Лекция 10

Криволинейные интегралы.

Криволинейный интеграл по длине дуги.

Пусть в пространстве задана некоторая кривая L, в точках которой определена функция $f(M)$ (рис. 10.1). Введем понятие криволинейного интеграла функции $f(M)$ по кривой L. Для этого разделим кривую на n частей точками $B_0, B_1, \dots, B_n$. Элемент разбиения представляет собой дугу $B_{i-1}B_i, i = 1, \dots, n$. На каждом элементе выберем произвольно точку M_i, вычислим значение функции $f(M_i)$ в этой точке, умножим это значение на длину отрезка $\Delta l_i = B_{i-1}B_i$ и сложим полученные произведения. Полученная таким образом сумма

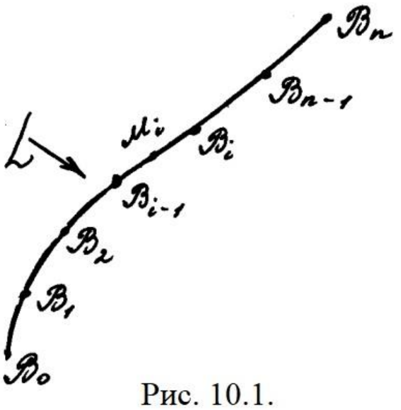

Рис. 10.1.

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta l_i$$

называется интегральной суммой для функции $f(M)$ по дуге L, соответствующей данному разбиению дуги. Диаметром элемента разбиения d_i будем считать наибольшее расстояние между точками дуги $B_{i-1}B_i$, а диаметром разбиения d кривой L – наибольшее из этих расстояний

$$d = \max_i d_i$$

Определение. Криволинейным интегралом функции $f(M)$ по длине дуги L называется предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta l_i$ вычисленный при условии, что диаметр разбиения d стремится к нулю, если этот предел существует и не зависит от разбиения.

Обозначается

$$\int\limits_L f(M)dl = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta l_i$$

Криволинейный интеграл по длине дуги называют также криволинейным интегралом первого рода.

Определение. Кривая L называется гладкой, если в каждой ее точке существует касательная к кривой, и положение касательной непрерывно меняется при перемещении точки вдоль кривой.

Определение. Кривая L называется кусочно-гладкой, если ее можно разделить на конечное число гладких частей.

Сформулируем без доказательства достаточные условия существования криволинейного интеграла 1 рода: если кривая L является кусочно-гладкой, а функция $f(M)$ непрерывна вдоль кривой, то $\int_L f(M)dl$ существует.

Определенный как предел интегральных сумм криволинейный интеграл обладает всеми свойствами определенного интеграла. Особенностью этого интеграла является его независимость от направления обхода кривой.

Если подынтегральная функция $f(M) = 1$, то интеграл $\int_L dl$ равен длине дуги кривой. Если подынтегральную функцию интерпретировать как линейную плотность кривой, то интеграл $\int_L f(M)dl$ равен массе кривой L.

Рассмотрим способы вычисления криволинейного интеграла по длине дуги.

В самом общем случае, когда пространственная кривая задана параметрически: $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [t_1, t_2]$

$$\int_L f(M)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

В случае, когда плоская кривая задана параметрически:

$x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$

$$\int_L f(M)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Если плоская кривая задана уравнением $y = y(x), x \in [a, b]$, переменную x можно принять за параметр, и формула для вычисления криволинейного интеграла по длине дуги примет вид:

$$\int_L f(M)dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$$

Если плоская кривая задана в полярных координатах уравнением

$r = r(\varphi), \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, то

$$\int_L f(M)dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi)\cos\varphi\,, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}d\varphi$$

С помощью криволинейного интеграла 1 рода можно вычислять длину и массу кривой, координаты центра масс и моменты инерции, а также другие физические величины. Например, для плоской кривой координаты центра масс вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{m_y}{m}, y_c = \frac{m_x}{m}$$

где $m = \int_L \rho(M)dl$ – масса дуги с линейной плотностью $\rho(M)$, $m_x = \int_L y\rho(M)dl$, $m_y = \int_L x\rho(M)dl$ – статические моменты кривой относительно координатных осей *Ox* и *Oy* соответственно.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить массу дуги параболы $y = \sqrt{x}$, $x \in [0,2]$ (рис. 10.2) если линейная плотность дуги $\rho = y$.

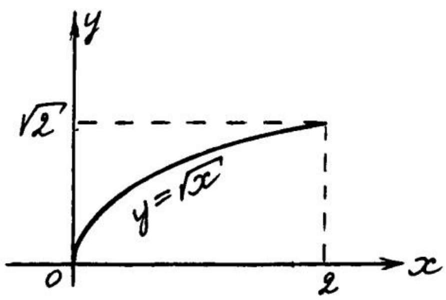

Рис. 10.2.

Кривая задана уравнением $y = \sqrt{x}$, $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

$$m = \int_0^2 \rho\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}dx =$$

$$= \int_0^2 y(x)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}dx =$$

$$= \int_0^2 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{4x+1}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{12}(27 - 1) = \frac{13}{6}$$

Пример 2. Вычислить момент инерции однородной дуги кривой $y = 4\ln x$, $x \in [3, 4\sqrt{3}]$ (рис. 10.3) относительно оси *Oy*. Принять $\rho = 1$.

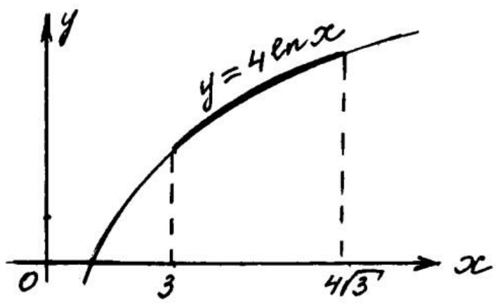

Рис. 10.3.

$$y = 4\ln x, y' = \frac{4}{x}$$

$$I_y = \int\limits_L x^2 \rho dl = \int\limits_3^{4\sqrt{3}} x^2 \sqrt{1 + \frac{16}{x^2}} dx = \int\limits_3^{4\sqrt{3}} x\sqrt{x^2 + 16} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2 + 16)^{\frac{3}{2}} \Big|_3^{4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{3}(8^3 - 5^3) = 129$$

Пример 3. Вычислить координаты центра масс однородной дуги астроиды (рис. 10.4).

$$x = \cos^3 t\,, y = \sin^3 t\,, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

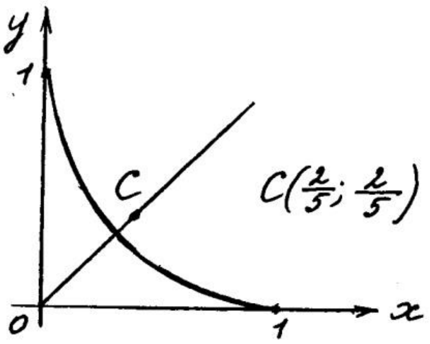

Рис. 10.4.

Кривая задана параметрически. Предварительно получим выражение для элемента длины дуги:

$$dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} dt =$$

$$= \sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2} dt =$$

$$= 3 \sin t \cos t \, dt, \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Полагая $\rho = 1$, вычислим массу дуги:

$$m = \int\limits_L \rho dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin t \cos t \, dt = \frac{3}{2} \sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$$

а также ее статический момент, например, относительно оси *Oy*:

$$m_y = \int\limits_L x\rho dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \, 3 \sin t \cos t \, dt = -3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, d \cos t = -\frac{3}{5} \cos^5 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$x_c = \frac{m_y}{m} = \frac{3}{5} : \frac{3}{2} = \frac{2}{5}$$

Рассматриваемая дуга астроиды однородна и симметрична относительно прямой $y = x$, ее центр масс находится на этой прямой, т.е. $x_c = y_c = \frac{2}{5}$

$$C\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Пример 4. Вычислить момент инерции однородной окружности

$(x - 1)^2 + y^2 = 1$ (рис. 10.5) относительно оси *Oy*. Принять $\rho = 1$.

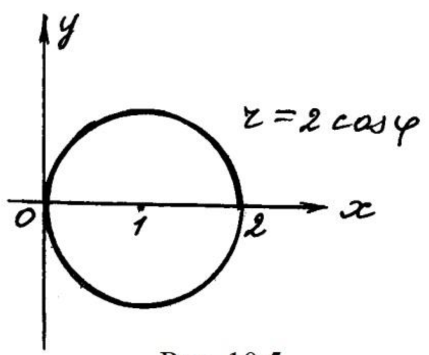

Рис. 10.5.

Воспользуемся полярными координатами:

$$x = r\cos\varphi\,, y = r\sin\varphi$$

Уравнение данной окружности в полярных координатах имеет вид:

$$r = 2\cos\varphi\,, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Вычислим элемент длины дуги

$$dl = \sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2 + \left(r'(\varphi)\right)^2}d\varphi = \sqrt{(2\cos\varphi)^2 + (-2\sin\varphi)^2}d\varphi = 2d\varphi$$

$$I_y = \int\limits_L x^2\rho dl = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r(\varphi)\cos\varphi)^2\, 2d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2\varphi)^2\, 2d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi)^2\, d\varphi = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi = 3\pi$$

Пример 5. Вычислить длину одного витка цилиндрической винтовой линии (рис. 10.6) $x = \cos t\,, y = \sin t\,, z = t, t \in [0,2\pi]$.

Вычислим элемент длины дуги:

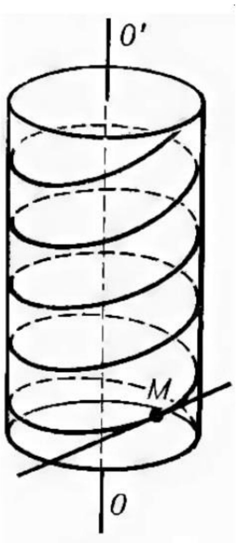

Рис. 10.6.

$$dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}dt =$$

$$= \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1}dt = \sqrt{2}dt$$

$$l = \int\limits_L dl = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2}dt = 2\sqrt{2}\pi$$

Пример 6. Вычислить массу одного витка конической винтовой линии (рис. 10.7) $x = t\cos t\,, y = t\sin t\,, z = t, t \in [0,2\pi]$, если линейная плотность в каждой точке равна аппликате точки: $\rho = z$.

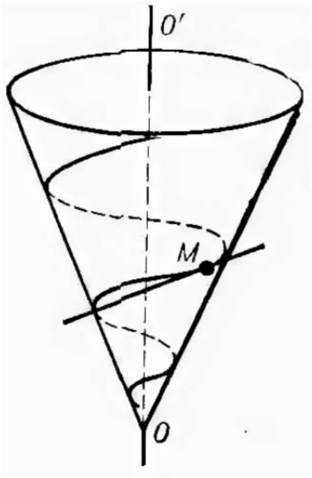

Рис. 10.7.

Вычислим элемент длины дуги

$$dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}dt =$$

$$= \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}dt$$

$$= \sqrt{1 + t^2 + 1}dt = \sqrt{2 + t^2}dt$$

$$m = \int\limits_L \rho dl = \int\limits_L z dl = \int\limits_0^{2\pi} t\sqrt{2 + t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2 + t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\left((2 + 4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}\right)$$

Криволинейный интеграл по координатам.

Для определения криволинейного интеграла 2 рода рассмотрим задачу о вычислении работы переменной силы при перемещении точки ее приложения вдоль произвольной пространственной кривой. Как известно, работа A постоянной силы $\vec{F}$ при прямолинейном перемещении точки ее приложения равна скалярному произведению вектора $\vec{F}$ на вектор перемещения $\vec{r}$:

$$A = \vec{F}\cdot\vec{r}$$

Пусть $\vec{F}$ – переменная сила, определенная вдоль произвольной кривой L (рис. 10.8).

Так же, как и при определении криволинейного интеграла 1 рода, разделим кривую на n частей точками $B_0, B_1, \dots, B_n$. Обозначим $\overrightarrow{\Delta l_i} = \overrightarrow{B_{i-1}B_i}, i = 1, \dots, n$. Произвольно выберем на i-й дуге точку M_i. Полагая, что элемент разбиения достаточно мал, будем считать, что сила $\vec{F}$ остается постоянной и равной $\vec{F}(M_i)$ при перемещении точки ее приложения из положения B_{i-1} в положение B_i. Тогда работу силы на элементарном перемещении можно принять равной

$$\Delta A_i = \vec{F}(M_i)\cdot\overrightarrow{\Delta l_i}$$

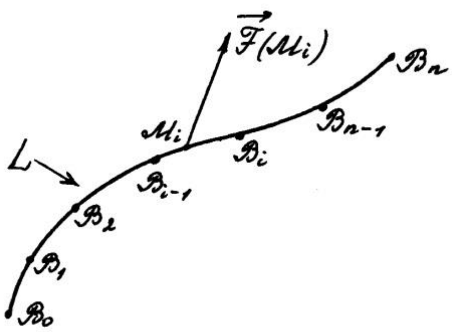

Рис. 10.8

Суммируя элементарные работы и переходя к пределу при условии, что диаметр разбиения d стремится к нулю, получим работу силы при перемещении точки вдоль кривой L:

$$A = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(M_i)\cdot\overrightarrow{\Delta l_i}$$

Определение. Криволинейным интегралом 2 рода называется предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i) \cdot \Delta\vec{l_i}$ вычисленный при условии, что диаметр разбиения d стремится к нулю, если этот предел существует и не зависит от разбиения дуги L. Обозначается

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i) \cdot \Delta\vec{l_i}$$

Криволинейный интеграл 2 рода, определенный как предел интегральных сумм, обладает всеми свойствами определенного интеграла. При изменении направления обхода кривой криволинейный интеграл 2 рода меняет знак.

Механический смысл этого интеграла следует из его определения: криволинейный интеграл 2 рода равен работе силы.

Введем координаты векторов $\vec{F}$ и $d\vec{l}$:

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k},$$

$$\overrightarrow{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + +dz\vec{k}$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} -$единичные векторы координатных осей *Ox*, *Oy* и *Oz* соответственно, $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$ – функции переменных *x*,*y*,*z*. Криволинейный интеграл 2 рода примет вид:

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

Криволинейный интеграл 2 рода называют криволинейным интегралом по координатам.

Если функции P, Q, R – непрерывны вдоль кривой L, а кривая L является кусочно-гладкой, то криволинейный интеграл

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

существует.

Рассмотрим способы вычисления этого интеграла. Если пространственная кривая задана параметрически:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [t_1, t_2]$$

то

$$\int\limits_L \vec{F}\cdot d\vec{l} =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\right)dt$$

Если плоская кривая задана параметрически:

$$x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$$

то

$$\int\limits_L \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)dt$$

Если плоская кривая задана уравнением $y = y(x), x \in [a, b]$ то

$$\int\limits_L \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int\limits_a^b \Big(P\big(x,y(x)\big) + Q\big(x,y(x)\big)y'(x)\Big)dx$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить

$$\int\limits_L ydx + zdy + xdz$$

где L – виток цилиндрической винтовой линии $x = \cos t\,, y = \sin t\,, z = t, t \in [0,2\pi]$ (рис. 10.6).

$$x'(t) = -\sin t\,, y'(t) = \cos t\,, z'(t) = 1$$

$$\int\limits_L ydx + zdy + xdz = \int\limits_0^{2\pi} (-\sin^2 t + t\cos t + \cos t)dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\cos 2t - 1}{2} + \cos t\right)dt + t\sin t\big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} \sin t\,dt = -\pi$$

Пример 2. Вычислить

$$\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$$

где L – дуга параболы $y = x^2, x \in [-1,1]$ (рис. 10.9).

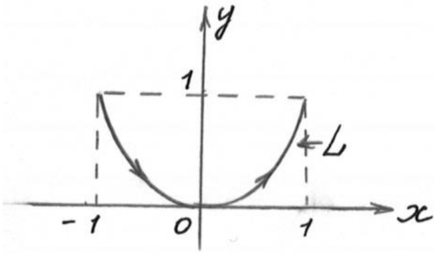

Рис. 10.9.

$$y' = 2x$$

$$\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \big((x^2 - 2x \cdot x^2) + (x^4 - 2x \cdot x^2)2x\big)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} (2x^5 - 4x^4 - 2x^3 + x^2)dx = \left(\frac{1}{3}x^6 - \frac{4}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5}\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right) = -\frac{14}{15}$$

Формула Грина.

Джордж Грин (1793-1841) – английский математик, который внес значительный вклад в развитие математической физики.

Формула Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом 2 рода по замкнутому плоскому контуру и двойным интегралом по области, ограниченной этим контуром.

Если L – кусочно-гладкий замкнутый контур, пробегаемый против хода часовой стрелки, и функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в области D, ограниченной этим контуром, и на ее границе, то справедлива формула Грина:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Символ $\oint$ используется для обозначения интеграла по замкнутому контуру.

Докажем формулу Грина для случая, когда область D ограничена графиками функций $y = y_1(x), y = y_2(x), x \in [a,b]$ (рис. 10.10).

Вычислим

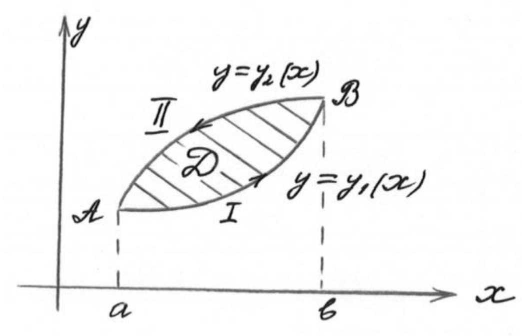

Рис. 10.10

$$\iint\limits_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \int\limits_a^b \left(-P(x,y)\right)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx =$$

$$= \int\limits_a^b P\big(x, y_1(x)\big)dx - \int\limits_a^b P\big(x, y_2(x)\big)dx =$$

$$= \int\limits_{AIB} P(x,y)dx + \int\limits_{BIIA} P(x,y)dx = \oint\limits_L P(x,y)dx = \oint\limits_L Pdx$$

Аналогично устанавливается равенство:

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_L Qdy$$

Складывая полученные равенства, установим справедливость формулы Грина.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить двумя способами

$$\oint\limits_L x^2 y dx + x^2 dy$$

где замкнутый контур L образован графиками функций $y = x^2, y = \sqrt{x}$ (рис. 10.11).

Вычислим искомый интеграл непосредственно, представляя его в виде суммы двух слагаемых $J = J_I + J_{II}$. На дуге OIA $y = x^2, y' = 2x, x \in [0,1]$.

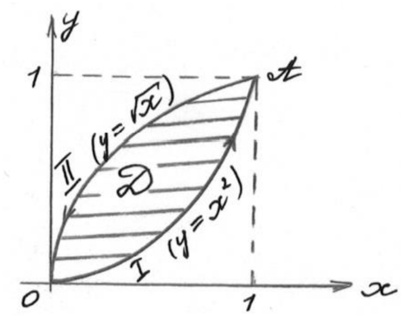

Рис. 10.11.

$$J_I = \int\limits_0^1 (x^2 \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (x^4 + 2x^3)dx = \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$$

На дуге OIIA $y = \sqrt{x}, y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x \in [1,0]$

$$J_{II}=\int_{1}^{0}\left(x^2\cdot\sqrt{x}+x^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=\int_{1}^{0}\left(x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_{1}^{0}=-\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{5}\right)=-\frac{17}{35}$$

$$J=J_I+J_{II}=\frac{7}{10}-\frac{17}{35}=\frac{3}{14}$$

Проверим результат по формуле Грина:

$$P=x^2y, Q=x^2, \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2x-x^2$$

$$\oint_L x^2ydx+x^2dy=\iint_D(2x-x^2)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(2x-x^2)dy=$$

$$=\int_0^1(2x-x^2)\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\int_0^1\left(2x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{5}{2}}-2x^3+x^4\right)dx=$$

$$=\left(2\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{5}-\frac{2}{7}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{3}{14}$$

Пример 2. Вычислить двумя способами

$$\oint_L ydx-x^2dy$$

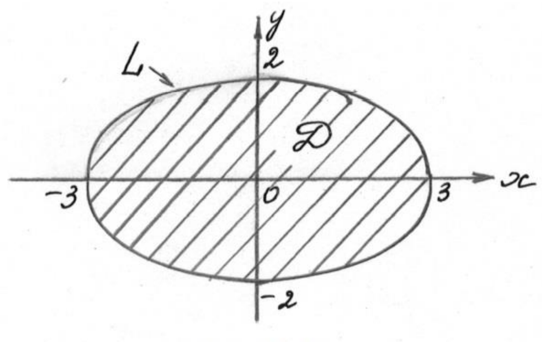

Рис. 10.12.

где L – эллипс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ (рис. 10.12).

Для непосредственного вычисления криволинейного интеграла введем параметрические уравнения эллипса:

$$x=3\cos t\,, y=2\sin t\,, t\in[0,2\pi]$$

$$x'=-3\sin t\,, y'=2\cos t$$

$$\oint_L ydx-x^2dy=$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\sin t \cdot (-3\sin t) - 9\cos^2 t \cdot 2\cos t)dt = \int_0^{2\pi} (-6\sin^2 t - 18\cos^3 t)dt =$$

$$= -3\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)dt - 18\int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t)d(\sin t) =$$

$$= \left(-3t + \frac{3}{2}\sin 2t - 18\sin t + 6\sin^3 t\right)\Big|_0^{2\pi} = -6\pi$$

Применим формулу Грина:

$$P = y, Q = -x^2, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2x - 1$$

$$\oint_L ydx - x^2dy = \iint_D (-2x - 1)dxdy$$

Для вычисления двойного интеграла по области D введем обобщенные полярные координаты $x = 3r\cos\varphi, y = 2r\sin\varphi$. В этих координатах уравнение эллипса имеет вид $r = 1,\ \varphi \in [0, 2\pi]$, а якобиан преобразования $I = 6r$.

$$\iint_D (-2x - 1)dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (-6r\cos\varphi - 1) \cdot 6rdr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (-36r^2\cos\varphi - 6r)dr = \int_0^{2\pi} d\varphi(-12r^3\cos\varphi - 3r^2)|_0^1 =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-12\cos\varphi - 3)d\varphi = (-12\sin\varphi - 3\varphi)|_0^{2\pi} = -6\pi$$