Лекция 13.

Поток векторного поля.

Теорема Гаусса-Остроградского.

Пусть $\vec{a}(M)$ – векторное поле скоростей стационарного потока несжимаемой жидкости, определенное в некоторой пространственной области. Предположим, что внутри этой области имеется проницаемая гладкая двусторонняя поверхность σ, сторону которой зафиксируем путем выбора направления нормали $\vec{n}$ к этой поверхности. Поставим задачу о вычислении объема жидкости, протекающей через поверхность σ за единицу времени. Эта величина называется потоком векторного поля и обозначается Π.

Если σ – плоская площадка, а вектор $\vec{a}(M)$ не меняется в точках этой площадки, то объем жидкости, протекающий через σ за единицу времени, равен объему цилиндрического тела с основанием σ и образующей равной $\vec{a}(M)$ (рис.13.1.).

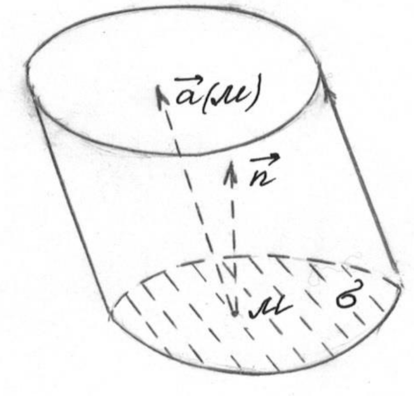

Рис. 13.1.

Если $\vec{n}$ - единичная нормаль к σ, то высота этого цилиндрического тела равна $(\vec{a}(M)\cdot\vec{n})$. Обозначая площадь основания, как и саму площадку, буквой σ, вычислим объем V цилиндрического тела:

$$\Pi = V = (\vec{a}(M)\cdot\vec{n})\cdot\sigma.$$

В общем случае, когда поверхность σ имеет произвольную форму, а вектор $\vec{a}(M)$ меняется в точках поверхности, для вычисления потока поверхность σ разбивается на элементарные части $\Delta\sigma_i$, i=1,2, …, n. На каждом элементе $\Delta\sigma_i$ произвольно выбирается точка M_i и вычисляются векторы $\vec{a}(M_i)$ и $\vec{n}(M_i)$ ($\vec{n}(M_i)$ - единичная нормаль к выбранной стороне поверхности в точке M_i). За диаметр разбиения d принимается наибольшее значение диаметров элементов разбиения. Полагая, что элементы разбиения малы, вычислим поток $\Delta\Pi_i$ через элемент поверхности $\Delta\sigma_i$ по формуле, полученной для случая плоской площадки и постоянного вектора $\vec{a}(M)$:

$$\Delta\Pi_i = (\vec{a}(M_i)\cdot\vec{n}(M_i))\cdot\Delta\sigma_i.$$

Складывая потоки через элементы поверхности и переходя к пределу при условии, что d стремится к нулю, получим поток через поверхность σ.

Определение. Потоком векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхность σ (поверхностным интегралом 2 рода) называется предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n}(\vec{a}(M_i)\cdot\vec{n}(M_i))\cdot\Delta\sigma_i$ вычисленный при условии, что диаметр разбиения d стремится к нулю, если этот предел существует и не зависит от разбиения. Обозначается

$$\Pi=\iint\limits_{\sigma}(\vec{a}\cdot\vec{n})d\sigma=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\vec{a}(M_i)\cdot\vec{n}(M_i))\cdot\Delta\sigma_i$$

Введенный как предел интегральных сумм поверхностный интеграл 2 рода обладает всеми свойствами определенного интеграла. Особенностью этого интеграла является его зависимость от выбора стороны поверхности. При изменении стороны поверхности поверхностный интеграл 2 рода меняет знак.

Рассмотрим пример.

Пример 1. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}=x\cdot\vec{\imath}+y\cdot\vec{\jmath}+z\cdot\vec{k}$ через внешнюю сторону параболоида $z=x^2+y^2$, $0\le z\le 1$ (рис.13.2).

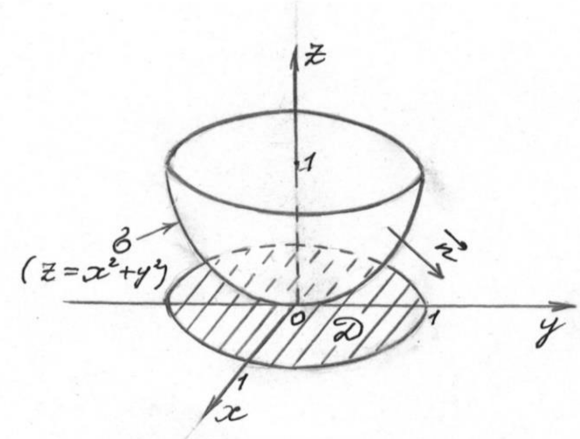

Рис. 13.2.

Сначала найдем нормаль к поверхности. Перепишем уравнение поверхности в виде:

$$x^2+y^2-z=0.$$

Полагая, что $F=x^2+y^2-z$, вычислим $\mathrm{grad}F=2x\cdot\vec{\imath}+2y\cdot\vec{\jmath}-\vec{k}$. Полученный вектор нормали образует тупой угол с положительным направлением оси Oz, что соответствует внешней стороне поверхности. Выпишем координаты единичной нормали $\vec{n}$:

$$\vec{n}=\left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},\frac{2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},-\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\right)$$

и скалярное произведение $(\vec{a}\cdot\vec{n})$:

$$(\vec{a}\cdot\vec{n})=\frac{2x^2+2y^2-z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

Подставляя z из уравнения поверхности, получим:

$$(\vec{a}\cdot\vec{n})=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

Элемент поверхности $d\sigma$ выразим через элемент проекции на плоскость xOy:

$$d\sigma=\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}=\sqrt{4x^2+4y^2+1}dxdy$$

Проекция σ на плоскость xOy – это круг D с центром в начале координат и радиуса 1. Для вычисления интеграла по области D воспользуемся полярными координатами:

$$\Pi=\iint\limits_{\sigma}(\vec{a}\cdot\vec{n})d\sigma=\iint\limits_{D}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\sqrt{4x^2+4y^2+1}dxdy=$$

$$=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r^2\cdot rdr=2\pi\left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

Теорема Гаусса-Остроградского устанавливает связь между поверхностным интегралом 2 рода по замкнутой поверхности и тройным интегралом по области, ограниченной этой поверхностью.

Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) – немецкий математик, механик, физик, астроном.

Михаил Васильевич Остроградский (1801-1862) – российский математик и механик, академик Санкт-Петербургской академии наук.

Впервые теорема была установлена Лагранжем в 1762 году. Карл Фридрих Гаусс в 1813 году применил преобразование тройного интеграла к поверхностному для решения задач электродинамики. В 1826 году М.В. Остроградский доказал теорему в общем виде, а затем обобщил ее для n-кратного интеграла. Теорему Гаусса-Остроградского называют также «теоремой о дивергенции».

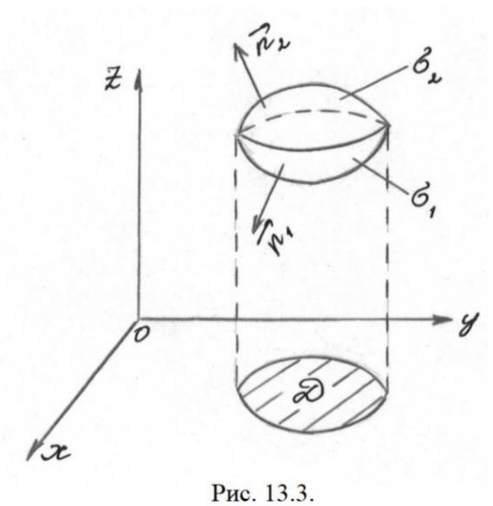

Рис. 13.3.

Пусть тело V ограничено гладкими поверхностями σ_1 и σ_2, которые заданы уравнениями $z=z_1(x,y)$ и $z=z_2(x,y)$ соответственно, а D – проекция тела V на плоскость xOy (рис. 13.3)

Полагая, что функция $R(x,y,z)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\frac{\partial R}{\partial z}$ в области V и на ее границе, вычислим

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint\limits_D R(x,y,z)\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dxdy =$$

$$= \iint\limits_D R\big(x,y,z_2(x,y)\big)dxdy - \iint\limits_D R\big(x,y,z_1(x,y)\big)dxdy$$

Пусть γ_2 – угол, который образует нормаль к внешней стороне поверхности σ_2 с положительным направлением оси *Oz*. Заметим, что γ_2 острый угол, $\cos\gamma_2 > 0$. Элемент поверхности $d\sigma_2$ выражается через элемент проекции на плоскость *xOy* по формуле:

$$d\sigma_2 = \frac{dxdy}{\cos\gamma_2} \Rightarrow dxdy = \cos\gamma_2\, d\sigma_2$$

Угол γ_1, который образует вектор внешней нормали к поверхности σ_1 с положительным направлением оси *Oz*, тупой, $\cos\gamma_1 < 0$. Элемент поверхности $d\sigma_1$ выражается через элемент проекции по формуле:

$$d\sigma_1 = \frac{dxdy}{-\cos\gamma_1} \Rightarrow dxdy = -\cos\gamma_1\, d\sigma_1$$

Тогда

$$\iint\limits_D R\big(x,y,z_2(x,y)\big)dxdy = \iint\limits_{\sigma_2} R(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma$$

$$\iint\limits_D R\big(x,y,z_1(x,y)\big)dxdy = -\iint\limits_{\sigma_1} R(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma$$

Искомый тройной интеграл запишется в виде:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{\sigma_2} R(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma + \iint\limits_{\sigma_1} R(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma =$$

$$= \oiint\limits_{\sigma} R(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma$$

Символом $\oiint$ обозначается поверхностный интеграл по замкнутой поверхности.

Аналогично доказывается, что

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \oiint\limits_\sigma P\cos\alpha\, d\sigma$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \oiint\limits_\sigma Q\cos\beta\, d\sigma$$

Складывая левые и правые части всех трех равенств, окончательно будем иметь:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint\limits_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\sigma$$

Мы получили формулу Гаусса-Остроградского в координатной форме. Запишем эту формулу в векторном виде.

Если $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, то $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \mathrm{div}\vec{a}$. Вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности σ записывается в виде:

$$\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

и

$$P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma = (\vec{a}\cdot\vec{n})$$

Формула Гаусса-Остроградского приобретает вид:

$$\oiint\limits_\sigma (\vec{a}\cdot\vec{n}) d\sigma = \iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{a}\, dV$$

Сформулируем полученный результат: поток векторного поля через внешнюю сторону гладкой или кусочно-гладкой замкнутой поверхности равен тройному интегралу от дивергенции этого векторного поля по области, ограниченной этой замкнутой поверхностью.

Рассмотрим пример.

Пример 2. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - z^2\vec{k}$ через замкнутую поверхность, образованную конусом $x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geq 0)$ и плоскостью $z = 2$ (рис. 13.4).

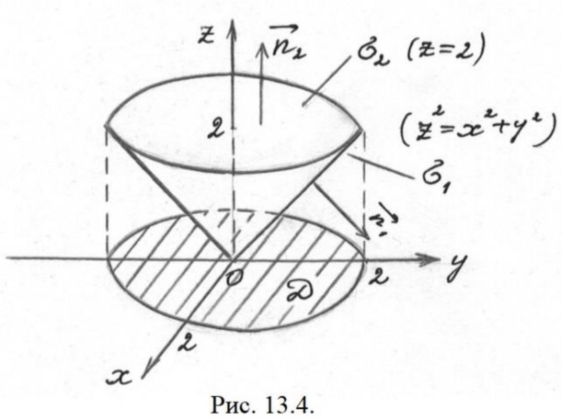

Рис. 13.4.

Замкнутая поверхность состоит из двух частей: σ_1 – часть конуса, σ_2 – круг радиуса 2 в плоскости $z = 2$. Поток можно представить в виде суммы двух слагаемых: Π_1 – поток через σ_1, Π_2 – поток через σ_2:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$$

Найдем нормаль $\overrightarrow{n_1}$ к поверхности σ_1:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \qquad F = x^2 + y^2 - z^2$$

$$\text{grad}F = (2x, 2y, -2z) \parallel (x, y, -z)$$

Аппликата полученного вектора отрицательна, что соответствует внешней стороне поверхности.

Выпишем координаты единичной нормали:

$$\overrightarrow{n_1} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

и вычислим скалярное произведение $(\vec{a}, \overrightarrow{n_1})$:

$$(\vec{a} \cdot \overrightarrow{n_1}) = \frac{2x + 2y + z^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Будем проектировать σ_1 на плоскость *xOy*:

$$d\sigma_1 = \frac{dxdy}{-\cos\gamma_1} = \frac{dxdy}{z}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Исключим переменную *z* из подынтегрального выражения:

$$(\vec{a} \cdot \overrightarrow{n_1})d\sigma_1 = \frac{2x + 2y + z^3}{z}dxdy = \left(\frac{2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x^2+y^2)\right)dxdy$$

Для вычисления интеграла по области *D* воспользуемся полярными координатами:

$$\Pi_1 = \iint\limits_{\sigma_1} (\vec{a} \cdot \overrightarrow{n_1})d\sigma_1 = \iint\limits_{D} \left(\frac{2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x^2+y^2)\right)dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(\frac{2r(\cos\varphi + \sin\varphi)}{r} + r^2\right) r dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2r(\cos\varphi + \sin\varphi) + r^3) dr = \int_0^{2\pi} \left(\left(\cos\varphi + \sin\varphi\right)r^2 + \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} (4(\cos\varphi + \sin\varphi) + 4) d\varphi = 8\pi$$

Вычислим поток через σ_2. Внешней нормалью к поверхности σ_2 является вектор $\overrightarrow{n_2} = (0,0,1)$. Следовательно, на σ_2

$$(\vec{a} \cdot \overrightarrow{n_2}) = -z^2 = -4$$

$$\Pi_2 = \iint_{\sigma_2} (\vec{a} \cdot \overrightarrow{n_2}) d\sigma_2 = \iint_{\sigma_2} (-4) d\sigma_2 = -4 \cdot 4\pi = -16\pi$$

Искомый поток через замкнутую поверхность равен сумме Π_1 и Π_2:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = 8\pi - 16\pi = -8\pi$$

Применим теперь для вычисления потока теорему Гаусса-Остроградского:

$$\mathrm{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = -2z$$

Для вычисления тройного интеграла воспользуемся цилиндрическими координатами:

$$\Pi = \iiint_V \mathrm{div}\vec{a}\, dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_r^2 (-2z) dz = 2\pi \int_0^2 r(-z^2)|_r^2 dr =$$

$$= 2\pi \int_0^2 (r^3 - 4r) dr = 2\,\pi \left(\frac{r^4}{4} - 2r^2\right)\Bigg|_0^2 = -8\pi$$

Определение дивергенции было связано с выбором системы координат. Пользуясь теоремой Гаусса-Остроградского, выясним физический смысл дивергенции и покажем, что дивергенция инвариантна.

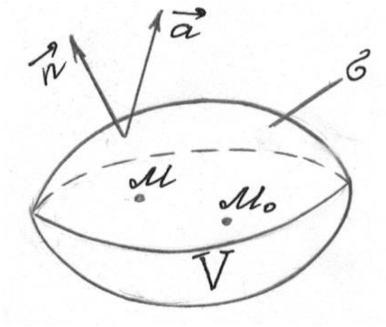

Рис. 13.5.

Пусть точка M – произвольная точка пространственной области, в которой задано векторное поле $\vec{a}$. Рассмотрим произвольное тело V, ограниченное замкнутой поверхностью σ, внутри которого расположена точка M (рис. 13.5). Запишем формулу Гаусса-Остроградского

$$\oiint_{\sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iiint_{V} \operatorname{div} \vec{a}\, dV$$

К тройному интегралу применим теорему о среднем. Обозначая объем тела так же, как и само тело, буквой V, получим

$$\oiint_{\sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma = \operatorname{div} \vec{a}(M_0) \cdot V, \text{где } M_0 \in V$$

Выразим из полученного равенства $\operatorname{div} \vec{a}(M_0)$ и перейдем к пределу при условии, что тело V стягивается к точке M:

$$\lim_{V \to M} \operatorname{div} \vec{a}(M_0) = \lim_{V \to M} \frac{\oiint_{\sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma}{V}$$

Т.к. $M_0 \in V$, то левая часть равенства равна $\operatorname{div} \vec{a}(M)$:

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{V \to M} \frac{\oiint_{\sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma}{V}$$

Правую часть равенства можно интерпретировать как плотность потока.

Итак, дивергенция равна плотности потока и, значит, является инвариантной характеристикой векторного поля.

Рассмотрим еще один пример на вычисление потока векторного поля через замкнутую поверхность.

Пример 3. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = 2y^2\vec{i} - 3xy\vec{j} + \vec{k}$ через замкнутую поверхность, образованную параболоидом $z = 4 - x^2 - y^2$ и плоскостями $z = 0, x = 0$ $(x \geq 0)$.

Замкнутая поверхность состоит из трех частей (рис. 13.6): σ_1 – часть параболоида, σ_2 – область на плоскости yOz, ограниченная параболой $z = 4 - y^2$ и осью Oy, и σ_3 – полукруг на плоскости xOy.

Поток представим в виде суммы трех слагаемых: Π_1 через σ_1, Π_2 через σ_2, Π_3 через σ_3,

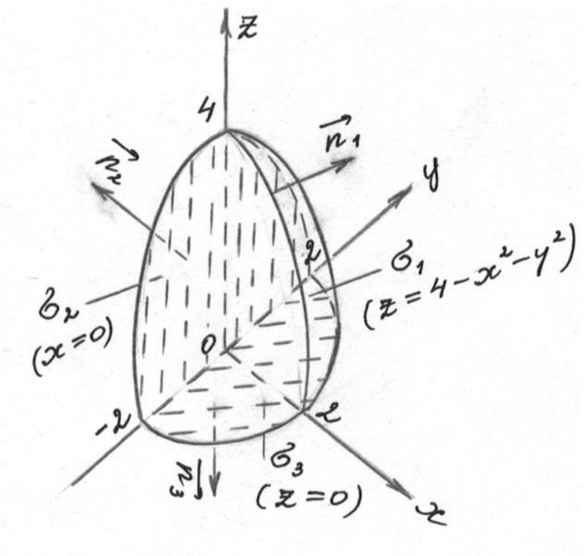

Рис. 13.6.

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$$

Найдем нормаль $\overrightarrow{n_1}$ к поверхности σ_1:

$$x^2 + y^2 + z - 4 = 0$$

$$F = x^2 + y^2 + z - 4$$

$$\operatorname{grad} F = (2x, 2y, 1)$$

Аппликата полученного вектора положительна, что соответствует внешней стороне поверхности. Вычислим координаты единичной нормали $\overrightarrow{n_1}$:

$$\overrightarrow{n_1} = \left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \frac{2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\right)$$

и вычислим скалярное произведение $(\vec{a}, \overrightarrow{n_1})$

$$(\vec{a}, \overrightarrow{n_1}) = \frac{4xy^2 - 6xy^2 + 1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} = \frac{-2xy^2 + 1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

Будем проектировать σ_1 на плоскость *xOy*

$$d\sigma_1 = \frac{dxdy}{\cos\gamma_1} = \sqrt{4x^2+4y^2+1}dxdy$$

Проекция σ_1 на плоскость *xOy* – это область σ_3. Для вычисления двойного интеграла по области σ_3 воспользуемся полярными координатами:

$$\Pi_1 = \iint\limits_{\sigma_1} (\vec{a}, \overrightarrow{n_1}) d\sigma_1 = \iint\limits_{\sigma_3} (-2xy^2 + 1) dxdy =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 (-2r\cos\varphi \cdot r^2 \sin^2\varphi + 1) rdr =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 (-2r^4 \cos\varphi \sin^2\varphi + r) dr = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{2}{5} r^5 \cos\varphi \sin^2\varphi + \frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{64}{5}\cos\varphi\sin^2\varphi + 2\right)d\varphi = -\frac{64}{5}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d(\sin\varphi) + 2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{64}{15}\sin^3\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi = -\frac{128}{15} + 2\pi$$

Вычислим поток через σ_2. Внешней нормалью к поверхности σ_2 является вектор $\overrightarrow{n_2} = (-1,0,0)$. Следовательно,

$$(\vec{a}, \overrightarrow{n_2}) = -2y^2$$

$$\Pi_2 = \iint\limits_{\sigma_2} (-2y^2)dydz = \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{0}^{4-y^2} (-2y^2)dz = \int\limits_{-2}^{2} (-2y^2)z\Big|_0^{4-y^2} dy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} (-2y^2)(4-y^2)dy = \int\limits_{-2}^{2} (2y^4 - 8y^2)dy = \left(\frac{2}{5}y^5 - \frac{8}{3}y^3\right)\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= 2\left(\frac{64}{5} - \frac{64}{3}\right) = -\frac{256}{15}$$

Вычислим поток через σ_3. Внешней нормалью к поверхности σ_3 является вектор $\overrightarrow{n_3} = (0,0,-1)$. Следовательно,

$$(\vec{a}, \overrightarrow{n_3}) = -1$$

$$\Pi_3 = \iint\limits_{\sigma_3} (-1)dxdy = -2\pi$$

$$\Pi = -\frac{128}{15} + 2\pi - \frac{256}{15} - 2\pi = -\frac{128}{5}$$

Применим для вычисления потока теорему Гаусса-Остроградского:

$$\mathrm{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = -3x$$

$$\Pi = \iiint\limits_{V} \mathrm{div}\vec{a}\, dxdydz$$

Для вычисления тройного интеграла воспользуемся цилиндрическими координатами:

$$\Pi = \iiint\limits_V (-3x)dxdydz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 rdr \int\limits_0^{4-r^2} (-3r\cos\varphi)dz =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi \int\limits_0^2 (-3r^2)z|_0^{4-r^2} dr = \sin\varphi|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^2 (-3r^2)(4-r^2)dr =$$

$$= -6\int\limits_0^2 (4r^2 - r^4)dr = -6\left(\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{5}r^5\right)\Big|_0^2 = -6\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = -\frac{128}{5}$$

Результат, полученный с помощью теоремы Гаусса-Остроградского, совпадает с результатом, полученным при непосредственном вычислении потока как интеграла по поверхности.