Sétima sesión

Análisis Convexos - CM3E2

Jonathan Munguia[1]

[1]Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

4 de mayo de 2021

Outline

$y_1, y_2 \in C \qquad x = ty_1 + (1-t)y_2 \Rightarrow y_1 = y_2 = x$

Definición 1 (Puntos extremos)

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Se dice que $x \in C$ es un punto extremo de C si x no puede escribirse como $ty + (1-t)z$ para $y, z \in C \setminus \{x\}$, $t \in (0,1)$. Denotamos por $\mathrm{ext}(C)$ al conjunto de puntos extremos de C.

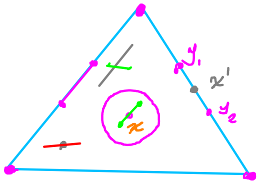
Ejercicio 1

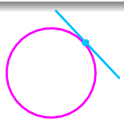
Hallar los puntos extremos de

a) Un triángulo en $\mathbb{R}^2$.

b) El círculo unitario en el plano.

c) La cápsula convexa de los puntos $(1,0,1)$, $(1,0,-1)$ y el círculo $\{(x,y,0)\,;\,x^2+y^2=1\}$ en $\mathbb{R}^3$.





Solución

a) Los vértices del triángulo.

b) Los puntos de la circunferencia unitaria.

c) El conjunto

(1, 0, 0)

$$\{(1,0,1),(1,0,-1)\}\cup\{(x,y,0):(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\},\ x^2+y^2=1\}$$

El punto $(1,0,0)$ no es extremo porque se encuentra en el segmento $[(1,0,1);(1,0,-1)]$.

Observación 1

El item c) muestra que el conjunto de puntos extremos de un conjunto convexo compacto no necesita ser cerrado.

Figura: Conjunto extremo no cerrado.

Observación 2

Otras caracterizaciones de punto extremo de $C \subset \mathbb{R}^n$:

a) $x \in C$ es un punto extremo si y solo si $x = t\,x_1 + (1-t)x_2$, $t \in (0,1)$ y $x_1, x_2 \in C$ implica que $x = x_1 = x_2$.

b) $x \in C$ es un punto extremo si y solo si $x = t\,x_1 + (1-t)x_2$, $t \in [0,1]$ y $x_1, x_2 \in C$ con $x_1 \neq x_2$ implica que o $t = 0$ o $t = 1$.

c) $x \in C$ es un punto extremo si y solo si $C \setminus \{x\}$ es convexo.

C convexo

Los puntos extremos son un caso especial de una noción más general:

$F \subset A$ $\langle x, y \rangle \cap F \neq \emptyset \Rightarrow x, y \in F$

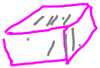
Definición 2 (Cara)

Una cara o subconjunto extremo de un conjunto convexo A es subconjunto no vacío F con la propiedad que si

$$x, y \in A,\ t \in (0,1),\ \wedge\ tx + (1-t)y \in F \Longrightarrow x, y \in F.$$

Una cara, F, que es estrictamente más pequeña que A es llamada una cara propia.

Ejemplo 1



En el caso de un triángulo en el plano, vimos que los puntos extremos son los vértices. Como caras o subconjuntos extremos se tienen el vacío, los vértices, las aristas y todo el triángulo.

Definición 3 (Semiespacio e hiperplano soporte)

Dado $C \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto convexo cerrado no vacío. Se dice que el semiespacio cerrado K es un **semiespacio soporte** de C si $C \subset K$ y $H \cap C \neq \emptyset$, donde H denota el hiperplano frontera de K. Al hiperplano H que delimita a un semiespacio soporte de C se le llama **hiperplano de soporte** a C. Si C no está contenido en H diremos que H es un **hiperplano de soporte propio**.

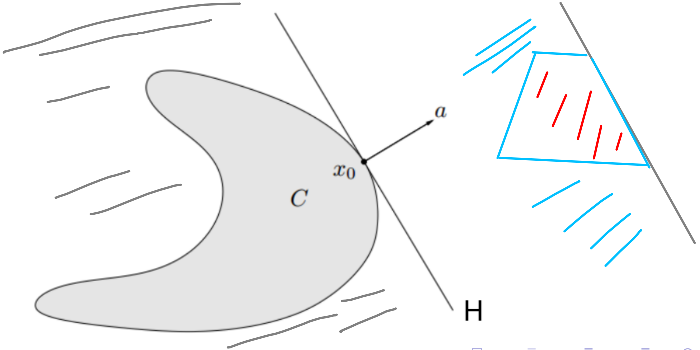
H soporte

si . $C \cap H \neq \phi$

. $C \subset H^-$

ó

$C \subset H^+$



$H^- = \{x : \langle x, a\rangle \le b\}$

$H^+ = \{x : \langle x, a\rangle \ge b\}$

$x_0 \in H \cap C \Rightarrow \langle x_0, a\rangle = b$

Si $C \subset H^-$ → $\langle x, a\rangle \le b$

ó

$C \subset H^+$

normal

Proposición 1 Bronsted

Dado C un conjunto convexo cerrado no vacío y $H = \{x : \langle x, a\rangle = b\}$ *con* $a \neq 0$*. Se dice que H es un hiperplano de soporte de C si y solo si*

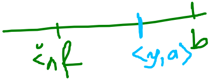
$$b = \max_{x \in C} \langle x, a\rangle \quad \vee \quad b = \min_{x \in C} \langle x, a\rangle.$$

$\sup_{x \in C} \langle x, a\rangle \le b$

Si $C \subset K = \{x : \langle x, a\rangle \le b\}$*, entonces H es un hiperplano de soporte propio si y solo si*

$C \not\subset H$

$$\inf_{x \in C} \langle x, a\rangle < \underbrace{\max_{x \in C} \langle x, a\rangle}_{b}.$$



$\exists\, y \in C \wedge y \notin H$

$\langle y, a\rangle \lneq b$

$\langle y, a\rangle < b$

$\inf \langle x, a\rangle \le \langle y, a\rangle < b = \max \langle x, a\rangle$

Demostración

Es fácil ver que H es un hiperplano de soporte si y sólo si

i) $\exists x_0 \in H \cap C$,

ii) $C \subset H^+ = \{x : \langle x, a\rangle \geq b\}$ ó $C \subset H^- = \{x : \langle x, a\rangle \leq b\}$.

a) $\Rightarrow$) Si $C \subset H^+$ entonces $\forall x \in C : \langle x, a\rangle \geq b$ y como $\langle x_0, a\rangle = b$ se tiene que $\min_{x\in C}\langle x, a\rangle = b$. De manera similar si $C \subset H^-$ se obtiene que $\max_{x\in C}\langle x, a\rangle = b$.
$\Leftarrow$) Si $\min_{x\in C}\langle x, a\rangle = b$ entonces $\exists x_0 \in C$ t.q. $\langle x_0, a\rangle = b$ y $\forall x \in C : \langle x, a\rangle \geq b$. Por tanto, $\exists x_0 \in H \cap C$ y $C \subset H^-$, de manera similar con el máximo.

b) Si $C \not\subset H$ entonces $\exists y \in C \wedge y \notin H$. Luego,

$$\inf_{x\in C}\langle x, a\rangle \leq \langle y, a\rangle < b = \max_{x\in C}\langle x, a\rangle.$$

La implicación inversa se sigue de la definición de ínfimo.

Teorema de Representación de Riesz.
$V = \{$espacios de funcionales lineales sobre $C\}$
$\lambda \in V \Rightarrow \exists w \in C$ tq $l(y) = \langle w, y \rangle \; \forall y \in C$
$= b$

Teorema 1

Sea C un subconjunto convexo cerrado no vacío y sea $l : C \to \mathbb{R}$ una funcional lineal no constante tal que

$$b := \sup_{x \in C} l(x) \cancel{= b} < \infty.$$

$b \geq l(x), \; \forall x \in C$

$\exists w \in C$ tq $l(w) \neq b \Rightarrow w \notin F := \Rightarrow C \not\subset F$

Entonces,

$\exists a \in C \setminus \{0\}$ tq $\langle a, y \rangle$

$$F = \{y \in C : l(y) = b\} = l^{-1}(\{b\})$$

si es no vacío, es una cara propia de C.

$\langle x_1, x_2 \rangle \cap F \neq \phi \Rightarrow \exists t \in \langle 0, 1 \rangle \quad t x_1 + (1-t) x_2 \in F$
$\Rightarrow x_1, x_2 \in F$

$\ell(ty+(1-t)z) = t\,\ell(y) + (1-t)\,\ell(z) = b$

Demostración

$< tb + (1-t)b = b$

Ver Teorema 8.3 de [4]. Desde que l es lineal, F es convexo. Además, si $y, z \in C$ y $t \in (0,1)$ y $ty + (1-t)z \in F$, entonces $tl(y) + (1-t)l(z) = b$ y $l(y) \leq b$, $l(z) \leq b$ implica que $l(y) = l(z) = b$, esto es, $y, z \in F$, luego F es una cara y como l no es constante, entonces F es una cara propia de C. Es más F es un hiperplano de soporte.

CC

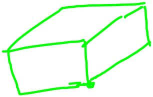
Definición 4 (Cara expuesta)

Se dice que una cara F de un subconjunto convexo cerrado es una cara expuesta si existe un hiperplano de soporte H al conjunto C tal que $F = C \cap H$. Si F es unitario entonces lo llamaremos punto expuesto.

$F \subset C \cap H$

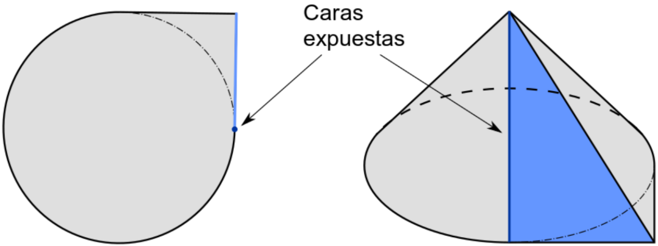
Observación 3

La cara F del Teorema 1 es una cara expuesta de C.



Ejemplo 2

En la figura siguiente se tiene un conjunto bidimensional y un cono tridimensional que tienen caras expuestas.

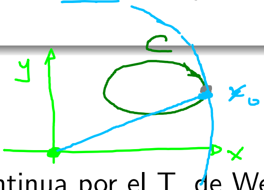


¿Bajo qué condiciones un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ posee un punto extremo?

$0 \leq 2\langle x_2 - x_1, x_1 \rangle + t\|x_2 - x_1\|^2$

Teorema 2 (Existencia)

Los conjuntos convexos $\boxed{\textit{compactos}}$ *no vacíos de* $\mathbb{R}^n$ *poseen al menos un punto extremo.*



$\|\cdot\| : C \to \mathbb{R}$

Demostración

Ver Teorema 8.1.1 de [3].

1. Dado C compacto y $\|\cdot\|$ es continua por el T. de Weierstrass $\exists x_0 \in C$ tal que $\|x_0\| = \max_{x \in C} \|x\|$ $\geq \|x\|$
2. Como C es convexo existen $x_1, x_2 \in C$ $t \in (0,1)$ t.q. $x_0 = x_2 + t(x_1 - x_2)$. Luego, para $x \in C$, se tiene

$$\|x\|^2 \leq \|x_2\|^2 + 2t\langle x_1 - x_2, x_2 \rangle + t^2\|x_1 - x_2\|^2,$$

$$0 \leq 2\langle x_1 - x_2, x_2 \rangle + t\|x_1 - x_2\|^2$$

$0 \leq -2\|x_1 - x_2\|^2 + 2t\|x_1 - x_2\|^2$

$0 \leq (t-1)\|x_1 - x_2\|^2$

Demostración (cont...)

3. Tomando $x = x_2$, usando simetría y sumando convenientemente, se tiene que

$$\|x_1 - x_2\|^2 \leq t\|x_1 - x_2\|^2.$$

4. Como $t < 1$, se tiene que $\|x_1 - x_2\| = 0$, es decir $x_1 = x_2$, por tanto x_0 es un punto extremo.

$x_1 = x_2 = x_0$

Teorema 3

Si C es un subconjunto convexo compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$, entonces cuaquier hiperplano de soporte a C contiene al menos un punto extremo de C.

$\langle x_0, a\rangle = t\langle x_1, a\rangle + (1-t)\langle x_2, a\rangle$
$> tb + (1-t)b = b$

Demostración

Ver Teorema 8.1.2 de [3].

1. Sea $H = \{x : \langle x, a\rangle = b\}$ con $a \neq 0$ un hiperplano de soporte a C en x_0.
2. $x_0 \in$ $F = H \cap C$ es un conjunto convexo compacto no vacío y por el Teorema 2 tiene al menos un punto extremo. !
3. Sea x_0 un punto extremo de F, supongamos que existen $x_1, x_2 \in C$, $t \in (0, 1)$ tal que $x_0 = tx_1 + (1-t)x_2$. $\Rightarrow x_1 = x_2 = x_0$
4. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $C \subset \mathcal{H} := \{x : \langle x, a\rangle \geq b\}$, luego x_1, x_2 también.
5. Como $x_0 \in H$ entonces $\boxed{x_1, x_2 \in H}$, pues si por ejemplo $\langle x_1, a\rangle > b$ se tendría que $\langle x_0, a\rangle > b$, lo cual es una contradicción.

Demostración (cont...)

6. Así $x_1, x_2 \in F$. Como x_0 es punto extremo de F, entonces $\boxed{x_0 = x_1 = x_2.}$ Luego, de (3) se tiene que x_0 es un punto extremo de C.

Referencias bibliográficas

1. Tuy, Hoang. Convex Analysis and Global Optimization. Springer Optimization and Its Applications, vol 110, 2016.
2. Brondsted, Arne. An Introduction to Convex Polytopes. Graduate Texts in Mathematics, vol 90, 1983.
3. Panik, Michael J. Fundamentals of Convex Analysis. Duality, Separation, Representation, and Resolution, 1993.
4. Simon, Barry. Convexity: An analytic viewpoint. Cambridge Tracts in Mathematics, 2011.

FIN