Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2]
[Prof: Los Profesores] UNI, 15 de junio de 2021

Práctica Calificada 4

1. Use la transformada de Laplace para resolver el problema:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = t^2 + 1; \quad y(\pi) = \pi^2\,, \ \frac{dy}{dt}(\pi) = 2\pi.$$

[Sugerencia: hacer primero la sustitución de $x = t - \pi$.] [5ptos]

Solución: Sea $\hat{y}(x) = y(t)$ con $x = t - \pi$, luego se obtiene las relaciones entre sus derivadas

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d\hat{y}(x)}{dx}\,, \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{d^2\hat{y}(x)}{dx^2}.$$

Así, se obtiene la EDO

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dx^2}\hat{y} + \hat{y} = (x+\pi)^2 + 1 \\ &\hat{y}(0) = \pi^2\,, \quad \hat{y}'(0) = 2\pi. \end{aligned}$$

Aplicando transformada de Laplace, se obtiene

$$\left[s^2\hat{Y}(s) - \hat{y}'(0) - s\hat{y}(0)\right] + \hat{Y}(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2\pi}{s^2} + \frac{\pi^2+1}{s},$$

despejando obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{Y}(s) &= \frac{2\pi}{s^2+1} + \frac{s\pi^2}{s^2+1} + \frac{2}{s^3(s^2+1)} + \frac{2\pi}{s^2(s^2+1)} + \frac{\pi^2+1}{s(s^2+1)} \\ &= 2\left(\frac{s}{s^2+1} + \frac{1-s^2}{s^3}\right) + 2\pi\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right) + (\pi^2+1)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}\right) \\ &= \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^3} + \frac{2\pi}{s^2} + \frac{\pi^2-1}{s}. \end{aligned}$$

Tomando la transformada de Laplace inversa

$$\hat{y}(x) = \cos x + x^2 + 2\pi x + (\pi^2 - 1),$$

volviendo a la variable original

$$y(t) = -\cos t + t^2 - 1.$$

2. Use la transformada de Laplace para resolver el problema:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = -10\sin 2t; \quad y(\pi) = -1\,, \ \frac{dy}{dt}(\pi) = 0.$$

[5ptos]

Solución: Procediendo como en el Problema 1, se obtiene la EDO:

$$\frac{d^2}{dx^2}\hat{y} - \hat{y} = -10\sin 2x$$
$$\hat{y}(0) = -1\,, \quad \hat{y}'(0) = 0.$$

Aplicando transformada de Laplace, se obtiene

$$\left[s^2\hat{Y}(s) - \hat{y}'(0) - s\hat{y}(0)\right] - \hat{Y}(s) = -10\frac{2}{s^2+4},$$

despejando

$$\begin{aligned}\hat{Y}(s) &= -\frac{s}{s^2-1} - \frac{20}{(s^2+4)(s^2-1)} \\ &= -\frac{5}{2}\times\frac{1}{s-1} + \frac{3}{2}\times\frac{1}{s+1} + 2\times\frac{2}{s^2+4},\end{aligned}$$

tomando la transformada inversa de Laplace:

$$\hat{y}(x) = -\frac{5}{2}e^{x} + \frac{3}{2}e^{-x} + 2\sin 2x.$$

Volviendo a la variable original $y(t) = \hat{y}(x)$:

$$y(t) = -\frac{5}{2}e^{t-\pi} + \frac{3}{2}e^{\pi-t} + 2\sin 2t.$$

3. a) Encuentre la función de Green para el problema de valor de frontera

$$\begin{cases} y'' + y = h \\ y(0) = y(\pi/2) = 0, \end{cases}$$

donde $h \in C[0,\pi/2]$. [2.5ptos]

b) Use el resultado en a) para encontrar la solución de

$$\begin{cases} y'' + y = x \\ y(0) = 0\,,\ y(\pi/2) = 1. \end{cases}$$

[2.5ptos]

Solución:

a) La solución general de su versión homogénea es $y(x) = k_1\cos x + k_2\sin x$ para $k_1,\, k_2 \in \mathbb{R}$. Construimos dos soluciones $y_1,\, y_2$ linealmente independientes tal que

$$\begin{aligned} y_1(0) = 0 \quad & y_1(\pi/2) \neq 0 \\ y_1(0) \neq 0 \quad & y_1(\pi/2) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto consideramos $y_1 = \sin x$ e $y_2 = \cos x$. Ahora, usando la técnica de variación de parámetros, consideramos la solución particular:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

con la condición $c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$. De lo cual se desprende que

$$c_1(x) = -\int_0^x \frac{y_2(s)h(s)}{W[y_1,y_2](s)}ds \quad \wedge \quad c_2(x) = \int_{\pi/2}^x \frac{y_1(s)h(s)}{W[y_1,y_2](s)}ds,$$

donde el wronskiano es $W[y_1, y_2](s) = -1$. Entonces, la solución particular se expresa como

$$y_p(x) = \int_0^{\pi/2} K(x,s)h(s)\,ds,$$

donde $K(x,s)$ representa la **función de Green**, dada por

$$\begin{aligned} K(x,s) &= \begin{cases} \dfrac{y_2(x)y_1(s)}{W[y_1,y_2](s)} & 0 \le s \le x, \\ \dfrac{y_1(x)y_2(s)}{W[y_1,y_2](s)} & x \le s \le \pi/2. \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\cos x \sin s & 0 \le s \le x, \\ -\sin x \cos s & x \le s \le \pi/2. \end{cases} \end{aligned}$$

b) Por la linealidad del operador diferencial $L = D^2 + I$, dividimos la solución como $y = y_h + y_p$, donde y_h es la solución de

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0\,, \quad y(\pi/2) = 1. \end{cases}$$

Es decir $y_h = \sin x$. Además y_p se obtiene del problema anterior para $h(x) = x^2$:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\int_0^x \cos x \sin s \cdot s\,ds - \int_x^{\pi/2} \sin x \cos s \cdot s\,ds \\ &= -\cos \int_0^x s \sin s\,ds - \sin x \int_x^{\pi/2} s \cos s\,ds \\ &= -\cos x \Big[-x\cos x + \sin x\Big]_0^x - \sin x \Big[x \sin x + \cos x\Big]_x^{\pi/2} \\ &= x - \frac{\pi}{2}\sin x. \end{aligned}$$

Por tanto la solución es $y = y_h + y_p = \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\sin x + x$.

4. Sea el operador diferencial

$$L = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx} + 2I,$$

donde I es el operador identidad.

a) Exprese L de la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)I \quad \text{(operador Sturm-Liouville).}$$

[1ptos]

b) Halle todos los valores de λ (valores propios) para los cuales el problema de valor de frontera

$$\mathcal{L}y = \lambda\sigma y, \quad y'(1) = 0,\; y'(2) = 0.$$

tiene soluciones y_λ no triviales (vectores propios). Considere $\sigma(x) = x^{-1}$. [2ptos]

c) Dado el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_1^2 f(x)g(x)\sigma(x)\,dx,$$

¿Bajo qué condiciones de frontera se cumple que $\langle \mathcal{L}f, g\rangle = \langle f, \mathcal{L}g\rangle$ ($\mathcal{L}$ es simétrico)? [2ptos]

Solución:

a) Expresando $L = a_2(x)\dfrac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\dfrac{d}{dx} + a_0(x)I$. Luego, multiplicando por el factor:

$$\frac{1}{a_2(x)} e^{\int a_1(x)/a_2(x)\,dx} = \frac{1}{x},$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= x\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} + \frac{2}{x}I \\ &= \frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right) + \frac{2}{x}I.\end{aligned}$$

b) Utilizando $\sigma = 1/x$, la ecuación diferencial, se puede escribir como:

$$x^2y'' + xy' + (2-\lambda)y = 0 \text{ (Ecuación de tipo Cauchy-Euler).}$$

Utilizando el cambio $y = x^r$, se obtiene la ecuación característica: $r^2 + 2 - \lambda = 0$.
Para obtener soluciones oscilatorias, consideramos $2 > \lambda$. Así la solución general es

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{2-\lambda}\ln|x|) + c_1 \sin(\sqrt{2-\lambda}\ln|x|).$$

Luego, aplicando la primera condición de frontera $y'(1) = 0$ se obtiene $c_2 = 0$, conduciendo a

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{2-\lambda}\ln x).$$

Aplicando la segunda condición, $y_2'(2) = 0$, se obtiene

$$\sin(\sqrt{2-\lambda}\ln 2) = 0.$$

Esto nos dará soluciones no triviales cuando

$$\sqrt{2-\lambda}\ln 2 = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3\cdots$$

Así, los valores propios son

$$\lambda_n = 2 - \left(\frac{n\pi}{\ln 2}\right)^2 \quad \text{para } n = 0, 1, 2\cdots$$

y sus correspondientes vectores propios

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{\ln 2}\ln x\right), \quad 1 \le x \le 2.$$

c) Se puede verificar por integración por partes que el operador diferencial $\mathcal{L}$ no es simétrico respecto al producto interno con peso $\sigma = 1/x$:

$$\langle \mathcal{L}f, g\rangle = \int_1^2 \left(xg''(x) - g'(x) + 3\frac{g(x)}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\cdot f(x)\,dx + \left[g(x)f'(x) - f(x)g'(x) + \frac{f(x)g(x)}{x}\right]_1^2.$$

Sin embargo respecto a la norma sin peso $(f,g) = \int f(x)g(x)\,dx$ y al espacio
$V = \left\{v \in C^2[1,2] \,:\, v'(1) = 0 = v'(2)\right\}$, obtenemos

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}f, g) &= \int_1^2 f(x)\left((xg'(x))' + \frac{2g(x)}{x}\right)dx + \left[xf'(x)g(x) - xg'(x)f(x)\right]_1^2 \\ &= (f, \mathcal{L}g) \quad \forall f, g \in V.\end{aligned}$$