ЛЕКЦИЯ № 15

Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований.

Рассмотрим метод приведения квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогональных преобразований.

Пусть E – n-мерное пространство. S=$\{\overline{e}_1;\ldots\overline{e}_n\}$- ортонормированный базис; $\varphi(\overline{x})$-квадратичная форма, A-её матрица, симметричная. Рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$ с этой матрицей. $\hat{A}$ будет самосопряженным, следовательно существует ортонормированный базис S'=$\{\overline{f_1};\ldots\overline{f}_n\}$, в котором матрица оператора $\hat{A}$, A$'$ будет диагональной.

Матрица перехода $P_{s\to S'}$ переводит ортонормированный базис в ортонормированный, следовательно, матрица $P_{s\to S'}$ ортогональная,

$P^{-1}=P^T$. Тогда $A'=P^{-1}\text{A}P=P^T\text{A}P$,

то есть , приводя матрицу оператора A к диагональному виду мы и квадратичную форму $\varphi(\overline{x})$ приведем к диагональному виду.

Такое преобразование $A'=P^T\text{A}P$, где P- ортогональная матрица, называют **ортогональным преобразованием**.

Теорема 13. Любая симметричная матрица ортогональным преобразованием приводится к диагональному виду.

Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований.

1) Составляем матрицу квадратичной формы. Находим собственные значения, $\lambda_i \in$R (вещественные числа), так как матрица симметричная и является матрицей некоторого самосопряженного линейного оператора.

2) Находим собственные векторы.

Рассмотрим два случая:

- собственные значения попарно различны:

в этом случае собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, образуют ортогональный базис, его необходимо преобразовать в ортонормированный базис.

- среди найденных собственных значений есть совпадающие:

в этом случае выбираем линейно независимую систему из n собственных векторов, где n=dim L и строим ортонормированный базис при помощи алгоритма ортогонализации Грама-Шмидта.

3) в найденном базисе из собственных векторов матрица квадратичной формы будет иметь диагональный вид. На главной диагонали будут стоять собственные значения.

Задача 1 . Привести квадратичную форму к каноническому виду методом ортогональных преобразований.

$$\varphi(\overline{x}) = 6{x_1}^2 + 5{x_2}^2 + 7{x_3}^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

Решение.

A=$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; det(A-$\lambda E$) $= \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix}$=0;

$-\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = 0.\quad \lambda_1 = 3;\ \lambda_2 = 6;\ \lambda_3 = 9;$

Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям.

$\lambda_1 = 3$

$\begin{pmatrix} 6-3 & -2 & 2 \\ -2 & 5-3 & 0 \\ 2 & 0 & 7-3 \end{pmatrix} X = O;$

$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

$x_3 = C$; $x_1 = x_2$= -2C; При C=1 получим $\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 6$

$\begin{pmatrix} 6-6 & -2 & 2 \\ -2 & 5-6 & 0 \\ 2 & 0 & 7-6 \end{pmatrix} X = O;$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$x_3 = C;\ x_2 = C;\ x_1 = -C/2$; При C=1 получим $\overline{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_3 = 9$

$$\begin{pmatrix} 6-9 & -2 & 2 \\ -2 & 5-9 & 0 \\ 2 & 0 & 7-9 \end{pmatrix} X = O;$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$x_3 = C;\ x_2 = -C/2;\ x_1 = C$; При C=1 получим

$\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \overline{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ – ортогональные, так как

λ_i- попарно различны. Можно проверить.

$(\overline{f}_1, \overline{f}_2) = 0; (\overline{f}_1, \overline{f}_3) = 0; (\overline{f}_2, \overline{f}_3) = 0;$

$\|\overline{f}_1\|$=3; $\|\overline{f}_2\|=\frac{3}{2}$; $\|\overline{f}_3\|$=3/2;

Нормируем: $\overline{e}_1 = \frac{\overline{f}_1}{\|\overline{f}_1\|} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}; \overline{e}_2 = \frac{\overline{f}_2}{\|\overline{f}_2\|} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix};$

$\overline{e}_3 = \frac{\overline{f}_3}{\|\overline{f}_3\|} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

В найденном ортонормированном базисе матрица квадратичной формы имеет вид:

$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}; \Rightarrow \varphi(\overline{x}) = 3{y_1}^2 + 6{y_2}^2 + 9{y_3}^2;$

Выпишем преобразование координат: X=PY;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Приведение кривой второго порядка к каноническому виду.

Задача 2. Написать каноническое уравнение кривой второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат.
$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$

Решение.

Выпишем матрицу квадратичной части. A=$\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$;

Det (A-$\lambda E) = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = 0$

λ^2-15$\lambda + 50 = 0$; $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = 10$;

Заметим, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Находим собственные векторы , соответствующие λ_1 и λ_2 , они будут ортогональны. Затем нормируем их.

$\lambda_1 = 5$

$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; X1=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\overline{e_1}$=$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = 10$

$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; X2=$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overline{e_2}$=$\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$;

$\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$- ортонормированный базис из собственных векторов.

Матрица перехода $P_{i,j \to \overline{e_1},\overline{e_2}}$ =$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$;

Выпишем преобразование координат:

$$x = x'\frac{1}{\sqrt{5}} - y'\frac{2}{\sqrt{5}} = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = x'\frac{2}{\sqrt{5}} + y'\frac{1}{\sqrt{5}} = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

Данное преобразование соответствуют повороту системы координат на угол $\alpha = \arcsin(2/\sqrt{5})$ против часовой стрелки.

Перейдем к новым координатам:

Для квадратичной части справедливо :
$9x^2 - 4xy + 6y^2 = 5{x'}^2 + 10{y'}^2$

Тогда получаем:
$5{x'}^2 + 10{y'}^2 + 16(\, x'\frac{1}{\sqrt{5}} - y'\frac{2}{\sqrt{5}}) - 8(x'\frac{2}{\sqrt{5}} + y'\frac{1}{\sqrt{5}}) - 2 = 0$;

После раскрытия скобок и приведения подобных членов имеем:

$5{x'}^2 + 10{y'}^2 - \frac{40}{\sqrt{5}}y' - 2 = 0;$

Выделим полный квадрат.

$\frac{{x'}^2}{2} + (y' - \frac{2}{\sqrt{5}})^2 = 1;$

$y'' = y' - \frac{2}{\sqrt{5}};$ $\quad x'' = x';$

Данное преобразование соответствует сдвигу системы координат по оси OY'.

Получаем каноническое уравнение эллипса : $\boldsymbol{\frac{{x''}^2}{2} + {y''}^2 = 1;}$

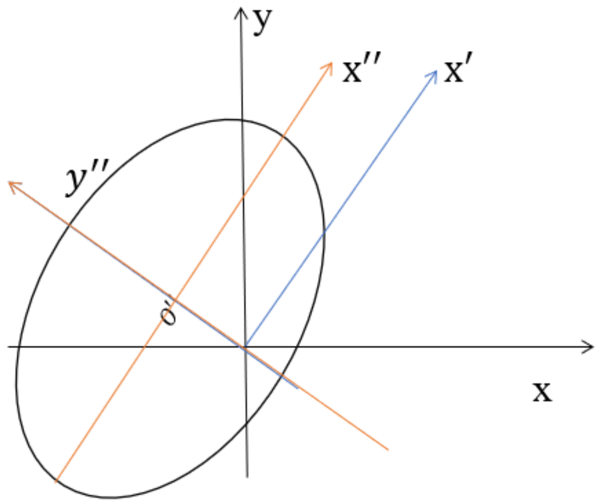
Найдем окончательное преобразование координат:

x $= x'\frac{1}{\sqrt{5}} - y'\frac{2}{\sqrt{5}} = \quad x''\frac{1}{\sqrt{5}} - (y'' + \frac{2}{\sqrt{5}})\frac{2}{\sqrt{5}}$
y$= x'\frac{2}{\sqrt{5}} + y'\frac{1}{\sqrt{5}} = \quad x''\frac{2}{\sqrt{5}} + (y'' + \frac{2}{\sqrt{5}})\frac{1}{\sqrt{5}}$

Окончательное преобразование координат выглядит так:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{x''\frac{1}{\sqrt{5}} - y''\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5};}$$
$$\mathbf{y} = \boldsymbol{x''\frac{2}{\sqrt{5}} + y''\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{5};}$$

Новый центр системы координат $\boldsymbol{O''(\frac{-4}{5};\frac{2}{5})}$.



Задача 3. Ортогональным преобразованием привести квадратичную форму $\varphi(\vec{x}) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2$ (заданную в базисе $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$) к каноническому виду.

Решение. Выпишем матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдём собственные значения соответствующего самосопряженного линейного оператора:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda = 0$$

$-\lambda(\lambda^2 - 12\lambda + 36) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 6$ – собственные значения.

Существует ортонормированный базис, в котором самосопряженный оператор, а значит и квадратичная форма, имеет диагональную матрицу вида:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Следовательно, квадратичная форма в этом базисе имеет канонический вид: $\varphi(\vec{x}) = 6y_2^2 + 6y_3^2$.

Найдем соответствующий базис из собственных векторов, а также связь между $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ – старыми координатами вектора $\vec{x}$ и его новыми координатами $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$.

Собственные векторы, соответствующие собственным значениям, находятся из системы линейных однородных уравнений:

(А- $\lambda E)X = O$

$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + (2-\lambda)x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + (5-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

$\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$x_1; x_2$ – базисные переменные; $x_3 = C -$ свободна;

$x_2 = 2C;\ x_1 = x_2 - x_3 = C$

$\lambda_1 = 0$ решение системы имеет вид: $X^1 = \begin{pmatrix} C \\ 2C \\ C \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, c \in R$, получим

собственный вектор $\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, если $c = 1$.

При $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ матрица системы примет вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

система эквивалентна уравнению: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, x_1$ – базисная переменная; x_2 и $x_3 -$ свободные; $x_3 = c_1;\ x_2 = c_2$

решение имеет вид: $X^2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 - 2c_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in R.$

Собственные векторы $\overrightarrow{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\vec{f_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ линейно независимы.

Следовательно, система векторов $F = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ образует базис.

Собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям оператора ортогональны, а векторы $\vec{f_2}$ и $\vec{f_3}$ не ортогональны, так как их скалярное произведение не равно нулю: $\left(\vec{f_2}, \vec{f_3}\right) = 2 \neq 0$.

Ортогонализируем базис $F = \left\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\right\}$, используя метод Грама-Шмидта:

$\overrightarrow{f_1^*} = \vec{f_1}$, $\overrightarrow{f_2^*} = \vec{f_2}$, $\overrightarrow{f_3^*} = \vec{f_3} - \alpha\overrightarrow{f_2^*}$, где коэффициент α найдём таким, чтобы

$\left(\overrightarrow{f_2^*}, \overrightarrow{f_3^*}\right) = 0$.

$$\left(\overrightarrow{f_2^*}, \overrightarrow{f_3^*}\right) = \left(\overrightarrow{f_2^*}, \vec{f_3} - \alpha\overrightarrow{f_2^*}\right) = \left(\vec{f_2}, \vec{f_3}\right) - \alpha\left(\vec{f_2}, \vec{f_2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\left(\vec{f_2}, \vec{f_3}\right)}{\left(\vec{f_2}, \vec{f_2}\right)} = 1 \Rightarrow \overrightarrow{f_3^*} = \vec{f_3} - \overrightarrow{f_2^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Получили ортогональный базис $F^* = \left\{\overrightarrow{f_1^*}, \overrightarrow{f_2^*}, \overrightarrow{f_3^*}\right\}$.

Нормируя его, найдем ортонормированный базис $H = \left\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\right\}$:

$$\vec{h}_1 = \frac{\overrightarrow{f_1^*}}{\left|\overrightarrow{f_1^*}\right|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \vec{h}_2 = \frac{\overrightarrow{f_2^*}}{\left|\overrightarrow{f_2^*}\right|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{h}_3 = \frac{\overrightarrow{f_3^*}}{\left|\overrightarrow{f_3^*}\right|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Составим матрицу перехода:

$$P_{\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\} \to \{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора $\vec{x}$ в старом и новом базисах связаны соотношениями:

$Y = P^{-1} \cdot X$ и $X = P \cdot Y$. Для ортогональной матрицы перехода верно равенство: $P^{-1} = P^T$.

<u>Проверка.</u> Формула преобразования матрицы линейного оператора при замене базиса имеет вид:

$$A' = P^{-1}AP = \quad P^TAP$$

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Исследование кривой второго порядка.

Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду.

$$4x^2 - 20xy - 11y^2 + 64x - 16y - 32 = 0$$

Решение:

Выделим квадратичную часть $\varphi(\bar{x}) = 4x^2 - 20xy - 11y^2$.

Матрица квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & -11 \end{pmatrix}$.

Собственные значения и собственные векторы.

Характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & -10 \\ -10 & -11-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-11-\lambda) - 100 = 0 \Leftrightarrow$$

$\lambda^2 + 7\lambda - 144 = 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \lambda_1 = -16, \lambda_2 = 9.$

$\lambda_1 = -16 \Rightarrow (A - \lambda_1) = \begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$2x - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ – собственный вектор с собственным значением $\lambda_1 = -16$.

$\lambda_2 = 9 \Rightarrow (A - \lambda_2) = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -10 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x + 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор с собственным значением $\lambda_2 = 9$.

Собственные векторы $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = -2 + 2 = 0 \Rightarrow \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ – ортогональный базис. Нормируем его:

$$\begin{cases} |\bar{a}_1| = \sqrt{5} \\ |\bar{a}_2| = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\bar{h}_1| = \frac{\bar{a}_1}{|\bar{a}_1|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ |\bar{h}_2| = \frac{\bar{a}_2}{|\bar{a}_2|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$G = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$–собственный ортонормированный базис.

Матрица квадратичной формы в базисе $G = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Перейдём к новым координатам (u;v) с помощью матрицы перехода от исходного ортонормированного базиса $\{\bar{\imath}, \bar{\jmath}\}$ к собственному ортонормированному базису $G = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$:

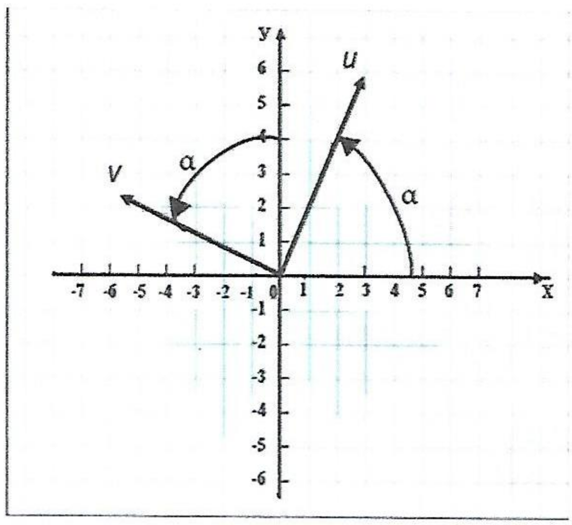
$$P_{\{\bar{\imath},\bar{\jmath}\}\to G} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}} u - \dfrac{2}{\sqrt{5}} v \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{5}} u + \dfrac{1}{\sqrt{5}} v \end{cases} -$$

Это преобразование координат – поворот на угол α:

$$tg\alpha = \frac{2/\sqrt{5}}{1/\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = arctg2,$$

Поворот против часовой стрелки (угол положительный) по y: 2 единицы, по x: 1 единица.



Важное замечание:

Преобразование координат при повороте против часовой стрелки на угол α: $\begin{cases} x = u \cdot \cos\alpha - v \cdot \sin\alpha \\ y = u \cdot \sin\alpha + v \cdot \cos\alpha \end{cases}$.

Итак, подставим $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(u - 2v) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2u + v) \end{cases}$ в уравнение кривой :

$$4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(u-2v)\right)^2-20\frac{1}{\sqrt{5}}(u-2v)\frac{1}{\sqrt{5}}(2u+v)-11\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2u+v)\right)^2+$$
$$+64\frac{1}{\sqrt{5}}(u-2v)-16\frac{1}{\sqrt{5}}(2u+v)-32=0$$

В результате преобразований уничтожатся смешанные произведения переменных u и v:

$$-16u^2+9v^2+32\frac{1}{\sqrt{5}}u-144v-32=0$$

$$-16\left(u^2-\frac{2}{\sqrt{5}}u\right)+9\left(v^2-\frac{16}{\sqrt{5}}v\right)-32=0$$

Выделим полные квадраты по этим переменным:

$$-16\left(u-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+9\left(v-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2=144,$$

Разделим обе части на (-144) и получим каноническое уравнение гиперболы со смещённым центром:

$$\frac{\left(u-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{9}-\frac{\left(v-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2}{16}=-1.$$

$$\frac{(u')^2}{9}-\frac{(v')^2}{16}=-1.$$

$u'=\ u-\frac{1}{\sqrt{5}};\ v'=\ v-\frac{8}{\sqrt{5}}$

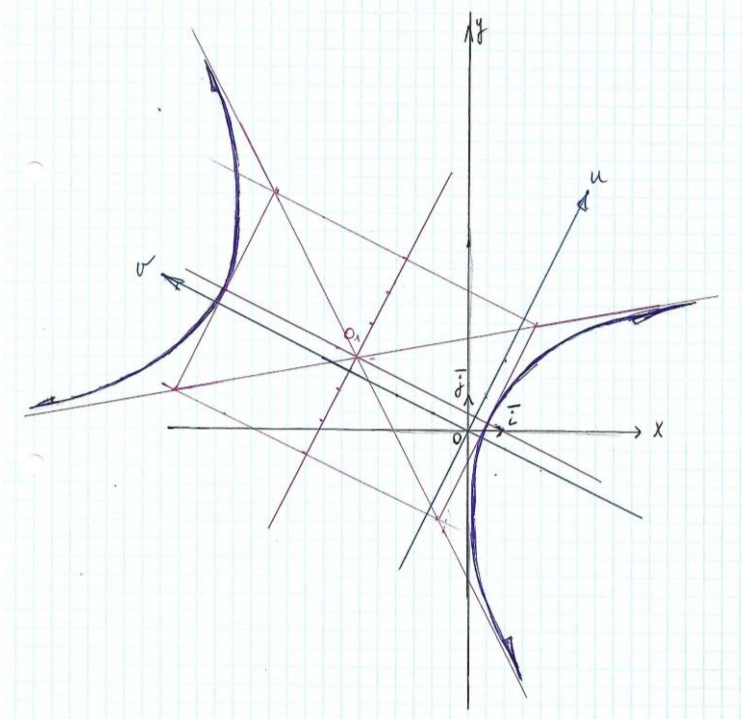
Центр $O_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{8}{\sqrt{5}}\right)$, полуоси: действительная $a=4$; мнимая $b=3$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$.

Выпишем окончательное преобразование координат

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(u'+\frac{1}{\sqrt{5}}-2\left(v'+\frac{8}{\sqrt{5}}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}u'-\frac{2}{\sqrt{5}}v'-3 \\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\left(u'+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\left(v'+\frac{8}{\sqrt{5}}\right)\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}u'+\frac{1}{\sqrt{5}}v'+2 \end{cases}$$

Координаты центра в исходной системе координат $O_1(-3;2)$

Фокусы расположены на действительной оси гиперболы, параллельной оси переменной v.



Задача 5. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка, определить ее тип и сделать чертеж:

$$4x^2 + 8y^2 + 4z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$$

Решение.

Выпишем матрицу квадратичной части:

$$\varphi(\vec{x}) = 4x^2 + 8y^2 + 4z^2 + 2xy + 6xz + 2yz$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 8-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^3 - 16\lambda^2 + 69\lambda - 54 = 0$$

Очевидно, что $\lambda_1 = 1$ — корень этого уравнения.

Поделив многочлен $\lambda^3 - 16\lambda^2 + 69\lambda - 54$ на $\lambda - 1$, получим

$$\lambda^3 - 16\lambda^2 + 69\lambda - 54 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 15\lambda + 54)$$

Корнями уравнения $\lambda^2 - 15\lambda + 54$ являются числа $\lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$.

Найдем собственные векторы, соответствующие λ_1, λ_2 и λ_3 (они будут ортогональны, так как все собственные числа матрицы A различны) и нормируем их.

1) $\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}3&1&3\\1&7&1\\3&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&7&1\\0&-20&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{f}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{e}_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

2) $\lambda_2 = 6$ $\Rightarrow\begin{pmatrix}-2&1&3\\1&2&1\\3&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}-2&1&3\\1&2&1\\3&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&5&5\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{f}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

3) $\lambda_3 = 9$ $\Rightarrow\begin{pmatrix}-5&1&3\\1&-1&1\\3&1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}-5&1&3\\1&-1&1\\3&1&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-4&8\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{f}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{e}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ - ортонормированный базис из собственных векторов

Матрица перехода: $P_{\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}\to\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

Выпишем преобразование координат $X = PX'$:

$$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y'+\dfrac{1}{\sqrt{6}}z'\\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}y'+\dfrac{2}{\sqrt{6}}z'\\ z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y'+\dfrac{1}{\sqrt{6}}z'\end{cases}$$

Перейдем к новым координатам.
Для квадратичной части справедливо равенство:

$$4x^2+8y^2+4z^2+2xy+6xz+2yz={x'}^2+6{y'}^2+9{z'}^2$$

Тогда исходное уравнение

$$4x^2+8y^2+4z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0$$

перепишется в виде

$$x'^2+6y'^2+9z'^2-2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'\right)+6\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{2}{\sqrt{6}}z'\right)+$$
$$+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'\right)=0$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых имеем:

$$x'^2+6y'^2+9z'^2+2\sqrt{2}x'-2\sqrt{3}y'+2\sqrt{6}z'=0$$

Выделим полный квадрат по каждой переменной:

$$\left(x'^2+2\sqrt{2}x'+2\right)-2+6\left(y'^2-\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{12}\right)-\frac{1}{2}+9\left(z'^2+\frac{2\sqrt{6}}{9}z'+\frac{2}{27}\right)-\frac{2}{3}=0$$

$$(x'+\sqrt{2})^2+6\left(y'-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+9\left(z'+\frac{\sqrt{6}}{9}\right)^2=\frac{19}{6}\Rightarrow$$

$$\frac{(x'+\sqrt{2})^2}{\frac{19}{6}}+\frac{\left(y'-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}{\frac{19}{36}}+\frac{\left(z'+\frac{\sqrt{6}}{9}\right)^2}{\frac{19}{54}}=1$$

Преобразуем координаты:

$$\begin{cases} x''=x'+\sqrt{2} \\ y''=y'-\frac{\sqrt{3}}{6} \\ z''=z'+\frac{\sqrt{6}}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=x''-\sqrt{2} \\ y'=y''+\frac{\sqrt{3}}{6} \\ z'=z''-\frac{\sqrt{6}}{9} \end{cases}$$

Получаем каноническое уравнение эллипсоида в системе координат $Ox''y''z''$

$$\frac{(x'')^2}{\frac{19}{6}}+\frac{(y'')^2}{\frac{19}{36}}+\frac{(z'')^2}{\frac{19}{54}}=1$$

Найдем окончательное преобразование координат:

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x''-\sqrt{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(y''+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)+\frac{1}{\sqrt{6}}\left(z''-\frac{\sqrt{6}}{9}\right) \\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(y''+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)+\frac{2}{\sqrt{6}}\left(z''-\frac{\sqrt{6}}{9}\right) \\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x''-\sqrt{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(y''+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)+\frac{1}{\sqrt{6}}\left(z''-\frac{\sqrt{6}}{9}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{2}}x''+\frac{1}{\sqrt{3}}y''+\frac{1}{\sqrt{6}}z''+\frac{19}{18} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}y''+\frac{2}{\sqrt{6}}z''-\frac{7}{18} \\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}x''+\frac{1}{\sqrt{3}}y''+\frac{1}{\sqrt{6}}z''-\frac{17}{18} \end{cases}$$

Центр новый системы координат: $O''\left(\frac{19}{18};-\frac{7}{18};-\frac{17}{18}\right)$

Уравнение $\frac{(x'')^2}{\frac{19}{6}}+\frac{(y'')^2}{\frac{19}{36}}+\frac{(z'')^2}{\frac{19}{54}}=1$ - это уравнение эллипсоида с полуосями $\sqrt{\frac{19}{6}}$, $\sqrt{\frac{19}{36}}$ и $\sqrt{\frac{19}{54}}$ в системе координат $O''x''y''z''$, которая получается из исходной

системы координат $Oxyz$ переносом начала в точку $O''\left(\frac{19}{18};-\frac{7}{18};-\frac{17}{18}\right)$ и поворотом таким, что оси $O''x'', O''y'', O''z''$ оказываются направленными вдоль собственных векторов $\vec{f}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{f}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ и $\vec{f}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ соответственно.