Лекция 12

Скалярные и векторные поля.

Дифференциальные характеристики скалярных и векторных полей.

Если в каждой точке M пространственной области определена некоторая скалярная или векторная величина, то говорят, что задано поле этой величины, соответственно скалярное или векторное.

Примером скалярного поля может служить поле температуры, плотности материального тела или поле давления в жидкой среде. Если положение точки M определять ее координатами по отношению к координатной системе $Oxyz$, то задание поля скалярной величины равносильно заданию числовой функции $u(M) = u(x, y, z)$. Уравнение

$$u(x, y, z) = C, \qquad C = const$$

определяет поверхность, в точках которой величина u сохраняет постоянное значение. Эта поверхность называется поверхностью уровня.

Примерами векторных полей могут служить силовое поле, поле скоростей потока жидкости, электрическое и магнитное поля. Задание поля векторной величины $\vec{a}$ в системе координат $Oxyz$ осуществляется путем задания ее проекций на координатные оси:

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы координатных осей Ox, Oy и Oz соответственно.

При изучении векторных полей важную роль играют векторные линии. Векторная линия – это кривая, которая в каждой своей точке касается вектора $\vec{a}$.

Полагая, что скалярная функция u, а также координаты P, Q, R вектора $\vec{a}$ имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам, определим дифференциальные характеристики скалярных и векторных полей.

Пусть задано скалярное поле $u(M)$. Для характеристики «скорости изменения» функции $u(M)$ в заданной точке по заданному направлению введем понятие производной по направлению. Зафиксируем точку

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направленную прямую или ось l с направляющим вектором $\vec{\tau}$ (рис. 12.1). Если $\vec{\tau}$ – вектор единичной длины, то его можно записать в виде

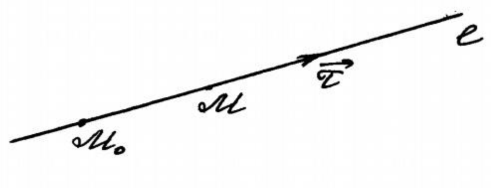

Рис. 12.1.

$$\vec{\tau} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

где α, β, γ – углы, которые вектор $\vec{\tau}$ образует с положительными направлениями координатных осей. На прямой l в направлении $\vec{\tau}$ отметим точку $M(x, y, z)$. Введем вектор $\Delta\vec{l} = \overrightarrow{M_0M} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$, где $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$, а координаты вектора $\vec{\tau}$ выражаются формулами:

$$\cos\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta l}, \cos\beta = \frac{\Delta y}{\Delta l}, \cos\gamma = \frac{\Delta z}{\Delta l}, \text{где } \Delta l = |\Delta\vec{l}|$$

Определение 1. Производной функции $u(M)$ в точке M_0 по направлению прямой l называется предел

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim_{M\to M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l}$$

Приращение дифференцируемой функции $u(M)$ в точке M_0 выражается формулой:

$$u(M) - u(M_0) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\Delta z + o(\Delta l)$$

где $o(\Delta l)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости по сравнению с Δl. Подставляя это выражение в формулу для производной по направлению, получим:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim_{M\to M_0}\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta l} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta l} + \frac{o(\Delta l)}{\Delta l}\right)$$

или

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma$$

Определение 2. Градиентом скалярной функции $u(M)$ в точке M_0 называется вектор с координатами $\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}$.

Обозначается

$$\text{grad}u(M_0) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\vec{k}$$

Используя понятие градиента, формулу для производной функции $u(M)$ в точке M_0 по направлению можно переписать в виде:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = (\mathrm{grad}u(M_0), \vec{\tau})$$

т.е. производная скалярного поля $u(M)$ в точке M_0 по направлению прямой l равна скалярному произведению вектора $\mathrm{grad}u(M_0)$ и единичного вектора $\vec{\tau}$, задающего данное направление. Другими словами, производная по направлению равна проекции $\mathrm{grad}u(M_0)$ на это направление. Из этого следует, что производная по направлению достигает наибольшего значения в том случае, когда направление l совпадает с направлением градиента. Этот вывод позволяет сформулировать инвариантное, т.е. не связанное с выбором системы координат, определение градиента: градиентом скалярной функции называется вектор, направление которого совпадает с направлением наибольшего роста этой функции, и модуль которого равен скорости изменения функции в этом направлении.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить производную скалярного поля $u = x^3 + y^3 + z^3 - -3xyz$ в точке $M_0(1,3,-2)$ по направлению, идущему от точки M_0 к точке $M(3,1,-1)$.

Вычислим частные производные функции $u(x, y, z)$ и их значения в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3yz, \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = 21$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3xz, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = 33$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 - 3xy, \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = 3$$

$$\mathrm{grad}u(M_0) = 21\vec{i} + 33\vec{j} + 3\vec{k}$$

Найдем координаты единичного вектора $\vec{\tau}$ заданного направления:

$$\overrightarrow{M_0M} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}, \qquad \left|\overrightarrow{M_0M}\right| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\vec{\tau} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = (\mathrm{grad}u(M_0), \vec{\tau}) = \frac{21 \cdot 2 - 33 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{3} = -7$$

Пример 2. Вычислить производную скалярного поля $u = x^2 y e^{-z}$ в точке $M_0(-1,2,0)$ по направлению вектора $\vec{e} = (3, -6, -2)$.

$$\mathrm{grad}u = (2xye^{-z}, x^2 e^{-z}, -x^2 y e^{-z})$$

$$\mathrm{grad}u(M_0) = (-4,1,-2)$$

$$|\vec{e}| = \sqrt{9 + 36 + 4} = 7$$

$$\vec{\tau} = \left(\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}\right)$$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial e} = (\mathrm{grad}u(M_0), \vec{\tau}) = \frac{-4 \cdot 3 + 1 \cdot (-6) + (-2) \cdot (-2)}{7} = -2$$

Введем символический вектор с координатами $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$. Этот вектор обозначается ∇ (набла) и называется вектором или оператором Гамильтона:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Сэр Уильям Роуэн Гамильтон (1805-1865) – ирландский математик и механик.

Слово «набла» имеет греческое происхождение, оно обозначает арфу – музыкальный инструмент треугольной формы.

Пользуясь оператором Гамильтона, можно записать $\mathrm{grad}u$ в виде:

$$\mathrm{grad}u = \nabla u$$

Свойства градиента являются следствием соответствующих свойств производной:

1.
$$\mathrm{grad}(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 \mathrm{grad}u_1 + c_2 \mathrm{grad}u_2$$
2.
$$\mathrm{grad}(u_1 u_2) = u_2 \mathrm{grad}u_1 + u_1 \mathrm{grad}u_2$$
3.
$$\mathrm{grad}\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = \frac{u_2 \mathrm{grad}u_1 - u_1 \mathrm{grad}u_2}{u_2^2}$$
4.
$$\mathrm{grad}(F(u)) = \frac{dF}{du}\mathrm{grad}u$$

Получим еще одно важное свойство градиента: вектор $\mathrm{grad}u(M_0)$ направлен перпендикулярно плоскости, касающейся поверхности уровня $u(x, y, z) = C$ в точке M_0 (рис. 12.2).

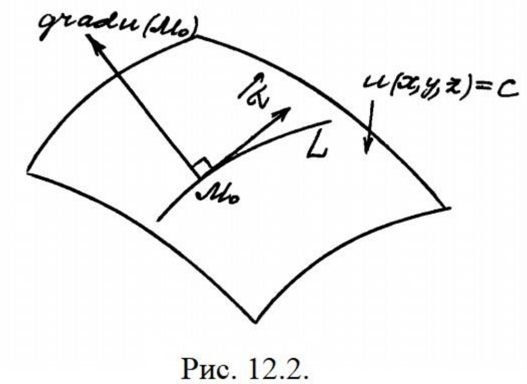

Рис. 12.2.

Для доказательства этого утверждения проведем на поверхности уровня через точку M_0 произвольную линию L. Пусть $x = x(t), y = y(t),\ \ z = z(t)$ – параметрические уравнения этой линии. Тогда

$$u(x(t), y(t), z(t)) = C$$

Будем рассматривать левую часть этого равенства как сложную функцию переменной t, тождественно равную константе. Значит $\frac{du}{dt} = 0$ или

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0$$

Левая часть полученного равенства представляет собой скалярное произведение вектора $\mathrm{grad}u$ и вектора

$$\vec{\tau} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

направленного по касательной к линии L. Равенство нулю этого скалярного произведения означает ортогональность векторов $\mathrm{grad}u$ и $\vec{\tau}$. Вектор $\vec{\tau}$, направленный по касательной к L, принадлежит касательной плоскости к поверхности в точке M_0, а т.к. линия L была выбрана на поверхности уровня произвольно, то $\mathrm{grad}u$ направлен перпендикулярно касательной плоскости. Это свойство градиента позволяет определять вектор нормали к поверхности в том случае, когда поверхность задана уравнением

$$F(x, y, z) = C$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Написать уравнение касательной плоскости к конусу, заданному уравнением $z^2 = x^2 + y^2$ в точке $M_0(3, -4{,}5)$.

Перепишем уравнение конуса в виде

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

и будем рассматривать данную поверхность как поверхность уровня скалярной функции

$$u = x^2 + y^2 - z^2$$

Вычислим градиент этой скалярной функции:

$$\mathrm{grad}u = (2x, 2y, -2z)$$

$$\text{grad}u(M_0) = (6, -8, -10)$$

Уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$6(x-3) - 8(y+4) - 10(z-5) = 0$$

После упрощений получим:

$$3x - 4y - 5z = 0$$

Пример 2. Написать уравнение касательной плоскости к сфере, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 169$$

в точке $M_0(3,4,-12)$.

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{grad}u = (2x, 2y, 2z)$$

$$\text{grad}u(M_0) = (6,8,-24) \parallel (3,4,-12)$$

Уравнение касательной плоскости:

$$3(x-3) + 4(y-4) - 12(z+12) = 0$$

или

$$3x + 4y - 12z = 169$$

Введем дифференциальные характеристики векторных полей.

Определение 3. Дивергенцией или расходимостью векторного поля $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ называется скалярная величина, равная сумме частных производных координат вектора $\vec{a}$ по соответствующим переменным. Обозначается

$$\text{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

С помощью оператора ∇ дивергенцию можно записать как скалярное произведение $(\nabla, \vec{a})$.

Свойства дивергенции:

1. $\text{div}(c_1\overrightarrow{a_1} + c_2\overrightarrow{a_2}) = c_1\text{div}\overrightarrow{a_1} + c_2\text{div}\overrightarrow{a_2}$
2. $\text{div}(u \cdot \vec{a}) = (\text{grad}u, \vec{a}) + u \cdot \text{div}\vec{a}$

Определение 4. Ротором или вихрем векторного поля $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ называется вектор с координатами

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$$

Обозначается символом $\mathrm{rot}\vec{a}$.

С помощью оператора ∇ ротор можно записать в виде векторного произведения $[\nabla, \vec{a}]$:

$$\mathrm{rot}\vec{a}=[\nabla, \vec{a}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Свойства ротора:

1. $\mathrm{rot}(c_1\overrightarrow{a_1}+c_2\overrightarrow{a_2})=c_1 rot\overrightarrow{a_1}+c_2\mathrm{rot}\overrightarrow{a_2}$
2. $\mathrm{rot}(u\cdot\vec{a})=[\mathrm{grad}u, \vec{a}]+u\cdot\mathrm{rot}\vec{a}$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить дивергенцию и ротор векторного поля

$\vec{a}=x^2y\vec{i}-xy^2z\vec{j}-z^3\vec{k}$ в точке $M_0(1,2,-1)$.

$$\mathrm{div}\vec{a}=\frac{\partial(x^2y)}{\partial x}+\frac{\partial(-xy^2z)}{\partial y}+\frac{\partial(-z^3)}{\partial z}=2xy-2xyz-3z^2$$

$$\mathrm{div}\vec{a}(M_0)=4+4-3=5$$

$$\mathrm{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -xy^2z & -z^3 \end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial(-z^3)}{\partial y}-\frac{\partial(-xy^2z)}{\partial z}\right)+$$

$$+\vec{j}\left(\frac{\partial(x^2y)}{\partial z}-\frac{\partial(-z^3)}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial(-xy^2z)}{\partial x}-\frac{\partial(x^2y)}{\partial y}\right)=xy^2\vec{i}+(-y^2z-x^2)\vec{k}$$

$$\mathrm{rot}\vec{a}(M_0)=4\vec{i}+3\vec{k}$$

Пример 2. Вычислить дивергенцию и ротор векторного поля

$\vec{a}=xy\vec{i}-yz^2\vec{j}+x^3\vec{k}$ в точке $M_0(2,-1,3)$.

$$\mathrm{div}\vec{a}=\frac{\partial(xy)}{\partial x}+\frac{\partial(-yz^2)}{\partial y}+\frac{\partial(x^3)}{\partial z}=y-z^2$$

$$\mathrm{div}\vec{a}(M_0)=-1-9=-10$$

$$\text{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & -yz^2 & x^3 \end{vmatrix} = \vec{i}(2yz) + \vec{j}(-3x^2) + \vec{k}(-x) =$$

$$= 2yz\vec{i} - 3x^2\vec{j} - x\vec{k}$$

$$\text{rot}\vec{a}(M_0) = -6\vec{i} - 12\vec{j} - 2\vec{k}$$

Пример 3. Задано скалярное поле $u = \frac{x^3}{z} + \alpha y^2$, где α – числовой коэффициент. Вычислить $\text{div grad}u$ в точке $M_0(1,2,-1)$, если известно, что $\text{grad}u(M_0)$ ортогонален вектору $\vec{b} = (1,1,1)$.

$$\text{grad}u = \left(\frac{3x^2}{z}; 2\alpha y; -\frac{x^3}{z^2}\right)$$

$$\text{grad}u(M_0) = (-3; 4\alpha; -1)$$

$$\vec{b} = (1,1,1)$$

Напишем условие ортогональности векторов $\text{grad}u(M_0)$ и $\vec{b}$:

$$-3 + 4\alpha - 1 = 0 \implies \alpha = 1$$

$$\text{grad}u = \left(\frac{3x^2}{z}; 2y; -\frac{x^3}{z^2}\right)$$

$$\text{div grad}u = \frac{6x}{z} + 2 + \frac{2x^3}{z^3}$$

$$\text{div grad}u(M_0) = -6 + 2 - 2 = -6$$

Пример 4. Задано векторное поле $\vec{a} = (y - 2z)\vec{i} + (2z - 5x)\vec{j} + \alpha y\vec{k}$ где α – числовой коэффициент. Вычислить все значения α, при которых $|\text{rot}\vec{a}| \leq 7$

$$\text{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y - 2z & 2z - 5x & \alpha y \end{vmatrix} = (\alpha - 2; -2; -6)$$

$$|\text{rot}\vec{a}| = \sqrt{(\alpha - 2)^2 + 4 + 36} = \sqrt{(\alpha - 2)^2 + 40} \leq 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 + 40 \leq 49 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 2 - 3)(\alpha - 2 + 3) \leq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 5)(\alpha + 1) \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \in [-1; 5]$$

Пример 5. Задано скалярное поле $u = (\alpha x + \beta y)e^{2z}$, где α, β – числовые коэффициенты. Известно, что значение u в точке $M_0(1,-1,1)$ равно 5, а $\mathrm{grad}u(M_0)$ ортогонален вектору $\vec{b} = (-3;-2;2)$. Вычислить $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}u$ в точке $M_1(2;-3;1)$.

$$u(M_0) = (\alpha - \beta)e^2 = 5$$

$$\mathrm{grad}u = (\alpha e^{2z}; \beta e^{2z}; 2(\alpha x + \beta y)e^{2z})$$

$$\mathrm{grad}u(M_0) = (\alpha e^2; \beta e^2; 2(\alpha - \beta)e^2) \parallel \big(\alpha; \beta; 2(\alpha - \beta)\big)$$

$$\vec{b} = (-3;-2;2)$$

Напишем условие ортогональности векторов $\mathrm{grad}u(M_0)$ и $\vec{b}$:

$$-3\alpha - 2\beta + 4(\alpha - \beta) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha = 6\beta \\ (\alpha - \beta)e^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \beta e^2 = 1$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}u = 4(\alpha x + \beta y)e^{2z}$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}u(M_1) = 4(2\alpha - 3\beta)e^2 = 4(12\beta - 3\beta)e^2 = 36\beta e^2 = 36$$

Пример 6. Задано скалярное поле $u = xy\ln 3z + \alpha x^2 + \beta y^2$, где α, β – числовые коэффициенты. Известно, что $\mathrm{grad}u$ в точке $M_0(1;\frac{1}{2};\frac{1}{3})$ параллелен вектору $\vec{b} = (4;2;3)$. Вычислить $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}u$ в точке $M_1(1;1;1)$.

$$\mathrm{grad}u = \left(y\ln 3z + 2\alpha x; x\ln 3z + 2\beta y; \frac{xy}{z}\right)$$

$$\mathrm{grad}u(M_0) = \left(2\alpha; \beta; \frac{3}{2}\right) \parallel \vec{b} = (4;2;3)$$

Запишем условие коллинеарности векторов $\mathrm{grad}u(M_0)$ и $\vec{b}$:

$$\frac{2\alpha}{4} = \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 1$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}u = 2\alpha + 2\beta - \frac{xy}{z^2} = 4 - \frac{xy}{z^2}$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}u(M_1) = 4 - 1 = 3$$