ЛЕКЦИЯ № 14.
Самосопряженные и ортогональные операторы.

Сопряженные и самосопряженные операторы

Определение. Линейный оператор $\hat{A}^*$: $\mathbb{E}$–>$\mathbb{E}$, где $\mathbb{E}$ – евклидово пространство, называется ***сопряженным*** линейному оператору $\hat{A}$, если для любых $\overline{x}; \overline{y} \in E$, верно равенство $(\hat{A}\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x}, \hat{A}^*\overline{y})$

Теорема 1. Любому линейному оператору $\hat{A}$ в евклидовом пространстве $\hat{A}^*$ соответствует единственный сопряженный оператор $\hat{A}^*$, причем его матрицей в любом ортонормированном базисе является матрица A^T, транспонированная к матрице А линейного оператора $\hat{A}$ в том же базисе.

◄Доказательство основано на том, что при фиксированном базисе существует взаимно однозначное соответствие между линейными операторами и матрицами M_{nxn}.

Докажем, что линейный оператор $\hat{B}$ с матрицей В=A^T в некотором ортонормированном базисе является сопряженным к линейному оператору $\hat{A}$ с матрицей А в том же базисе. Для этого достаточно проверить выполнения равенства $(\hat{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}}) = (\overline{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{B}}\overline{\boldsymbol{y}})$ (*) для любой пары векторов $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{E}$.

Пусть X, Y – столбцы координат векторов $\overline{x}, \overline{y}$ в некотором ортонормированном базисе **е.** Тогда координаты вектора $\hat{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{x}}$ это вектор столбец АХ, и тогда равенство (*) можно будет записать в матричном виде: $(AX)^T Y = X^T BY$. Следовательно, $(X)^T (A)^T Y = X^T (BY)$. Следовательно, $X^T A^T Y = X^T B$Y => В=A^T.

И линейный оператор В определен однозначно, так как однозначно определена его матрица. ►

Пример 1. Рассмотрим в V^3 линейный оператор $\hat{A}\overline{x} = [\overline{a}, \overline{x}]$ для некоторого вектора $\overline{a} \in V^3, \overline{a} \neq \overline{0}$. Оператор , сопряженный к $\hat{A}$, можно определить, опираясь на свойства скалярного, векторного и смешанного произведения.

$$(\hat{A}\overline{x}, \overline{y}) = ([\overline{a}, \overline{x}], \overline{y}) = \overline{a} \cdot \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{a} \cdot \overline{x} = ([\overline{y}, a], \overline{x}) = (\overline{x}, [\overline{y}, a]) =$$
$$= (\overline{x}, -[\overline{a}, y]) = (\overline{x}, -\hat{A}\overline{y})$$

Из приведенных соотношений видно, что $\hat{A}^* = -\,-\hat{A}$

Определение. Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в евклидовом пространстве, называется самосопряженным, если $\hat{A}^* = \hat{A}$, т.е. $(\hat{A}\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x}, \hat{A}\overline{y})$

Самосопряженный линейный оператор является сопряженным оператором к самому себе.

Примеры самосопряженных операторов:

1. $\hat{O}$, $(\hat{O}\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x}, \hat{O}\overline{y}) = \overline{0}$
2. $\hat{I}$, $(\hat{I}\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x}, \hat{I}\overline{y})$
3. $\hat{A}\overline{x} = \alpha\overline{x}$; $(\hat{A}\overline{x}, \overline{y}) = (\alpha\overline{x}, \overline{y}) = \alpha(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x}, \alpha\overline{y}) = (\overline{x}, \hat{A}\overline{y})$

Теорема 2. В ортонормированном базисе матрица линейного оператора симметричная тогда и только тогда, когда он самосопряженный.

◄ $\hat{A}$ −самосопряженный <=> тогда $\hat{A}^* = \hat{A}$. Это эквивалентно тому, что в ортонормированном базисе матрица линейного оператора совпадает со своей транспонированной матрицей. Такие матрицы и называются симметричными.►

Теорема 3. Все собственные числа самосопряженного оператора действительны.

◄ Докажем, что характеристическое уравнение симметричной матрицы имеет только действительные корни.

Рассмотрим характеристическое уравнение det(A-$\lambda E) = 0$ и предположим, что некоторое число λ является его вообще говоря комплексным корнем. Тогда система (A-$\lambda E)X = O$ имеет некоторое ненулевое решение X=$(x_1, x_2 \ldots \ldots x_n)^T$, состоящее из комплексных чисел $x_1, x_2 \ldots \ldots x_n$. Рассмотрим столбец, состоящий из чисел комплексно-сопряженных к $x_к$, $\overline{X}=\begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \ldots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$.

Рассмотрим систему: $\overline{X}^T$(A-$\lambda E)X$=O

$$\text{или } \overline{X}^T \mathrm{A}X = \lambda \overline{X}^T X \ (**)$$

Так как произведение комплексного числа на сопряженное к нему является действительным числом, равным квадрату модуля комплексного числа, а X -ненулевое решение, то

$X^T X = x_1\overline{x_1} + \cdots + x_n\overline{x_n} = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 > 0$; т.е.

$X^T X -$ действительное положительное число.

Из равенства (**) находим $\lambda = \frac{\overline{X}^T \mathrm{A}X}{\overline{X}^T X}$, где знаменатель – действительное число.

Рассмотрим числитель z=$\overline{X}^T \mathrm{A}X$

В силу симметричности матрицы А:

$$z = z^T = (\overline{X}^T \mathrm{A}X)^T = X^T \mathrm{A}^T \overline{X} = X^T \mathrm{A}\overline{X};$$

Рассмотрим число , сопряженное числителю и используем свойство операции комплексного сопряжения матриц и то, что элементы А-действительные числа, получим:

$$\overline{(\overline{X}^T \mathrm{A}X)} = \overline{\overline{X}}^T \overline{A}\,\overline{X} = X^T A\overline{X} = z = \overline{X}^T \mathrm{A}X$$

Комплексное число, сопряженное самому себе, является действительным числом. Таким образом мы доказали, что и числитель является действительным числом, а следовательно все корни характеристического уравнения – действительные числа.

►

Следствие 1. Если матрица А является симметричной, то все корни ее характеристического уравнения – действительные.

Следствие 2. Самосопряженный оператор, действующий в n-мерном евклидовом пространстве, имеет n собственных значений, если каждое считать столько раз какова его кратность.

Следствие 3. Симметричная матрица порядка n имеет n собственных значений, если каждое считать столько раз какова его кратность

Теорема 4. Собственные векторы самосопряженного линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

◄ Рассмотрим самосопряженный линейный оператор и два его собственных вектора $\overline{x}$ и $\overline{y}$, отвечающие различным собственным значениям λ_1 и λ_2.

Тогда $\hat{A}\overline{x} = \lambda_1\overline{x}$; $\hat{A}\overline{y} = \lambda_2\overline{y}$; и $(\hat{A}\overline{x}, \overline{y}) = (\lambda_1\overline{x}, \overline{y}) = \lambda_1(\overline{x}, \overline{y})$;

Так как $\hat{A}$- самосопряженный оператор, то

$$(\hat{A}\overline{x}, \overline{y}) = \left(\overline{x}, \hat{A}\overline{y}\right) = (\overline{x}, \lambda_2\,\overline{y}) = \lambda_2(\overline{x}, \overline{y});$$

Приравняем правые части получившихся соотношений:

$$\lambda_1(\overline{x}, \overline{y}) = \lambda_2(\overline{x}, \overline{y}); \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\overline{x}, \overline{y}) = 0.$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, из последнего равенства следует ортогональность $\overline{x}$ и $\overline{y}$.

►

Теорема 5. Если собственные значения самосопряженного оператора, действующего в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ попарно различны, то в $\mathbb{E}$ существует ортонормированный базис, в котором матрица линейного оператора имеет диагональный вид, причем на главной диагонали стоят собственные значения.

◄ Так как собственные значения линейного оператора различны, то согласно теореме 4 можно получить систему из n ненулевых ортогональных векторов, выбрав по одному собственному вектору для каждого собственного значения. Так как собственные вектора, отвечающие различным собственным значениям линейно-независимы, мы получим базис из n ортогональных векторов. Поделив каждый вектор на его длину, мы получим ортонормированный базис.

►

А если собственные значения самосопряженного линейного оператора действительные, но среди них есть кратные?

Теорема 6. Для любого самосопряженного оператора $\hat{A}$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого линейного оператора. Матрица А самосопряженного оператора в этом базисе имеет диагональный вид и на ее диагонали расположены собственные значения $\hat{A}$, повторяющиеся столько раз, какова его кратность.
(без доказательства)

Ортогональные матрицы

Определение. Квадратную матрицу Q называют ортогональной, если она удовлетворяет условию: $Q^T Q = E$, где E- единичная матрица.

Пример 3:

Матрица E – ортогональная.

1) U = $\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$ – ортогональная.

$$U^T U=\begin{pmatrix} cos\varphi & sin\varphi \\ -sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Свойства ортогональных матриц:

1. Определитель ортогональных матриц может иметь одно из двух значений 1 или -1.
   Доказательство: $\det(Q^T Q) = detE = 1$; $\det(Q^T Q) = detQ^T detQ = (detQ)^2 = detE = 1$=> detQ = ∓ 1.

2. Матрица , обратная к ортогональной, совпадает с ее транспонированной матрицей, т.е. $Q^{-1} = Q^T$
   Доказательство: Согласно свойству 1, ортогональная матрица невроженная и поэтому имеет обратную.
   Умножим $Q^T Q = E$ справа на Q^{-1}, получим: $(Q^T Q)Q^{-1}$=EQ^{-1};
   С другой стороны:
   $$Q^T(QQ^{-1})=Q^T \Rightarrow Q^T=Q^{-1} .$$

3. $QQ^T = E$
   (следует из определения обратной матрицы)

4. Матрица, транспонированная к ортогональной, тоже ортогональная.
   Доказательство:
   Найдем $(Q^T)^T Q^T = QQ^T = E$

5. Произведение двух ортогональных матриц одного порядка является ортогональной матрицей.
   Доказательство:
   $$(UQ)^T UQ = (Q)^T (U)^T UQ = (Q)^T EQ = Q^T Q = E$$

6. Матрица, обратная к ортогональной , является ортогональной.
   Доказательство: По свойству 1 ортогональная матрица является невырожденной и поэтому имеет обратную. Согласно свойству 2 матрица, обратная к ортогональной, совпадает с транспонированной. Согласно свойству 4 матрица, транспонированная к ортогональной является ортогональной.

Пример 4: Найти матрицу, обратную к матрице $U = \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$;

$$U^{-1} = U^T = \begin{pmatrix} cos\varphi & sin\varphi \\ -sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$$

Ортогональные операторы

Определение. Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в евклидовом пространстве называется ортогональным, если он сохраняет скалярное произведение, т.е. $(\hat{A}\overline{x}, \hat{A}\overline{y}) = (\overline{x}, \overline{y}), \forall\, \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{E}$.

Очевидно, что он сохраняет и норму (длину) вектора.
Действительно, $\|\hat{A}\overline{x}\|^2 = (\hat{A}\overline{x}, \hat{A}\overline{x}) = (\overline{x, x}) = \|\overline{x}\|^2 \Rightarrow$

$$\|\hat{A}\overline{x}\| = \|\overline{x}\|.$$

Отсюда следует, что если векторы ненулевые $\overline{x}$ и $\overline{y}$ ненулевые, то и $\hat{A}\overline{x}$ и $\hat{A}\overline{y}$ ненулевые. При этом

$$cos\,(\hat{A}\overline{x}, \hat{A}\overline{y}) = \frac{(\hat{A}\overline{x}, \hat{A}\overline{y})}{\|\hat{A}\overline{x}\|\|\hat{A}\overline{y}\|} = \frac{(\overline{x}, \overline{y})}{\|\overline{x}\|\|\overline{y}\|} = \cos(\overline{x}, \overline{y}),$$

Теорема 7. Если линейный оператор $\hat{A}$, действующий в евклидовом пространстве, сохраняет евклидову норму: $\|\hat{A}\overline{x}\|$=$\|\overline{x}\|$, $\forall\, \overline{x} \in \mathbb{E}$, то этот оператор ортогональный.

◀ $\|\hat{A}(\overline{x}+\overline{y})\|^2 = \left((\hat{A}\overline{x}+\hat{A}\overline{y}), (\hat{A}\overline{x}+\overline{\hat{A}y})\right) = \|\hat{A}\overline{x}\|^2 + 2(\hat{A}\overline{x}, \hat{A}\overline{y}) + \|\hat{A}\overline{y}\|^2$=>

$2(\hat{A}\overline{x}, \hat{A}\overline{y}) = \|\hat{A}(\overline{x}+\overline{y})\|^2 - \|\hat{A}\overline{x}\|^2 - \|\hat{A}\overline{y}\|^2 = \|\overline{x}+\overline{y}\|^2 - \|\overline{x}\|^2 - \|\overline{y}\|^2 = 2(\overline{x}, \overline{y})$; => $\hat{A}$ ортогональный.

▶

Примеры ортогональных операторов:

В пространствах геометрических векторов V_2 и V_3 ортогональными являются линейные операторы, сохраняющие расстояние. Например, линейный оператор поворота на фиксированный угол или линейный оператор отражения относительно прямой или плоскости.

Теорема 8. Ортогональный оператор в Евклидовом пространстве переводит ортонормированный базис в ортонормированный.

◀Пусть в n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис $\{\overline{e}_1, \quad \overline{e}_n\}$. В силу ортогональности $\hat{A}$

$(\hat{A}\overline{e_i}, \hat{A}\overline{e_j}) = (\overline{e_i}, \overline{e_j}) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j. \end{cases}$

Мы видим, что система векторов $\{\hat{A}\overline{e}_1, \dots \quad \hat{A}\overline{e}_n\}$ состоит из n ненулевых ортогональных векторов, следовательно она линейно независима. Кроме того все векторы имеют единичную длину, следовательно данная система образует ортонормированный базис.

▶

Теорема 9.

Если линейный оператор , действующий в n-мерном евклидовом пространстве переводит какой-то ортонормированный базис в ортонормированный, то этот оператор ортогональный.

◄Пусть $\{\overline{e}_1, \quad \overline{e}_n\}$ и $\{\hat{A}\overline{e}_1, \dots \quad \hat{A}\overline{e}_n\}$- ортонормированный базисы.

Пусть $\overline{x}$=$(x_1, \dots \quad x_n)$ – координаты вектора в базисе $\{\overline{e}_1, \quad \overline{e}_n\}$.

$\hat{A}\overline{x}$ = $\hat{A}(x_1\overline{e}_1 + \cdots \quad + x_n\overline{e}_n) = x_1\hat{A}\overline{e}_1 + \cdots x_n\hat{A}\overline{e}_n$=> вектор $\overline{x}$ имеет те же координаты в базисе $\{\hat{A}\overline{e}_1, \dots \quad \hat{A}\overline{e}_n\}$.

Возьмем два произвольных вектора $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + \cdots \quad + x_n\overline{e}_n$ и $\overline{y}$=$y_1\overline{e}_1 \dots \quad y_n\overline{e}_n$. Их скалярное произведение в базисе $\{\overline{e}_1, \quad \overline{e}_n\}$

$(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. И такой же формулой оно выражается в ортонормированном базисе $\{\hat{A}\overline{e}_1, \dots \quad \hat{A}\overline{e}_n\}$, поэтому, соотношение . $(\hat{A}\overline{x}, \hat{A}\overline{y}) = (\overline{x}, \overline{y})$ выполняется для любых векторов $\overline{x}, \overline{y}$. => $\hat{A}$ – ортогональный оператор. ►

Теорема 10. Линейный оператор $\hat{A}$ является ортогональным тогда и только тогда, когда $\hat{A}$ переводит ортонормированный базис в ортонормированный.

Теорема 11. Если матрица линейного оператора в некотором ортонормированном базисе ортогональна, то этот оператор является ортогональным. И наоборот, матрица ортогонального оператора в любом ортонормированном базисе является ортогональной.

◄ Выберем в евклидовом пространстве любой ортонормированный базис. Тогда для любых векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$, скалярное произведение

$(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = X^TY$, где X и Y -столбцы координат.

Пусть A матрица линейного оператора в ортонормированном базисе является ортогональной. Тогда $A^TA = E$ и, следовательно, равенство$X^T(\mathrm{A}^T\mathrm{A})Y = X^TEY$ выполняется для любых $\overline{x}, \overline{y}$.

Но $X^T(\mathrm{A}^T\mathrm{A})Y = (AX)^T(\mathrm{AY})$= $(\hat{A}\overline{x}, \hat{A}\overline{y})$.

Таким образом мы доказали, что $(\hat{A}\overline{x}, \hat{A}\overline{y}) = (\overline{x}, \overline{y})$. А это означает, что оператор ортогональный.

Докажем обратное утверждение. В любом ортонормированном базисе для ортогонального оператора соотношение $(\hat{A}\overline{x}, \hat{A}\overline{y}) = (\overline{x}, \overline{y})$, можно записать в координатном виде:

$(AX)^T(\mathrm{AY}) = X^T Y$ или $X^T(\mathrm{A}^T\mathrm{A})Y = X^T E Y$, отсюда следует, что $\mathrm{A}^T\mathrm{A} = E$,

То есть А- ортогональная матрица.

►

Теорема 12. В евклидовом пространстве матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому является ортогональной.

◄ Рассмотрим в произвольном n-мерном евклидовом пространстве E два ортонормированный базиса $S_1 = \{\vec{e}_i\}, S_2 = \{\vec{f}_i\}$;

$$P = P_{S_1 \to S_2} - \text{ матрица перехода от } S_1 \text{ к } S_2\text{: } P = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{где}$$

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + \cdots + a_{1n}\vec{e}_n \\ \qquad\qquad \ldots \\ \vec{f}_n = a_{n1}\vec{e}_1 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n \end{cases}.$$

Тогда

$$P^T P = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{f}_1, \vec{f}_1) & \cdots & (\vec{f}_1, \vec{f}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\vec{f}_n, \vec{f}_1) & \cdots & (\vec{f}_n, \vec{f}_n) \end{pmatrix} = E,$$

так как базис S_2 ортонормированный.

Итак, $P^T = P^{-1}$, значит P – ортогональная матрица.

►