Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2]
[Prof: Los Profesores] UNI, 27 de abril de 2021

Práctica Calificada 1

1. Diga el valor de verdad de las siguientes proposiciones y justifique. [5ptos]

   a) Se dice que una EDO tiene término fuente homogéneo si el término independiente es nulo.

   b) Las soluciones de una EDO cruzan las isoclinas siempre con la misma pendiente.

   c) Si una EDO con variable dependiente x contiene el término "$\tan(x)y$" puede ser lineal?

   d) La EDO $y^{vi} + (y'')^3 = 0$ es estándar y su orden y grado son iguales.

   e) La EDO $y' = f(x, y)$ con $f(x, y) = \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 y}$ es homogénea.

Solución:

a) (V) Por definición.

b) (V) Por definición las isoclinas son curvas $f(x, y) = C$ donde C son pendientes constantes de la solución.

c) (F) El término es no lineal por la variable dependiente es afectada por una función trigonométrica.

d) (F) Es estándar porque el coeficiente de la derivada de mayor orden es uno, pero su orden y grado son diferentes. Su orden es la derivada de mayor orden 6 y los grados de sus derivas son 1 para la derivada de orden 6 y 3 para la derivada de orden 2.

e) (V) Solo basta ver que $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ para todo $\lambda > 0$.

2. Un árbol recién plantado crece lentamente, pero gradualmente crecerá a una velocidad más rápida. Cuando alcanza cierta altura, la tasa de crecimiento se estabilizará gradualmente y luego disminuirá lentamente. Halle y resuelva la EDO que modele el crecimiento de los árboles por años, bajo los siguientes supuestos: [5ptos]

   i) Suponga que hay una altura máxima a la que un árbol puede crecer, cuando se alcanza esta altura, el árbol dejará de crecer más alto.

   ii) Suponga que la tasa de crecimiento de un árbol solo está relacionada con su altura actual y la diferencia entre la altura máxima y su altura actual. No está influenciada por otros factores ambientales.

Solución: Sea H la altura máxima, $h(t)$ la altura del árbol en el año t y sea $k > 0$ la constante de crecimiento tal que

$$h'(t) = kh(t)[H - h(t)]\,, t > 0$$

Resolviendo por separación de variables:

$$\int \frac{dh}{h(H-h)} = \int dt$$

$$\frac{1}{H}[\ln h - \ln(H-h)] = kt + \tilde{C}$$

$$\frac{h}{H-h} = e^{H\tilde{C}} e^{ktH}$$

Tomando $C = e^{H\tilde{C}}$ obtenemos

$$h = \frac{CHe^{ktH}}{1 + Ce^{ktH}}.$$

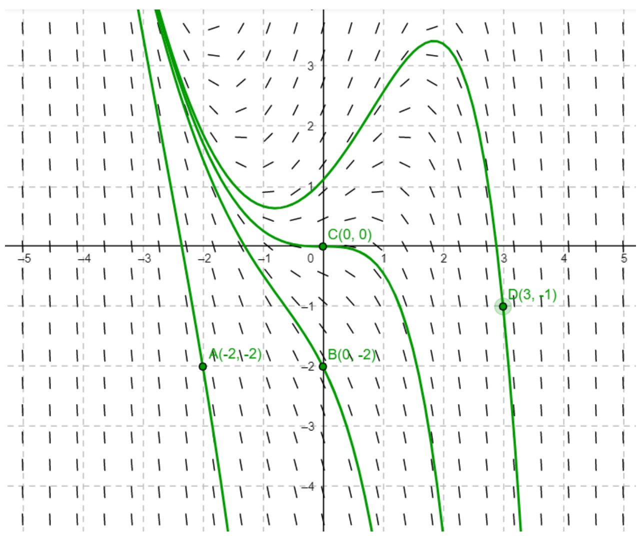
3. Dada la EDO $y' = y - x^2$. Calcular

   a) Las isoclinas. [1ptos]

   b) Un esbozo del campo de direcciones. [2ptos]

   c) Aproximadamente las soluciones que pasen por $A(-2,-2)$, $B(0,-2)$, $C(0,0)$ y $D(3,-1)$.[2ptos]

Solución: Las isoclinas son la familia de parábolas $y = x^2 + C$ con $C \in \mathbb{R}$. Y el campo de direcciones con sus soluciones:



4. Resuelva la ecuación de Bernoulli $y' - y = e^x y^{-2}$. (Sug. Utilice un cambio de variable $u = y^3$)[5ptos]

Solución: Escribimo la EDO como: $3y^2y' - 3y^3 = 3e^x$. Luego por el cambio de variable, se obtiene

$$u' - 3u = 3e^x$$

Multiplicando por el factor de integración e^{-3x}, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(e^{-3x}u) &= 3e^{-2x} \\ e^{-3x}u &= -\frac{3}{2}e^{-2x} + C \\ u &= -\frac{3}{2}e^{x} + Ce^{3x} \\ y &= \left(-\frac{3}{2}e^{x} + Ce^{3x}\right)^{1/3}. \end{aligned}$$