ЛЕКЦИЯ № 13

Евклидовы пространства.

Алгоритм Грама-Шмидта ортогонализации базиса.

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

В каждом пространстве существует ортонормированный базис и построить его можно с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта.

Пусть $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n\}$ - некоторый базис в евклидовом пространстве E. Построим $\{\bar{h}_1; \bar{h}_2 \dots \bar{h}_n\}$ – ортонормированный базис.

1) $\boldsymbol{\bar{f}_1 = \bar{e}_1}$

2) $\boldsymbol{\bar{f}_2 = \bar{e}_2 - \lambda \bar{f}_1}$

λ выбираем из условия ортогональности вектора $\boldsymbol{\bar{f}_2}$ к $\boldsymbol{\bar{f}_1}$:

$(\bar{f}_1, \bar{f}_2) = 0; (\bar{f}_1, \bar{e}_2 - \lambda \bar{f}_1) = 0; =>$

$(\bar{f}_1, \bar{e}_2) - \lambda\,(\bar{f}_1, \bar{f}_1) = 0; =>$ $\boldsymbol{\lambda = \frac{(\bar{f}_1, \bar{e}_2)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} = \frac{(\bar{e}_1, \bar{e}_2)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)};}$

3) $\boldsymbol{\bar{f}_3 = \bar{e}_3 - \lambda_1 \bar{f}_1 - \lambda_2 \bar{f}_2};$

λ_i выбираем из условий ортогональности вектора $\boldsymbol{\bar{f}_3}$ к $\boldsymbol{\bar{f}_1}$ и $\boldsymbol{\bar{f}_2}$:

$(\bar{f}_1, \bar{f}_3) = 0; \quad (\bar{f}_2, \bar{f}_3) = 0;$

а) $(\bar{f}_1, \bar{f}_3) = 0; => (\bar{f}_1,\ \bar{e}_3 - \lambda_1 \bar{f}_1 - \lambda_2 \bar{f}_2) = 0; =>$

$(\bar{f}_1, \bar{e}_3) - \lambda_1 (\bar{f}_1, \bar{f}_1) - \lambda_2 (\bar{f}_1, \bar{f}_2) = 0;\ (\bar{f}_1, \bar{f}_2) = 0\ =>$

$$\boldsymbol{\lambda_1 = \frac{(\bar{f}_1, \bar{e}_3)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} = \frac{(\bar{e}_1, \bar{e}_3)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)};}$$

б) $(\bar{f}_2, \bar{f}_3) = 0; =>$

$(\bar{f}_2,\ \bar{e}_3 - \lambda_1 \bar{f}_1 - \lambda_2 \bar{f}_2) = (\bar{f}_2, \bar{e}_3) - \lambda_1 (\bar{f}_2, \bar{f}_1) - \lambda_2 (\bar{f}_2, \bar{f}_2) = 0;$

$(\bar{f}_2, \bar{f}_1) = 0 =>$ $\boldsymbol{\lambda_2 = \frac{(\bar{f}_2, \bar{e}_3)}{(\bar{f}_2, \bar{f}_2)}};$

и.т.д. $\bar{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n}} = \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{1}}\bar{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{1}} - \cdots \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{n-1}}\bar{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n-1}};$ => $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{i}} = \frac{(\bar{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}},\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}})}{(\bar{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}},\bar{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}})}$

Базис $\{\bar{f}_1; \bar{f}_2 \dots \bar{f}_n\}$- ортогональный.

Нормируя векторы $\{\bar{f}_1; \bar{f}_2 \dots \bar{f}_n\}$ получаем ортонормированный базис $\{\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n\}$, где $\vec{h}_i = \frac{\vec{f}_i}{|\vec{f}_i|}, i = 1 \dots n.$

Пример1 Дана матрица Грама скалярного произведения $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$._Ортогонализовать базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Сделать проверку с помощью матрицы перехода.

Решение.

1) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 = (1,0)$; - координаты в базисе $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2\}$
2) $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \alpha \vec{f}_1$

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{f}_1, \vec{e}_2) - \alpha(\vec{f}_1, \vec{f}_1) \Rightarrow 0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) - \alpha(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad \vec{f}_2 = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{2}; \quad 1\right)$$

Получили ортогональный базис $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$.

Теперь нормируем его и получим ортонормированный базис $H = \{\vec{h}_1, \vec{h}_2\}$, где

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|}, \vec{h}_2 = \frac{\vec{f}_2}{|\vec{f}_2|}.$$

$$|\vec{f}_1| = \sqrt{(\vec{f}_1, \vec{f}_1)} = \sqrt{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \sqrt{2},$$

$$|\vec{f}_2| = \sqrt{(\vec{f}_2, \vec{f}_2)} = \sqrt{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Тогда $\vec{h}_1 = \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|} = \frac{\vec{e}_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0)$,

$$\vec{h}_2 = \frac{\vec{f}_2}{|\vec{f}_2|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right).$$

Проверим ортонормированность построенного базиса $H = \{\vec{h}_1, \vec{h}_2\}$ с помощью матрицы перехода:

$$G_H = P^T G_S P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

получилась единичная матрица, значит базис $H = \{\vec{h}_1, \vec{h}_2\}$ ортонормированный.

Пример 2

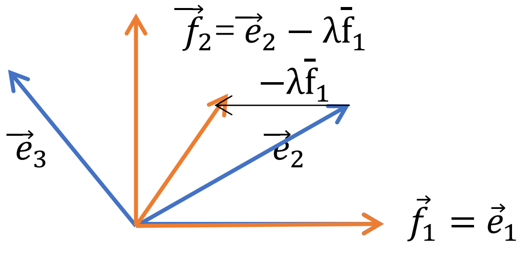
Ортогонализировать базис S=$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, заданный своими координатами в ортонормированном базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$

$\vec{e}_1 = (1,1,1)$; $\vec{e}_2 = (1,1,2)$; $\vec{e}_3 = (2,1,1)$, матрица Грама которого имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение:

$\vec{f}_3 = \bar{e}_3 - \lambda_1 \bar{f}_1 - \lambda_2 \bar{f}_2$;



1) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 = (1,1,1)$;

2) $\vec{f}_2 = \bar{e}_2 - \lambda \bar{f}_1$; Найдем λ из условия $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = 0$;

Можно воспользоваться готовой формулой:

$$\lambda = \frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\vec{f}_2 = -\frac{4}{3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (1;1;2) - \frac{4}{3}(1;1;1) = (-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$$

3) $\bar{f}_3 = \bar{e}_3 - \lambda_1 \bar{f}_1 - \lambda_2 \bar{f}_2$; Для нахождения λ_1 и λ_2 воспользуемся формулами:

$$\lambda_1 = \frac{(\bar{f}_1, \bar{e}_3)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} = \frac{(\bar{e}_1, \bar{e}_3)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)} = \frac{4}{3};$$

$$\lambda_2 = \frac{(\bar{f}_2, \bar{e}_3)}{(\bar{f}_2, \bar{f}_2)} = \frac{-\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = -1/2\,.$$ Находим $\bar{f}_3$.

$$\bar{f}_3 = \bar{e}_3 - \frac{4}{3}\bar{f}_1 + \frac{1}{2}\bar{f}_2 = (2,1,1) - \frac{4}{3}(1,1,1) + \frac{1}{2}(-1/3, -1/3, 2/3) = (1/2, -1/2, 0);$$

Получили ортогональный базис $\{\bar{f}_1; \bar{f}_2; \bar{f}_3\}$.

Нормируем его.

$$|\vec{f}_1| = \sqrt{3};\ |\vec{f}_2| = \sqrt{6}/3;\ |\vec{f}_3| = \sqrt{2}/2;$$

$$\overline{h_1} = \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right); \quad \overline{h_2} = \frac{\vec{f}_2}{|\vec{f}_2|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right);$$

$$\overline{h_3} = \frac{\vec{f}_3}{|\vec{f}_3|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$\overline{h_1}, \overline{h_2}, \overline{h_3}$ – ортонормированный базис.

Проверим:

1 способ.

$$(\overline{h_1}, \overline{h_2}) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = 0;$$

$$(\overline{h_1}, \overline{h_3}) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = 0;$$

$$(\overline{h_2}, \overline{h_3}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = 0;$$

$$|\overline{h_1}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

$$|\overline{h_2}| = \sqrt{\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1$$

$$|\overline{h_3}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

Верно.

Сделаем проверку вторым способом- через матрицу перехода.

Для этого необходимо представить базис $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \overline{h_3}$ в координатах базиса $S=\{\vec{e}_1, \vec{e}_{2,} \vec{e}_3\}$

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 = (1,0,0)_S;$$

$$\vec{f}_2 = -\frac{4}{3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \left(-\frac{4}{3}, 1, 0\right)_S;$$

$$\bar{f}_3 = \bar{e}_3 - \frac{4}{3}\bar{f}_1 + \frac{1}{2}\bar{f}_2 = -\frac{4}{3}\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) + \bar{e}_3 = -2\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \bar{e}_3 =$$

$$= \left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)_S$$

Норма вектора не зависит от выбора базиса =>

$$\overline{h_1} = \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right)_S; \quad \overline{h_2} = \frac{\vec{f}_2}{|\vec{f}_2|} = \left(-\frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, 0\right)_S;$$

$$\overline{h_3} = \frac{\vec{f}_3}{|\vec{f}_3|} = \left(\frac{-4}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)_S$$

$$G_H = P^T G_E P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{6}} & ,\frac{3}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{-4}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{-4}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{-4}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Верно. Проверка с помощью матрицы перехода показала, что построенный базис $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \overline{h_3}$ является ортонормированным.

Можно также сделать проверку через матрицу Грама в базис S=$\{\vec{e}_1, \vec{e}_{2,}\vec{e}_3\}$

$$\overline{h_1}G\overline{h_2}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0{,}0\right)_S\begin{pmatrix}3 & 4 & 4\\ 4 & 6 & 5\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{4}{\sqrt{6}}\\ \frac{3}{\sqrt{6}}\\ 0\end{pmatrix}_S=0;$$

Можно также убедиться, что

$$\overline{h_1}G\overline{h_2}=0 \text{ и } \overline{h_2}G\overline{h_3}=0.$$