SERIES DE FOURIER APLICACIONES A LAS EDO COMO PROBLEMAS DE CONTORNO

irlamn@uni.edu.pe

1. Problemas de Contorno y series de autofunciones.

A) Series de Fourier en senos. El problema:

$$\begin{cases} -x'' = \lambda x & t \in [0, \pi] \\ x(0) = x(\pi) = 0, \end{cases}$$

- $\lambda_n = n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \ldots$, $\psi_n = \operatorname{sen} nt$.

Proposición 1. *Toda* $f \in C^2[0, \pi]$ *tal que*

$$f(0) = f(\pi) = 0$$

se representa en la forma:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \; dt,$$

siendo la serie uniformemente convergente en $[0, \pi]$.

El desarrollo converge en media cuadrática si $f(t) \in R[0, \pi]$, *sin más restricciones sobre* f.

B) Series de Fourier en cosenos. El problema:

$$\begin{cases} -x'' = \lambda x & t \in [0, \pi] \\ x'(0) = x'(\pi) = 0, \end{cases}$$

- $\lambda_n = n^2\pi^2$, $n = \boxed{0}, 1, 2, \ldots$, $\psi_n = \cos nt$.

Proposición 2. *Toda* $f \in C^2[0, \pi]$ *tal que*

$$f'(0) = f'(\pi) = 0$$

se representa en la forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \; dt,$$

siendo la serie uniformemente convergente en $[0, \pi]$.

El desarrollo converge en media cuadrática si $f(t) \in R[0, \pi]$, *sin más restricciones sobre* f.

C) Series de Fourier en cosenos & senos. Las funciones $2\pi-$periódicas son el mejor ejemplo de las funciones del siguiente resultado.

Proposición 3. *Sea* $f \in C^2[-\pi, \pi]$ *tal que*

$$f(-\pi) = f(\pi), \qquad f'(-\pi) = f'(\pi).$$

Entonces:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \; dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt \; dt \qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \; dt,$$

siendo la serie uniformemente convergente en $[-\pi, \pi]$*.*

El desarrollo converge en media cuadrática si $f(t) \in R[-\pi, \pi]$*, sin más restricciones sobre* f*.*

Demostración. Para reducir el caso periódico a los anteriores escribimos:

$$f(t) = g(t) + h(t)$$

donde:

$$g(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \qquad h(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}.$$

Al desarrollarlas en el intervalo $[0, \pi]$:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt, \tag{1}$$

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt, \tag{2}$$

donde, al converger uniformemente en $[0, \pi]$ también lo hacen en $[-\pi, \pi]$. $\square$

Definición 1. *Para* $f \in R[0,\pi]$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt, \qquad t \in [0,\pi]$$

se denomina el desarrollo de Fourier de f *en senos, en el intervalo* $[0,\pi]$,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt, \qquad t \in [0,\pi]$$

es el desarrollo de Fourier de f *en cosenos, en el intervalo* $[0,\pi]$.

Para $f \in R[-\pi, \pi]$,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt,$$

es simplemente el desarrollo en serie de Fourier de f, *en el intervalo* $[-\pi, \pi]$

Relación entre los tres desarrollos

• Si $f \in R[-\pi, \pi]$ es par en $[-\pi, \pi]$ su desarrollo de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\ dt.$$

que coincide con el desarrollo de Fourier en cosenos de su restricción al intervalo $[0,\pi]$.

- Si $f \in R[-\pi,\pi]$ es impar en $[-\pi,\pi]$ su desarrollo de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \; dt.$$

que coincide con el desarrollo de Fourier en senos de su restricción al intervalo $[0, \pi]$.

★ Si $f \in R[0, \pi]$ es una función arbitraria y $\bar{f}$ es su *extensión par* al intervalo $[-\pi, \pi]$, el desarrollo de $\bar{f}$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$\bar{f}(t) = \frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \cos nt + \bar{b}_n \operatorname{sen} nt$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

pues $\bar{b}_n = 0$ y $\bar{a}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \; dt$, que es el desarrollo en serie de cosenos de f en $[0, \pi]$.

★ Análogamente, si $f \in R[0, \pi]$ y $\widehat{f}$ es su *extensión* *impar* al intervalo $[-\pi, \pi]$, el desarrollo de $\widehat{f}$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$\widehat{f}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \cos nt + \hat{b}_n \operatorname{sen} nt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt$$

pues $\widehat{a}_n = 0$ y $\widehat{b}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \operatorname{sen} nt \, dt$, que es el desarrollo en serie de senos de f en $[0, \pi]$.

Ejemplo. El desarrollo de $f(t) = t$ en serie de cosenos en $[0, \pi]$:

$$t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t.$$

El desarrollo de Fourier de $\bar{f}(t) = |t|$ en $[-\pi, \pi]$:

$$|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t.$$

Ejemplo. El desarrollo de $f(t) = 1$ en serie de senos en $[0, \pi]$:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}(2n-1)t.$$

2. Identidad de Parseval.

Teorema 1 (Identidades de Parseval). *Sean* f, g *funciones en* $R[-\pi, \pi]$ *se tiene que:*

a) $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\, dt = \pi \left\{ \frac{a_0 \hat{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{a}_n + b_n \hat{b}_n \right\},$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\, dt = \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right\}.$

Si f, g en en $R[0, \pi]$ se tiene que:

c) $\int_0^\pi f(t)g(t)\ dt = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{a_0 \widehat{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n \widehat{a}_n\right\}$,

d) $\int_0^\pi f(t)^2\ dt = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n^2\right\}$,

mientras:

e) $\int_0^\pi f(t)g(t)\ dt = \frac{\pi}{2}\left\{\sum_{n=1}^\infty b_n \widehat{b}_n\right\}$,

f) $\int_0^\pi f(t)^2\ dt = \frac{\pi}{2}\left\{\sum_{n=1}^\infty b_n^2\right\}$.

Teorema 2 (Principio de identidad). *Sean f y g funciones <u>continuas</u> en $[-\pi, \pi]$ con desarrollos en serie de Fourier :*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt,$$

$$g(t) = \frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \cos nt + \bar{b}_n \operatorname{sen} nt.$$

Entonces $f(t) = g(t)$ si y sólo si

$a_n = \bar{a}_n$ & $b_n = \bar{b}_n$ *para todo n.*

Teorema 3 (Integración término a término). *Sea $f \in R[-\pi,\pi]$ entonces para t_0 fijo y cada $t \in [-\pi,\pi]$ se tiene que:*

$$\int_{t_0}^{t} f(s)\ ds = \frac{a_0}{2}(t-t_0)+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{t_0}^{t} \cos ns\ ds + b_n \int_{t_0}^{t} \operatorname{sen} ns\ ds,$$

siendo la convergencia uniforme en $[-\pi,\pi]$.

Análogamente, para $f \in R[0,\pi]$:

$$\int_{t_0}^{t} f(s)\ ds = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{t_0}^{t} \operatorname{sen} ns\ ds,$$

$$\int_{t_0}^{t} f(s)\ ds = \frac{a_0}{2}(t - t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{t_0}^{t} \cos ns\ ds,$$

en donde $t_0, t \in [0, \pi]$ *y la convergencia es uniforme en* $[0, \pi]$.

Ejemplo: La función $f(t) = 1$ se representa en serie de senos en el intervalo $[0, \pi]$:

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}(2n-1)t.$$

Por tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

De aquí sale que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ejemplo: La función $f(t) = 1$ se representa en serie de senos en el intervalo $[0, \pi]$:

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}(2n-1)t.$$

Al integrar la serie término a término obtenemos:

$$t = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t,$$

es decir:

$$t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left\{\cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \cdots\right\}.$$

Por el momento sólo sabemos que la primera serie converge en media cuadrática, mientras la segunda converge uniformemente en $[0, \pi]$.

Nota. Obsérvese que $f(t) = t$ no cumple las condiciones $f' = 0$ en $t = 0, \pi$. Sin embargo la serie converge uniformemente.

3. Convergencia puntual.

Para estudiar la convergencia puntual, la serie de referencia es:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt$$

donde suponemos que:

$$f(t) \in R[-\pi, \pi]$$

es $2\pi-$periódica:

$$f(t + 2\pi) = f(t).$$

★ Funciones como $f(t) = t$, $f(t) = e^t$, etc, se extienden periódicamente fuera de $[-\pi, \pi]$.

★ Para estudiar la serie de Fourier en senos de $f \in R[0, \pi]$, primero se la extiende impar a $[-\pi, \pi]$ y después $2\pi-$periódicamente a $\mathbb{R}$.

★ Para estudiar la serie de Fourier en cosenos de $f \in R[0, \pi]$, primero se la extiende par a $[-\pi, \pi]$ y después $2\pi-$periódicamente a $\mathbb{R}$.

Extensiones periódicas: funciones definidas $[-\pi, \pi]$

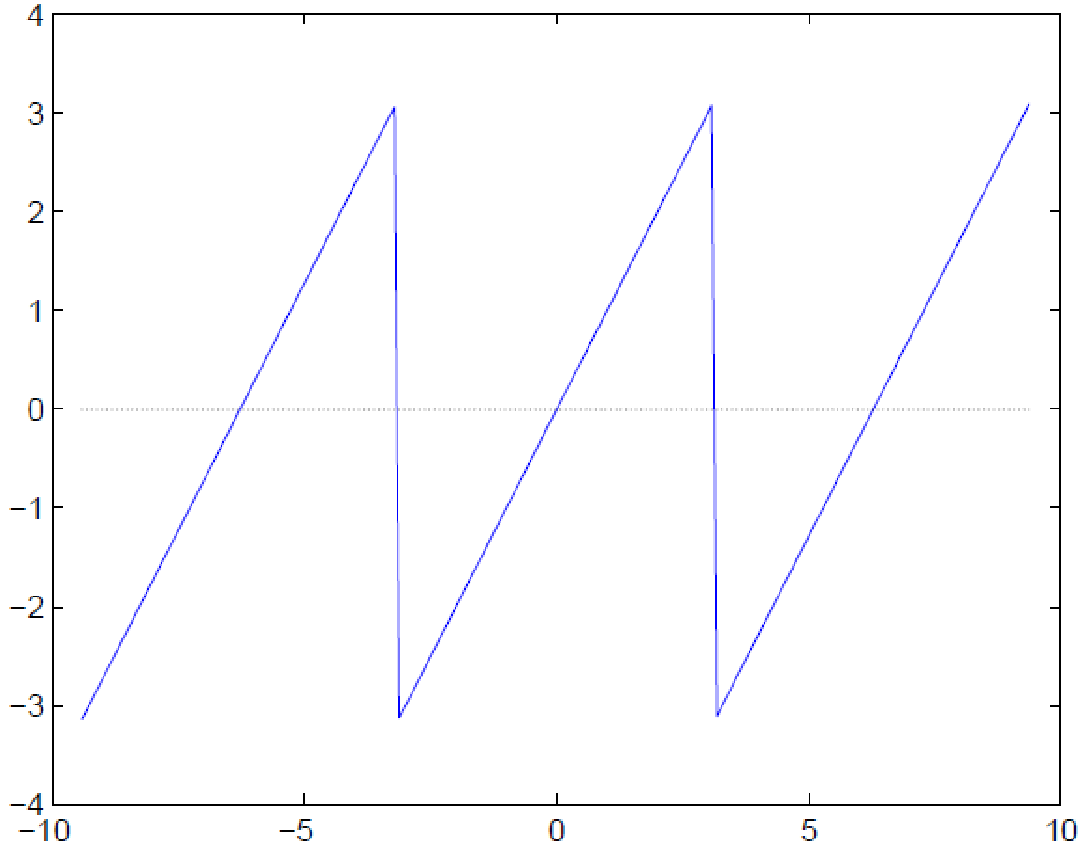

Fig. Extensión 2π periódica de $f(t) = t$

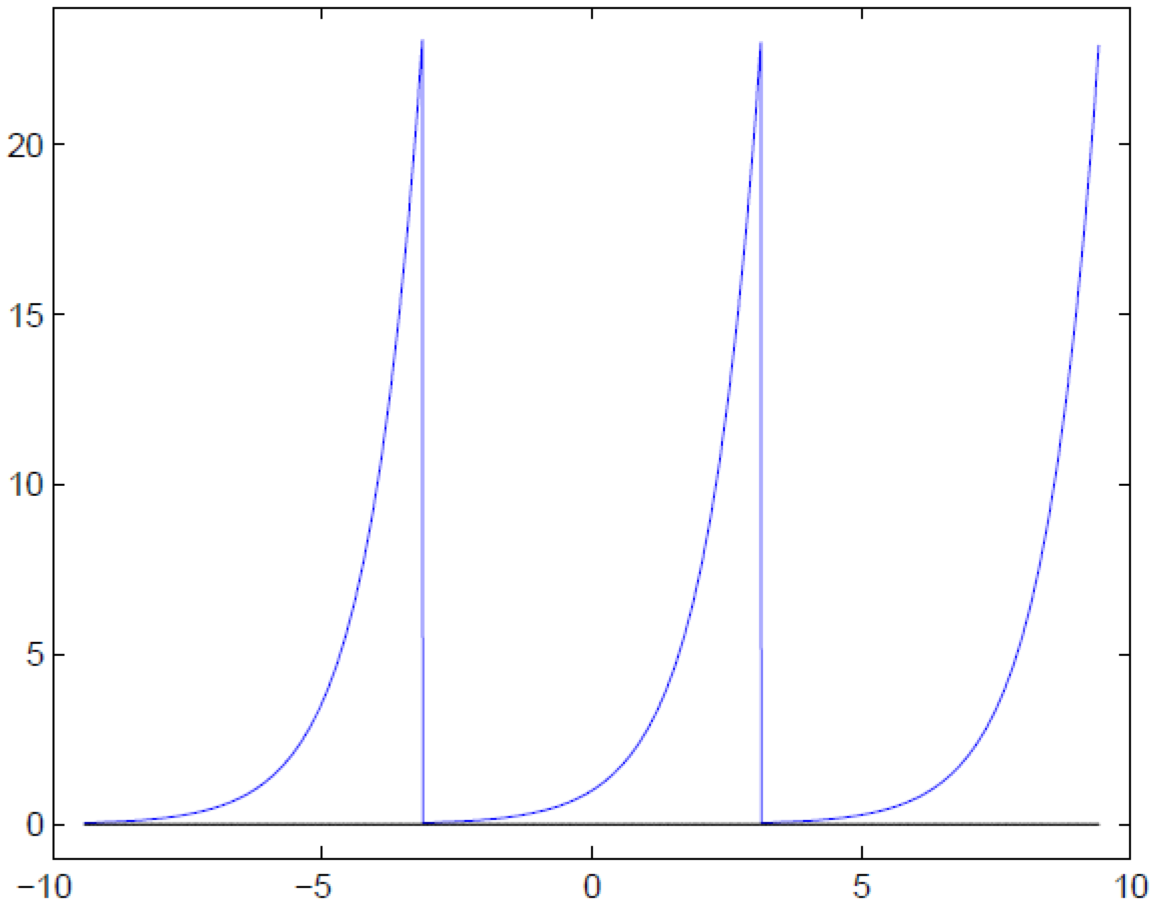

Fig. Extensión 2π periódica de $f(t) = e^t$