Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ciencias Escuela Profesional de Matemática

INTRODUCCIÓN A ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS-CM 2G2A

PRACTICA DIRIGIDA 5--Periodo 2020-II

Lima, 12 de Enero 2020

8)

1.Encontrar la solución general de la ecuación $y'' - xy' + 2y = 0$ en una vecindad del punto $x_0 = 0$.

$C.S = \{y_1, y_2\}$

Solución

Primer paso: se sustituyen

$$y(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k, \qquad y'(x) = \sum_{k\geq 1} k\, a_k x^{k-1}, \qquad y''(x) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)\, a_k x^{k-2}$$

en la ecuación diferencial

$l = k-2$
$k = l+2$

$$y''(x) - xy'(x) + 2y(x) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)\, a_k x^{k-2} - x \sum_{k\geq 1} k\, a_k x^{k-1} + 2 \sum_{k\geq 0} a_k x^k = 0.$$

Segundo paso: se suman las series; para ello, primero se agrupan los términos con iguales potencias de x

$$\underbrace{2\,a_0 + 2\,a_1 x + 2\sum_{k\geq 2} a_k x^k}_{2\sum_{k\geq 0} a_k x^k} \underbrace{- a_1 x - \sum_{k\geq 2} k\, a_k x^k}_{-x\sum_{k\geq 1} k\, a_k x^{k-1}} + \underbrace{\sum_{k\geq 0} (k+2)(k+1)\, a_{k+2} x^k}_{\sum_{k\geq 2} k(k-1)\, a_k x^{k-2}} = 0$$

$$2\,a_0 + 2\,a_1 x + 2\sum_{k\geq 2} a_k x^k - a_1 x - \sum_{k\geq 2} k\, a_k x^k + \underbrace{2\cdot 1\, a_2 + 3\cdot 2\, a_3 x + \sum_{k\geq 2} (k+2)(k+1)\, a_{k+2} x^k}_{\sum_{k\geq 0} (k+2)(k+1)\, a_{k+2} x^k} = 0$$

$$(2a_0 + 2\cdot 1\, a_2) + (2\,a_1 - a_1 + 3\cdot 2\, a_3)x + \sum_{k\geq 2} (2\,a_k - k\,a_k + (k+2)(k+1)\, a_{k+2})x^k = 0$$

Tercer paso: la expresión anterior debe ser idénticamente cero para todo x; esto implica que el coeficiente de cada potencia de x debe ser igual a cero; es decir,

$$a_0 + a_2 = 0; \qquad a_1 + 6a_3 = 0; \qquad (2-k)\,a_k + (k+2)(k+1)\,a_{k+2} = 0; \;\; k = 2,3,4,\cdots$$

El resultdo anterior puede escribirse de la siguiente manera

Pares   impares

$$a_2 = -a_0; \qquad a_3 = -\frac{a_1}{6}; \qquad \underbrace{a_{k+2} = \frac{k-2}{(k+1)(k+2)}\,a_k; \;\; k = 2,3,4,\cdots}_{\text{relación de recurrencia}}$$

pares

impares

Cuarto paso: se usa la fórmula de recurrencia para determinar los corficientes a_k para $k \geq 2$; es decir,

$$k = 2 \;\; \rightarrow \;\; a_4 = 0,$$

$$k = 3 \;\; \rightarrow \;\; a_5 = \frac{1}{4\cdot 5}\,a_3,$$

$$k = 4 \;\; \rightarrow \;\; a_6 = \frac{2}{5\cdot 6}\,a_4 = 0,$$

$$k = 5 \;\; \rightarrow \;\; a_7 = \frac{3}{6\cdot 7}\,a_5,$$

$$k = 6 \;\; \rightarrow \;\; a_8 = \frac{4}{7\cdot 8}\,a_6 = 0,$$

.

.

.

deducir la regla de correspondencia

$$k = 2n-2 \;\; \rightarrow \;\; a_{2n} = 0, \;\; n = 1,2,3,\cdots$$

$$k = 2n-1 \;\; \rightarrow \;\; a_{2n+1} = \frac{2n-3}{2n(2n+1)}\,a_{2n-1}, \;\; n = 1,2,3,\cdots.$$ impares

Claramente, todos los coeficientes impares dependen (por recurrencia) del coeficiente a_1. Para establecer esta dependencia explícitamente, hagamos

multiplo todos los coef. impares

$$\cancel{a_3}\cdot\cancel{a_5}\cdot a_7\cdots\cancel{a_{2n-1}}\cdot a_{2n+1} = -\frac{1}{2\cdot 3}\,a_1\,\frac{1}{4\cdot 5}\,\cancel{a_3}\,\frac{3}{6\cdot 7}\,\cancel{a_5}\cdots\frac{2n-3}{2n(2n+1)}\,\cancel{a_{2n-1}} \;\; \rightarrow \;\; a_{2n+1} = -\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{(2n+1)!}\,a_1.$$

Entonces, los coeficientes serán

$$a_2 = -a_0; \qquad a_{2n} = 0; \;\; n \geq 2, \qquad a_{2n+1} = -\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{(2n+1)!}\,a_1; \;\; n \geq 1.$$

Quinto paso: se sustituyen los coeficientes hallados en la serie que define a $y(x)$; es decir, serie

$$y(x) = a_0 + a_1 x - a_0 x^2 - \frac{1}{3!}\,a_1 x^3 + 0x^4 - \frac{1}{5!}\,a_1\,x^5 + \cdots = a_0\left(1 - x^2\right) + a_1\left(x - \sum_{k\geq 1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{(2n+1)!}\,x^{2k+1}\right).$$

$$\sum_{i\geq 0} a_i x_i^{\,i}$$

$$y_1'(x) = 1 - \sum_{k\geq 1} (2k+1) \frac{1.3 \dots (2n-3)}{(2n+1)!} x^{2k}$$

Entonces, haciendo

Comprobar!

$$y_0(x) = 1 - x^2; \qquad y_1(x) = x - \sum_{k\geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{(2n+1)!} x^{2k+1} \quad \rightarrow \quad y(x) = a_0\, y_0(x) + a_1\, y_1(x);$$

se concluye que $y(x)$ es solución de la ED para cualquier elección de los coeficientes a_0 y a_1. En particular, eligiendo $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$, se tiene que $y_0(x)$ satisface la ED. De la misma manera, eligiendo $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$, se tiene que $y_1(x)$ también satisface la ED. Además,

$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} y_0(0) & y_1(0) \\ y_0'(0) & y_1'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \rightarrow \quad \{y_0(x), y_1(x)\} \text{ es linealmente independiente.}$$

2. Utilizar el método de series de potencias en cada una de las siguientes ecuaciones, expresar la solución general como una serie de potencias alrededor del punto $x_0 = 0$ y especificar un intervalo en el que la solución es válida.

   (a) $(2x^2 + 1)y'' + 2xy' - 18y = 0$

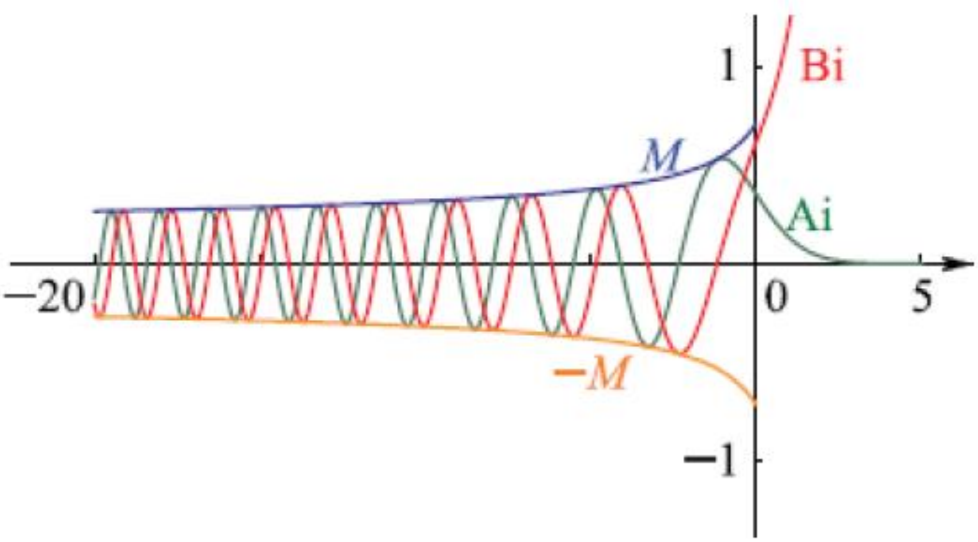
   (b) $y'' + x^2y' + 2xy = 0$

3. Las soluciones de la ecuación $y'' - xy = 0$ se denominan funciones de ***Airy*** (se encuentra en el estudio de la difracción de la luz, la difracción de ondas de radio alrededor de la superficie de la Tierra, problemas de la aerodinámica y la deflexión de vigas bajo su propio peso).

   (a) Probar que toda función de Airy no trivial tiene infinitos ceros negativos.

   (b) Encontrar las funciones de Airy, en forma de series de potencias de x, y verificar directamente que convergen para todo x.

   (c) Otra forma de la ecuación de Airy es $y'' + xy = 0$. Usar los resultados del inciso anterior para encontrar la solución general de esta ecuación.



Funciones de Airy -- $M(x) = \sqrt{Ai^2(x) + Bi^2(x)}$