ЛЕКЦИЯ № 8.
Линейные операторы. Решение задач.

Задача

Определить собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\widehat{A}$, заданного матрицей А. Является ли линейный оператор $\hat{A}$ оператором простого типа? Если да, то выписать матрицу линейного оператора в базисе из собственных векторов.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Найдем собственные значения. Для этого составим характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^3+2-3(1-\lambda)=\lambda^2(3-\lambda)=0$$

$\lambda_1=\lambda_2=0$; $\lambda_3=3$ - собственные значения.

Так как $\lambda_1=\lambda_2$, мы пока не можем сказать, будет ли линейный оператор простого типа.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям.

$\boldsymbol{\lambda_1=\lambda_2=0;}$ Решим систему $(A-0E)\overline{X}=\overline{O}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ решим систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \ rang\ A=1;$$

$x_2=c_1;\ x_3=c_2;\ x_1+c_1+c_2=0;\ =>x_1=-c_1-c_2;\quad c_1\in R;\ c_1\neq 0; c_2\in R;\ c_2\neq 0;$

$$X^1=\begin{pmatrix} -c_1-c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ - собственные векторы, соответствующие $\lambda_1=\lambda_2=0$.Выберем из этого множества векторов два линейно независимых вектора.

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{\lambda_3 = 3.}$ Решим систему $(A - 3E)X = O$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ решим систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rang} A = 2; x_3 = c;\ x_2 = c;\ x_1 + \text{c} - 2\text{c} = 0 \Rightarrow x_1 = c;\ c \in R;\ c \neq 0.$

$X^2 = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}$ - собственные векторы, соответствующие $\lambda_3 = 3$. Выберем один $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Мы нашли три собственных вектора, однако характеристическое уравнение имеет кратные корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Проверим, будут ли собственные векторы образовывать базис.

Составим матрицу из координат собственных векторов $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\operatorname{rang} = 3 \Rightarrow$ собственные векторы линейно-независимы $\Rightarrow$ они образуют базис в линейном пространстве L, так как $\dim L = 3$, следовательно $\hat{A}$ является оператором простого типа и его матрица в базисе из собственных векторов имеет вид: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Линейные операторы в пространстве геометрических векторов

Пример 1. Рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$ в V_3-поворот вокруг оси OZ на угол α против часовой стрелки.

Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

$\hat{A}\vec{\imath} = \cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\cdot\vec{\jmath} + 0\cdot\vec{k}$

$\hat{A}\vec{\jmath} = -\sin\alpha\,\vec{\imath} + \cos\alpha\,\vec{\jmath} + 0\cdot\vec{k}$

$\hat{A}\vec{k} = 0\cdot\vec{\imath} + 0\cdot\vec{\jmath} + 1\cdot\vec{k}$

Координаты образов базисных векторов надо записать по столбцам:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– матрица поворота вокруг оси Oz на угол α против часовой стрелки.

Из геометрических соображений видно, что под действием линейного оператора $\widehat{\mathrm{A}}$ - поворот вокруг оси OZ на угол α , в нулевой элемент переходит только $\vec{0}$, следовательно, $\operatorname{Ker}\hat{A} = \{\vec{0}\}$. Тогда образом $\hat{A}$ является все пространство V_3: $\operatorname{Im}\hat{A} = V_3$. Данные выводы подтверждаются и тем фактом, что $\operatorname{rang} A = 3$, и det A = $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$.
Обратный оператор существует - поворот вокруг оси OZ на угол α по часовой стрелки.

Найдем собственные векторы и собственные значения.

__1 случай__ Если $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{6}}$, то A=$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

При повороте на угол $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{6}}$ вокруг оси OZ , из геометрических соображений можно сделать вывод, что под действием данного линейного оператора только векторы , параллельные оси OZ переходят в коллинеарные себе векторы, так как при данном повороте они остаются на месте и переходят сами в себя, то есть собственные векторы $\overline{a}$=c$\overline{k}$; $\hat{A}\,\overline{a}$=$\overline{a}$; $\lambda = 1$ - собственное значение, соответствующее собственному вектору $\overline{k}$. В данном случае $\hat{A}$ не является оператором простого типа, так как не имеет базиса из собственных векторов.

Рассмотрим поворот на произвольный угол α вокруг оси OZ

Составим характерестическое уравнение: $\begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & -sin\ \alpha & 0 \\ sin\ \alpha & \cos\alpha - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$=0

$(1-\lambda)((\cos\ \alpha - \lambda)^2 + \ (sin\ \alpha)^2)$=0; $(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1)$=0

$\boldsymbol{\lambda_1}$**=1;** Найдем остальные корни уравнения.
D=4 $(\cos\alpha)^2-4\le 0$; действительные корни будут только при $D=0$;
$\cos\alpha=\pm 1$; т.е. $\alpha=\pi k$; $k\epsilon Z$

При $\boldsymbol{\alpha=\pi}$ $\boldsymbol{\lambda_{2,3}}$**= -1**;
А при $\boldsymbol{\alpha=2\pi}$ $\boldsymbol{\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1}$;

Найдем собственные векторы.

<u>**2 случай**</u>. $\boldsymbol{\alpha=\pi}$;
Удобнее взять собственные значения в следующем порядке:
Пусть $\boldsymbol{\lambda_{1,2}}$**= -1;** $\boldsymbol{\lambda_3}$**=1**
При $\boldsymbol{\lambda_{1,2}}$**= -1**; составим уравнение (A+E)$\overline{X}=\overline{O}$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\ X^1=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\ c_1\in R;\ c_1\ne 0;\ c_2\in R;\ c_2\ne 0;$$

При $\boldsymbol{\lambda_3}$**=1;** составим уравнение (A-E)$\overline{X}=\overline{O}$

$$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\ X^2=c\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\ c\in R;\ c\ne 0$$

Таким образом в качестве базиса из собственных векторов можно выбрать $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

Матрица оператора в базисе из собственных векторов: $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. В данном случае $\hat{A}$ - оператор простого типа, так как имеет базис из собственных векторов.

<u>**3 случай**</u>. $\boldsymbol{\alpha=2\pi}$
$\boldsymbol{\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1}$;
Действие оператора поворота на угол 2π совпадает с действием тождественного оператора $\hat{I}$; $\hat{I}\overline{x}=\overline{x}$. В качестве базиса из собственных векторов можно выбрать канонический базис $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$;

Аналитическое решение это подтверждает.

$(A\text{-}E)\overline{X}=\overline{O}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X^1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$c_i \in R;\ c_i \neq 0;\ i = 1; 2; 3.$

Матрица в базисе из собственных векторов: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. В данном случае $\hat{A}$-оператор простого типа.

Пример 2.

Оператор в пространстве V_3: **$\hat{\mathbf{A}}$ - поворот вокруг оси OX на угол α против часовой стрелки**.

Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

$$\hat{A}\vec{\imath} = 1 \cdot \vec{\imath} + 0 \cdot \vec{\jmath} + 0 \cdot \vec{k}$$

$$\hat{A}\vec{\jmath} = 0 \cdot \vec{\imath} + \cos\alpha\, j + \sin\alpha\, \vec{k}$$

$$\hat{A}\vec{k} = 0 \cdot \vec{\imath} - \sin\alpha\, \vec{\jmath} + \cos\alpha\, \vec{k}$$

Координаты образов базисных векторов надо записать по столбцам:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$ – матрица поворота вокруг оси Ox на угол α против часовой стрелки.

$\operatorname{Ker} \hat{A} = \{\vec{0}\}$; $\operatorname{Im} \hat{A} = V_3$. Обратный оператор существует - поворот вокруг оси OX на угол α по часовой стрелки.

При $\alpha = \boldsymbol{\pi k}$ $\hat{A}$ будет линейным оператором простого типа, собственный базис $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

Пример 3. Вращение вокруг оси $\boldsymbol{Oy}$:

Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

$\hat{A}\vec{\imath} = \cos\alpha\,\vec{\imath} + 0\cdot\vec{\jmath} - \sin\alpha\,\vec{k}$

$\hat{A}\vec{\jmath} = 0\cdot\vec{\imath} + 1\cdot\vec{\jmath} + 0\cdot\vec{k}$

$\hat{A}\vec{k} = \sin\alpha\cdot\vec{\imath} + 0\cdot\vec{\jmath} + \cos\alpha\cdot\vec{k}$

Координаты образов базисных векторов надо записать по столбцам:

$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$ – матрица поворота вокруг оси Oy на угол α против часовой стрелки

$\operatorname{Ker}\hat{A} = \{\vec{0}\}$; $\operatorname{Im}\ \hat{A} = V_3$. Обратный оператор существует - поворот вокруг оси OY на угол α по часовой стрелки.

При $\alpha = \boldsymbol{\pi k}$ $\hat{A}$ будет линейным оператором простого типа, собственный базис $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

Пример 4.

Оператор в пространстве V_3: **$\hat{\mathrm{A}}$ - проекция на координатную ось $\boldsymbol{Oy}$**.

Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

$$\hat{A}\vec{\imath} = \vec{0} = (0,0,0),$$
$$\hat{A}\vec{\jmath} = \vec{\jmath} = (0,1,0),$$
$$\hat{A}\vec{k} = \vec{0} = (0,0,0).$$

Запишем матрицу оператора $\hat{A}$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем образ вектора $\vec{a} = (-1,5,2)$:

$$\hat{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из геометрических соображений видно, что под действием линейного оператора в $\vec{0}$ переходят все векторы, параллельные плоскости Oxz, следовательно, $\operatorname{Ker}\hat{A} = \{\alpha\vec{\imath} + \beta\vec{k}\}$.

Образом оператора $\hat{A}$ является ось Oy: $\operatorname{Im}\hat{A} = \{\gamma\vec{\jmath}\}$, $\operatorname{Defect}\hat{A} = 2$, $\operatorname{Rang}\hat{A} = 1$.

По всем трем критериям линейный оператор необратим:

1) $\det A = 0$; 2) $\mathrm{Im}\,\hat{A} \neq V_3$; 3) $\mathrm{Ker}\,\hat{A} \neq \{\vec{0}\}$.

Матрица в каноническом базисе имеет диагональный вид, следовательно это линейный оператор простого типа. $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$; $\lambda_2 = 1$; , собственный базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Пример 5.

Оператор в пространстве V_3: $\hat{\mathbf{A}}$ **– зеркальное отражение относительно плоскости** $\boldsymbol{XOY}$**.**

Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

$$\hat{A}\vec{i} = \vec{i} = (1,0,0),$$
$$\hat{A}\vec{j} = \vec{j} = (0,1,0),$$
$$\hat{A}\vec{k} = -\vec{k} = (0,0,-1).$$

Запишем матрицу оператора $\hat{A}$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем образ вектора $\vec{a} = (2, -4, -3)$:

$$\hat{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Из геометрических соображений видно, что под действием данного линейного оператора в нулевой элемент переходит только $\vec{0}$, следовательно, $\mathrm{Ker}\,\hat{A} = \{\vec{0}\}$. Тогда образом $\hat{A}$ является все пространство V_3: $\mathrm{Im}\,\hat{A} = V_3$. Данные выводы подтверждаются тем факторм, что $\mathrm{rang}\,A = 3$.

Данный линейный оператор обратим:

1) $\det A \neq 0$; 2) $\mathrm{Im}\,\hat{A} = V_3$; 3) $\mathrm{Ker}\,\hat{A} = \{\vec{0}\}$.

Матрица в каноническом базисе имеет диагональный вид, следовательно это линейный оператор простого типа. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -1$; , собственный базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Пример 6.

В пространстве V_3 оператор $\hat{A}$ задан формулой:

$\hat{A}\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}]$ - векторное произведение, где $\vec{a} = (1; -2; 3)$.

а) Доказать, что $\hat{A}$- линейный оператор;

б) Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

c) Найти образ вектора $\vec{c} = (1; 2; -1)$

d) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$.

e) Является ли оператор $\hat{A}$ обратимым? Если да, описать его действие.

f) Найти собственные значения и собственные векторы

Решение:

а) $\hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) = [\vec{x} + \vec{y}, \vec{a}] = [\vec{x}, \vec{a}] + [\vec{y}, \vec{a}] = \hat{A}(\vec{x}) + \hat{A}(\vec{y})$,

$$\hat{A}(\alpha\vec{x}) = [\alpha\vec{x}, \vec{a}] = \alpha[\vec{x}, \vec{a}] = \alpha\hat{A}\vec{x}.$$

Свойства линейности выполняется, следовательно $\hat{A}$ – линейный оператор.

$$\text{б) } \hat{A}\vec{\imath} = [\vec{\imath}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{3\jmath} - 2\vec{k} = (0; -3; -2)$$

$$\hat{A}\vec{\jmath} = [\vec{\jmath}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{\imath} - \vec{k} = (3; 0; -1)$$

$$\hat{A}\vec{k} = [k, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} = (2; 1; 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Найдем образ вектора $\vec{c} = (1; 2; 3)$:

$$\vec{y} = \hat{A}\vec{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

d) $\mathrm{Ker}\,\hat{A} = \{\beta\vec{a}\} - \text{векторы, коллинеарные } \vec{a}$, (следует из свойств векторного произведения),

$\mathrm{Im}\,\hat{A} - \text{векторы, перпендикулярные } \vec{a}$ (плоскость, для которой $\vec{a}$ – нормаль)

$\mathrm{Defect}\,\hat{A} = 1$, $\mathrm{Rang}\,\hat{A} = 2$.

e) По всем трем критериям линейный оператор необратим:

1) $\det A = 0$; 2) $\mathrm{Im}\,\hat{A} \neq V_3$; 3) $\mathrm{Ker}\,\hat{A} \neq \{\vec{0}\}$.

Найдем собственные векторы и собственные значения.

Надо найти такие векторы $\vec{b}$, чтобы $[\vec{b},\vec{a}]= \lambda\vec{b}$. Из свойств векторного произведения следует, что это возможно только в одном случае, когда $\vec{b} = \beta\vec{a}$; Тогда $[\vec{b},\vec{a}]= [\beta\vec{a},\vec{a}]= \vec{0} = 0\vec{b}$; и $\lambda = 0$.

Итак , собственные векторы : $\vec{b} = \beta\vec{a}$ с собственным значением $\lambda = 0$. Нет базиса из собственных вектором, следовательно данный линейный оператор не является оператором простого типа

Линейные операторы в пространстве многочленов

Пример 7.

В пространстве P_2 многочленов степени не выше 2 задан оператор:

$$\boldsymbol{\hat{A}p(t) = tp'(t) + 2p(t)}$$

a) Показать линейность оператора $\hat{A}$.

b) Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в каноническом базисе пространства P_2.

c) Найти образ многочлена $p(t) = 2t^2 - 3t + 1$.

d) Найти ядро линейного оператора $\hat{A}$.

e) Существует ли обратный оператор?

f) Найти собственные векторы и собственные значения.

Решение:

a) Проверим линейность оператора:

$\hat{A}\big(p_1(t) + p_2(t)\big) = t\big(p_1'(t) + p_2'(t)\big) + 2\big(p_1(t) + p_2(t)\big) =$

$= \big(tp_1'(t) + 2p_1(t)\big) + \big(tp_2'(t) + 2p_2(t)\big) = \hat{A}\big(p_1(t)\big) + \hat{A}(p_2(t))$.

$\hat{A}\big(\alpha p(t)\big) = t\big(\alpha p'(t)\big) + 2\big(\alpha p(t)\big) = \alpha(tp'(t) + 2p(t)) = \alpha\hat{A}(p(t))$.

Условие линейности выполняется.

b) Найдем матрицу $\hat{A}$ в каноническом базисе: $\vec{e}_0 = 1, \vec{e}_1 = t, \vec{e}_2 = t^2$.

$\hat{A}\vec{e}_0 = t\cdot(1)' + 2 = 2 = (2,0,0)$,

$\hat{A}\vec{e}_1 = t\cdot(t)' + 2\cdot t = 3t = (0,3,0)$,

$\hat{A}\vec{e}_2 = t\cdot(t^2)' + 2\cdot t^2 = 4t^2 = (0,0,4)$.

Чтобы получить матрицу линейного оператора, записываем координаты образов базисных векторов по столбцам:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

c) Чтобы найти образ многочлена $p(t)$, запишем его в координатной форме

$$p(t) = 2t^2 - 3t + 1 = 1\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = (1, -3, 2).$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A}p(t) = 2 - 9t + 8t^2.$$

d) Чтобы найти ядро $\hat{A}$, решим однородную систему уравнений: $AX = O$:

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rang} A = 3 \Rightarrow$ система имеет единственное тривиальное решение: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = (0,0,0) \Rightarrow \operatorname{Ker} \hat{A} = \{\vec{0}\}$.

e) $\operatorname{Ker} \hat{A} = \{\vec{0}\} \Rightarrow$ существует $\hat{A}^{-1}$, оператор обратим.

Матрица данного линейного оператора имеет диагональный вид, следовательно это оператор простого типа, канонический базис $\vec{e}_0 = 1, \vec{e}_1 = t$, $\vec{e}_2 = t^2$ является собственным базисом.Собственные значения стоят на главной диагонали: 2, 3,4.

Пример 8.

Оператор Â действует в пространстве P_2 многочленов степени не выше второй:

$$\boldsymbol{\hat{A}p(t) = p'(t-1) + 2p(t)}$$

a) Показать линейность оператора.
b) Найти его матрицу в каноническом базисе пространства P_2.
c) Найти образ многочлена $p(t) = t^2 + 2t - 3$.
d) Найти ядро линейного оператора Â.
e) Существует ли обратный оператор?

Решение:

a) Проверим линейность оператора:

$$\hat{A}\big(p_1(t) + p_2(t)\big) = \big(p_1(t-1) + p_2(t-1)\big)' + 2\big(p_1(t) + p_2(t)\big) =$$
$$= p_1'(t-1) + 2p_1(t) + p_2'(t-1) + 2p_2(t) = \hat{A}p_1(t) + \hat{A}p_2(t).$$
$$\hat{A}(\alpha p(t) = \alpha p'(t-1) + 2\alpha p(t)) = \alpha(p(t-1) + 2p(t)) = \alpha\hat{A}(p(t)).$$

Условие линейности выполняется.

b) Найдем матрицу оператора в каноническом базисе пространства P_2:

$$\vec{e}_0 = 1, \vec{e}_1 = t, \vec{e}_2 = t^2.$$

$\hat{A}\vec{e}_0 = 1' + 2 = 2 = (2,0,0)$

$\hat{A}\vec{e}_1 = (t-1)' + 2t = 1 + 2t = (1,2,0)$

$\hat{A}\vec{e}_2 = ((t-1)^2)' + 2t^2 = 2(t-1) + 2t^2 = 2t^2 + 2t - 2 = (-2,2,2).$

Чтобы получить матрицу линейного оператора, записываем координаты образов базисных векторов в матицу по столбцам.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Чтобы найти образ вектора запишем его в координатной форме.

$$p(t) = t^2 + 2t - 3 = -3\vec{e}_0 + 2\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 = (-3,2,1).$$

$$\hat{A}p(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2t^2 + 6t - 6.$$

d) Чтобы найти ядро Â, решим однородную систему линейных уравнений $AX = O$:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rang} A = 3$, система имеет только тривиальное решение : $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Ker} \hat{A} = \{\overline{0}\}.$

$Im\hat{A} = P_{2.}$

e) Обратный оператор существует по всем трем критериям:

1) $\det A \neq 0$, 2) $\operatorname{Ker} \hat{A} = \{\overline{0}\}$., 3) $Im\hat{A} = P_{2.}$

Найдем собственные значения и собственные векторы.

$\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 = 0; \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Решим систему $(A + 2E)X = O$.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; rang=2. X=$\begin{pmatrix} C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C; C\in R; C \neq 0.$

Существует всего один линейно-независимый собственный вектор; нет базиса из собственных векторов. Данный линейный оператор не является оператором простого типа.