МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
И ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ (КАФЕДРА №43)

ОТЧЕТ ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ: ______________

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:

дтн	/		/		/	С.И.Колесникова
(должность, учёная степень, звание)		(подпись)		(дата защиты)		(инициалы, фамилия)

ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2

«Модели статистического моделирования и прогнозирования динамических систем по временному ряду»

ПО КУРСУ: «Компьютерное моделирование»

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ СТУДЕНТ:

Z9431	/	Д.И.Андреев
(номер группы)		(инициалы, фамилия)

/		/	26.05.2022
	(подпись студента)		(дата отчета)

Санкт-Петербург 2022

Цель работы

Цель настоящей работы – освоить средства моделирования задач линейного и нелинейного программирования.

Задание на лабораторную работу:

Вариант 1

Изучается динамика потребления молока в регионе. Для этого собраны данные об объемах среднедушевого потребления мяса (кг) Y(t) за 7 месяцев. Обосновать и построить тренд данного ряда. Оценить достоверность уточненной по МНК модели.

t	1	2	3	4	5	6	7
Y(t)	8.16	8.25	8.41	8.76	9.2	9.78	10.1

Выполнение работы:

1 Формализация задачи

По методу наименьших квадратов (МНК) задача заключается в нахождении коэффициентов линейной зависимости, при которых функция двух переменных F(a,b).

$$F(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-(a x_i+b)\right)^2 \to_{a,b} min$$

Решение примера сводится к нахождению экстремума функции двух переменных.

2 Формула нахождения коэффициентов

Выводим формулы для нахождения коэффициентов a и b. Составляется и решается система из двух уравнений с двумя неизвестными. Находим частные производные функции $F(a,b)$ по переменным a и b, и приравниваем их к нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-(a x_i+b)\right)x_i=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-(a x_i+b)\right)=0$$

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^2}$$

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

Убедимся, что в найденной стационарной точке (a,b) функция F(a,b) принимает минимум. Дифференциал второго порядка должен быть положительно определённым, или матрица квадратичной формы дифференциала второго порядка для функции F(a,b), в точке (a,b) должна быть положительно определённой (по критерию Сильвестра).

Матрица квадратичной формы имеет вид:

$$D=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & 2\sum_{i=1}^{n} x_i \\ 2\sum_{i=1}^{n} x_i & 2n \end{bmatrix}$$

Значения элементов не зависят от a и b (т. к. данные коэффициенты в них не фигурируют).

По критерию Сильвестра главные миноры матрицы должны быть положительны. Глвными минорами для данной матрицы являются элементы, лежащие на диагонали: $2n$ и $2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Элемент $2n$ в качестве переменной содержит n – количество элементов временного ряда. Количество по определению этого понятия не может быть отрицательным, и для того, чтобы задача была решаемой, в ней должно быть более одного элемента временного ряда. Для нашей задачи элементов $n=10$

Элемент $2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ содержит переменную n (всегда положительна), и x_i^2.

Операция возведения в квадрат всегда даёт положительный результат. Следовательно, данный элемент при всех допустимых n и x_i будет положительным.

3. Выполним ручной расчет с использованием пакета LibreOffice Calc.

Составляем таблицу исходных данных $(t, Y(t))$. Для повышения точности модели вместо года t введём новую переменную, начинающуюся с 1 (для этого вычтем из каждого t значение 1999). Также подсчитаем $x_i \cdot Y(t)_i$ и x_i^2, требуемые в дальнейших формулах. Найдем суммы $x, Y(t), x_i \cdot Y_i, x_i^2$ и общее количество элементов временного ряда n, для дальнейшего использования в формулах поиска коэффициентов (a, b).

	A	B	C	D	E
1		x	Y(t)	xi*Yi	xi^2
2		1	8.16	8.16	1.00
3		2	8.25	16.50	4.00
4		3	8.41	25.23	9.00
5		4	8.76	35.04	16.00
6		5	9.20	46.00	25.00
7		6	9.78	58.68	36.00
8		7	10.10	70.70	49.00
9	Суммы	28	62.66	260.31	140.00
10	Кол-во точек	7			

Находим коэффициенты (a,b):

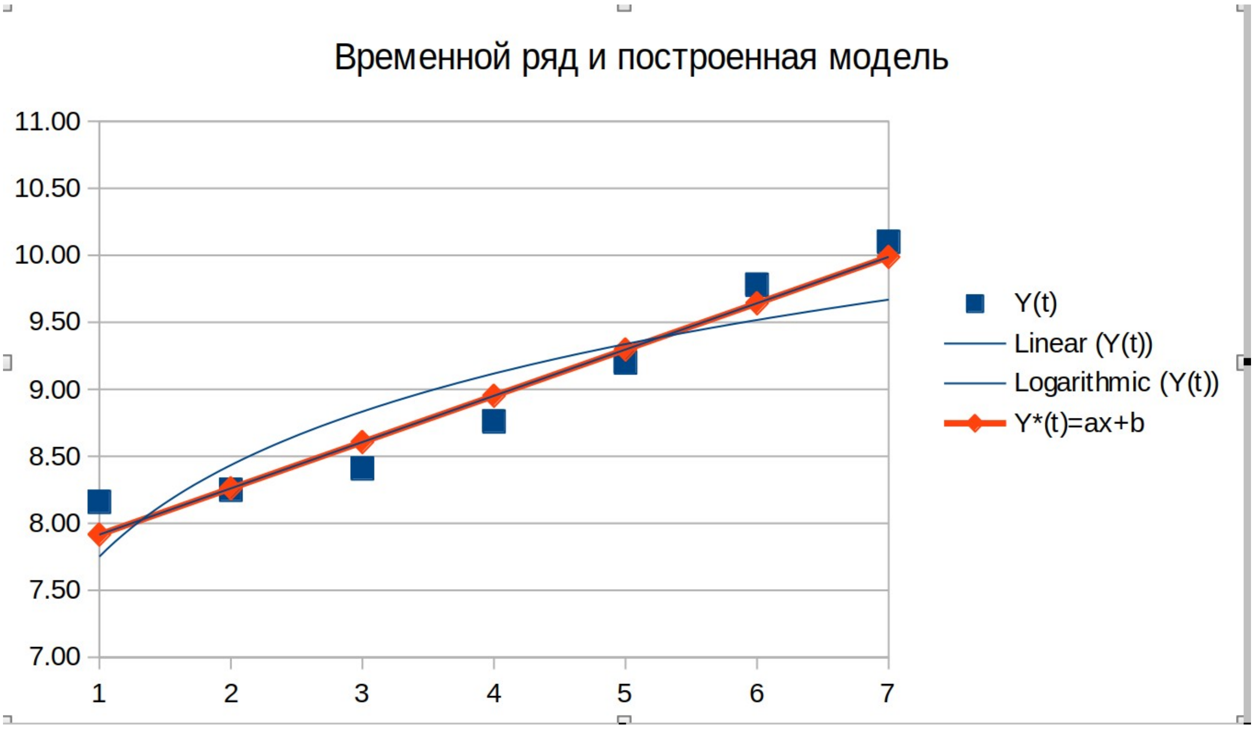
a	0.35
b	7.57

где a = (B10*D9-B9*C9)/(B10*E9-(B9*B9)); b = =(C9-B12*B9)/B10

Находим значения новой функции $Y^{\text{¿}}(x)=ax+b$, а также погрешность и квадрат от неё:

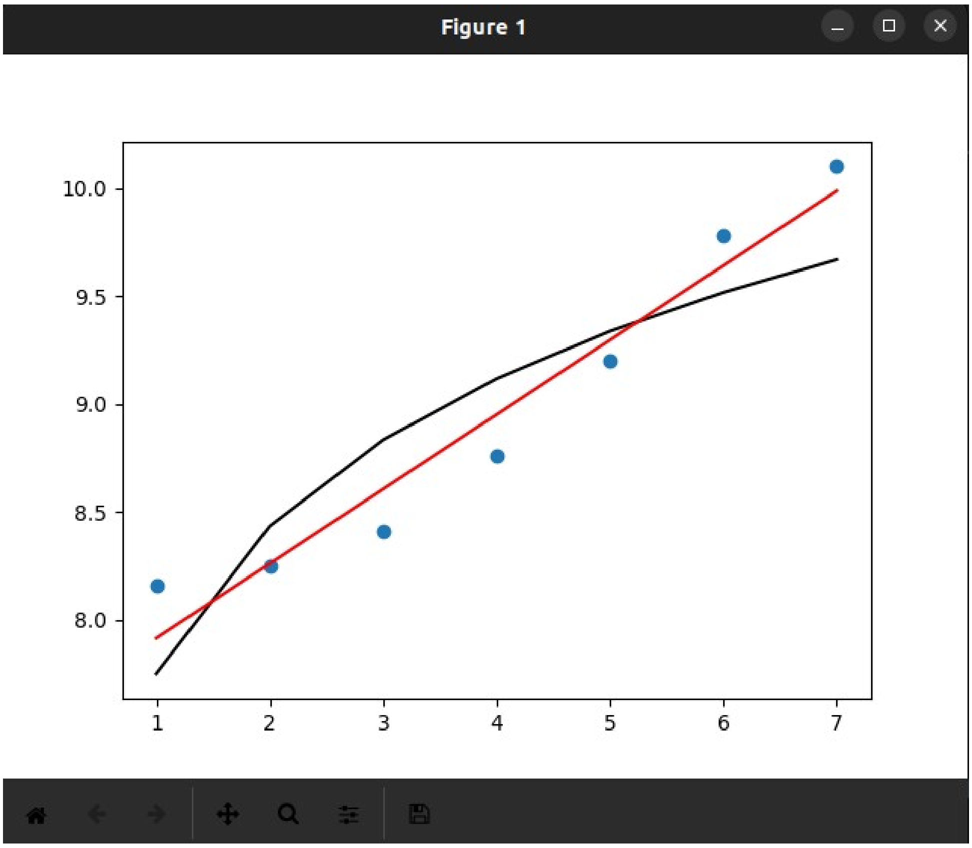
F	G	H
Y*(t)=ax+b	**Погрешность**	**(Y(t)-Y*(t))^2**
7.92	0.24	0.06
8.26	0.01	0.00
8.61	0.20	0.04
8.95	0.19	0.04
9.30	0.10	0.01
9.64	0.14	0.02
9.99	0.11	0.01

Строим график временного ряда, построенной модели, а также линии тренда временного ряда.



Как можно убедиться по графику, линия тренда практически совпала с функцией модели.

Результат работы программы:




```
y = 0.3453571428571 4314x + 7.5699999999999999
МНК имеет лучшее приближение
```

Листинг программы:

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt

# trend
def y(x):
    return 0.9856 * math.log(x, math.e) + 7.7511

def A(x, y):
    n = len(x)
    xy = []
    x2 = []

    for i in range(n):
        xy.append(x[i] * y[i])

    for i in x:
        x2.append(i ** 2)

    return (n * sum(xy) - sum(x) * sum(y)) / (n * sum(x2) - sum(x) ** 2)

def B(a, x, y):
```

```
    return (sum(y) - a * sum(x)) / len(x)

# approximation errors
def sigma(Y, F):
    delta = []

    for i in range(len(Y)):
        delta.append((Y[i] - F[i]) ** 2)

    return sum(delta)

X = [1,    2,    3,    4,    5,   6,    7   ]
Y = [8.16, 8.25, 8.41, 8.76, 9.2, 9.78, 10.1]
# y = ax + b
a = A(X, Y)
b = B(a, X, Y)
# analitic
F = []
# least squares method
F1 = []

for i in range(len(X)):
    F.append(y(X[i]))
    F1.append(a * X[i] + b)

print('y = ' + str(a) + 'x + ' + str(b))

# analitic
s1 = sigma(Y, F)
# least squares method
s2 = sigma(Y, F1)

plt.figure(1)
plt.plot(X, Y, 'o')
plt.plot(X, F, 'k')
plt.plot(X, F1, 'r')
plt.show()

if (s1 < s2):
    print('Логарифмическое уравнение имеет лучшее приближение')
else:
    print('МНК имеет лучшее приближение')
```

Вывод:

В рамках лабораторной работы была сформулирована задача МНК при построении регрессии, а также с использованием программных пакетов Libre Office Calc и пакета прикладных программ MathLab разработана программа, моделирующая алгоритм поиска оптимального решения для формализованной задачи.