ЛЕКЦИЯ № 12

Евклидовы пространства.

Определение евклидова пространства. Скалярное произведение векторов. Нормированные пространства. Угол между векторами. Неравенство Коши-Буняковского. Матрица Грама. Решение задач.

Определение. Линейное пространство $\mathbb{E}$ называется ***евклидовым пространством,*** если в нем задано скалярное произведение.

Определение. ***Скалярным произведением*** векторов $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{E}$ называется числовая функция $(\bar{x}, \bar{y})$, если выполнены условия (аксиомы):

$\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \text{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

1) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$
2) $(\lambda\bar{x}, \bar{y}) = \lambda(\bar{x}, \bar{y})$
3) $(\vec{x} + \vec{z}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{z}, \vec{y})$;
4) $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$, причем $(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$;

Другими словами, скалярное произведение – симметричная билинейная форма. Причем, соответствующая ей квадратичная форма-положительно определенная.

В произвольном линейном пространстве можно ввести скалярное произведение, причем различными способами.

Примеры:

В V_3 : $(\bar{x}, \bar{y}) = |\bar{x}||\bar{y}|\cos(\widehat{\bar{x}, \bar{y}})$

В R^n : $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$

В $\text{C}[0;1]$ (линейное пространство функций, непрерывных на $[0;1]$): $(\text{f,g}) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

Можно легко убедиться, что определенные таким образом скалярные произведения удовлетворяют определению.

Свойства скалярного произведения:

1) $(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y})$
2) $(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z})$
3) $(\vec{x}, \vec{o}) = 0$
4) $\sum_{k=1}^{m}(a_k \overrightarrow{x_k}, \vec{y}) = \sum_{k=1}^{m} a_k (\vec{x}_k, \vec{y})$; $a_k \epsilon R$
5) Если для любого $\vec{z}$, $(\vec{x}, \vec{z}) = (\vec{y}, \vec{z})$, то $\vec{x} = \vec{y}$

Теорема (неравенство Коши-Буняковского).

Для любых векторов $\vec{x}, \vec{y}$ евклидова пространства справедливо *неравенство Коши-Буняковского* $(\boldsymbol{\bar{x}}, \boldsymbol{\bar{y}})^2 \le (\boldsymbol{\vec{x}}, \boldsymbol{\vec{x}}) \cdot (\boldsymbol{\vec{y}}, \boldsymbol{\vec{y}})$

◄

1. При $\bar{x} = \bar{0}$ обе части неравенства равны 0 => неравенство выполняется
2. Пусть $\bar{x} \neq \bar{0}$ $(\lambda\bar{x} - \bar{y}, \lambda\bar{x} - \bar{y}) \ge 0 \;\forall\, \lambda$ в силу аксиомы 4.

   $(\lambda\bar{x}, \lambda\bar{x} - \bar{y}) - (\bar{y}, \lambda\bar{x} - \bar{y}) = \lambda^2(\bar{x}, \bar{x}) - \lambda(\bar{x}, \bar{y}) - \lambda(\bar{y}, \bar{x}) + (\bar{y}, \bar{y}) = \lambda^2(\bar{x}, \bar{x}) - 2\lambda(\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{y}, \bar{y}) \ge 0$

   Это квадратный трехчлен относительно λ.

   $(\bar{x}, \bar{x}) > 0 =>$ трехчлен ≥ 0, если D≤ 0

   $D = 4(\bar{x}, \bar{y})^2 - 4(\bar{x}, \bar{x})(\bar{y}, \bar{y}) \le 0 =>$

   $(\bar{x}, \bar{y})^2 \le (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y})$; ►

Примеры неравенства Коши - Буняковского:

В линейном пространстве R^n: $(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$

В пространстве функций, непрерывных на отрезке C[0;1] : $\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 f(x)^2dx \cdot \int_0^1 g(x)^2dx$

Определение. Функцию, заданную на линейном пространстве L, которая каждому вектору $\vec{x} \in L$ ставит в соответствие действительное число $\|\bar{x}\|$, называют **нормой,** если она удовлетворяет следующим аксиомам нормы:

а) $\|\bar{x}\| \ge 0$, причем $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \vec{o}$;

б) $\|\lambda\bar{x}\| = |\lambda|\ \|\bar{x}\|$; $\lambda \epsilon R$.

в) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \le \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ (неравенство треугольника)

Определение. Линейное пространство, в котором задана норма вектора, называется ***нормированным.***

Теорема. Всякое скалярное произведение в евклидовом пространстве определяет норму вектора согласно формуле: $\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x},\bar{x})}$. Эта норма называется ***евклидовой.***

◄ Согласно аксиоме скалярного произведения для $(\bar{x},\bar{x}) \ge 0$; $\forall\, \bar{x} \Rightarrow$ функция $\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x},\bar{x})}$ определена $\forall\, \bar{x} \in \mathbb{E}$ - евклидову пространству. Проверим выполнение всех аксиом нормы.

а) следует из аксиомы 4 скалярного произведения;

б) следует из аксиомы 2 скалярного произведения;

$$\|\lambda\bar{x}\| = \sqrt{(\lambda\bar{x},\lambda\bar{x})} = \sqrt{\lambda^2(\bar{x},\bar{x})} = |\lambda|\|\bar{x}\|$$

в) запишем неравенство Коши-Буняковского в виде:

$(\bar{x},\bar{y}) \le \sqrt{(\bar{x},\bar{x})}\sqrt{(\bar{y},\bar{y})}$, т.е. $(\bar{x},\bar{y}) \le \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$;

$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = (\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y}) = (\bar{x},\bar{x}) + 2(\bar{x},\bar{y}) + (\bar{y},\bar{y}) \le$

$(\bar{x},\bar{x}) + 2\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| + (\bar{y},\bar{y}) = (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2 \Rightarrow$

$\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ ►

Существуют также другие способы определения нормы, например:

$\|\bar{x}\|_\infty = max\{|x_1|, |x_2|, \dots |x_n|\}$

Легко проверить, что $\|\bar{x}\|_\infty$ удовлетворяет аксиомам нормы.

Определение: Углом между ненулевыми векторами в евклидовом пространстве называют значение $\varphi \in [0, \pi]$, определяемое равенством

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{x},\bar{y})}{\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|}$$

Корректность формулы следует из *неравенства Коши-Буняковского*:

$\forall \vec{x},\vec{y} \in E \quad |(\bar{x},\bar{y})| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$

Если один из векторов нулевой, то угол не определен.

Определение: Два ненулевых вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Обозначается $\bar{x} \perp \bar{y}$.

Пример. Доказать , что в евклидовом пространстве C[0;1] векторы f(x)≡ 2 и g(x)=2x-1 ортогональны.

$(f,g) = \int_0^1 fg dx = \int_0^1 2(2x-1)dx = 2\,(x^2-x)|_0^1 = 0 \Rightarrow f \perp g.$

Утверждение. Нулевой вектор ортогонален любому вектору.

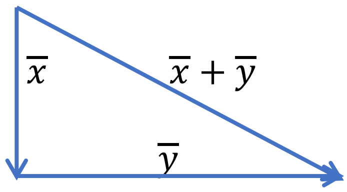
$$(\bar{x},\bar{0}) = (\bar{x}, 0\cdot\bar{0}) = 0(\bar{x},\bar{0}) = 0.$$

Теорема. Если $\bar{x}$ и $\bar{y} \in$ E ортогональны, то $\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2$

◄ $\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = (\bar{x}+\bar{y}, \bar{x}+\bar{y}) = (\bar{x},\bar{x}) + 2(\bar{x},\bar{y}) + (\bar{y},\bar{y}) =$

$= \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2;$ так как $(\bar{x},\bar{y}) = 0$ ►

Таким образом, теорема Пифагора распространяется на произвольное евклидово пространство.



Определение. Вектор называется ***нормированным,*** если $\|\overline{x}\|$=1

Определение. Система векторов $\{\overline{x}_1, \dots \overline{x}_n\}$ называется ***ортогональной***, если $(\overline{x}_i \overline{x}_j)$=0, если $i \neq j;\ \ i\,;j=\overline{1,n}$

Определение. Система векторов $\{\overline{x}_1, \dots \overline{x}_n\}$ называется ортонормированной, если $(\overline{x}_i \overline{x}_j)=\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i = j \\ 0, \ \text{ если } i \neq j \end{cases}$, $i;j=\overline{1,n}$

(δ_{ij} – символ Кронекера).

Ортонормированная система ортогональна и $\|\overline{x_i}\|$=1 для $\forall i$.

Утверждение. Если векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ ортогональны, то $\overline{x}$ и $\lambda\overline{y}$ также ортогональны.

Теорема. Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

◄ Рассмотрим произвольную ортогональную систему ненулевых векторов $\{\overline{e}_1, \dots \overline{e}_n\}$. Предположим, что для некоторых действительных коэффициентов $\alpha_1 \dots \alpha_n$ выполняется $\alpha_1\overline{e}_1 + \cdots + \alpha_n\overline{e}_n = \overline{0}$. Умножим обе части равенства скалярно на $\overline{e}_i$.

$(\alpha_1\overline{e}_1 + \cdots + \alpha_n\overline{e}_n, \overline{e}_i)=(\overline{0}, \overline{e}_i) = 0$, =>

$\alpha_1(\overline{e}_1, \overline{e}_i) + \cdots + \alpha_i(\overline{e}_i, \overline{e}_i)+\dots+\alpha_n(\overline{e}_n, \overline{e}_i)=0$, Векторы ортонональны => все слагаемые кроме одного обращаются в ноль => $\alpha_i\ (\overline{e}_i, \overline{e}_i) = 0$ => $\alpha_i = 0$, так как $(\overline{e}_i, \overline{e}_i) \neq 0$ по аксиоме 4.

Таким образом доказывается , что $\alpha_i = 0$ для $\forall\, i$ => $\{\overline{e}_1, \ldots \overline{e}_n\}$ л.н.з. ►

Теорема. Любая ортогональная система из n векторов в евклидовом пространстве размерности n образует базис.

◄ Ортогональная система из n векторов в евклидовом пространстве линейно-независима, а линейно-независимая система из n векторов в линейном пространстве размерности n образует базис. ►

Определение. Базис $\{\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n\}$ называется ***ортонормированным,*** если векторы единичной длины и попарно ортогональны, то есть:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j, \\ 1 \text{ при } i = j. \end{cases}$$

Ортогональный базис легко превратить в ортонормированный, если каждый вектор разделить на его норму.

Матрица Грама

Определение. Матрица из попарных скалярных произведений векторов в фиксированном базисе Б называется *матрицей Грама скалярного произведения в этом базисе:*

$$G_{\vec{b}} = \begin{pmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & \ldots & (\vec{e}_1, \vec{e}_n) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_1) & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & \ldots & (\vec{e}_2, \vec{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\vec{e}_n, \vec{e}_1) & (\vec{e}_n, \vec{e}_2) & \ldots & (\vec{e}_n, \vec{e}_n) \end{pmatrix}$$

Пусть в евклидовом пространстве в некотором базисе заданы два вектора

$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$; $\overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$;

тогда $(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_i y_j = (x_1 \dots x_n)\cdot G\cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T\cdot G\cdot Y$;

Критерий матрицы Грама скалярного произведения.

Теорема. Матрица G является матрицей Грама некоторого скалярного произведения в евклидовом пространстве тогда и только тогда, когда она

1) симметричная;

2) положительно определенная, т.е. все ее главные миноры положительные.

◄ Необходимость: G=$\{g_{ij}\}$- матрица скалярного произведения => $(\bar{e}_i,\bar{e}_j)$=$(\bar{e}_j,\bar{e}_i)$=g_{ij} => матрица Грама симметричная;

$(\bar{x},\bar{x}) = X^T G X > 0$, при $\bar{x} \neq \bar{0}$ по аксиоме 4 скалярного произведения;

=> G задает положительно определенную квадратичную форму, следовательно по критерию Сильвестра все ее главные миноры положительные;

Достаточность: Если G симметричная и положительно определенная, то она задает некий закон $(\bar{x},\bar{y}) = X^T G Y$, удовлетворяющий свойствам скалярного произведения => G- матрица Грама.

Скалярное произведение векторов не зависит от базиса пространства, но матрица Грама меняется при замене базиса. ►

Теорема. При замене базиса матрица Грама меняется по формуле

$\boldsymbol{G_2 = P^T G_1 P}$; где G_1 и G_2 – матрицы Грама в базисах $Б_1$ и $Б_2$ соответственно, а P - матрица перехода от базиса $Б_1$ к базису $Б_2$.

◄ Пусть $X_{Б_1}$ и $Y_{Б_1}$ – столбцы координат векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в базисе $Б_1$; а $X_{Б_2}$ и $Y_{Б_2}$ - в базисе $Б_2$;

$(\bar{x},\bar{y}) = X_{Б_1}^T G_1 Y_{Б_1} = (PX_{Б_2})^T G_1\,(PY_{Б_2}) = X_{Б_2}^T (P^T G_1 P) Y_{Б_2} = X_{Б2}^T G_2 Y_{Б_2}$ =>

$G_2 = P^T G_1 P$ ►

Матрица Грама в ортонормированном базисе является единичной матрицей. Для скалярного произведения в трёхмерном пространстве матрица Грама в ортонормированном базисе:

$$G_{\text{ортонормир.базис}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Координатная форма скалярного произведения в ортонормированном базисе: $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$.

Норма вектора $\|\bar{x}\| = \sqrt{{x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2}$

Решение задач

Задача 1. В евклидовом пространстве R^4 найти угол между векторами, заданными в каноническом базисе: $\bar{x} = (-1,1,0,2)$; $\bar{y} = (2,-1,1,0)$

Решение.

Канонический базис ортонормированный =>

$$\cos\varphi = \frac{-2-1}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{4+1+1}} = -0.5$$

Задача 2

Базис задан своими координатами в ортонормированном базисе $\{i, j, k\}$, $\overline{e}_1 = (1,1,1)$; $\overline{e}_2 = (2,0,1)$; $\overline{e}_3 = (1,1,0)$. Найти матрицу Грама в этом базисе.

Решение.

1 способ. $(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 3$; $(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 5$; $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 3$; $(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 2$; $(\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 2$; $(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 2$;

$$G_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2 способ.

$$G_2 = P^T G_1 P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Пример 3. Дана матрица Грама скалярного произведения $G = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Найти:

– длины базисных векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$;

– угол между базисными векторами $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$;

– длины заданных векторов $\vec{x} = (1; 3)$ и $\vec{y} = (-2; 1)$;

– угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$;

Решение.

Длины базисных векторов: $|\vec{e}_1| = \sqrt{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \sqrt{2}$, $|\vec{e}_2| = \sqrt{(\vec{e}_2, \vec{e}_2)} = \sqrt{5}$,

угол между базисными векторами $(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) = arccos \frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{|\vec{e}_1||\vec{e}_2|} = arccos \frac{-2}{\sqrt{10}} = \pi - arccos \frac{2}{\sqrt{10}}$.

Вычислим длины данных векторов и угол между ними.

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \quad x_2) G \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{x}, \vec{x}) = (1 \ \ 3) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 35,$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (1 \ 3) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 21,$$

$$(\vec{y}, \vec{y}) = (-2 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 21.$$

$$(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|} = arccos \frac{21}{\sqrt{35}\sqrt{21}} = arccos \frac{\sqrt{15}}{5}$$

Задача 4. Дана матрица G=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ квадратичной формы $\varphi(\vec{x})$ в базисе

$S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$;

a) Показать, что матрица G является матрицей Грама.

b) Найти длины базисных векторов и углы между ними.

c) Найти длины векторов $\vec{x}$=(1,2, 3) и $\vec{y}$=(2, -1,2) и угол между ними.

d) Найти матрицу Грама квадратичной формы $\varphi(\vec{x})$ в базисе $S_1 = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$,

$\vec{f}_1 = \vec{e}_1$

$\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$

$\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

Решение:

a)

- матрица симметрична относительно главной диагонали, то есть равны элементы $a_{ij} = a_{ji}$;

- все главные миноры строго положительны,

$$\Delta_1 = 1 > 0;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 > 0;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Все условия критерия матрицы Грама выполнены, значит данная матрица G является матрицей Грама.

b) длины базисных векторов и углы между ними.

С помощью матрицы Грама

$|\vec{e}_1| = \sqrt{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \sqrt{1} = 1;\ |\vec{e}_2| = \sqrt{(\vec{e}_2, \vec{e}_2)} = \sqrt{4} = 2;\ |\vec{e}_3| = \sqrt{(\vec{e}_3, \vec{e}_3)} = \sqrt{5}$.

$$\left(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}\right) = arccos\frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{|\vec{e}_1||\vec{e}_2|} = arccos\frac{-1}{2} = \frac{2}{3}\pi$$

$$\left(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_3}\right) = arccos\frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_3)}{|\vec{e}_1||\vec{e}_3|} = arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\left(\widehat{\vec{e}_2, \vec{e}_3}\right) = arccos\frac{(\vec{e}_2, \vec{e}_3)}{|\vec{e}_2||\vec{e}_3|} = arccos\frac{-4}{2\sqrt{5}} = \pi - arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$$

c) длины векторов $\vec{x}$= (1,2, 3) и $\vec{y}$=(2, -1,2) и угол между ними.

Найдем попарные скалярные произведения данных векторов с помощью матрицы Грама:

$$(\vec{x},\vec{x}) = (1 \quad 2 \quad 3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \quad -5 \quad 8)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 16$$

$$(\vec{y},\vec{y}) = (2 \quad -1 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (5 \quad -14 \quad 16)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 56$$

$$(\vec{x},\vec{y}) = (1 \quad 2 \quad 3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2 - 5 \;\; 8)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 25$$

Тогда длины данных векторов:

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})} = \sqrt{16} = 4; \;\; |\vec{y}| = \sqrt{(\vec{y},\vec{y})} = \sqrt{56},$$

угол между данными векторами

$$\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right) = arccos\frac{(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|} = arccos\frac{25}{4\cdot\sqrt{56}}$$

d) найдём матрицу Грама квадратичной формы $\varphi(\vec{x})$ в базисе $S_1 = \{\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3\}$ с помощью матрицы перехода:

$$G_{S_1} = P^T G P; \; P_{S\to S_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$G_{S_1} = P^T G P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 7 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что полученная матрица является матрицей Грама:

- матрица симметрична относительно главной диагонали, то есть равны элементы

$$a_{ij} = a_{ji};$$

- все главные миноры строго положительны,

в полученной матрице это

$\Delta_1 = 1 > 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 > 0$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & 6 & 14 \end{vmatrix} = 3 > 0.$

Все условия критерия матрицы Грама выполнены, значит полученная матрица G_{S_1} является матрицей Грама.