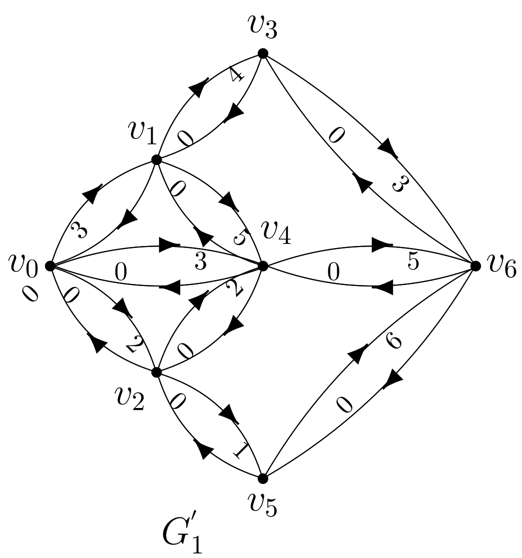
1. Строим граф перестроек $G_1^{'}$, в который включаем все вершины исходной транспортной сети G. Каждую дугу графа G заменяем на две :

   дуга $l^{'}$ направлена в ту же сторону, что и l, и её пропускная способность равна пропускной способности дуги l (остаточная пропускная способность дуги l);

   дуга $l^{''}$ направлена противоположно дуге l и имеет нулевую пропускную способность (реверсную пропускную способность дуги l).

   Величину потока $|\varphi|$ полагаем равной нулю: $|\varphi| = 0$.

2.



$G_1^{'}$

В графе перестроек $G_1^{'}$ находим путь из источника в сток, например,
L_1: $\quad v_0 \overset{3}{\mapsto} v_1 \overset{4}{\mapsto} v_3 \overset{3}{\mapsto} v_6$.
Над соответствующей дугой указана пропускная способность данной дуги. Значение пропускной способности берем из графа перестроек $G_1^{'}$, выбирая ту из дуг, которая сонаправлена пути.

3. Находим значение потока $\triangle\ \varphi$ по дугам, вошедшим в путь L_1 :

$$\triangle\ \varphi = min(\,3,\ 4,\ 3) = 3.$$

Величину потока $|\varphi|$ увеличиваем на $\triangle\ \varphi$:

$$|\varphi| = 0 + 3 = 3.$$

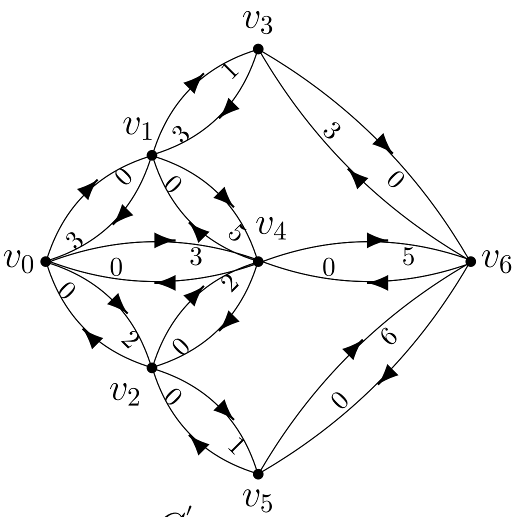
4. Всем дугам, вошедшим в путь L_1, меняем пропускные способности.
Дуги $(v_0,\ v_1)$, $(v_1,\ v_3)$ и $(v_3,\ v_6)$ уменьшают пропускные способности на $\triangle\ \varphi = 3$:

$$c(v_0, v_1) = 3 - 3 = 0;\ c(v_1, v_3) = 4 - 3 = 1;\ c(v_3, v_6) = 3 - 3 = 0.$$

Значения 0, 1 и 3 - остаточные пропускные способности дуг $(v_0,\ v_1)$, $(v_1,\ v_3)$ и $(v_3,\ v_6)$ соответственно.
Реверсные способности данных дуг увеличиваем на $\triangle\ \varphi = 3$:

$$c(v_1, v_0) = 0 + 3 = 3;\ c(v_3, v_1) = 0 + 3 = 3;\ c(v_6, v_3) = 0 + 3 = 3.$$

5. Получаем следующий граф перестроек G_2' :



G_2'

В графе G_2' ищем путь L_2 из v_0 в v_6: $v_0 \overset{3}{\mapsto} v_4 \overset{5}{\mapsto} v_6$.
Поток по данному пути равен

$$\triangle\ \varphi = min(\,3,\ 5) = 3.$$

Увеличиваем величину потока

$$|\varphi| = 3 + 3 = 6.$$

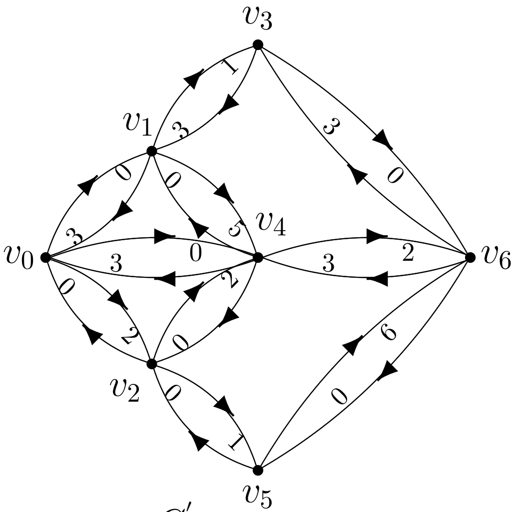
6. Дуги $(v_0,\ v_4)$ и $(v_4,\ v_6)$, сонаправленные пути L_2, пропускные способности понижают на $\triangle\ \varphi = 3$:

$$c(v_0, v_4) = 3 - 3 = 0;\ c(v_4, v_6) = 5 - 3 = 2.$$

Дуги $(v_4,\ v_0)$ и $(v_6,\ v_4)$, направленные противоположно L_2, реверсную способность понижают на $\triangle\ \varphi = 3$:

$$c(v_4, v_0) = 0 + 3 = 3;\ c(v_6, v_4) = 0 + 3 = 3.$$

7. Граф перестроек G_3' принимает вид:



G_3'

Путь L_3 из источника в сток: $v_0 \overset{2}{\mapsto} v_2 \overset{1}{\mapsto} v_5 \overset{6}{\mapsto} v_6$.

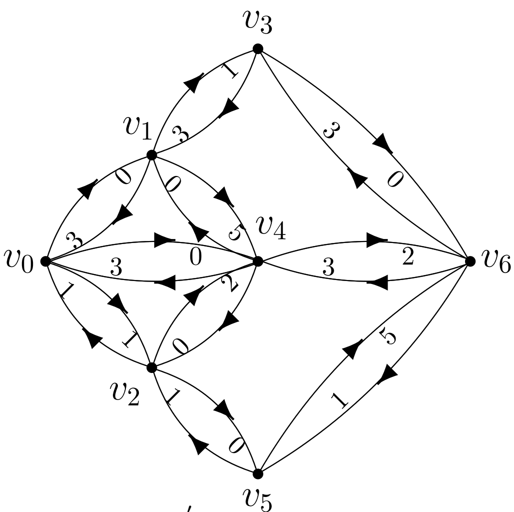
$\triangle\ \varphi = min(\,2,\ 1,\ 6) = 1$

$$|\varphi| = 6 + 1 = 7.$$

Новые пропускные способности дуг:

$$c(v_0, v_2) = 2 - 1 = 1;$$
$$c(v_2, v_0) = 0 + 1 = 1;$$
$$c(v_2, v_5) = 1 - 1 = 0;$$
$$c(v_5, v_2) = 0 + 1 = 1;$$
$$c(v_5, v_6) = 6 - 1 = 5;$$
$$c(v_6, v_5) = 0 + 1 = 1.$$

8. Новый граф перестроек :



G_4'

Путь L_4 :

$$v_0 \overset{1}{\mapsto} v_2 \overset{2}{\mapsto} v_4 \overset{2}{\mapsto} v_6.$$

В качестве пропускных способностей дуг $(v_0; v_2)$ и $(v_4; v_6)$ указаны числа 1 и 2, то есть остаточные способности данных ребер, а не пропускные способности дуг исходной транспортной сети.

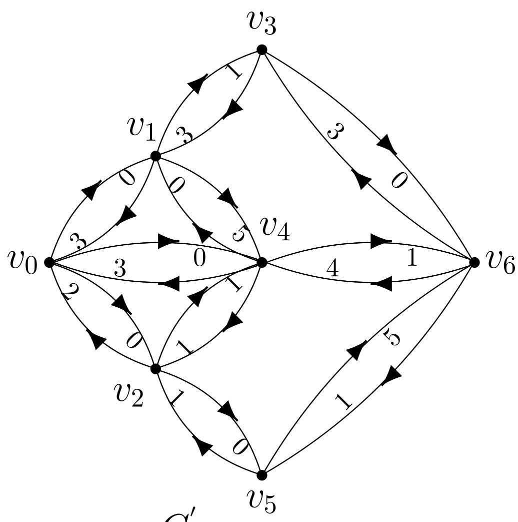
Эти значения берем из графа перестроек, указывая пропускные способности дуг, параллельных пути.

$$\triangle\ \varphi = min(\,1,\ 2,\ 2) = 1;\ \ |\varphi| = 7 + 1 = 8.$$

Остаточные пропускные способности дуг, вошедших в путь, на 1 понижаем, реверсные - на 1 повышаем:

$$c(v_0, v_2) = 1 - 1 = 0;$$
$$c(v_2, v_0) = 1 + 1 = 2;$$
$$c(v_2, v_4) = 2 - 1 = 1;$$
$$c(v_4, v_2) = 0 + 1 = 1;$$
$$c(v_4, v_6) = 2 - 1 = 1;$$
$$c(v_6, v_4) = 3 + 1 = 4.$$

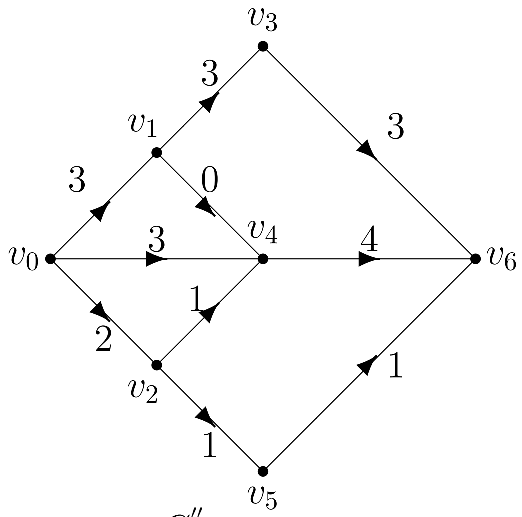
9. Изменяем граф перестроек :



G_5'

10. Больше пути из источника в сток по дугам с ненулевой пропускной способностью нет. Величина потока $|\varphi| = 8$ - максимальная.

11. Строим итоговый поток G'', включая в него все вершины и дуги исходной транспортной сети. Величины потоков по дугам равны реверсным пропускным способностям графа перестроек G_5'. Получаем следующий граф G'':



G''

Дугу $(v_1; v_4)$ с нулевой пропускной способностью в итоговый граф G'' можно не включать, так как по нему не идет поток.

12. Проверим, выполнены ли свойства потока:

а) $\sum\limits_{l \in M^+(v_0)} \varphi(l) = c(v_0, v_1) + c(v_0, v_4) + c(v_0, v_2) = 3+3+2 = 8 = |\varphi|.$
Суммарный поток, выходящий из источника, равен величине потока.

б) $\sum\limits_{l \in M^-(v_6)} \varphi(l) = c(v_3, v_6) + c(v_4, v_6) + c(v_5, v_6) = 3+4+1 = 8 = |\varphi|.$
Суммарный поток, заходящий в сток, равен величине потока.

в) Для всех промежуточных вершин суммарный поток, входящий в вершину, равен суммарному потоку, исходящему из вершины:

$$\begin{cases} \sum\limits_{l \in M^-(v_1)} \varphi(l) = c(v_0, v_1) = 3; \\ \sum\limits_{l \in M^+(v_1)} \varphi(l) = c(v_1, v_3) + c(v_1, v_4) = 3 + 0 = 3; \end{cases} \qquad 3 = 3$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{l \in M^-(v_2)} \varphi(l) = c(v_0, v_2) = 2; \\ \sum\limits_{l \in M^+(v_2)} \varphi(l) = c(v_2, v_4) + c(v_2, v_5) = 1 + 1 = 2; \end{cases} \qquad 2 = 2$$

И так далее для всех вершин (слева от знака равенства - входящий в вершину поток, справа - исходящий):

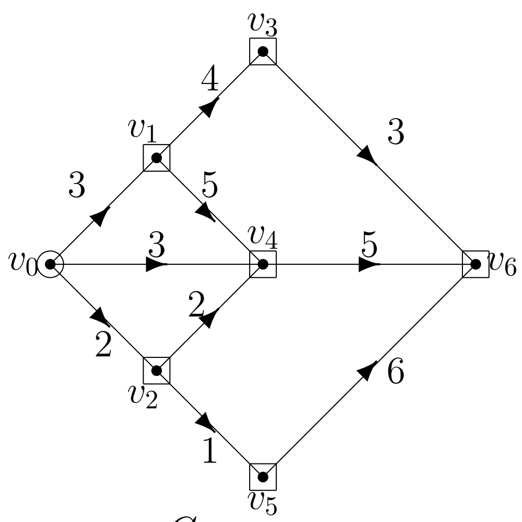
v_3: $3 = 3;$

v_4: $0 + 3 + 1 = 4;$

v_5: $1 = 1.$

Для всех вершин транспортной сети свойства потока выполнены.

13. Помещаем вершины, в которые есть путь из источника, во множество вершин V_1 (рассматриваем исходную транспортную сеть G).



G

Так как все дуги, смежные с источником, насыщенны, то ни в одну вершину, за исключением самого источника, пути нет.

$V_1 = \{v_0\}$,

$V_2 = \{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ v_6\}$. Вершину v_0 пометим символом $\bigcirc$; вершины, принадлежащие множеству V_2 - символом $\square$.

14. Минимальный разрез содержит ребра, соединяющие вершины, принадлежащие разным подмножествам. В нашем примере это 3 ребра:

$$E_1 = \{((v_0, v_1), 3),\ ((v_0, v_4), 3),\ ((v_0, v_2), 2)\}.$$

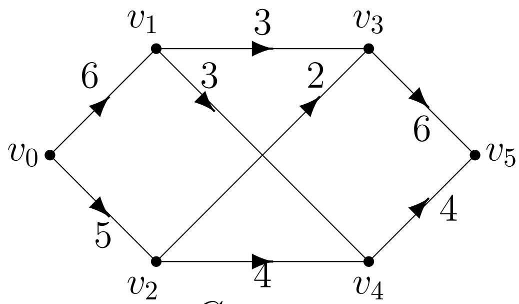
$$\sum(E_1) = c(v_0, v_1) + c(v_0, v_4) + c(v_0, v_2) = 3 + 3 + 2 = 8;$$

$$\sum(E_1) = 8 = |\varphi|.$$

Мы убедились, что пропускная способность разреза равна величине максимального потока.

Замечание 13.4. Поскольку пути из источника в сток выбираются произвольным образом, при другом выборе пути можно получить другое решение, другой итоговый поток и минимальный разрез. Тем не менее, величина максимального потока и пропускная способность разреза будут одинаковы (в нашем случае равны 8).

Пример 13.4. Найти максимальный поток в транспортной сети G.



G

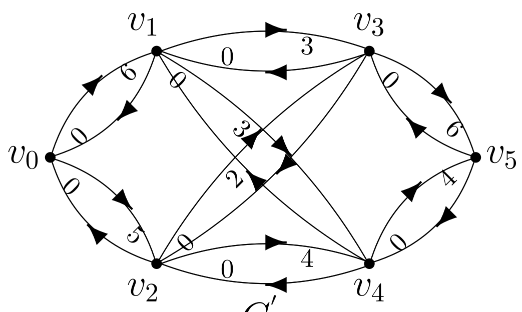
Решение.

1. Источником в данной транспортной сети является вершина v_0, а стоком - вершина v_5.

2. Строим граф перестроек $G_1^{'}$, включая в него все вершины исходной транспортной сети G и заменяя каждую дугу на две;

$$|\varphi| = 0.$$

3.



$G_1^{'}$

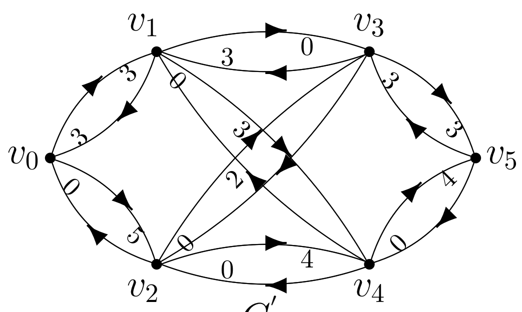
Путь L_1:

$v_0 \overset{6}{\mapsto} v_1 \overset{3}{\mapsto} v_3 \overset{6}{\mapsto} v_5$.

Поток $\vartriangle\ \varphi$, прошедший по дугам этого пути, равен $\vartriangle \varphi = min(6,\ 3,\ 6) = 3$;

$$|\varphi| = 0 + 3 = 3.$$

4.



$G_2^{'}$

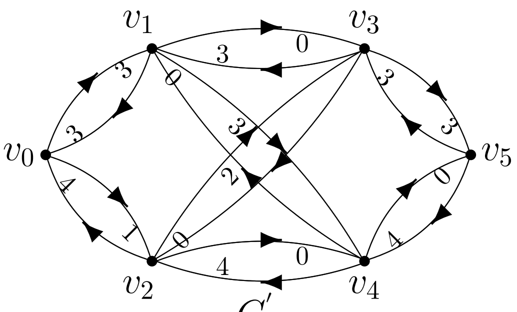
Путь L_2:

$v_0 \overset{5}{\mapsto} v_2 \overset{4}{\mapsto} v_4 \overset{4}{\mapsto} v_5$;

$\vartriangle \varphi = min(5,\ 4,\ 4) = 4$;

$$|\varphi| = 3 + 4 = 7.$$

5.



G_3'

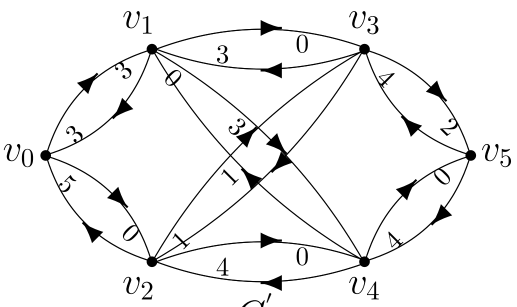
Путь L_3:

$v_0 \overset{1}{\mapsto} v_2 \overset{2}{\mapsto} v_3 \overset{3}{\mapsto} v_5$;

$\triangle\, \varphi = min(\,1,\,2,\,3) = 1$;

$|\varphi| = 7 + 1 = 8$.

6.



G_4'

Путь L_4:

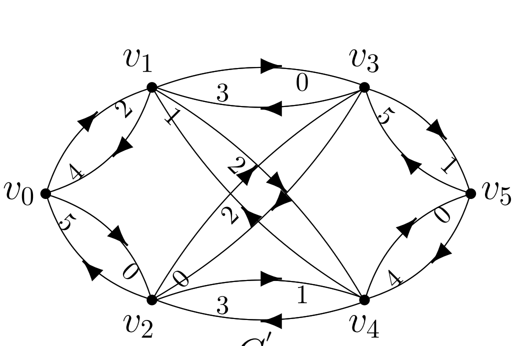
$v_0 \overset{3}{\mapsto} v_1 \overset{3}{\mapsto} v_4 \overset{4}{\mapsto}$

$\overset{4}{\mapsto} v_2 \overset{1}{\mapsto} v_3 \overset{2}{\mapsto} v_5$.

Путь содержит дугу (v_4, v_2). Пропускная способность дуги (v_2, v_4) в исходной транспортной сети равна 4. При вычислении потока, проходящего по пути L_4, учитываем реверсную способность дуги, так как именно ребро l'' (то есть, ребро, направленное в сторону, противоположную дуге (v_2, v_4)), направлено параллельно этому пути.

$$\triangle\, \varphi = min(\,3,\,3,\,4,\,1,\,2) = 1;\ |\varphi| = 8 + 1 = 9.$$

7.

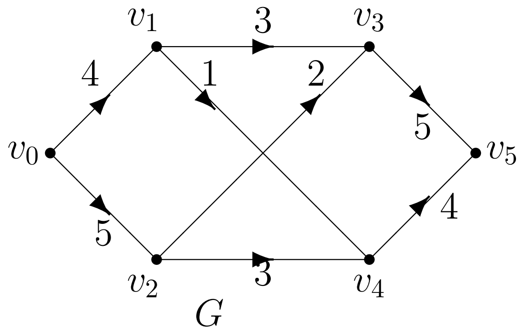


G_5'

Все дуги, сонаправленные пути, уменьшают пропускные способности (в том числе и дуга (v_4, v_2): $c(v_4, v_2) = 4 - 1 = 3$); все ориентированные ребра, направленные в противоположную пути сторону, увеличивают пропускные способности ($c(v_2, v_4) = 0 + 1 = 1$).

8. Больше пути по дугам с ненулевыми пропускными способностями

нет. Строим итоговый поток.



Проверяем, выполнены ли свойства потока во всех вершинах:

а) поток, исходящий из источника $4 + 5 = |\varphi| = 9$;

б) поток, входящий в сток

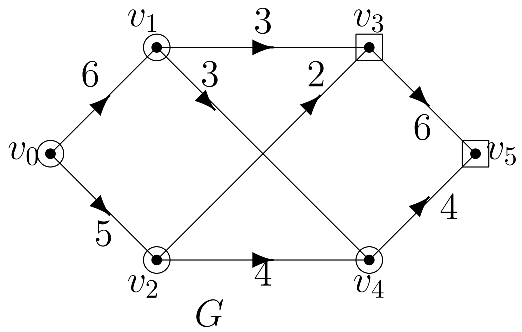
$$5 + 4 = |\varphi| = 9;$$

в) поток в промежуточных вершинах

v_1 : $4 = 3 + 1$; v_2 : $5 = 2 + 3$; v_3 : $3 + 2 = 5$; v_4 : $1 + 3 = 4$.

Во всех вершинах свойства потока выполняются.

9. Находим минимальный разрез, помечая символом $\bigcirc$ вершины, в которые существует путь из источника (множество V_1).



Несмотря на то, что дуга (v_0, v_2) насыщенна, в вершину v_2 можно попасть по ненасыщенным дугам (v_0, v_1), (v_1, v_4) и (v_4, v_2). Вершина v_2 принадлежит множеству V_1.

Дуги (v_1, v_3), (v_2, v_3) и (v_4, v_5) - насыщенны, к вершинам v_3 и v_5 пути из источника по дугам с ненулевыми пропускными способностями нет.

$$V_1 = \{v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_4\}; \qquad V_2 = \{v_3,\ v_5\}.$$

Минимальный разрез включает 3 ребра:

$$E_1 = \{(v_1, v_3),\ (v_2, v_3),\ (v_4, v_5)\}.$$

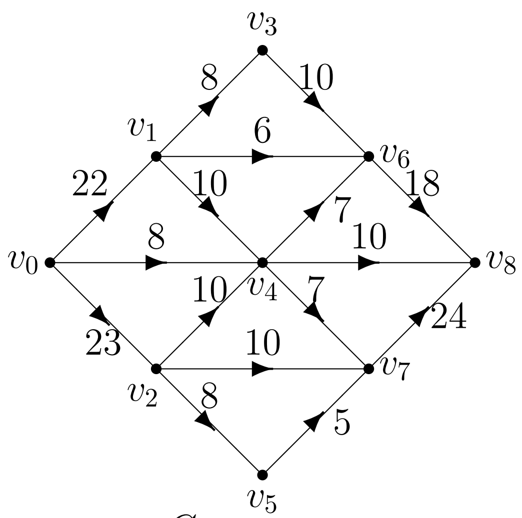
Проверим выполнение теоремы Форда-Фалкерсона:

$$\Sigma(E_1) = c(v_1, v_3) + c(v_2, v_3) + c(v_4, v_5) = 3 + 2 + 4 = 9 = |\varphi|.$$

Пример 13.5. Найти максимальный поток в транспортной сети, заданной списком дуг
$\{((v_0, v_1), 22)\,,\ ((v_0, v_4), 8)\,,\ ((v_0, v_2), 23)\,,\ ((v_1, v_3), 8)\,,$
$((v_1, v_6), 6)\,,\ ((v_1, v_4), 10)\,, ((v_2, v_4), 10)\,,\ ((v_2, v_7), 10)\,,$
$((v_2, v_5), 8)\,,\ ((v_3, v_6), 10)\,,\ ((v_4, v_6), 7)\,,\ ((v_4, v_8), 10)\,,$
$((v_4, v_7), 7)\,,\ ((v_5, v_7), 5)\,,\ ((v_6, v_8), 18)\,,\ ((v_7, v_8), 24)\}.$

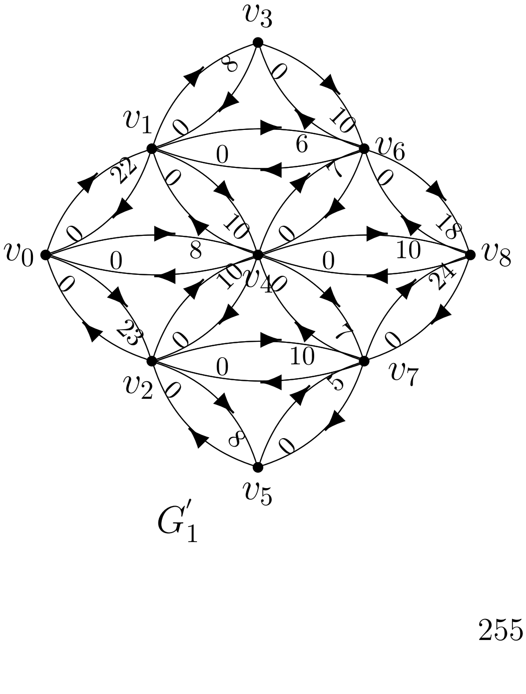
Решение.

1. Изобразим транспортную сеть, заданную списком дуг, графически:



G

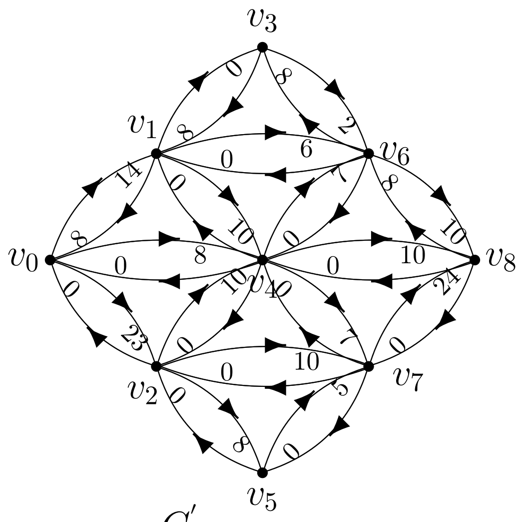
2. Строим граф перестроек G_1'; $|\varphi| = 0$.



G_1'

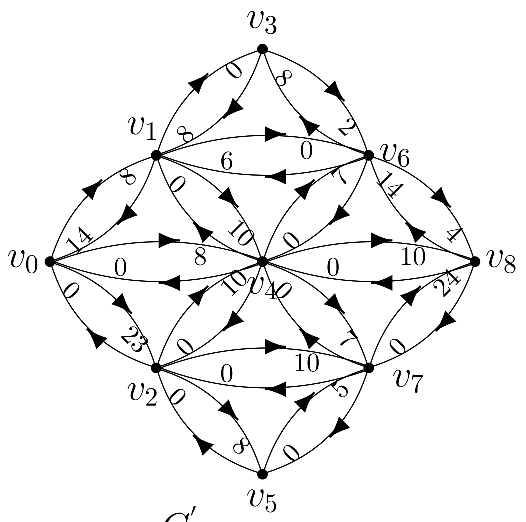
$L_1:$
$v_0 \overset{22}{\mapsto} v_1 \overset{8}{\mapsto} v_3 \overset{10}{\mapsto} v_6 \overset{18}{\mapsto} v_8;$
$\triangle\ \varphi = min(22, 8, 10, 18);$
$\triangle\ \varphi = 8;$
$|\varphi| = 0 + 8 = 8.$

3. Изменяем пропускные способности дуг, вошедших в путь L_1. Получаем новый граф перестроек G_2'.



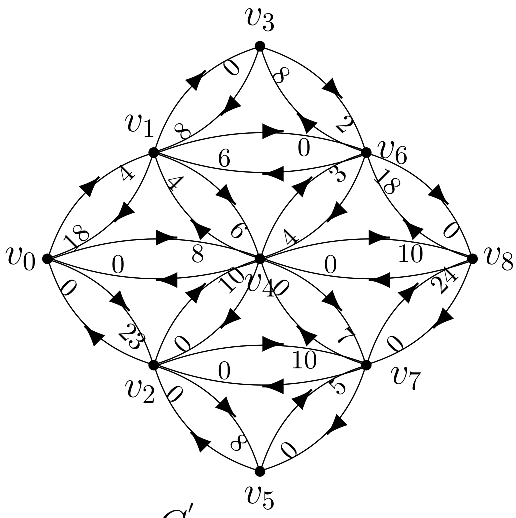
$L_2: \quad v_0 \overset{14}{\mapsto} v_1 \overset{6}{\mapsto} v_6 \overset{10}{\mapsto} v_8;$
$\triangle\,\varphi = min(\,14,\,6,\,10) = 6;$
$|\varphi| = 8 + 6 = 14.$

4.



$L_3:$
$v_0 \overset{8}{\mapsto} v_1 \overset{10}{\mapsto} v_4 \overset{7}{\mapsto} v_6 \overset{4}{\mapsto} v_8;$
$\triangle\,\varphi = min(\,8,\,10,\,7,\,4) = 4;$
$|\varphi| = 14 + 4 = 18.$

5.



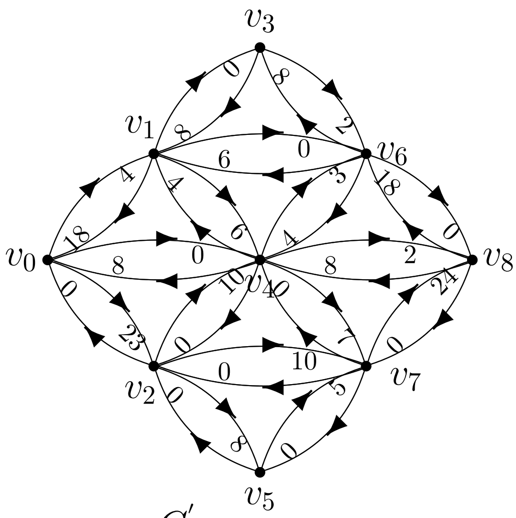
G_4'

$L_4: \quad v_0 \overset{8}{\mapsto} v_4 \overset{10}{\mapsto} v_8;$

$\triangle\,\varphi = min(\,8,\,10) = 8;$

$|\varphi| = 18 + 8 = 26.$

6.



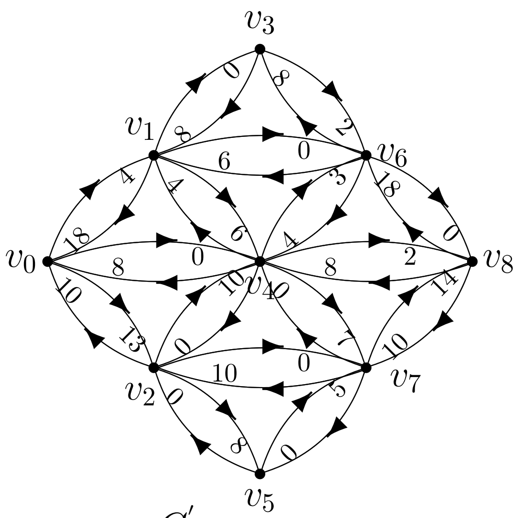
G_5'

$L_5: \quad v_0 \overset{23}{\mapsto} v_2 \overset{10}{\mapsto} v_7 \overset{24}{\mapsto} v_8;$

$\triangle\,\varphi = min(23, 10, 24) = 10;$

$|\varphi| = 26 + 10 = 36.$

7.



G_6'

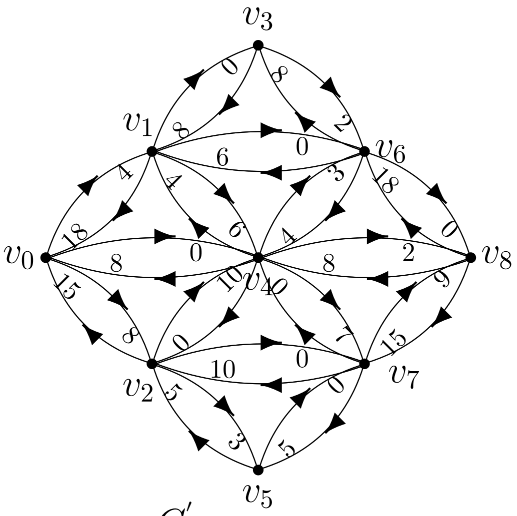
$L_6:$

$v_0 \overset{13}{\mapsto} v_2 \overset{8}{\mapsto} v_5 \overset{5}{\mapsto} v_7 \overset{14}{\mapsto} v_8;$

$\triangle\,\varphi = min(13, 8, 5, 14) = 5;$

$|\varphi| = 36 + 5 = 41.$

8.



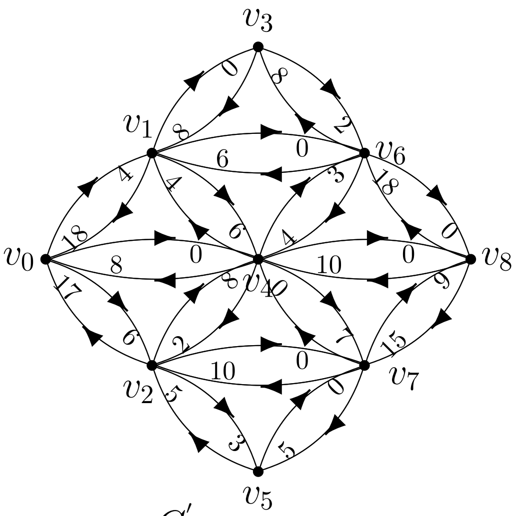
G'_7

$L_7: \quad v_0 \overset{8}{\mapsto} v_2 \overset{10}{\mapsto} v_4 \overset{2}{\mapsto} v_8;$

$\triangle\, \varphi = min(\,8,\,10,\,2) = 2;$

$|\varphi| = 41 + 2 = 43.$

9.



G'_8

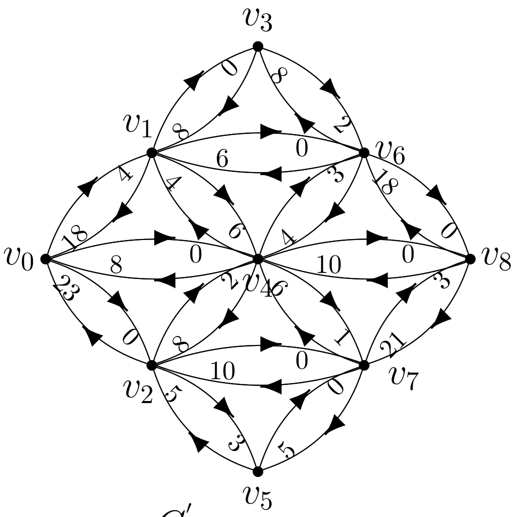
$L_8:$

$v_0 \overset{6}{\mapsto} v_2 \overset{8}{\mapsto} v_4 \overset{7}{\mapsto} v_7 \overset{9}{\mapsto} v_8;$

$\triangle\, \varphi = min(\,6,\,8,\,7,\,9) = 6;$

$|\varphi| = 43 + 6 = 49.$

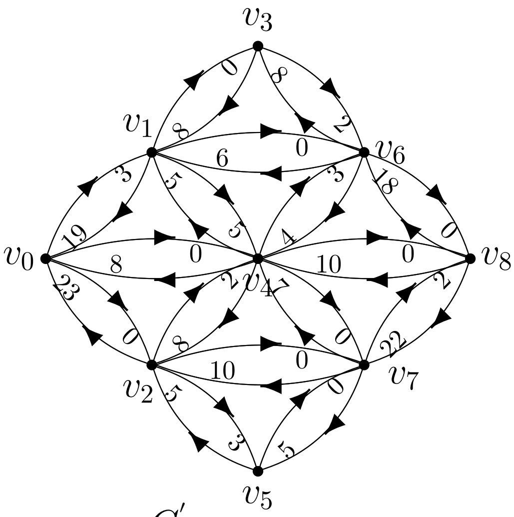
10.



G_9'

L_9 :
$v_0 \overset{4}{\mapsto} v_1 \overset{6}{\mapsto} v_4 \overset{1}{\mapsto} v_7 \overset{3}{\mapsto} v_8$;
$\triangle\, \varphi = min(\,4,\, 6,\, 1,\, 3) = 1$;
$|\varphi| = 49 + 1 = 50.$

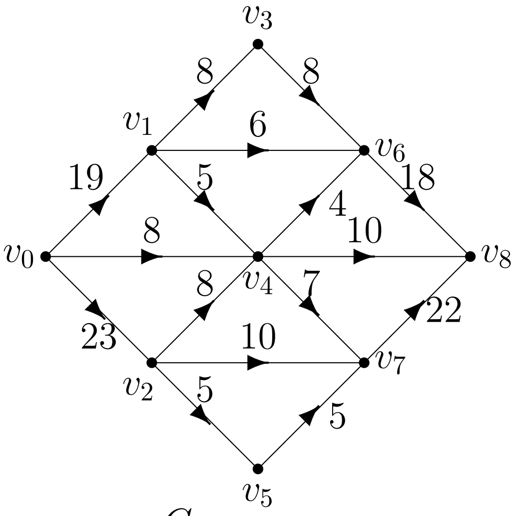
11.



G_{10}'

Больше пути из источника в сток по дугам с ненулевой пропускной способностью нет. Строим итоговый поток.

12.



G

Проверим, выполняются ли свойства потока:
а) в источнике

$$\sum_{l \in M^+(v_0)} \varphi(l) = 19 + 8 + 23 = $$
$$= 50 = |\varphi|$$

б)в стоке

$$\sum_{l \in M^-(v_8)} \varphi(l) = 18 + 8 + 22 = $$
$$= 50 = |\varphi|$$

в) во всех промежуточных вершинах

$v_1: \quad \sum\limits_{l \in M^-(v_1)} \varphi(l) = 19 = 8 + 6 + 5 = \sum\limits_{l \in M^+(v_1)} \varphi(l);$

$v_2: \quad \sum\limits_{l \in M^-(v_2)} \varphi(l) = 23 = 8 + 10 + 5 = \sum\limits_{l \in M^+(v_2)} \varphi(l);$

$v_3: \quad \sum\limits_{l \in M^-(v_3)} \varphi(l) = 8 = 8 = \sum\limits_{l \in M^+(v_3)} \varphi(l);$

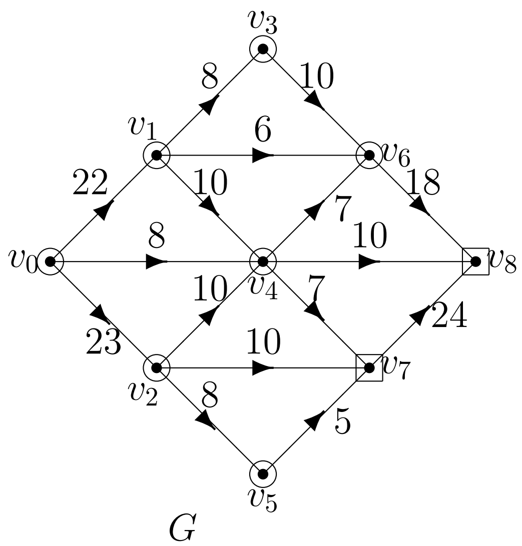
$v_4: \quad \sum\limits_{l \in M^-(v_4)} \varphi(l) = 5 + 8 + 8 = 4 + 10 + 7 = \sum\limits_{l \in M^+(v_4)} \varphi(l);$

$v_5: \quad \sum\limits_{l \in M^-(v_5)} \varphi(l) = 5 = 5 = \sum\limits_{l \in M^+(v_5)} \varphi(l);$

$v_6: \quad \sum\limits_{l \in M^-(v_6)} \varphi(l) = 8 + 6 + 4 = 18 = \sum\limits_{l \in M^+(v_6)} \varphi(l);$

$v_7: \quad \sum\limits_{l \in M^-(v_7)} \varphi(l) = 7 + 10 + 5 = 22 = \sum\limits_{l \in M^+(v_7)} \varphi(l).$

13. Находим минимальный разрез, отмечая символом ○ вершины, принадлежащие множеству V_1 и символом□ - вершины, принадлежащие множеству V_2.



В вершину v_1 можно попасть из источника по ненасыщенной дуге $(v_0,\ v_1)$, из вершины v_1 - в вершины v_4 и v_6. В вершину v_3 можно добраться из v_6 по дуге $(v_6,\ v_3)$ с пропускной способностью 2.

Аналогично, в вершину v_2 есть путь из источника по дугам $(v_0,\ v_4)$ и $(v_4,\ v_2)$, из вершины v_2 есть путь в вершину v_5.

Эти вершины образуют множество V_1:

$$V_1 = \{v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ v_6\ \}.$$

Две оставшиеся вершины включаем во множество V_2:

$$V_2 = \{v_7,\ v_8\ \}.$$

Минимальный разрез содержит 5 ребер:

$$E_1 = \{((v_6, v_8), 18),\ ((v_4, v_8), 10),\ ((v_4, v_7), 7),\\ ((v_2, v_7), 10),\ ((v_5, v_7), 5)\}.$$

$$\sum(E_1) = c(v_6, v_8) + c(v_4, v_8) + c(v_4, v_7) + c(v_2, v_7) + c(v_5, v_7) =\\ = 18 + 10 + 7 + 10 + 5 = 50 = |\varphi|.$$

13.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Найти максимальный поток в транспортной сети и минимальный разрез сети, заданной списком взвешенных дуг.

1. $((v_0, v_1), 12)$, $((v_0, v_4), 9)$, $((v_0, v_2), 3)$, $((v_1, v_3), 4)$, $((v_1, v_6), 4)$, $((v_1, v_4), 2)$, $((v_2, v_4), 5)$, $((v_2, v_7), 12)$, $((v_2, v_5), 6)$, $((v_3, v_6), 2)$, $((v_4, v_6), 7)$, $((v_4, v_8), 11)$, $((v_4, v_7), 7)$, $((v_5, v_7), 5)$, $((v_6, v_8), 4)$, $((v_7, v_8), 5)$;
2. $((v_0, v_1), 4)$, $((v_0, v_4), 4)$, $((v_0, v_2), 7)$, $((v_1, v_3), 1)$, $((v_1, v_6), 2)$, $((v_1, v_4), 1)$, $((v_2, v_4), 1)$, $((v_2, v_7), 1)$, $((v_2, v_5), 4)$, $((v_3, v_6), 1)$, $((v_4, v_6), 2)$, $((v_4, v_8), 1)$, $((v_4, v_7), 2)$, $((v_5, v_7), 3)$, $((v_6, v_8), 5)$, $((v_7, v_8), 7)$;
3. $((v_0, v_1), 8)$, $((v_0, v_4), 3)$, $((v_0, v_2), 6)$, $((v_1, v_3), 3)$, $((v_1, v_6), 1)$, $((v_1, v_4), 3)$, $((v_2, v_4), 3)$, $((v_2, v_7), 3)$, $((v_2, v_5), 1)$, $((v_3, v_6), 2)$, $((v_4, v_6), 2)$, $((v_4, v_8), 3)$, $((v_4, v_7), 2)$, $((v_5, v_7), 2)$, $((v_6, v_8), 6)$, $((v_7, v_8), 7)$;
4. $((v_0, v_1), 11)$, $((v_0, v_4), 6)$, $((v_0, v_2), 7)$, $((v_1, v_3), 2)$, $((v_1, v_6), 4)$, $((v_1, v_4), 4)$, $((v_2, v_4), 6)$, $((v_2, v_7), 4)$, $((v_2, v_5), 4)$, $((v_3, v_6), 4)$, $((v_4, v_6), 5)$, $((v_4, v_8), 9)$, $((v_4, v_7), 4)$, $((v_5, v_7), 5)$, $((v_6, v_8), 10)$, $((v_7, v_8), 8)$.

2. Найти максимальный поток в транспортной сети, заданной графом G, в котором пропускные способности дуг равны соответствующим

элементам a_{ij} матрицы A. Граф G задан списком дуг:
$((v_0, v_1), a_{11})$, $((v_0, v_2), a_{12})$, $((v_0, v_3), a_{13})$, $((v_1, v_4), a_{14})$, $((v_1, v_5), a_{15})$, $((v_1, v_6), a_{16})$, $((v_1, v_2), a_{21})$, $((v_2, v_5), a_{22})$, $((v_2, v_6), a_{23})$, $((v_2, v_7), a_{24})$, $((v_3, v_2), a_{25})$, $((v_3, v_6), a_{26})$, $((v_3, v_7), a_{31})$, $((v_3, v_8), a_{32})$, $((v_4, v_9), a_{33})$, $((v_4, v_5), a_{34})$, $((v_5, v_9), a_{35})$, $((v_5, v_{10}), a_{36})$, $((v_6, v_9), a_{41})$, $((v_6, v_{10}), a_{42})$, $((v_6, v_{11}), a_{43})$, $((v_7, v_{10}), a_{44})$, $((v_7, v_{11}), a_{45})$, $((v_8, v_7), a_{46})$, $((v_8, v_{11}), a_{51})$, $((v_9, v_{12}), a_{52})$, $((v_9, v_{10}), a_{53})$, $((v_{10}, v_{12}), a_{54})$, $((v_{11}, v_{10}), a_{55})$, $((v_{11}, v_{12}), a_{56})$.

1. $A = \begin{pmatrix} 12 & 21 & 12 & 15 & 18 & 21 \\ 18 & 21 & 12 & 18 & 15 & 12 \\ 12 & 18 & 6 & 15 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 9 & 3 & 12 \\ 3 & 18 & 21 & 12 & 15 & 12 \end{pmatrix}$;

2. $A = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 12 & 15 & 18 & 10 \\ 12 & 18 & 15 & 21 & 12 & 18 \\ 21 & 18 & 9 & 15 & 6 & 15 \\ 3 & 12 & 18 & 15 & 18 & 12 \\ 12 & 18 & 15 & 9 & 15 & 6 \end{pmatrix}$;

3. $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 12 & 6 & 9 & 2 & 7 & 8 \\ 7 & 9 & 13 & 5 & 11 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 9 & 7 & 6 \\ 7 & 1 & 5 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1.

1. $|\varphi| = 18$;
2. $|\varphi| = 12$;
3. $|\varphi| = 14$;
4. $|\varphi| = 23$;

2.

1. $|\varphi| = 36$;

2. $|\varphi| = 33$;

3. $|\varphi| = 10$.

Список литературы

[1] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику — М.: Высш.шк., 2001

[2] Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001

[3] Андерсон Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика. - М.: Издательский дом "Вильямс" , 2003

[4] Вшивцев А.С., Применко Э.А. Элементы дискретной математики. - М.: 1986.

[5] Краснов М.Л. и др. Вся высшая математика: Т.7. — М.: КомКнига, 2006

[6] Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.

[7] Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики — М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат. лит., 1992

[8] Харари Ф. Теория графов. -М.: Издательство "Мир" , 1973

[9] Барашев В.П., Кузнецова Е.Ю., Унучек С.А. Дискретная математика. Контрольные задания . - М.:, 2006.

Оглавление