ЛЕКЦИЯ № 10

Канонический вид квадратичной формы.

Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичных форм.

1. *Квадратичная форма канонического вида.*

Определение. Квадратичную форму $\boldsymbol{\varphi(\overline{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_i x_i^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2}$, не имеющую попарных произведений переменных, называют ***квадратичной формой канонического вида.***

Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называют ***каноническим базисом***.

В каноническом базисе матрица квадратичной формы имеет диагональный вид: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \lambda_i & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Если $\lambda_i = \{0, \pm 1\}$, i=$\overline{1:n}$, то говорят, что квадратичная форма приведена к ***нормальному виду.***

Метод Лагранжа.

Один из методов приведения квадратичной формы к каноническому виду путем замены переменных состоит в последовательном выделении полных квадратов. Такой метод называется методом Лагранжа.

Пример 1. Рассмотрим $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2$ на пространстве V_2.

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 = (x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2) - 4x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 - 4x_2^2$$
$$= y_1^2 - y_2^2.$$

Квадратичная форма приведена к нормальному виду.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 \\ y_2 = 2x_2 \end{cases}$$

Проверим выполнение формулы $\mathrm{A}_2 = P^T \mathrm{A}_1 P$;

Для этого запишем преобразование координат в виде: Y=$P^{-1}X$;

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; P$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

P можно было найти, выразив x_i через y_i :

$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_2/2 \end{cases}$; X=PY => P$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

$$\mathrm{A}_2 = P^T \mathrm{A}_1 P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \text{ верно.}$$

Пример 2.

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 = (x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3) + 3x_2^2 +$$
$$+2x_3^2 = (x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_2x_3) - x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_2x_3 +$$
$$+3x_2^2 + 2x_3^2 = (x_1 - x_2 - 2x_3)^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_2x_3 =$$
$$= (x_1 - x_2 - 2x_3)^2 + 2(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) - 2x_3^2 - 2x_3^2 = (x_1 - x_2 - 2x_3)^2$$
$$+ 2(x_2 - x_3)^2 - 4x_3^2 = y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2,$$

где соответствующее преобразование координат имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

Проверим формулу перехода к другому базису.

$x_3 = y_3; x_2 = y_2 + y_3; x_1 = y_1 + y_2 + 3y_3;$

$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + 3y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ P$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$\mathrm{A}_2 = P^T \mathrm{A}_1 P$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Верно.

Как применить метод Лагранжа в общем случае?

- Если $a_{11} \neq 0$, группируем все слагаемые формы, содержащие x_1 и выделим полный квадрат по x_1. Таким образом мы получим квадратичную форму, не содержащую x_1. Далее аналогично поступаем с x_2 и т.д. Если же $a_{11} = 0$, то начнем с другой переменной.

- Если в квадратичной форме нет квадратов переменных, то перед выделением полных квадратов следует сделать промежуточную замену переменных. Например,

$x_1 = y_1 + y_2;\ x_2 = y_1 - y_2;\ x_3 = y_3;$ тогда $x_1x_2 = y_1^2 - y_2^2$, появятся квадраты переменных и далее можно решать обычным способом.

Пример 3.

$\varphi(\vec{x}) = x_1x_2 + 2x_1x_3;$

$x_1 = y_1 + y_2;\ x_2 = y_1 - y_2;\ x_3 = y_3;$

$\varphi(\vec{y}) = y_1^2 - y_2^2 + 2(y_1 + y_2)y_3 = (y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - y_3^2 - y_2^2 + 2y_2y_3 =$
$(y_1 + y_3)^2 - (y_2 - y_3)^2 = z_1^2 - z_2^2;$

$z_1 = y_1 + y_3;\ z_1 = y_2 - y_3.$

z_3 выбирается произвольным образом так, чтобы матрица перехода была невырожденной. Например, в нашем случае, $z_3 = y_3$.

Отметим, что канонический вид, к которому приводится квадратичная форма, определяется неоднозначно, он зависит от того, какие производятся преобразования.

Однако имеются характеристики коэффициентов в каноническом виде, которые остаются неизменными.

Теорема 5. Ранг квадратичной формы не меняется при замене базиса и равен количеству ненулевых коэффициентов в каноническом виде.

►При замене базиса линейного пространства, в котором определена квадратичная форма, ее матрица меняется по формуле:

$A_2 = P^T A_1 P$, где P- матрица перехода от старого базиса к новому.

P-невырожденная, => rang A_2 = rang A_1, так как при умножении на P и P^T ранг матрицы не изменится. ◄

Теорема 6. ***Закон инерции квадратичных форм.***

Количество положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы не зависит от выбора канонического базиса.

►Пусть $\varphi_1(\vec{x})$ и $\varphi_2(\vec{x})$ - два канонический вида квадратичной формы. Согласно теоремы 5, rang$\varphi_1(\vec{x}) = rang\varphi_2(\vec{x}) = k$. Пусть у них положительные коэффициенты предшествуют отрицательным. Это всегда можно сделать, изменив порядок переменных.

$\varphi_1(\vec{x})=\alpha_1 y_1^2+\ldots+\alpha_p y_p^2 -\ldots-\alpha_k y_k^2$

$\varphi_2(\vec{x})=\beta_1 z_1^2+\ldots+\beta_q z_q^2 -\ldots-\beta_k z_k^2$

$\alpha_i > 0$ и $\beta_i > 0\ \forall i$

Надо доказать , что p=q. Пусть это не так, p>q. Пусть данные канонические формы записаны в базисах:

$S_1 = \{e_1; \ldots . e_n\}$ и $S_2 = \{f_1; \ldots . f_n\}$ соответственно. Покажем, что $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$, такой что его координаты в базисах S_1 и S_2 такие: $y_i = 0$ при i=$\overline{p+1,n}$; $z_j = 0$ при j=$\overline{1,q}$.

Координаты z_j линейным образом выражаются через y_i :

z_j=$u_{j1}y_1+\cdots+u_{jn}y_n$ j=$\overline{1,n}$

Причем матрица U-это матрица перехода от базиса S_2 к базису S_1.

Поставленные для $\vec{x}$ условия составляют однородную систему уравнений относительно y_i.

$$\begin{cases} y_{p+1} = 0 \\ \ldots \\ y_n = 0 \\ u_{11}y_1+\cdots+u_{1n}y_n = 0 \\ \ldots \\ u_{q1}y_1+\cdots+u_{qn}y_n = 0 \end{cases}$$

Число уравнений *(n-p+q)* <*n* =>система имеет ненулевое решение, т.е. $\exists\vec{x} \neq \vec{0}$, удовлетворяющий поставленным условиям. Тогда для этого вектора

$\varphi_1(\vec{x}) = \alpha_1 y_1^2 + \ldots + \alpha_p y_p^2 > 0;$

$\varphi_2(\vec{x}) = -\beta_{q+1} z_{q+1}^2 - \ldots - \beta_k z_k^2 \leq 0$

Получили два взаимоисключающих равенства, что доказывает , что предположение, что p$\neq q$ неверно => p=q, т.е. количество положительных коэффициентов в двух канонических видах одинаково. Тогда и количество отрицательных коэффициентов тоже совпадает, так как их ранги равны. ◄

Определение. Положительный индекс $\boldsymbol{r_+}$ - это *количество положительных коэффициентов в каноническом виде.*

Определение. Отрицательный индекс $\boldsymbol{r_-}$ - это *количество отрицательных коэффициентов в каноническом виде.*

Очевидно, что **rang** $\boldsymbol{\varphi(\vec{x})} = \boldsymbol{r_+ + r_-}$

Пример 4. Привести квадратичную форму $\varphi(\vec{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ к каноническому виду методом Лагранжа, выписать преобразование координат. Найти положительный и отрицательный индексы, ранг квадратичной формы $\varphi(\vec{x})$.

Предлагаем вам другой подход к выделению полного квадрата:

$$\varphi(\vec{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 = \quad 2(x_1^2 - x_1x_2 - 2x_1x_3) + 3x_2^2 + $$
$$+2x_3^2 = 2\left(x_1^2 - 2x_1\left(\frac{1}{2}x_2 + x_3\right) + \left(\frac{1}{2}x_2 + x_3\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x_2 + x_3\right)^2\right) + 3x_2^2 + 2x_3^2 =$$

$$= 2\left(x_1 - \left(\frac{1}{2}x_2 + x_3\right)\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2\right) + 3x_2^2 + 2x_3^2 =$$

$$= 2\left(x_1 - \left(\frac{1}{2}x_2 + x_3\right)\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2\right) + 3x_2^2 + 2x_3^2 =$$

$$= 2\left(x_1 - \left(\frac{1}{2}x_2 + x_3\right)\right)^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_3^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 =$$

$$= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3\right)^2 + \frac{5}{2}x_2^2 - 2x_2x_3 =$$

$$= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3\right)^2 + \frac{5}{2}\left(x_2^2 - 2\cdot\frac{2}{5}x_3x_2 + \frac{4}{25}x_3^2 - \frac{4}{25}x_3^2\right) =$$

$$= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3\right)^2 + \frac{5}{2}\left(x_2 - \frac{2}{5}x_3\right)^2 - \frac{2}{5}x_3^2 = 2y_1^2 + \frac{5}{2}y_2^2 - \frac{2}{5}y_3^2\,,$$

где соответствующее преобразование координат имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3\,, \\ y_2 = x_2 - \frac{2}{5}x_3\,, \\ y_3 = x_3\,. \end{cases}$$

Определим положительный r_+и отрицательный r_- индексы и ранг r квадратичной формы по её каноническому виду:

количество положительных коэффициентов $r_+ = 2$,

количество отрицательных коэффициентов $r_- = 1$,

общее количество ненулевых коэффициентов в каноническом виде

$r = rang(\varphi) = 3.$