Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Análisis Convexo - CM3E2]
[Prof: Jonathan Munguia]

UNI, 14 de mayo de 2021

Práctica Calificada 2

1. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Probar que $\text{aff}(C) = \text{aff}(\text{ri}(C))$. [5ptos]

Solución:

a) Suponiendo que C no se reduce a un punto. Por el Teorema 1 de la cuarta sesión, existen $\{x_0, x_1, \cdots, x_p\} \subset C$ afinamente independientes con p máximo tal que

$$\text{aff}(C) = \text{aff}\{x_0, x_1, \cdots, x_p\}.$$

b) Ahora consideremos el conjunto

$$\begin{aligned} T &:= \left\{ \sum_{i=0}^{p} t_i x_i \ : \ \{t_i\}_{i=0}^{p} \subset (0,1),\ \sum_{i=0}^{p} t_i = 1 \right\} \\ &= x_0 + \left\{ \sum_{i=0}^{p} t_i (x_i - x_0) \ : \ \{t_i\}_{i=1}^{p} \subset (0,1),\ \sum_{i=1}^{p} t_i < 1 \right\}. \end{aligned}$$

El cual es un subconjunto del $\text{aff}(C)$.

c) Sea la bola unitaria $B = \{t \in \mathbb{R}^p \ : \ \|t\|_s < 1\}$, donde $\|.\|_s$ denota la norma de la suma. Entonces, se tiene que

$$(0,1)^p \cap B = \left\{ t = (t_1, \cdots, t_p) \in \mathbb{R}^p_{++} \ : \ \sum_{i=1}^{p} t_i < 1 \right\}.$$

Es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^p$.

d) Sea la aplicación afín $f : \mathbb{R}^p \to \text{aff}(C)$ definida como

$$f(t_1, \cdots, t_p) = x_0 + \sum_{i=1}^{p} t_i (x_i - x_0).$$

Claramente es inyectiva porque los vectores $\{x_1 - x_0, \cdots, x_p - x_0\}$ son linealmente independientes. Además como la $\dim(\text{aff}(C)) = p$, entonces f es continua biyectiva.

e) Se observa que $T = f((0,1)^p \cap B)$, el cual es subconjunto abierto relativo al $\text{aff}(C)$, pues $(0,1)^p \cap B$ es abierto y f es continua biyectiva por lo que lleva abiertos en abiertos.

f) Como $\{x_0, x_1, \cdots, x_p\} \subset T \subset C$ entonces $\text{aff}\{x_0, x_1, \cdots, x_p\} \subset \text{aff}(T) \subset \text{aff}(C)$, lo que implica que $\text{aff}(T) = \text{aff}(C)$. Además por la parte e), se tiene que $T \subset \text{ri}(C) \subset C$, luego

$$\text{aff}(C) = \text{aff}(T) \subset \text{aff}(\text{ri}(C)) \subset \text{aff}(C).$$

Por tanto $\text{aff}(\text{ri}(C)) = \text{aff}(C)$.

2. Si $S \subset \mathbb{R}^n$. Probar que $\operatorname{aff}(\overline{S}) = \operatorname{aff}(S)$. [5ptos]

Solución:

a) Los subespacios en espacios de dimensión infinita en general no son cerrados. Sin embargo los subespacios de $\mathbb{R}^n$ si son cerrados. Probar!

b) Sea $\operatorname{aff}(S) - x$ para $x \in S$ un subespacio vectorial (cerrado), luego la traslación lleva cerrados en cerrados, por tanto $\operatorname{aff}(S)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$.

c) Como $S \subset \overline{S}$ entonces $\operatorname{aff}(S) \subset \operatorname{aff}(\overline{S})$.

d) Como $S \subset \operatorname{aff}(S)$ entonces por b) se tiene

$$\overline{S} \subset \overline{\operatorname{aff}(S)} = \operatorname{aff}(S) \Longrightarrow \operatorname{aff}(\overline{S}) \subset \operatorname{aff}(S).$$

e) Se concluye de c) y d).

3. Sean C_1, C_2 subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$. Probar que

$\overline{C_1} = \overline{C_2} \iff \operatorname{ri}(C_1) = \operatorname{ri}(C_2)$. [5ptos]

Solución:

a) Dado el hecho que: Si C es convexo entonces

$$\operatorname{ri}(C) = \operatorname{ri}(\overline{C}) \quad \wedge \quad \overline{\operatorname{ri}(C)} = \overline{C}.$$

b) $\Longrightarrow$) Por la primera igualdad de a), se tiene

$$\operatorname{ri}(C_1) = \operatorname{ri}(\overline{C}_1) = \operatorname{ri}(\overline{C}_2) = \operatorname{ri}(C_2).$$

c) $\Longleftarrow$) Por la segunda igualdad de a), se tiene que

$$\overline{C}_1 = \overline{\operatorname{ri}(C_1)} = \overline{\operatorname{ri}(C_2)} = \overline{C}_2.$$

4. Considere el politopo $P = \operatorname{co}(x_1, \cdots, x_p)$. Mostrar que si x es un punto extremo de P, entonces $x \in \{x_1, \cdots, x_p\}$. ¿Es cada x_j necesariamente un punto extremo? [5ptos]

Solución:
<u>Punto extremo:</u> $x \in C$ es un punto extremo si y solo si $x = t\,x_1 + (1-t)x_2$, $t \in (0,1)$ y $x_1, x_2 \in C$ implica que $x = x_1 = x_2$.

Sea $x \in P$ punto extremo, entonces $x = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j$ con $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$. Supongamos que existe $\lambda_j \in (0,1)$, por ejemplo λ_1. Sino fuera así entonces $\lambda_j \in \{0,1\}$ para todo j con lo cual x coincidiría con alguno de los x_j (con lo cual quedaría probado). Por tanto, suponiendo $1 > \lambda_1 > 0$, se obtiene que

$$x = \lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) \sum_{j=2}^{p} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_1} x_j.$$

Como $x_1 \in P$ y $\sum_{j=2}^{p} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_1} x_j \in P$ (por ser una combinación convexa) y x punto extremo se tiene que $x = x_1$.
Cada x_j no necesita ser punto extremo: pues podríamos añadir simplemente un x_k como una combinación convexa de los previos x_j con $\lambda_j \in (0, 1)$, dicho punto claramente no sería un punto extremo de P. En otras palabras el conjunto $\{x_1, \cdots, x_p\}$ podría ser afinamente dependiente.