Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2]
[Los Profesores] UNI, 18 de mayo de 2021

Tercera Práctica Dirigida

1. Reduzca las siguientes ecuaciones diferenciales individuales a un sistema de ecuaciones de primer orden (x es la variable dependiente y t, la variable independiente):

$$a) \quad x''' + 3xx' = 6t^2 \qquad b) \quad x''' - 3x = e^{2t}$$

2. Reduzca el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales a un sistema de ecuaciones de primer orden (t es la variable independiente):

$$\begin{aligned} x''' &= 3y' + \cos t, \quad x(\pi) = 0, \quad x'(\pi) = 4, \quad x''(\pi) = -2 \\ y'' &= 2ty' - x + e^t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{aligned}$$

3. Determine si el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales es *a*) lineal o no lineal, *b*) homogéneo o no homogéneo y *c*) si tiene coeficientes constantes o variables:

$$\begin{aligned} x''' &= 2xy - y' + \cos t \\ y'' &= 2ty' - x + e^t \end{aligned}$$

4. Considere el circuito eléctrico mostrado en la figura 1, que consiste en dos lazos cerrados. Obtenga las ecuaciones diferenciales que rigen las corrientes I_1 e I_2 que fluyen por los inductores L_1 y L_2, respectivamente.

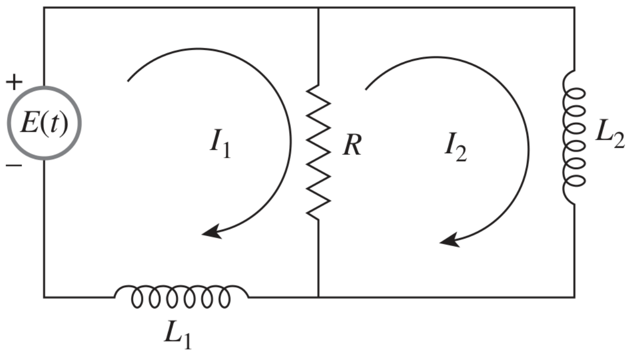

Figura 1: circuito eléctrico

5. Los tanques cilíndricos que se muestran en la Figura 2 tienen las áreas de fondo A_1 y A_2. El caudal másico de entrada $q_{mi}(t)$ de la fuente es una función dada del tiempo. La salida descarga a presión atmosférica. Los tubos se modelan como resistencias lineales. Esto significa que el caudal másico a través del tubo es proporcional a la diferencia de presión entre los extremos del tubo, e inversamente proporcional a la resistencia R. El valor de la resistencia R depende parcialmente de las propiedades del fluido y de la longitud y el diámetro del tubo. Es posible encontrar métodos para calcular R en textos sobre mecánica de fluidos.
Desarrolle un modelo de segundo orden de la altura de líquido $h1$ para el caso en el que los tubos son idénticos de modo que $R_1 = R_2 = R$ y el segundo tanque tiene un área de fondo del triple de la del primero, de modo que $A_1 = A$ y $A_2 = 3A$. Si el flujo de entrada se cierra, ¿cuándo tardarán los tanques en vaciarse?¿Oscilarán las alturas?

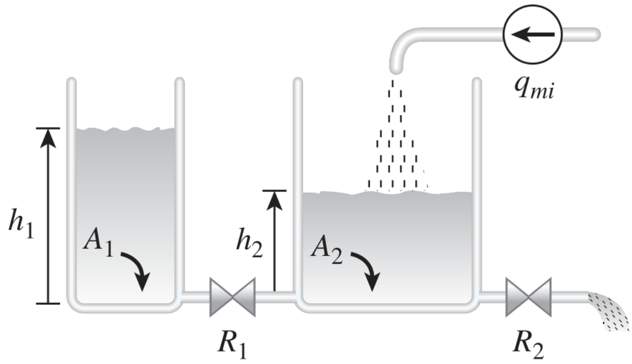

Figura 2: tanques cilíndricos

6. ¿Cuál es la principal limitación del método de eliminación?¿Es aplicable a sistemas no homogéneos?¿Es aplicable a sistemas no lineales?¿Es aplicable a sistemas con coeficientes variables?

7. Use el método de eliminación para determinar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} x' &= -3x + 2y \\ y' &= 2x - 6y \end{aligned}$$

8. Use el método de eliminación para determinar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\begin{aligned} x' &= -3x + 2y + 5 \\ y' &= 2x - 6y \end{aligned}$$

9. Use el método de eliminación para determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con las condiciones iniciales específicas:

$$\begin{aligned} x' &= -3x + 2y + 5, \qquad x(0) = 3 \\ y' &= 2x - 6y, \quad y(0) = 0 \end{aligned}$$

10. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de la forma

$$y^{'} = \mathbf{A} \cdot y$$

donde la matriz $\mathbf{A}$ es la siguiente:

$(a)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $(b)\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $(c)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$(d)\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $(e)\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ $(f)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(g)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $(h)\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}$ $(i)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

11. Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales:

$(a)\begin{cases} x^{'} = y \\ y^{'} = -x \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$ $(d)\begin{cases} x^{'} = x - z \\ y^{'} = 2y \\ z^{'} = x + z \\ x(0) = -2, y(0) = 2, z(0) = -1 \end{cases}$ $(b)\begin{cases} x^{'} = -4(x + y) \\ x^{'} + 4y^{'} = -4y \\ x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases}$

$$(e)\begin{cases} x' = y+z \\ y' = -x+z \\ z' = -x-y \\ x(0)=y(0)=z(0)=-1 \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} x' = 3x+8y \\ y' = -3y-x \\ x(0)=6, y(0)=-2 \end{cases}$$

12. Resolver los siguientes sistemas y problemas de condiciones iniciales

$$(a)\begin{cases} x' = y+te^{2t} \\ y' = -2x+3y+e^{2t} \\ x(0)=1, y(0)=-1. \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} x' = 4x+3y+5z+e^t \operatorname{sen} t \\ y' = -y-4z \\ z' = 2y+3z \end{cases}$$

$$(c)\quad \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (d)\begin{cases} x' = 2x+y-z \\ y' = -3x-y+z+t \\ z' = 9x+3y-4z \\ x(0)=z(0)=0, y(0)=3. \end{cases}$$

$$(e)\begin{cases} x' = -2x-5y+t \\ y' = x+2y+t^2 \\ x(0)=1, y(0)=0. \end{cases} \qquad (f)\begin{cases} \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \\ x(0)=-1, y(0)=0. \end{cases}$$

13. Determine la transformada de Laplace de las siguientes funciones que están definidas para toda $t \geq 0$.

$$a)\quad f(t)=5 \qquad b)\quad f(t)=e^{3t} \qquad c)\quad f(t)=\operatorname{senh} at$$

14. Determine si las siguientes funciones tienen una transformada de Laplace:

$a)\quad f(t)=\dfrac{1}{t}$

$b)\quad f(t)=e^{-2t^3}$

$c)\quad \operatorname{senh} 5t$

$d)\quad f(t)=\begin{cases} 1 & , \quad t\leq 3 \\ t^2 & , \quad t>3 \end{cases}$

15. Determine la transformada de Laplace de las siguientes funciones usando las propiedades básicas de la transformada:

$$a)\quad f(t)=t^2 \operatorname{sen} 2t \qquad b)\quad f(t)=3t^2-\operatorname{sen} 3t$$

16. Determine la transformada de Laplace de las siguientes ecuaciones diferenciales y obtenga una relación para la transformada de la función incógnita, $Y(s)$.

$$a)\quad y''' - 2y' + 5y = 0 \qquad b)\quad y'' = 3te^{2t}$$

17. Determine la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones usando las propiedades básicas de la transformada inversa de Laplace.

$$a)\quad F(s)=5+\frac{1}{s-2} \qquad b)\quad F(s)=\frac{s}{s^2-4}$$

18. Determine la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones usando el método de fracciones parciales siempre que sea necesario.

$$a)\quad F(s)=\frac{3s-1}{s(s+1)(s-3)} \qquad b)\quad F(s)=\frac{s+1}{s^3-1}$$

19. Determine la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones usando el teorema de convolución:

$$a)\quad F(s)=\frac{2}{(s+1)(s+2)} \qquad b)\quad Y(s)=\frac{5}{s^2(s-1)^2}$$

20. Un edificio consta de dos zonas A y B (véase la siguiente figura). La zona A es calentada por un calefactor que genera $8000 Kcal/h$. La capacidad calorífica de la zona A es de $1/4°C$ por cada $1000Kcal$. Las constantes de tiempo de transferencia de calor son entre la zona A y el exterior 4 horas, 2 horas entre las zonas A y B y 5 horas entre la zona B y el exterior. Si la temperatura exterior es de $0°C$, determinar la temperatura de cada zona.

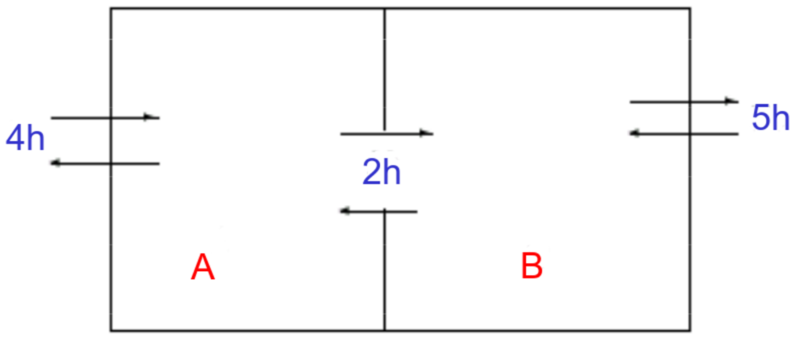

Figura 3: zonas A y B