CONCEPTOS ADICIONALES : Representación de funciones mediante series y su Aplicación en la solución de EDOS

irlamn@uni.edu.pe

Teorema ..- *Si f es analítica en x_0, entonces la representación*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

es válida en cierto intervalo abierto centrado en x_0.

*La serie anterior se llama **serie de Taylor** de f centrada en x_0. Cuando $x_0 = 0$, también se le conoce como **serie de Maclaurin** de f.*

Además de los resultados conocidos ya sobre series de potencias, éstas tienen también una propiedad de unicidad; esto es, si la ecuación

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$$

es válida en algún intervalo abierto que contiene a x_0, entonces $a_n = b_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Por tanto, si de alguna manera se puede obtener un desarrollo en serie de potencias para una función analítica, entonces esta serie de potencias debe ser su serie de Taylor.

El cálculo directo de los coeficientes de la serie de Taylor o Maclaurin por derivaciones sucesivas puede resultar difícil. El método más práctico para hallar una serie de Taylor o Maclaurin consiste en desarrollar series de potencias para una lista básica de funciones elementales. De esta lista se podrán deducir series de potencias para otras funciones mediante suma, resta, producto, división, derivación integración o composición con series conocidas. Antes de presentar esta lista básica desarrollaremos en serie la función $f(x) = (1+x)^r$ con $r \in \mathbb{R}$ que produce lo que se llama la **serie binómica.**

Las funciones de este tipo sólo son polinomios cuando r es natural o cero. Son indefinidamente derivables en un entorno del cero, y se tiene:

$$f^{n)}(x) = r(r-1)\cdots(r-n+1)(1+x)^{r-n}, \qquad f^{n)}(0) = r(r-1)\cdots(r-n+1)$$

Por tanto, si cuando $n \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{R}$ utilizamos la notación $\binom{r}{n}$ para indicar

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} \qquad \text{y} \qquad \binom{r}{0} = 1$$

obtenemos como posible desarrollo en serie de Mac-Laurin de la función dada el siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$$

Cuando r no es un número natural o cero, el radio de convergencia de la serie de la expresión anterior es $R = 1$. La serie, en consecuencia, es absolutamente convergente en $]-1, 1[$ y divergente cuando $|x| > 1$. Se puede probar también que la suma de dicha serie en $]-1, 1[$ es precisamente la función $f(x) = (1+x)^r$.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$ se denomina *serie binomial* o *binómica* puesto que cuando r es un número natural sólo sus $n+1$ primeros términos son no nulos, y además su expresión es la conocida fórmula de Newton para la potencia del binomio $(1+x)^r$.

Como casos particulares de la serie binómica citamos los siguientes:

Para $r = -1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

Para $r = 1/2$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \cdots$$

Para $r = -1/2$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \cdots$$

SERIES DE POTENCIAS PARA FUNCIONES ELEMENTALES

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

Entre las aplicaciones de los desarrollos en serie se encuentran:

– El cálculo de integrales definidas.

– El cálculo de la suma de series numéricas.

– La resolución de ecuaciones diferenciales.

Hemos visto:

Soluciones en serie en torno a puntos ordinarios

Aunque el método de series de potencias puede usarse en ecuaciones lineales de cualquier orden, sus aplicaciones más relevantes se refieren a ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden de la forma

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = 0,$$

donde $a(x)\,, b(x)$ y $c(x)$ son funciones analíticas de x. En realidad, en la mayoría de las aplicaciones esas funciones son polinomios. Por esta razón limitaremos el estudio a este tipo de ecuaciones.

Para determinar cuándo el método de series de potencias será efectivo, reescribimos la ecuación anterior en la forma

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0,$$

con el coeficiente principal 1 y $p(x) = b(x)/a(x)$ y $q(x) = c(x)/a(x)$.

Consideramos

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

los correspondientes desarrollos en serie para $y'(x)$ y $y''(x)$ dados por

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Sustituimos estas series de potencias en nuestra ecuación

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

y escribimos las tres series de forma que el término general de cada una de ellas sea una constante multiplicada por x^k.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2(k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

De aquí resultan dos soluciones linealmente independientes

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} \cdot n!} x^{2n} \qquad\qquad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n+1)]} x^{2n+1}$$

y por consiguiente la solución general de nuestra ecuación viene dada por

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x).$$

Soluciones en torno a puntos singulares

En la sección precedente vimos que no hay mucha dificultad en encontrar una solución en serie de potencias de

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = 0,$$

en torno a un punto ordinario $x = x_0$. Sin embargo, cuando $x = x_0$ es un punto singular, no siempre es posible encontrar una solución de la forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Veremos que, en algunos casos, si podemos obtener una solución de la forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r}$ donde r es una constante a determinar.

Definición.- *Un punto singular, $x = x_0$, de la* EDO *es un punto singular regular si tanto $(x - x_0)\,p(x)$ como $(x - x_0)^2\,q(x)$ son analíticas en x_0 y es un punto singular irregular en caso contrario.*

Ejemplo Los puntos $x = 0$ y $x = -1$ son, ambos, puntos singulares de la ecuación diferencial

$$x^2 (x+1)^2\, y'' + \left(x^2 - 1\right) y' + 2y = 0.$$

Si examinamos

$$p(x) = \frac{x-1}{x^2(x+1)} \qquad \text{y} \qquad q(x) = \frac{2}{x^2(x+1)^2}$$

podemos observar que $x = 0$ es un punto singular irregular, mientras que $x = -1$ es un punto singular regular.

Definición .- *Si* x_0 *es un punto singular regular de* $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$, *entonces llamamos ecuación indicial de ese punto a la ecuación*

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

donde

$$p_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)\,p(x) \qquad y \qquad q_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2\,q(x)$$

Las raíces de la ecuación indicial se llaman exponentes (índices) de la singularidad x_0.

En general, si x_0 es un punto singular regular, entonces las funciones $(x-x_0)\,p(x)$ y $(x-x_0)^2\,q(x)$ son analíticas en x_0; es decir, los desarrollos

$$\begin{aligned}(x-x_0)\,p(x) &= p_0 + p_1(x-x_0) + p_2(x-x_0)^2 + \cdots \\ (x-x_0)^2\,q(x) &= q_0 + q_1(x-x_0) + q_2(x-x_0)^2 + \cdots\end{aligned}$$

son válidos en intervalos que tengan radio de convergencia positivo. Después de sustituir $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r}$ en la ecuación y simplificar, la ecuación indicial es la ecuación cuadrática en r que resulta de igualar a cero el coeficiente total de la menor potencia de $(x-x_0)$.

Para estudiar la existencia de soluciones en serie en torno a puntos singulares regulares, y al igual que hicimos en la sección precedente, restringiremos nuestra atención al caso en el que $x_0 = 0$ es un punto singular regular de la ecuación.

El siguiente teorema nos garantiza la existencia de al menos una solución en serie de la forma anterior a la vez que proporciona, en algunos casos, la expresión de una segunda solución linealmente independiente.

Teorema *Soluciones en serie de Frobenius*

Sea $x=0$ un punto singular regular de la ecuación $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$ y sean r_1 y r_2 las raíces, con $r_1 \geq r_2$, de la ecuación indicial asociada. Entonces:

(a) Para $x>0$, existe una solución de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}, \qquad a_0 \neq 0$$

correspondiente a la raíz mayor r_1.

(b) Si $r_1 - r_2$ no es cero ni un entero positivo, entonces existe una segunda solución linealmente independiente para $x>0$ de la forma

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, \qquad b_0 \neq 0$$

correspondiente a la raíz menor r_2.

En el caso en el que $r_1 = r_2$ sólo puede haber una solución en serie de Frobenius. Si $r_1 - r_2$ es un entero positivo, puede existir o no una segunda solución en serie de Frobenius correspondiente a la raíz menor r_2. Los resultados correspondientes a la obtención de una segunda solución linealmente independiente en estas dos situaciones particulares los enunciamos en el siguiente teorema.

Teorema *Sea $x = 0$ un punto singular regular de la ecuación $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$ y sean r_1 y r_2 las raíces, con $r_1 \geq r_2$, de la ecuación indicial asociada. Entonces:*

(a) Si $r_1 = r_2$, existen dos soluciones linealmente independientes para $x > 0$ de la forma

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} \qquad a_0 \neq 0 \\ y_2(x) &= y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+r_1} \end{aligned}$$

(b) Si $r_1 - r_2$ es un entero positivo, existen dos soluciones linealmente independientes para $x > 0$ de la forma

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} \qquad a_0 \neq 0 \\ y_2(x) &= C y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} \qquad b_0 \neq 0 \end{aligned}$$

donde C es una constante que puede ser cero.

En el caso (b) del teorema $b_0 \neq 0$, pero C puede ser cero o no; de modo que el término logarítmico puede estar presente o no en la segunda solución. Los coeficientes de estas series (y la constante C) pueden determinarse por sustitución directa de las series en la ecuación diferencial.

Observación:

Puede ocurrir que al intentar encontrar la solución en serie de una ecuación diferencial en torno a un punto singular regular, las raíces de la ecuación indicial resulten ser: números complejos. Cuando r_1 y r_2 son complejos, la suposición $r_1 > r_2$ carece de significado y debe ser reemplazada por $\mathrm{Re}(r_1) > \mathrm{Re}(r_2)$, y, en este caso las soluciones serán complejas. Esta dificultad puede ser superada mediante el principio de superposición. Puesto que una combinación de soluciones también es solución de la ecuación diferencial, podríamos formar combinaciones adecuadas de $y_1(x)$ y $y_2(x)$ para obtener soluciones reales.

Si $x = 0$ es un punto singular irregular, debe hacerse notar que puede ser que no se pueda encontrar ninguna solución de la forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$.

Métodos numéricos para EDO

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = y_a \\ t \text{ en } [a, b] \end{cases}.$$

$$g_i = |w_i - y_i|$$

como la diferencia entre la aproximación a la solución de la EDO (por ejemplo, el método de Euler) y la solución correcta del problema de valor inicial. Además, se define el **error de truncamiento local**, o error de un solo paso, como

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i).$$

$$y(t_{i+1}) = w_i + hf(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2}y''(c).$$

(Convergencia del método de Euler) Suponga que $f(t, y)$ tiene una constante de Lipschitz L para la variable y y que la solución y_i del problema de valor inicial en t_i se aproxima mediante w_i, usando el método de Euler. Sea M una cota superior para $|y''(t)|$ en $[a, b]$. Entonces

$$|w_i - y_i| \leq \frac{Mh}{2L}(e^{L(t_i-a)} - 1).$$

Método explícito del trapecio

$$
\begin{aligned}
w_0 &= y_0 \\
w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{2}\left(f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))\right).
\end{aligned}
$$

El error local de truncamiento es el error cometido en un solo paso. A partir de un punto supuesto de la solución correcta (t_i, y_i), la extensión correcta de la solución en t_{i+1} puede estar dado por la expansión de Taylor

$$
y_{i+1} = y(t_i + h) = y_i + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(t_i) + \frac{h^3}{6}y'''(c),
$$

para algún número c entre t_i y t_{i+1}, suponiendo que y''' es continua. Con el fin de comparar estos términos con el método del trapecio, se escribirán un poco diferente. A partir de la ecuación diferencial $y'(t) = f(t, y)$, diferencie ambos lados con respecto a t, utilizando la regla de la cadena:

$$
\begin{aligned}
y''(t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)y'(t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)f(t, y).
\end{aligned}
$$

El método del trapecio puede escribirse como

$$
\begin{aligned}
w_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}\left(f(t_i, y_i) + f(t_i + h, y_i + hf(t_i, y_i))\right) \\
&= y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i) + \frac{h}{2}\left(f(t_i, y_i) + h\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y_i)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + f(t_i, y_i)\frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y_i)\right) + O(h^2)\right) \\
&= y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y_i) + f(t_i, y_i)\frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y_i)\right) + O(h^3).
\end{aligned}
$$

Aplique el método del trapecio al ejemplo

$$
\begin{cases}
y' = -4t^3 y^2 \\
y(-10) = 1/10001. \\
t \text{ en } [-10, 0]
\end{cases}
$$

Hasta ahora, se han estudiado dos métodos para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. El método de Euler es de primer orden, y el método del trapecio aparentemente superior es de segundo orden. En esta sección se muestra que existen métodos de todos los órdenes. Para cada entero positivo k existe un método de Taylor de orden k, que se describirá a continuación.

La idea básica es una explotación directa de la expansión de Taylor. Suponga que la solución $y(t)$ es $(k+1)$ veces continuamente diferenciable. Dado el punto actual $(t, y(t))$ en la curva de solución, la meta es expresar $y(t+h)$ en términos de $y(t)$ para algún tamaño de paso h, utilizando información acerca de la ecuación diferencial. La expansión de Taylor de $y(t)$ respecto a t es

$$
\begin{aligned}
y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{1}{2}h^2 y''(t) + \cdots + \frac{1}{k!}h^k y^{(k)}(t) \\
+ \frac{1}{(k+1)!}h^{k+1} y^{(k+1)}(c),
\end{aligned}
$$

donde c se encuentra entre t y $t+h$. El último término es el término residual de Taylor. Esta ecuación motiva el método siguiente:

Método de Taylor de orden k

$$
\begin{aligned}
w_0 &= y_0 \\
w_{i+1} &= w_i + hf(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, w_i) + \cdots + \frac{h^k}{k!} f^{(k-1)}(t_i, w_i).
\end{aligned}
$$

La notación prima se refiere a la derivada total de $f(t, y(t))$ con respecto a t. Por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
f'(t, y) &= f_t(t, y) + f_y(t, y)y'(t) \\
&= f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y).
\end{aligned}
$$

El método de Taylor de primer orden es

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i),$$

que se identifica como método de Euler. El método de Taylor de segundo orden es

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) + \frac{1}{2}h^2(f_t(t_i, w_i) + f_y(t_i, w_i)f(t_i, w_i)).$$

EJEMPLO Determine el método de Taylor de segundo orden para la ecuación lineal de primer orden

$$\begin{cases} y' = ty + t^3 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Como $f(t, y) = ty + t^3$, se deduce que

$$\begin{aligned} f'(t, y) &= f_t + f_y f \\ &= y + 3t^2 + t(ty + t^3), \end{aligned}$$

y el método queda

$$w_{i+1} = w_i + h(t_i w_i + t_i^3) + \frac{1}{2}h^2(w_i + 3t_i^2 + t_i(t_i w_i + t_i^3)).$$

Ejercicio

Aplique el método de Euler al sistema de primer orden con dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2^2 - 2y_1 \\ y_2' &= y_1 - y_2 - t y_2^2 \\ y_1(0) &= 0 \\ y_2(0) &= 1. \end{aligned}$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de orden n , n>1

Una sola ecuación diferencial de orden superior puede convertirse en un sistema. Sea

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

una ecuación diferencial ordinaria de orden n. Defina la nuevas variables

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ y_3 &= y'' \\ &\vdots \\ y_n &= y^{(n-1)}, \end{aligned}$$

y observe que la ecuación diferencial original puede escribirse como

$$y_n' = f(t, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de orden n , n>1

Una sola ecuación diferencial de orden superior puede convertirse en un sistema. Sea

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

una ecuación diferencial ordinaria de orden n. Defina la nuevas variables

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ y_3 &= y'' \\ &\vdots \\ y_n &= y^{(n-1)}, \end{aligned}$$

y observe que la ecuación diferencial original puede escribirse como

$$y_n' = f(t, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

En conjunto, las ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= y_4 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= f(t, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

convierten la ecuación diferencial de orden n en un sistema de ecuaciones de primer orden, que puede resolverse usando métodos como el de Euler o el del trapecio.

Ejemplo

Convierta la ecuación diferencial de tercer orden

$$y''' = a(y'')^2 - y' + yy'' + \operatorname{sen} t$$

en un sistema.

Establezca $y_1 = y$, y defina las nuevas variables

$$\begin{aligned} y_2 &= y' \\ y_3 &= y''. \end{aligned}$$

Después, en términos de las primeras derivadas, (6.37) es equivalente a

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= ay_3^2 - y_2 + y_1 y_3 + \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

Ejercicio Reducir a un sistema de primer orden

La ecuación diferencial que rige al péndulo sin fricción es

$$ml y'' = F = -mg \operatorname{sen} y.$$

el ángulo inicial $y(0)$

velocidad angular $y'(0)$.

Si se establece $y_1 = y$, $y_2 = y'$