Лекция 15.

Решение задач части 2 типового расчета.

Задачи по теме «Несобственный интеграл».

Задача 2.1. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+6x^2+12}$$

Данный несобственный интеграл первого типа (бесконечный промежуток интегрирования) вычислим методом замены переменной:

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+6x^2+12} = \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(x^4+6x^2+9)+3} = \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+3)^2+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{d(x^2+3)}{(x^2+3)^2+3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(arctg\frac{x^2+3}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(arctg(+\infty) - arctg\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$

Задача 2.2. Исследовать на сходимость несобственный интеграл (задача не является обязательной, включается в типовой расчет по указанию преподавателя).

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+x}}$$

Рассмотрим подынтегральную функцию

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+x}}$$

и вычислим $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+x}}{(x^2+4x)-(x^2+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+x}}{3x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+0}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = +\infty$$

Следовательно, данный интеграл является несобственным интегралом от неограниченной функции.

Заметим, что подынтегральная функция положительна на промежутке (0,1], и применим предельный признак сравнения.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+x}}, \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{3}\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}(2+1) = 1$$

Следовательно, $f(x) \sim g(x), x \to 0+0$ и

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2 \text{ (сходится)}$$

Согласно предельному признаку сравнения $\int_0^1 f(x)dx$ сходится.

Ответ: сходится.

Задачи по теме «Двойной интеграл».

Задача 2.3. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

$$a = 0, b = 1, \varphi(x) = x^2, \psi(x) = 1+\sqrt{1-x^2}$$

Запишем данный повторный интеграл:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$$

Нарисуем область интегрирования. Она ограничена прямыми x=0, x=1, а также графиками функций $y = x^2$ и $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$.

Первое уравнение $y = x^2$ – это уравнение параболы. Преобразуем второе уравнение:

$$y = 1 + \sqrt{1-x^2}$$

$$y - 1 = \sqrt{1-x^2}$$

$$(y-1)^2 = 1 - x^2, y \geq 1$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1, y \geq 1$$

Мы получили уравнение окружности с центром в точке (0,1), радиус которой равен 1.

Учитывая условие $y \geq 1$, делаем вывод, что уравнение $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$ – это уравнение верхней полуокружности (рис. 15.1).

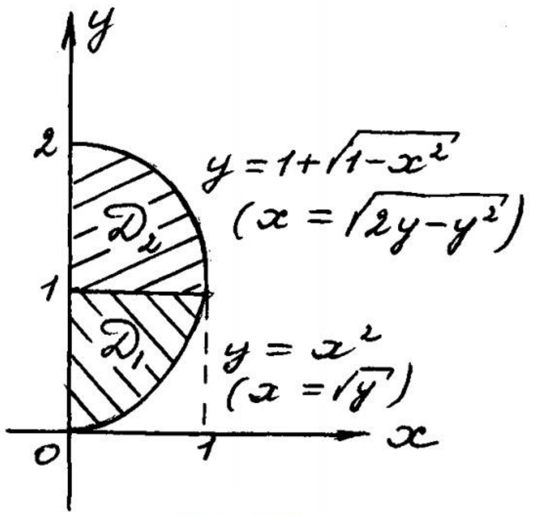

Рис. 15.1.

Выразим переменную x из уравнений границ области, учитывая, что область расположена в первой четверти ($x \geq 0$):

$$y = x^2, x = \sqrt{y}$$

$$y = 1 + \sqrt{1-x^2}, x^2 + y^2 - 2y = 0,$$

$$x = \sqrt{2y - y^2}$$

Изменим порядок интегрирования. Для этого разделим область на две части D_1 и D_2 прямой $y = 1$ и запишем двойной интеграл в виде суммы двух повторных:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$$

Ответ:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$$

Задача 2.4. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь фигуры *D*, ограниченной заданными линиями:

$$y = x^3, y = \sqrt{x}$$

Площадь *S* плоской области *D* вычисляется по формуле:

$$S = \iint_D dxdy$$

Для сведения двойного интеграла к повторному найдем точки пересечения графиков функций $y = x^3, y = \sqrt{x}$ и сделаем рисунок:

$$x^3 = \sqrt{x}, x \geq 0$$

$$x^6 = x \iff x = 0 \text{ или } x = 1$$

Вычислим площадь *S* фигуры *D* (рис. 15.2):

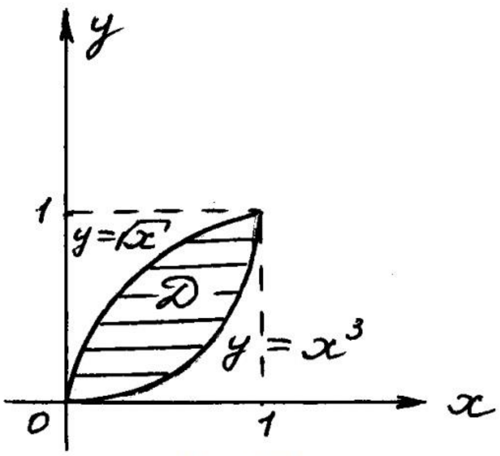

Рис. 15.2.

$$S = \int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 y|_{x^3}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^3\right) dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 == \frac{2}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{5}{12}$$

Ответ: $\frac{5}{12}$

Задача 2.5. Вычислить двойной интеграл по области *D* (задача не является обязательной, включается в типовой расчет по указанию преподавателя).

$$\iint_D y\sqrt{x^2 + y^2} dxdy \, , D: x^2 + y^2 \leq 4x \leq 4\sqrt{3}y$$

Запишем уравнения границ области *D*:

$$x^2 + y^2 = 4x, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

Преобразуем первое уравнение:

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

Мы получили уравнение окружности с центром в точке (2;0), радиус которой равен 2. Координаты точек, лежащих на этой окружности и внутри нее, удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leq 4x$.

Второе уравнение $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ – это уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей угол $\frac{\pi}{6}$ с положительным направлением оси *Ox*. Координаты точек, лежащих на этой прямой, а также выше этой прямой, удовлетворяют неравенству $y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}x$. Нарисуем область *D* (рис. 15.3) и запишем уравнения границ области в полярных координатах:

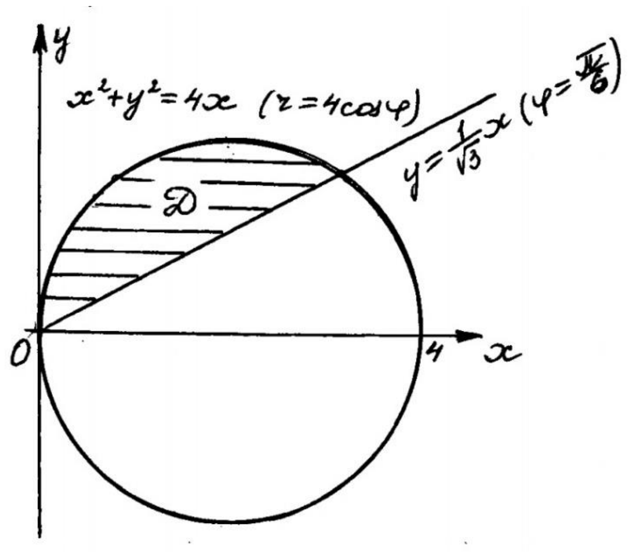

Рис. 15.3.

$$x^2 + y^2 = 4x, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x, \qquad x \geq 0$$

$$r^2 = 4r\cos\varphi,$$

$$r = 4\cos\varphi\,, \qquad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Вычислим двойной интеграл, пользуясь полярными координатами:

$$\iint\limits_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} r\sin\varphi \cdot r \cdot r dr = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} r^3\, dr =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cdot \left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{4\cos\varphi} d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4^4\cos^4\varphi}{4}\sin\varphi\, d\varphi = -64\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d(\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{64}{5}\cos^5\varphi\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{64}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 = \frac{18\sqrt{3}}{5}$$

Ответ: $\frac{18\sqrt{3}}{5}$

Задачи по теме «Тройной интеграл».

Задача 2.6. С помощью тройного интеграла вычислить объем пирамиды *V*, ограниченной плоскостью α и координатными плоскостями $x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0$. Проверить ответ с помощью геометрической формулы нахождения объема пирамиды.

$$\alpha: x + 2y + 3z = 12$$

Найдем точки пересечения плоскости α с координатными осями *Ox*, *Oy*, *Oz*:

$$x = 0, y = 0, z = 4$$

$$y = 0, z = 0, x = 12$$

$$z = 0, x = 0, y = 6$$

и нарисуем пирамиду (рис. 15.4)

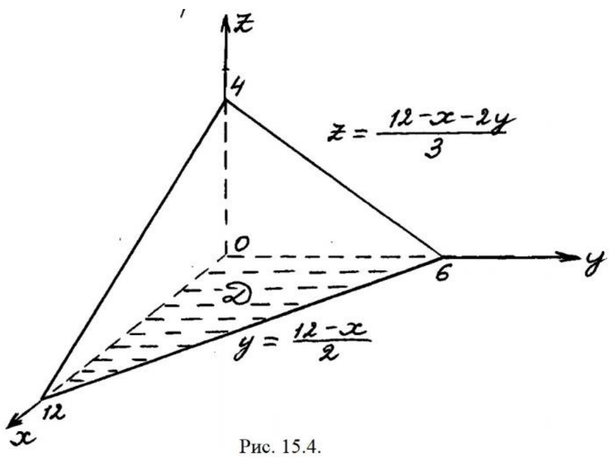

Рис. 15.4.

Для вычисления объема пирамиды воспользуемся декартовыми координатами:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz =$$

$$= \int_0^{12} dx \int_0^{\frac{12-x}{2}} dy \int_0^{\frac{12-x-2y}{3}} dz =$$

$$= \int_0^{12} dx \int_0^{\frac{12-x}{2}} z\Big|_0^{\frac{12-x-2y}{3}} dy = \int_0^{12} dx \int_0^{\frac{12-x}{2}} \left(\frac{12-x}{3} - \frac{2}{3}y\right) dy =$$

$$= \int_0^{12} \left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{12-x}{3} - \frac{2}{3}y\right)^2\right)\Bigg|_0^{\frac{12-x}{2}} dx = \frac{3}{4}\int_0^{12} \left(\frac{12-x}{3}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} \int_0^{12} (x-12)^2 dx = \frac{1}{12} \frac{(x-12)^3}{3} \Bigg|_0^{12} = \frac{1}{12} \cdot \frac{12^3}{3} = \frac{12^2}{3} = 48$$

Проверим результат, пользуясь формулой для вычисления объема пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$$

За основание пирамиды примем прямоугольный треугольник с катетами $a = 12$ и $b = 6$, лежащий в координатной плоскости *xOy*, тогда высота пирамиды $h = 4$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{ab}{2} \cdot h = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 6 \cdot 4 = 48$$

что совпадает с результатом, полученным интегрированием.

Ответ: 48.

Задача 2.7. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела *V*, переходя к цилиндрическим или сферическим координатам (задача не является обязательной, включается в типовой расчет по указанию преподавателя).

$$V: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 9 \\ x^2 + y^2 \le 8z \end{cases}$$

Область *V* ограничена сферой

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

с центром в начале координат, радиус которой равен 3, и параболоидом

$$x^2 + y^2 = 8z$$

Найдем линию пересечения этих поверхностей:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 8z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + 8z - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 = 8z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = -9 \end{array} \right. \\ x^2 + y^2 = 8z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

Поверхности пересекаются по окружности, расположенной в плоскости $z = 1$, радиус которой равен $2\sqrt{2}$. Изобразим область V (рис. 15.5). Проекция D области V на плоскость xOy представляет собой круг с центром в начале координат, радиус которого равен $2\sqrt{2}$. Для вычисления объема тела воспользуемся цилиндрическими координатами

$$x = r\cos\varphi\,, y = r\sin\varphi\,, z = z$$

и запишем уравнения границ области в этих координатах.

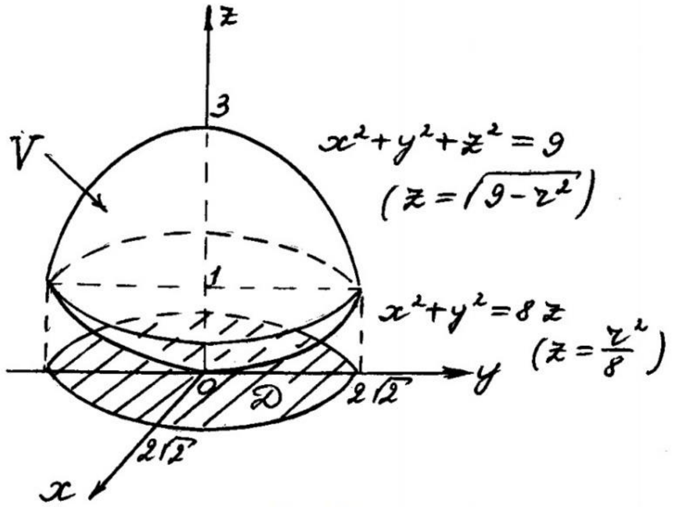

Рис. 15.5.

Уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ примет вид:

$$r^2 + z^2 = 9$$

Выразим переменную z, учитывая, что тело расположено выше координатной плоскости xOy ($z \geq 0$):

$$z = \sqrt{9 - r^2}$$

Уравнение параболоида $x^2 + y^2 = 8z$ также перепишем в цилиндрических координатах:

$$r^2 = 8z \text{ или } z = \frac{r^2}{8}$$

Вычислим объем тела, представив тройной интеграл по области V в виде повторного в цилиндрических координатах:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} rdr \int\limits_{\frac{r^2}{8}}^{\sqrt{9-r^2}} dz = 2\pi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{9 - r^2} - \frac{r^2}{8}\right) rdr =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{2} \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{9 - r^2} d(9 - r^2) - \frac{r^4}{32}\Bigg|_0^{2\sqrt{2}} \right) = 2\pi \left(-\frac{1}{3}(9 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{2\sqrt{2}} - 2 \right) =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{3}(1 - 27) - 2 \right) = 2\pi \left(\frac{26}{3} - 2 \right) = 2\pi \cdot \frac{20}{3} = \frac{40\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{40\pi}{3}$

Задачи по теме «Криволинейный и поверхностный интегралы».

Задача 2.8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

по замкнутому контуру L (обход контура против часовой стрелки) двумя способами: непосредственно и по формуле Грина.

$$L\colon\ y = x^2 - 3x + 2, y = x + 2$$

$$P(x,y) = x - y, \qquad Q(x,y) = x$$

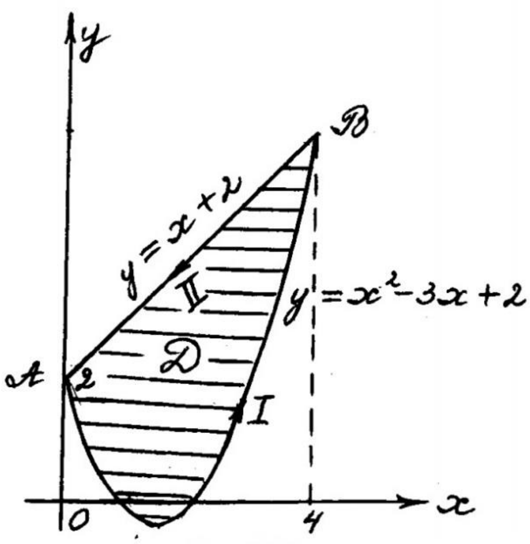

Рис. 15.6

Нарисуем замкнутый контур L, образованный дугой параболы $y = x^2 - 3x + 2$ и отрезком прямой $y = x + 2$ (рис. 15.6).

Найдем точки пересечения параболы и прямой:

$$x^2 - 3x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Точки пересечения A(0;2) и B(4;6).

1 способ: непосредственное вычисление криволинейного интеграла.

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \oint_L (x - y)dx + xdy$$

Замкнутый контур L состоит из дуги параболы *AIB* и отрезка прямой *BIIA*:

$$\oint_L (x - y)dx + xdy = \int_{AIB} (x - y)dx + xdy + \int_{BIIA} (x - y)dx + xdy$$

AIB:

$$y = x^2 - 3x + 2, \qquad dy = (2x - 3)dx, \qquad x \in [0,4]$$

$$\int_{AIB} (x - y)dx + xdy = \int_0^4 \big(x - (x^2 - 3x + 2) + x(2x - 3)\big)dx =$$

$$= \int_0^4 (x - x^2 + 3x - 2 + 2x^2 - 3x)dx = \int_0^4 (x^2 + x - 2)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{64}{3} + 8 - 8 = \frac{64}{3}$$

BIIA:

$$y = x + 2, \qquad dy = dx, \qquad x \in [4,0]$$

$$\int_{BIIA} (x - y)dx + xdy = \int_4^0 (x - (x + 2) + x)dx = \int_4^0 (x - 2)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_4^0 = -(8 - 8) = 0$$

$$\oint_L (x - y)dx + xdy = \frac{64}{3}$$

2 способ: применение формулы Грина:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right) dxdy$$

Область D ограничена замкнутым контуром L.

$$P(x, y) = x - y, \qquad Q(x, y) = x, \qquad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 1 + 1 = 2$$

$$\oint_L (x - y)dx + xdy = \iint_D 2dxdy = 2\int_0^4 dx \int_{x^2-3x+2}^{x+2} dy =$$

$$= 2\int_0^4 (x + 2 - x^2 + 3x - 2)dx = 2\int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = 2\left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right)\Big|_0^4 =$$

$$= 2\left(-\frac{64}{3} + 32\right) = 2 \cdot \frac{32}{3} = \frac{64}{3}$$

Ответ: $\frac{64}{3}$

Задача 2.9. Вычислить площадь части поверхности σ, заключенной внутри цилиндрической поверхности *Ц* (задача не является обязательной, включается в типовой расчет по указанию преподавателя).

$$\sigma: z = 2xy, \qquad \text{Ц}: x^2 + y^2 = 12$$

Площадь S поверхности, заданной уравнением $z = z(x, y)$ вычисляется по формуле:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(z'_x(x,y)\right)^2 + \left(z'_y(x,y)\right)^2}\,dxdy$$

где *D* – проекция поверхности на плоскость *xOy*.

Поверхность σ, заданная уравнением $z = 2xy$ называется гиперболическим параболоидом или «седлом». Требуется вычислить площадь той части поверхности, которая заключена внутри круглого цилиндра, заданного уравнением $x^2 + y^2 = 12$.

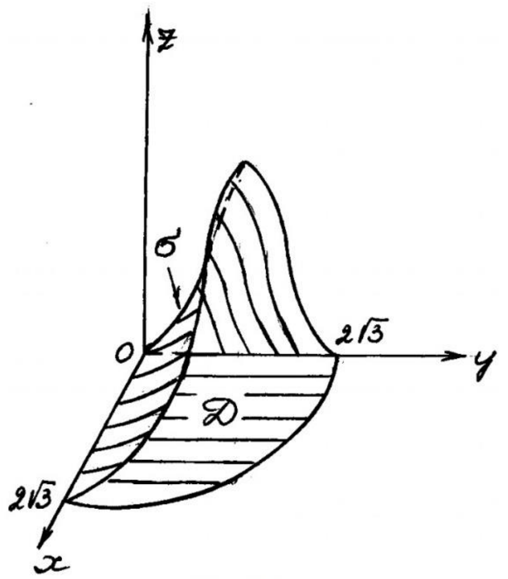

Рис. 15.7.

Рассмотрим ту часть гиперболического параболоида, которая вырезается цилиндром и расположена в первом октанте $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$, и вычислим четвертую часть искомой площади (рис. 15.7). Проекция *D* этой части поверхности на координатную плоскость *xOy* представляет собой четверть круга с центром в начале координат, радиус которого равен $2\sqrt{3}$.

$$z = 2xy, \qquad z'_x = 2y, \qquad z'_y = 2x$$

$$\frac{1}{4}S = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dxdy$$

Для вычисления двойного интеграла по области *D* воспользуемся полярными координатами.

$$\frac{1}{4}S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{8} \int\limits_0^{2\sqrt{3}} (1 + 4r^2)^{\frac{1}{2}} d(1 + 4r^2) =$$

$$= \frac{\pi}{16} \cdot \frac{2}{3}(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{24}\left((1 + 48)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{\pi}{24}(7^3 - 1) =$$

$$= \frac{\pi}{24}(7 - 1)(7^2 + 7 + 1) = \frac{\pi}{4} \cdot 57 = \frac{57\pi}{4}$$

$$S = 57\pi$$

Ответ: 57π

Задачи по теме «Элементы теории поля».

Задача 2.10. Найти градиент скалярного поля *u(M)*. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}(M)$.

Градиент скалярного поля $u(M) = F(x, y, z)$ вычисляется по формуле:

$$\mathrm{grad}u(M) = \mathrm{grad}F(x, y, z) = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}\vec{k}$$

Дивергенция и ротор векторного поля $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} +$ $+R(x, y, z)\vec{k}$ вычисляются по формулам:

$$\mathrm{div}\vec{a}(M) = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y, z) & Q(x, y, z) & R(x, y, z) \end{vmatrix}$$

$$u(M) = F(x, y, z) = x^y \arcsin\sqrt{z}$$

$$\vec{a}(M) = (xy\ln z)\vec{\imath} + (z\cos(xy))\vec{\jmath} + e^{-xyz}\vec{k}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yx^{y-1}\arcsin\sqrt{z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^y\ln x\arcsin\sqrt{z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = x^y\frac{1}{\sqrt{1-z}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{x^y}{2\sqrt{z-z^2}}$$

$$\mathrm{grad}u(M) = \left(yx^{y-1}\arcsin\sqrt{z}\right)\vec{\imath} + \left(x^y\ln x\arcsin\sqrt{z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{x^y}{2\sqrt{z-z^2}}\right)\vec{k}$$

$$\mathrm{div}\vec{a}(M) = \frac{\partial(xy\ln z)}{\partial x} + \frac{\partial(z\cos(xy))}{\partial y} + \frac{\partial e^{-xyz}}{\partial z} =$$

$$= y\ln z - xz\sin(xy) - xy\cdot e^{-xyz}$$

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy\ln z & z\cos(xy) & e^{-xyz}\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial e^{-xyz}}{\partial y}-\frac{\partial(z\cos(xy))}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial(xy\ln z)}{\partial z}-\frac{\partial e^{-xyz}}{\partial x}\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial(z\cos(xy))}{\partial x}-\frac{\partial(xy\ln z)}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=(-xze^{-xyz}-\cos(xy))\vec{i}+\left(\frac{xy}{z}+yze^{-xyz}\right)\vec{j}+(-yz\sin(xy)-x\ln z)\vec{k}$$

Задача 2.11. Найти поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через замкнутую поверхность σ двумя способами:

1) непосредственно, вычисляя потоки через все гладкие куски поверхности σ;

2) по теореме Остроградского-Гаусса.

$$\vec{a}(M)=xy\vec{i}+y^2z\vec{j}+\vec{k}$$

$$\sigma:(z-1)^2=x^2+y^2,\qquad y=0,\qquad z=0$$

1 способ. Нарисуем замкнутую поверхность σ, которая образована частью конуса $(z-1)^2=x^2+y^2$ и координатными плоскостями $y=0, z=0$ (рис. 15.8).

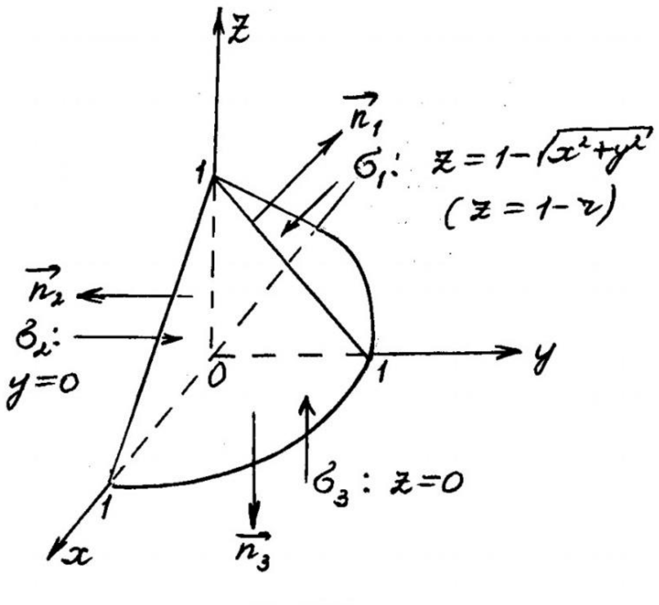

Рис. 15.8.

Поверхность состоит из трех частей: σ_1 – часть конуса, σ_2 – треугольник, расположенный в плоскости xOz и σ_3 – полукруг, расположенный в плоскости xOy. Поток через замкнутую поверхность σ

$$\Pi=\oiint\limits_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})d\sigma$$

представим в виде суммы трех слагаемых: Π_1 – поток через σ_1, Π_2 – поток через σ_2, Π_3 – поток через σ_3.

σ_1: $(z-1)^2=x^2+y^2, z=1-\sqrt{x^2+y^2}$

Для вычисления вектора нормали к поверхности представим поверхность как поверхность уровня скалярной функции $F = x^2 + y^2 - (z-1)^2$.

$$\mathrm{grad}F = (2x, 2y, -2(z-1)) \parallel (x, y, 1-z)$$

Так как на поверхности σ_1 переменная $z \leq 1$, то аппликата полученного вектора неотрицательна, что соответствует направлению внешней нормали к данной поверхности. Вычислим модуль полученного вектора, а затем координаты единичной нормали $\overrightarrow{n_1}$ к σ_1:

$$\overrightarrow{n_1} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+(1-z)^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+(1-z)^2}}, \frac{1-z}{\sqrt{x^2+y^2+(1-z)^2}}\right)$$

$$(\vec{a}, \overrightarrow{n_1}) = \frac{x^2y + y^3z + (1-z)}{\sqrt{x^2+y^2+(1-z)^2}}$$

При вычислении интеграла по поверхности σ_1 будем проектировать σ_1 на координатную плоскость *xOy*. Проекция σ_1 – это область σ_3 на плоскости *xOy*.

$$d\sigma_1 = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+(1-z)^2}}{1-z}dxdy$$

$$(\vec{a}, \overrightarrow{n_1})d\sigma_1 = \frac{x^2y + y^3z + (1-z)}{1-z}dxdy$$

Исключим переменную z из полученного выражения, пользуясь уравнением поверхности σ_1:

$$1 - z = \sqrt{x^2+y^2}$$

и перейдем к полярным координатам

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, 1 - z = r, z = 1 - r$$

$$\Pi_1 = \iint_{\sigma_1} (\vec{a}, \vec{n})d\sigma = \iint_{\sigma_3} \frac{x^2y + y^3z + (1-z)}{1-z}dxdy =$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^2\cos^2\varphi \cdot r\sin\varphi + r^3\sin^3\varphi \cdot (1-r) + r}{r} \cdot rdr =$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 (r^3\cos^2\varphi\sin\varphi + r^3\sin^3\varphi - r^4\sin^3\varphi + r)dr =$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 (r^3 \sin\varphi - r^4 \sin^3\varphi + r)dr = \int_0^{\pi} \left(\frac{r^4}{4}\sin\varphi - \frac{r^5}{5}\sin^3\varphi + \frac{r^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{4}\sin\varphi - \frac{1}{5}\sin^3\varphi + \frac{1}{2} \right) d\varphi = \left(-\frac{1}{4}\cos\varphi + \frac{1}{5}\left(\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right) + \frac{1}{2}\varphi \right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{5}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{15} + \frac{\pi}{2} = \frac{7}{30} + \frac{\pi}{2}$$

σ_2: $y = 0, \overrightarrow{n_2} = (0, -1, 0)$

$$(\vec{a}, \overrightarrow{n_2}) = -y^2 z = 0 \implies \Pi_2 = 0$$

σ_3: $z = 0, \overrightarrow{n_3} = (0, 0, -1)$

$$(\vec{a}, \overrightarrow{n_3}) = -1 \implies \Pi_3 = \iint_{\sigma_3} (-1)dxdy = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Pi = \frac{7}{30} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{7}{30}$$

2 способ. По теореме Остроградского-Гаусса:

$$\Pi = \oiint_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n})d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\vec{a}\,dxdydz$$

где область V ограничена замкнутой поверхностью σ.

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2 z)}{\partial y} + \frac{\partial(1)}{\partial z} = y + 2yz = y(1 + 2z)$$

Для вычисления тройного интеграла воспользуемся цилиндрическими координатами:

$$\Pi = \iiint_V y(1 + 2z)dxdydz = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \int_0^{1-r} r\sin\varphi\,(1 + 2z)dz =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^1 r^2(z + z^2)|_0^{1-r} dr = -\cos\varphi|_0^{\pi} \cdot \int_0^1 r^2(1 - r + (1 - r)^2)dr =$$

$$= 2\int_0^1 r^2(r^2 - 3r + 2)dr = 2\int_0^1 (r^4 - 3r^3 + 2r^2)dr = 2\left(\frac{1}{5}r^5 - \frac{3}{4}r^4 + \frac{2}{3}r^3\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) = \frac{12 - 45 + 40}{30} = \frac{7}{30}$$

Ответ: $\frac{7}{30}$

Задача 2.12. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру Г двумя способами:

1) непосредственно, вычисляя криволинейный интеграл по контуру Г.

2) по теореме Стокса.

$$\vec{a}(M) = y\,\vec{i} + xz\vec{j} + \vec{k}$$

$$\Gamma:\ (z-1)^2 = x^2 + y^2, y = 0, z = 0$$

1 способ. Замкнутый контур Г образован пересечением конуса $(z-1)^2 = x^2 + {}$ ${}+y^2$ с координатными плоскостями $y = 0, z = 0$ (рис. 15.9) и состоит из трех частей *AIB*, *BIIC*, *CIIIA*.

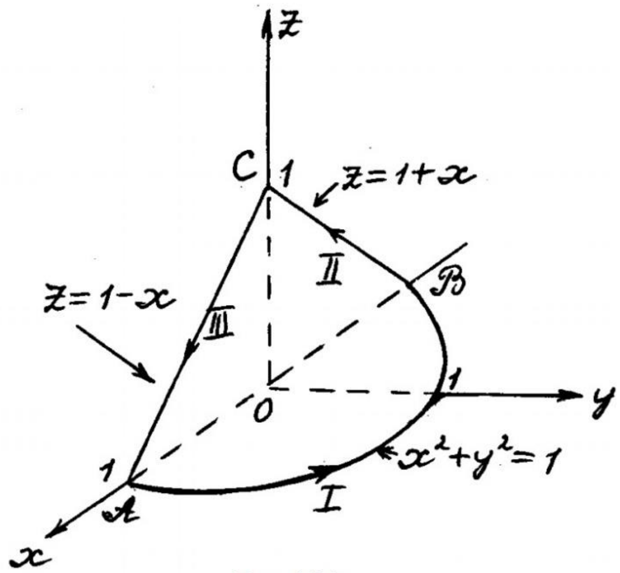

Рис. 15.9.

Циркуляцию

$$Ц = \oint_\Gamma (\vec{a}, d\vec{l})$$

представим в виде суммы трех слагаемых:

$$Ц = \int_{AIB} (\vec{a}, d\vec{l}) + \int_{BIIC} (\vec{a}, d\vec{l}) + \int_{CIIIA} (\vec{a}, d\vec{l})$$

AIB: $x^2 + y^2 = 1, z = 0$

Введем параметрические уравнения дуги *AIB*: $x = \cos t\,, y = \sin t\,, z = 0, t \in [0, \pi]$.

$$\vec{a} = (y, xz, 1) = (\sin t\,, 0{,}1)$$

$$d\vec{l} = (dx, dy, dz) = (-\sin t\,, \cos t\,, 0)dt$$

$$(\vec{a}, d\vec{l}) = -\sin^2 t\, dt$$

$$\int\limits_{AIB} (\vec{a}, d\vec{l}) = \int\limits_{0}^{\pi} (-\sin^2 t) dt = -\int\limits_{o}^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = -\frac{\pi}{2}$$

BIIC: $x = x, y = 0, z = 1 + x, x \in [-1,0]$

$$\vec{a} = (0, x(1 + x), 1)$$

$$d\vec{l} = (1,0,1)dx$$

$$(\vec{a}, d\vec{l}) = dx$$

$$\int\limits_{BIIC} (\vec{a}, d\vec{l}) = \int\limits_{-1}^{0} dx = 1$$

CIIIA: $x = x, y = 0, z = 1 - x, x \in [0,1]$

$$\vec{a} = (0, x(1 - x), 1)$$

$$d\vec{l} = (1,0,-1)dx$$

$$(\vec{a}, d\vec{l}) = -dx$$

$$\int\limits_{CIIIA} (\vec{a}, d\vec{l}) = -\int\limits_{0}^{1} dx = -1$$

$$\text{Ц} = -\frac{\pi}{2} + 1 - 1 = -\frac{\pi}{2}$$

2 способ. Вычислим циркуляцию по замкнутому контуру Г по формуле Стокса:

$$\text{Ц} = \oint\limits_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{l}) = \iint\limits_{\sigma} (\text{rot}\vec{a}, \vec{n}) d\sigma$$

где σ – поверхность, ограниченная контуром Г (направление обхода контура и сторона поверхности согласованы).

Вычислим rot$\vec{a}$:

$$\text{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & xz & 1 \end{vmatrix} = -x\vec{i} + (z - 1)\vec{k}$$

В качестве поверхности, ограниченной замкнутым контуром Г, возьмем часть конуса σ_1 из задачи 2.11. Единичная нормаль $\overrightarrow{n_1}$ к поверхности σ_1 и элемент площади поверхности были вычислены в задаче 2.11:

$$\overrightarrow{n_1} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (1-z)^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + (1-z)^2}}, \frac{1-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + (1-z)^2}}\right)$$

$$d\sigma_1 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (1-z)^2}}{1-z} dxdy$$

Вычислим скалярное произведение $(\mathrm{rot}\vec{a}, \overrightarrow{n_1})$:

$$(\mathrm{rot}\vec{a}, \overrightarrow{n_1}) = \frac{-x^2 - (1-z)^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (1-z)^2}}$$

и подынтегральное выражение:

$$(\mathrm{rot}\vec{a}, \vec{n}) d\sigma_1 = \frac{-x^2 - (1-z)^2}{1-z} dxdy$$

Исключим переменную z из полученного выражения, пользуясь уравнением поверхности:

$$1 - z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

и перейдем к полярным координатам:

$$x = r\cos\varphi\,, y = r\sin\varphi\,, 1 - z = r, z = 1 - r$$

$$\text{Ц} = \iint\limits_{\sigma} (\mathrm{rot}\vec{a}, \overrightarrow{n_1}) d\sigma_1 = \int\limits_{o}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} \frac{-r^2\cos^2\varphi - r^2}{r} r dr =$$

$$= \int\limits_{o}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} \left(-r^2(\cos^2\varphi + 1)\right) dr = -\int\limits_{o}^{\pi} (\cos^2\varphi + 1) \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^1 d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} + 1\right) d\varphi = -\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{\pi} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}$