Novena sesión

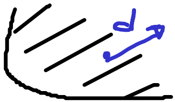
Análisis Convexos - CM3E2

Jonathan Munguia[1]

[1]Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

11 de mayo de 2021

Outline



Definición 1 (Dirección de recesión)

Dado $C \subset \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Se dice que C se aleja en la dirección d y que d es una dirección de recesión de C si C contiene todas las semirectas con dirección d y que inician en un punto arbitrario de C. Es decir

$$\forall x \in C, \forall \lambda > 0 : \quad x + \lambda d \in C.$$

Un rayo de recesión o semirecta emanando de $x \in C$ y apuntando en la dirección de recesión d es el subconjunto:

$$\{x + \lambda d \, : \, \lambda \geq 0\} \subset C.$$

Definición 2 (Cono de recesión)

El conjunto de todas las direcciones de recesión de C y el vector nulo se llama cono de recesión o cono asintótico y se denota por $\mathrm{recc}(C)$. Por tanto, si C es un conjunto no vacío, se tiene

$$\mathrm{recc}(C) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : x + \lambda d \in C \quad \forall x \in C, \forall \lambda > 0 \right\},$$

mientras que $\mathrm{recc}(\emptyset) = \{0\}$.

Observación 1

Si C es acotado entonces no contiene rayos de recesión. Otras notaciones para el cono de recesión son C_∞ y $0^+ C$.

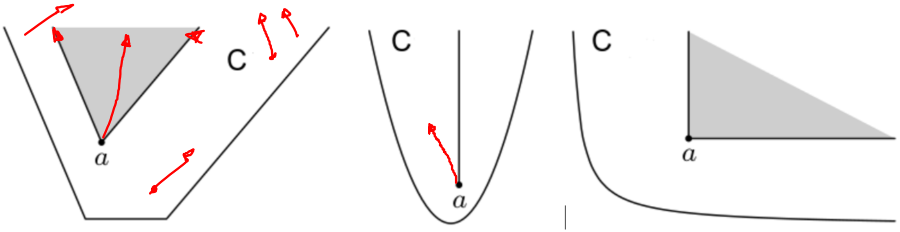
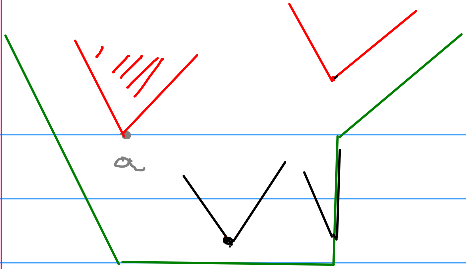


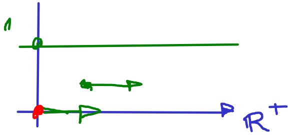
Figura: 3 conjuntos convexos y sus correspondientes conos de recesión trasladados $a + \mathrm{recc}(C)$.

Definición 3 (Conjunto de direcciones de recesión en un punto)

Dado $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo no vacío, se define el conjunto de direcciones con respecto a $x \in C$ como

$$C_\infty(x) := \{d \in \mathbb{R}^n \, : \, x + \lambda d \in C \quad \forall \lambda > 0\}.$$





Ejemplo 1

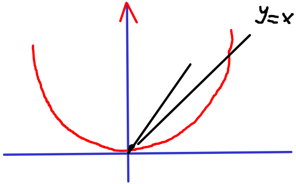
i) $\mathrm{recc}(\mathbb{R}_+ \times [0,1]) = \mathrm{recc}(\mathbb{R}_+ \times]0,1[) = \mathbb{R}_+ \times \{0\}$

ii) $\mathrm{recc}(\mathbb{R}_+ \times]0,1[\cup \{(0,0)\}) = \{(0,0)\}$

iii) $\mathrm{recc}\{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\} = ?$ $\{(0,0)\}$

iv) $\mathrm{recc}\{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq x^2\} = ?$ $\{0\} \times \mathbb{R}_+$

v) $\mathrm{recc}\{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 1/x,\ x > 0\} = ?$



$d \in recc(C) \Leftrightarrow \forall x \in C, \underbrace{\forall \lambda > 0 : x + \lambda d \in C}$

$\Leftrightarrow \forall x \in C: d \in C_\infty(x)$

$\Leftrightarrow d \in \bigcap_{x \in C} C_\infty(x)$

Observación 2

El conjunto $C_\infty(x)$ es un cono convexo con punta.

Teorema 1

Dado $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo no vacío. El cono de recesión de C se puede escribir como

$$recc(C) = \bigcap_{x \in C} C_\infty(x).$$

Observación 3

Dado $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo no vacío, el cono de recesión de C es un cono convexo ya que la intersección de conos convexos e un cono convexo.

$\supseteq)$ $y = x + d$, $x \in C$, $d \in recc(C)$ $\Rightarrow d \in C_\infty(x)$

$\in C$

$t = 1$

$\Rightarrow x + 1 \cdot d \in C$

Proposición 1

Dado $C \subset \mathbb{R}^n$, el cono de recesión de C cumple

$\subset$ $C + \{0\}$

$$C = C + recc(C).$$

Proposición 2

Dado C convexo no vacío. El cono de recesión se expresa como

$$recc(C) \overset{\subset}{=} \{d \in \mathbb{R}^n : C + d \subset C\}.$$

$x + d \in C$

$(x+1) + d \in C$

Demostración

Dado $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $x \in C$ fijo arbitrario, se tiene que $x + nd \in C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \leq \lambda \leq n_0 + 1$. Debido a la convexidad $[x + n_0 d, x + (n_0+1)d] \subset C$ y por tanto $x + \lambda d \in C$.

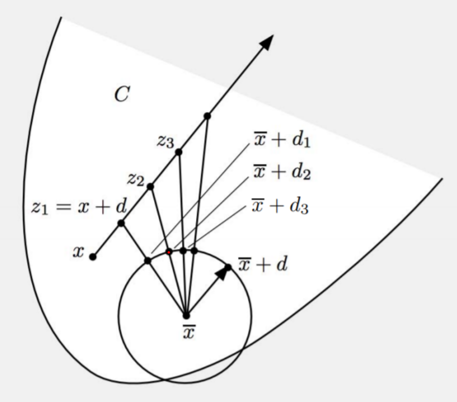
$x + \lambda d$

x $\quad x + n_0 d$ $\quad x + (n_0+1)d$

Teorema 2

Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío. d es una dirección de recesión de C si y solo si

$$\Leftarrow \qquad \exists x \in C \quad \text{t.q.} \quad \{x + \lambda d \,:\, \lambda > 0\} \subset C. \tag{1}$$



$S(\overline{x}, \|d\|)$

$\overline{x} \in C$

¿$\overline{x} + d \in C$?

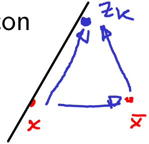
$\|z_k - x\| = k\,\|d\|$

Demostración

$k \in \mathbb{N} \qquad z_k - x = kd$

Sea x verificando (1), entonces consideremos la sucesión $\{z_k\} \subset C$ con $z_k = x + kd$ se tiene que $\|z_k - x\| \to \infty$. Además la sucesión $\overline{x} + d_i \in S[\overline{x}, \|d\|]$ (esfera cerrada de centro $\overline{x}$ y radio $\|d\|$) con

$$d_k = \|d\| \frac{z_k - \overline{x}}{\|z_k - \overline{x}\|}.$$



Luego, sumando convenientemente x, se infiere que

$$\frac{z_k - \overline{x}}{\|z_k - \overline{x}\|}$$

$$\frac{d_k}{\|d\|} = \frac{x - \overline{x}}{\|z_k - \overline{x}\|} + \frac{z_k - x}{\|z_k - \overline{x}\|} = \frac{kd}{\|z_k - \overline{x}\|}$$

$$= \frac{x - \overline{x}}{\|z_k - \overline{x}\|} + \frac{\|z_k - x\|}{\|z_k - \overline{x}\|} \frac{d}{\|d\|},$$

donde $\frac{x - \overline{x}}{\|z_k - \overline{x}\|} \to 0$ y $\frac{\|z_k - x\|}{\|z_k - \overline{x}\|} \to 1$. Por tanto $\overline{x} + d_k \to \overline{x} + d$. Por la convexidad $\{\overline{x} + d_k\} \subset C$ y por la cerradura $\overline{x} + d \in C$.

$\|z_k - x\| \leq \|x - \overline{x}\| + \|z_k - \overline{x}\|$

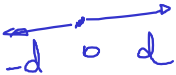
$$\underbrace{\|z_k - \bar{x}\|} - \|x - \bar{x}\| \le \|z_k - x\| \le \|z_k - \bar{x}\| + \|x - \bar{x}\|$$

$$1 - \underbrace{\frac{\|x - \bar{x}\|}{\|z_k - \bar{x}\|}}_{\to 0} \le \underbrace{\frac{\|z_k - x\|}{\|z_k - \bar{x}\|}}_{\to 1} \le 1 + \underbrace{\frac{\|x - \bar{x}\|}{\|z_k - \bar{x}\|}}_{\to 0}$$

$$\frac{d_k}{\|d\|} \to \frac{d}{\|d\|} \Rightarrow d_k \to d$$

$$\Rightarrow \underbrace{\bar{x} + d_k}_{\in C} \to \underbrace{\bar{x} + d}_{\in C}$$

(cerrado)



Definición 4 (Espacio de linealidad)

Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío. El espacio de linealidad de C, se define como

$$L_C := \mathrm{recc}(C) \cap \mathrm{recc}(-C).$$

Observación 4

i) Si $d \in L_C$, entonces C contiene la recta definida por d y cualquier punto de C.

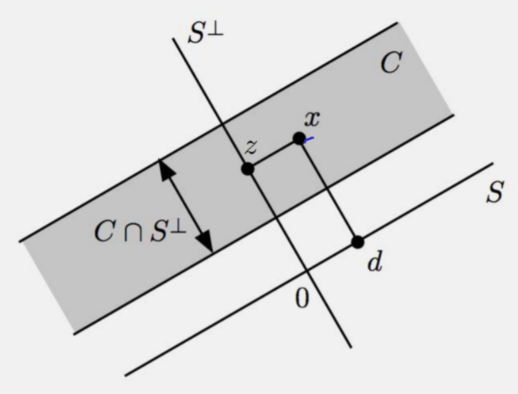
ii) Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío. Entonces,

$$C = L_C + (C \cap L_C^{\perp}).$$

Observación 5

iii) $\operatorname{recc}(C) = L_C + (\operatorname{recc}(C) \cap L_C^{\perp})$.

iV) También se obtiene una descomposición ortogonal si reemplazamos L_C por un subespacio S.



Proposición 3

Sea C un conjunto convexo no vacío. y $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ lineal, entonces

$$A(ri(C)) = ri(A(C)) = ri(A(\overline{C})).$$

Teorema 3

Sea C un conjunto convexo no vacío. y $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ lineal. Si además:

$$Ad = 0 \ \wedge \ d \in recc(\overline{C}) \Rightarrow -d \in recc(\overline{C}),$$

entonces

a) $\overline{A(C)} = A(\overline{C})$,

b) $A(recc(\overline{C})) = recc(\overline{A(C)})$.

$$\mathrm{ri}\, C \subset C \subset \overline{C} = \overline{\mathrm{ri}(C)}$$

→ prop 1.12 (Eladio)

$$\overline{A(\mathrm{ri}\, C)} \subset \overline{A(C)} \subset \overline{A(\overline{C})} = \overline{A(\overline{\mathrm{ri}(C)})} \subset \overline{\overline{A(\mathrm{ri}\, C)}}$$

$$A(\overline{K}) \subset \overline{A(K)}$$

continuidad

$$\overline{A(\mathrm{ri}\, C)} = \overline{A(C)} = \overline{A(\overline{C})}$$

Si C_1, C_2 convexos

$$\overline{C_1} = \overline{C_2} \Leftrightarrow \mathrm{ri}\, C_1 = \mathrm{ri}\, C_2$$

$$\Rightarrow \mathrm{ri}(A(\mathrm{ri}\, C)) = \mathrm{ri}(A(C)) = \mathrm{ri}(A(\overline{C}))$$

$$\subset A(\mathrm{ri}\, C)$$

$\Rightarrow \quad ri(A(C)) \subset A(ri\,C) \quad \ldots (*)$

Veamos q' $\quad A(ri\,C) \subset ri(A(C))$

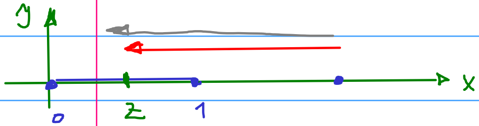
Rockafellar
Teo 6.4

C convexo no vacío y $z \in \mathbb{R}^n$

$z \in ri\,C \iff \forall x \in C : \exists \mu > 1$ tq $(1-\mu)x + \mu z \in C$

$x + \mu(z-x)$

$S = [0,1] \times \{0\} \cup (2,0)$



$\cdot\, aff(S) =$ eje X

$ri(S) = \langle 0,1 \rangle$

$$A(\mathrm{ri}\, C) \subset \mathrm{ri}\,(A(C))$$

$z \in A(\mathrm{ri}\, C) \in \mathbb{R}^n$

$x \in A(C)$ cualquiera

$\Rightarrow \exists\ \boxed{z' \in \mathrm{ri}\, C},\ \exists\, x' \in C$ tq $z = Az'$, $x = Ax'$

en particular para $x' \in C$, $\exists\ \mu > 1$ tq

$$(1-\mu)x' + \mu z' \in C$$

tomamos la imagen vía A

$$(1-\mu)Ax' + \mu A z' \in A(C)$$

$$(1-\mu)x + \mu z \in A(C)$$

$\Rightarrow\ z \in \mathrm{ri}\,(A(C))$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++} : xy \geq 1\}$ cerrado

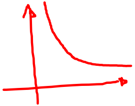
$A(x,y) = x \Rightarrow A(C) = (0,+\infty)$ no es cerrado

Observación 6

i) Si $C \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado y $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ lineal, la imagen $A(C)$ no es cerrado necesariamente.

ii) La suma de dos conjuntos convexos cerrados no siempre es cerrado.

↳ Busca ejemplo.



Corolario 1

Sean C y D convexos de $\mathbb{R}^n$ que satisfacen la condición

$$d \in \operatorname{recc}(\overline{C}) \cap \operatorname{recc}(-\overline{D}) \Rightarrow -d \in \operatorname{recc}(\overline{C}) \cap \operatorname{recc}(-\overline{D}).$$

Entonces,

$$\overline{C+D} = \overline{C} + \overline{D} \quad \wedge \quad \operatorname{recc}(\overline{C+D}) = \operatorname{recc}(\overline{C}) + \operatorname{recc}(\overline{D}).$$

Leer pág 12 al 14 del libro Análisis Convexo Gutierrez - Ocaña

FIN