Sesión 21

Análisis Convexos - CM3E2

Jonathan Munguia[1]

[1]Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

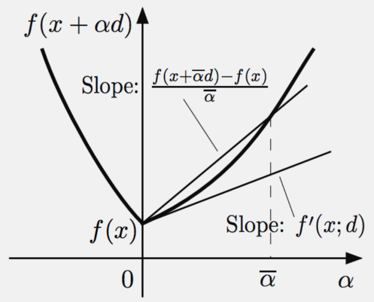
24 de enero de 2021

Outline

Definición 1 (Derivada direccional)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ y $x \in \text{dom}(f)$. La derivada direccional de f en x en la dirección $d \in \mathbb{R}^n$, denotada por $f'(x, d)$, es el límite, si existe,

$$f'(x, d) = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha}.$$



Lema 1

Si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es convexa, $x \in \operatorname{dom}(f)$ y $d \in \mathbb{R}^n$, se tiene que la función

$$\alpha \to \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha}$$

es creciente en $(0, +\infty)$. Luego

$$f'(x, d) = \inf_{\alpha > 0} \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha}.$$

Así, $f'(x, d)$ es o un número real o $\pm\infty$.

$$t \to \frac{\overbrace{f(a+td)-f(a)}^{g(t)}}{t}$$ para f convexa es creciente en $\langle 0,\infty\rangle$

$0<t_1<t_2$

$$f(a+t_1d) = f\left(\frac{t_1}{t_2}(a+t_2d) + \left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)a\right)$$

$$\leq \frac{t_1}{t_2} f(a+t_2d) + \left(1-\frac{t_1}{t_2}\right) f(a)$$

$$= f(a) + \frac{t_1}{t_2}\left(f(a+t_2d)-f(a)\right)$$

$\Rightarrow$ $g(t_1) \leq g(t_2)$ $\forall$ $0<t_1<t_2$

$k>0$: $f'(a,kd) = \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{f(a+(tk)d) - f(a)}{tk}\right)k$

$= k \lim_{tk\to 0^+} \Big(\qquad \Big)$

$= k f'(a,d)$

Teorema 1

Sea $f:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa propia y $a \in dom(f)$. Entonces $f'(a,\cdot)$ es convexa positivamente homogénea.

$d \to g(d) = f(a+d) - f(a)$ es convexa

función perspectiva

$(d,\theta) \to \varphi(d,\theta) = \theta g\left(\frac{d}{\theta}\right)$ es convexa en $\mathbb{R}^n \times]0,+\infty)$

$f'(a,d) = \inf_{\theta>0} \varphi(d,\theta) = \inf_{\theta>0} \theta \left[f\left(a+\frac{d}{\theta}\right) - f(a)\right]$

es la marginal de φ convexa es convexa

$= \inf_{t>0} \frac{1}{t}\left[f(a+td) - f(a)\right]$

(d_1, θ_1), (d_2, θ_2), $t \in (0,1)$

$$t(d_1, \theta_1) + (1-t)(d_2, \theta_2) = (\overbrace{t d_1 + (1-t) d_2}^{\hat{d}}, \overbrace{t\theta_1 + (1-t)\theta_2}^{\hat{\theta}})$$

$$\varphi(\hat{d}, \hat{\theta}) = \hat{\theta}\, g\left[\underbrace{\frac{t d_1 + (1-t) d_2}{t\theta_1 + (1-t)\theta_2}}\right]$$

$$g\left[\frac{t\theta_1}{\hat{\theta}}\left(\frac{d_1}{\theta_1}\right) + \frac{(1-t)\theta_2}{\hat{\theta}}\left(\frac{d_2}{\theta_2}\right)\right]$$

$$\leq \cancel{\hat{\theta}}\, \frac{t\theta_1}{\cancel{\hat{\theta}}}\, g\left(\frac{d_1}{\theta_1}\right) + \cancel{\hat{\theta}}\, \frac{(1-t)\theta_2}{\cancel{\hat{\theta}}}\, g\left(\frac{d_2}{\theta_2}\right)$$

$$= t\,\varphi(d_1, \theta_1) + (1-t)\,\varphi(d_2, \theta_2)$$

$\Rightarrow \quad x^* \in \partial f(a) \Rightarrow f(a+td) \geq f(a) + \langle x^*, \cancel{a}+td-\cancel{a}\rangle$

$\forall t > 0$

$\forall d \in \mathbb{R}^n$

$$\underbrace{\inf_{t>0} \frac{f(a+td)-f(a)}{t}}_{f'(a,d)} \geq \langle x^*, d\rangle$$

Proposición 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa propia y $a \in dom(f)$. Entonces

$$x^* \in \partial f(a) \text{ si y solo si } f'(a,d) \geq \langle x^*, d\rangle \text{ para todo } d \in \mathbb{R}^n. \text{ Es decir}$$

$$\partial f(a) = \left\{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle x^*, d\rangle \leq f'(a,d) \quad \forall d \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

$\Leftarrow \quad d = x - a \quad , \quad t = 1$

$$\frac{f(a+1(x-a))-f(a)}{1} \geq f'(a,d) \geq \langle x^*, d\rangle$$

$$f(x) \geq f(a) + \langle x^*, x-a\rangle \quad \Rightarrow x^* \in \partial f(a)$$

$\bar{x} \in \mathrm{int}(\mathrm{dom} f) \Rightarrow f$ es localmente Lipschitz alrededor de x.

$\Rightarrow \exists\, l \geq 0$ y $\delta \geq 0$ tq $|f(x) - f(y)| \leq l \|x-y\| \quad \forall x, y \in B(\bar{x}, \delta)$

Proposición 2

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa y $\overline{x} \in int(dom(f))$. Entonces $f'(\overline{x}, d)$ es un número real para todo $d \in \mathbb{R}^n$.

Observación 1

Usando las mismas ideas de la prueba, se tiene que $f'(\overline{x}, d)$ es un número real para todo $x \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$ y para todo d en el subespacio que es paralelo al $\mathrm{aff}(\mathrm{dom}(f))$.

$t > 0$ suf. pequeño $\quad |f(\bar{x}+td) - f(\bar{x})| \leq l\, t \|d\|$

$$|f'(\bar{x}, d)| \leq l \|d\|$$

Proposición 3

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa. Entonces f^* es propia si y solo si f es propia.

Demostración

Ver la Proposición 1.6.1 parte (b) de [4].

$\delta = f^* \Rightarrow \gamma \delta(y) = \sup_{\substack{d \in \mathbb{R}^n \\ \gamma > 0}} [\gamma \langle d, y \rangle - \gamma f(d)]$

$= \delta(y) \quad \gamma > 0$

$\delta \to 0$ ó $+\infty$

Proposición 4

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ propia y postivamente homogénea. Entonces, existe C convexo cerrado no vacío tal que $f^* = \delta_C$. Además $C = S_0(f^*)$.

Demostración

Sigue las mismas ideas del Teorema 3.5 de [2].

$Y = \{y \mid \delta(y) \leq 0\} = S_0(f^*)$ es convexo y cerrado

Como f es propia $\Rightarrow$ f^* es propia $\Rightarrow$ $Y \neq \emptyset$.

$\delta = \theta^* = \delta_{S_0(\theta^*)}$

$S_0(\theta^*) = \{ y \mid \sup_d [\langle d, y\rangle - f'(x,d)] \leq 0 \}$

Proposición 5 (Función soporte de la subdiferencial)

positiva homogénea propia

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa propia y $x \in dom(f)$. Si $\theta(\cdot) = f'(x,)$ es propia entonces $\partial f(x) \neq \emptyset$. Además, $\overline{\theta}$ es la función soporte de $\partial f(x)$, es decir $\overline{\theta} = \sigma_{\partial f(x)}$.

Observación 2

Si existe d tal que $f'(x,d) = -\infty$, entonces $\partial f(a) = \emptyset$.

$= \{ y \mid \langle d, y\rangle \leq f'(x,d) \ \forall d \in \mathbb{R}^n \} = \partial f(x)$

$\left(\overline{f'(x,\cdot)}\right)^{**} = \left(f'(x,\cdot)\right)^* = \delta_{\partial f(x)} \Rightarrow \overline{f'(x,\cdot)} = \sigma_{\partial f(x)}$

convexa sci y propia

$\Leftarrow$ $a \in \text{int}(\text{dom} f)$, $\theta(d) = f'(a,d)$

$\exists B(a,r) \subset \text{dom} f$

$\forall d \neq 0$, $\exists \bar{t} > 0$ tq $a + \bar{t} d \in \text{dom} f$ $< \infty$

$\theta(d) = \inf_{t>0} f \dfrac{(a+td) - f(a)}{t} \leq \dfrac{f(a+\bar{t}d) - f(a)}{\bar{t}}$

Proposición 6

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa propia y $a \in dom(f)$. Entonces $\partial f(a)$ es compacto no vacío si y solo si $a \in int(dom(f))$. En tal caso

$$f'(a, \cdot) = \sigma_{\partial f(a)}(\cdot).$$

convexidad de θ

$0 = \theta(0) = \theta\left(\frac{1}{2} d + \frac{1}{2}(-d)\right) \leq \frac{1}{2}\theta(d) + \frac{1}{2}\theta(-d)$ $< \infty$

$\theta(d) > -\infty \Rightarrow \text{dom}\,\theta = \mathbb{R}^n$

θ es continua en $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ θ es sci en $\mathbb{R}^n$

$$\Theta = \bar{\Theta} = \delta^*_{\partial f(a)} < \infty \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$$

Corolario 3.3

$C \neq \emptyset \Rightarrow C$ es acotado $\Leftrightarrow \operatorname{dom} \delta^*_C = \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \partial f(a)$ es acotado y cerrado $\Big\}$ es compacto.

$\wedge \quad f'(a, \cdot) = \delta^*_{\partial f(a)}$.

$\Rightarrow$] Revisar el libro del prof. Eladio

Corolario 1

Sea f convexa propia y $a \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$. Entonces $\partial f(a) \neq \emptyset$ y $f'(a, \cdot) = \sigma_{\partial f(a)}(\cdot)$.

Demostración

- Como $a \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$ entonces $S = \mathrm{dom}(f'(a, \cdot))$ es un conjunto afín paralelo a $\mathrm{aff}(\mathrm{dom}(f))$. Luego como $f'(a, \cdot)$ es convexa, entonces $f'(a, \cdot)$ es cerrada (sci).
- Como $f'(a, \cdot)$ es finita en S, se tiene que $f'(a, \cdot)$ es propia.
- Por último de concluye de la Proposición 6.

$f(a+h) = f(a) + \langle x^*, h\rangle + r(h)$

Definición 2

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ finita en $a \in \mathbb{R}^n$, se dice Fréchet-diferenciable en a, si existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\frac{f(a+h) - f(a) - \langle h, x^* \rangle}{\|h\|} \to 0, \quad \text{cuando} \quad h \to 0.$$

Observación 3

- La definición no depende de la norma.
- x^* es único y se denota por $\nabla f(a)$.
- Si $\nabla f(a)$ existe, entonces

$$\langle \nabla f(a), h \rangle = f'(a, h) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

$\Rightarrow$ f es Fréchet $\Rightarrow$ $f'(a,h) = \langle \nabla f(a), h\rangle \ \forall h \in \mathbb{R}^n$

$x^* \in \partial f(a)$: $\langle x^*, h\rangle \leq$

$\Rightarrow \|x^* - \nabla f(a)\| \leq 0$

$\Rightarrow x^* = \nabla f(a)$

Teorema 2

Sea f convexa propia y $a \in dom(f)$. Entonces f es Fréchet-diferenciable en a si y solo si $\partial f(a)$ es un conjunto unitario. En este caso, $a \in int(dom(f))$ ~~=~~ $\{\nabla f(a)\}$. $= \partial f(a)$

$\Leftarrow$ $\partial f(a) = \{x^*\}$ es compacto no vacío

por la prop 6:

$a \in int(dom f)$

$\wedge$ $f'(a,h) = \delta^*(h|\partial f(a)) = \sup\limits_{y \in \partial f(a)} \langle y, h\rangle = \langle x^*, h\rangle \ \forall h.$

por unicidad $x^* = \nabla f(a)$.

Referencias bibliográficas

1. Jean-Baptiste Hiriart-Urruty and Claude Lemarechal. Fundamentals of Convex Analysis, Springer, 1st ed. 2001.
2. Jean-Pierre Crouzeix and Eladio Ocaña. Análisis convexo. Fondo Editorial EDUNI, 2018.
3. Boris S. Mordukhovich and Nguyen Mau Nam. An Easy Path to Convex Analysis and Applications. Morgan & Claypool Publishers series, 2014.
4. Dimitri P. Bertsekas. Convex Analysis and Optimization. Athena Scientific, 2003.