Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-2

[Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2]
[Prof: Los Profesores] UNI, 09 de noviembre de 2021

Práctica Calificada 4

1. Sea $a > 0$, se define el operador diferencial $L[y(x)] = xy''(x) + y'(x)$ con dominio en

$$V = \{v \in C^2[a,b] \,:\, v(a) = v(b) = 0\}.$$

Demostrar que L es simétrico sobre V. [5ptos]

Solución: Es fácil expresar L en forma autoadjunta $Lu = (p(x)u')'$, donde $p(x) = x$. Luego, por la identidad de Lagrange e integrando sobre $[a,b]$, obtenemos

$$(u, Lv) - (Lu, v) = [x(uv' - vu')]_a^b = 0 \quad \forall\, u, v \in V,$$

debido a que

$$\begin{aligned} u(a) &= u(b) = 0, \\ v(a) &= v(b) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, L es autoadjunto sobre V

Lema 1 (Identidad de Lagrange) *Sea $L = D[pD] + q$ un operador en forma autoadjunta, donde p y q son funciones continuas sobre $[a,b]$. Entonces se cumple*

$$uLv - vLu = [p(uv' - vu')]'.$$

2. Probar que si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones de la ecuación autoadjunta

$$L[y(x)] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right) + q(x)y(x) = 0,$$

para $x \in (a,b)$, entonces $p(x)W(y_1, y_2)(x)$ es una constante. [5ptos]

Solución: La ecuación autoadjunta se puede expresar como $p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y = 0$. Luego, por la identidad de Abel, considerando sin pérdida de generalidad que $p(x) > 0$ sobre $[a,b]$, se tiene que

$$W(x) = Ce^{-\int \frac{P'}{P}\,dx} = Ce^{-\ln p(x)} = \frac{C}{p(x)} \implies p(x)W(x) = C.$$

Teorema 1 (Identidad de Abel) *Sea la ecuación $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$, donde P, Q y R son funciones continuas sobre $[a,b]$. Si y_1, y_2 son soluciones, entonces existe $C \in \mathbb{R}$ tal que*

$$W[y_1, y_2](x) = Ce^{-\int \frac{Q}{P}\,dx} \quad \forall x \in [a,b].$$

3. Resuelva el siguiente PVF usando el método de expansión de autofunciones

$$\begin{aligned} &u'' + u =: Lu = f(x) := \cos x \quad \forall x \in (0, \pi) \\ &u(0) = u(\pi) = 0. \end{aligned}$$

[10ptos]

Solución:

a) El operador diferencial L ya esta en forma autoadjunta con $p(x) = 1$ y $q = u$, además es simétrico en el espacio $V = \{v \in C^2[0, \pi] : v(0) = v(\pi) = 0\}$, pues de la identidad de Lagrange e integrando, se obtiene

$$(u, Lv) - (v, Lu) = \Big[p(uv' - vu')\Big]_0^{\pi} = 0 \quad \forall u, v \in V.$$

Veremos que las autofunciones correspondientes a valores propios distintos son ortogonales sobre V y forman una base para V.

b) Resolvemos el problema de autovalores $Lu = \lambda u$, es decir

$$u'' + (1 - \lambda)u = 0.$$

Para $\lambda = 0$, resolvemos la EDO $u'' + u = 0$, cuya solución es $u(x) = C \sin x + D \cos x$ para C y D constantes. Aplicando las condiciones de frontera, la solución será $u(x) = C \sin x$. Por tanto, el primer valor propio es $\lambda_1 = 0$ y una primera autofunción es $\phi_1(x) = \sin x$. Los valores $\lambda > 0$ no determinan soluciones no triviales por lo que no son valores propios. Para $\lambda < 0$ se tiene

$$\phi_n(x) = \sin(nx), \;\; \lambda_n = 1 - n^2, \;\; n = 2, 3, \cdots.$$

b) Las autofunciones son ortogonales y forman una base respecto al espacio $C[0, \pi]$, dotado del producto interno usual, así se obtiene que

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_0^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & n = m \end{cases} \tag{1}$$

c) Por la parte (b), se expresa la solución en series de Fourier $y(x) = \sum_{n\geq 1} c_n \phi_n$, donde los coeficientes se obtienen de las propiedades de ortogonalidad con las autofunciones:

$$\begin{aligned} \langle Ly, \phi_m \rangle &= \langle f, \phi_m \rangle \\ \langle \sum_{n\geq 1} c_n L\phi_n, \phi_m \rangle &= \langle f, \phi_m \rangle \\ \sum_{n\geq 1} c_n \lambda_n \langle \phi_n, \phi_m \rangle &= \langle f, \phi_m \rangle \\ \sum_{n\geq 2} c_n \lambda_n \langle \phi_n, \phi_m \rangle &= \langle f, \phi_m \rangle, \end{aligned}$$

debido a que $\lambda_1 = 0$. Luego, para $n = m$, obtenemos

$$\begin{aligned} c_m \lambda_m \langle \phi_m, \phi_m \rangle &= \langle f, \phi_m \rangle \\ c_m &= \frac{1}{\lambda_m} \frac{\langle f, \phi_m \rangle}{\langle \phi_m, \phi_m \rangle} \quad m = 2, 3, \cdots. \end{aligned}$$

d) Calculamos los productos $\langle f, \phi_m \rangle$ para $m = 2, 3, \cdots$:

$$
\begin{aligned}
\langle f, \phi_m \rangle &= \int_0^\pi \cos x \sin(mx)\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\pi \big[\sin(m+1)x + \sin(m-1)x\big]\, dx \\
&= \begin{cases} 0 & , \ n \, \text{impar} \\ \frac{2}{n^2-1} & , \ n \, \text{par} \end{cases}
\end{aligned}
$$

e) No es posible determinar el coeficiente c_1 correspondiente a la autofución ϕ_1, debido a que $\lambda_1 = 0$, lo cual es consistente porque

$$
c_1 \lambda_1 \langle \phi_1, \phi_1 \rangle = c_1 \times 0 \times \frac{\pi}{2} = 0 = \langle f, \phi_1 \rangle.
$$

Por tanto, la solución tiene la forma

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c_1 \sin\, x + \sum_{n,\, \text{par}}^{\infty} \frac{1}{1-n^2} \frac{2}{\pi} \frac{2n}{n^2-1} \sin(nx) \\
&= c_1 \sin\, x - \frac{4}{\pi} \sum_{n,\, \text{par}}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)^2} \sin(nx),
\end{aligned}
$$

donde c_1 se podría hallar numéricamente evaluando una aproximación en algún punto del intervalo $(0, \pi)$ y reemplazándolo en la EDO.

f) En este caso particular, se puede hallar fácilmente la solución exacta del PVF por coeficientes indeterminados, es decir

$$
\frac{x}{2} \sin\, x.
$$

Además, se puede verificar nuestro resultado, al realizar su respectiva expansión por autofunciones

$$
\frac{x}{2} \sin\, x = \frac{\pi}{4} \sin\, x - \frac{4}{\pi} \sum_{n,\, \text{par}}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)^2} \sin(nx).
$$