Оглавление

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1 Множество и его подмножества

Пусть **U** – множество из конечного числа элементов

$$\mathrm{U} = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{n}\}.$$

Числом n называется мощностью множества:

$$\mathrm{n} = |\mathbf{U}|.$$

Рассмотрим всевозможные подмножества множества **U**. Обозначим его как P(**U)** – множество всех подмножеств, включающее $\varnothing$ – пустое множество и само множество **U**.

Например:

$$|\mathrm{U}| = 2; \mathrm{U} = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2\}.$$

Посмотрим, из чего состоит P(U):

$$\mathrm{P(U)} = \{\varnothing, \mathrm{U}, \{\mathrm{a}_1\}, \{\mathrm{a}_2\}\}.$$

Таким образом |P(U)| = 4.

В общем случае будет следующая ситуация:

$$|\mathrm{P(U)}| = 2\mathrm{n}$$

В этом легко убедиться.

Теорема

Множество **U** из n элементов будет содержать 2^{n} подмножеств согласования.

Доказательство:

1) Сосчитаем количество подмножеств – пустое подмножество плюс подмножества из одного элемента (их n), плюс подмножества из двух элементов множества и т.д. Имеем

$(1 + 1)^n$по формуле бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \binom{n}{n} b^n \quad (1.1)$$

2) Запишем множество $\mathrm{U} = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{n}\}$.

Смотрим на a_1. Имеется две возможности – взять его или нет? Далее смотрим на a_2 – опять две возможности. Всего:

2 * 2 * … * 2 = возможностей.

1.2 Алгебра подмножеств.

Алгебраическая операция. Пусть М – произвольное множество, не важна размерность. Мы говорим, что в М задана алгебраическая операция, если любым двум элементам из М однозначно задан третий элемент из того же множества (сложение). Функция двух переменных – бинарная операция. Существуют бинарные и унарные операции.

Говорят, что в М задана бинарная алгебраическая операция, если указан закон, по которому каждой паре элементов множества М сопоставляется некоторый третий элемент из М.

Унарная операция считается заданной, если указан закон, по которому каждому элементу из М сопоставляется элемент из М.

Если М ≡ **R**, то пример бинарной операции будет выглядеть следующим образом:

1) a + b; ab; a_e^b. Могут быть бинарные операции с любыми свойствами. Общее изучение бинарных операций – изучение функций двух переменных.

2) Пример унарной операции:

$$a \to -a$$
$$a \to e^a.$$

Пусть U = $\{a_1 \ldots a_n\}$; P(U) – множество его подмножеств, рис.1. Введем в P(U) три алгебраических операции:

1) Бинарная – объединение – U (первый символ латинского union), рис.2. Каждым двум множествам сопоставляется третье множество $\{S;T\} \in P(\mathbf{U})$.

$$S \cup T = \{x \in U \mid x \in S \ \boxed{\text{или}} \ x \in T\}. \ (2.1)$$

2) Пересечение - ∩ - общая часть – также является бинарной операцией, рис.3.

$$S \cap T = \{x \in U \mid x \in S \ \boxed{\text{или}} \ x \in T\}. \ (2.2)$$

3) Дополнение (отрицание). Является унарной операцией, рис.4.

$$\bar{S} = \{x \in U \mid x \notin S\} \ (2.3)$$

Эти операции удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Венна:

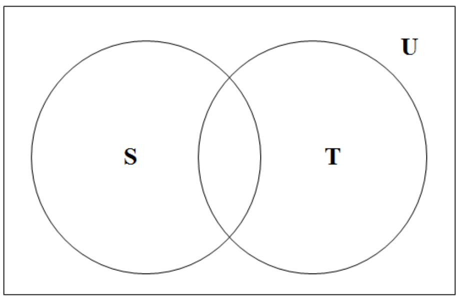

Рис.1

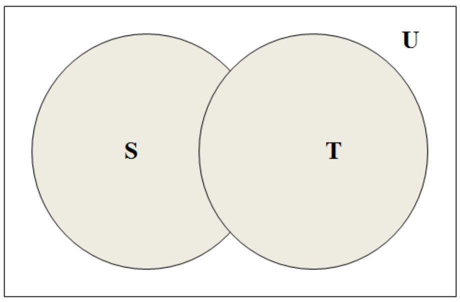

Рис.2.

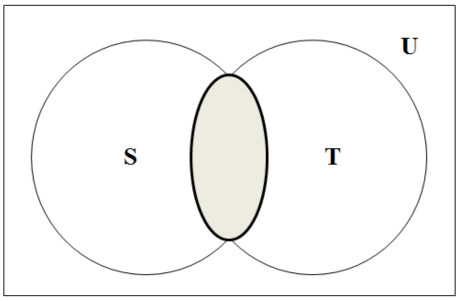

Рис.3.

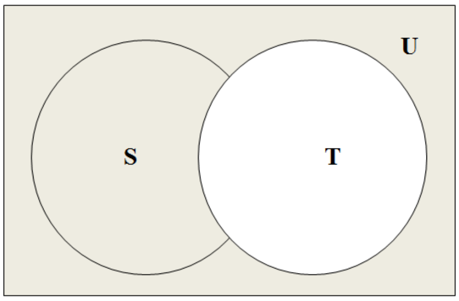

Рис.4.

Свойства операций:

1) Коммутативность

$$S \cup T = T \cup S. \quad (2.3)$$

$$S \cap T = T \cap S. \quad (2.4)$$

2) Ассоциативность

$$S \cup (T \cup R) = (S \cup T) \cup R; \quad (2.5)$$

$$S \cap (T \cap R) = (S \cap T) \cap R. \quad (2.6)$$

3) Дистрибутивность (правила раскрытия скобок, распределительность)

$$(S \cup T) \cap R = (S \cap R) \cup (T \cap R) \quad (2.7)$$

Если $\cup \rightarrow +$; $\cap \rightarrow *$, или же обычные сложение и умножение, то ничего нового нет, однако:

$(S \cap T) \cup R = (S \cup R) \cap (T \cup R)$ (2.8)

Чего в обычной арифметике нет. Операции пересечения и объединения более симметричны и равноправны, чем в арифметике.

4) Свойство констант (т.е. множеств $\varnothing$ и **U**, играющих фактически роль «0» и «1»)

$$S \cup \varnothing = S \quad (2.9)$$

$$S \cup U = U \quad (2.10)$$

$$S \cap \varnothing = \varnothing \quad (2.11)$$

$$S \cap U = S \quad (2.12)$$

5) Идемпотентность (подобие самому себе)

$$S \cup S = S \quad (2.13)$$

$$S \cap S = S \quad (2.14)$$

6) Свойство двойного отрицания

$$\bar{\bar{S}} = S \quad (2.15)$$

7) Свойство дополнений

$$S \cup \bar{S} = U \quad (2.16)$$

$$S \cap \bar{S} = \varnothing \quad (2.17)$$

8) Законы двойственности (законы Де Моргана). В них наиболее явно проявляется равноправие объединения и пересечения -

$$\overline{S \bigcup \mathrm{T}} = \bar{S} \cap \bar{T} \quad (2.18)$$

$$\overline{S \bigcap T} = \bar{S} \cup \bar{T} \quad (2.19)$$

Каждое из них необходимо доказать.

Существует два способа (рис.5 и рис.6):

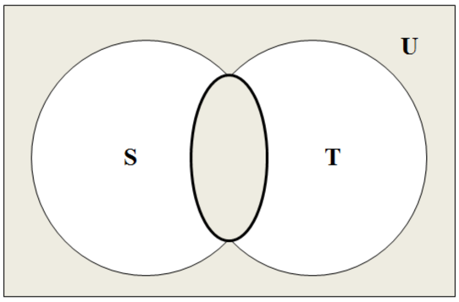

Рис.5.

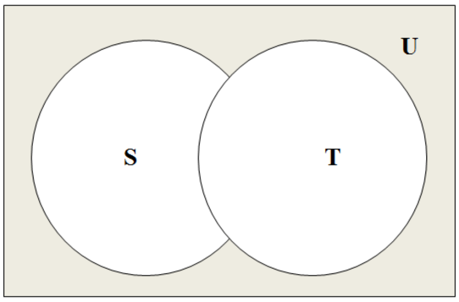

Рис.6.

Докажем закон действительности при помощи

1) диаграмм Вена (см.выше)

2) Другой способ. Берем любой элемент из левого множества и показываем, что он лежит в правом множестве и наоборот.

$$x \in \overline{S \bigcup \mathrm{T}} \Rightarrow x \notin \mathrm{S} \cup \mathrm{T} \Rightarrow x \notin \mathrm{S} \quad x \notin \mathrm{T} \Rightarrow x \in \bar{S} \quad x \in \mathrm{T} \equiv \bar{S} \cap \bar{T}$$

Докажем обратное:

$$x \in \bar{S} \cap \bar{T} \Rightarrow x \in \bar{S} \quad x \in \bar{T} \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in \overline{S \bigcap T}$$

Такая алгебра называется алгеброй Джорджа Буля. Кроме нее такими свойствами обладает еще ряд алгебр.

2. БУЛЕВА АЛГЕБРА

2.1 Определение общей булевой алгебры.

Выделим в произвольном множестве М элементы О и I (символы) и введем две операции: $\vee$ (*дизъюнкция*) и $\wedge$ (*конъюнкция*) – бинарные операции и «–« отрицание (инверсия) – унарная, причем выполняются следующие свойства: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность и т.д. для обеих операций. И еще:

$$S \vee O = S \quad (3.1)$$

$$S \vee I = I \quad (3.2)$$

$$a \wedge O = O \quad (3.3)$$

$$a \wedge I = a \quad (3.4)$$

Первый пример булевой алгебры – алгебры множеств, причем в качестве O – ∅, а I – U.

Замечание: при записи операций в булевой алгебре иногда вместо символов конъюнкции используют символы &, •.(Свойство 3) записывается тогда так:

$$(a \vee b)c = ac \vee bc \quad (3.5)$$

$$(ab) \vee c = (a \vee c)(b \vee c) \quad (3.6)$$

2.2 Алгебра высказываний.

Пусть U = $\{a_1 \ldots a_n\}$ – произвольно (не обязательно конечное).

Высказыванием называется любое утверждение об элементах этого множества, которое для каждого отдельного элемента этого множества оказывается либо истинным, либо ложным.

Множеством истинности высказывания A называется подмножество элементов из U, для которых высказывание A истинно. Обозначение: множество истинности будем обозначать той же буквой, что и утверждение (S_A). : $A \rightarrow S_A$.

Существует также множество абсолютно ложных высказываний $B \rightarrow S_B$.

Два высказывания, имеющих одно и то же множество истинности называются *тождественными*. Множество всех высказываний для U образуют алгебру, если ввести следующие логические операции (связи) над высказываниями: а) дизъюнкцией - называется такое высказывание C, которое истинно, если хотя бы одно из высказываний (A или B) истинно: $C = A \vee B$; б) конъюнкцией - A и B называется $C = A \wedge B$ (A & B; AB), называется истинно, если истинно как A, так и B; в) отрицание; высказывание C называется отрицанием A, если оно истинно лишь в том случае, когда A ложно: $C = \bar{A}$. Напишем таблицу истинности:

Таблица 1

A	B	$A \vee B$	AB	$\bar{A}$
и	и	и	и	л
и	л	и	л	л
л	и	и	л	и
л	л	л	л	и

Где истина -И, ложь - Л.

Установлено, что эта алгебра является булевой. Посмотрим, какие операции над множествами истинности отвечают этим операциям и высказываниям.

Пусть $A \to S_A$; $B \to S_B$. Очевидно, что $S_A \in P(U)$; $S_B \in P(U)$.

$A \cup B \to S_A \cup S_B$ (по определению (*def*) операции)

$A \bullet B \xrightarrow{def} S_A \cap S_B$ – конъюнкция (так как AB истинно для тех элементов из **U**, которые лежат и в S_A и в S_B.

$\bar{A} \xrightarrow{def} \bar{S}_A$. Действительно, что если A ложно, то $\bar{A}$ истинно, то есть этот элемент не лежит в S_A, а лежит в $\bar{S}_A$.

Также применимы следующие обозначения операций: отрицание: $\neg$, .NOT.; конъюнкция: «и», .AND.; дизъюнкция «или», .OR.

Теорема

Алгебра высказываний является булевой алгеброй, то есть для нее выполняются аксиомы этой алгебры.

Доказательство:

Для всех восьми групп аксиом роль элемента O играет абсолютно ложное высказывание $\varnothing$, а роль элемента I – абсолютно истинное высказывание U. Доказывание может происходить двумя путями: механическим или из соответствия между высказываниями и множествами истинности.

Операции в алгебре высказываний называют еще логическими связками.

Приведем еще примеры таблиц истинности:

Таблица 2

A	B	$A \xrightarrow{def} B$	$A \oplus B$	$A \sim B$
и	и	и	л	и
и	л	л	и	л
л	и	и	и	л
л	л	л	л	и

Функция $\boldsymbol{A} \xrightarrow{def} \boldsymbol{B}$ носит название «следование» или импликация.

Какова связь □ с с обычным математическим $\Rightarrow$?

Из лжи следует все, что угодно - и истина, и ложь. Существует истинное математическое объяснение. Для истинного математического высказывания любое следствие истинно, если отсутствуют логические ошибки. Если посылки ложные, то, не делая математические ошибки, можно вывести любое утверждение. Это факт.

Например, из того, что 0=1 можно вывести из любого высказывания.

Функция $\boldsymbol{A \oplus B}$ называется «разделительное или», а также «сложение по модулю два». Она истинна, если истинно хотя бы одно из бинарных переменных.

Функция $\boldsymbol{A \sim B}$ именуется «эквиваленцией» и истинна. Если как А, так и В одновременны истинны или ложны.

Приведем пример, показывающий связь между алгеброй высказываний и контактными схемами.

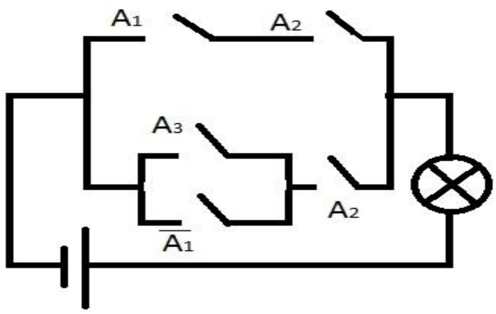

Схема B_1

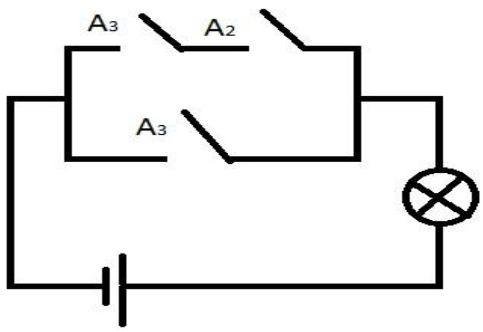

Схема B_2

Рис.7.

Доказать эквивалентность этих схем. Контакты, обозначенные одной буквой, либо одинаково замкнуты, либо разомкнуты. Соответственно знак инверсии над контактом дает его разомкнутое или замкнутое состояние. Речь идет о релейных контактах.

Схема называются эквивалентными, если при любом сочетании контактов они одновременно либо пропускают, либо не пропускают ток.

B_1 – первая схема пропускает ток;

B_2 – вторая схема пропускает ток;

A_i – соответствующий контакт пропускает ток (i = 1, 2, 3).

Доказать, что $B_1 = B_2$. Исходя из дистрибутивности

$$B_1 = A_1A_2 \cup (A_3 \cup \bar{A}_1) = A_1A_2 \cup A_3A_2 \cup \bar{A}_1 A_2 \quad (4.1)$$

(Чтобы ток прошел - либо первая ветвь, либо вторая – дизъюнкция. Скобки не расставляются по ассоциативности. Коммутативность – перенос членов и снова дистрибутивность:

$$B_1 = (A_2 \cup \bar{A}_1) \cup A_3A_2 = A_2 \cup A_3A_2 \quad (4.2)$$

Для второй схемы:

$$B_2 = A_2 \cup A_3A_2, \text{ т.е. } B_1=B_2.$$

Отсюда следует, что $\bar{A}_1$ не существенен, называется «фиктивным», и его можно исключить.

2.3 Булевы векторы.

Рассмотрим множество всех n-мерных векторов вида α = (α_1, α_2, α_3), где $\alpha_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$. Множество всех таких n-мерных векторов называется n-мерным булевым кубом B^n.

Пример:

n=1 B^1 вида α = (α_1), в одномерном кубе два элемента, рис.8.

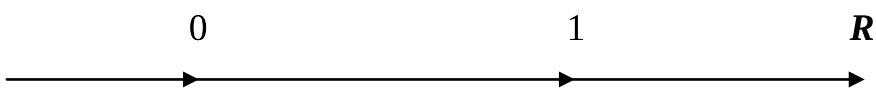

Рис.8.

n=2 B^2 вида α = (α_1, α_2)

Характерная «квадратная» форма дает нам название «булев квадрат» для B^2, рис.9.

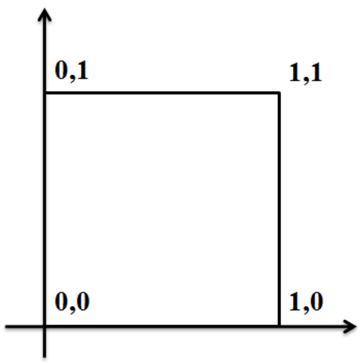

Рис.9. .

n=3 B^3 вида α = $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, и соответственно «булев куб» с восемью вершинами:

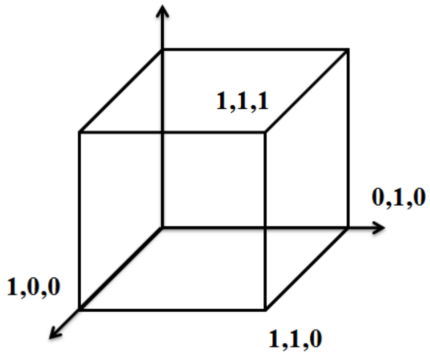

Рис.10.

В общем случае B^n совокупность вершин n-мерного координатного куба.
Теорема

Мощность булевой алгебры $|B^n| = 2^n$

Доказательство:

Рассмотрим множество всех n-мерных векторов вида α = $(\alpha_1 ... \alpha_i, \alpha_n)$, где $\alpha_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ - n-мерный булев куб B^n.

Для каждого – соответственно 2 возможности включения или же, ибо куб имеет размерность n -2^n возможностей.

В завершении нарисуем четырехмерный булев куб B^4

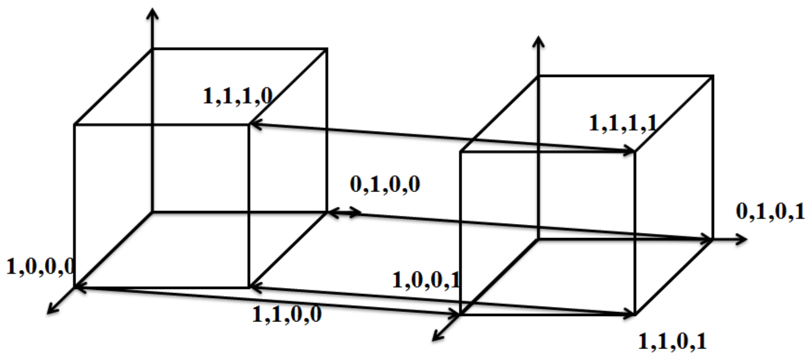

Рис.11.

2.4 Булева алгебра булевых векторов.

Имеем множество из двух элементов - $\{0,1\}$. На нем введем три операции:

Дизъюнкция $\begin{Bmatrix} 0\cup 0=0 \\ 0\cup 1=1\cup 0=1 \\ 1\cup 1=1 \end{Bmatrix}$

(по смыслу – логическое сложение)

Конъюнкция $\begin{Bmatrix} 0\cap 1=1\cap 0=0 \\ 0\cap 0=0 \\ 1\cap 1=1 \end{Bmatrix}$

(По смыслу - логическое умножение)

Отрицание $\begin{cases} \bar{0}=1 \\ \bar{1}=0 \end{cases}$

Рассмотрим B^n. Введем в B^n те же операции.

Логической суммой двух булевых векторов называется вектор, полученный покоординатным логическим сложением соответствующих векторов:

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n);\ \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n);$$

Логическое сложение:

$$\alpha \vee \beta \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_1 \cup \beta_1; \alpha_2 \cup \beta_2\ ; \ldots ; \alpha_n \cup \beta_n\ ); \quad (5.1)$$

Логическое умножение:

$$\alpha\beta \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_1\beta_1; \alpha_2\beta_2\ ; \ldots ;\ \alpha_n\beta_n); \quad (5.2)$$

Логическое отрицание получается из первоначального покоординатным отрицанием:

$$\overline{\alpha} = (\overline{\alpha_1}; \overline{\alpha_2}; \ldots; \overline{\alpha_n}).$$

Теорема: При таком определении операции булев куб B^n становится булевой алгеброй. При этом роль соответственно нуля и единицы играют вектора

0= (0, …,0); 1= (1, …,1);

Доказательство достигается проверкой всех аксиом булевой алгебры.

2.5 Характеристические векторы подмножеств.

Вернемся к

$U = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$; $|U| = n$

Пусть $S \subset U$ – произвольно, может быть $\varnothing$. Сопоставим подмножеству S: $\alpha_S \to\ \in B^n$, где α_S- некоторый n-ый вектор по следующему правилу:

$$\alpha_S = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

$$\text{где } \alpha_i = \begin{cases} 1, \alpha_i \in S; \\ 0, \alpha_i \notin S \end{cases}$$

Тогда вектор α_s называется характеристическим для S.

Теорема.

Объединению подмножеств отвечает логическая сумма их характеристических векторов:

$$S \cup T \to \alpha_S \cup \alpha_T \quad (7.1)$$

Пересечению отвечает логическое произведение

$$S \cap T \to \alpha_S \cap \alpha_T \quad (7.2)$$

дополнению

$$\bar{S} \to \overline{\alpha_S} \quad (7.3)$$

соответствует отрицание характеристического вектора. Соответствие между подмножествами и характеристическими векторами взаимно однозначное.

Доказательство.

Покажем верность первого соответствия. Остальные весьма аналогично показываются.

Пусть $\alpha_T = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, $\alpha_S = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$

$$S \cup T \to (\alpha_1 \cup \beta_1; \alpha_2 \cup \beta_2; \ldots; \alpha_n \cup \beta_n).$$

Вообще α_S лежит в этом множестве, если оно лежит либо в S, либо в T, т.е. либо α_n, либо β_n равно 1, но это и есть логическая сумма.

Пример.

Пусть:

$$U = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, n = 5;$$

$$S = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5\}; T = \{\alpha_2, \alpha_4\};$$

$$\alpha_S = (1, 0, 1, 0, 1); \alpha_T = (0, 1, 1, 0, 0);$$

$$S \cup T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\};$$

$$\alpha_{S \cup T} = (1, 1, 1, 0, 1);$$

$$S \cap T = \{\alpha_3\}$$

$$\alpha_{S \cap T} = (0, 0, 1, 0, 0);$$

$$\bar{S} = \{\alpha_2, \alpha_4\};$$

$$\alpha_{\bar{S}} = (0, 1, 0, 1, 0)$$

Две булевы алгебры M, $\tilde{M}$ называются изоморфными, если существует такое взаимнооднозначное соответствие между их элементами $M \leftrightarrow \tilde{M}$, при котором дизъюнкция двух элементов из M переходит в дизъюнкцию соответствующих элементов из $\tilde{M}$, конъюнкция в конъюнкцию и обратно, отрицание в отрицание. Т.е. сохраняется соответствие.

$$\left\{\begin{array}{l} a \cap a' \\ b \cap b' \\ a \cup b \cup a' \cup b' \\ a \cap b \cap a' \cap b' \\ \overline{a} \cap \overline{a}' \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{A} \cong \tilde{A} \quad (7.4)$$

Теорема.

Пусть U – некоторое множество, мощность которого равна |U| = n, ρ(U) – подмножество этого множества, B(U) – булева алгебра высказываний об элементах этого множества и, например, B^n – булев n-ый куб. Имеет место следующий изоморфизм:

$$\rho(U) \cong B(U) \cong \mathrm{B}^n \quad (7.5)$$

Доказательство.

1. $\rho(\mathbf{U}) \cong \mathrm{B}^n$; $\mathbf{U} \supset S \leftrightarrow \ \in \mathrm{B}^n$, что доказано.
2. $\rho(\mathbf{U}) \cong B(\mathbf{U})$; $S_A \to A$ (доказано в параграфе алгебре высказываний).

2.6 Булевы функции.

Функция от n переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется булевой, если областью ее задания является булев куб B^n , а областью значений – булев куб B^1. f задает отображение $f = \mathrm{B}^n \to \mathrm{B}^1$. Другими словами – аргументы $x_1, \ldots, x_n$ принимают значения 0 или 1, сама же f тоже 0 и 1.

Способы задания булевой функции.

1. *Табличный* $|B^n| = n$

При стандартном упорядочении вершин булева куба по n, числа, двоичная запись которых приведена в строках таблицы, возрастают.

Лексикографический способ.

Таблица 3

x_1	…	x_{n-1}	x_n	f
0	…	0	0	α
0	…	0	1	α

0	…	1	0	α
0	…	1	1	α
1	…	1	1	$[\alpha]$

Теорема.

$\exists^N = 2^n$ различных функций от n-переменных.

Доказательство.

Функцию f задает вектор $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ – N – мерный булев вектор. Всего таких векторов N.

2. *Векторный* при стандартном употреблении таблицы, т.е. вершин куба, достаточно указать векторные значения $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ (эквивалентно табличному).

3. *Геометрический*. Вершина булева куба B^n: $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; называется единичной (единичным набором), если для $f(x_1, ..., x_n)$:

$f(x_1, ..., x_n) = 1$

Совокупность вершин единичных наборов для f называется носителем функции f и обозначается N_f, рис.12. Носитель полностью задает функцию f.

$$N_f := \{\alpha \in B^n \mid f(\alpha) = 1\} \quad (7.1)$$

Пример

$N_f := \{\alpha \in B^3 \mid f(x_1, ..., x_n) = (01001100)\}$

$|B^3| = 2^3=8$

Применяя табличный способ

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	
1	1	0	0
1	1	1	0

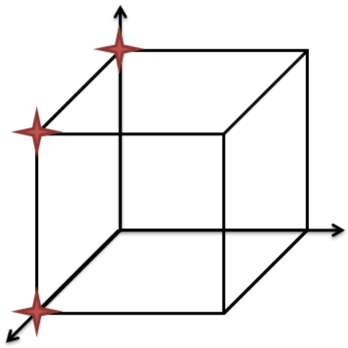

Рис.12.

Звездочкой обозначены единичные вершины. Носитель:

N_f : = $\{\alpha \in B^3 \mid (001), (100),(101)\}$

Булевы функции одного переменного

$f(x)$; n=1; $2^2 = 4$.

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$f_1(x) \equiv 0$; $f_2(x) \equiv x$; $f_3(x) \equiv \bar{x}$; $f_4(x) \equiv 1$.

Булева функция двух переменных. Основные и элементарные функции.

Пусть задана $f(x_1, \ldots, x_n)$. x_n называется фиктивным переменным, если его значения не влияют на значение функции:

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1); (\forall\ x_1,\ x_{n-1}). \quad (8.1)$$

Понятие фиктивного переменного позволяет функцию от (n – 1) переменного рассматривать как функцию от n переменных. В частности, $f(x)$ входит в перечень функций от *x* переменных (которыми и задается).

$f(x) \supset f(x_1, x_2)$.

$f(x_1, x_2)$; n = 2; $2^{2^2} = 16$.

Из них 4 функции одного переменного, а 12 функций существенно зависят от двух переменных.

Приведем таблицы для некоторых из них.

Таблица 4.

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \to x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \sim x_2$	$x_1 \mid x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0

В заголовке таблицы, слева направо следуют соответственно уже знакомые нам ранее конъюнкция, дизъюнкция, импликация, сложение по модулю два (остаток деления суммы на два) и новые – эквиваленция, штрих Шеффера (отрицание конъюнкции), стрелка Пирса (отрицание дизъюнкции). Основными функциями называются:

$$(x) = \bar{x}; \quad (x_1 |\ x_2) = x_1 \& x_2; \quad (x_1\ \ x_2) = x_1 \vee x_2.$$

Другими словами новые функции через основные:

$$x_1 | x_2 = \overline{x_1 \& x_2}; \ (8.2)$$

$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}; \ (8.3)$$

$$x_1 \sim x_2 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_2; \ (8.4)$$

$$x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1\ x_2 \vee x_1\ \bar{x}_2; \ (8.5)$$

$$x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2. \ (8.6)$$

Элементарными функциями называются все основные функции и еще: →, ⊕, ~, |, ↓.

Теорема.

Множество всех булевых функций является булевой алгеброй, если рассматривать следующие операции над функциями: —, ∨, &. Роль элемента 0 играет $f(x) \equiv 0$, а роль элемента I $f(x) \equiv 1$.

Доказательство.

Достигается путем проверки аксиом для каждой из функций. К примеру – коммутативность:

$$x_1 \& x_2 = x_2 \& x_1$$

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1 \text{ и т.д.}$$

$$x_1 \vee x_2 = \bar{x} = 1$$

$$x_1 \wedge \bar{x} = 0$$

$$\overline{x_1 \wedge x_2} = \bar{x}_1 \cup \bar{x}_2$$

$$\overline{x_1 \cup x_2} = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$$

2.7 Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ).

Рассмотрим функцию из n переменных $(x_1, \ldots, x_n)$.

1. Элементарной конъюнкцией называется произведение каких-либо из этих переменных или их отрицаний, причем каждая переменная входит не более

одного раза.

2. ДНФ – логическая сумма (дизъюнкция) элементарных конъюнкций, в которую каждая конъюнкция входит не более одного раза. Заметим, что две разные по записи ДНФ могут задавать одну и ту же булеву функцию.

Пример: x_1 & x_2

$D_1 = x_1$;

$D_2 = x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} = x_1(x_2 \vee \overline{x_2}) = x_1 \cdot \mathrm{I} = x_1$;

$D_1 = D_1$.

3. Элементарная конъюнкция называется полной, если она состоит из n сомножителей (если каждая переменная, либо ее отрицание входит в число сомножителей).

4. Совершенная ДНФ (СДНФ) – такая ДНФ, слагаемые которой являются полными конъюнкциями.

Теорема.

Если $f(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0$, то ее можно представить единственным образом в виде СДНФ. Введем обозначение.

$$\chi^{\alpha} \overset{def}{\equiv} \begin{cases} \chi, если\, \chi^{\alpha} = 1; \chi = \chi^{1;} \\ \overline{\chi}, если\, \chi^{\alpha} = 0; \overline{\chi} = \chi^{0}. \end{cases} \quad (9.1)$$

$0^0 = 1;\ 0^1 = 0;\ 1^0 = 1;\ 1^1 = 1;\ = 1.$

Доказательство.

1. Докажем, что СДНФ ∃ для f. Пусть f задано таблично:

x_1	…	x_n	f	
0	…	0	α_1	
0	…	1	α_2	
G_1	…	G_n	1	$N = 2^n$
………………………………				
1	…	1	x_n	$N_f = ?$

N_f; Каждому набору из носителя σ = () ∈ N↓ сопоставим полную конъюнкцию K = $x_1^{G_1} \ \ldots \ x_n^{G_n}$.

Рассмотрим новую $g(x_1, \ldots, x_n) = \underline{\vee}xx \ x_1^{G_1} \ \ldots \ x_n^{G_n} \ (x_1, \ldots, x_n \in N_f)$

$\underline{\vee}$xx – сумма по всем носителям.

В этой сумме столько слагаемых, сколько единичных наборов в N_f. Заметим, что g есть СДНФ.

Покажем, что $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$. Для этого докажем, что у них один и тот же N_f .

а) Пусть $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2\ \ldots, \alpha_n) \in N_f$, т.е.

$$f(\alpha_1, \alpha_2\ \ldots, \alpha_n) = 1,$$

тогда, что и покажем,

$$g(\alpha') = 1$$

Это значит, что среди слагаемых g есть слагаемое:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\alpha_1}\ \ldots\ x_n^{\alpha_n} \vee \ldots \ (9.2)$$

$$g(\alpha_1, \alpha_2\ \ldots, \alpha_n) = \alpha_1^{\alpha_1}\ \ldots\ \alpha_n^{\alpha_n} \vee \ldots = 1 \cdot 1 \cdots 1 \vee \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma = 1 \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2\ \ldots, \alpha_n) \in N_g \ (9.3),$$

т.е. всякий набор из N_f лежит в N_g.

б) Пусть $(\alpha_1, \alpha_2\ \ldots, \alpha_n) \in N_g$, т.е.

$g(\alpha_1, \alpha_2\ \ldots, \alpha_n) = 1 \Rightarrow$ в сумме g есть слагаемые, равные 1, т.е. слагаемые, вида:

$$\alpha_1^{\alpha_1}\ \ldots\ \alpha_n^{\alpha_n} = 1 \Rightarrow \Sigma = 1,\ i\ \forall\ ƶ \div \mathrm{n},\ (9.4)$$

т.е. набор $(\alpha_1, \alpha_2\ \ldots, \alpha_n) \in N_f$.

Из а) и б) следует, что $N_g = N_f \Rightarrow f \equiv g$.

2. Единственность СДНФ для булевой функции:

Итак, если $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, то она может быть единственным образом представлена в виде совершенной ДНФ. Подсчитаем, сколько можно составить разных СДНФ для n переменных:

а) сколько имеется полных конъюнкций: $x_1\ \&\ x_2\ \&\ \ldots\ \&\ x_n \Rightarrow n$ = N – полных конъюнкций.

б) сколько имеется СДНФ?

$K_1, K_2, .., K_N$. Брать или нет – две возможности $\Rightarrow N$ возможности, но, однако, нельзя взять СДНФ из ни одной K, т.е. вариант 00…0 вылетает, и всего N - 1 возможность.

Поскольку из п. 1 следует, что каждой ненулевой булевой функции отвечает хоть одна СДНФ, а из п. 2 следует, что их не может быть больше одной, то, значит, соответствие однозначное.

Пример.

f = (0110); g = (1001), функция

h $(x_1, x_2, x_3) = f(g(x_1, x_3), x_2)$

Найти СДНФ для функции h.

Найдем таблицы для f и g, а затем для h.

Таблица 4.

B^2

x_1	x_2	f	g
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

B^3

x_1	x_2	x_3	h
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$h\ (0, 0, 0) = f\ (g(0, 0), 0) = f(1, 0) = 1;$$
$$h\ (0, 0, 1) = f\ (g(0, 1), 0) = f(0, 0) = 0;$$
$$h\ (1, 1, 0) = f\ (g(1, 0), 1) = f(0, 1) = 1 \text{ и т.д.}$$
$$h\ (0, 0, 1) = f(0, 1) = 1;$$
$$h\ (1, 1, 1) = f\ (g(1, 1), 1) = f(1, 1) = 0.$$

В СДНФ выйдет столько слагаемых, сколько единичных вершин.

$$h\ (x_1, x_2, x_3)= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cup \cdot x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cup \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \qquad (9.5)$$

Проверим, что эти функции равны, т.е. у них общие носители:

$$h\ (0, 0, 0) = 1 \equiv 1$$
$$h\ (0, 1, 1) = 1 \equiv 1 \text{ и т.д. на всех вершинах}$$
$$h \equiv 1 \text{ и сумма} \equiv 1.$$

Может правая часть ≡ 1 в других точках, в других вершинах? Тогда правая часть отличается от функции h. Легко видно, что каждое слагаемое равно 1 только в одной вершине ⇒ лишних вершин нет.

2.8 Методы приведения функции к совершенной ДНФ.

Даны булевы $f_1(x_1,\ldots,x_n)$, $g_1\ (x_1,\ldots,x_{k1})$, $g_2(x_1,\ldots,x_{k2})$, …, $g_n(x_1,\ldots,x_n)$

Суперпозицией этих функций называется: следующая функция

$$f = f_1(g_1, g_2, \ldots, g_n). \ (13.1)$$

Формулой называется булева функция, которая может быть получена из элементарных булевых функций с помощью одной или нескольких суперпозиций.

$\vee$, &, $\bar{\ }$, $\oplus$, $\rightarrow$, ~, |, $\downarrow$ – основные.

1. Если $f(\ x_1,\ldots,x_n)$ заданы в табличной форме, то ее можно привести к СДНФ, как указано в доказательстве теории об СДНФ и в примере.
2. f – представлена формулой. Для приведения СДНФ нужно:

а) все элементарные функции выразить через основные;

$$\bar{x}_1 \vee x_2\, x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \quad (13.2)$$

– двоичное сложение, остаток от деления обычной суммы на 2; логически это разделительное «или»: или $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$ или $x_1 = 0$, $x_2 = 1$;

$$x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2 \quad (13.3)$$

– импликация – логическое следование тогда, когда x_1 – ложь; либо x_2 – истина;

$$x_1 \sim x_2 = x_1 x_2 \vee \overline{x_1}\, \overline{x_2} \quad (13.4)$$

– эквиваленция – равна единице, когда $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$, либо $x_1 = x_1 = 0$;

$$x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \,\&\, x_2}; \quad (13.5)$$

$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}. \quad (13.6)$$

б) с помощью законов двойственности де Моргана все отрицания опустить на сами переменные

Пример.

$$\overline{x_1\, x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}; \quad (13.7)$$

$$\overline{\chi_1 \vee \chi_2} = \overline{x_1} \,\&\, \overline{x_2}. \quad (13.8)$$

в) с помощью первого закона дистрибутивности раскрыть все скобки в полученной формуле и убрать повторение слагаемых, если оно есть.

$$(x_1 \vee x_2)\, x_3 = x_1 x_3 \vee x_2 x_3 \quad (13.9)$$

Теперь получим просто ДНФ

г) неполные конъюнкции полученных ДНФ дополняются до полных конъюнкций:

k – некоторая конъюнкция (к примеру, не содержит x_1). Тогда:

$$k = k\, I = k\,(x_1 \vee \overline{x_1}) = k x_1 \vee k \overline{x_1}$$

Из полученной суммы убирают лишние слагаемые, получается СДНФ.

Пример.

$$f(x, y) = (x \oplus y) \mid (x \sim \bar{y}) \quad (13.10).$$

Привести данную формулу к СДНФ.

$$f(x, y) = (x \oplus y) \mid (x \sim y) = \overline{(\chi\bar{\gamma} \cup \bar{\chi}\gamma) \cap (\chi\bar{\gamma} \cup \bar{\chi}\gamma)} = \overline{(\chi\bar{\gamma} \cup \bar{\chi}\gamma} \cup \overline{(\chi\bar{\gamma} \cup \bar{\chi}\gamma)} \quad (13.10)$$

Пусть $f(x, y) = a$, тогда:

$$\overline{(\chi\bar{\gamma} \cup \bar{\chi}\gamma) \cap (\chi\bar{\gamma} \cup \bar{\chi}\gamma)} = a \vee a = a \Rightarrow f(x, y) = \overline{x\,\bar{y}} \,\&\, \overline{\bar{x}y} = (\bar{x} \vee \bar{\bar{y}}) \,\&\, (\bar{\bar{x}} \vee \bar{y}) =$$

$$= (\bar{x} \vee y) \,\&\, (x \vee \bar{y}) = \bar{x}x \vee yx \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee y\,\bar{y} = xy \vee \bar{x}\,\bar{y} \text{ (СДНФ)}. \quad (13.11)$$

СДНФ единственная для f только в том случае, когда фиксировано количество переменных n. С вводом новых фиктивных переменных СДНФ будет меняться.

Пример.

$f(x) = x_1$, n = 1 $\Rightarrow$ СДНФ;

$f(x_1, x_2) = x_1$ – ДНФ, но n = 2, x_2-фиктивная переменная, тогда

$$f(x_1, x_2) = x_1 I = x_1(x_2 \vee \overline{x_2}) = x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} \quad (13.12)$$

СДНФ.

2.9 Задача минимизации ДНФ.

Рангом конъюнкции называется количество сомножителей в ней. Рангом ДНФ называется сумма рангов ее слагаемых (конъюнкций).

Пример.

$$rang\ (x_1 \overline{x_2} \vee x_4) = 2 + 1 = 3 \quad (11.1)$$

Для заданной ненулевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ минимальной называется такая ДНФ, которая имеет наименьший ранг среди всех ДНФ, представляющих данную функцию.

Пример.

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} = x_1 (= 1). \quad (14.2)$$

Совершенная ДНФ имеет максимальный ранг.

2.10 Тривиальный алгоритм минимизации ДНФ.

Для нахождения $ДНФ_{min}$ для $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно проделать шаги:

1) Перечислить все возможные ДНФ от n переменных в порядке возрастания их рангов: $D_1 \ldots D_{2n} \ldots D_N$.
2) Последовательно проверить равенство: $f \equiv D_1$, $f \equiv D_2$, … и т.д. Просмотр заканчивается при выполнении первого же равенства, т.к. просматриваемая $D_i = D_{min}$. Найдем количество ДНФ для «n» переменных: $x_1, \ldots, x_n$.

а) Сколько имеется элементарных конъюнкций?

Для x_1: 3 возможности: x_1, $\overline{x_1}$ либо вообще нет и т.д. $\Rightarrow$ всего элементарных конъюнкций, M =3 .

$k_1, \ldots, k_M$

б) Сколько $ДНФ_{min}$? Всего возможностей: 2^M

2.11 Интервалы булевой функции и покрытия.

Интервалом N_k называется носитель элементарной конъюнкции K,

рис.13.

Пример.

x_1, x_2

Найти носитель для k=$x_1\ \overline{x_2}$

x_1=1, x_2=0

Откуда k=1 единственно.

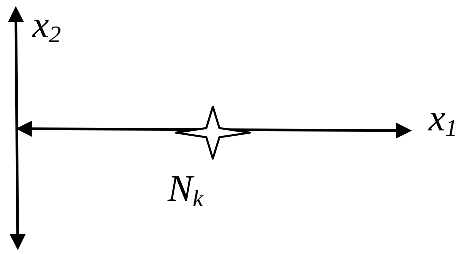

Рис.13.

Пусть теперь

k= $\overline{\chi_1}$?, x_1=0, x_2=0, x_3=0.

N_K = ((0,0); (0,1)), рис.14.

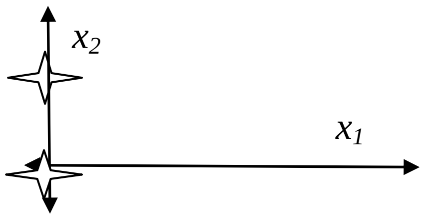

Рис.14.

Теорема.

Для n переменных $x_1,\ldots,x_n$ интервал для конъюнкции K ранга r представляет собой грань n-мерного булева куба B^n, размерность которой равна: n – r, количество вершин в интервале.

Говорят, что совокупность интервалов N_1, …, N_S образует покрытие для функции f, если выполняется условие:

$N_f = N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_S$ (12.1), в частности отсюда вытекает, что целиком содержится $N_i \subset N_1$.

Теорема.

Если D = $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_S$ (12.2) есть некоторая ДНФ для булевой функции f, то соответствующие интервалы N_{K_1}, …, N_{K_S} образуют покрытие для функции f.

Доказательство.

Следует из определения покрытия, очевидно.

Также , из формулы:

$$N_{f\cup g}. = N_f \cup N_g \quad (14.3)$$

фактически наблюдаем связь между операциями над носителями с операциями для функций.

Пусть $\alpha \in B^n$ – вершина булева куба,

$\alpha \in B^n \Rightarrow$ в точке $f \vee g\,(\alpha) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\alpha) = 1$ или $g(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha \in N_f$ и N_g

Показано, что левая часть лежит в правой

$$N_{f\cup g} \subset N_f \cup N_g \quad (14.4)$$

Аналогично показывается и обратное включение.

2.12 Максимальные интервалы и сокращенная ДНФ.

$f(x_1,\ldots,x_n)$ можно реализовать в сумме ДНФ. Наша задача – минимизировать ее ранг. Имеет смысл рассматривать покрытие

$$\mathbf{N_f} = N_{1max} \cup \ldots \cup N_{Smax} \quad (17.1)$$

которое будет соответствовать $D_{min} = K_{1\,min} \vee K_{2\,min} \vee \ldots \vee K_{S\,min}$ (17.2).

Для булевой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ интервал $\mathbf{N}_K$ называется максимальным, если:

1) $N_k \subset N_f$;
2) Не существует такого, что $N_k \subset N_k' \subset N_f$.

Логическая сумма (дизъюнкция) всех конъюнкций, отвечающих максимальным интервалам для функции f называется сокращенной ДНФ D_c (не путать с совершенной ДНФ, где минимальная размерность, противоположность)

Теорема.

Имеет место $f = D_c$.

Доказательство.

Совокупность всех интервалов покрывает ДНФ, что очевидно.

Пример.

$f = (1011, 1101)$; $n = 3$.

Найти сокращенную ДНФ.

Решение геометрическое, рис.15.

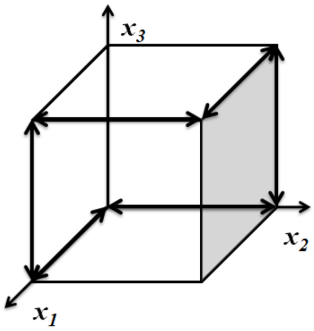

Рис.15.

Вершины интервала имеют две входящих стрелки.

Находим max интервалы.

D_c = ?

n – r = 1

⇒ т.к. n = 3. r = 2.

В силу изменения x_3, r зависит лишь от x_2.

$$D_C = x_1\overline{x_2} \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \overline{x_1}x_2 \vee \overline{x_1x_3} \vee \overline{x_2x_3} \quad (17.3)$$

Утверждается, что D_c СДНФ. Проверим выполнение аксиом:

1) Для первой K_1 : $x_1\overline{x_2}$=1 – первое ребро. Лежит в носителе, т.к. вершины отмечены
2) Является ли она двумерной? Нет – не существует плоскости, общей для всех.

D_c СДНФ проверит выполнение аксиомы.

Покрытие N_L максимальными интервалами называется *приводимым*, если из этого покрытия можно выбрать хотя бы один максимальный интервал так, что оставшиеся максимальные интервалы покрывают. В противном случае он называется *неприводимым.* ДНФ, отвечающая неприводимому покрытию, называется *неизбыточной* или тупиковой.

Теорема.

Для любой булевой функции f D_{min} является неизбыточной.

Доказательство.

1) $D_m = K_1 \vee \ldots \vee K_S$. Покажем, что все & в D_m отвечают N_{max} .

От противного:

Пусть K_i не отвечает $N_{(k1)max}$ ⇒ ∃ K_j, что $N_{k1} \subset N_k \subset N_f$ ⇒ *rang* K_i< $rangK_j$, т.е. исходная ДНФ не была минимальной. Обратное не верно – не всякая тупиковая ДНФ является min.

2) Покрытие N_M, отвечающее $K_1 \vee \ldots \vee K_s$, не приводимо. Действительно,

если бы оно было приводимо, то отбросив K_j, опять получаем *rang* D_2 < *rang* D_1 и т.д.

Пример. f = (0000 1111); n = 3, рис.16.

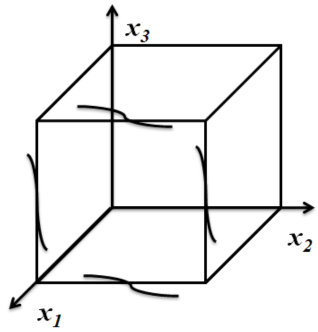

Рис.16.

Максимальным является двумерный интервал (на рисунке обозначается знаком «~»).

$n - r = 2$; $r = 1 \Rightarrow$ *rang* k = 1

$D_c = x_1$ (т.к. лишь оно равно 1)

Максимальный интервал N_k называется *ядровым* для булевой функции f, если при его отбрасывании нарушается покрытие носителя (т.е. если у вершина, которая не покрывается другими max интервалами функции f). Логическая сумма всех ядровых интервалов f называется ядром (ядровый ДНФ) и обозначается D_φ.

Теорема.

Все конъюнкции, входящие в состав min ДНФ для функции f, содержатся в сокращенной ДНФ, т.е. отвечают max интервалам.

Доказательство.

Пусть D_{min} – некоторая min ДНФ для f (возможны несколько min ДНФ), которая содержит K конъюнкцию: $K \not\subset D_c$. Тогда:

$$D_{min} = K \vee \ldots$$

Т.к. N_k *def* – не является max, найдется интервал такой, что:

$$N_k \subset \mathbf{N}_k' \subset \mathbf{N_f}.$$

Заменив в покрытии интервал N_k на , покрытие не нарушится и поэтому сохраняется равенство $f = K' \vee \ldots = D$. Сравним D_{min} и D. *Rang* D_{min} > *rang* D $\Rightarrow$ первая не была min.

Итак, поскольку $N_k \subset$ имеет *rang* K > *rang* K′ (n – r) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ *rang* D_{min} > *rang* D $\Rightarrow$ D_{min} не является min .

Теорема .

Все ядровые конъюнкции входят в состав любой min ДНФ для функции f.
Доказательство.

Вытекает из вышеприведенной теоремы и *def* D_φ.

Согласно теореме 1 все конъюнкции из D_{min} отвечают max интервалу функции f. Если какой-нибудь из ядровых интервалов, из ядровых конъюнкций $\notin D_{min}$, то оставшиеся интервалы не могут покрыть $N_f \Rightarrow$ не выполняется равенство: $D_{min} = f$, что противоречит *def* D_{min}.

Эти теоремы можно мнемонически объединить:

$$D_\varphi \subset D_{min} \subset D_c$$

Заметим, что всегда выполняется $D_{min} = f$, $D_c = f$, что касается же $D_\varphi = f$ - не всегда. Т.о. необходимо иметь в виду:

1) $D_\varphi = f \Rightarrow D_{min} = D_\varphi$ и других D_{min} не существуют.
2) Общий случай $D_\varphi \neq f$; для отыскания D_{min} надо дополнить D_φ конъюнкциями из D_c, пока не получится покрытие f.

Пример.

Найти D_φ для f = (1011 1101)

Отбрасывая любой из max интервалов мы не получим грань не покрытую другим интервалом, $D_\varphi = 0$. Далее: сокращенная ДНФ.

$$D_1 = x_1\overline{x_2} \vee x_2x_3 \vee \overline{x_1x_3} \quad (17.4)$$

(т.к. $N_f = N_1 \cup N_3 \cup N_5$) или другой

$$D_2 = x_1x_3 \vee \overline{x_1}x_2 \vee \overline{x_2x_3} \quad (17.5)$$

Пример.

$$f = (0000\ 1111)$$

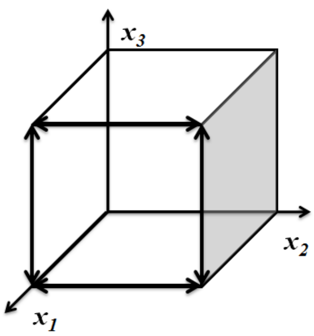

Рис.17.

$$D_\varphi = x_1 = f \Rightarrow D_{min} = x_1 .$$

Для булевой f некоторые ДНФ D называются неизбыточными (тупиковыми), если 1) все конъюнкции из D отвечают N_{max}; 2) эти интервалы покрывают N_B ; f = D; 3) отбрасывание какого-либо из этих интервалов нарушает покрытие (равенство) f = D. Очевидно, D_{min} является неизбыточный. Обратное же не верно.

Пример.

$N_B = N_1 \cup N_2 \cup N_4 \cup N_6$ (см. выше)

Соответствующее покрытие будет равно:

D = $x_1\overline{x_2} \vee x_1x_3 \vee \overline{x_1}x_2 \vee \overline{x_2x_3}$ (17.6) (избыточное покрытие)

Если $N_B = N_1 \cup N_2 \cup N_4 \cup N_5$ – неизбыточное покрытие.

Rang B = 8.

2.13 Метод Карно.

Требуется найти min ДНФ $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ только для n = 4. Замечание: в B^n две вершины принадлежат одному ребру, когда их координатные векторы отличаются в одной позиции. Четыре вершины принадлежат одной двумерной грани, если их координатные векторы отличаются друг от друга лишь в двух позициях. 8 вершин – трехмерная грань – отличие в трех позициях.

Изложим метода Карно на примере.

Пример.

Найти min ДНФ от $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ = (1011 0101 0010 0101)

f = 16 – мерный вектор. Составим карту Карно:

Таблица 5.

	x_3	0	0	1	1
x_1	x_2 \ x_4	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0

Перестановки строк, отмеченные стрелками, сделаны для того, чтобы соседние вершины, отличающиеся на одну позицию, стояли последовательно. Имеется исключение: крайние вершины в столбце тоже лежат на одном ребре.

Поскольку в таблице Карно нарушен стандартный порядок вершин, при заполнении таблицы значениями f третья четверка значений f вписывается в четвертую строку, а четвертая четверка значений – в третью строку. При этом при вписывании в строку таблицы у каждой четверки, меняются местами последние два числа.

Сначала будем искать сокращенную ДНС, максимальные интервалы и сумму конъюнкций.

Одномерные интервалы.

Итак, *одномерные* интервалы отвечают двум парам соседних по строке или столбцу элементам карты Карно, или двум элементам, крайним в строке или столбце.

1	0	1	1
0	1	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

Стрелками показаны некоторые одномерные интервалы.

Двумерный интервал, рис.18:

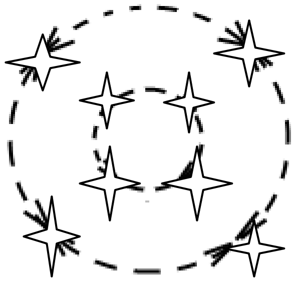

Рис.18.

Звездочками показаны, как и ранее, вершины. Стрелками и штриховой линией показаны двумерные интервалы.

Двумерные интервалы отвечают квадрату, составленному из элементов карты Карно, лежащих рядом, либо образующих строку, либо столбец, либо четырем угловым элементам карты Карно.

Трехмерный интервал образуется восемью элементами карты Карно, заполняющими два соседних столбца (строки), либо два крайних столбца (строки).

Запишем максимальные интервалы:

1	0	1	1
0	1	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

Считая условно таблицу булевой функции, приведенную выше , матрицей интервал i_1 образован элементами 11 и 14.

Интервал i_2 образован элементами 23 и 24. Эти интервалы продублированы стрелочками.

n=4

rang k=r	размерность интервала	количество вершин в интервале
1	3	8
2	2	4
3	1	2
4	0	1

Запишем конъюнкцию .

$$D_{с} = \underbrace{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}}_{i_1} \vee \underbrace{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3}_{i_2} \vee \underbrace{\overline{x_1}\,x_3 x_4}_{i_3} \vee \underbrace{x_2 x_4}_{i_4} \vee \underbrace{\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}}_{i_5} \quad (14.1)$$

1	0	1	1
0	1	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

i_4 по сути двумерная грань, rang k=2.

Выпишем ядровую ДНФ(вершины покрыты только этим интервалом)

$$D_{я} = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee x_2 x_4 \vee \overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4} \quad (14.2)$$

Найдем D_{min} , такую, что

$$D_{\varphi} \subset D_{min} \subset D_c$$

Проверим, что не тождественна исходной булевой функции. И правда, имеем элемент 13, подтверждающий это. Дополняем $D_я$ конъюнкциями из D_c для получения D_{min} . Отметим, что D_{min} не единственна, их несколько. К ядру надо добавить

$$D_1 = D_я \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \ (14.3)$$

$$D_2 = D_я \vee \overline{x_1}x_3x_4 \ (14.3)$$

При этом rang D_{min} = rang $D_я$ + rang $k_{доп}$=8+3=11

2.14 Метод Квайна – Мак-Класки.

Пусть задана булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$. Используем тождества:

1) $kx \vee k\bar{x} = k$ (тождество склейки); (19.1)

Доказательство.

$$kx \vee k\bar{x} = k(x \vee \bar{x}) = k \cdot 1 = k. \ (19.2)$$

2) $\mathbf{k_1k_2k_1k_2} \vee \mathbf{k_1} = \mathbf{k_1}$; (19.3)

Доказательство.

$$\mathbf{k_1k_2} \vee \mathbf{k_1} = \mathbf{k_1k_2} \vee \mathbf{k_1} \cdot 1 = \mathbf{k_1}(\mathbf{k_2} \vee 1) = \mathbf{k_1} \cdot 1 = \mathbf{k_1}. \ (19.4)$$

Шаги алгоритма Квайна:

1. Выписывается Совершенная ДНФ для $f(x_1, \ldots, x_2)$.
2. Каждая конъюнкция, входящая в СДНФ, сокращенно записывается следующим образом: вместо x_i на i-ом месте пишется 1, а вместо $\overline{x_i}$ пишется соответственно – 0.

Пример записи.

$$x_1\overline{x_2}x_3x_4 = 1011$$

3. Все конъюнкции разбиваются на классы по числу единиц, входящих в конъюнкцию и выписываются в столбец в порядке возрастания классов. Операция склейки применяется всюду, где это возможно. При этом в силу приведенного в начале тождества склеиваться могут только конъюнкции, принадлежащие только соседним классам. При каждой склейки пропадает одна переменная, вместо которой в конъюнкции пишется черта.

Пример записи.

$$x_1\overline{x_2}x_3x_4 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 = x_1\overline{x_3}x_4 \text{ – в содержательном обозначении.}$$

$$1011 \vee 1001 = 10\text{-}1 \text{ – в нашем обозначении.}$$

Конъюнкция, хотя бы один раз участвующая в склейке, считается √ или ∗. К конъюнкциям, полученным после первой склейки, снова применяется операция склейки, где это возможно, пока все возможные склейки не будут выполнены.

4. К Конъюнкциям, оставшимся неотмеченными, применяются

всевозможные операции поглощения.

В результате этой деятельности получаем сокращенную ДНФ D_C.

5. ИИз D_C выделяют ядро с помощью специальной таблицы.

6. СС помощью той же таблицы $D_Я$ дополняется до D_{min} (если это нужно).

Пример.

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$$\text{СДНФ} = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3x_4 \vee \overline{x_1}\,x_2\overline{x_3}\,x_4 \vee$$
$$\vee \overline{x_1}\,x_2x_3x_4 \vee x_1\overline{x_2}\,x_3\overline{x_4} \vee x_1x_2\overline{x_3}\,x_4 \vee x_1x_2x_3x_4. \quad (19.5)$$

Выпишем классы конъюнкций:

00-0	0000	*		0 класс	1 gr
	0010	*		1 класс	2 gr
001-	0011	*	а		
	0101	*	б	2 класс	3 gr
-010	1010	*	в		
0-11	-------				
01-1	0111	*	а	3 класс	4 gr
-101	1101	*	б		
-111	1111	*		4 класс	5 gr
11-1		*			

* - все конъюнкции склеены

Склеим и получим:

e + l	-1-1
f + k	-1-1

a	00-0		(1 gr + 2 gr)
b	001-		(2 gr + 3а gr)
c	-010		(2 gr + 3в gr)
d	0-11		(3а gr + 4а gr)
e	01-1	*	(3б gr + 4а gr)
f	-101	*	(3б gr + 4б gr)
k	-111	*	(4а gr + 5 gr)
l	11-1	*	(4б gr + 5 gr)

Таким образом D_C (из неотмеченных, поглощений провести невозможно)

$$D_c = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,x_3\,x_4 \vee x_2 x_4 \quad (19.5)$$

Находим $D_я$. Смысл – какие из вершин носителя покрываются этим интервалом. Таблица:

⇩ Непокрытый элемент – N_f.

	•							
	*		*	*	*	*	*	
N_f	0	0	0	0	0	1	1	1
	0	0	0	1	1	0	1	1
	0	1	1	0	1	1	0	1
D_C	0	0	1	1	1	0	1	1
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}$	⊗	x						
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$		x	x					
$\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}$		x				⊗		
$\overline{x_1}\,x_3\,x_4$			x		x			
$x_2 x_4$				⊗	x		⊗	⊗

n – r = 4 – 2

Ядровой является та конъюнкция, для которой найдётся x, единственный в своем столбце.

Т.е. $D_я = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_2}\,x_3 \vee x_2\,x_4$ (19.6)

Далее выясним, покрывает ли ядро весь носитель. Отметим покрытие интервала символом * в таблице. Действуем по приведенному ранее алгоритму. Сравним $D_c = f$. Имеем $\Rightarrow D_C \neq f$

$$D_{\min 1} = D_C \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \text{ или } D_C \wedge x_1\,x_3\,x_4 = D_{\min 2} \quad (19.7,\ 19.8)$$

Эти конъюнкции обе *min*. У них:

$$11 = rang\ D_{min1} = rang\ D_{min2} \Rightarrow D_{min1} = D_{min2}$$

2.15 Двойственные функции.

$f(x_1,\ldots,x_n)$ – произвольная булева функция. Двойственной к функции f называется булева функцией $(x_1,\ldots,x_n) \stackrel{def}{=} (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$.

Пример.

$f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$;

$(x_1, x_2) = \overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}} = \overline{\overline{x_1}}\ \&\ \overline{\overline{x_2}} = x_1 \vee x_2$;

$f(x_1, x_2) = x_1\ \&\ x_2 \Rightarrow (x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$; (19.7)

$f(x) = x$;

$(x) = \bar{\bar{x}} = x$ – самодвойственная функция;

$f(x) = \bar{x}$;

$(x) = \bar{\bar{\bar{x}}} = \bar{x}$.

Теорема 1. (Принцип двойственности)

Пусть $F(x_1,\ldots,x_n)$ является суперпозицией

$f(x_1,\ldots,x_s)$ и $f_1(x_1,\ldots,x_n\ x_n), \ldots, (x_1,\ldots,x_n)$ (20.1).

Или же - $F(x_1,\ldots,x_n) = f(f_1(x_1,\ldots,x_n), \ldots, (x_1,\ldots,x_n))$. (20.2)

Тогда двойственной для нее есть:

$F^*(x_1,\ldots,x_n) = ((x_1,\ldots,x_n), \ldots, (x_1,\ldots,x_n)$;

Действительно

$F^*(x_1,\ldots,x_n) \stackrel{def}{=} \overline{F}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) = (f_1(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) \ldots (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) = = ((\bar{x}, \ldots, \overline{x_n}), \ldots, \overline{f_1}\ (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) \stackrel{def}{=} (f_1, \ldots, \overline{f_1}\ ) \stackrel{def}{=} ((x_1,\ldots,x_n), \ldots, (x_1,\ldots,x_n))$ (20.3).

ч.т.д.

Теорема 2.

Если функция f двойственна к функции g:

= g, то $g^* = f$ (или еще = f)

Доказательство.

Элементарно следует из определений.

Следствие (из теоремы 1, 2):

Если $f(x_1,\ldots,x_n)$ выражена через основные функции $\vee$, &, $\bar{\ }$, то для получения $(x_1,\ldots,x_n)$ достаточно заменить $\vee \to \&$, $\& \to \vee$, $\bar{\ } \equiv \bar{\ }$ каждую из функций на двойственную.

Доказательство.

= &, = $\vee$; = $\bar{\ }$ (см. пример).

Пример.

Для остальных элементарных функций:

для двоичного суммирования:

$$x_1 \oplus x_2 = x_1\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}\,x_2 = f$$

$$= x_1 \vee \overline{x_2}\;\overline{x_1} \vee x_2 = (x_1 \vee \overline{x_2})\;\&\;(\overline{x_1} \vee x_2) = x_1\,x_2 \vee \overline{x_1}\;\overline{x_2} = x_1 \sim x_2 \quad (19.10)$$

(эквиваленция).

Значит и наоборот.

$| \overset{*}{\rightarrow}$ (двойственность) $\downarrow$.

2.16 Совершенная конъюнктивная нормальная функция.

Реализацией ДНФ служит параллельно-последовательная схема соединения контактов. СКНФ – последовательно-параллельное их соединение.

Элементарной дизъюнкцией называется логическая сумма каких-либо из этих переменных, либо их отрицаний, в которое ни одна переменная не входит дважды.

Пример.

D = $\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_4}$(21.1) – является элементарной дизъюнкцией.

D = $\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_2}$ (21.2)– не является элементарной дизъюнкцией: повторение x_2.

Элементарная дизъюнкция называется полной, если она состоит из n слагаемых (содержит все переменные).

КНФ называется произведение нескольких элементарных дизъюнкций, в которые ни одни дизъюнкции не входят дважды.

СКНФ – называется произведением полных конъюнкций.

Теорема.

Если $f(x_1,\ldots,x_n)$ не тождественна 1, то она представлена в виде СКНФ единственным образом.

Доказательство.

Доказательство $\Rightarrow$ из двойственности.

Пример.

Рассмотрим $(x_1,\ldots,x_n) \overset{*}{\leftarrow} f(x_1,\ldots,x_n)$

Найдем СДНФ $k = k_1 \vee k_2 \vee \ldots \vee k_S$

Теперь найдем

$$f = k = k_1^* \cup k_2^* \cup \ldots \cup k_S^* = D_1\;\&\;D_2\;\&\ldots\&\;D_S \equiv\equiv \text{СКНФ}. \quad (21.3)$$

2.17 Сводка основных результатов.

1. Булева функция f: $B^n \rightarrow B^1$. Способы задания: f_1 - табличный, векторный,

f_n- геометрический

2. Основные булевы функции: $\vee$, &, $\overline{}$.
3. Необходимо иметь в виду свойства операций (т.е. аксиомы булевой алгебры). Особо важны:

$f \vee \overline{f} = 1$; f & $\overline{f} = 0$; $\overline{f \cup b} = \overline{f}$ & $\overline{b}$; $\overline{f \cap b} = \overline{f} \vee \overline{b}$; f & $1 = f$; $f \vee 1 = f$; $f \cdot 1 = 1$; $f \vee 0 = f$; $f \cdot 0 = 0$

4. Элементарные булевы функции: $\oplus \sim | \downarrow \to$
5. СДНФ.
6. а) f-вектор; б) -f-формула $\to$ ДНФ (заменить элементарные функции на основные, дополнить конъюнкцией $\to$ СДНФ)
7. СКНФ $f \Rightarrow$ $\Rightarrow$ СДНФ $\overset{*}{\to}$ СКНФ.
8. Минимизация ДНФ

а) геометрический метод $n \le 3$ (хотя можно из для ∞);

б) Метод Карно $n = 4$;

в) Метод Квайна – Мак-Класки – для $\forall$ n.

2.18 Функциональная полнота системы функций.

Рассмотрим некоторую конечную совокупность булевых функций:

$\Sigma = \{ f_1, \ldots, f_s \} \ : B^n \to B$. Если некоторую другую булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n) : B^n \to B$. можно выразить через функции системы Σ, представить ее в виде суперпозиций этих функций, то говорят, что функция f представляется формулой над Σ.

Система Σ называется функционально полной, если любую булеву функцию можно представить формулой над Σ.

Пример.

$\Sigma = \{\vee, \&, \overline{}\}$. Докажем, что она функционально полна. Любую булеву функцию можно представить в виде СДНФ, а любая СДНФ есть суперпозиция (считаем $0 \equiv x$ & $\bar{x}$). Однако, оказывается, существуют еще полные системы. Наша цель: найти их и получить теорему о полноте.

Теорема 1.

Пусть заданы две системы функций Σ и Σ_1 , причем известно, что Σ_1 функционально полная. Если $\forall$ f из Σ_1 можно выразить через функции из Σ, то Σ тоже функционально полная. Система Σ_1 называется системой сравнения.

Доказательство.

Очень простое. Пусть $\Sigma = \{ f_1, \ldots, f_s \}$, $f(x_1,\ldots,x_n)$, $\Sigma_1 = \{g_1, \ldots, g_r\}$. Пусть $F(x_1,\ldots,x_n)$ – произвольная. Из полноты Σ_1 следует, что f представляется формулой над Σ_1. Заменим в этой функции каждую g_i формулой над Σ, получим формулу над Σ . ч. т.д.

Теорема 2.

Пусть $\Sigma = \{ f_1, \ldots, f_s \}$ – полна. Тогда система, составленная из двойственных функций $\Sigma_1 = \{g_1, \ldots, g_r\}$также полна.

Доказательство.

Пусть $F(x_1,\ldots,x_n)$ – полная система, составленная из двойственных функций $F^*(x_1,\ldots,x_n)$ и представим ее формулой над Σ, что возможно из полноты. Если в этой формуле все x_n заменим на f_s , то в силу принципа двойственности получим функцию, двойственную к F , т.е. F* = F. Полнота доказана.

2.19 Важнейшие полные классы.

$\Sigma = \{ f_1, \ldots, f_s \}$ называется полной, если их суперпозиция дает любую булеву функцию.

1. $\alpha = \{\vee, \&, \overline{}\}$ – функционально полная система.

$0 = x \cdot \bar{x}$

2. $\Sigma_1 = \{\vee, \overline{}\}$ – докажем, что любую функцию можно так представить. Воспользуемся вышедоказанной Теоремой 1: если даны Σ, F и Σ_1 – полная, если $\forall\ f$ из Σ_1 может быть выражена через Σ, то и Σ полная. Σ_1 – система сравнения. В качестве системы сравнения Σ_1 выберем:

$\Sigma_1 = \{\vee, \&, \overline{}\}$ – полная.

Надо т.о. выразить & через $\vee$, $\overline{}$. Это легко достигается:

$x_1 \,\&\, x_2 = \overline{x_2 \cup x_2}$ (18.1) – по закону двойственности де Моргана $\Rightarrow \Sigma_1$ полная.

3. $\Sigma_3 = \{\&, \overline{}\}$ *Доказательство*.

$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1} \,\&\, \overline{x_2}}$ (18.2), (а можно сослаться на 2 часть свежедоказанной выше теоремы).

4. $\Sigma_4 = \{|\}$ –штрих Шеффера.

$x_1 \mid x_2 = \overline{x_1\, x_2}$ (18.3)

Возьмем в качестве системы сравнения:

$\Sigma_1 = \{\&, -\}$

$\bar{x} = x \mid x = \overline{x\, x} = \bar{x}$ (18.4);

x_1 & x_2 = $\overline{x_1 \mid x_2}$ = $(x_1|x_2)|\ x_1|x_2$ (18.5)

Таким образом, Σ функционально полная.

Какова сверхзадача стоящая перед нами?

Скоро мы сможем любые арифметические операции проводить с помощью булевых функций. А поскольку любая булева функция есть Σ (|) Шеффера, т.е. если существует устройство, реализующее (|), то можно сделать ЭВМ, которая будет выполнять любую операцию.

5. $\Sigma_5 = \{\downarrow\}$ (18.6)

6. $\Sigma_6 = \{\oplus, \&, 1\}$ система Жегалкина (18.6).

Возьмем $\Sigma_3 = \{\&, -\}$

$\bar{x} = x \oplus 1 = \bar{x}1 \vee x\bar{1} = \bar{x} \vee x0 = \bar{x}$ (18.7)

$x_1 \oplus x_2 = x_1\overline{x_2}\ \&\ \overline{x_1}\ x_2 = x_1\bar{1} \vee \bar{x}\bar{1} = \bar{x}$ (18.8)

2.20 Алгебра Жегалкина.

Называется совокупность всех булевых функций, в которые введены следующие операции: ⊕, &, 1.

Свойства.

1. Коммутативность:

$$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1 \quad (19.1)$$

2. Ассоциативность:

$$(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) \quad (19.2)$$

3. Дистрибутивность:

$$x_1\ (x_2 \oplus x_3) = x_1\ x_2 \oplus x_1\ x_3 \quad (19.3)$$

4. $x \oplus x = 0$ (19.4)

5. $x \oplus 1 = \bar{x}$ (19.5)

6. $x_1 \vee \bar{x} = \overline{\overline{x_1}\ \&\ \overline{x_2}} = \overline{(x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)} = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) \oplus 1 =$

$= x_1\ x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 \oplus 1 = x_1\ x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$. (19.6)

Определение: одночленом называется произведением переменных $x_{i\,1}$ … $x_{i\,n}$, в котором нет повторяющихся сомножителей (≡ простой конъюнкции).

Многочленом Жегалкина называется двоичная сумма одночленов, в которой нет одинаковых слагаемых. Многочлен Жегалкина – самый общий, разумный вид многочлена.

Теорема.

Любая булева функция от n переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ может быть представлена в виде многочлена Жегалкина и притом единственным образом.

Доказательство

Докажем, что для булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ существует многочлен Жегалкина (МЖ). Представим f в виде какой-нибудь ДНФ (СДНФ нельзя, т.к. «0» нельзя представить в виде СДНФ). В этой ДНФ заменим все $\vee$, $\bar{x}$ на операции Жегалкина, что возможно в силу полноты системы Жегалкина. Раскрываем все скобки и приводим подобие. Получаем МЖ.

Единственность МЖ.

Сколько имеется разных МЖ? Сравним это число с числом булевых функций.

Сначала подсчитаем, сколько имеется одночленов:

$x_1, \ldots, x_n$

$2 \cdot \ldots \ 2 = 2^n$ – возможность.

$N = 2^N$ – существует МЖ.

Булевых функций столько же. Следовательно, существуют взаимно однозначные отображения.

Определение: булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется *линейной*, если ее МЖ содержит только одночлены не выше первой степени (0 и 1).

$f(x_1,\ldots,x_n) = c \oplus x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus \ldots \oplus x_{i_k}$ (19.7), где c – свободный член *var* (0, 1).

Не все переменные обязательно входят в сумму, члены с «0» коэффициентом я отбросил.

Пример.

Представим в виде МЖ булеву функцию:

$f = (0011\ 1100)$

$|B^n| = \sqrt[n]{8}$; n = 3

МЖ самого общего вида

$f\,(x_1, x_2, x_3) = a_0 \oplus a_1\, x_1 \oplus a_2\, x_2 \oplus a_3\, x_3 \oplus a_4\, x_1\, x_2 \oplus a_5\, x_1\, x_3 \oplus$

$\oplus\, a_6\, x_2\, x_3 \oplus a_7\, x_1\, x_2\, x_3$ (19.8)

$\alpha_{0\cup 7}$ – *var* {0; 1}

Заметим, что в МЖ нет высших степеней, вообще

$x_1^2 = x_1$,

$x_i^2 = x_i$

Цель: найти $\alpha_{0\cup 7}$.

Так как (19.8) – тождество, то в B^3 имеется $x = 8$ – сочетаний, т.о. из 8-ми уравнений найти 8 неизвестных.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$	=
0	0	0	0	a_0
0	0	1	0	a_3
0	1	0	1	a_2
0	1	1	1	$1 \oplus a_6 \Rightarrow a_6 = 0$
1	0	0	1	a_1
1	0	1	1	$1 \oplus a_5 \Rightarrow = 0$
1	1	0	0	$1 \oplus 1 \oplus a_4 \Rightarrow a_4 =0$
1	1	1	0	$1 \oplus 1 \oplus a_7 \Rightarrow a_7 = 0$

Таким образом: $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 \oplus x_2$ (19.9) – т.е. оказалась линейной.

2.21 Замкнутые классы функций.

Пусть Q = { f_1, …, f_n } – совокупность булевых функций, конечная или бесконечная, от любого числа переменных .

Определение: *замыканием* множества Q называется *множество функций*, которые могут быть получены из Q с помощью *суперпозиций*. Обозначение: [Q].

Пример.

Q = {$\vee$, &, $\bar{\ }$ }; [Q] – все булевы функции – замыкание любой полной системы. – все булевы функции!

Q называется замкнутым классом, если замкнутые [Q] совпадают с Q (Противоположность полной системы).

Пример.

1) Q = {$x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee \ldots \vee x_{i_k}$} – бесконечно (20.1).

$i_1 \neq i_2 \neq i_i$; Q = [Q].

2) Q – линейная функция, принято обозначать L

Q $\Rightarrow$ = {$a_0 \oplus x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus \ldots \oplus x_{i_k} \oplus \ldots$} (20.2);

$a_0 \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$.

Если вместо x_i подставлять сумму таких же переменных, то ничего не изменится.

2.22 Самодвойственные функции. Монотонные функции.

B^n; $\alpha = (\alpha_1, \ldots,\alpha_n)$ (21.1); $\beta = (\beta_1, \ldots\beta_n)$ (21.2)– вершины n-мерного куба. Введём условия частичной упорядоченности вершины куба B^n.

$\alpha, \beta, \gamma \in B^n$ – очевидно, что $\alpha \geq \beta$; $\beta \geq \gamma$, то $\alpha \geq \gamma$.

Пример.

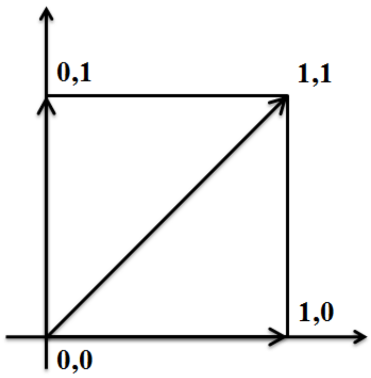

Рис.20. Куб B^2

Стрелочка совпадает с отношениями порядка.

Булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется монотонной (монотонно возрастающей), если $\forall$ упорядоченной пары вершин $\alpha > \beta$ имеем $f(\alpha) \geq f(\beta)$.

Пример.

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Является ли $f(x_1, x_2)$ – монотонной?

Нет!

Если $\alpha = (1;1)$; $\beta = (1;0)$; $\alpha > \beta$;

$f(\alpha) = 0 < f(\beta) = 1$

Примеры монотонных -легко сообразить: $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$;

А если $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ (21.3).

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Легко проверить, что они монотонны.

Теорема 1.

$f(x_1,\dots,x_n)$ является монотонной тогда и только тогда, когда ее сокращенная ДНФ не содержит отрицаний.

Теорема 2.

Множество всех монотонных функций является замкнутым классом и обозначает М.

[M] = M

Доказательство

Проведем это доказательство для частного вида суперпозиция, отсюда ясно как сделать его для общего случая.

Пусть

$\alpha(x_1,\dots,x_n)$, $\beta(x_1,\dots,x_n)$, $f(x_1, x_2) \in$ M. (21.4)

Рассмотрим

$F(x_1,\dots,x_n) = f(\beta(x_1,\dots,x_n), \beta(x_1,\dots,x_n))$. (21.5)

Требуется доказать что $F \in M$, тем самым будет доказано, что класс M замкнут.

Пусть $\alpha, \beta \in B^n$, причем $\alpha \geq \beta$ (т.е. $\alpha_i \geq \beta_i$). Следует доказать $F(\alpha) \geq F(\beta)$. Из того, что $\alpha, \beta \in B^n, B^n \in M \Rightarrow$ что $f(\alpha) \geq f(\beta)$; $F(\alpha) \geq F(\beta)$.

2.23 Самодвойственные функции.

Двойственность, напомним, вводилась следующим образом:

$f(x_1,\dots,x_n)$, – булева функция.

$(x_1,\dots,x_n) = (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$. (28.1)

Определение: булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется самодвойственной, если $\overline{f} = f(\forall x_1, \dots, x_n)$, т.е. другими словами:

$f = \overline{f}\ (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$ (28.2)

или

$\overline{f}(x_1,\dots,x_n) = f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$. (28.3)

Теорема.

Класс всех самодвойственных функций S является замкнутым.

[S] = S.

Доказательство.

Вытекает из принципа двойственности.

Пусть $f(x_1, \dots, x_S)$, $f(x_1, \dots, x_n)$, … $(x_1, \dots, x_n) \in$ S (28.4)

Рассмотрим их суперпозицию

$F(x_1, \ldots, x_n) = f(f(x_1, \ldots, x_n), \ldots, (x_1, \ldots, x_n))$. (28.5)

Нужно доказать: $F^* = F$.

Принцип двойственности:

$F^*(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n), \ldots (x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow$

В силу самодвойственности

$F^* = f(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n)$ (28.6)

ч.т.д.

2.24 Классы функций, сохраняющих константу.

Определение: классом функций, сохраняющим 0, называются все булевы функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, для которых выполнено: $f(0, \ldots,0) = 0$. Обозначение: T_0.

Классом функций, сохраняющих 1, называются все булевы функции $f(x_1, \ldots, x_1)$, для которых выполняется $f(1, \ldots, 1) = 1$. Обозначение: T_1.

Эти оба класса оказываются замкнутыми.

Теорема.

Классы функций, сохраняющих const, являются замкнутыми

$[T_1] = T_1$;

$[T_0] = T_0$.

Доказательство.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_S)$, $f_2(x_1, \ldots, x_n)$, …, $f_s(x_{x_1}, \ldots, x_n) \in T_0$ (29.1)

Рассмотрим их суперпозицию.

$T_0 \supset F(x_1, \ldots, x_n) = f(f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_n))$. (29.2)

Проверим это, вычислив:

$F(0, \ldots, 0) = f(f_2(0, \ldots, 0), \ldots, f_s(0, \ldots, 0)) \Rightarrow = f(0, \ldots, 0) = 0$ (29.3)

Таким образом $[T_0] = T_0$.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Подведем итоги.

Замкнутыми являются классы L, M, S, T_0, T_1. Эти классы называются основными замкнутыми классами функций.

2.25 Теорема о функциональной полноте (Поста).

Это одна из основных теорем курса. Позволяет определить любой системе функций, является ли она полной.

Теорема.

Система булевых функций $\Sigma = \{x_1, \ldots, x_n\}$, является функционально полной тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном из основных замкнутых классах функций.

Другими словами: для каждого из основных классов найдется в сумме хоть бы одна функция, которая в нем не лежит (может быть одна и та же).

Лемма 1 (о несамодвойственной функции).

Если булева функция f_1 $(x_1, \ldots, x_n)$ несамодвойственна ($\notin$ S), то, подставляя в нее вместо $x_1, \ldots, x_n$ переменную x или $\bar{x}$, можно получить булеву функцию φ(x), тождественно равную const (0; 1).

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad (24.1)$$

Доказательство.

$$\chi^{\alpha} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x, \alpha = 1 \\ \bar{x}, \alpha = 0 \end{cases} \quad (24.2)$$

$\Rightarrow 0^{\alpha} = \bar{\alpha}$,

$1^{\alpha} = \alpha$

(чтобы проверить, нужно рассмотреть $0^{\alpha} = 0$; $1^{\alpha} = \alpha = 1$).

Рассмотрим $\upsilon(x) = f(\chi_1^{\alpha_1}, \chi_2^{\alpha_2}, \ldots, \chi_n^{\alpha_n})$.

Поскольку $f(x_1, \ldots, x_n)$ несамодвойственная, найдется хотя бы один набор $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in B^n$, такой что $f^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, иначе бы эта функция была бы самодвойственной.

Другими словами $f(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \Rightarrow$ т.е. всего два значения:

$f(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$,

хотя бы на одном наборе.

Покажем, что φ(0) = φ(1).

$\varphi(0) = f(0^{\alpha_1}, 0^{\alpha_2}, \ldots, 0^{\alpha_2}) = f(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$

Заметим, что

$f(1^{\alpha_1}, 1^{\alpha_2}, \ldots, 1^{\alpha_2}) = \varphi(1)$.

Начали с φ(0), а закончим в φ(1) $\Rightarrow$ φ(0) = φ(1), т.о. φ – const.

Пример.

$f(x_1, x_2, x_3) = (10110110)$

Проверим, что $f \neq$ S (не является самодвойственной).

Если $f=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, то $f=(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$

f(1 0 1 1 0 1 1 0) – не самодвойственная.

$f(000) = 1$ самодв. $f(111) = 0$ (инверсия)

$f(001) = 0$ самодв. $f(110) = 1$

$f(010) = 1$ несамодв. $f(101) = 1$

Достаточно найти 1 несамодвойственный набор, и функция будет несамодвойственна.

$f(\bar{\chi}, \chi, \bar{\chi})$

$\varphi(1) = f(0,1,0) = 1$

$\varphi(0) = f(1,0,1) = 1$

$\varphi(0) = \varphi(1) = 1 \Rightarrow \varphi(0) = \varphi(1)$, ч.т.д.

Лемма 2 (о немонотонной функции).

Если функция М $\not\ni$ $f(x_1, \ldots x_2)$ – немонотонная, то, подставив в нее вместо одного из переменных x, а вместо остальных некоторые const (0, 1), можно получить функцию $\varphi(x) = \bar{x}$.

Доказательство.

Носит конструктивный характер, показывая, как решать задачи. Т.к. $f \notin$ М найдутся два набора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; $\beta = (\beta_1, \ldots \beta_n)$ такие, что $\alpha < \beta$; $f(\alpha) > f(\beta)$.

Соединим две вершины $\alpha, \beta \in B^n$ куба некоторым путем, проходящим по ребрам , т.е. $\beta \in B^n$, что $\alpha < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_k < \beta$, и $\alpha < \beta$.

Пример.

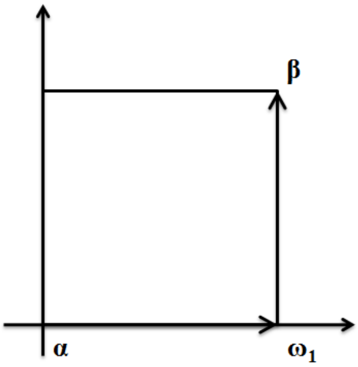

Рис.21.

Поскольку ω_i, ω_{i+1} являются соседними вершинами в кубе B^n, они отличаются лишь одной координатой.

Имеется $f(\alpha) = 1$, $f(\beta) = 0$.

Пусть вариация значения функции происходит на паре соседних вершин ω_i ; т.е. $f(\omega_i) = 1$, $f(\omega_{i+1}) = 0$. Раз эти вершины соседние, то они отличаются одной координатой (пусть, например, в x_1) .

имеет такой вид:

$\omega_i = (0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N-1}) \Rightarrow\ = \omega_{i+1}\ (1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N-1})$

$\varphi\ (x) = f(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Проверим, что $\varphi\ (x) = \bar{x}$:

$\varphi\ (0) = f(0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N-1}) = f(\omega_i) = 1 = x$;

$\varphi\ (1) = f(1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N-1}) = f(\omega_{i+1}) = 0 = \bar{x}$

Ч.т.д.

Лемма 3 о нелинейной функции.

Если булева функция $f(x_1, \ldots, x_n) \notin$ L нелинейна, то с помощью подстановки вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$ величин x, $\bar{x}$ или 0, 1 constant, взятие отрицания от самой функции f можно получить конъюнкцию x_1 & x_2.

Доказательство.

Одновременно конструктивно показывается, как это сделать. Представим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ в виде МЖ. Поскольку f нелинейна, то найдется в МЖ одночлен, слагаемое, содержащее произведение каких-либо переменных. Пусть, например, x_1 & x_2. Сгруппируем все слагаемые, содержащие x_1 & x_2, и вынесем их за скобки. Затем сгруппируем остальные слагаемые, содержащие x_1, и вынесем x_1 за скобки. Затем сгруппируем остальные слагаемые, содержащие x_1, и вынесем x_1 за скобки. Среди остальных сгруппируем слагаемые x_2 и вынесем за скобки. Получим:

$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1\ x_2\ \alpha_0\ (x_3, \ldots, x_n) \oplus x_1\ \alpha_1\ (x_3, \ldots, x_n) \oplus$

$\oplus\ x_2\ \alpha_2\ (x_3, \ldots, x_n) \oplus \alpha_3\ (x_3, \ldots, x_n)$.

не зависит, ни от x_1, ни от x_2.

Придадим $x_3, \ldots, x_n$ такие значения $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$, чтобы $\alpha_0\ (\alpha_3, \ldots, \alpha_n) \neq 0$. Обозначим значение $\alpha_1(\alpha_3, \ldots, \alpha_n) = a$; $\alpha_2(\alpha_3, \ldots, \alpha_n) = b$; $\alpha_3(\alpha_3, \ldots, \alpha_n) = c$.

Какие это числа (a, b, c) зависит от функции.

Тогда можно записать, что булева функция:

$f(x_1, x_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot 1 \oplus a x_1 \oplus b x_2 \oplus c$

Важное свойство двоичной суммы:

$$x \oplus d = \begin{cases} x, \text{если } d = 0; \\ \bar{x}, \text{если } d = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию φ без индекса:

$\varphi(x_1, x_2) = f(x_1 \oplus b, x_2 \oplus a, (\alpha_3, \ldots, \alpha_n) \oplus ab \oplus c$

Если $ab \oplus c \equiv 0$, то $\Rightarrow \varphi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, (\alpha_3, \ldots, \alpha_n))$.

Проверим, что:

$\varphi(x_1, x_2) = x_1$ & $x_2 = (x_1 \oplus$ b) & $(x_2 \oplus$ a) $\oplus$

$\oplus$ a$(x_1 \oplus$ b) $\oplus$ b$(x_2 \oplus$ a) $\oplus$ c $\oplus$

$\oplus$ ab $\oplus$ c.

Раскроем теперь все скобки (будем иметь в виду, что d $\oplus$ d = 0, т.е. можно приводить подобные):

$\varphi(x_1, x_2) = x_1\ x_2 \oplus$ a $x_1 \oplus$ b $x_2 \oplus$ ab $\oplus$

$\oplus$ a $x_1 \oplus$ ab $\oplus$ b $x_2 \oplus$ ab $\oplus$ c $\oplus$ ab $\oplus$

$\oplus$ c = $x_1\ x_2$

ч.т.д.

Пример (на использование леммы).

f = (1111 0001) – булева функция трех переменных $f(x_1, x_2, x_3)$. Проверим, что $f \notin$ L. Найдем МЖ для нее в самом общем виде:

$f(x_1, x_2, x_3) = c_0 \oplus c_1\ x_1 \oplus c_2\ x_2 \oplus c_3\ x_3 \oplus$

$\oplus c_4\ x_1\ x_2 \oplus c_5\ x_1\ x_3 \oplus$

$\oplus c_6\ x_2\ x_3 \oplus c_7 x_1 x_2 x_3$.

Коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_7$ находятся из условия.

$f(000) = 1 = c_0$;

$f(001) = 1 = 1 \oplus c_3 \Rightarrow c_3 = 0$;

$f(010) = 1 = 1 \oplus c_2 \Rightarrow c_2 = 0$;

Всего будет восемь равенств и находим восемь неизвестных коэффициентов.

Ответ будет таким:

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\ x_2\ x_3 \oplus x_1 \oplus 1 \notin$ L (т.к. $\exists$ член $x_1\ x_2\ x_3$).

Согласно лемме можно получить конъюнкцию:

$(x_3) = x_3$; $x_3 = 1 = \alpha_3$

$(x_3) = 1$

$(x_3) = 0$

$(x_3) = 1$.

Тогда:

$f(x_1, x_2, 1) = x_1\ x_2 \oplus x_1 \oplus 1$;

Значит a = 1; b = 0; c = 1.

$\varphi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 \oplus 1, 1) \oplus 1 = (x_1, \overline{x_2}, 1) = x_1$ & x_2.

Следствие из рассмотрение результата данного примера нам важно:

$x_1\ x_2 = (x_1, \overline{x_2}, 1)$.

2.26 Доказательство теоремы о функциональной полноте.

Мы рассматриваем вопрос, когда система $\Sigma = \{x_1, \ldots, x_n\}$ полна, т.е. через формулы можно вывести любую булеву функцию. Мы ввели пять основных классов T_0, T_1, L, M, S. Теорема утверждает, что если $\sum$ не содержится целиком в каком-либо из классов, то она полна. Это необходимые и достаточные условия.

1. Необходимость.

Пусть система $\sum$ полна. Докажем, что она не содержится целиком в одном из замкнутых классов. Вспомним определение замкнутого класса. Если бы система $\sum$ принадлежала T_0, то из функций $\subset T_0$, путем суперпозиций над $\sum$ получались бы функции только из T_0 (по определению замкнутого класса) $\Rightarrow$ система $\sum$ не была бы полна. Для любого другого класса аналогично.

2. Достаточность.

Обозначим функцию из системы $\sum$, которая не лежит в T_0 : $T_0 \not\ni f_0$; $T_1 \not\ni f_1$; L $\not\ni f_2$; M $\not\ni f_3$; S $\not\ni f_4$. (Т.е. производим перенумерацию функций). При этом некоторые из f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 могут совпадать.

1) Покажем, что из функций $\sum$ можно получить Const 0, 1 (с помощью суперпозиции). Поскольку $f_0 \notin T_0 \Rightarrow f_0(0, 0, \ldots, 0) \neq 0 \Rightarrow f_0 = 1$. Возможно а) $f_0(1, \ldots, 1) = 1$; б) $f_0(1, \ldots, 1) = 0$.

Рассмотрим для а): $\varphi(x) = f_0(x, x, \ldots, x)$.

Тогда

$\varphi(0) = f_0(0, \ldots,0) = 1$; $\varphi(1) = f_0(1, \ldots,1) = 1$. Итак

$\varphi(x) = f_0(x, \ldots, x) \equiv 1$ («Тождественная единица»).

Поскольку $f_0 \notin T_1 \Rightarrow f_0(1, 1) = 0$. Т.к. const «1», мы уже получили, то теперь получим «0».

$0 = f_1(f_0(x, \ldots, x), f_0(x, \ldots, x), \ldots, f_0(x, \ldots, x))$.

Рассмотрим теперь б): $\varphi(x) = f_0(x, \ldots, x)$. Тогда получаем $\varphi(0) = f_0(0, \ldots, 0) = 1$; $\varphi(1) = f_0(1, \ldots, 1) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = \bar{x}$.

Теперь применим лемму 1 о несамодвойственной функции. Можно, согласно нее, взять $f_4 \notin$ S, и подставить в нее вместо $x_1, \ldots, x_n$: x и $\bar{x}$, и получить Const. Какую Const – не ясно, «0» или «1».

Если при этом получится 0, то Const 1 получаем так:

$1 = \varphi(0) = f_0(0, \ldots,0)$.

Если же по лемме 1 получится constant 1, то

$0 = \varphi(1) = f_0(1, \ldots, 1)$.

Теорема 1 доказана. Мы получили во всех случаях Const 0 или 1.

2) Покажем, что с помощью функции из $\sum$ можно получить $\bar{x}$. Согласно лемме 2 о немонотонной функции, взяв $f_3 \notin$ M, можно, подставив вместо n – 1 переменных constant 0, 1 (которые уже получены выше), получить $\bar{x}$.

3) Покажем, что с помощью булевой функции из $\sum$ можно получить конъюнкцию из x_1 & x_2. Согласно лемме 3 о немонотонной функции, взяв $f_2 \notin$ L, можно, подставив в нее вместо переменных $x_1,\ldots,x_n$; constant 0, 1 и, взяв, если нужно, отрицание , получить конъюнкцию x_1 & x_2.

4) Полнота системы $\sum \Rightarrow$ теперь из теоремы 1, если в качестве системы сравнения взять систему $\sum_1 = \{\&, \neg\}$ – полна. Каждый из системы по доказательству выше (и & $^{-}$) выражается через систему $\sum$.

Значит и $\sum$ полна.

Теорема о полноте доказана.

Пример.

Проверить полноту $\Sigma = \{x_1, \ldots, x_n\}$, где f_1 = {1111 0001}, f_2 = {1111 0000}, и выразить через & и $^{-}$ следующие функции: 0, 1, $\bar{x}$, x_1 & x_2 и $x_1 \vee x_2$.

Функциональным элементом (ФЭ) булевой функции f (x_1, x_2, …, x_n) называется устройство с n входами и одним выходом. Обозначение:

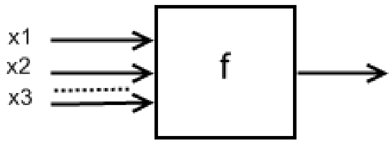

Рис.22.

Если на входе этого устройства подаются значения переменных $x_1, \ldots, x_n$ соответственно, то на выходе этого устройства возникает сигнал $f(x_1, \ldots, x_n)$. Как оно устроено – пока не важно.

Итак, составим таблицы функций x_1, x_2.

Пример.

	x_1	x_2	x_3		
α	0	0	0	1	1
	0	0	1	1	1
	0	1	0	1	1
	0	1	1	1	1
β	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0
	1	1	0	0	0
	1	1	1	1	0

1. Проверим полноту. Для $T_0 \not\ni f_0$.
2. Для $T_1 \not\ni f_1$.
3. Для L. Воспользуемся предыдущим примером. По его результатам
L $\not\ni f_2$.
4. Для М. ($\alpha \geq \beta$; $f(\alpha) \geq f(\beta)$)

Возьмем α = (000), β = (100); $\alpha < \beta$ но f (α) > f (β). Функция тоже немонотонная.

5. Остался класс S. $f \notin$ S (т.к. если взять значение (000) $\neq$ (000)).
6. Выразим через классы const 0, 1.

Для этого берем $f(x_1, x_2, x_3)$, т.к. она $\notin T_0$.

f (0, 0, 0) = 1; f(0, 0, 0) = 1, т.е. это случай а) нашего доказательства $\Rightarrow$ φ(x) = f(xxx) $\equiv$ 1.

Реализация

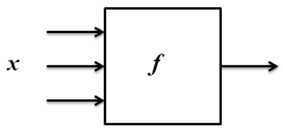

Рис.23.

Далее:

$f\,(x_1, x_2, x_3) \notin T_1$;

f (1, 1, 1) = 0.

Реализация рис.24.

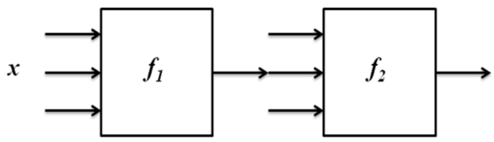

Рис.24.

Будем искать отрицание: $\bar{x}$.

По второму пункту, доказательства $\bar{x}$ нужно искать с помощью немонотонной функции. Согласно лемме о немонотонной функции, для (x_1, x_2, x_3) $\notin$ M. $\alpha < \beta$; f (α) > f (β). После чего мы соединяем вершины. Для α и β делать этого уже не надо – они рядом.

φ(x) = f (x, 0, 0) = $\bar{x}$. Схема решения рис.25.

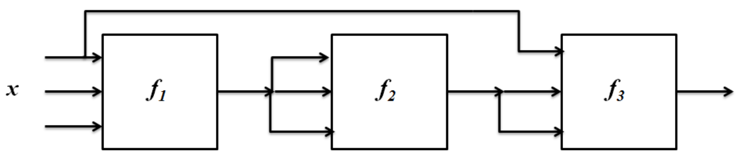

Рис.25.

Пример.

$\Sigma = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – полноту проверили.

f_1 = (1101 0001)

f_2 = (1111 0001)

Надо было б) выразить булеву функцию через $\sum$, а именно 0, 1, $\neg$, &, $\vee$

Часть была сделана, немного громоздко, но:

1 = f (x, x, x) (25.17)

0 = f (1, 1, 1) = f (f (x, x, x); f (x, x, x); f (x, x, x))

$\bar{x}$ = f (x, 0, 0) = f (x, f (1, 1, 1), f (1, 1, 1)).

Соответствующие функциональные схемы приведены выше.

Можно построить функциональную схему для любой булевой функции.

Через функциональные элементы можно выразить любое арифметическое действие, интеграл, дифференциал и т.д.

С помощью леммы о нелинейной функции для

$f_1(x_1, x_2, x_3) \overset{\text{Мж}}{=} x_1\, x_2\, x_3 \oplus x_1 \oplus 1.$

С помощью $\oplus$ можно получить &:

$x_1 \,\&\, x_2 = f_1(x_1, x_2, 1)$ (См. выше)

Можно пользоваться $\neg$ для &.

Однако, посмотрев внимательно на f_1, f_2, схемы можно нарисовать проще, чем по алгоритму (менее громоздко).

Легко понять, что f легко задать аналитически.

$f_1 = \overline{x_1}$

Замечание к ФЭ $\neg$. Можно получить $\bar{x}$ проще, если заметить, что

$f_1(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}$,

Т.е. что x_2, x_3 - несущественные переменные.

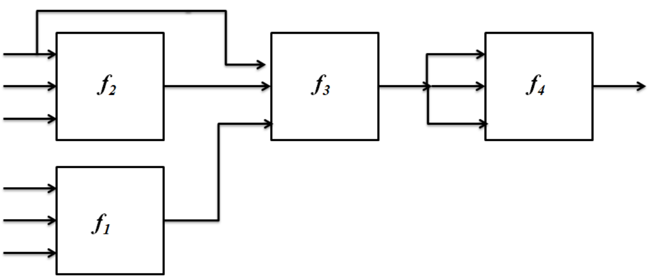

Рис.26. Схема для конъюнкции

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О.П.Кузнецов, Г.М.Адельсон-Вельский Дискретная математика для инженера, -М., Энергоатомиздат, 1988
2. Ю.И.Журавлев,Ю.А.Флеров,О.С.Федько Дискретный анализ. Комбинаторика. Алгебра логики. Теория графов. -М.:МФТИ, 2012.
3. А.И.Сирота, Ю.И.Худак Основы дискретной математики. -М., МГИРЭА, 2010.
4. Громенко Дискретная математика. -М., МГОУ, 2007.

Сведения об авторах

Дзержинский Роман Игоревич, кандидат технических наук, заведующий кафедрой, прикладная математика