Лекция 16.

Приближенное вычисление интегралов.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx$$

существует. Определенный интеграл можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница, если известна первообразная подынтегральной функции. Однако первообразная не любой непрерывной функции может быть выражена в конечном виде через элементарные функции. Примерами «неберущихся» являются следующие неопределенные интегралы:

$$\int e^{-x^2} dx\,, \qquad \int \sin(x^2)\, dx\,, \qquad \int \cos(x^2)\, dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx\,, \qquad \int \frac{\cos x}{x} dx\,, \qquad \int \frac{dx}{\ln x}$$

Если функция не интегрируема в конечном виде, то для вычисления определенного интеграла прибегают к различным приемам приближенного вычисления. Рассмотрим простейшие формулы для приближенного вычисления определенных интегралов.

Формула прямоугольников.

Приближенную формулу прямоугольников получим, если заменим площадь криволинейной трапеции площадью ступенчатой фигуры или, другими словами, заменим определенный интеграл на интегральную сумму (рис. 16.1).

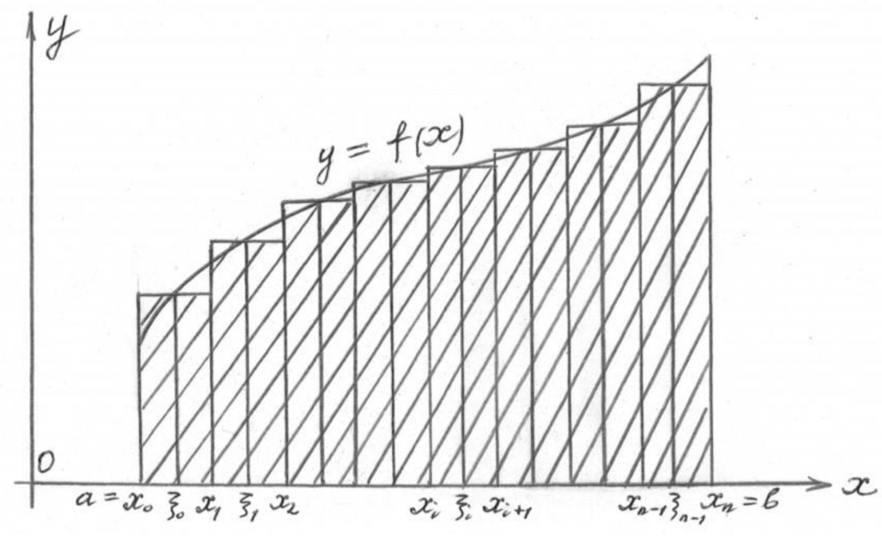

Рис. 16.1.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\,, \qquad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \qquad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

Пусть отрезок интегрирования $[a, b]$ разбит на *n* равных частей. Тогда $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ и формула прямоугольников принимает вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(\xi_0) + f(\xi_1) + \cdots + f(\xi_{n-1})\right)$$

В качестве промежуточных точек деления можно выбирать произвольные точки отрезков разбиения, например, их середины. Если в качестве промежуточных точек ξ_i выбрать левые концы отрезков разбиения:

$$\xi_i = x_i$$

то получим формулу левых прямоугольников (рис. 16.2):

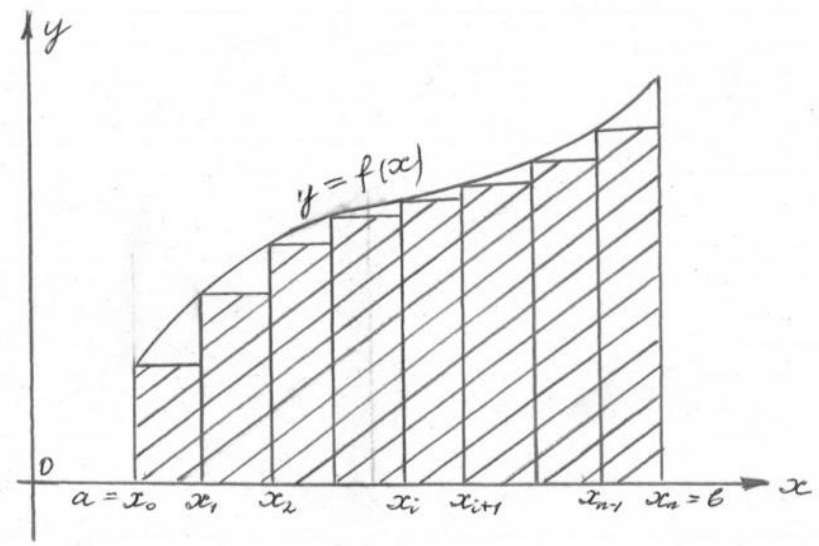

Рис. 16.2.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right)$$

Если в качестве промежуточных точек ξ_i выбрать правые концы отрезков разбиения:

$$\xi_i = x_{i+1}$$

то получим формулу правых прямоугольников (рис. 16.3):

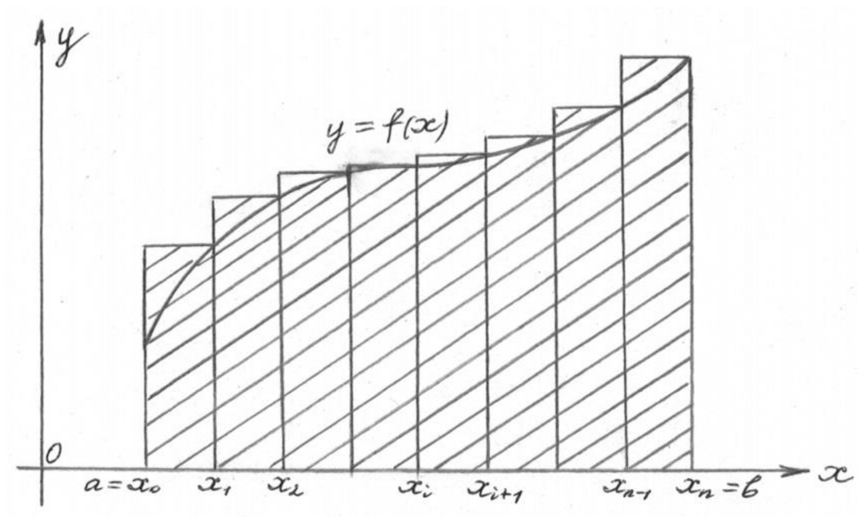

Рис. 16.3.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right)$$

Формула трапеций.

Заменим график функции $y = f(x)$ на ломаную с вершинами в точках $\left(x_i, f(x_i)\right), i = 0,1,2, \dots, n$ (рис. 16.4).

Площадь криволинейной трапеции замени на площадь фигуры, состоящей из трапеций:

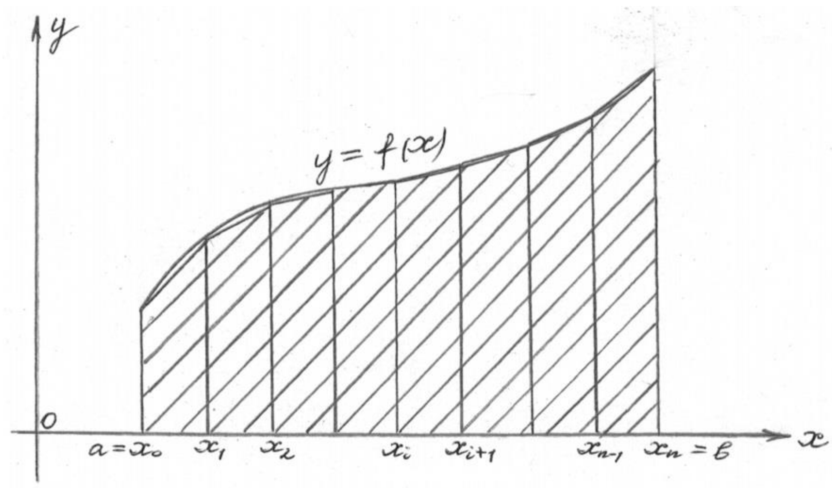

Рис. 16.4.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\cdots+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})+\frac{f(x_n)}{2}\right)$$

Полученная приближенная формула называется формулой трапеций.

Формула Симпсона.

Томас Симпсон (1710-1761) – английский математик – вывел более точную по сравнению с формулами прямоугольников и трапеций формулу для вычисления площади под кривой.

При выводе формулы прямоугольников на каждом отрезке разбиения подынтегральная функция заменяется на константу, а при выводе формулы трапеций – на линейную функцию. Предположим, что отрезок интегрирования $[a, b]$ разбит на четное число равных отрезков. Точки деления обозначим $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n} = b$, при этом длина отрезка разбиения будет равна $\Delta x_i = \frac{b-a}{2n}$. Объединим отрезки деления в пары, и для каждой пары отрезков заменим подынтегральную функцию на квадратичную, принимающую такие же значения в точках деления, что и подынтегральная функция.

Рассмотрим первую пару отрезков: $[x_0, x_1]$ и $[x_1, x_2]$. Пусть квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ такова, что

$$y(x_0) = f(x_0), \qquad y(x_1) = f(x_1), \qquad y(x_2) = f(x_2)$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} (ax^2+bx+c)dx = \left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Bigg|_{x_0}^{x_2} =$$

$$= \frac{a}{3}(x_2^3 - x_0^3) + \frac{b}{2}(x_2^2 - x_0^2) + c(x_2 - x_0) =$$

$$= \frac{a}{3}(x_2 - x_0)(x_2^2 + x_2x_0 + x_0^2) + \frac{b}{2}(x_2 - x_0)(x_2 + x_0) + c(x_2 - x_0) =$$

$$= \frac{x_2 - x_0}{6}(2a(x_2^2 + x_2x_0 + x_0^2) + 3b(x_2 + x_0) + 6c)$$

Перегруппируем полученное выражение и учтем, что

$$\frac{x_2 - x_0}{6} = \frac{2(x_1 - x_0)}{6} = \frac{b-a}{6n}, \qquad x_2 + x_0 = 2x_1$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\big((ax_2^2+bx_2+c)+(ax_0^2+bx_0+c)+$$

$$+a(x_2^2+2x_2x_0+x_0^2)+2b(x_2+x_0)+4c\big)=$$

$$=\frac{b-a}{6n}(y(x_2)+y(x_0)+a(x_2+x_0)^2+2b(x_2+x_0)+4c)=$$

$$=\frac{b-a}{6n}(y(x_2)+y(x_0)+4ax_1^2+4bx_1+4c)=$$

$$=\frac{b-a}{6n}\big(y(x_2)+y(x_0)+4y(x_1)\big)=\frac{b-a}{6n}\big(y(x_2)+4y(x_1)+y(x_0)\big)=$$

$$=\frac{b-a}{6n}\big(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\big)$$

В силу аддитивности интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\Big(\big(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\big)+$$

$$+\big(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\big)+\cdots+\big(f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})\big)\Big)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\Big(f(x_0)+4\big(f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{2n-1})\big)+$$

$$+2\big(f(x_2)+f(x_4)+\cdots+f(x_{2n-2})\big)+f(x_{2n})\Big)$$

Полученная формула для приближенного вычисления определенного интеграла называется формулой Симпсона или формулой парабол. При выводе этой формулы подынтегральная функция на отрезках разбиения заменялась на квадратичную, а соответствующая часть графика функции заменялась на дугу параболы.

Совершенно понятно, что чем выше степень многочлена, на который заменяется подынтегральная функция, тем более точная получается формула для приближенного вычисления определенного интеграла. Вопрос об оценке погрешности полученных формул мы не рассматриваем в данном курсе.

Пример. Вычислить интеграл от функции $f(x)=\frac{1}{x^2}$ на отрезке $[1,2]$. Вычислить приближенные значения этого интеграла по формулам прямоугольников, трапеций и парабол. Сравнить полученные значения с точным.

Точное значение вычислим по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Для вычисления приближенных значений разделим отрезок на 8 частей, тогда длина отрезка разбиения будет равна $\frac{1}{8}$. Составим таблицу, с помощью которой будем вычислять приближенные значения определенного интеграла:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$	2
$f(x_i)$	1	$\frac{64}{81}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{64}{121}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{64}{169}$	$\frac{16}{49}$	$\frac{64}{225}$	$\frac{1}{4}$

Формула левых прямоугольников:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} \approx \frac{1}{8}\left(1 + \frac{64}{81} + \frac{16}{25} + \frac{64}{121} + \frac{4}{9} + \frac{64}{169} + \frac{16}{49} + \frac{64}{225}\right) \approx 0{,}54915$$

Формула правых прямоугольников:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} \approx \frac{1}{8}\left(\frac{64}{81} + \frac{16}{25} + \frac{64}{121} + \frac{4}{9} + \frac{64}{169} + \frac{16}{49} + \frac{64}{225} + \frac{1}{4}\right) \approx 0{,}45539$$

Формула трапеций:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} \approx \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} + \frac{64}{81} + \frac{16}{25} + \frac{64}{121} + \frac{4}{9} + \frac{64}{169} + \frac{16}{49} + \frac{64}{225} + \frac{1}{8}\right) \approx 0{,}50227$$

Формула Симпсона:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} \approx \frac{1}{24}\left(1 + 4\left(\frac{64}{81} + \frac{64}{121} + \frac{64}{169} + \frac{64}{225}\right) + 2\left(\frac{16}{25} + \frac{4}{9} + \frac{16}{49}\right) + \frac{1}{4}\right) \approx 0{,}50003$$

Наиболее точный результат получен по формуле Симпсона.

Образец экзаменационного билета.

1. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln 2x}}$$

2. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int xe^{3x}dx$$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \sin 3x \, dx$$

4. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^2 \frac{xdx}{x^4-2x^2+4}$$

5. Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

6. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D ydxdy$$

где область *D* ограничена параболой $y=\sqrt{x+4}$, прямой $x+y=2$ и осью *Ox*.

7. Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\ln^2(2x)+4}$$

8. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}=-x^2yz\vec{\imath}+xy^2z\vec{\jmath}+\vec{k}$ по замкнутому контуру, образованному при пересечении сферы $x^2+y^2+z^2=7$ плоскостью $z=2$.

Решение примеров.

1.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln 2x}} = \begin{bmatrix} 1+\ln 2x = t \\ \dfrac{dx}{x} = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2\sqrt{t} + C =$$

$$= 2\sqrt{1+\ln 2x} + C$$

Ответ: $2\sqrt{1+\ln 2x} + C$

2.

$$\int xe^{3x}dx = \begin{bmatrix} \int udv = uv - \int vdu \\ u = x, du = dx \\ dv = e^{3x}dx, v = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx =$$

$$= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$$

Ответ: $\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$

3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \sin 3x\, dx = \begin{bmatrix} \sin\alpha \sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) \\ \sin 2x \sin 3x = \dfrac{1}{2}(\cos x - \cos 5x) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \cos 5x)dx = \left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin 5x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} - \frac{1}{10}\sin\frac{5\pi}{6} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

Ответ: $\frac{1}{5}$

4.

$$\int_0^2 \frac{xdx}{x^4 - 2x^2 + 4} = \int_0^2 \frac{xdx}{(x^4 - 2x^2 + 1) + 3} = \int_0^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^2 + 3} = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{d(x^2-1)}{(x^2-1)^2+3} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$

5.

$$\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

Подынтегральная функция$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ определена при условии $2x - x^2 > 0$ или $x(x-2) < 0$. Областью определения функции является интервал $(0; 2)$.

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty, \lim_{x\to 2-0} f(x) = +\infty$$

Данный интеграл является несобственным интегралом от неограниченной функции.

$$\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \begin{bmatrix} 2x - x^2 = -(x^2 - 2x + 1) + 1 = \\ = 1 - (x-1)^2 \end{bmatrix} = \int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-1)^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{a\to 0+0 \\ b\to 2-0}} (\arcsin(x-1))\Big|_a^b = \lim_{\substack{a\to 0+0 \\ b\to 2-0}} (\arcsin(b-1) - \arcsin(a-1)) =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Ответ: π

6.

$$\iint_D y dx dy$$

D: $y = \sqrt{x+4}, x + y = 2, y = 0$ (рис. 16.5).

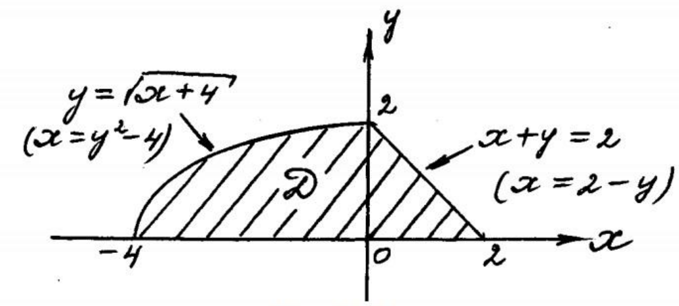

Рис. 16.5.

$$\iint_D y dx dy = \int_0^2 dy \int_{y^2-4}^{2-y} y dx =$$

$$= \int_0^2 y \left(x\Big|_{y^2-4}^{2-y} \right) dy =$$

$$= \int_0^2 y(2 - y - y^2 + 4) dy = \int_0^2 (6y - y^2 - y^3) dy = \left(3y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 12 - \frac{8}{3} - 4 = \frac{16}{3}$$

Ответ: $\frac{16}{3}$

7.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\ln^2(2x) + 4}$$

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\ln^2(2x)+4}$ непрерывна на промежутке $[1, +\infty]$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Логарифмическая функция $y = \ln x$ при $x \to +\infty$ растет «медленнее», чем степенная функция $y = x^{\alpha}$ с любым положительным показателем степени. «Сравним» подынтегральную функцию $f(x)$ с функцией $g(x) = \frac{1}{x}$, вычислив предел отношения этих функций с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\ln^2(2x) + 4} : \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{\ln^2(2x) + 4}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2\ln(2x) \cdot \frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2\ln(2x)}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2/x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2}\right) = +\infty$$

Итак

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty \ \ (f(x) > 0, g(x) > 0 \ \forall x \in [1; +\infty)) \\ \displaystyle\int_{1}^{+\infty} g(x)dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x|_{1}^{+\infty} = +\infty \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx \ \text{ расходится (согласно предельному признаку сравнения)}$$

Ответ: интеграл расходится.

8. $\vec{a} = -x^2yz\vec{\imath} + xy^2z\vec{\jmath} + \vec{k}$

Г: $x^2 + y^2 + z^2 = 7, z = 2$; Ц$-$?

Для решения задачи применим формулу Стокса:

$$Ц = \oint_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{l}) = \iint_{\sigma} (\mathrm{rot}\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma$$

В качестве поверхности σ возьмем круг, ограниченный контуром Г (рис. 16.6):

$$z = 2, \qquad x^2 + y^2 \leq 3$$

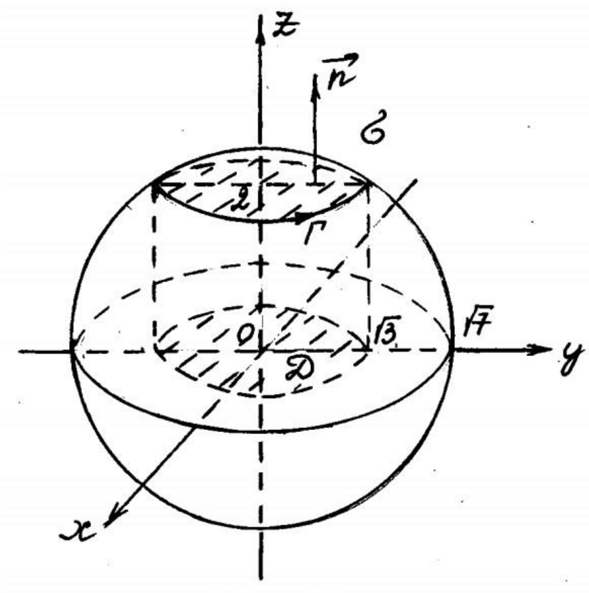

Рис. 16.6.

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -x^2yz & xy^2z & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -xy^2\vec{i} - x^2y\vec{j} + (y^2z + x^2z)\vec{k}$$

$$\sigma\colon\ z = 2, \vec{n} = (0,0,1)$$

$$(\mathrm{rot}\vec{a}, \vec{n}) = y^2z + x^2z = (x^2 + y^2)z$$

$$(\mathrm{rot}\vec{a}, \vec{n})_{z=2} = 2(x^2 + y^2), \qquad d\sigma = dxdy$$

$$Ц = 2\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma =$$

$$= 2\iint_{D} (x^2 + y^2) dxdy = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \cdot r dr\ = 4\pi \cdot \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{\sqrt{3}} = 9\pi$$

Ответ: 9π