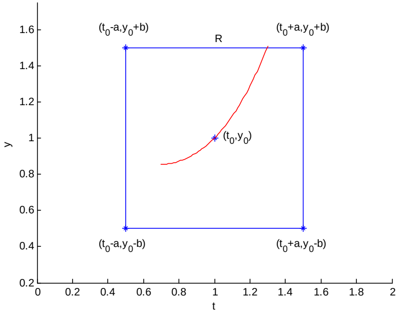
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Teorema (de Picard)

Si $R = [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ *y* $f(t, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *son reales y continuas en* R, *entonces existe* $\delta > 0$ *tal que el problema (1) tiene una única solución en* $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.



Teorema de Picard

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f\left(t, y\right), \\ y\left(t_0\right) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

El valor de δ no es conocido en general, pero podemos obtener un valor mínimo para δ.

Teorema

Sean f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ funciones continuas en el rectángulo $R = \{(t, y) : t_0 - a \leq t \leq t_0 + a,\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$, y sean

$$M = \max_{(t,y)\in R} \left|f\left(t, y\right)\right|, \delta = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

Entonces el problema de Cauchy (2) posee una única solución $y\left(t\right)$ en el intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

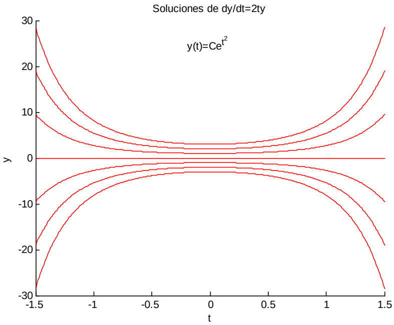
Ejemplo de ecuación lineal homogénea

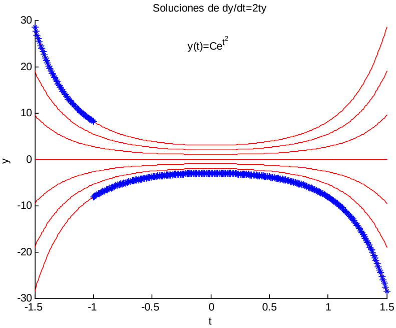
$$\frac{dy}{dt} = 2ty$$

Solución general:

$$|y(t)| = De^{t^2},\ D \geq 0$$

$$y(t) = Ce^{t^2},\ C \in \mathbb{R}$$





Ecuación lineal no homogénea

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\,y = b(t)$$

1. Multiplicamos la ecuación por $e^{\int a(t)dt}$:

$$\frac{dy}{dt} e^{\int a(t)dt} + a(t)\,y e^{\int a(t)dt} = b(t)\,e^{\int a(t)dt}$$

2. Usamos la derivada del producto:

$$\frac{d}{dt}\left(y e^{\int a(t)dt}\right) = \frac{dy}{dt} e^{\int a(t)dt} + a(t)\,y e^{\int a(t)dt}$$

3. Entonces:

$$\frac{d}{dt}\left(y e^{\int a(t)dt}\right) = b(t)\,e^{\int a(t)dt}$$

4. Después integramos ambas partes de la igualdad

Ecuaciones separables

$$\frac{dy}{dt} = f(y)\, g(t)$$

$$\frac{dy}{f(y)} = g(t)\, dt$$

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(t)\, dt \tag{3}$$

Puntos fijos:

$$f(\overline{y}) = 0$$

$$y(t) \equiv \overline{y}$$

Solución general:

$$G(t, y, C) = 0 \text{ (obtenida de (3))}$$

y los puntos fijos

$$y_1(t) \equiv y_1,\; y_2(t) \equiv y_2, \ldots$$

Ecuaciones homogéneas

$$\frac{dy}{dt} = f\left(t, y\right) = F\left(\frac{y}{t}\right)$$

Cambio de variable:

$$u = \frac{y}{t}$$

$$y' = u't + u$$

$$u't + u = F\left(\frac{y}{t}\right) = F\left(u\right)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{F\left(u\right) - u}{t}$$

Ecuación de Bernoulli

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\,y = b(t)\,y^n,\ n \neq 0, 1$$

Cambio de variable:

$$u = \frac{1}{y^{n-1}}$$

$$u' = (1-n)\,\frac{y'}{y^n}$$

$$\frac{y'}{y^n} + a(t)\,\frac{1}{y^{1-n}} = b(t) \Rightarrow \frac{1}{1-n}u' + a(t)\,u = b(t)$$

Ecuación lineal:

$$u' + (1-n)\,a(t)\,u = (1-n)\,b(t)$$

Modelos de poblaciones

p =Número de habitantes de una población animal o vegetal:

$$\frac{dp}{dt} = \text{veloc. de nacimientos-veloc. de fallecimientos}$$

Modelo de Malthus:

$$\frac{dp}{dt} = ap, a > 0$$

$$p(t) = p_0 e^{a(t-t_0)}$$

$a = 0.02$ (estimación)

$$p(1965) = 3335 \text{ millones (real)}$$

$p(2000) \simeq$	$3335 * 10^6 * e^{0.02(2000-1965)} =$	6715.9 millones
$p(2050) \simeq$	$3335 * 10^6 * e^{0.02(2050-1965)} =$	18256 millones
$p(2500) \simeq$	$3335 * 10^6 * e^{0.02(2500-1965)} =$	148 billones

Población real en el año 2000: 6070.6 millones

Modelos de poblaciones

Modelo de Verhulst (ecuación logística):

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2, a, b > 0$$

Solución:

$$p(t) = \frac{1}{\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{p_0} - \frac{b}{a}\right) e^{-a(t-t_0)}}$$

Puntos fijos:

$$p_1 = \frac{a}{b}, \; p_2 = 0$$

$a = 0.029,\ b = 2.695 * 10^{-12}$ (estimación)

$$\frac{a}{b} = \frac{0.029}{2.695 * 10^{-12}} \simeq 10760 \text{ millones}$$

Datos de población:

Año	Población	
1965	3335	millones
2000	6070.6	millones
2015	7500	millones

Predicción: Dato inicial $p(1965) = 3335 * 10^6$:

$$p(2000) \simeq \frac{1}{\frac{2.695*10^{-12}}{0.029} + \left(\frac{1}{3335*10^6} - \frac{2.695*10^{-12}}{0.029}\right) e^{-0.029*(2000-1965)}}$$

$$= 5955.3 \text{ millones}$$

$$p(2015) \simeq \frac{1}{\frac{2.695*10^{-12}}{0.029} + \left(\frac{1}{3335*10^6} - \frac{2.695*10^{-12}}{0.029}\right) e^{-0.029*(2015-1965)}}$$

$$= 7068 \text{ millones}$$

$a = 0.029, \ b = 2.695 * 10^{-12}$ (estimación)

$$\frac{a}{b} = \frac{0.029}{2.695 * 10^{-12}} \simeq 10760 \text{ millones}$$

Datos de población:

Año	Población	
1965	3335	millones
2000	6070.6	millones
2015	7500	millones

Predicción: Dato inicial $p(2015) = 7500 * 10^6$:

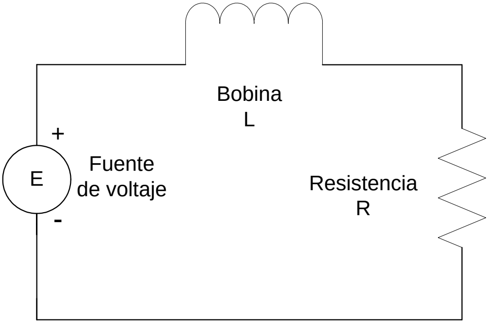
$$p(2020) \simeq \frac{1}{\frac{2.695*10^{-12}}{0.029} + \left(\frac{1}{7500*10^6} - \frac{2.695*10^{-12}}{0.029}\right) e^{-0.029*(2020-2015)}}$$

$$= 7820 \text{ millones}$$

$$p(2050) \simeq \frac{1}{\frac{2.695*10^{-12}}{0.029} + \left(\frac{1}{7500*10^6} - \frac{2.695*10^{-12}}{0.029}\right) e^{-0.029*(2050-2015)}}$$

$$= 9300 \text{ millones}$$

Circuitos eléctricos: Circuito RL en serie

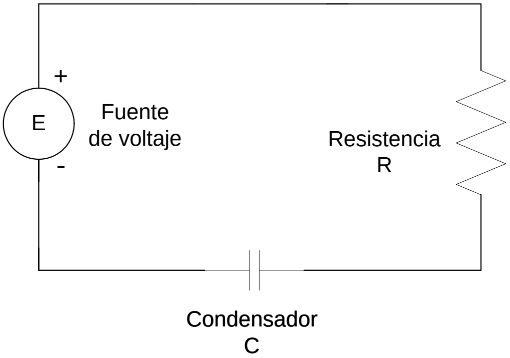


Ley de Ohm: $V_R = RI$

Ley de Faraday: $V_L = L\frac{dI}{dt}$

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E\left(t\right)$$

Circuitos eléctricos: Circuito RC en serie

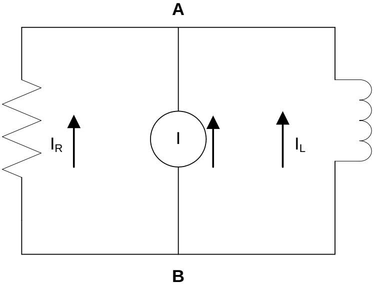


Ley de Ohm: $V_R = RI$
Ley de Coulomb: $V_C = \frac{1}{C}Q$

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

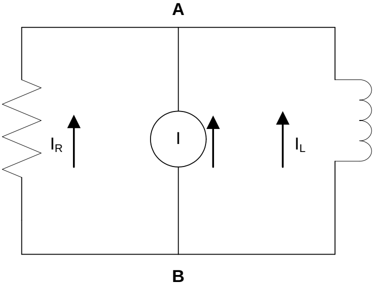
Circuitos eléctricos: Circuito RL en paralelo

Caso lineal:



Circuitos eléctricos: Circuito RL en paralelo

Caso lineal:

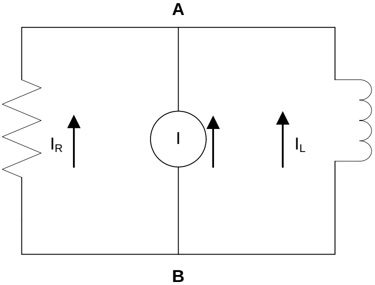


Ley de la corriente en el punto **A**: $I_R + I_L + I = 0$
Ley de Kirchhoff: $L\frac{dI_L}{dt} = RI_R$
Opción 1:

$$L\frac{dI_L}{dt} = -RI_L - RI$$

Circuitos eléctricos: Circuito RL en paralelo

Caso lineal:



Ley de la corriente en el punto **A**: $I_R + I_L + I = 0$
Ley de Kirchhoff: $L\frac{dI_L}{dt} = RI_R$
Opción 1:

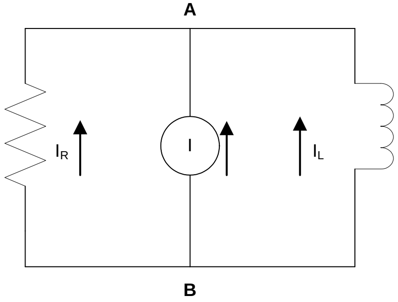
$$L\frac{dI_L}{dt} = -RI_L - RI$$

Opción 2:

$$L\frac{dI_R}{dt} = -RI_R - L\frac{dI}{dt}$$

Circuitos eléctricos: Circuito RL en paralelo

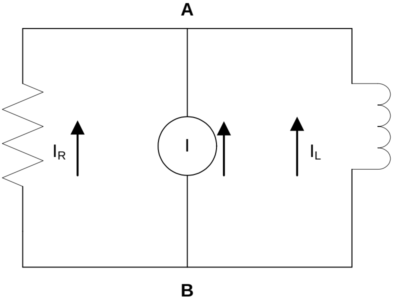
Caso no lineal: $V_R = I_R^2 - 4I_R$



Ley de la corriente en el punto **A**: $I_R + I_L + I = 0$
Ley de Kirchhoff: $L\frac{dI_L}{dt} = I_R^2 - 4I_R$

Circuitos eléctricos: Circuito RL en paralelo

Caso no lineal: $V_R = I_R^2 - 4I_R$



Ley de la corriente en el punto **A**: $I_R + I_L + I = 0$
Ley de Kirchhoff: $L\frac{dI_L}{dt} = I_R^2 - 4I_R$

$$L\frac{dI_R}{dt} = -I_R^2 + 4I_R - L\frac{dI}{dt}$$

Teoría cualitativa

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

Pasos:

1. Hallar los puntos fijos: $f(y) = 0$.
2. Dibujar el diagrama de fases.
3. Estudiar el comportamiento de las soluciones a largo plazo en cada subintervalo.
4. Estudiar la estabilidad de los puntos fijos.
5. Dibujar las soluciones en el plano.

El método de Euler

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{dy}{dt} = f\left(t, y\right) \\ y\left(t_0\right) = y_0 \end{array} \right.$$

$$t_0 < t_1 = t_0 + h < t_2 = t_0 + 2h < ... < t_N = t_0 + Nh$$

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(t_k, y_k\right), \;\; k = 0, 1, ..., N - 1$$

El método de Euler

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$t_0 < t_1 = t_0 + h < t_2 = t_0 + 2h < \ldots < t_N = t_0 + Nh$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \; k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Ejemplo:

$$y' = y^2, \; y(0) = 1$$

$$y_1 = 1 + 0.25 * \left(1^2\right) = 1.25$$
$$y_2 = 1.25 + 0.25 * (1.25)^2 = 1.640\,625$$
$$y_3 = 1.640\,625 + 0.25 * (1.640\,625)^2 = 2.313\,538 \simeq y(0.75)$$
$$y_4 =$$

El método de Euler

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$t_0 < t_1 = t_0 + h < t_2 = t_0 + 2h < \ldots < t_N = t_0 + Nh$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \;\; k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Ejemplo:

$$y' = y^2, \;\; y(0) = 1$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 + 0.25 * \left(1^2\right) = 1.25 \\
y_2 &= 1.25 + 0.25 * (1.25)^2 = 1.\,640\,625 \\
y_3 &= 1.\,640\,625 + 0.25 * (1.\,640\,625)^2 = 2.\,313\,538 \simeq y(0.75) \\
y_4 &= 2.\,313\,538 + 0.25 * (2.\,313\,538)^2 = 3.\,651\,653 \simeq y(1)
\end{aligned}$$

El método de Euler

Ejemplo:

$$y' = y^2, \;\; y(0) = 1$$

$$y_3 = 2.313\,538 \simeq y(0.75)$$
$$y_4 = 3.651\,653 \simeq y(1)$$

Solución exacta:

$$y(t) = \frac{1}{1-t}, \;\; -\infty < t < 1$$

$$y(0.75) = 4$$
$$Error(0.75) = |2.313\,538 - 4| = 1.686\,5$$

$$y(1) \;\; \text{no existe}$$

$h = 0.1$

t	*Euler*	*Exacta*	*Error*
0	1	1	0
0.4	1.557797	1.666667	0.108 87
0.8	3.239652	5	1. 760 3
0.9	4.289186	10	5. 710 8
1	6.128898	No existe	
1.1	9.885238	No existe	
1.2	19.657031	No existe	
2.2	No existe	No existe	

$h = 0.05$

t	*Euler*	*Exacta*	*Error*
0	1	1	0
0.4	1.6052	1.666667	$6.146\,7 \times 10^{-2}$
0.8	3.7932	5	1. 206 8
0.9	5.5308	10	4. 469 2
1	9.5527	No existe	
1.1	24.0775	No existe	
1.2	193.8518	No existe	
1.65	No existe	No existe	

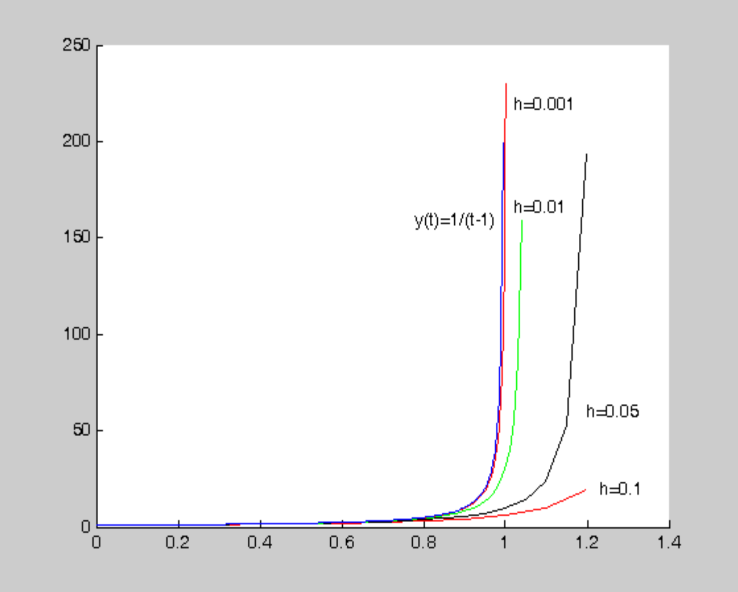
$h = 0.01$

t	*Euler*	*Exacta*	*Error*
0	1	1	0
0.4	1.6529	1.666667	1.3767×10^{-2}
0.8	4.6471	5	0.3529
0.9	8.2786	10	1.7214
0.99	24.4242	100	75.576
1	30.3897	No existe	
1.04	159.7871	No existe	
1.14	No existe	No existe	

$h = 0.001$

t	*Euler*	*Exacta*	*Error*
0	1	1	0
0.4	1.6653	1.666667	1.367×10^{-3}
0.8	4.9603	5	0.0397
0.9	9.7775	10	0.2225
0.99	70.3236	100	29.676
1	193.1368	No existe	
1.001	230.4386	No existe	
1.017	No existe	No existe	

Gráfica de las soluciones: $y' = y^2, \; y(0) = 1$



El método de Euler

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{4}$$

Error de discretización global o de truncamiento:

$$e_k = y(t_k) - y_k$$

Teorema

Sea $y(t)$ la solución de (4), definida en $[t_0, t_0 + \alpha]$. Si $f, \dfrac{\partial f}{\partial t}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en $[t_0, t_0 + \alpha] \times \mathbb{R}$ y $\{t_k, y_k\}$ es la sucesión de aproximaciones por el método de Euler, entonces

$$|e_k| \leq C_k h, \ \forall k = 1, ..., N.$$

Es decir, el método es de orden $O(h)$.

El método de Heun

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{dy}{dt} = f\left(t, y\right) \\ y\left(t_0\right) = y_0 \end{array} \right.$$

$$t_0 < t_1 = t_0 + h < t_2 = t_0 + 2h < ... < t_N = t_0 + Nh$$

Aproximaciones en dos etapas:

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= y\left(t_k\right) + hf\left(t_k, y_k\right), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}\left(f\left(t_k, y_k\right) + f\left(t_{k+1}, p_{k+1}\right)\right), \\ k &= 0, 1, 2, ..., N-1. \end{aligned}$$

El método de Heun

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Error de discretización global o de truncamiento:

$$e_k = y(t_k) - y_k$$

Teorema

Sea $y(t)$ *la solución de (1), que suponemos definida en* $[t_0, t_0 + \alpha]$*. Si* $f \in C^2([t_0, t_0 + \alpha] \times \mathbb{R})$ *(es decir, tanto* f *como sus derivadas parciales hasta el orden dos son continuas) y* $\{t_k, y_k\}$ *es la sucesión de aproximaciones por el método de Heun, entonces*

$$|e_k| \leq C_k h^2.$$

Es decir, que el método tiene orden de aproximación $O\left(h^2\right)$.

El método de Runge-Kutta

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$t_0 < t_1 = t_0 + h < t_2 = t_0 + 2h < \ldots < t_N = t_0 + Nh$$

Aproximaciones en cuatro etapas:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\right)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= f(t_k, y_k) \\ f_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f_1\right) \\ f_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f_2\right) \\ f_4 &= f(t_k + h, y_k + h f_3) \end{aligned}$$

El método de Runge-Kutta

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Error de discretización global o de truncamiento:

$$e_k = y(t_k) - y_k$$

Teorema

Sea $y(t)$ la solución de (1). Si $f \in C^4([t_0, t_0 + \alpha], \mathbb{R})$ y $\{t_k, y_k\}$ es la sucesión de aproximaciones por el método de Runge-Kutta, entonces

$$|e_k| \leq C_k h^4.$$

Es decir, que el método tiene orden de aproximación $O\left(h^4\right)$.

$$y' = \frac{t-y}{2},\ \ y(0) = 1$$

$h = 0.5,\ \ t \in [0,1]$

PASO 1: de $t = 0$ a $t = 0.5$

$$f_1 = \tfrac{0-1}{2} = -\tfrac{1}{2}$$
$$y_0 + \tfrac{h}{2} f_1 = 1 + \tfrac{0.5}{2} * \left(-\tfrac{1}{2}\right) = 0.875$$
$$f_2 = \tfrac{0.25-0.875}{2} = -0.3125$$
$$y_0 + \tfrac{h}{2} f_2 = 1 + \tfrac{0.5}{2} * (-0.3125) = 0.921\,88$$
$$f_3 = \tfrac{0.25-0.921\,88}{2} = -0.335\,94$$
$$y_0 + hf_3 = 1 + 0.5 * (-0.335\,94) = 0.832\,03$$
$$f_4 = \tfrac{0.5-0.832\,03}{2} = -0.166\,02$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + \frac{0.5}{6} * \left(-\frac{1}{2} + 2 * (-0.3125) + 2 * (-0.335\,94) - 0.166\,02\right) \\ &= 0.836\,426 \end{aligned}$$

$$y' = \frac{t-y}{2}, \; y(0) = 1$$

$h = 0.5, \; t \in [0,1]$

PASO 2: de $t = 0.5$ a $t = 1$

$$f_1 = \tfrac{?}{2} =$$
$$y_1 + \tfrac{h}{2} * f_1 =$$
$$f_2 = \tfrac{?}{2} =$$
$$y_1 + \tfrac{h}{2} * f_2 =$$
$$f_3 = \tfrac{?}{2} =$$
$$y_1 + h * f_3 =$$
$$f_4 = \tfrac{?}{2} =$$

$$\begin{aligned} y_2 &= 0.836\,426 + \frac{0.5}{6}(-0.168\,213 \; + 2 * (-0.022\,186\,5) \\ &\quad + 2 * (-0.040\,439\,5) + 0.091\,897) \\ &= 0.819\,629 \end{aligned}$$

$$y' = \frac{t-y}{2}, \;\; y(0) = 1$$

$h = 0.5, \;\; t \in [0,1]$

PASO 2: de $t = 0.5$ a $t = 1$

$$f_1 = \tfrac{0.5 - 0.836\,426}{2} = -0.168\,213$$
$$y_1 + \tfrac{h}{2} * f_1 =$$
$$f_2 = \tfrac{?}{2} =$$
$$y_1 + \tfrac{h}{2} * f_2 =$$
$$f_3 = \tfrac{?}{2} =$$
$$y_1 + h * f_3 =$$
$$f_4 = \tfrac{?}{2} =$$

$$\begin{aligned} y_2 &= 0.836\,426 + \frac{0.5}{6}(-0.168\,213 \; + 2 * (-0.022\,186\,5) \\ &\quad + 2 * (-0.040\,439\,5) + 0.091\,897) \\ &= 0.819\,629 \end{aligned}$$

$$y' = \frac{t-y}{2}, \;\; y(0) = 1$$

$h = 0.5, \;\; t \in [0,1]$

PASO 2: de $t = 0.5$ a $t = 1$

$f_1 = \frac{0.5 - 0.836\,426}{2} = -0.168\,213$

$y_1 + \frac{h}{2} * f_1 = 0.836\,426 + \frac{0.5}{2} * (-0.168\,213) = 0.794\,373$

$f_2 = \frac{0.75 - 0.794\,373}{2} = -0.022\,186\,5$

$y_1 + \frac{h}{2} * f_2 =$

$f_3 = \frac{?}{2} =$

$y_1 + h * f_3 =$

$f_4 = \frac{?}{2} =$

$$\begin{aligned} y_2 &= 0.836\,426 + \frac{0.5}{6}(-0.168\,213 \; + 2 * (-0.022\,186\,5) \\ &\quad + 2 * (-0.040\,439\,5) + 0.091\,897) \\ &= 0.819\,629 \end{aligned}$$

$$y' = \frac{t-y}{2}, \; y(0) = 1$$

$h = 0.5, \; t \in [0, 1]$

PASO 2: de $t = 0.5$ a $t = 1$

$$f_1 = \frac{0.5 - 0.836\,426}{2} = -0.168\,213$$

$$y_1 + \frac{h}{2} * f_1 = 0.836\,426 + \frac{0.5}{2} * (-0.168\,213) = 0.794\,373$$

$$f_2 = \frac{0.75 - 0.794\,373}{2} = -0.022\,186\,5$$

$$y_1 + \frac{h}{2} * f_2 = 0.836\,426 + \frac{0.5}{2} * (-0.022\,186\,5) = 0.830\,879$$

$$f_3 = \frac{0.75 - 0.830\,879}{2} = -0.040\,439\,5$$

$$y_1 + h * f_3 =$$

$$f_4 = \frac{?}{2} =$$

$$\begin{aligned} y_2 &= 0.836\,426 + \frac{0.5}{6}(-0.168\,213 + 2 * (-0.022\,186\,5) \\ &\quad + 2 * (-0.040\,439\,5) + 0.091\,897) \\ &= 0.819\,629 \end{aligned}$$

$$y' = \frac{t-y}{2}, \; y(0) = 1$$

$h = 0.5, \; t \in [0, 1]$

PASO 2: de $t = 0.5$ a $t = 1$

$$f_1 = \tfrac{0.5 - 0.836\,426}{2} = -0.168\,213$$
$$y_1 + \tfrac{h}{2} * f_1 = 0.836\,426 + \tfrac{0.5}{2} * (-0.168\,213) = 0.794\,373$$
$$f_2 = \tfrac{0.75 - 0.794\,373}{2} = -0.022\,186\,5$$
$$y_1 + \tfrac{h}{2} * f_2 = 0.836\,426 + \tfrac{0.5}{2} * (-0.022\,186\,5) = 0.830\,879$$
$$f_3 = \tfrac{0.75 - 0.830\,879}{2} = -0.040\,439\,5$$
$$y_1 + h * f_3 = 0.836\,426 + 0.5 * (-0.040\,439\,5) = 0.816\,206$$
$$f_4 = \tfrac{1 - 0.816\,206}{2} = 0.091\,897$$

$$\begin{aligned} y_2 &= 0.836\,426 + \frac{0.5}{6}\big(-0.168\,213 + 2 * (-0.022\,186\,5) \\ &\quad + 2 * (-0.040\,439\,5) + 0.091\,897\big) \\ &= 0.819\,629 \end{aligned}$$

$$y' = \frac{t-y}{2},\ \ y(0) = 1$$

$h = 0.5,\ \ t \in [0,1]$

$$y(t) = t - 2 + 3e^{-\frac{t}{2}}$$

$$y(1) = 1 - 2 + 3e^{-\frac{1}{2}} = 0.819\,592$$

$$Error = |0.819\,592 - 0.819\,629| = 3.7 \times 10^{-5}$$

$h = 0.25,\ \ t \in [0,1]$

$$y_4 = 0.819594$$

$$Error = |0.819\,592 - 0.819594| = 2 \times 10^{-6}$$

$$y' = \frac{t-y}{2},\ \ y\left(0\right) = 1$$

$h = 0.5,\ \ t \in [0,1]$

$$y\left(t\right) = t - 2 + 3e^{-\frac{t}{2}}$$

$$y\left(1\right) = 1 - 2 + 3e^{-\frac{1}{2}} = 0.819\,592$$

$$Error = \left|0.819\,592 - 0.819\,629\right| = 3.7 \times 10^{-5}$$

$h = 0.25,\ \ t \in [0,1]$

$$y_4 = 0.819594$$

$$Error = \left|0.819\,592 - 0.819594\right| = 2 \times 10^{-6}$$

El cociente entre los dos errores es el siguiente:

$$\frac{Error(h=0.5)}{Error(h=0.25)} = \frac{0.000\,037}{2.0 \times 10^{-6}} = 18.\,5$$

Resumen de los tipos de ecuaciones

1. Ecuaciones lineales
    - Lineales homogéneas

    $$\frac{dy}{dt} + a(t)\,y = 0$$

    - Lineales no homogéneas

    $$\frac{dy}{dt} + a(t)\,y = b(t)$$

2. Ecuaciones separables

$$\frac{dy}{dt} = f(t)\,g(t)$$

3. Ecuaciones homogéneas

$$\frac{dy}{dt} = F\left(\frac{y}{t}\right)$$

4. Ecuaciones de Bernoulli

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\,y = b(t)\,y^n,\ n \neq 0, 1$$

Ejemplo

$$\begin{cases} y' + \dfrac{x}{9-x^2} y = \dfrac{1}{9-x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La solución es única y existe al menos en $(-3, 3)$.

Multiplicamos la ecuación por

$$e^{\int \frac{x}{9-x^2}\,dx} = e^{-\frac{1}{2}\ln\left(9-x^2\right)} = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(y\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\right) = \frac{1}{\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Integramos:

$$y\frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{1}{\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Ejemplo

$$y\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}=\int\frac{1}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

Cambio de variable $x = 3sen\,(u)$:

$$\int\frac{1}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\frac{3\cos(u)}{(9\,(1-sen^2\,(u)))^{\frac{3}{2}}}du=\int\frac{3\cos(u)}{(9\,(1-sen^2\,(u)))^{\frac{3}{2}}}du$$

$$=\frac{1}{9}\int\frac{\cos(u)}{(\cos^2(u))^{\frac{3}{2}}}du=\frac{1}{9}\int\frac{1}{\cos^2(u)}du=\frac{1}{9}tg\,(u)+C$$

$$=\frac{1}{9}tg\left(arcsen\left(\frac{x}{3}\right)\right)+C$$

Solución:

$$y\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{1}{9}tg\left(arcsen\left(\frac{x}{3}\right)\right)+C$$

$$y(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{9}tg\left(arcsen\left(\frac{x}{3}\right)\right)+C\sqrt{9-x^2}$$

Ejemplo

$$\begin{cases} y' + \dfrac{x}{9-x^2}y = \dfrac{1}{9-x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{9} tg\left(arcsen\left(\frac{x}{3}\right)\right) + C\sqrt{9-x^2}$$

Sea $u = arcsen\left(\frac{x}{3}\right)$. Como $sen(u) = \frac{x}{3}$:

$$1 + tg^2(u) = \frac{1}{\cos^2(u)}$$

$$tg^2(u) = -1 + \frac{1}{1-\frac{x^2}{9}} = \frac{x^2-9+9}{9-x^2} = \frac{x^2}{9-x^2}$$

Entonces:

$$y(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{9}\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} + C\sqrt{9-x^2} = \frac{x}{9} + C\sqrt{9-x^2}$$