Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2]
[Los Profesores] UNI, 13 de julio de 2021

Práctica Calificada 6

1. a) Sea $f(x) = x + x^3$ para $x \in [0, \pi]$. ¿Cuáles coeficientes de la serie de Fourier de f son cero? ¿Cúales son no nulos? ¿Por qué? [2.5ptos]

   b) Sea $g(x) = \cos(x^5) + \sin(x^2)$. ¿Cuáles coeficientes de la serie de Fourier de g son cero? ¿Cúales son no nulos? ¿Por qué? [2.5ptos]

Solución:

a) $f(x)$ es una función impar. En efecto

$$f(-x) = -x + (-x)^3 = -x - x^3 = -(x + x^3) = -f(x),$$

por lo tanto $a_n = 0$ y b_n puede ser distinto de cero.

a) $g(x)$ es una función par. En efecto,

$$g(-x) = \cos((-x)^5) + \sin((-x)^2) = g(x),$$

por lo tanto $b_n = 0$ y a_n puede ser distinto de cero.

2. Suponga que $f(x)$ es definida para $x \in [0, 7]$, y $f(x) = 2e^{-4x}$. Otra función, $F(x)$, dada por

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \cos(\pi n x/7), \quad a_n = \frac{2}{7}\int_0^7 2e^{-4x}\cos(\pi n x/7)\,dx.$$

Hallar $F(3)$ y $F(-2)$. [5ptos]

Solución: La función $F(x)$ es la expansión coseno de Fourier de f. En el dominio de f, es decir, para $x \in [0, 7]$, tenemos que $F(x) = f(x)$. Por lo tanto, como $3 \in [0, 7]$, entonces $F(3) = f(3) = 2e^{-12}$. Para los valores negativos de x, la serie del coseno converge a la extensión par de $f(x)$, la cual es $2e^{-4|x|}$. Por lo tanto, $F(-2) = f(2) = 2e^{-8}$.

3. Encontrar la serie de Fourier para la función

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x \leq -\pi/2 \\ 0, & -\pi/2 < x \leq \pi/2 \\ 1, & \pi/2 < x \leq \pi, \end{cases}$$

definida sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$. [5ptos]

Solución: Hallamos los coeficientes de Fourier, desde que f es impar, se tiene que $a_n = 0$, hallamos los coeficientes b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{x}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2}(-\sin n\pi)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\sin n\pi\,dx\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{-\pi/2} - \left(\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}(\cos(n\pi/2) - \cos n\pi).$$

Así, la expansión en series de Fourier de f es dada por

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left(\cos(n\pi/2) - \cos n\pi\right)\sin n\pi.$$

4. Resolver la siguiente EDO usando la transformada de Fourier

$$u'' - xu = 0, \qquad \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

[5ptos]

Solución: La condición límite, está incorporada en la transformada de Fourier y nos indica que las funciones que se transforman no decaen en el infinito. La transformada usa las fórmulas derivadas tanto para x como para k, obteniendo

$$-k^2\widehat{u}(k) - i\widehat{u}'(k) = 0.$$

Esta sigue siendo una ecuación diferencial en la variable k, pero podemos resolverla mediante la separación de variables (es decir, la versión ODE). Esto resulta en $d\widehat{u}/\widehat{u} = ik^2dk$ lo cual integrando da

$$\widehat{u}(k) = Ce^{ik^3/3},$$

donde C es una constante arbitraria de integración. La transformada inversa es

$$u(x) = \frac{C}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\exp(i[kx + k^3/3])\,dk.$$

Esta integral no se puede reducir más. Con la elección de $C = 1$, el resultado es la llamada función de Airy, denotada por $\mathrm{Ai}(x)$.