Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Análisis Convexo - CM3E2]
[Prof: Jonathan Munguia] UNI, 18 de junio de 2021

Sexta Práctica Dirigida

1. Haga un dibujo para ayudarse a calcular la función de soporte σ_P del conjunto parabólico
$$P = \left\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \xi \geq \frac{1}{2}\eta^2\right\}.$$
   a) Hallar el dom σ_P.
   b) Demostrar que σ_P no es semicontinua superior sobre su dominio.

2. Sea C convexo, compacto con $0 \in \operatorname{int} C$. Mostrar que C° disfruta de las mismas propiedades.

3. Con respecto al Problema 2. Mostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes
   a) El hiperplano $H_{s,1}$ soporta a C en $x \in C$.
   b) El hiperplano $H_{x,1}$ soporta a C° en $s \in C^\circ$.
   c) Dados $x \in \partial C$ y $s \in \partial C^\circ$, $\langle s, x\rangle = 1$.

4. Mostrar que la conjugada de $\frac{1}{2}\|\cdot\|^2$ es ella misma.

5. Sea f convexa y sci sobre $\mathbb{R}$. Dada $g(x,t) := tf(x/t)$, demuestre que
$$g^{**}(x,t) = \begin{cases} tf(x/t) & \text{si } t > 0 \\ 0^+f(x) & \text{si } t = 0 \\ +\infty & \text{en otro caso,} \end{cases}$$
   donde se define la función asintótica $0^+f(x) := \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(z+tx) - f(z)}{t}$ para $z \in \operatorname{dom} f$. (Sug. Considere por ejemplo $g(x,t) = x^2/t$ sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$)

6. Sea H un hiperplano en $\mathbb{R}^n$ y suponga que el conjunto S está contenido en uno de los correspondientes semiespacios: $S \subset H^-$. Mostrar que $\overline{\operatorname{co}}(S \cap H) = (\overline{\operatorname{co}}\, S) \cap H$.

7. Dada la función $f(x) = \sqrt{1 + \|x\|^2}$. Responda y justifique:
   a) ¿Es f estrictamente convexa?
   b) Halle f^*.

8. Sea $x \in C$, donde C es un conjunto convexo cerrado de $\mathbb{R}^n$. Mostrar que $x \in \operatorname{ri} C$ si y solo si el cono normal $N_C(x)$ es un subespacio.

9. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (no necesariamente convexa) tal que $f \not\equiv +\infty$ y existe una función afín minorizando f sobre $\mathbb{R}^n$. Demuestre que
   a) Si $x_0 \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f$ entonces $f^* - \langle x_0, \cdot\rangle$ es 0-coerciva;
   b) En particular, si f es finita sobre $\mathbb{R}^n$, entonces f^* es 1-coerciva.

10. Hallar las funciones conjugadas de
    a) $\frac{1}{2}\|p_H \cdot\|^2$, donde H es subespacio de $\mathbb{R}^n$ y p_H es la proyección ortogonal.
    b) $\frac{1}{2}(u^t\cdot)^2$, donde u es un vector columna de $\mathbb{R}^n$.

11. Halle la función conjugada de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
$$f(x) = |x| + \frac{1}{2}x^2.$$