Ряды и интегралы Фурье

А.М.Будылин

23 мая 2001 г.

Содержание

Часть I

Ряды Фурье

1 Тригонометрические ряды

1.1 История вопроса

Считается, что самый первый тригонометрический ряд был написан Эйлером. В его «Дифференциальном исчислении» 1755 года в главе «О представлении функций рядами» можно найти следующее равенство

$$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots, \quad x \in (0, 2\pi).$$

В действительности, впервые о нем Эйлер сообщил в письме к Гольдбаху в 1744 году

Приблизительно в это же время Даниил Бернулли, в связи с задачей о колебании струны, впервые высказывает уверенность в возможности аналитического выражения «любой линии» на отрезке $[0, 2\pi]$ рядом из синусов и косинусов кратных дуг. Однако положение здесь в значительной степени оставалось невыясненным вплоть до 1805 года, когда Жан Батист Жозеф Фурье в статье о распространении тепла внутри твердых тел представил формулы для коэффициентов разложения функции в ряд по синусам и косинусам кратных дуг. Именно с его именем стали связывать следующие формулы для вычисления «коэффициентов Фурье»

книга Фурье "Аналитическая теория теплоты"была опубликована в 1822 году

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx,$$

для функции f с периодом 2π, представимой в виде суммы тригонометрического ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Следует, однако, подчеркнуть, что вопрос о представлении более или менее произвольной функции (с периодом 2π) в виде суммы тригонометрического ряда вовсе не был решен Фурье и еще на протяжении целого столетия математики занимались поисками тех или иных условий, при которых такое представление в том или ином смысле имеет место.

В настоящее время уже давно является осмысленным тот факт, что теория рядов Фурье существенно зависит от понятия интеграла. Принимая в формулах Фурье все более и более общее определение интеграла (Коши, Римана, Лебега, Данжуа), мы все более и более будем расширять класс тригонометрических рядов Фурье. В настоящее время проводится разграничение даже между общими тригонометрическими рядами и тригонометрическими рядами Фурье. Так, например, тригонометрический ряд

Это было отмечено еще Н.Н.Лузиным в его диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд» в 1915 году

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

сходится всюду, но не является рядом Фурье никакой интегрируемой (по Лебегу) функции.

Наконец, следует отметить, что благодаря работам Гильберта (начало XX века) стало возможным излагать теорию рядов Фурье в геометрической форме как теорию ортогональных (не только тригонометрических) разложений.

Дальнейшее изложение ориентировано на интеграл Римана. Это обстоятельство не позволит осмыслить многие факты, касающиеся сходимости рядов Фурье, но, по образному выражению Хевисайда[1], «станете ли Вы отказываться от обеда только потому, что Вам не полностью понятен процесс пищеварения?»

А не на более общий и более пригодный для данных рассмотрений интеграл Лебега

1.2 Экскурс в теорию комплексных чисел

Напомним, что множество комплексных чисел — это множество упорядоченных пар вещественных чисел (x, y) с операциями сложения

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{1.1}$$

[1]Оливер Хевисайд — знаменитый английский физик и инженер, создатель операционного исчисления

и умножения

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)\,,$$

относительно которых множество комплексных чисел становится числовым полем $\mathbb{C}$. Важно, также, что относительно комплексного сложения (1.1) и умножения на вещественные числа

$$c(x, y) = (cx, cy)\,,$$

поле $\mathbb{C}$ можно рассматривать как двумерное вещественное векторное пространство $\mathbb{R}^2$, т.е. плоскость. Комплексное число вида (x,0) при этом отождествляется с вещественным x. Выбирая в качестве базиса в $\mathbb{R}^2$ стандартный: $1 \equiv (1, 0)$ и $i = (0, 1)$, приходим к алгебраической записи комплексного числа

$$z = (x, y) = x + yi = x + iy\,.$$

Операция предельного перехода определяется покоординатно. Таким образом,

$$\lim z_n = \lim x_n + i \lim y_n\,,$$
$$\sum z_n = \sum x_n + i \sum y_n\,,$$

где $z_n = x_n + iy_n$ — последовательность комплексных чисел. Аналогично, если $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ — комплекснозначная функция вещественного переменного t, то

$$\lim_{t \to t_0} z(t) = \lim_{t \to t_0} x(t) + i \lim_{t \to t_0} y(t)\,,$$
$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)\,,$$
$$\int_a^b z(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + i \int_a^b y(t)\,dt\,.$$

Вместе с тем, комплексная плоскость $\mathbb{C}$ является метрическим пространством, функция расстояния d на котором определена модулем разности комплексных чисел

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$$

и операция предельного перехода может быть описана на языке «ε-δ» формально так же, как и в вещественном случае (с заменой слов «абсолютная величина» словом «модуль»). Так, например, критерий Коши существования конечного предела последовательности z_n будет записываться так: *последовательность z_n имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она фундаментальна, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad n, m \geqslant N \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon\,.$$

В тригонометрической теории (комплексных) рядов Фурье исключительную роль играет комплексная экспонента $\exp(it) \equiv e^{it}$. Эта функция может быть определена любым из следующих эквивалентных способов

$$e^{it} = \cos t + i \sin t\,,$$
$$e^{it} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + i\frac{t}{n}\right)^n,$$
$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}\,.$$

Отметим, что это периодическая функция с периодом 2π и

$$|e^{it}| = 1 \quad (t \in \mathbb{R})\,.$$

Когда аргумент t пробегает отрезок $[0, 2\pi)$, точка e^{it} пробегает на комплексной плоскости единичную окружность в направлении против часовой стрелки. Как и вещественная экспонента комплексная обладает свойством

$$e^{is} e^{it} = e^{i(s+t)}\,.$$

Заметим, что e^{int}, $n \in \mathbb{Z}$, также периодична с наименьшим периодом $\frac{2\pi}{|n|}$ $(n \neq 0)$, так что число 2π является общим периодом для все этих экспонент. Если $n \neq 0$, то e^{int} является производной функции $\dfrac{e^{int}}{in}$, которая также имеет период 2π, так что

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{int}\,dt = \begin{cases} 2\pi\,, & n = 0 \\ 0\,, & n = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases} \tag{1.2}$$

Напомним, также, формулы Эйлера

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\,, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\,.$$

Отметим, наконец, одно важное свойство периодических функций.

Лемма 1.1 (об интегрировании периодических функций). *Пусть $f(t)$ — непрерывная комплекснозначная периодическая функция с периодом T. Тогда $\forall a \in \mathbb{R}$*

$$\int\limits_a^{a+T} f(t)\,dt = \int\limits_0^T f(t)\,dt\,.$$

Доказательство. В силу аддитивности интеграла

$$\begin{aligned} \int\limits_a^{a+T} f(t)\,dt &= \int\limits_a^0 f(t)\,dt + \int\limits_0^T f(t)\,dt + \int\limits_T^{a+T} f(t)\,dt \\ &= \int\limits_a^0 f(t)\,dt + \int\limits_0^T f(t)\,dt + \int\limits_0^a f(s+T)\,ds \\ &= \int\limits_a^0 f(t)\,dt + \int\limits_0^T f(t)\,dt + \int\limits_0^a f(s)\,ds = \int\limits_0^T f(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

□

1.3 Определения

Определение 1.2 (Вещественная форма). Пусть a_n и b_n — две последовательности комплексных чисел. Тригонометрическим рядом называется ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Заметим, что при $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\,,$$

где

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}\,, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}\,.$$

И наоборот,

$$c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = c_n(\cos nx + i \sin nx) + c_{-n}(\cos nx - i \sin nx) = a_n \cos nx + b_n \sin nx\,,$$

где

$$a_n = c_n + c_{-n}\,, \quad b_n = i(c_n - c_{-n})\,.$$

Отсюда

Определение 1.3 (Комплексная форма). Пусть $c_n\,, n \in \mathbb{Z}$ — последовательность комплексных чисел. Тригонометрическим рядом называется символ

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Переход от вещественной формы к комплексной и наоборот осуществляется пересчетом коэффициентов

$$\begin{gathered} c_0 = a_0 \\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}\,, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}\,, \quad n \in \mathbb{N} \\ a_n = c_n + c_{-n}\,, \quad b_n = i(c_n - c_{-n})\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{gathered} \tag{1.3}$$

1.4 Случай равномерной сходимости

Теорема 1.4. *Пусть тригонометрический ряд удовлетворяет любому из следующих эквивалентных условий*

- *ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ *сходятся,*
- *ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n|$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_{-n}|$ *сходятся.*

Тогда тригонометрический ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$ *к непрерывной периодической с периодом* 2π *функции* f*, причем*

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Доказательство. Эквивалентность условий теоремы следует из неравенств

$$\begin{gathered} |a_n| \leqslant |c_n| + |c_{-n}|\,, \quad |b_n| \leqslant |c_n| + |c_{-n}|\,, \\ |c_n| \leqslant \frac{|a_n| + |b_n|}{2}\,, \quad |c_{-n}| \leqslant \frac{|a_n| + |b_n|}{2}\,. \end{gathered}$$

Далее, в силу

$$|c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}| \leqslant |c_n| + |c_{-n}|\,,$$

тригонометрический ряд имеет мажорантный сходящийся ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1}(|c_n| + |c_{-n}|)$, не зависящий от x. В силу признака Вейерштрасса, тригонометрический ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Поскольку члены тригонометрического ряда являются непрерывными периодическими функциями с периодом 2π, таковой будет и сумма ряда (в силу равномерной сходимости). Обозначим сумму ряда через $f(x)$:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

В силу неравенства

$$|(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})e^{-ikx}| \leqslant |c_n| + |c_{-n}|\,,$$

ряд

$$c_0 e^{-ikx} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) e^{-ikx}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

равномерно сходится к функции $f(x)e^{-ikx}$ и этот ряд можно почленно интегрировать. В силу (1.2) все члены ряда при интегрировании по интервалу $[0, 2\pi]$ обращаются в ноль, за исключением слагаемого с номером $n = k$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x}\, dx = c_k\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Соотношения для a_k и b_k вытекают из (1.3) и формул Эйлера.

□

Замечание 1.5. Формулы для коэффициентов a_n, b_n, c_n в силу леммы 1.1 могут быть переписаны, например, в виде

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

2 Тригонометрические ряды Фурье

2.1 Постановка вопроса

Посмотрим на проблему с другой стороны. Пусть теперь $f(x)$ — произвольная непрерывная периодическая с периодом 2π функция. Определим по ней последовательности чисел a_n, b_n, c_n согласно формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \tag{2.1}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx\,, \tag{2.2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.3}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.4}$$

см., также, замечание 1.5. Эти коэффициенты называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$. Формулы перехода между комплексными и вещественными коэффициентами определяется равенствами

$$c_0 = \frac{a_0}{2}\,, \tag{2.5}$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}\,, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.6}$$

$$a_n = c_n + c_{-n}\,, \quad b_n = i(c_n - c_{-n})\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.7}$$

(Отметим отличие от предыдущей нормировки при $n = 0$).

Сопоставим функции $f(x)$ тригонометрический ряд

$$
\begin{aligned}
f(x) \sim & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \\
= & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}
$$

Он называется *[тригонометрическим] рядом Фурье* функции f.

Что можно сказать о сходимости этого ряда? Если ряд сходится, что собой представляет его сумма, какое отношение она имеет к функции f? Что будет происходить с всеми этими соотношениями, если функцию f выбирать более гладкой или, наоборот, менее гладкой?

Таковы, в общих чертах, вопросы, которые нас будут интересовать в дальнейшем. Однако для ответов на поставленные вопросы полезно сделать маленький

2.2 Экскурс в теорию унитраных пространств

Напомним, что унитарное пространство это комплексное векторное пространство V со *скалярным произведением* $\langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\rangle$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$. Напомним свойства комплексного скалярного произведения:

1. $\langle \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}|\boldsymbol{c}\rangle = \lambda\langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{c}\rangle + \mu\langle \boldsymbol{b}|\boldsymbol{c}\rangle\,,$
2. $\langle \boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}\rangle = \overline{\langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\rangle}\,,$
3. $\langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}\rangle \geqslant 0\,,$
4. $\langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}\rangle = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}\,.$

Заметим, что

$$\langle \boldsymbol{a}|\lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c}\rangle = \overline{\lambda}\langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\rangle + \overline{\mu}\langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{c}\rangle\,.$$

Неотрицательное число

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}\rangle}$$

называется [эрмитовой] *нормой* вектора $\boldsymbol{a}$. Как и всякая норма эрмитова удовлетворяет свойствам

1. $\|\lambda\boldsymbol{a}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{a}\|\,,$
2. $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leqslant \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|\,,$
3. $\|\boldsymbol{a}\| = 0 \iff \boldsymbol{a} = 0\,.$

Теорема 2.1 (Неравенство Шварца).

$$|\langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\rangle| \leqslant \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\|\,.$$

Доказательство. Положим $\theta = -\arg\langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\rangle$, так что $\langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\rangle = |\langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\rangle|e^{-i\theta}$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\langle xe^{i\theta}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|xe^{i\theta}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\rangle = x^2\langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}\rangle + xe^{i\theta}\langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\rangle + xe^{-i\theta}\langle \boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}\rangle + \langle \boldsymbol{b}|\boldsymbol{b}\rangle \\
= x^2\|\boldsymbol{a}\|^2 + 2x|\langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\rangle| + \|\boldsymbol{b}\|^2 \geqslant 0\,,
\end{aligned}
$$

откуда (условие неотрицательности дискриминанта) и вытекает неравенство Шварца. □

Функция

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|$$

имеет смысл [эрмитова] расстояния между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff \langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\rangle = 0\,.$$

Последовательность векторов $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots$ называется *ортонормированной*, если эти векторы взаимно ортогональны и имеют длину равную единице:

$$\langle \boldsymbol{e_m}|\boldsymbol{e_n}\rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 0\,, & m \neq n\,, \\ 1\,, & m = n\,. \end{cases}$$

Для произвольного вектора $\boldsymbol{a} \in V$ числа

$$c_n(\boldsymbol{a}) = \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{e_n} \rangle$$

называются *коэффициентами Фурье* вектора $\boldsymbol{a}$ относительно ортонормированной системы $(\boldsymbol{e_n})$.

Теорема 2.2 (О проекции). *Пусть $\boldsymbol{a}$ — произвольный вектор из V. Положим*

$$\boldsymbol{b} = \sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{e_k}\,,$$

где $c_k = c_k(\boldsymbol{a})$ — коэффициенты Фурье вектора $\boldsymbol{a}$ относительно ортонормированной системы $(\boldsymbol{e_k})$. Тогда

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{b}\,.$$

Доказательство. Заметим, что при $k \leqslant n$

$$c_k(\boldsymbol{b}) = c_k(\boldsymbol{a})\,,$$

так что при $k \leqslant n$

$$\langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} | \boldsymbol{e_k} \rangle = \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{e_k} \rangle - \langle \boldsymbol{b} | \boldsymbol{e_k} \rangle = c_k - c_k = 0\,.$$

Тогда

$$\langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} | \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} | \sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{e_k} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{c_k} \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} | \boldsymbol{e_k} \rangle = 0\,.$$

□

Напомним теорему Пифагора

Теорема 2.3 (Пифагор).

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2\,.$$

Доказательство.

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 = \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} | \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{a} \rangle - \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{b} \rangle - \langle \boldsymbol{b} | \boldsymbol{a} \rangle + \langle \boldsymbol{b} | \boldsymbol{b} \rangle = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2\,.$$

□

Следствие 2.4. *Если $(\boldsymbol{e_k})$ — ортонормированная система, то*

$$\|\sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{e_k}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\,.$$

Доказательство. Достаточно $(n-1)$ раз применить теорему Пифагора и учесть, что $\|c_k \boldsymbol{e_k}\| = |c_k| \|\boldsymbol{e_k}\| = |c_k|$. □

Теорема 2.5 (Неравенство Бесселя). *Пусть $c_k = c_k(\boldsymbol{a})$ — последовательность коэффициентов Фурье произвольного вектора $\boldsymbol{a}$ относительно некоторой ортонормированной системы векторов $(\boldsymbol{e_k})$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \|\boldsymbol{a}\|^2\,.$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{b} = \sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{e_k}$. Тогда в силу $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}$ и теорем 2.2 и 2.3

$$\|\boldsymbol{a}\|^2 = \|a - b\|^2 + \|b\|^2\,,$$

Откуда $\|\boldsymbol{b}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{a}\|^2$, или что то же

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leqslant \|\boldsymbol{a}\|^2\,.$$

Последнее неравенство в силу произвольности n (и положительности членов ряда) приводит к утверждению теоремы. □

Следствие 2.6 (лемма Римана-Лебега). *Пусть* $\boldsymbol{a}$ *— произвольный вектор и* $c_n(\boldsymbol{a})$ *— соответствующие коэффициенты Фурье относительно произвольной ортонормированной системы* $(\boldsymbol{e_n})$. *Тогда*

$$c_n(\boldsymbol{a}) \underset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

Доказательство. Применить необходимый признак сходимости ряда. □

Следующая теорема устанавливает основное геометрическое свойство коэффициентов Фурье.

Теорема 2.7 (Минимизирующее свойство коэффициентов Фурье). *Пусть* $\boldsymbol{e_1},\dots \boldsymbol{e_n}$ *— произвольная ортонормированная система и* $\boldsymbol{a}$ *— произвольный вектор из* V. *Функция*

$$\Delta(\lambda_1,\dots\lambda_n)=\|\boldsymbol{a}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\boldsymbol{e_k}\|,\quad \lambda_1,\dots\lambda_n\in\mathbb{C}\,,$$

достигает своего наименьшего значения при условии

$$\lambda_1=c_1(\boldsymbol{a})\,,\dots\lambda_n=c_n(\boldsymbol{a})\,,$$

т.е. на коэффициентах Фурье вектора $\boldsymbol{a}$ *относительно данной ортонормированной системы.*

Доказательство. Положим $c_k=c_k(\boldsymbol{a})\,,k=1,\dots n$. Тогда

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\boldsymbol{e_k}\|^2 &= \langle\boldsymbol{a}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\boldsymbol{e_k}|\boldsymbol{a}-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\boldsymbol{e_j}\rangle\\
&=\langle\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}\rangle-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\langle\boldsymbol{e_k}|\boldsymbol{a}\rangle-\sum_{j=1}^{n}\overline{\lambda_j}\langle\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e_j}\rangle+\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_k\overline{\lambda_j}\langle\boldsymbol{e_k}|\boldsymbol{e_j}\rangle\\
&=\|\boldsymbol{a}\|^2-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\overline{c_k}-\sum_{j=1}^{n}\overline{\lambda_j}c_j+\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_k\overline{\lambda_j}\delta_{kj}\\
&=\|\boldsymbol{a}\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2+\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\overline{c_k}-\sum_{k=1}^{n}\overline{\lambda_k}c_k+\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2\\
&=\|\boldsymbol{a}\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2+\sum_{k=1}^{n}|c_k-\lambda_k|^2
\end{aligned}$$

и, очевидно, наименьшее значение получается при выборе $\lambda_k=c_k\,,k=1,\dots n$:

$$\min_{\lambda_1,\dots\lambda_n}\|\boldsymbol{a}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\boldsymbol{e_k}\|^2=\|\boldsymbol{a}\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2\,. \tag{2.8}$$

Но наименьшее значение величины Δ и наименьшее значение величины Δ^2 достигаются одновременно.

□

Заметим, что из проведенной в ходе доказательства выкладки снова легко вывести неравенство Бесселя, см. (2.8). Геометрический смысл теоремы вполне прозрачен, см. рис. 1. Рассмотренную задачу можно охарактеризовать как задачу об аппроксимации вектора $\boldsymbol{a}$ линейными комбинациями фиксированной ортонормированной системы векторов $\boldsymbol{e_1},\dots \boldsymbol{e_n}$:

$$\boldsymbol{a}\approx\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\boldsymbol{e_k}\,.$$

Наилучшая (в смысле эрмитовой нормы) аппроксимация получается на коэффициентах Фурье. Заметим, также, что расширение ортонормированной системы (т.е. увеличение n) может привести только к улучшению аппроксимации (т.е. уменьшению Δ):

$$\Delta(c_1,\dots c_n,c_{n+1})\leqslant\Delta(c_1,\dots c_n,0)=\Delta(c_1,\dots c_n)\,. \tag{2.9}$$

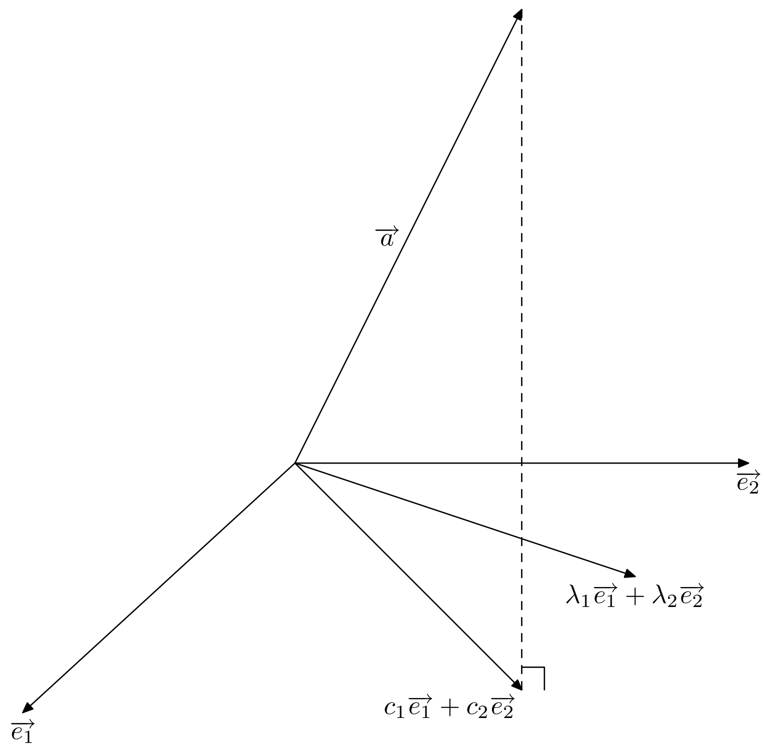

Рис. 1: Перпендикуляр — наименьшее расстояние до подпространства

2.3 Ряды Фурье на пространстве непрерывных $2\pi-$периодических функций

Очевидно, пространство [комплекснозначных] непрерывных периодических с периодом 2π функций является комплексным векторным пространством: такие функции можно складывать и умножать на комплексные числа не выходя за рамки этого множества функций. Превратим это пространство в унитарное, введя в нем скалярное произведение

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx\,. \tag{2.10}$$

Свойства 1)–3) скалярного произведения очевидны. Четвертое свойство является следствием непрерывности рассматриваемых функций. Действительно, если

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = 0\,,$$

то $f(x) \equiv 0$ именно благодаря своей непрерывности.

для разрывных функций такого заключения сделать уже нельзя

Обозначим это унитарное пространство [комплекснозначных] непрерывных периодических с периодом 2π функций через $C_{2\pi}$. Через $e_n\,, n \in \mathbb{Z}$, будем обозначать функции $x \mapsto e^{inx}$. Покажем, что функции e_n образуют ортонормированную систему в $C_{2\pi}$.

$$\langle e_n|e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\,dx = \delta_{nm}\,,$$

см. (1.2).

Если f — произвольная непрерывная периодическая с периодом 2π функция, то ее коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы (e_n) равны

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx\,. \tag{2.11}$$

Заметим, что в силу леммы Римана-Лебега

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{inx}\,dx \underset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

Неравенство Бесселя принимает вид

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx\,,$$

где $c_n = c_n(f)$ и

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx\,,$$

Далее мы покажем, что для $f \in C_{2\pi}$ неравенство Бесселя превращается в равенство

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx$$

и называется *равенством Парсеваля* или *уравнением замкнутости*.

Функции вида

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e^{ikx}$$

называются тригонометрическими полиномами. Среди всех тригонометрических полиномов степени не выше n наилучшей аппроксимацией (в смысле среднеквадратичной нормы) функции $f(x)$ является частичная сумма ряда Фурье этой функции

$$f(x) \approx \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}\,.$$

2.4 Свертка периодических функций

Определение 2.8. Пусть f и g — произвольные непрерывные периодические с периодом 2π функции. Их *сверткой* $f * g$ называется функция

$$f * g\,(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\,dt\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Очевидно, свертка $f * g$ — периодическая с периодом 2π и непрерывная функция:

$$f * g\,(x+2\pi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)g(x+2\pi-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\,dt = f * g\,(x)\,,$$

поскольку g периодична. Чтобы показать непрерывность, заметим, что g — равномерно непрерывна, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0: \quad |x_2 - x_1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x_2) - g(x_1)| < \varepsilon\,.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такое δ по числу $\frac{\varepsilon}{M}$, где $M = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} |f(t)|$. Тогда при $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned}|f * g\,(x) - f * g\,(x_0)| &= \Big|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)[g(x-t) - g(x_0-t)]\,dt\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(t)||g(x-t) - g(x_0-t)|\,dt \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{M}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Теорема 2.9. *Пусть f — периодическая с периодом 2π и непрерывная функция. Если функция g является непрерывно дифференцируемой периодической с периодом 2π, то свертка $f * g$ также является непрерывно дифференцируемой периодической с периодом 2π и*

$$(f * g)'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g'(x-t)\, dt\,.$$

Доказательство. Следствие теоремы о дифференцировании интеграла по параметру: в данном случае частная производная подынтегральной функции

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(t)g(x-t)] = f(t)g'(x-t)$$

является непрерывной функцией обеих переменных. □

Следствие 2.10. *Если g — k раз непрерывно дифференцируема, то свертка $f * g$ (где f — непрерывна) — тоже k раз непрерывно дифференцируема и*

$$(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}\,.$$

Интересны также следующие свойства свертки.

Теорема 2.11. *Свертка функций является билинейной, коммутативной и ассоциативной операцией, т.е.*

1. $(\lambda f + \mu g) * h = \lambda f * h + \mu g * h\,,$
2. $f * g = g * f\,,$
3. $f * (g * h) = (f * g) * h\,.$

Доказательство. Линейность по первому аргументу очевидна в силу линейности интеграла. Линейность по второму аргументу может быть установлена аналогично, но она также является следствием коммутативности. Докажем коммутативность.

$$\begin{aligned} f * g\,(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(x-t)\, dt = [x - t = u,\ dt = -du] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_x^{x-2\pi} f(x-u) g(u)\, du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-2\pi}^{x} g(u) f(x-u)\, du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(u) f(x-u)\, du = g * f\,(x)\,. \end{aligned}$$

Докажем, теперь, ассоциативность.

$$
\begin{aligned}
(f*g)*h\,(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f*g\,(t)h(x-t)\,dt \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(s)g(t-s)h(x-t)\,dsdt \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi} ds\, f(s) \int\limits_{-s}^{2\pi-s} g(u)h(x-s-u)\,du \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi} ds\, f(s) \int\limits_0^{2\pi} g(u)h(x-s-u)\,du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(s)g*h\,(x-s)\,ds = f*(g*h)\,(x)\,.
\end{aligned}
$$

□

Важность для приложений понятия свертки определяется следующим свойством, которое, также, объясняет свойства, описанные в предыдущей теореме.

Теорема 2.12. *Пусть f и g — произвольные непрерывные периодические с периодом 2π функции. Тогда*

$$c_n(f*g) = c_n(f)\cdot c_n(g)\,,$$

где c_n — коэффициент Фурье соответствующей функции относительно ортонормированной системы экспонент e_n.

Доказательство. Заметим, сначала, что

$$f*e_n\,(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{in(x-t)}\,dt = e^{inx}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt = c_n(f)e_n(x)\,,$$

так что

$$f*e_n = c_n(f)e_n\,. \tag{2.12}$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
c_n(f*g) = (f*g)*e_n\,(0) = f*(g*e_n)\,(0) = f*[c_n(g)e_n]\,(0) \\
= c_n(g)f*e_n\,(0) = c_n(g)c_n(f)\,.
\end{aligned}
$$

□

В приложениях отображение $f\mapsto f*g$ описывает прохождение сигнала f через фильтр g. В результате амплитуда $c_n(f)$ n-ой гармоники сигнала умножается на $c_n(g)$. Заметим, что в силу теоремы Римана-Лебега не может существовать идеального фильтра, не искажающего сигнал: $\nexists g:\quad f*g=f$.

Но вернемся к теореме 2.9. Она позволяет установить одно важное для дальнейшего свойство.

Обозначим через $C^1_{2\pi}$ множество непрерывно дифференцируемых периодических с периодом 2π функций. Это подмножество в $C_{2\pi}$.

Теорема 2.13 (Плотность $C^1_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$). *Множество функций $C^1_{2\pi}$ плотно в $C_{2\pi}$, т.е. $\forall f\in C_{2\pi}$ и $\forall\varepsilon>0\quad\exists g\in C^1_{2\pi}$:*

$$\|f-g\|_\infty \overset{def}{=} \max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|f(x)-g(x)| < \varepsilon\,.$$

Доказательство. Функция f — равномерно непрерывна и значит для

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0:\quad |x_2-x_1|<\delta\quad\Rightarrow\quad |f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon\,.$$

Пусть $\varepsilon>0$ фиксирован и δ найден. Возьмем произвольно функцию $\omega\in C^1_{2\pi}$, удовлетворяющую следующим условиям:

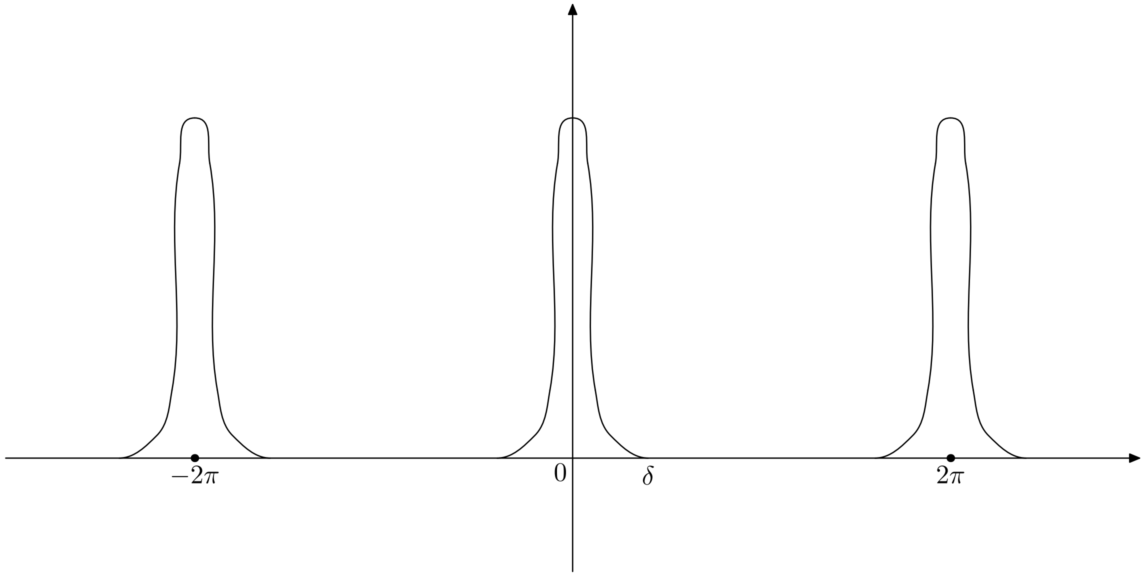

Рис. 2: Сглаживающая функция

1. $\omega(x) \geqslant 0\,,$
2. ω — четная функция,
3. $\omega(x) = 0$ при $x \in [\delta, \pi]\,,$
4. $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \omega(x)\,dx = 1\,,$

см. рис. 2. Подобрать такую функцию нетрудно. Например, можно взять функцию $k(\cos\frac{\pi x}{\delta} + 1)$, ограничить ее сначала на интервал $(-\delta, \delta)$, затем продолжить нулем на оставшуюся часть интервала $[-\pi, \pi]$ и, далее, продолжить периодически на всю ось. Константу k выбирать так, чтобы выполнялось условие (3).

Мы покажем (со ссылкой на теорему 2.9), что свертка $f * \omega$ годится на роль функции g. Заметим, прежде всего, что в силу четности и периодичности,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \omega(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \omega(-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \omega(x-t)\,dt = 1\,.$$

Тогда,

$$\begin{aligned}
|f(x) - g(x)| &= \left| f(x)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \omega(x-t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\omega(x-t)\,dt \right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x) - f(t)|\omega(x-t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-t|\leqslant\delta} |f(x) - f(t)|\omega(x-t)\,dt \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{|x-t|\leqslant\delta} \omega(x-t)\,dt = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

$\square$

2.5 Сходимость рядов Фурье

Далее нам понадобится чуть более общий вариант леммы Римана-Лебега.

Теорема 2.14 (Лемма Римана-Лебега). *Если f — непрерывная функция на $[a,b]$, то*

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx \underset{\lambda\to\infty}{\to} 0\,.$$

Доказательство 1. Рассмотрим сначала непрерывно дифференцируемую на $[a,b]$ функцию g. Тогда

$$\int_a^b g(x)e^{i\lambda x}\,dx = \int_a^b g(x)d\frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda} = \frac{g(b)e^{i\lambda b}}{i\lambda} - \frac{g(a)e^{i\lambda a}}{i\lambda} - \frac{1}{i\lambda}\int_a^b g'(x)e^{i\lambda x}\,dx \underset{\lambda\to\infty}{\to} 0\,.$$

Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Функция f может быть равномерно аппроксимирована непрерывно дифференцируемой функцией g.

Например, можно использовать конструкцию типа $f*\omega$. Именно, продолжим f непрерывно на всю ось так, чтобы вне интервала $[a-1, b+1]$ она обращалась в ноль (например, можно соединить прямыми точки $(a, f(a))$ и $(a-1, 0)$ с одной стороны и точки $(b, f(b))$ и $(b+1, 0)$ с другой, а далее считать функцию f нулем. Такая продолженная функция f равномерно непрерывна и фиксировав произвольно $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta > 0$ такое, что $|x_2 - x_1| < \delta \quad\Rightarrow\quad |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$. Выберем далее функцию $\omega(x)$ так, чтобы она была положительной непрерывно дифференцируемой четной функцией равной нулю при $|x| > \delta$ и такой, чтобы $\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(x)\,dx = 1$. Разумеется, последний интеграл не является несобственным, в действительности интегрирование ведется только по интервалу $[-\delta, \delta]$. Составим далее свертку

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\omega(x-t)\,dt\,,$$

где под f понимается продолженная функция. Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\omega(-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\omega(x-t)\,dt = 1$$

и как и ранее (в периодическом случае) получаем оценку $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ для всех x, в частности, для исходной функции f, если $a \leqslant x \leqslant b$.

Выберем g так, чтобы $\|f-g\|_\infty = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x) - g(x) < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Пусть, далее, λ таково, что

$$\Big|\int_a^b g(x)e^{i\lambda x}\,dx\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Тогда

$$\Big|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx\Big| \leqslant \Big|\int_a^b (f(x)-g(x))e^{i\lambda x}\,dx\Big| + \Big|\int_a^b g(x)e^{i\lambda x}\,dx\Big|$$

$$\leqslant (b-a)\|f-g\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

□

Доказательство 2. Будем считать, что f продолжена непрерывно как константа за границы $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx = \int_{a+h}^{b+h} f(t-h)e^{i\lambda(t-h)}\,dt = e^{-i\lambda h}\int_{a+h}^{b+h} f(t-h)e^{i\lambda t}\,dt\,.$$

Выберем $h = \dfrac{\pi}{\lambda}$. Тогда

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx = -\int_{a+h}^{b+h} f(t-h)e^{i\lambda t}\,dt\,.$$

Прибавляя к обеим частям равенства интеграл $\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx$ и используя аддитивность интеграла, находим

$$2\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx = \int\limits_a^b [f(t)-f(t-h)]e^{i\lambda t}\,dt - \int\limits_{a+h}^{a} f(t-h)e^{i\lambda t}\,dt - \int\limits_b^{b+h} f(t-h)e^{i\lambda t}\,dt\,.$$

Первый интеграл справа мал при $\lambda\to\infty$ в связи с равномерной непрерывностью функции f. Малость двух остальных — тривиальна: они оцениваются через $M|h|$, где M — наибольшее значение модуля функции f на интервале. □

Теперь, чтобы сформулировать основную теорему о сходимости, нам потребуется провести одно предварительное вычисление.

Определение 2.15. *Ядром Дирихле* называется функция

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}\,.$$

Лемма 2.16. *Ядро Дирихле D_n является непрерывной периодической с периодом 2π четной функцией равной*

$$D_n(x) = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,,$$

причем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_n(x)\,dx = 1\,. \tag{2.13}$$

Доказательство.

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx}\sum_{j=0}^{2n}(e^{ix})^j = e^{-inx}\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}$$

$$= e^{-inx}\frac{e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{\frac{ix}{2}}}\cdot\frac{e^{-i\frac{2n+1}{2}x}-e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{-\frac{ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}}} = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,,$$

откуда вытекает, также, свойство четности. Равенство (2.13) вытекает из (1.2). □

Ядро Дирихле замечательно тем, что частичная сумма Фурье функции f является сверткой функции f с ядром Дирихле, как сразу следует из (2.12) и билинейности свертки

$$f*D_n = f*\sum_{k=-n}^{n} e_k = \sum_{k=-n}^{n} f*e_k = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k\,.$$

Теорема 2.17 (Дирихле). *Если функция f непрерывно дифференцируема и периодична с периодом 2π, то ряд Фурье сходится к функции f поточечно:*

$$f\in C^1_{2\pi} \quad\Rightarrow\quad f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}\,,\quad x\in\mathbb{R}\,,\quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx\,.$$

Доказательство.

$$f(x) - f*D_n\,(x) = f(x)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_n(x-t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[f(x)-f(t)]D_n(x-t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\cdot\frac{x-t}{\sin\frac{x-t}{2}}\cdot\sin\frac{(2n+1)(x-t)}{2}\,dt \underset{n\to+\infty}{\to} 0\,.$$

Последнее вытекает из леммы Римана-Лебега и непрерывности (по t) функции

$$\frac{f(x)-f(t)}{x-t} = \int\limits_0^1 f'(t+(x-t)\theta)\,d\theta$$

и

$$\frac{x-t}{\sin\frac{x-t}{2}}$$

(элементарно).

$\square$

Теорема 2.18 (Дирихле). *Если функция f непрерывно дифференцируема и периодична с периодом 2π, то ряд Фурье сходится к функции f равномерно.*

Доказательство. Здесь все дело в скорости убывания коэффициентов Фурье. Пусть $f \in C^1_{2\pi}$. Тогда

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,d\frac{e^{-inx}}{-in} = \frac{1}{2\pi in}\int\limits_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx = \frac{c_n(f')}{in}\,.$$

Но

$$|c_n(f)| \leqslant \left|\frac{c_n(f')}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2} + |c_n(f')|^2\Big)\,.$$

В силу неравенства Бесселя ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f')|^2$ сходится. Также сходится и ряд $\sum\limits_{n\neq 0}\frac{1}{n^2}$. И тогда заключаем, что сходится ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|$. В силу теоремы 1.4 ряд Фурье функции f сходится к своей сумме равномерно. Но в силу предыдущей теоремы его суммой является функция $f(x)$. $\square$

Теорема 2.19 (Основная). *Если функция f непрерывна и периодична с периодом 2π, то ряд Фурье сходится к функции f в среднеквадратичном, т.е.*

$$\|f - \sum_{k=-n}^{n} c_n e_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0\,,$$

где

$$e_n(x) = e^{inx}\,,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx\,,$$

$$\|f\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx}\,.$$

Доказательство. Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Аппроксимируем функцию f равномерно функцией $g \in C^1_{2\pi}$ так, чтобы $\|f-g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. В силу теоремы Дирихле если n достаточно велико $\|g - \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(g)e_k\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. В силу этих оценок и минимизирующего свойства коэффициентов Фурье, находим

$$\|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k\| \leqslant \|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e_k\| \leqslant \|f-g\| + \|g - \sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e_k\|$$
$$\leqslant \|f-g\|_\infty + \|g - \sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e_k\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

$\square$

Замечание 2.20. Этот же результат может быть получен как следствие плотности тригонометрических полиномов в $C_{2\pi}$ (теорема Стоуна – Вейерштрасса). Аналогичный конструктивный подход основан на теореме Фейера, где тригонометрический полином, являющийся равномерным приближением данной непрерывной функции, строится явно (как среднее арифметическое частичных сумм Фурье).

Следствие 2.21 (Равенство Парсеваля). *Если функция f непрерывна и периодична с периодом 2π, то*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx\,,$$

где $c_n = c_n(f)$.

Доказательство. Воспользуемся (2.8):

$$\|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2\,.$$

По доказанному в теореме левая часть стремится к нулю. Значит, стремится к нулю и правая, что ведет к равенству Парсеваля. □

Вещественная форма равенства Парсеваля имеет вид

$$\frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx\,,$$

так как из формул (2.6) следует

$$|c_n|^2 + |c_{-n}|^2 = \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

2.6 Понятие о полноте и замкнутости ортонормированной системы

Вернемся к абстрактным обозначениям. Пусть $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots$ — ортонормированная система в унитарном пространстве V. Она называется *полной*, если

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{e_n} \quad (\forall n) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}\,.$$

(Полнота понимается в том смысле, что систему нельзя расширить, добавляя к ней новые векторы). Она называется *замкнутой* , если

$$\forall \boldsymbol{a} \in V: \quad \|\boldsymbol{a}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(\boldsymbol{a})|^2\,,$$

т.е. для произвольного вектора выполнено равенство Парсеваля (уравнение замкнутости). Как мы знаем, замкнутость означает возможность аппроксимировать (в смысле эрмитовой нормы) произвольный вектор $\boldsymbol{a}$ частичными суммами Фурье с любой степенью точности, т.е.

$$\forall \boldsymbol{a} \in V: \quad \|\boldsymbol{a} - \sum_{k=1}^{n} c_k(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e_k}\| \underset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

Легко видеть, что полнота ортонормированной системы является следствием ее замкнутости. Действительно, если система полна, то коэффициенты Фурье вектора, ортогонального всем векторам ортонормированной системы, равны нулю. В силу уравнения замкнутости норма такого вектора равна нулю и, следовательно, сам вектор равен нулю.

Можно показать (методами теории гильбертовых пространств), что в действительности понятия замкнутости и полноты равносильны.

В предыдущем пункте было, таким образом, доказано, что система экспонент $e_n(x) = e^{inx}$ $(n \in \mathbb{Z})$ является полной и замкнутой системой в унитарном пространстве непрерывных периодических с периодом 2π функций.

2.7 Замечания по поводу сходимости

Следует заметить, что ряд Фурье просто непрерывной (периодической) функции, не обладающей каким-либо дополнительным свойством гладкости, может расходится в бесконечном (даже — несчетном) множестве точек, см. [1]. Если функцию еще ухудшить, но так, что она останется интегрируемой по Лебегу, ряд Фурье вообще может расходится всюду, см. [5]. Эти примеры говорят о том, что вопрос о поточечной сходимости рядов Фурье является неадекватным. Тем не менее отметим, что если функция непрерывна и имеет на периоде ограниченную вариацию (то есть является разностью двух монотонных функций), то поточечная сходимость имеет место.

Вместе с тем, если функция f интегрируема и интеграл

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx$$

существует как несобственный с конечным числом особенностей, то ряд Фурье функции f сходится к ней в среднеквадратичном. Принципиальным здесь является тот факт, что любую такую функцию с любой степенью точности можно в среднеквадратичном аппроксимировать непрерывной функцией. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано и g — непрерывная периодическая с периодом 2π функция, являющаяся аппроксимацией функции f в среднеквадратичном, так что $\|f-g\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем достаточно длинный отрезок ряда Фурье функции g так, чтобы $\|g - \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(g)e_k\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k\| \leqslant \|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e_k\| \leqslant \|f-g\| + \|g - \sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e_k\| \leqslant \varepsilon\,.$$

Может все таки вызвать некоторый интерес следующий вопрос. Пусть функция гладкая, за исключением нескольких точек (на периоде), где она имеет скачки. Как ведет себя ряд Фурье в точках разрыва? (В среднеквадратичном ряд, конечно, сходится). Имеет место следующая теорема

Теорема 2.22 (Дирихле). *Пусть функция f кусочно непрерывно дифференцируема и периодична с периодом 2π. Тогда ряд Фурье при $\forall x$ сходится к*

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\,,$$

т.е. в точке непрерывности ряд Фурье сходится к значению функции, а в точке разрыва — к полусумме предельных значений.

Последний факт, устанавливаемый этой теоремой носит название *явления Гиббса*, см. рис. 3.

Напомним, что кусочная непрерывность 2π-периодической функции означает, что на периоде функция имеет лишь конечное число разрывов первого рода (скачков). Кусочная непрерывная дифференцируемость будет, таким образом, означать, что производная функции имеет на периоде не более чем конечное число скачков (при этом непрерывность самой функции, вообще говоря, не предполагается и при необходимости должна оговариваться отдельно).

2.7.1 Пример.

Рассмотрим функцию f, заданную на интервале $(0, 2\pi)$ равенством $f(x) = x$ и далее продолженную периодически на всю ось. Эта функция кусочно непрерывно дифференцируема. Именно, в точках $x = 2\pi n\,, \quad n \in \mathbb{Z}$ она имеет разрывы-скачки, в остальных точках она бесконечно дифференцируема. Как мы уже знаем ряд Фурье будет сходится к этой функции в каждой точке $x \neq 2\pi n\,, \quad n \in \mathbb{Z}$ (разумеется, никакой равномерной сходимости при этом нет: функция разрывна). В точках же $x = 2\pi n\,,\ n \in \mathbb{Z}$, будет происходить явление Гиббса, т.е. ряд Фурье должен сходиться в этих точках к значению π, см. рис. 3 Действительно,

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \pi\,,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} xe^{-inx}\,dx = -\frac{1}{in}\,, \quad n \neq 0\,,$$

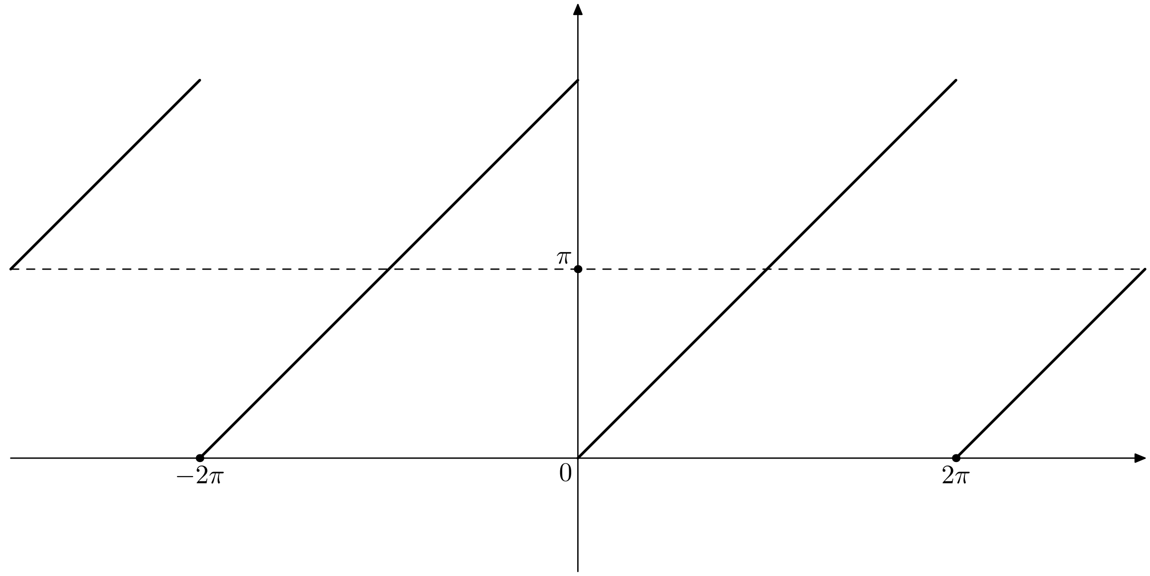

Рис. 3: Пример с явлением Гиббса

откуда

$$f(x) = \pi - \sum_{n\neq 0} \frac{e^{inx}}{in} = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\,, \quad x \neq 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}\,.$$

Заметим, что

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{4\pi^2}{3}\,.$$

Равенство Парсеваля имеет вид

$$\pi^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4\pi^2}{3}\,,$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

2.8 Интегрирование и дифференцирование рядов Фурье

Вопрос об интегрировании рядов Фурье удобно начать с некоторого обобщения равенства Парсеваля.

Теорема 2.23. *Пусть $f, g \in C_{2\pi}$. Тогда*

$$\langle f|g\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)} \equiv c_0(f)\overline{c_0(g)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n(f)\overline{c_n(g)} + c_{-n}(f)\overline{c_{-n}(g)}\right],$$

где

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx\,.$$

Доказательство. Теорема вытекает из уравнения замкнутости. Действительно, пусть

$$s_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k\,,$$

т.е. частичная сумма ряда Фурье функции f. Тогда $\|f - s_n\| \to 0$ при $n \to +\infty$. Но

$$\langle s_n|g\rangle = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\overline{c_k(g)}$$

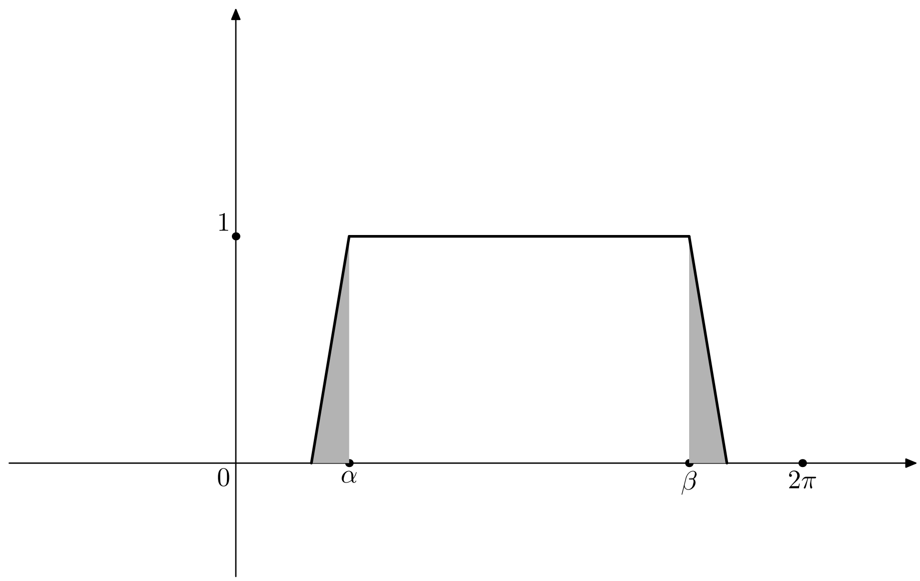

Рис. 4: Сглаживание разрывов

и в силу неравенства Шварца

$$|\langle f|g\rangle - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\overline{c_k(g)}| = |\langle f - s_n|g\rangle| \leqslant \|f - s_n\| \cdot \|g\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0\,.$$

□

Теорема остается верной для значительно более широкого класса функций f и g, лишь бы для них выполнялись условия замкнутости (равенства Парсеваля), см. п. 2.7. Для наших целей достаточно того, что теорема остается верной для периодической функции g, определенной при $x \in [0, 2\pi]$ равенствами

$$g(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{при} \quad x \in (\alpha, \beta) \subset [0, 2\pi]\,, \\ 0\,, & \text{при} \quad x \notin (\alpha, \beta)\,. \end{cases}$$

Такая функция элементарно аппроксимируется в среднеквадратичном непрерывной функцией, см. рис.4. Например, отличие в среднеквадратичном функции g от аппроксимации на рис.4 не превосходит $\sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}$, где S — суммарная площадь заштрихованных треугольников. Эта величина может быть сделана сколь угодно малой и тогда, как было показано в п. 2.7, ряд Фурье функции g сходится к ней в среднеквадратичном, а, следовательно, теорема 2.23 остается верной и для такой функции g.

Запишем утверждение теоремы 2.23 для произвольной непрерывной периодической с периодом 2π функции f и функции g, определенной выше. Тогда ввиду

$$\overline{c_n(g)} = \frac{1}{2\pi}\overline{\int_\alpha^\beta e^{-inx}\,dx} = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta e^{inx}\,dx\,,$$

находим

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\int_\alpha^\beta e^{inx}\,dx\,,$$

но это в точности означает возможность интегрировать почленно ряд Фурье функции f. Заметим, что исходный ряд Фурье не сходился (вообще говоря) равномерно и теорема об интегрировании из общей теории рядов не применима. Заметим, также, что проинтегрированный ряд сходится равномерно относительно α и β, поскольку имеет сходящийся мажорантный ряд

$$2\pi|c_0(f)| + 2\sum_{n\neq 0}\frac{|c_n(f)|}{n}\,.$$

Нами доказана

Теорема 2.24. *Ряд Фурье непрерывной периодической с периодом* 2π *функции можно интегрировать почленно, причем проинтегрированный ряд сходится равномерно относительно пределов интегрирования (считая, что последние изменяются на интервале длиной в период).*

Перейдем теперь к вопросу о дифференцировании. Как было показано в ходе доказательства теоремы Дирихле о равномерной сходимости (с помощью формулы интегрирования по частям), если f — непрерывно дифференцируемая периодическая с периодом 2π функция, то

$$c_n(f') = in \cdot c_n(f)\,, \tag{2.14}$$

что соответствует возможности почленного дифференцирования ряда Фурье такой функции f с получением ряда Фурье (сходящемся, вообще говоря, лишь в среднеквадратичном) ее производной. В силу леммы Римана-Лебега из этого соотношения вытекает оценка скорости убывания при $n \to \infty$ коэффициентов Фурье функции класса $C^1_{2\pi}$ (т.е. непрерывно дифференцируемой, периодической):

$$c_n(f) = o\Big(\frac{1}{n}\Big)\,,$$

т.е. быстрее чем $\frac{1}{n}$. Если функция f k раз непрерывно дифференцируема, то применяя k раз формулу (2.14) получим

$$c_n(f^{(k)}) = (in)^k \cdot c_n(f)\,,$$

откуда вытекает оценка

$$c_n(f) = o\Big(\frac{1}{n^k}\Big)$$

для коэффициентов Фурье k раз непрерывно дифференцируемой периодической с периодом 2π функции.

Из этих оценок и из теоремы о дифференцировании общих функциональных рядов вытекает, что ряд Фурье k раз непрерывно дифференцируемой периодической функции можно почленно дифференцировать $(k-1)$ раз с сохранением равномерной сходимости ряда. k-е дифференцирование будет приводить к ряду Фурье k-ой производной, но сходимость ряда надо понимать уже в среднеквадратичном.

Верно и обратное наблюдение: если коэффициенты Фурье некоторой функции убывают достаточно быстро, такая функция будет достаточно гладкой. Именно, верна

Теорема 2.25. *Пусть коэффициенты Фурье некоторой (периодической с периодом* 2π*) функции* f *удовлетворяют оценке:*

$$c_n(f) = \frac{\sigma_n}{n^k} \quad (n \neq 0)\,, \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\sigma_n|^2 < \infty\,.$$

Тогда функция f $(k-1)$ *раз непрерывно дифференцируема.*

Доказательство. Действительно, тригонометрический ряд, полученный в результате формального почленного дифференцирования $(k-1)$ раз, имеет коэффициенты

$$(in)^{k-1} c_n(f) = i^{k-1}\frac{\sigma_n}{n}$$

и, следовательно, абсолютно сходится, что оправдывает возможность дифференцирования почленно данное количество раз. □

2.9 Ряды Фурье периодических функций с периодом $T = 2l$

Естественно, мы могли рассматривать с тем же успехом периодические функции с произвольным периодом $T = 2l$. Однако, можно получить соответствующую общую теорию как следствие частного случая $T = 2\pi$ используя растяжение (сжатие) вещественной оси. Действительно, если f — периодическая функция с периодом $T = 2l$, то функция g, определенная равенством

$$g(x) = f\Big(\frac{lx}{\pi}\Big)$$

будет периодической функцией с периодом $T = 2\pi$. При этом

$$f(x) = g\Big(\frac{\pi x}{l}\Big)\,.$$

Пусть теперь f и g — периодические функции с периодом $2l$. Обозначим через $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$ соответствующие им периодические функции с периодом 2π, т.е.

$$\widetilde{f}(x) = f\Big(\frac{lx}{\pi}\Big)\,, \quad \widetilde{g}(x) = g\Big(\frac{lx}{\pi}\Big)\,.$$

Тогда

$$\langle \widetilde{f}|\widetilde{g}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \widetilde{f}(x)\overline{\widetilde{g}(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\Big(\frac{lx}{\pi}\Big)\overline{g\Big(\frac{lx}{\pi}\Big)}\,dx = \frac{1}{2l}\int\limits_0^{2l} f(t)\overline{g(t)}\,dt\,.$$

Последний интеграл и будет принят за скалярное произведение функций f и g периодических с периодом $2l$:

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{2l}\int\limits_0^{2l} f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

(функции считаются непрерывными, для определенности). Ортонормированная система функций e_n примет вид

$$e_n(x) = e^{i\frac{\pi}{l}nx}\,. \tag{2.15}$$

Возьмем непрерывную периодическую с периодом $2l$ функцию f. Перейдем к функции $\widetilde{f}$ (непрерывной и периодической с периодом 2π) и построим для нее ряд Фурье относительно ортонормированной системы e^{inx} на интервале $[0, 2\pi]$. Этот ряд будет рядом Фурье для функции f относительно ортонормированной системы (2.15) на интервале $[0, 2l]$:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{\pi}{l}nx}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_0^{2l} f(x)e^{-i\frac{\pi}{l}nx}\,dx\,.$$

Вещественная форма ряда Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{\pi nx}{l} + b_n\sin\frac{\pi nx}{l})\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} f(x)\,dx\,,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Равенство Парсеваля не изменит своего вида, если учесть, что теперь

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2l}\int\limits_0^{2l} |f(x)|^2\,dx\,.$$

Формулы перехода от комплексной к вещественной форме и обратно изменению не подвергаются.

2.10 Разложение четных и нечетных функций

В этом вопросе удобно использовать вещественную форму ряда Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l})\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

записав соотношения для коэффициентов Фурье в симметричной форме:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx\,, \tag{2.16}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.17}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.18}$$

Напомним, что если функция f — нечетная (и интегрируемая), то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \quad (\forall a > 0)\,.$$

Если функция f — четная (и интегрируемая), то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx \quad (\forall a > 0)\,.$$

Пусть функция f — непрерывная, периодическая с периодом $2l$ и четная. Тогда $b_n = 0$ при всех натуральных n и ряд Фурье такой функции будет содержать только косинусы:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Пусть функция f — непрерывная, периодическая с периодом $2l$ и нечетная. Тогда $a_n = 0$ при всех натуральных n и при $n = 0$ и ряд Фурье такой функции будет содержать только синусы:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть на интервале $[0, l]$ задана непрерывная функция f. Как можно разложить ее в ряд Фурье на этом интервале? Возможны разные приемы. Можно, например, продолжить ее периодически на всю ось с периодом $T = l$ и воспользоваться общей теорией. Однако можно предварительно продолжить ее как четную или нечетную на интервал $[-l, l]$ и затем уже продолжать периодически на всю ось с периодом $T = 2l$. В этом случае в зависимости от способа предварительного продолжения мы получим разложение в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам. Следует заметить, что для вычисления коэффициентов Фурье нет необходимости явно строить описанные продолжения. Действительно, в случае четного продолжения мы можем найти коэффициенты a_n по формулам

$$a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx\,,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

а в случае нечетного продолжения мы можем найти коэффициенты b_n по формулам

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx\,, \quad n\in\mathbb{N}\,.$$

Следует заметить, что скорости сходимости этих рядов будут в общем случае различны. При четном продолжении функция останется непрерывной. При нечетном она (в общем случае) получит точки разрыва (1 рода) в нуле и при $x = l$ (и далее периодически с периодом $2l$). В последнем случае ряд будет сходиться заведомо медленно.

2.11 Вещественная форма тригонометрического ряда Фурье

До сих пор мы получали сведения о вещественной форме тригонометрического ряда Фурье благодаря формулам перехода (2.7). Следует, однако, заметить, что функции

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\cos x\,,\sin x\,,\cos 2x\,,\sin 2x\,,\ldots$$

образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

в пространстве непрерывных периодических с периодом 2π функций и коэффициенты a_n и b_n являются коэффициентами Фурье относительно этой ортонормированной системы (кроме a_0, который становится коэффициентом Фурье в этом смысле после деления на $\sqrt{2}$). Равенство Парсеваля может быть переписано в виде

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\,.$$

В случае периодических функций с периодом $2l$ полной ортонормированной системой будет

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\cos\frac{\pi x}{l}\,,\sin\frac{\pi x}{l}\,,\cos\frac{2\pi x}{l}\,,\sin\frac{2\pi x}{l}\,,\ldots$$

относительно скалярного произведения

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\overline{g(x)}\,dx\,.$$

2.12 Понятие об улучшении скорости сходимости ряда Фурье

Тригонометрические ряды Фурье, возникающие в результате решения конкретных прикладных задач, могут оказаться медленно сходящимися, что часто препятствует их использованию (если сумма ряда не находится в замкнутом виде). Если оказывается возможным из данного медленно сходящегося ряда выделить медленно сходящуюся часть с известной суммой так, что оставшаяся часть ряда сходится уже быстро, то такое выделение и называется улучшением сходимости ряда Фурье.

Если особенности (разрывы) функции f, улучшением сходимости ряда Фурье которой мы интересуемся, известны, то функцию f можно легко представить как сумму достаточно простой (например, кусочно линейной) функции с точно такими же особенностями, что и f и функции, которая уже особенностей не имеет (но может иметь особенности производной).

Если особенности функции f не известны, для улучшения сходимости ряда Фурье можно воспользоваться методом А.Н.Крылова. Идея метода состоит в том, чтобы выделить из коэффициентов Фурье младшие степени величины $\frac{1}{n}$ и попытаться отсуммировать полученные ряды при помощи таблиц известных разложений.

Например, пусть требуется улучшить сходимость ряда

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^3}{n^4-1}\sin nx\,, \quad x\in(-\pi,\pi)\,.$$

Заметим, что

$$\frac{n^3}{n^4-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^5-n}\,.$$

Но известно, что при $x \in (-\pi, \pi)$

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx\,,$$

откуда

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \sin x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^5-n} \sin nx\,, \quad x \in (-\pi, \pi)\,.$$

3 Примеры и приложения

3.1 Периодические решения

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$p_0 y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n y(x) = q(x) \tag{3.1}$$

с постоянными коэффициентами и периодической правой частью $q(x)$ периода 2π. Существует ли периодическое решение с периодом 2π?

Будем искать решение в форме ряда Фурье

$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k e^{ikx}\,.$$

Разложим правую часть уравнения в ряд Фурье

$$q(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k e^{ikx}\,,$$

тогда при всех $k \in \mathbb{Z}$

$$p_0 \cdot (ik)^n y_k + p_1 \cdot (ik)^{n-1} y_k + \cdots + p_n \cdot y_k = q_k$$

(равенство коэффициентов Фурье левой и правой частей уравнения). Полагая

$$P(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_n\,,$$

получаем соотношение (Фурье-образ уравнения (3.1))

$$P(ik) \cdot y_k = q_k \quad (k \in \mathbb{Z})\,. \tag{3.2}$$

Если

$$P(ik) \neq 0 \quad (\forall k \in \mathbb{Z})\,, \tag{3.3}$$

то

$$y_k = \frac{q_k}{P(ik)}\,,$$

т.е. мы нашли коэффициенты Фурье функции $y(x)$ а, следовательно, и саму эту функцию. Однако, чтобы найденная функция действительно была решением, необходимо оправдать возможность n-кратного дифференцирования суммы ряда Фурье $y(x)$ почленно. В этих целях потребуем непрерывной дифференцируемости правой части $q(x)$. Тогда в силу неравенства (вытекающем из асимптотики $P(ik) \sim p_0 \cdot (ik)^n$ при $k \to \infty$)

$$|P(ik)| \geqslant c|k|^m$$

с некоторым $c > 0$, заключаем, что

$$|y_k| \leqslant \frac{|\sigma_k|}{c|k|^{n+1}}\,,$$

где σ_k — коэффициенты Фурье производной $q'(x)$. Последняя оценка позволяет нам сослаться на теорему 2.25 о дифференцируемости ряда Фурье, из которой и вытекает n-кратная непрерывная дифференцируемость функции $y(x)$.

Заметим теперь, что построенное решение будет единственным. Действительно, иначе существовало бы нетривиальное 2π-периодическое решение однородного уравнения

$$p_0 y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n y(x) = 0\,,$$

но, как известно, общее решение последнего уравнения выражается через экспоненты $e^{\lambda x}$, где λ — корни характеристического уравнения

$$P(z) = 0\,,$$

и эти экспоненты могут привести к 2π–периодическому решению только при $\lambda = ik \quad (k \in \mathbb{Z})$ в противоречии с условием (3.3).

Итак, при непрерывно дифференцируемой правой части условие (3.3) является условием существования и единственности 2π-периодического решения рассматриваемого дифференциального уравнения (3.1).

Если при некотором целом m

$$P(im) = 0\,,$$

уравнение (3.1) будет иметь 2π периодические решения только при условии, что соответствующий коэффициент Фурье правой части равен нулю: $q_m = 0$. При этом единственность 2π-периодического решения теряется: коэффициент Фурье y_m может быть выбран произвольно (здесь также используется тот факт, что экспонента e^{imx} является решением однородного уравнения).

Наконец, если при некотором целом m одновременно

$$P(im) = 0 \quad \text{и} \quad q_m \neq 0\,,$$

периодического решения не существует.

3.2 Задача о колебаниях закрепленной струны

Рассмотрим струну, закрепленную в точках 0 и π на оси x с положением равновесия по отрезку $[0, \pi]$. Если придать струне произвольную начальную форму, заданную, например, функцией $f(x)$, и затем отпустить, струна начнет колебаться. Требуется найти форму струны в произвольный последующий момент времени. В математической физике выводится следующее уравнение для функции $u(x,t)$, описывающей форму струны в момент времени t:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{3.4}$$

где a — некоторая постоянная. Уравнение (3.4) будем рассматриваться с начальными условиями

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) & \text{(начальная форма)}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 0 & \text{(струна отпущена без начальной скорости)}. \end{cases}$$

Имеются также граничные условия

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,.$$

Будем искать решение в виде ряда Фурье по синусам

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin nx\,,$$

что сразу позволяет удовлетворить граничным условиям. Вычисляя формально коэффициенты Фурье левой и правой частей волнового уравнения (3.4), приходим к равенствам

$$b_n''(t) = -a^2 n^2 b_n(t) \quad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Начальные условия будут выполнены, если

$$\begin{cases} b_n(0) = b_n\,, \\ b_n'(0) = 0\,, \end{cases}$$

где b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$: $\quad b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$. Решение задачи Коши для функций $b_n(t)$ имеет вид

$$b_n(t) = b_n \cos(ant)\,,$$

что ведет к представлению искомого решения в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(ant)\sin(nx)\,. \tag{3.5}$$

Однако, чтобы полученная функция $u(x,t)$ была действительно решением, надо обеспечить возможность дважды непрерывно дифференцировать ряд (3.5) как по t, так и по x почленно. Например, достаточно потребовать сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| n^2\,.$$

Последний ряд заведомо сходится, если функция $f(x)$, например, трижды непрерывно дифференцируема на $[0,\pi]$ и

$$f''(0) = f''(\pi) = 0\,.$$

В этом случае

$$b_n = -\frac{2}{\pi n^3}\int_0^{\pi} f'''(x)\cos nx\,dx\,,$$

т.е. $b_n \cdot n^2 = \dfrac{\sigma_n}{n}$, где ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n|^2$ сходится.

Заметим далее, что

$$\cos(ant)\sin(nx) = \frac{\sin n(x-at) + \sin n(x+at)}{2}$$

и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,.$$

Отсюда

$$u(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2}\,.$$

Найденное решение имеет вид суперпозиции двух разбегающихся со скоростью a волн. Отметим, что в последнем представлении решения функция $f(x)$ должна пониматься как продолженная. Функция $f(x)$ исходно была задана лишь на интервале $[0,\pi]$. В ходе решения она фактически была продолжена сначала как нечетная на интервал $[-\pi,\pi]$ и далее периодически с периодом 2π.

Более общие примеры и метод Фурье разделения переменных, позволяющий рассматривать более общие постановки задач, будут рассмотрены в курсе математической физики или на семинарских занятиях.

4 Нетригонометрические ряды Фурье

4.1 Регулярная задача Штурма–Лиувилля

В математической физике ортонормированные системы функций возникают часто как системы собственных функций задач Штурма–Лиувилля. Напомним постановку регулярной задачи.

Пусть на интервале $[a,b]$ определены

1. $q = q(x)$ — вещественная непрерывная функция

2. $p = p(x) > 0$ — положительная непрерывно дифференцируемая функция.

Пусть также заданы вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ так, что

$$(\alpha_1\,, \alpha_2) \neq 0 \neq (\beta_1\,, \beta_2)\,.$$

Дифференциальный оператор L определяется равенством

$$L(y) \equiv -(py')' + qy$$

где дважды непрерывно дифференцируемая функция $y = y(x)$ (вообще говоря — комплекснозначная) считается удовлетворяющей краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0\,, \\ \beta_0 y(b) \;+ \beta_1 y'(b) \;= 0\,. \end{cases} \tag{4.1}$$

Оператор L называется регулярным оператором Штурма–Лиувилля. Пусть, далее, фиксирована непрерывная положительная на $[a, b]$ функция ρ:

$$\rho = \rho(x) > 0\,.$$

Уравнение

$$L(y) = \lambda \rho y\,,$$

где λ — неизвестный (комплексный) параметр, называется регулярной задачей Штурма–Лиувилля.

Решениями задачи Штурма–Лиувилля служат пары число–функция (λ, y). При этом λ называется собственным числом, а $y \quad (y \neq 0)$ — соответствующей собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля.

Напомним теперь основные утверждения, касающиеся решения регулярной задачи Штурма–Лиувилля.

1. Собственные числа вещественны.

2. Собственные числа простые, т.е. каждому собственному значению соответствует лишь одна (с точностью до постоянного множителя) собственная функция.

3. Собственные числа образуют бесконечную монотонно возрастающую последовательность, стремящуюся к бесконечности

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots\,, \quad \lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty\,.$$

4. Собственные функции, отвечающие разным собственным числам, ортогональны с весом ρ, т.е.

$$L(y_j) = \lambda_j \rho y_j\,, \quad L(y_k) = \lambda_k \rho y_k\,,$$

$$\lambda_j \neq \lambda_k \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b y_j(x)\overline{y_k(x)}\rho(x)\,dx = 0\,.$$

5. Собственные функции y_k могут быть выбраны вещественными.

Рассмотрим унитарное пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций удовлетворяющих краевым условиям (4.1), определяя скалярное произведение таких функций f и g равенством

$$\langle f | g \rangle = \int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,dx\,.$$

Собственные функции задачи Штурма–Лиувилля y_n будем считать нормированными условием

$$\|y_n\|^2 = \int\limits_a^b |y_n(x)|^2 \rho(x)\,dx = 1\,.$$

Тогда они образуют ортонормированную систему. Коэффициенты Фурье функции f (из описанного унитарного пространства) относительно такой ортонормированной системы определены соотношением

$$c_n(f) = \langle f | y_n \rangle = \int\limits_a^b f(x)\overline{y_n(x)}\rho(x)\,dx\,.$$

Разложение функции f в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля имеет вид

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) y_n\,.$$

Можно показать, что системы собственных функций регулярных задач Штурма–Лиувилля полны (замкнуты), так что ряд Фурье сходится к функции в среднеквадратичном.

4.2 Полнота собственных функций регулярной задачи Штурма–Лиувилля

Ограничимся наброском доказательства полноты в следующих предположениях:

1. $\rho = 1$,
2. Функции $y(x)$ будем считать вещественными и удовлетворяющими условиям Дирихле:

$$y(a) = y(b) = 0\,.$$

В рассматриваемом случае

$$\langle f|g\rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\,.$$

Тогда

$$I(y) \equiv \langle L(y)|y\rangle = \int\limits_a^b [-(py')' + qy]y\,dx = \int\limits_a^b [py'^2 + qy^2]\,dx\,.$$

В курсе «Вариационное исчислении» будет показано, см. файл var.pdf, что если наименьшее значение квадратичного функционала $I(y)$ при условиях

$$y(a) = y(b) = 0\,, \quad \|y\| = 1\,,$$

достигается, то это наименьшее значение равно

$$\min I(y) = \lambda_1\,, \quad \lambda_1 = I(y_1)\,,$$

где λ_1 — наименьшее собственное значение рассматриваемой задачи Штурма–Лиувилля и y_1 — соответствующая собственная функция, $\|y_1\| = 1$.

Можно показать, что это наименьшее значение действительно достигается, однако доказательство этого факта выходит за рамки настоящих лекций.

Мы примем здесь без доказательства следующее более общее утверждение, известное как вариационный метод в проблеме собственных значений.

Пусть $y_1\,, y_2\,, \ldots y_{n-1}$ — ортонормированная система собственных функций, отвечающих первым $n-1$ собственным числам задачи Штурма–Лиувилля, расположенным в порядке возрастания $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n-1}$. Тогда наименьшее значение квадратичного функционала $I(y)$ при условиях

$$y(a) = y(b) = 0\,, \quad \|y\| = 1\,, \quad y \perp y_k \quad \forall k = 1, 2, \ldots (n-1)\,,$$

достигается, причем

$$\min I(y) = \lambda_n\,, \quad \lambda_n = I(y_n)\,,$$

где λ_n — n-ое собственное значение рассматриваемой задачи Штурма–Лиувилля и y_n — соответствующая собственная функция.

Положим

$$r_n = f - \sum_{k=1}^{n-1} c_k y_k\,,$$

где $c_k = \langle f|y_k\rangle$ — коэффициенты Фурье функции f, так что $y_k \perp r_n$ при $k < n$. Тогда

$$\langle L(r_n)|r_n\rangle = \langle L(f)|r_n\rangle - \sum_{k=1}^{n-1} c_k\langle L(y_k)|r_n\rangle = \langle L(f)|r_n\rangle - \sum_{k=1}^{n-1} c_k\lambda_k\langle y_k|r_n\rangle\,,$$

и в силу $\langle y_k|r_n\rangle = 0$ получаем

$$\langle L(r_n)|r_n\rangle = \langle L(f)|r_n\rangle\,.$$

Считая, что $\|r_n\| \neq 0$, полагаем

$$r_n = \|r_n\| e_n\,,$$

так что

$$\|e_n\| = 1\,, \quad e_n \perp y_1\,, \ldots y_{n-1}\,.$$

В силу вариационного принципа находим

$$\langle L(r_n)|r_n\rangle = \|r_n\|^2 \langle L(e_n)|e_n\rangle \geqslant \|r_n\|^2 \min_{\substack{\|y\|=1,\\ y\perp y_1,\dots y_{n-1}}} \langle L(y)|y\rangle = \lambda_n \|r_n\|^2 ,$$

откуда в силу неравенства Шварца

$$\lambda_n \|r_n\|^2 \leqslant \langle L(f)|r_n\rangle \leqslant \|L(f)\| \cdot \|r_n\| ,$$

т.е. ввиду $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to \infty$

$$\|r_n\| \leqslant \frac{\|L(f)\|}{\lambda_n} \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

Но это в точности и означает замкнутость системы собственных функций.

4.3 Сингулярная задача Штурма–Лиувилля

4.3.1 Полиномы Лежандра

Если задача Штурма–Лиувилля рассматривается на бесконечном интервале или функции $p(x)$ и $\rho(x)$ обращаются в ноль хотя бы на одном из концов интервала $[a, b]$, ее называют сингулярной. Следует отметить, что краевые условия для сингулярных задач Штурма–Лиувилля ставятся иначе чем для регулярных. Сингулярные задачи представляют существенный интерес для приложений (в некотором смысле — значительно больший, чем регулярные). Здесь мы ограничимся одним из простейших случаев, ведущим к многочленам Лежандра. Соответствующая задача Штурма–Лиувилля имеет вид

$$-[(1-x^2)y']' = \lambda y , \quad x \in [-1, 1] .$$

В качестве краевых условий ставится требование ограниченности функции y на концах интервала $[-1, 1]$. Собственными значениями этой задачи являются числа

$$\lambda = n(n+1) , \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

а соответствующие собственные функции

$$y = P_n(x)$$

являются многочленами, их и называют многочленами Лежандра. Эти многочлены могут быть получены в результате процесса ортогонализации системы многочленов

$$1, x, x^2, \dots$$

относительно скалярного произведения

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\, dx .$$

Обычно их определяют равенством

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} [(x^2-1)^n]^{(n)} , \quad \|P_n\| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} ,$$

так что ортонормированной системой относительно введенного скалярного произведения будут функции

$$y_n = \sqrt{2n+1} \cdot P_n(x) .$$

Полнота этой системы очевидна ввиду теоремы Стоуна–Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывных функций полиномами:

$$\|f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f) y_k\| \leqslant \|f - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\| \leqslant \|f - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\|_\infty \leqslant \varepsilon ,$$

где $\varepsilon > 0$ может быть выбрано произвольно, а многочлен $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ является некоторой соответствующей равномерной аппроксимацией функции f (первое неравенство вытекает из минимизирующего свойства коэффициентов Фурье, второе — простая оценка интеграла). Таким образом, непрерывная функция f на отрезке $[-1,1]$ может быть разложена в ряд Фурье

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) y_n\,, \quad c_n(f) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x) y_n(x)\,dx\,,$$

который сходится к ней в среднеквадратичном.

4.3.2 Полиномы Эрмита

Второй пример сингулярной задачи Штурма–Лиувилля имеет вид

$$-(e^{-x^2} y')' = \lambda e^{-x^2} y\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Здесь собственные числа равны

$$\lambda = 2n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)\,,$$

а соответствующие собственные функции снова являются полиномами

$$y = H_n(x)\,,$$

которые называются полиномами Эрмита. Их можно определить равенствами

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \cdot (e^{-x^2})^{(n)}\,.$$

Полиномы Эрмита ортогональны с весом e^{-x^2}, т.е. ортогональны в смысле скалярного произведения

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x^2}\,dx\,,$$

при этом

$$\|H_n\| = \sqrt{2^n n!}\,,$$

так что ортонормированную систему образуют функции

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\, H_n(x)\,.$$

Можно доказать, что система многочленов Эрмита полная, так что любая непрерывная на оси функция, квадратично интегрируемая с весом e^{-x^2}:

$$\|f\|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2}\,dx < +\infty\,,$$

может быть разложена в ряд Фурье

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) y_n\,, \quad c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) y_n(x) e^{-x^2}\,dx\,,$$

который сходится к ней в среднеквадратичном.

Часть II

Интегралы Фурье

5 Преобразование Фурье

5.1 Интеграл Фурье: интуитивный подход

Рассмотрим непрерывно дифференцируемую на всей оси абсолютно интегрируемую функцию $f(x)$:

$$f \in C^1(\mathbb{R}): \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < \infty\,.$$

Разложим ее в ряд Фурье на интервале $[-l, l]$ большой длины $2l$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) e^{i\frac{\pi}{l}n(x-t)}\,dt\,, \quad x \in (-l, l)\,.$$

Введем разбиение оси $\mathbb{R}$ точками

$$\xi_n = \frac{\pi n}{l} \quad (n \in \mathbb{Z})\,,$$

при этом

$$\Delta\xi_n = \frac{\pi}{l} \underset{l\to+\infty}{\to} 0\,.$$

Заметим, что при $l \to +\infty$

$$\int\limits_{-l}^{l} f(t) e^{i\xi_n(x-t)}\,dt \to \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\xi_n(x-t)}\,dt$$

и можно думать (вспоминая суммы Римана), что

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta\xi_n \int\limits_{-l}^{l} f(t) e^{i\xi_n(x-t)}\,dt \underset{l\to+\infty}{\to} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\xi(x-t)}\,dt\,,$$

т.е. при всех $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\xi(x-t)}\,dt\,. \tag{5.1}$$

Последняя формула действительно имеет место и составляет содержание теоремы Фурье, а интеграл в правой части равенства называется *интегралом Фурье* функции f.

Равенство (5.1) принято разбивать на два

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t}\,dt\,, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x}\,d\xi\,, \tag{5.2}$$

или, в симметричной форме,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x}\,dx\,, \tag{5.3}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x}\,d\xi\,. \tag{5.4}$$

При этом функция $\widehat{f}$ (в обоих вариантах) называется *преобразованием Фурье* функции f. Для определенности мы в дальнейшем будем пользоваться симметричной формой преобразования Фурье.

Для получения вещественной формы интеграла Фурье заметим, что если функция $f(x)$ — вещественная, то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\xi(x-t)\,dt + \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\xi(x-t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\xi(x-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\xi(x-t)\,dt\,.$$

Равенство

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\xi(x-t)\,dt \tag{5.5}$$

остается справедливым и для комплексных функций (оно верно как для вещественной, так и для мнимой части комплекснозначной функции и в силу линейности интеграла — для произвольной их линейной комбинации).

Если воспользоваться формулой косинуса разности, равенство (5.5) запишется в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\xi\, \cos\xi x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\xi t\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\xi\, \sin\xi x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\xi t\,dt\,.$$

Если функция $f(x)$ — четная, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\xi t\,dt = 0$$

(как интеграл от нечетной функции по симметричному интервалу) и интеграл Фурье приводится к виду

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\xi\, \cos\xi x \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos\xi t\,dt\,. \tag{5.6}$$

Аналогично, если $f(x)$ — нечетная, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\xi\, \sin\xi x \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\sin\xi t\,dt\,. \tag{5.7}$$

Если функция $f(x)$ изначально задана на полуоси $[0, +\infty)$, то она может быть продолжена как четная или нечетная на всю вещественную ось. Это позволяет представить функцию на полуоси любой из формул (5.6), (5.7).

Операторы

$$F_c: \quad f(x) \mapsto \widehat{f}_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\cos\xi x\,dx\,,$$
$$F_s: \quad f(x) \mapsto \widehat{f}_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\sin\xi x\,dx\,,$$

называются, соответственно, косинус- и синус-преобразованиями Фурье. Согласно формулам (5.6), (5.7) повторное применение любого из этих двух преобразований возвращает нас к исходной функции, т.е.

$$F_c^2 = I\,, \quad F_s^2 = I\,,$$

где I — тождественное преобразование.

5.2 Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции

Пусть функция $f(x)$ — непрерывная (кусочно–непрерывная) и абсолютно интегрируемая на вещественной оси:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty\,.$$

Тогда определено отображение

$$F:\quad f\mapsto \widehat{f} = Ff\,,\quad \widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx\,,$$

называемое *преобразованием (оператором) Фурье*. Оператор Фурье F является линейным (ввиду линейности интеграла):

$$\widehat{\lambda f + \mu g} = F(\lambda f + \mu g) = \lambda Ff + \mu Fg = \lambda\widehat{f} + \mu\widehat{g}\,,$$

здесь $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ — константы. Отметим также следующие очевидные свойства преобразования Фурье функции f.

1. $\widehat{f}(\xi)$ — ограниченная функция, причем

   $$\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1\,,$$

   где

   $$\|\widehat{f}\|_\infty = \sup|\widehat{f}(\xi)|\,,\quad \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx\,.$$

2. $\widehat{f}(\xi)$ — равномерно непрерывная функция.

   Действительно,

   $$e^{-i\xi x} - e^{-i\eta x} = e^{-ix\frac{\xi+\eta}{2}}(e^{-ix\frac{\xi-\eta}{2}} - e^{-ix\frac{\eta-\xi}{2}}) = -2ie^{-ix\frac{\xi+\eta}{2}}\sin\frac{x(\xi-\eta)}{2}\,,$$

   т.е.

   $$|e^{-i\xi x} - e^{-i\eta x}| = 2\Big|\sin\frac{x(\xi-\eta)}{2}\Big|\,.$$

   Тогда

   $$|\widehat{f}(\xi)-\widehat{f}(\eta)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big|\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-i\xi x} - e^{-i\eta x})f(x)\,dx\Big|$$
   $$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\sin\frac{x(\xi-\eta)}{2}\Big|\cdot|f(x)|\,dx = I_1 + I_2\,,$$

   где

   $$I_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{|x|>N}\Big|\sin\frac{x(\xi-\eta)}{2}\Big|\cdot|f(x)|\,dx \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{|x|>N}|f(x)|\,dx$$

   и

   $$I_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{|x|\leqslant N}\Big|\sin\frac{x(\xi-\eta)}{2}\Big|\cdot|f(x)|\,dx\,.$$

   Выберем N так, чтобы

   $$I_1 < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

где ε — произвольное положительное число. После этого выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\frac{N\delta}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \frac{N\delta}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{|x| \leqslant N} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Тогда при $|\xi - \eta| < \delta$ и $|x| \leqslant N$

$$\left|\sin \frac{x(\xi - \eta)}{2}\right| < \frac{N\delta}{2}$$

и как следствие

$$I_2 < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Тем самым

$$|\xi - \eta| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| < \varepsilon\,.$$

3. $\widehat{f}(\xi) \to 0$ при $\xi \to \infty$.

   Действительно,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx = I_1 + I_2\,,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|x| > N} f(x) e^{-i\xi x}\, dx\,, \quad |I_1| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|x| > N} |f(x)|\, dx\,,$$

и

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|x| \leqslant N} f(x) e^{-i\xi x}\, dx\,.$$

Выберем N настолько большим, чтобы

$$|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

где ε — произвольное положительное число. После этого ξ будем считать столь большим, чтобы

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Последнее возможно в силу леммы Римана–Лебега:

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|x| \leqslant N} f(x) e^{-i\xi x}\, dx \underset{\xi \to \infty}{\to} 0\,.$$

Таким образом, при достаточно больших ξ

$$|\widehat{f}(\xi)| < \varepsilon\,.$$

5.3 Формула обращения

Для доказательства теоремы Фурье нам понадобится следующее свойство ядра Дирихле, которое в случае интеграла Фурье определяется равенством

$$D_N(x - t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin N(x - t)}{x - t}\,.$$

Лемма 5.1. *При $N > 0$ и при любом $x \in \mathbb{R}$*

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin N(x - t)}{x - t}\, dt = 1\,, \tag{5.8}$$

причем интеграл сходится равномерно по N при $N \geqslant 1$.

Доказательство. Установим сначала равномерность. Пусть T — достаточно большое положительное число, так что $|x| < T$. Тогда

$$\int\limits_T^{+\infty} \frac{\sin N(x-t)}{x-t}\,dt = \int\limits_{t=T}^{+\infty} \frac{d\cos N(x-t)}{N(x-t)}$$

$$= -\frac{\cos N(x-T)}{N(x-T)} - \int\limits_T^{+\infty} \frac{\cos N(x-t)}{N(x-t)^2}\,dt$$

откуда

$$\Big|\int\limits_T^{+\infty} \frac{\sin N(x-t)}{x-t}\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{T-x} + \int\limits_T^{+\infty} \frac{dt}{(t-x)^2} = \frac{2}{T-x} \underset{T\to+\infty}{\to} 0\,.$$

Аналогично оценивается интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{-T} \frac{\sin N(x-t)}{x-t}\,dt\,.$$

Для доказательства (5.8) достаточно установить равенство (при $N > 0$)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin Nt}{t}\,dt = 1\,.$$

Отметим сначала независимость интеграла от N при положительных N, что становится очевидным при замене $\tau = Nt\,,\ d\tau = Ndt$:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin Nt}{t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau}\,d\tau\,.$$

Рассмотрим тогда интеграл

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt\,, \quad x \geqslant 0\,.$$

Заметим, прежде всего, что он сходится равномерно по $x \geqslant 0$. Действительно, при $T > 0$

$$2i\int\limits_T^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt = \int\limits_T^{+\infty} \frac{e^{(-x+i)t}}{t}\,dt - \int\limits_T^{+\infty} \frac{e^{(-x-i)t}}{t}\,dt$$

$$= \int\limits_{t=T}^{+\infty} \frac{1}{t}\,d\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} - \int\limits_{t=T}^{+\infty} \frac{1}{t}\,d\frac{e^{(-x-i)t}}{-x-i}$$

$$= \Big[\frac{1}{t}\,\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} - \frac{1}{t}\,\frac{e^{(-x-i)t}}{-x-i}\Big]\Big|_{t=T}^{+\infty} + \int\limits_T^{+\infty} \Big[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} - \frac{e^{(-x-i)t}}{-x-i}\Big]\,\frac{dt}{t^2}$$

$$= -\frac{1}{T}\Big[\frac{e^{(-x+i)T}}{-x+i} - \frac{e^{(-x-i)T}}{-x-i}\Big] + \int\limits_T^{+\infty} \Big[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} - \frac{e^{(-x-i)t}}{-x-i}\Big]\,\frac{dt}{t^2}\,,$$

откуда

$$\Big|\int\limits_T^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{T} + \int\limits_T^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{T} \underset{T\to+\infty}{\to} 0\,.$$

Вычислим производную от $\Phi(x)$:

$$\Phi'(x) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,dt = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\left[e^{(-x+i)t} - e^{(-x-i)t}\right]dt$$

$$= -\frac{1}{\pi i}\Big[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} - \frac{e^{(-x-i)t}}{-x-i}\Big]\Big|_{t=0}^{+\infty} = \frac{1}{\pi i}\Big[\frac{1}{-x+i} - \frac{1}{-x-i}\Big]$$

$$= -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+1}\,.$$

Заметим, далее, что

$$|\Phi(x)| \leqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = -\frac{2}{\pi}\frac{e^{-xt}}{x}\Big|_{t=0}^{+\infty} = \frac{2}{\pi x} \underset{x\to+\infty}{\to} = 0\,.$$

Тогда согласно формуле Ньютона–Лейбница для несобственного интеграла

$$-\Phi(0+) = \lim_{x\to+\infty}\Phi(x) - \Phi(0+) = \int\limits_0^{+\infty}\Phi'(x)\,dx = -\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\big|_0^{+\infty} = -1\,.$$

Но ввиду равномерной по x сходимости интеграла $\Phi(x)$

$$\Phi(0+) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt\,,$$

т.е.

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt = 1\,.$$

$\square$

Теорема 5.2 (Фурье). *Пусть функция f непрерывна и абсолютно интегрируема на вещественной оси и пусть она дифференцируема в точке x. Тогда*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{N\to+\infty}\int\limits_{-N}^{N}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi\,.$$

Замечание 5.3. Сокращение v.p. перед знаком интеграла читается как «главное значение» интеграла.

Доказательство. Положим

$$f_N(x) \overset{\text{Опр.}}{=} \int\limits_{-N}^{+N}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{N}d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\xi(x-t)\,dt\,.$$

По теореме об интегрировании несобственного интеграла по параметру

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dt\,f(t)\int\limits_0^{N}\cos\xi(x-t)\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{\sin N(x-t)}{x-t}\,dt\,.$$

Тогда

$$f(x) - f_N(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\frac{\sin N(x-t)}{x-t}\,dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{\sin N(x-t)}{x-t}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\cdot\sin N(x-t)\,dt\,.$$

Последний интеграл разобьем на три части:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} = \int\limits_{-\infty}^{-T} + \int\limits_{-T}^{T} + \int\limits_{T}^{+\infty}, \tag{5.9}$$

считая, что T достаточно велико, так что $|x| < T$. Величину T можно выбрать столь большой, что первый и последний интегралы в правой части будут сколь угодно малы не зависимо от величины N при $N \geqslant 1$. Действительно, например,

$$\int\limits_{T}^{+\infty} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \cdot \sin N(x-t)\, dt = I_1 + I_2\,,$$

где

$$I_1 = f(x) \int\limits_{T}^{+\infty} \frac{\sin N(x-t)}{N(x-t)}\, dt$$

и

$$I_2 = -\int\limits_{T}^{+\infty} \frac{f(t) \sin N(x-t)}{x-t}\, dt\,,$$

откуда (как было установлено при доказательстве предыдущей леммы)

$$|I_1| \leqslant \frac{2|f(x)|}{T-x} \underset{T\to+\infty}{\to} 0$$

и (в силу абсолютной интегрируемости функции f)

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{T-x} \int\limits_{T}^{+\infty} |f(t)|\, dt \underset{T\to+\infty}{\to} 0\,.$$

Если T уже выбрано, так что

$$\Bigg| \int\limits_{-\infty}^{-T} + \int\limits_{T}^{+\infty} \Bigg| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

где ε — произвольное наперед заданное положительное число, оставшийся средний интеграл в правой части равенства (5.9) может быть сделан сколь угодно малым при $N \to +\infty$ в силу леммы Римана–Лебега:

$$\int\limits_{-T}^{T} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \cdot \sin N(x-t)\, dt \underset{N\to+\infty}{\to} 0\,.$$

Использование леммы Римана–Лебега оправдано ввиду того, что функцию переменной t

$$t \mapsto \frac{f(x)-f(t)}{x-t}$$

можно доопределить как непрерывную всюду на интервале $[-T, T]$, поскольку в точке $t = x$ она имеет устранимый разрыв:

$$\exists \lim_{t\to x} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} = f'(x)\,.$$

Выберем N столь большим, чтобы

$$\Bigg| \int\limits_{-T}^{T} \Bigg| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

тогда

$$|f(x) - f_N(x)| < \varepsilon\,.$$

□

5.4 Обратное преобразование Фурье

Как следует из доказанной выше теоремы Фурье, если функция $f(x)$ — является дифференцируемой и абсолютно интегрируемой на вещественной оси, то преобразование Фурье

$$F: \quad f \mapsto \widehat{f} = Ff, \qquad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx,$$

имеет обратное преобразование

$$F^{-1}: \quad \widehat{f} \mapsto f = F^{-1}\widehat{f}, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi.$$

Заметим, что если функция $\widehat{f}$ является абсолютно интегрируемой, то обратное преобразование Фурье F^{-1} можно описать равенством

$$F^{-1} = PF,$$

где оператор P является оператором «отражения»

$$P: \quad f(x) \mapsto f(-x).$$

Отметим также коммутационное соотношение

$$FP = PF,$$

которое легко оправдывается заменой переменной в интеграле:

$$\big(FPf\big)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(-x) e^{-i\xi x}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{+\infty}^{-\infty} f(t) e^{i\xi t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\xi t}\, dt = \big(PFf\big)(\xi).$$

5.5 Гладкость преобразований Фурье быстро убывающих функций и скорость убывания преобразований Фурье гладких функций

Если функция $f(x)$ непрерывна и сходится интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|\, dx,$$

то преобразование Фурье $\widehat{f}(\xi)$ является непрерывно дифференцируемой функцией, причем производная $\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi)$ является преобразованием Фурье функции $-ixf(x)$:

$$\frac{d\widehat{f}(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-ix) f(x) e^{-i\xi x}\, dx.$$

Это сразу вытекает из теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру, поскольку здесь интеграл справа, полученный формальным дифференцированием преобразования Фурье функции f под знаком интеграла, сходится равномерно по ξ.

Как следствие получаем, если функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема со степенью $|x|^n$, ее образ Фурье $\widehat{f}(\xi)$ является n раз непрерывно дифференцируемой функцией, причем

$$(-ix)^n f(x) \quad \overset{F}{\longmapsto} \quad \frac{d^n}{d\xi^n}\widehat{f}(\xi).$$

Рассмотрим теперь вопрос о скорости убывания преобразования Фурье гладкой функции.

Теорема 5.4. *Пусть теперь функция f — непрерывно дифференцируема, причем f и f' — абсолютно интегрируемы:*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty\,, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\, dx < +\infty\,.$$

Тогда имеет место соотношение

$$\widehat{f'}(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)\,,$$

в частности

$$\widehat{f}(\xi) \underset{\xi\to\infty}{=} o\Big(\frac{1}{|\xi|}\Big)\,.$$

Доказательство. Согласно формуле Ньютона–Лейбница

$$f(b) - f(a) = \int\limits_a^b f'(x)\, dx$$

и абсолютной интегрируемости функции f' существуют пределы

$$\lim_{a\to-\infty} f(a)\,, \qquad \lim_{b\to+\infty} f(b)\,.$$

Если любой из этих пределов не равен нулю, функция f не может быть абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$, таким образом

$$\lim_{a\to-\infty} f(a) = 0\,, \qquad \lim_{b\to+\infty} f(b) = 0\,.$$

Тогда, интегрируя по частям, находим

$$\widehat{f'}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\xi x}\, dx = \frac{f(x)e^{-i\xi x}}{\sqrt{2\pi}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-i\xi) e^{-i\xi x}\, dx$$

$$= \frac{(i\xi)}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx = (i\xi)\widehat{f}(\xi)\,.$$

□

Как следствие, если функция f непрерывно дифференцируема n раз и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ вместе со своими производными, то ее образ убывает на бесконечности быстрее чем $|\xi|^{-n}$:

$$\widehat{f}(\xi) = o\Big(\frac{1}{|\xi|^n}\Big)\,,$$

причем

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \quad \overset{F}{\longmapsto} \quad (i\xi)^n \widehat{f}(\xi)\,.$$

Таким образом, при преобразовании Фурье операция умножения на независимую переменную x переходит в операцию дифференцирования (по ξ) с точностью до множителя i, а операция дифференцирования по x переходит в операцию умножения на независимую переменную ξ с точность до того же множителя i:

$$\begin{aligned} x \quad &\overset{F}{\rightleftharpoons} \quad i\frac{d}{d\xi} \\ \frac{d}{dx} \quad &\overset{F}{\rightleftharpoons} \quad i\xi\,. \end{aligned}$$

5.6 Пространство Шварца

В теории интеграла Фурье важную роль играет пространство Шварца $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$ гладких быстро убывающих функций. Это пространство функций состоит из бесконечно дифференцируемых функций, которые вместе со всеми своими производными убывают на бесконечности быстрее любой степени $|x|$:

$$|f(x)| \leqslant \frac{C_k}{1+|x|^k}\,, \quad \left|\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right| \leqslant \frac{C_{n,k}}{1+|x|^k} \qquad \forall n,k \in \mathbb{N}\,.$$

Согласно предыдущему пункту оператор Фурье F функцию класса Шварца переводит снова в функцию класса Шварца. Поскольку обратный оператор Фурье с точностью до отражения P совпадает с преобразованием Фурье, то заключаем, что оператор Фурье отображает пространство Шварца на все пространство Шварца взаимно однозначно:

$$\begin{aligned} F: &\quad \mathfrak{S}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{S}(\mathbb{R})\,, \\ F^{-1}: &\quad \mathfrak{S}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{S}(\mathbb{R})\,. \end{aligned}$$

Превратим пространство Шварца в унитарное пространство, задавая в нем скалярное произведение равенством

$$\langle f|g\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx\,.$$

При этом

$$\|f\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx\,.$$

Напомним, что в абстрактном унитарном пространстве V оператор A^* называется сопряженным к оператору A, если

$$\forall \boldsymbol{a}\,, \boldsymbol{b} \in V: \qquad \langle A\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\rangle = \langle \boldsymbol{a}|A^*\boldsymbol{b}\rangle\,.$$

Оператор A называется при этом *унитарным*, если

$$AA^* = A^*A = I\,, \quad \text{т.е.} \quad A^* = A^{-1}\,.$$

Унитарное преобразование сохраняет скалярное произведение и, в частности, норму вектора:

$$\langle A\boldsymbol{a}|A\boldsymbol{b}\rangle = \langle \boldsymbol{a}|A^*A\boldsymbol{b}\rangle = \langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\rangle\,, \quad \|A\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{a}\|\,.$$

Теорема 5.5. *Оператор Фурье унитарен на пространстве Шварца:*

$$F^* = F^{-1}\,.$$

Доказательство. Пусть $f, g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle Ff|g\rangle &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\,f(x)e^{-i\xi x}\overline{g(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\,f(x)\overline{e^{i\xi x}g(\xi)} \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\,f(x)\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}g(\xi)\,d\xi} = \langle f|F^{-1}g\rangle\,. \end{aligned}$$

Перестановка порядков интегрирования возможна ввиду равномерной сходимости интегралов. □

Следствие 5.6 (Равенство Парсеваля).

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx\,.$$

В дальнейшем вообще через F^* будет обозначаться оператор

$$F^* = PF\,, \qquad F^*: \quad f \mapsto \widetilde{f}\,, \qquad \widetilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\xi x}\,dx\,,$$

и называться сопряженным преобразованием Фурье.

Замечание 5.7. Как легко видеть, формула

$$\langle Ff|g\rangle = \langle f|F^*g\rangle$$

будет верна для значительно более широкого класса функций, нежели класс Шварца. Достаточно, чтобы f и g были непрерывными (кусочно непрерывными), абсолютно интегрируемыми функциями. Как следствие, будем иметь равенство

$$\langle \widehat{f}|\widehat{g}\rangle = \langle f|g\rangle\,,$$

если f — непрерывная, абсолютно интегрируемая функция, а $\widehat{g}$ — абсолютно интегрируемый образ Фурье дифференцируемой и абсолютно интегрируемой функции g. Действительно, в этом случае в силу формулы обращения $g = F^{-1}\widehat{g}$ и тогда

$$\langle \widehat{f}|\widehat{g}\rangle = \langle Ff|\widehat{g}\rangle = \langle f|F^{-1}\widehat{g}\rangle = \langle f|g\rangle\,.$$

В частности равенство Парсеваля

$$\|\widehat{f}\| = \|f\|$$

сохраняет силу, когда $\widehat{f}$ — абсолютно интегрируемый образ Фурье дифференцируемой и абсолютно интегрируемой функции f. В действительности, методами функционального анализа можно показать, что для равенства Парсеваля достаточно лишь одной квадратичной интегрируемости функций!

6 Свертка функций

Сверткой функций f и g на вещественной оси называется интеграл

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt\,. \tag{6.1}$$

В отличие от периодического случая мы должны позаботится о сходимости интеграла (6.1). Например, достаточно потребовать непрерывности и абсолютной интегрируемости функции f и непрерывности и ограниченности функции g или наоборот, непрерывности и абсолютной интегрируемости функции g и непрерывности и ограниченности функции f. Как и в периодическом случае легко показать, что свертка коммутативна:

$$f * g = g * f\,.$$

Свертка на бесконечном интервале как и свертка периодическая часто используется для сглаживания функции. Пусть f — равномерно непрерывная функция на вещественной оси. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксирован и δ таково, что

$$|x-y| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

Возьмем произвольно гладкую (непрерывно дифференцируемую или даже бесконечно дифференцируемую) функцию ω, удовлетворяющую условиям:

1. $\omega(x) \geqslant 0\,,$
2. ω — четная функция,
3. $\omega(x) = 0$ при $|x| \geqslant \delta\,,$
4. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega(x)\,dx = 1\,.$

Напомним, что в силу этих свойств

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega(x-t)\,dt=1\,.$$

Рассмотрим свертку $g=f*\omega$:

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\omega(x-t)\,dt\,.$$

Здесь интеграл практически не является несобственным — интегрирование реально ведется по интервалу $|x-t|\leqslant\delta$. Функция g является, очевидно, гладкой, причем

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\omega'(x-t)\,dt\,.$$

Вместе с тем функция g является равномерной аппроксимацией функции f:

$$|f(x)-g(x)|=\Big|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[f(x)-f(t)]\omega(x-t)\,dt\Big|$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{|x-t|\leqslant\delta}|f(x)-f(t)|\omega(x-t)\,dt\leqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{|x-t|\leqslant\delta}\omega(x-t)\,dt=\varepsilon\,.$$

Однако свертка функций не улучшает, вообще говоря, их убывания. Нас свертка будет интересовать с точки зрения преобразования Фурье.

Теорема 6.1. *Пусть функции f и g — непрерывны и абсолютно интегрируемы на вещественной оси:*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx<+\infty\,,\qquad\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|\,dx<+\infty\,.$$

Тогда

$$(Ff)*g=F(f\cdot F^*g)\,,$$

или что то же

$$\widehat{f}*g=\widehat{f\cdot\widetilde{g}}\,,\qquad\widetilde{g}=F^*g\,.$$

Доказательство. Существование свертки очевидно ввиду ограниченности функции $\widehat{f}$. Формула вытекает из преобразований

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\xi-\eta)g(\eta)\,d\eta=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\eta\,g(\eta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ix(\xi-\eta)}\,dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\,f(x)e^{-ix\xi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(\eta)e^{ix\eta}\,d\eta=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\widetilde{g}(x)e^{-ix\xi}\,dx$$

□

Следствие 6.2. *В предположениях предыдущей теоремы верна также формула*

$$F^**g=F^*(f\cdot Fg)$$

Доказательство. Заметим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(-x-t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(-u)g(-x+u)\,du\,,$$

откуда
$$P(f*g) = (Pf)*(Pg)\,.$$
Тогда
$$P(Ff*g) = F^*f*Pg \quad \text{и} \quad PF(f\cdot F^*g) = F^*(f\cdot FPg)\,.$$
Отсюда в силу теоремы
$$F^*f*Pg = F^*(f\cdot FPg)\,.$$
Остается заменить Pg на g. □

Теорема 6.3. *Если функции f и g — непрерывны, абсолютно и квадратично интегрируемы:*
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty\,, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\,dx < +\infty\,,$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx < +\infty\,, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2\,dx < +\infty\,,$$
то свертка $f*g$ является абсолютно интегрируемой функцией и
$$\widehat{f*g} = \widehat{f}\cdot\widehat{g}\,.$$

Доказательство. Заметим, что в силу неравенства Шварца свертка $f*g$ существует, причем интеграл сходится равномерно по x:
$$\Big|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt\Big|^2 \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)|^2\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(s)|^2\,ds\,.$$
Отсюда, согласно теореме об интегрировании несобственного интеграла по параметру, свертка также является абсолютно интегрируемой функцией:
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\Big|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt\Big| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|\,dt$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\,|f(t)| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)|\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(s)|\,ds\,.$$
Тогда опять с использованием теоремы об интегрировании несобственного интеграла по параметру находим
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\,e^{-i\xi x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\,e^{-i\xi t}f(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi(x-t)}g(x-t)\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\,e^{-i\xi t}f(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi u}g(u)\,du\,.$$
□

Замечание 6.4. В действительности, в условиях последней теоремы можно показать, что
$$f*g = F^*(\widehat{f}\cdot\widehat{g})\,,$$
причем произведение $\widehat{f}\cdot\widehat{g}$ является абсолютно интегрируемой функцией, откуда, в частности, вытекает непрерывность и убывание на бесконечности свертки $f*g$ (ввиду соответствующих свойств преобразований Фурье абсолютно интегрируемых функций).

7 Примеры и приложения

7.1 Сводка формул

Вычислим образы Фурье для некоторых функций.

1.
$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x}\,, & x \geqslant 0, \\ 0\,, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\widehat{f_1}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{x(-1-i\xi)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{x(-1-i\xi)}}{-1-i\xi}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{1+i\xi}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1-i\xi}{1+\xi^2}\,.$$

2.
$$f_2(x) = \begin{cases} 0\,, & x > 0, \\ e^{x}\,, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Тогда $f_2 = Pf_1$, откуда $\widehat{f_2} = P\widehat{f_1}$, т.е.

$$\widehat{f_2}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1+i\xi}{1+\xi^2}\,.$$

3.
$$f_3(x) = e^{-|x|}\,.$$

В силу $f_3 = f_1 + f_2$ находим

$$\widehat{f_3}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+\xi^2}\,.$$

4.
$$f_4(x) = \mathrm{sgn} x \cdot e^{-|x|}\,.$$

В силу $f_4 = f_1 - f_2$ находим

$$\widehat{f_4}(\xi) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\xi}{1+\xi^2}\,.$$

5.
$$f_5(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Заметим, что $F^* f_5(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,e^{-|\xi|}$. Тогда в силу $F = PF^*$

$$\widehat{f_5}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-|\xi|}\,.$$

6.
$$f_6(x) = \frac{x}{1+x^2}\,.$$

Заметим, что $F^* f_6(\xi) = i\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\mathrm{sgn}\xi \cdot e^{-|\xi|}$. Тогда аналогично с предыдущим

$$\widehat{f_6}(\xi) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sgn}\xi \cdot e^{-|\xi|}\,.$$

7.

$$f_7(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in [-1,1], \\ 0 & x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Тогда

$$\widehat{f_7}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-1}^{1} e^{-i\xi x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-i\xi} - e^{i\xi}}{-i\xi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin\xi}{\xi}\,.$$

8.

$$f_8(x) = \frac{\sin x}{x}\,.$$

Заметим, что $F^* f_8(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, f_7(\xi)$. Тогда (в силу четности)

$$\widehat{f_8}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, f_7(\xi)\,.$$

Выпишем для этого случая равенство Парсеваля:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\pi}{2}\, dx = \pi\,.$$

9.

$$f_9(x) = e^{-x^2}\,.$$

Заметим, что

$$\widehat{f_9}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-ix\xi}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(x\xi)\, dx\,.$$

При этом

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{f_9}(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} \sin(x\xi)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(x\xi)\, \frac{de^{-x^2}}{2}$$

$$= -\frac{\xi}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(x\xi)\, dx = -\frac{\xi}{2}\widehat{f_9}(\xi)\,.$$

Решая полученное дифференциальное уравнение находим

$$\widehat{f_9}(\xi) = Ce^{-\frac{\xi^2}{4}}\,,$$

константа определяется из начального условия

$$\widehat{f_9}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Окончательно,

$$\widehat{f_9}(\xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4}}}{\sqrt{2}}\,.$$

Отметим, что в примерах 6 и 8 функции f_6 и f_8 не являются абсолютно интегрируемыми.

На практике часто бывают полезны следующие простые свойства преобразования Фурье. Пусть

$$f(x) \overset{F}{\rightleftharpoons} \widehat{f}(\xi)\,.$$

Тогда

1. $f(ax) \overset{F}{\rightleftharpoons} \dfrac{1}{a}\widehat{f}\Big(\dfrac{\xi}{a}\Big)$, — так называемая «терема подобия»,

2. $f(x)e^{i\alpha x} \overset{F}{\rightleftharpoons} \widehat{f}(\xi-\alpha)$, — так называемая «теорема смещения»,

3. $f(x-b) \overset{F}{\rightleftharpoons} \widehat{f}(\xi)e^{-i\xi b}$, — так называемая «теорема запаздывания».

Доказательство этих свойств элементарно:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(ax)e^{-i\xi x}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\frac{\xi}{a}u}\,\frac{du}{a}\,,$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}e^{-i\xi x}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i(\xi-\alpha)x}\,dx\,,$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-b)e^{-i\xi x}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\xi(u+b)}\,du\,.$$

Дополним эту сводку формул доказанными ранее теоремами о дифференцировании «оригинала», о дифференцировании «изображения» и о свертке и таблицей примеров:

Таблица 1: Таблица преобразований Фурье

$f(x)$	$\widehat{f}(\xi)$
$f(ax)$	$\frac{1}{a}\widehat{f}\Big(\frac{\xi}{a}\Big)$
$f(x)e^{i\alpha x}$	$\widehat{f}(\xi-\alpha)$
$f(x-b)$	$\widehat{f}(\xi)e^{-i\xi b}$
$\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$	$(i\xi)^n\widehat{f}(\xi)$
$x^n f(x)$	$i^n\dfrac{d^n\widehat{f}(\xi)}{d\xi^n}$
$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt$	$\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi)$
$e^{-x}H(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\dfrac{1-i\xi}{1+\xi^2}$
$e^{-\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{1}{1+\xi^2}$
$e^{-\lvert x\rvert}\mathrm{sgn}x$	$-i\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{\xi}{1+\xi^2}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,e^{-\lvert\xi\rvert}$
$\dfrac{x}{1+x^2}$	$-i\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,e^{-\lvert\xi\rvert}\mathrm{sgn}\xi$
$H(x+1)-H(x-1)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{\sin\xi}{\xi}$
$\dfrac{\sin x}{x}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,[H(\xi+1)-H(\xi-1)]$
e^{-x^2}	$\dfrac{e^{-\frac{\xi^2}{4}}}{\sqrt{2}}$

Здесь $H(x)$:

$$H(x)=\begin{cases}1\,, & x\geqslant 0,\\ 0\,, & x<0.\end{cases}$$

— так называемая *функция Хевисайда*.

В качестве иллюстрации вычислим преобразование Фурье функции f_N, введенной при доказательстве теоремы Фурье. Напомним, что ядро Дирихле было определено равенством

$$D_N(x)=\frac{\sin Nx}{\pi x}=\frac{N}{\pi}\cdot\frac{\sin(Nx)}{Nx}\,.$$

Его Фурье-образ, согласно теореме подобия, равен

$$\widehat{D_N}(\xi)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[H\Big(\frac{\xi}{N}+1\Big)-H\Big(\frac{\xi}{N}-1\Big)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[H(\xi+N)-H(\xi-N)\right].$$

Функция f_N совпадает со сверткой, см. стр. 39:

$$f_N=\sqrt{2\pi}f*D_N\,.$$

Тогда

$$\widehat{f_N}(\xi)=\widehat{f}(\xi)\big[H(\xi+N)-H(\xi-N)\big]=\begin{cases}\widehat{f}(\xi)\,, & \xi\in[-N,N]\,,\\ 0\,, & \xi\notin[-N,N]\,.\end{cases}$$

7.2 Распространение тепла в бесконечном стержне

Рассмотрим задачу о распространении тепла в бесконечном стержне, если задана начальная температура $u(x,0)=\varphi(x)$. Эту задачу принято называть задачей Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, & x\in\mathbb{R},\quad t\in[0,+\infty)\,,\\ u(x,0)=\varphi(x)\,, & x\in\mathbb{R}\,.\end{cases}$$

Фиксируя t, подвергнем функцию $u(x,t)$ преобразованию Фурье:

$$U(\xi,t)=(Fu)(\xi,t)\,.$$

Тогда рассматриваемая задача Коши будет иметь следующий образ Фурье:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}=-a^2\xi^2U, & \xi\in\mathbb{R},\quad t\in[0,+\infty)\,,\\ U(\xi,0)=\Phi(\xi)\,, & \xi\in\mathbb{R}\,.\end{cases}$$

Здесь $\Phi=F\varphi$.

Фиксируя ξ, решим полученное дифференциальное уравнение:

$$U(\xi,t)=\Phi(\xi)e^{-a^2\xi^2t}\,.$$

Решение исходной задачи находится по формуле

$$u(x,t)=(F^{-1}U)(x,t)\,.$$

Здесь полезно воспользоваться теоремой о свертке в форме 6.2:

$$F^*[e^{-a^2\xi^2t}]*\varphi=F^*(e^{-a^2\xi^2t}\cdot F\varphi)\,.$$

Заметим, что в силу четности (по ξ) и теоремы подобия (роль множителя играет $a\sqrt{t}$)

$$F^*[e^{-a^2\xi^2t}]=F[e^{-a^2\xi^2t}]=\frac{1}{a\sqrt{2t}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\,.$$

(Здесь также поменялись ролями переменные x и ξ). Тогда

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}\, dy\,.$$

Отметим, что в отличие от волнового уравнения параметр a не играет роль скорости распространения тепла. Как видно из полученного решения скорость распространения тепла бесконечна (с точки зрения данной модели): в любой сколь угодно малый момент времени $t > 0$ изменение температуры $u(x,t)$ происходит на всем протяжении бесконечного стержня (для всех x)!

7.3 Частотный спектр

В связи с предельным переходом, описанным в параграфе 5.1 полезно познакомиться с понятием частотного спектра.

Пусть f — вещественная периодическая функция с периодом $2l$. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x)\,,$$

где

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l}\,.$$

Величины ω_n имеют смысл частот колебаний и называются гармониками, причем гармоника ω_1 называется основной частотой, остальные гармоники $\omega_n = n\omega_1$, кратные основной, называются обертонами.

Введем величины

$$A_0 = \frac{a_0}{2}\,, \qquad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,, \quad n \geqslant 1\,.$$

Разложение в ряд Фурье может быть переписано в виде

$$f(x) \sim A_0 + \sum_{n=1} A_n \sin(\omega_n x + \varphi_n)\,,$$

где фазы колебаний φ_n определяются равенствами

$$\sin \varphi_n = \frac{a_n}{A_n}\,, \qquad \cos \varphi_n = \frac{b_n}{A_n}\,.$$

Последовательность амплитуд колебаний A_n отнесенных к соответствующим гармоникам и носит название дискретного частотного спектра.

Найдем, например, частотный спектр пилообразной 2l-периодической функции, заданной на периоде равенством

$$f(x) = x\,, \qquad x \in [-l, l]\,.$$

Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2l}{\pi n} \sin \omega_n x\,,$$

откуда

$$A_n = \frac{2l}{\pi n}\,,$$

см. рис. 5.

Следует подчеркнуть, что частотный спектр не определяет функцию $f(x)$ однозначно.

Совершая предельный переход $l \to \infty$, мы получаем интеграл Фурье функции $f(x)$:

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} [a(\xi) \cos \xi x + b(\xi) \sin \xi x]\, d\xi\,,$$

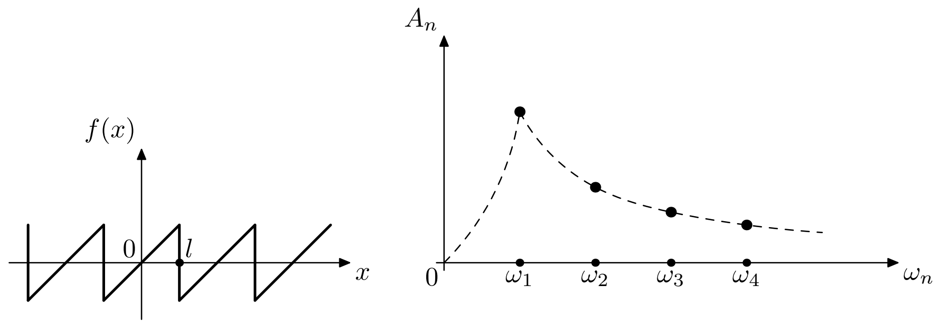

Рис. 5: Дискретный частотный спектр

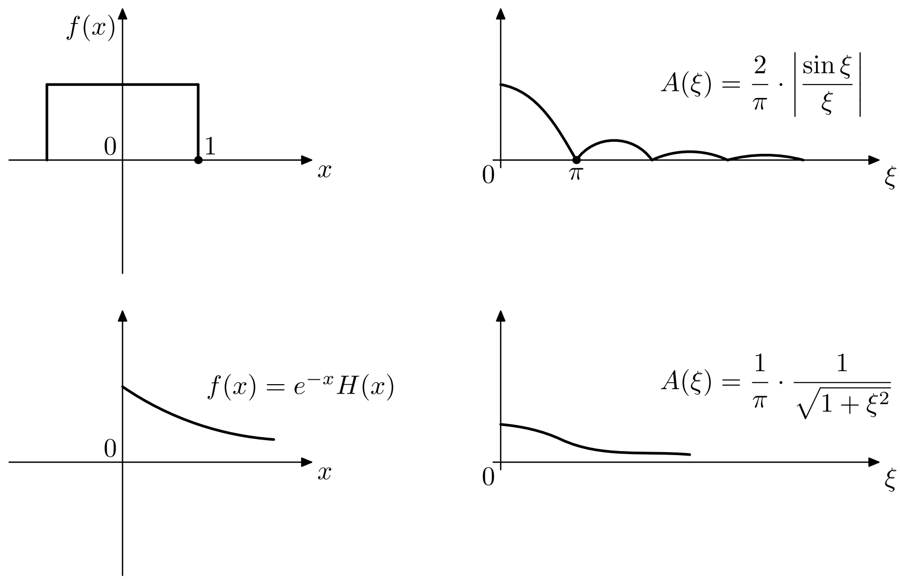

Рис. 6: Примеры непрерывных частотных спектров

где

$$a(\xi) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x\xi \, dx \,, \qquad b(\xi) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin x\xi \, dx \,.$$

По аналогии с дискретным случаем вводится непрерывный частотный спектр

$$A(\xi) = \sqrt{a^2(\xi) + b^2(\xi)} \,.$$

Заметим, что

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot [a(\xi) - ib(\xi)] \,,$$

откуда

$$A(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot |\widehat{f}(\xi)| \,.$$

Величина $A(\xi)$ служит мерой вклада частоты ξ в функцию $f(x)$.

На рисунке 6 можно видеть примеры непрерывных частотных спектров.

A Дополнение. Сходимость в среднеквадратичном

Мы докажем в этом параграфе, что для произвольной кусочно непрерывной и квадратично интегрируемой функции f интеграл

$$f_N(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) D_N(x-t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \frac{\sin N(x-t)}{x-t}\, dt\,,$$

называемый *простым интегралом Фурье* функции f, в среднеквадратичном сходится к функции f, т.е.

$$\|f - f_N\| \underset{N\to\infty}{\to} 0\,, \qquad \|f\| = \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx}\,.$$

Если определить функцию

$$\mathcal{D}_N(x) = \sqrt{2\pi}\, D_N(x)\,,$$

то интеграл $f_N(x)$ можно записать как свертку

$$f_N(x) = f * \mathcal{D}_N(x)\,.$$

Введем срезающий оператор Γ_N. Если f — произвольная функция на оси, то

$$\Gamma_N f(x) = \begin{cases} g(x)\,, & x \in [-N, N]\,, \\ 0\,, & x \notin [-N, N]\,. \end{cases}$$

Тогда, если преобразование Фурье $\widehat{f} = Ff$ функции f существует и как несобственный интеграл сходится равномерно, то простой интеграл Фурье запишется в виде

$$f_N = F^* \Gamma_N F f\,.$$

Нам будут полезны следующие две леммы.

Лемма А.1 (Интегральное неравенство Минковского). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна. Тогда*

$$\sqrt{\int\limits_a^b dx \left| \int\limits_c^d f(x,y)\, dy \right|^2} \leqslant \int\limits_c^d dy \sqrt{\int\limits_a^b |f(x,y)|^2\, dx}\,.$$

(Пределы интегрирования могут быть бесконечными).

Доказательство. Положим

$$g(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\, dy\,.$$

По неравенству Шварца

$$\int\limits_a^b |f(x,y) g(x)|\, dx \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b |f(x,y)|^2\, dx} \sqrt{\int\limits_a^b |g(x)|^2\, dx}\,.$$

Заметим, что

$$\int\limits_a^b dx \left| \int\limits_c^d f(x,y)\, dy \right|^2 = \int\limits_a^b |g(x)|^2\, dx\,.$$

При этом

$$\int\limits_a^b |g(x)|^2\, dx \leqslant \int\limits_a^b dx |g(x)| \int\limits_c^d |f(x,y)|\, dy$$

$$= \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b |f(x,y) g(x)|\, dx \leqslant \int\limits_c^d dy \sqrt{\int\limits_a^b |f(x,y)|^2\, dx} \sqrt{\int\limits_a^b |g(x)|^2\, dx}\,,$$

откуда

$$\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\,dx} \leqslant \int_c^d dy \sqrt{\int_a^b |f(x,y)|^2\,dx}\,,$$

что и требовалось доказать. □

Лемма А.2 (Равенство Парсеваля). *Пусть f — финитная непрерывная (кусочно-непрерывная) функция и $\widehat{f}$ — ее преобразование Фурье. Тогда*

$$\|\widehat{f}\| = \|f\|\,,$$

т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx\,.$$

Доказательство. Напомним, что функция называется финитной, если она обращается в ноль на внешности некоторого интервала. Предположим вначале, что $f(x)$ обращается в ноль вне интервала $[-\pi,\pi]$. Переопределим ее как 2π-периодическую, продолжая ее с интервала $[-\pi,\pi]$ на всю ось как периодическую. Для разложения так переопределенной функции $f(x)$ в ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}\,, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx\,,$$

выполняется равенство Парсеваля для рядов:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2\,.$$

Пусть $\alpha \in [0,1)$. Тогда замещая $f(x)$ функцией $e^{-i\alpha x}f(x)$, находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(\alpha)|^2\,, \qquad c_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(n+\alpha)x}\,dx\,.$$

Заметим, что

$$\widehat{f}(n+\alpha) = \sqrt{2\pi}\,c_n(\alpha)\,,$$

откуда

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n+\alpha)|^2\,.$$

Остается проинтегрировать полученное равенство по α в пределах от 0 до 1, замечая, что

$$\int_0^1 |\widehat{f}(n+\alpha)|^2\,d\alpha = \int_n^{n+1} |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\,.$$

В силу аддитивности интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\,.$$

Рассмотрим теперь общий случай, считая, что функция $f(x)$ обращается в ноль вне интервала $[-l,l]$. Тогда функция $g(x) = f(ax)$, где $a = \frac{l}{\pi}$, обращается в ноль вне интервала $[-\pi,\pi]$ и для нее верно равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(\xi)|^2\,d\xi\,.$$

Но

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \bigl|f(at)\bigr|^2 a\,dt = a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2\,dx$$

и, согласно теореме подобия,

$$\widehat{g}(\xi) = b\widehat{f}(b\xi)\,, \qquad b = \frac{1}{a}\,,$$

откуда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(b\eta)|^2 b\,d\eta = a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(\eta)|^2\,d\eta\,.$$

□

Перейдем к основному исследованию.

Если $g(x)$ — финитная гладкая функция, то по теореме Фурье 5.2 интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-N}^{N} \widehat{g}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi = g*\mathcal{D}_N(x) = \bigl(F^*\Gamma_N\widehat{g}\bigr)(x) = \bigl(F^*\Gamma_N Fg\bigr)(x)$$

сходится к функции $g(x)$ при $N\to\infty$. Ревизия доказательства теоремы Фурье показывает, что эта сходимость для финитной бесконечно дифференцируемой функции является равномерной по x на любом конечном интервале.

Пусть функция g обращается в ноль вне интервала $[a,b]$ и пусть K достаточно велико, так что $[a,b]\subset(-K,K)$. Тогда утверждение о равномерной сходимости примет вид

$$\max_{x\in[-K,K]} |g(x) - g*\mathcal{D}_N(x)| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Воспользуемся неравенством

$$\|g - g*\mathcal{D}_N\| \leqslant \sqrt{2K}\max_{x\in[-K,K]} |g(x) - g*\mathcal{D}_N(x)| + \sqrt{\int\limits_{|x|>K} |g*\mathcal{D}_N(x)|^2\,dx}\,.$$

Напомним, что

$$\int\limits_{|x|>K} |g*\mathcal{D}_N(x)|^2\,dx = \int\limits_{|x|>K} dx\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_a^b g(t)\,\frac{\sin N(x-t)}{x-t}\,dt\right|^2$$

и в силу неравенства Минковского

$$\sqrt{\int\limits_{|x|>K} dx\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_a^b g(t)\,\frac{\sin N(x-t)}{x-t}\,dt\right|^2} \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_a^b dt\,|g(t)|\sqrt{\int\limits_{|x|>K} \frac{\sin^2 N(x-t)}{(x-t)^2}\,dx}$$

Интеграл по x в правой части неравенства сходится равномерно относительно N и $t\in[a,b]$ и, если K достаточно велико, может быть сделан сколь угодно малым не зависимо от N. Пусть $\varepsilon>0$ произвольно. Согласно сделанной оценке можно выбрать K столь большим, что не зависимо от N

$$\sqrt{\int\limits_{|x|>K} |g*\mathcal{D}_N(x)|^2\,dx} < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

Фиксировав K, выберем N столь большим, чтобы

$$\sqrt{2K}\max_{x\in[-K,K]} |g(x) - g*\mathcal{D}_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

откуда заключаем, что при $N\to\infty$ для финитной гладкой функции g

$$\|g - g*\mathcal{D}_N\| \to 0\,.$$

Пусть теперь f — финитная непрерывная функция. Мы можем аппроксимировать ее равномерно финитной гладкой функцией, см. пункт 6. В силу финитности отсюда вытекает, что функция f может быть аппроксимирована финитной гладкой функцией g (с любой степенью точности) в среднеквадратичном. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и пусть

$$\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Заметим, что в силу неравенства треугольника

$$\|f - f * \mathcal{D}_N\| \leqslant \|f - g\| + \|g - g * \mathcal{D}_N\| + \|g * \mathcal{D}_N - f * \mathcal{D}_N\|\,.$$

Выберем N столь большим, чтобы

$$\|g - g * \mathcal{D}_N\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Заметим далее, что

$$g * \mathcal{D}_N - f * \mathcal{D}_N = h * \mathcal{D}_N = F^*\Gamma_N F h,, \qquad h = g - f\,,$$

и в силу леммы A.2

$$\|F^*\Gamma_N F h\| = \|\Gamma_N F h\| \leqslant \|Fh\| = \|h\|\,.$$

(здесь лемма была использована в обоих равенствах). Как следствие

$$\|f - f * \mathcal{D}_N\| < \varepsilon\,,$$

т.е.

$$\|f - f * \mathcal{D}_N\| \underset{N\to\infty}{\to} 0\,.$$

Полученное соотношение будет выполняться и для кусочно непрерывных финитных функций, т.к. такие функции могут быть аппроксимированы в среднеквадратичном с любой степенью точности непрерывными финитными функциями, после чего предыдущая аргументация повторяется дословно.

Пусть, наконец, $f(x)$ — кусочно непрерывная квадратично интегрируемая функция. Заметим, что опять с использованием леммы A.2

$$\sqrt{\int\limits_A^B dx \Big| \int\limits_{K\leqslant|t|\leqslant L} f(t) D_N(x-t)\,dt\Big|^2} \leqslant \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \Big| \int\limits_{K\leqslant|t|\leqslant L} f(t) D_N(x-t)\,dt\Big|^2}$$
$$= \|F^*\Gamma_N F(\Gamma_L f - \Gamma_K f)\| = \|\Gamma_N F(\Gamma_L f - \Gamma_K f)\| \leqslant \|F(\Gamma_L f - \Gamma_K f)\|$$
$$= \|\Gamma_L f - \Gamma_K f\| = \sqrt{\int\limits_{K\leqslant|x|\leqslant L} |f(x)|^2\,dx}\,.$$

Переходя к пределу по L при $L \to \infty$ получаем

$$\sqrt{\int\limits_A^B dx \Big| \int\limits_{K\leqslant|t|} f(t) D_N(x-t)\,dt\Big|^2} \leqslant \sqrt{\int\limits_{K\leqslant|x|} |f(x)|^2\,dx}\,.$$

Отсюда

$$\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \Big| \int\limits_{K\leqslant|t|} f(t) D_N(x-t)\,dt\Big|^2} \leqslant \sqrt{\int\limits_{K\leqslant|x|} |f(x)|^2\,dx}\,.$$

Тогда

$$\|f - f * \mathcal{D}_N\| \leqslant \|f - \Gamma_K f\| + \|\Gamma_K f - F^*\Gamma_N F\Gamma_K f\| + \|F^*\Gamma_N F\Gamma_K f - F^*\Gamma_N F f\|\,,$$

т.е.

$$\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \Big| f(x) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) D_N(x-t)\, dt \Big|^2}$$

$$\leqslant \sqrt{\int\limits_{K \leqslant |x|} |f(x)|^2\, dx}$$

$$+ \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \Big| \Gamma_K f(x) - \int\limits_{-K}^{+K} f(t) D_N(x-t)\, dt \Big|^2}$$

$$+ \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \Big| \int\limits_{K \leqslant |t|} f(t) D_N(x-t)\, dt\,. \Big|^2}$$

В этом неравенстве справа первое и третье слагаемые могут быть сделаны сколь угодно малыми при достаточно большом K независимо от N. Среднее слагаемое при фиксированном K может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора достаточно большого N (функция $\Gamma_K f$ является финитной). Таким образом и в этом случае

$$\| f - f * \mathcal{D}_N \| \underset{N \to \infty}{\to} 0\,.$$

Предметный указатель

Список литературы

[1] Бари Н.К. *Тригонометрические ряды*. ФМ, М., 1961. 2.7

[2] Винер Н. *Интеграл Фурье и некоторые его применения*. ФМ, М., 1963.

[3] Джексон Д. *Ряды Фурье и ортогональные полиномы*. ИЛ, М., 1948.

[4] Дороговцев А.Я. *Математический анализ*. Вища школа, Киев, 1985.

[5] Зигмунд К. *Тригонометрические ряды,* т.1–2. Мир, М., 1965. 2.7

[6] Князев П.Н. *Интегральные преобразования*. Вышэйшая школа, Минск, 1969.

[7] Привалов И.И. *Ряды Фурье*. ОНТИ, М., 1934.

[8] Смирнов В.И. *Курс высшей математики,* т.2. Наука, М., 1974.

[9] Снеддон И. *Преобразование Фурье*. ИЛ, М., 1955.

[10] Титчмарш Е. *Введение в теорию интегралов Фурье*. ОГИЗ, М., 1948.

[11] Толстов Г.П. *Ряды Фурье*. Наука, М., 1980.

[12] Шилов Г.Е. *Математический анализ. Функции одного переменного,* часть 3. Наука, М., 1970.

[13] Эдвардс Р. *Ряды Фурье в современном изложении,* т.1–2. Мир, М., 1985.

[14] Katznelson Y. *An introduction to harmonic analysis*. Dover publications, N.Y., 1976.