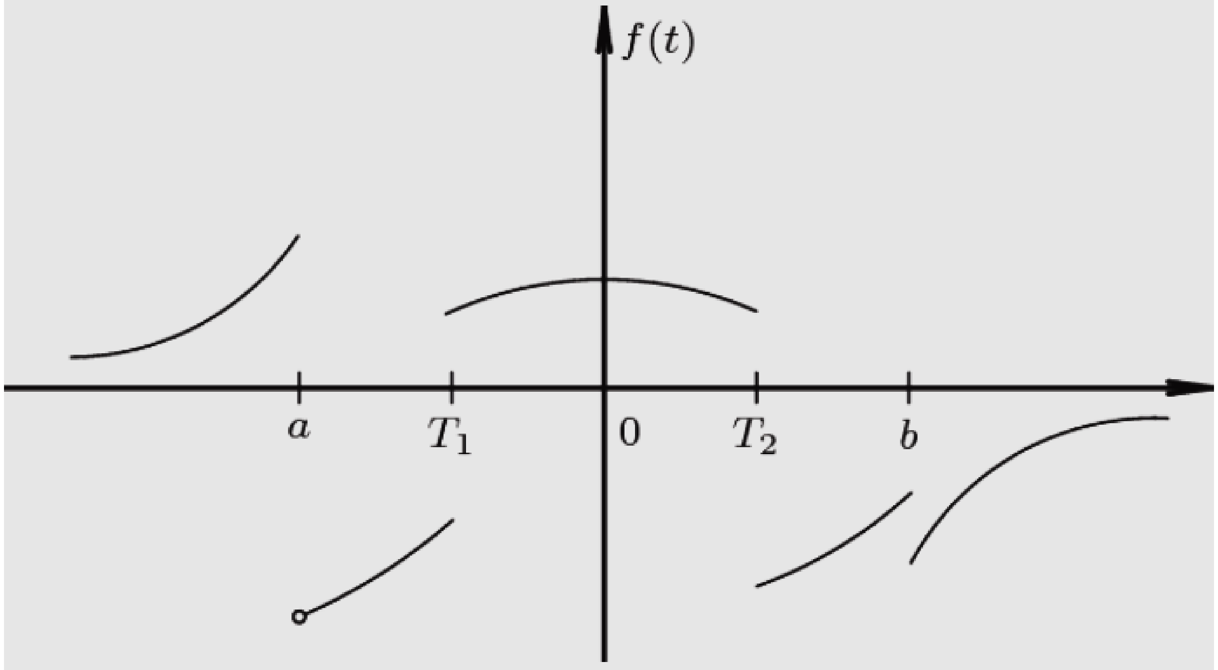
Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Transformada de Laplace Directa e Inversa
Definición, Propiedades

irlamn@uni.edu.pe

FUNCIONES SECCIONALMENTE CONTINUA



. Un ejemplo de una función seccionalmente continua

- **Definición 1** (Función seccionalmente continua).- Una función $f(t)$ es seccionalmente continua en el intervalo $[a,b]$ si es continua en todos los puntos de $[a,b]$ salvo quizá en un número finito de puntos, en los cuales deben existir límites laterales finitos. Una función $f(t)$ es seccionalmente continua en el intervalo $[0,\infty)$ si lo es en cada intervalo de la forma $[0,A)$, con $A>0$.

- **Definición 2.-** (Función de orden exponencial).- Una función $f(t)$ se dice de orden exponencial α para $t \to \infty$ si, existen M y t_0 tales que $|f(t)| \le Me^{\alpha t} \quad \forall t \ge t_0$
-

  Definición 3.- (Convergencia).- Se denomina abscisa de convergencia de $f(t)$ al ínfimo (mayor de las cotas inferiores) de todos los valores α que verifican $|f(t)| \le Me^{\alpha t} \quad \forall t \ge t_0$, para algún M y t_0.
- Ejemplos de funciones de orden exponencial para $t \to \infty$ encontramos, entre las más usuales, los polinomios, las funciones racionales, los polinomios trigonométricos, las funciones exponenciales y las logarítmicas.

- El orden exponencial garantiza la convergencia de la integral $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\ dt$, en la que podemos acotar el valor absoluto del integrando, es decir:

$|e^{-st}$f(t)$| \leq Me^{\alpha t} e^{-st} = Me^{(\alpha - s)t}$.

Entonces $M \quad \int_0^{\infty} e^{-st} \quad e^{(\alpha - s)t}\ dt = \frac{M}{\alpha - s} \quad (\lim_{A \to \infty} e^{(\alpha - s)A} - 1)$

converge si $s > \alpha$, lo que significa que la integral

$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ converge para $s > \alpha$.

Definición 4.- (Función escalón unitario o función de Heaviside)
Se denomina así a una función definida por

$$U(t)=\begin{cases} 0, & \text{si } t<0 \\ 1, & \text{si } t>0 \end{cases}$$

Muchos autores la denotan también como $H(t)$ *en honor a* Heaviside.
Esta función nos servirá para expresar a cualquier función seccionalmente continua, que lo utilizaremos, y en cada parte del dominio, como saltos tenga la función seccionalmente continua usaremos la expresión $U(t-a)$.

Transformada de Laplace Directa y transformada de Laplace inversa

Definición 5 (Transformada de Laplace).-
Sea $f(t)$ una función definida en $t \geq 0$. A la integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$, *si* existe, para algunos valores de s, se le define como la transformada de Laplace de $f(t)$.

La integral anterior es una integral impropia, diferente para cada s, y como tal impropia puede no existir o no ser finita;
se puede demostrar que si existe y es finita para cierto $s = s_0$,
va a serlo también para cualquier $s \geq s_0$.
Esto quiere decir que la transformada de la función $f(t)$ existe a partir de un cierto s en adelante.

TEOREMA 1 (Condiciones suficientes de existencia de la transformada):

- Si la función $f(t)$ es seccionalmente continua

en $[0,\infty)$ y de orden exponencial para $t\to\infty$, está garantizada la existencia de la transformada de Laplace de $f(t)$ en el dominio de esta nueva función $F(s)= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$,

para $s>\alpha$, siendo α la abscisa de convergencia de $f(t)$, entonces se tiene la existencia de la transformada de Laplace para f(t).

Teorema.- (Unicidad) Sean $f, g : [0, \infty) \to \mathrm{R}$, funciones continuas, tales que $L(f(t)) = L(g(t)) = \mathrm{F(s)}$, en $[a, \infty)$, entonces $f = g$.

Si L(f) = F=L(g) , entonces f=g. La unicidad nos permite definer la Transformada de Laplace inversa de una función f

$$L^{-1}(F(s)) = f(t)$$

Si $F(s)$ representa la transformada de Laplace de una función $f(t)$.

Esto es $L\{f(t)\} = F(s)$, decimos que $f(t)$ es la transformada inversa de Laplace $F(s)$ y escribimos $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$.

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$	$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	k	$\frac{k}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$		

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$
$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n, \quad n = 1,2,3\ldots$
$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$
$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = sen(kt)$
$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = cos(kt)$
$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\} = senh(kt)$
$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\} = cosh(kt)$

Propiedades

Sean $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces,

Linealidad

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathscr{L}\{f(t)\} + \beta \mathscr{L}\{g(t)\}$$
$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Primera Traslación

$$\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$
$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$$

Segunda Traslación

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases} \Rightarrow \mathscr{L}\{g(t)\} = e^{-as} F(s)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

Ejemplo. Calcular $\mathscr{L}\{e^{3t}t^2\}$

Puede plantearse de dos formas:

- Partiendo de que $\mathscr{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3} = F(s)$, utilizando la primera traslación se obtiene
$$\mathscr{L}\{e^{3t}t^2\} = F(s-3) \; = \; \frac{2}{(s-3)^3}\,.$$
- Por otra parte, partiendo de $\mathscr{L}\{e^{3t}\} = \frac{1}{s-3} = F(s)$, y teniendo en cuenta que
$$F'(s) = \frac{-1}{(s-3)^2} \quad \text{y} \quad F''(s) = \frac{2}{(s-3)^3}\;,$$
se concluye que
$$\mathscr{L}\{e^{3t}t^2\} = (-1)^2 F''(s) = \frac{2}{(s-3)^3}\;.$$

Ejemplos

Ejemplo. Calcular $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\}$

En primer lugar, se hace la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3} \quad \Rightarrow \begin{array}{l} A+B=3 \\ -3A+B=7 \end{array} \Rightarrow A=-1, \quad B=4,$$

Aplicando las propiedades de linealidad:

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\} = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s-3}\} =$$

$$= -\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} + 4\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s-3}\} = -e^{-t} + 4e^{3t}$$