ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ЛЕКЦИЯ ОБЗОРНАЯ

Теоретические вопросы по курсу
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
2 семестр

1. Определение линейного пространства. Примеры линейных пространств.
2. Понятие линейной зависимости и независимости системы векторов. Размерность и базис линейного пространства.
3. Закон преобразования координат вектора при переходе к другому базису. Матрица перехода от одного базиса линейного пространства к другому.
4. Определение линейного подпространства. Примеры. Критерий линейного подпространства. Дополнение базиса подпространства до базиса всего пространства.

5. Линейный оператор и его свойства. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.
6. Линейные действия над операторами (умножение на число, сложение и умножение операторов) и их связь с линейными действиями над матрицами.
7. Ядро и образ линейного оператора. Обратный оператор. Матрица обратного оператора. Критерий обратимости линейного оператора.
8. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Нахождение собственных значений с помощью характеристического уравнения.
9. Линейные операторы простого типа. Достаточное условие оператора простого типа. Матрица оператора простого типа.
10. Билинейные формы в линейном пространстве. Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Преобразование матрицы квадратичной формы при замене базиса.

11. Канонический и нормальный вид квадратичной формы. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Положительный и отрицательный индексы, ранг. Закон инерции квадратичных форм, три инварианта квадратичной формы.
12. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
13. Определение евклидова пространства. Евклидово скалярное произведение и его матрица Грама.
14. Неравенство Коши - Буняковского. Длины векторов и углы между векторами в евклидовом пространстве. Неравенство треугольника.
15. Матрица Грама скалярного произведения. Координатная и векторно-матричная запись скалярного произведения. Критерий матрицы Грама. Преобразование матрицы Грама при замене базиса.
16. Ортогональный и ортонормированный базис. Процесс ортогонализации базиса. Алгоритм Грама-Шмидта.
17. Самосопряженные операторы и их свойства.

18. Ортогональные операторы и их свойства.

19. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований.

20. Приложение теории квадратичных форм к исследованию кривой второго порядка.

Разбор задач по темам

ТЕМА 1.

Линейное пространство

***Задача 1*.** Какие из данных множеств являются линейным подпространством в R^3?

1) $(7a, -3a + b, a + 5)$
2) $(7a, -3a + b, ab)$
3) $\left(7a, -3a + b, \sqrt{b}\right)$
4) $(7a, -3a + b, a)$
5) $(7a, -3a + b, a, b)$
6) $(7a, -3a + b, 0)$

Решение.

1) $(7a, -3a + b, a + 5)$

Проверим, является ли данное множество L линейным подпространством в R^3. Обозначим: $A = ta, B = tb, t \in R$

$t\vec{x} = (7(ta), -3(ta) + (tb), (ta) + t5) = (7A, -3A + B, A + 5t) \notin L \Rightarrow$ не замкнуто относительно операции умножения на число $\Rightarrow$ не является линейным подпространством.

Замечание. Если $\vec{0} \notin L \Rightarrow L$ не является линейным подпространством

2) $(7a, -3a + b, ab)$

Проверим, является ли данное множество L линейным подпространством в R^3.

Пусть $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7a_1 \\ -3a_1 + b_1 \\ a_1 b_1 \end{pmatrix} \in L; \vec{y} = \begin{pmatrix} 7a_2 \\ -3a_2 + b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix} \in L.$

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 7(a_1 + a_2) \\ -3(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

Обозначим $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$.

Тогда $\vec{x} + \vec{y} \neq \begin{pmatrix} 7a \\ -3a + b \\ ab \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \notin L.$

Следовательно, множество L не замкнуто относительно операции сложения, и не является линейным подпространством пространства R^3.

3) $\left(7a, -3a+b, \sqrt{b}\right)$

Проверим, является ли данное множество L линейным подпространством в R^3. Обозначим: $A = ta, B = tb, t \in R$

$$t\begin{pmatrix} 7a \\ -3a+b \\ \sqrt{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7ta \\ -3ta+tb \\ t\sqrt{b} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 7A \\ -3A+B \\ \sqrt{B} \end{pmatrix} \Rightarrow$$ L не замкнуто относительно операции умножения на число $\Rightarrow$ не является линейным подпространством пространства R^3.

4) $(7a, -3a+b, a)$

Проверим, является ли данное множество L линейным подпространством в R^3.

а) $\vec{x}=\begin{pmatrix}7a_1\\-3a_1+b_1\\a_1\end{pmatrix}\in L;\ \vec{y}=\begin{pmatrix}7a_2\\-3a_2+b_1\\a_2\end{pmatrix}\in L.$

$$\vec{x}+\vec{y}=\begin{pmatrix}7(a_1+a_2)\\-3(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\\a_1+a_2\end{pmatrix}\in L$$

Обозначим $a=a_1+a_2, b=b_1+b_2$. Тогда $\vec{x}+\vec{y}=\begin{pmatrix}7a\\-3a+b\\a\end{pmatrix}\in L.$

Следовательно, множество L замкнуто относительно операции сложения.

б) Пусть $t\in R\ \Rightarrow t\vec{x}=\begin{pmatrix}7ta_1\\-3ta_1+tb_1\\ta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7a\\-3a+b\\a\end{pmatrix}\in L$, где $a=$

$ta_1, b=b_1.$

Следовательно, множество L замкнуто относительно операции умножения на число.

Таким образом, L – линейное подпространство пространства R^3.

5) $(7a, -3a + b, a, b)$

Данное множество содержит четырехмерные векторы (четыре координаты) ⇒ оно не является линейным подпространством пространства R^3;

6) Решить самостоятельно.

Ответ. **4**), **6**)

Базис и размерность линейного пространства

***Задача 2*.**

Какая система векторов будет базисом линейного подпространства в $L = \{(a, 2a + b, -3b)\}$ в R^3.

1) $(1; 2; 0), (0; 1; -3)$

2) $(1; 2; 0), (0; 1; -3), (0; 0; 1)$

3) $(1; 0; 0), (0; 1; 0)$

4) $(1; 2; 1), (-3; 0; 0)$

Решение.

Найдем базис и размерность подпространства $L = \{(a, 2a + b, -3b)\}$

$$a = 1, b = 0 \Rightarrow \vec{e}_1 = (1,2,0);$$

$$a = 0, b = 1 \Rightarrow \vec{e}_2 = (0,1,-3).$$

Докажем, что $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ - базис подпространства L.

Линейная независимость.

Составим матрицу из координат векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ в каноническом базисе R^3 и найдем ее ранг: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, rang = 2$(количеству векторов) $\Rightarrow$ $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ - линейно независимая система векторов.

Полнота.

$\forall\vec{x}\in L:\vec{x}=\begin{pmatrix}a\\2a+b\\-3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2a\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b\\-3b\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}=a\vec{e}_1+$ $b\vec{e}_2\Rightarrow\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ - полная система векторов.

Итак, $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ - базис подпространства L. $\dim L=2$ (т.к. в базисе 2 вектора).

Ответ. **1)** $(1,2,0);\ (0,1,-3)$.

Задача 3. При каком значении параметра ***a*** система векторов $\vec{e}_1 = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{e}_2 = a\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{e}_3 = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ не является базисом в линейном пространстве геометрических векторов V^3?

Решение.

Составляем матрицу из координат векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & a & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -2a + 8 + 8a - 2 = 0 \Rightarrow 6a = -6 \Rightarrow a = -1$$

Ответ. -1

Задача 4. В линейном пространстве геометрических векторов V^3 задан базис: $\vec{e}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$; $\vec{e}_2 = \vec{i} - 3\vec{j}$; $\vec{e}_3 = -3\vec{j} + 4\vec{k}$. Какая матрица является матрицей перехода от канонического базиса к базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$?

Решение.

1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ. **2)**

Задача 5. В линейном пространстве геометрических векторов V^2 задан базис: $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j}$; $\vec{e}_2 = \vec{i} - \vec{j}$. Разложить вектор $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j}$ по данному базису. В ответе записать координаты вектора без пробелов и запятой.

Решение.

$$x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 3$$

Ответ. 23

ТЕМА 2.

Линейные операторы

Задача 6. Какие из данных операторов, действующих в пространстве арифметических векторов R^3, не является линейными?

1) $\hat{A}(x) = (-x_1 + x_2; x_1 - 4x_3; -x_3 - x_2)$
2) $\hat{B}(x) = (-x_1 + x_2; x_1^2 - 4x_3; -x_3 - x_2)$
3) $\hat{C}(x) = (-x_1 + 3; x_1 - 4x_3; -x_3 - x_2)$
4) $\hat{D}(x) = (-x_1 + x_2; x_1 - 4x_3; 0)$

Решение. Для линейного оператора должны выполняться свойства линейности: $\hat{B}(x+y) = \hat{B}(x) + \hat{B}(y)$; $\hat{B}(\alpha x) = \alpha \hat{B}(x)$

$$\hat{B}(x) = (-x_1 + x_2; x_1^2 - 4x_3; -x_3 - x_2)$$

Пусть $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \Rightarrow$

$$\hat{B}(\alpha x) = (-\alpha x_1 + \alpha x_2; (\alpha x_1)^2 - 4\alpha x_3; -\alpha x_3 - \alpha x_2) \neq$$

$$\neq \alpha(-x_1 + x_2; x_1^2 - 4x_3; -x_3 - x_2)$$

Нарушается свойство линейности $\Rightarrow \hat{B}$ – не линейный оператор.

$$\hat{C}(x) = (-x_1 + 3; x_1 - 4x_3; -x_3 - x_2)$$

$$\hat{C}(\alpha x) = (-\alpha x_1 + 3; \alpha x_1 - 4\alpha x_3; -\alpha x_3 - \alpha x_2) \neq$$

$$\neq \alpha(-x_1 + 3; x_1 - 4x_3; -x_3 - x_2)$$

Нарушается свойство линейности $\Rightarrow \hat{C}$ – не линейный оператор.

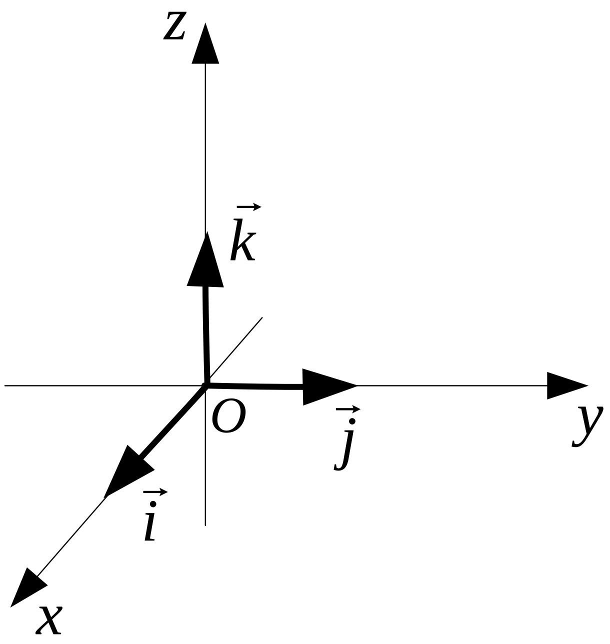
Операторы $\hat{A}(x) = (-x_1 + x_2; x_1 - 4x_3; -x_3 - x_2)$ и $\hat{D}(x) = (-x_1 + x_2; x_1 - 4x_3; 0)$ являются линейными, так как выполняются все условия линейности оператора. Проверить самостоятельно.

Ответ. **2**), **3**)

Задача 7. Написать матрицу линейного оператора $\hat{A}$ – проекция на плоскость XOY, действующего в пространстве геометрических векторов V_3. Найти образ вектора $\vec{a} = (-1; 1; 2)$. Будет ли линейный оператор обратим? Найти ядро, образ.

Решение.

Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.



$$\hat{A}\vec{i} = \vec{i} = (1,0,0),$$

$$\hat{A}\vec{j} = \vec{j} = (0,1,0),$$

$$\hat{A}\vec{k} = \vec{0} = (0,0,0).$$

Запишем матрицу оператора $\hat{A}$. Вспомним, что координаты образов базисных векторов надо записать по столбцам:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдите образ вектора $\vec{a} = (-1,1,2)$:

$$\vec{y} = \hat{A}\vec{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Из геометрических соображений видно, что под действием линейного оператора в $\vec{0}$ переходят все векторы, параллельные оси OZ, следовательно,

$$\mathrm{Ker}\hat{A} = \{\alpha\vec{k}\},\ \mathrm{Im}\,\hat{A} = \{\beta\vec{i} + \gamma\vec{j}\} = V_2,\ \mathrm{Defect}\,\hat{A} = 1,\ \mathrm{Rang}\,\hat{A} = 2.$$

По всем трем критериям линейный оператор необратим:

1) $\det A = 0$; 2)$\mathrm{Im}\,\hat{A} \neq V_3$; 3) $\mathrm{Ker}\,\hat{A} \neq \{\vec{0}\}$.

Достаточно применить только один критерий.

Из геометрических соображений можно сделать вывод, что базисные векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ под действием линейного оператора $\hat{A}$ переходят в себе коллинеарные. Они образуют базис из собственных векторов. Собственные значения равны соответственно $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$. Матрица в этом базисе имеет диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\hat{A}$ - оператор простого типа.

Задача 8.

Линейный оператор $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - 5x_2 + 3x_3, -2x_1 + 3x_2 - x_3, x_2 + 2x_3)$ действует в пространстве R^3, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$. Найти его матрицу. Определить, является ли оператор $\hat{A}$ обратимым? Найти образ вектора $\vec{x} = (-1,2\ ,3)$. Найти ядро линейного оператора $\hat{A}$. Является ли вектор $\vec{x} = (0,1\ ,0)$ собственным вектором оператора $\hat{A}$?

Решение. Найдем матрицу линейного оператора в каноническом базисе: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$; $\vec{e}_2 = (0,1,0)$; $\vec{e}_3 = (0,0,1)$.

Чтобы найти значение $\hat{A}\vec{e}_1$, подействуем линейным оператором на вектор $\vec{e}_1$, т.е. в $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - 5x_2 + 3x_3, -2x_1 + 3x_2 - x_3, x_2 + 2x_3)$ подставим координаты $\vec{e}_1$:

$x_1 = 1;\ x_2 = x_3 = 0$, получим $\hat{A}\vec{e}_1 = (1, -2,0)$.

Аналогично:

$\hat{A}\vec{e}_2 = (-5,3,1)$,

$\hat{A}\vec{e}_3 = (3,-1,2)$.

Чтобы получить матрицу линейного оператора, запишем координаты образов базисных векторов по столбцам:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 - 20 - 6 = -19 \neq 0.$$

Тогда $\hat{A}^{-1}$ существует.

Найдем образ вектора $\vec{x} = (-1,2,3)$, $\quad \vec{y} = \hat{A}\vec{x}$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Найдем ядро линейного оператора $\hat{A}$. Вспомним, что $\operatorname{Ker} \hat{A} = \{\vec{x} \colon \hat{A}\vec{x} = \vec{0}\}$; тогда координаты $\vec{x}$ можно искать как решение системы $\hat{A}\vec{x} = \vec{0}$.

Запишем систему в матричном виде и решим методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 0, x_2 = 0, x_1 = 0$. $\operatorname{Ker}\hat{A} = (0,0,0) = \{\vec{0}\}$.

Проверим, является ли вектор $\vec{x} = (0{,}1\ {,}0)$ собственным вектором оператора $\hat{A}$?

Проверим, выполняется ли условие $\hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ не является.}$$

Задача 9. Для линейного оператора $\hat{A}\vec{x} = (4x_1, x_1 - 2x_2, x_1 + 3x_2)$, действующего в пространстве R^3, выбрать верную матрицу и верные утверждения.

1) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $\operatorname{Ker} \hat{A} = \{\vec{0}\}$; оператор не обратим

2) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $\operatorname{Ker} \hat{A} = \{(0,0,c), c \in R\}$; оператор не обратим

3) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $\operatorname{Ker} \hat{A} = \{(0;0;c), c \in R\}$; оператор обратим

4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\operatorname{Ker} \hat{A} = \{\vec{0}\}$; оператор обратим

5) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\operatorname{Ker} \hat{A} = \{(c;0;0), c \in R\}$; оператор обратим

6) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $\operatorname{Ker} \hat{A} = \{(0;0;0)\}$; оператор обратимый

Решение. Для решения этой задачи сначала необходимо составить матрицу данного оператора, выписав координаты образов векторов по столбцам: $\hat{A}(\vec{e}_1) = (4; 1; 1)$, $\hat{A}(\vec{e}_2) = (0; -2; 3)$, $\hat{A}(\vec{e}_3) = (0; 0; 0) \Rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, так как $det\, A = 0$, то оператор необратим, значит его ядро не пустое.

Найдем ядро. Для этого решим систему $AX = O$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = C \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}\, \hat{A} = \{(0,0,c), c \in R\}.$$

Ответ. **2)**

Задача 10. Найти собственные значения линейного оператора $\hat{A}$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ в каноническом базисе линейного пространства R^2. Будет ли данный линейный оператор простого типа? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -8 \\ 3 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-6-\lambda)+24=0$$

$\lambda^2 + 2\,\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2 \;\Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \;\Rightarrow$ оператор простого типа

Его матрица в собственном базисе имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Задача 11. В некотором базисе пространства R^2 линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ заданы своими матрицами $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Укажите матрицу линейного оператора $\hat{A}^2 + 2\hat{B}$.

1) $\begin{pmatrix} -1 & -16 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Решение.

$$C = A^2 + 2B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -16 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$$

Ответ. **1)**

Задача 12. Линейный оператор, действующий в трехмерном пространстве, задан своей матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 & b \\ 0 & -2 & 1 \\ b & 0 & 2 \end{pmatrix}$ в некотором базисе. При каком значении параметра b он будет необратим? В случае нескольких значений, в ответе указать большее число.

Решение.

$$\det A = b + 2b^2 = 0 \Rightarrow b(1 + 2b) = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ и } b = -1/2$$

Ответ. 0

Задача 13. Линейные операторы, действующие в трехмерном пространстве, заданы матрицами в некотором базисе пространства. У каких линейных операторов ядро $\operatorname{Ker}\hat{A} \neq \vec{0}$?

1) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **2**) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ **3**) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **4**) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Решение.

Если $\det A = 0 \Rightarrow Ker\hat{A} \neq \vec{0}$. Ответ. **1), 2)**

Задача 14. Пусть задан линейный оператор $\hat{A}$, действующий в пространстве геометрических векторов V_3 - поворот вокруг оси Ox на $90°$ по часовой стрелке. Укажите матрицу этого линейного оператора в каноническом базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

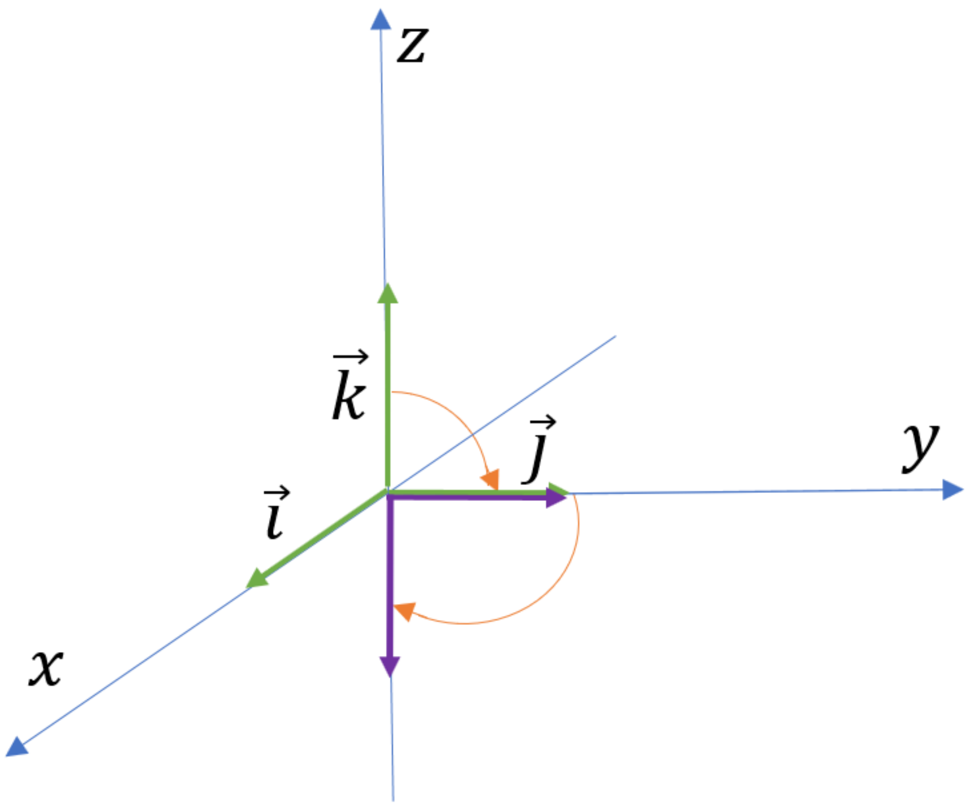
1) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение.



$$\hat{A}\vec{i} = \vec{i} = (1;0;0),$$

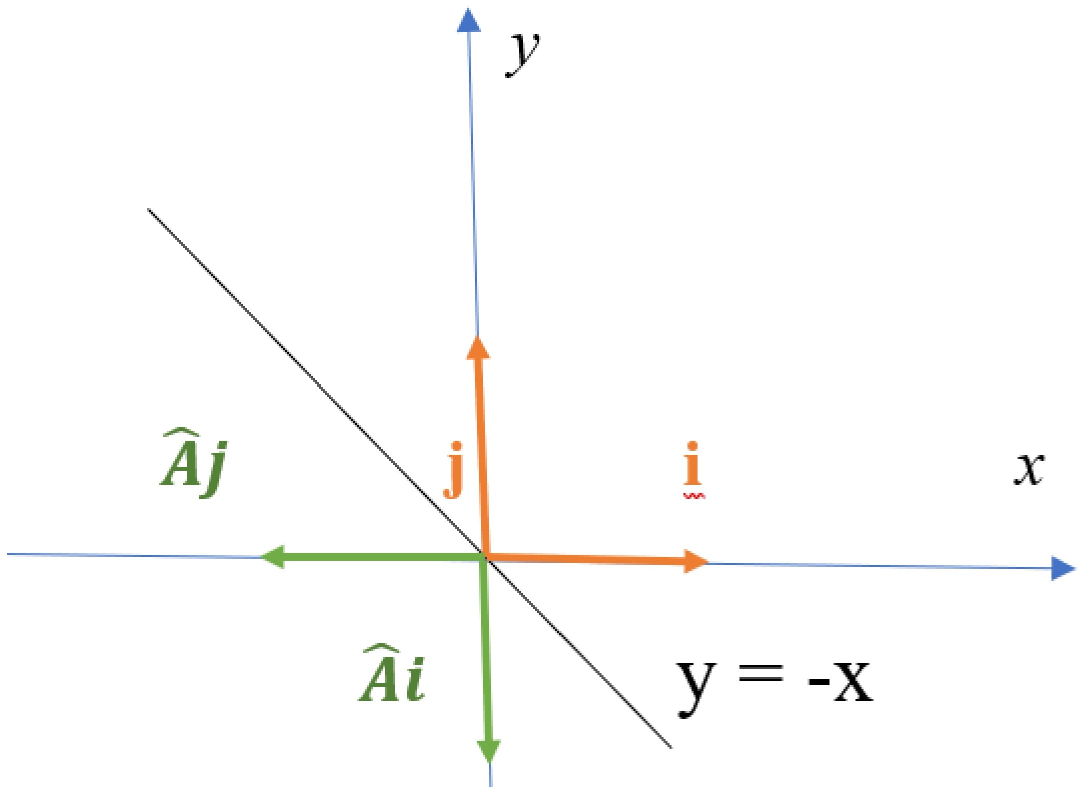
$$\hat{A}\vec{j} = -\vec{k} = (0;0;-1),$$

$$\hat{A}\vec{k} = \vec{j} = (0;1;0).$$

Ответ. **3)**

Задача 15. У какого линейного оператора, действующего на плоскости, матрица в каноническом базисе будет иметь вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$?

1) отражение относительно прямой $y = x$
2) проекция на прямую $y = -x$
3) поворот на угол 90 градусов по часовой стрелки
4) поворот на угол 90 градусов против часовой стрелки
5) отражение относительно прямой $y = -x$



Решение.

$\hat{A}\vec{\imath} = -\vec{\jmath} = (0; -1);\ \ \hat{A}\vec{\jmath} = -\vec{\imath} = (-1; 0)$

Ответ. **5)**

***Задача 16*.** Какие из данных линейных операторов в геометрическом пространстве V_3 являются операторами простого типа?

1) проекция на ось OX

2) гомотетия с коэффициентом $k = 3$

3) поворот вокруг оси OY на 25 градусов по часовой стрелки

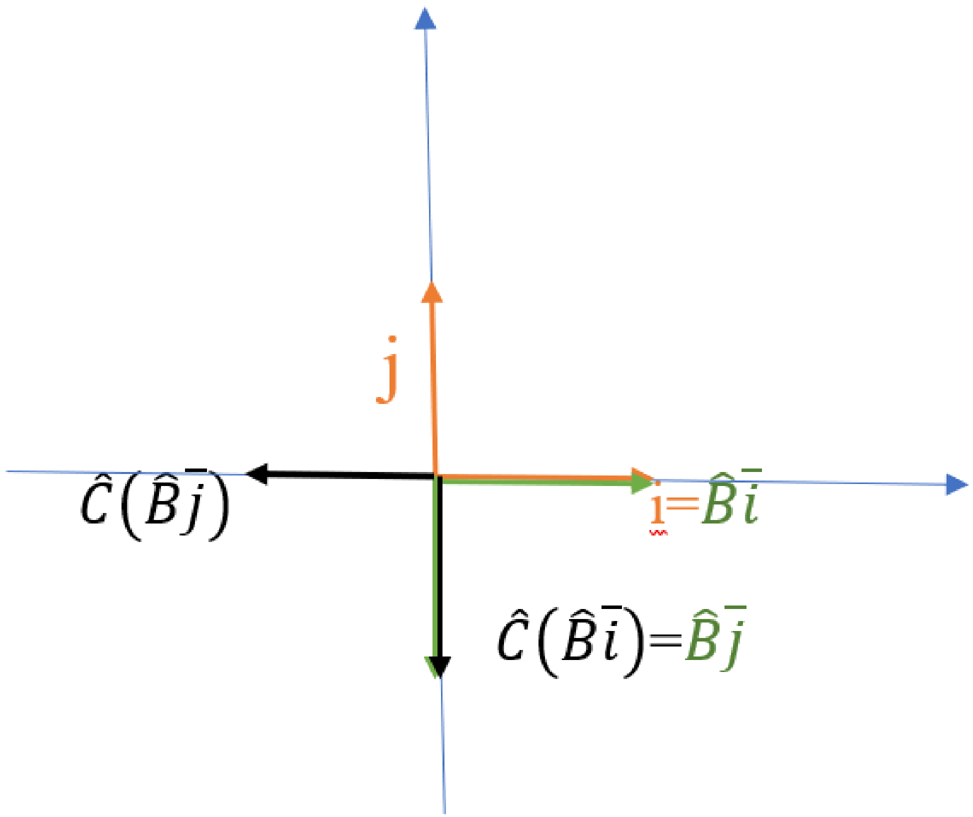
4) зеркальное отражение относительно плоскости XOZ.

Ответ. **1), 2), 4)**

Задача 17. Линейный оператор на плоскости состоит в зеркальном отражении векторов относительно оси Ox и последующем повороте их на 90 градусов по часовой стрелке. Найти образ вектора $\vec{x} = (-2{,}3)$.

Решение.

1 способ. Пусть $\hat{B}$ $-$отражение относительно оси OX, $\hat{C}$- поворот. Выполнить последовательно все действия и найти таким образом образы базисных векторов.



$$\hat{A}\vec{\imath} = -\vec{\jmath} = (0; -1)$$

$$\hat{A}\vec{\jmath} = -\vec{\imath} = (-1; 0)$$

Матрица оператора: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\hat{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2 способ.

Пусть $\hat{B}$ $-$отражение относительно оси OX, $\hat{C}$- поворот.

Тогда $\hat{A}\vec{x} = \hat{C}\left(\hat{B}\vec{x}\right) \Rightarrow A = CB \ \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Ответ. $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

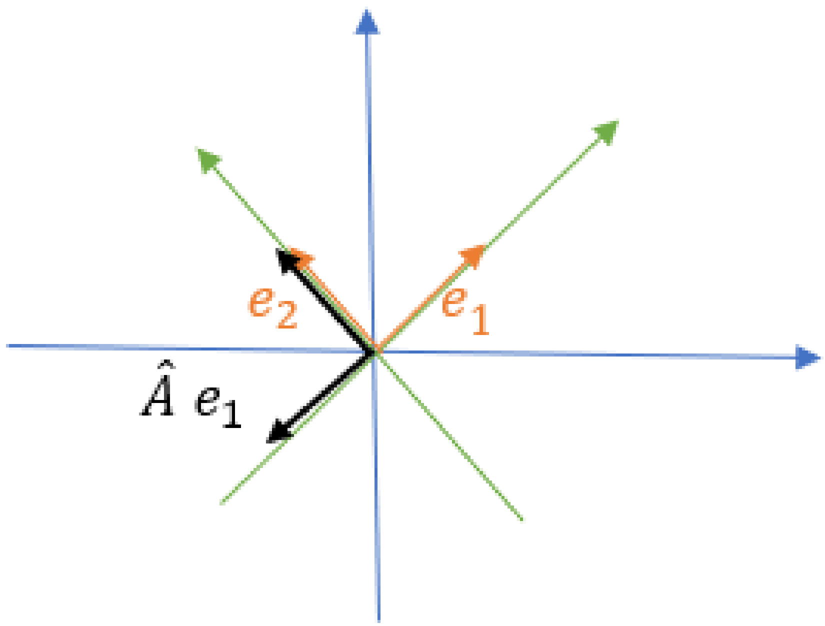
Задача 18. Линейный оператор на плоскости состоит в зеркальном отражении векторов относительно оси Ox и последующем повороте их на 90 градусов по часовой стрелке. Его матрицей в базисе $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{e}_2 = -\vec{i} + \vec{j}$ будет

1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



Решение.

$\hat{A}\vec{e}_1 = -\vec{e}_1, \quad \hat{A}\vec{e}_2 = \vec{e}_2$ Ответ. **1)** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 19. В линейном пространстве размерности 2 в некотором исходном базисе задан новый базис $\vec{e}_1 = (1, -1)$ и $\vec{e}_2 = (1,1)$ и образ вектора $\vec{x}$: $\hat{A}\vec{x} = (4, -6)$.

Линейный оператор $\hat{A}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ имеет матрицу $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в исходном базисе.

Решить самостоятельно.

ТЕМА 3.

Квадратичные формы

Задача 20. Дана квадратичная форма

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Исследуйте ее на знакоопределенность.

Решение.

Матрица квадратичной формы имеет вид: $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Delta_1 = 3 >, \Delta_2 = 8 > 0, \Delta_3 = 36 > 0 \Rightarrow$ положительно определенная.

Задача 21. Для данной квадратичной формы определить положительный индекс r_+, отрицательный индекс r_- и ранг.

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$$

Решение.

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 =$$

$$= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (4x_2x_3 + 4x_3^2) =$$

$$= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (2x_3 + x_2)^2 - x_2^2$$

Тогда положительный индекс $r_+ = 2$, отрицательный индекс $r_- = 1$ и ранг $Rg = 3$.

Задача 22. Найти все значения параметра $\boldsymbol{a}$, при котором отрицательно определена следующая квадратичная форма.

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -4x_1^2 + ax_2^2 - 3x_3^2 - 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 - 2ax_2x_3$$

Решение. Составим матрицу квадратичной формы.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -a & 1 \\ -a & a & -a \\ 1 & -a & -3 \end{pmatrix}$$

Чтобы форма была отрицательно определенной, по критерию Сильвестра необходимо, чтобы все главные миноры знакочередовались, начиная с минуса.

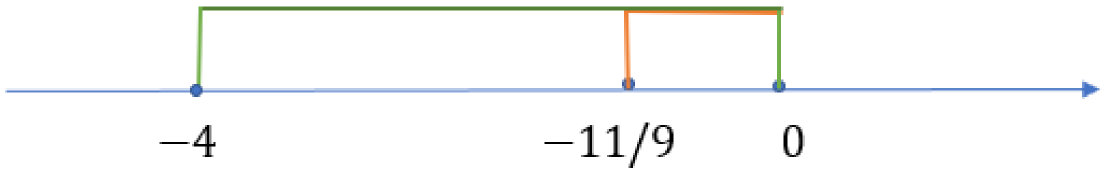
Рассмотрим миноры I, II и III-го порядков матрицы A.

$$\Delta_1 = -4 < 0,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -4a - a^2 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -4 & -a & 1 \\ -a & a & -a \\ 1 & -a & -3 \end{vmatrix} = 12a + 2a^2 - a + 3a^2 + 4a^2 = 9a^2 + 11a < 0$$

Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} a(4+a) < 0 \\ 9a^2 + 11a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(4+a) < 0 \\ a(9a+11) < 0 \end{cases}$$



Ответ: $-11/9 < a < 0$

ТЕМА 4

Евклидово пространство

Задача 23. Какие из приведенных матриц **не будут** матрицей Грама?

1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Решение. Критерий матрицы Грама – симметричность и положительная определенность матрицы. Этим двум условиям удовлетворяет только матрица $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Ответ. **1), 3), 4)**

Задача 24. Матрица Грама скалярного произведения в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ имеет вид $G = \begin{pmatrix} 36 & -9 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите угол между базисными векторами. Ответ запишите в градусах.

Решение.

$$\cos A = -\frac{9}{6\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ. 150

Задача 25. Матрица Грама скалярного произведения в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ имеет вид $G = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Найти угол между векторами, заданными своими координатами в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ $\vec{x} = (2, -1)$ и $\vec{y} = (3,1)$.

Решение.

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (2 \quad -1)\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (17 \quad -7)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 44$$

$$(\vec{x}, \vec{x}) = (2 \quad -1)\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (17 \quad -7)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 47$$

$$(\vec{y}, \vec{y}) = (3 \quad 1)\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (23 \;\; 2)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 71$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{44}{\sqrt{71}\sqrt{47}}\right)$$

Ответ: $\arccos\left(\frac{44}{\sqrt{71}\sqrt{47}}\right)$

Задача 26. Какая из матриц является матрицей Грама в ортогональном базисе?

1) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Ответ. **1)**

Задача 27. Найти наименьшее целое значение параметра a, при котором матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ является матрицей Грама в каком-либо базисе пространства E_3.

Решение. Матрица симметричная.

$$\begin{cases} 1 > 0 \\ a - 1 > 0 \\ a^2 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a(a-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 1$$

Ответ. $a = 2$

Спасибо за внимание!