Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2]
[Los Profesores] UNI, 4 de mayo de 2021

Segunda Práctica Dirigida

1. Determine en qué intervalo se garantiza que los problemas de valor inicial dados tienen una solución única.

   a) $y'' + 3y' = \cos x,\ y(\pi) = 0 \wedge\ y'(\pi) = -2.$

   b) $x^2y'' + 2xy' - y = e^x,\ y(0) = 2 \wedge\ y'(0) = 5.$

2. Demostrar la siguiente proposición y hacer un comentario acerca del uso de esta.

   Proposición 1 (ABEL.) *El determinante wronskiano $W(x)$ de dos soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de la ecuación homogénea $y^{''} + P(x)y^{'} + Q(x)y = 0$ es una solución de la ecuación lineal de primer orden $W^{'} + P(x)W = 0$. Por tanto, existe una constante c tal que $W(x) = ce^{-\int P(x)dx}$.*

3. Determine si los siguientes pares de funciones y_1 y y_2 son linealmente dependientes o independientes 1) por inspección y 2) determinando su wronskiano.

   a) $y_1 = x + 1 \wedge y_2 = x^2 - 1.$

   b) $y_1 = \sin(\alpha + \beta) \wedge y_2 = \sin\alpha + \sin\beta.$

4. Considere las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden y dos de sus soluciones, y_1 y y_2 para $x > 0$. Determine si y_1 y y_2 forman un **conjunto fundamental de soluciones**. En caso airmativo, desarrolle una relación para $y(x)$ que contenga todas las soluciones de la ecuación diferencial.

   a) $y'' - y = 0$, $y_1 = e^x \wedge y_2 = e^{-x}$.

   b) $y'' - y = 0$, $y_1 = \sinh x \wedge y_2 = \cosh x$.

   c) $y'' - y = 0$, $y_1 = e^x \wedge y_2 = \cosh x$.

5. Sea $y_1(x)$ una solución no nula de la ecuación $y^{''} + P(x)y^{'} + Q(x)y = 0$, deducir la siguiente expresión:

$$y_2(x) = \left(\int \frac{1}{y_1(x)^2}e^{-\int P(x)dx}\right)y_1(x)$$

   A esta expresión se le conoce como *fórmula de Liouville.*

6. *Dadas las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, halle la solución general de la EDO, si se conoce una de sus soluciones.*

   a) $t^2y^{''} - 5ty^{'} + 9y = 0$ *en el intervalo* $I = (0, +\infty)$. *La función* $y_1(t) = t^3$ *es una solución.*

   b) $(x^2 - 1)y^{''} - 2xy^{'} + 2y = 0$. *La función* $y_1(x)$ *es una solución.*

7. *Determine la solución general de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeicientes constantes:*

   a) $y'' + y = 0$

   b) $y'' + 2y' + y = 0$

   c) $y'' - y = 0$

8. *Demostrar el siguiente teorema:*

Teorema 1 *Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $y^{''}+P(x)y^{'}+Q(x)y=0$ y sea $y_p(x)$ una solución particular de la ecuación completa*

$$y^{''}+P(x)y^{'}+Q(x)y=R(x).$$

Entonces $y_p(x)+c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ es la solución general de dicha ecuación, es decir, para cada solución $y(x)$ de la ecuación completa, existen $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ tales que $y(x)=y_p(x)+c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$.

9. *Determine las soluciones generales de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeicientes constantes, usando la solución particular dada, y expréselas en la forma más simple:*

   a) $y''-y=2$ *con* $y_p=-2$.

   b) $y''-y=2$ *con* $y_p=-2+3e^x$.

10. *Dado el siguiente sistema*

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dx}{dt}=ax+by+f(t)\\ \frac{dy}{dt}=cx+dy+g(t)\end{array}\right\}$$

   Haciendo $D=\frac{d}{dt}$, transformar a una EDO de segundo orden de la forma:

$$(D^2+pD+q)y=h(t)$$

11. *Reducir los siguientes sistemas a una EDO de segundo orden y en el caso b) y c) halle la solución de las EDOs de 2do orden obtenidas.*

   a) $\left.\begin{array}{l}\frac{dx}{dt}=ax+by\\ \frac{dy}{dt}=cx+dy\end{array}\right\}$

   b) $\left.\begin{array}{l}\frac{dx}{dt}=4x-y\\ \frac{dy}{dt}=2x+y\end{array}\right\}$

   c) $\left.\begin{array}{rl}\frac{dx}{dt}= & -x+y\\ \frac{dy}{dt}= & -2x-4y+e^t\end{array}\right\}$

12. *Reducir el orden y luego resolver la siguiente ecuación.*

$$y^{''}+(y^{'})^2=2e^{-y}$$

13. *Resolver*

   a) $y^{iii}+8y=0$

   b) $y^{iv}+4y^{''}+4y=0$

14. *Resolver*

   a) $y^{''}-2y^3=0,\ y(0)=1,\ y^{'}(0)=1$

   b) $\frac{d^3y}{dx^3}=x^{-2}\ln x,\ y(1)=0,\ y^{'}(1)=1,\ y^{''}(1)=2$

15. *Comprobar que:*

   a) $y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+9x^2-3x^3+x^4$ *es solución de*

$$y^{'''}+y^{'}=6x(2x+1)$$

   b) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}-2xe^{2x}(1-\ln x)$ *es solución de*

$$y^{''}-4y^{'}+4y=\frac{2e^{2x}}{x}$$

   c) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x$ *es solución de*

$$y^{''}-y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$$

16. *Dadas las siguientes matrices A y C, obtener en a) y b) la matriz exponencial.*

a) *Determine* e^{At} *para* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) *Determine* e^{Ct} *para* $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

17. *El movimiento mecánico en un sistema masa-resorte sometido a una fuerza externa* $F(t)$ *es representado por la siguiente EDO:*

$$mx^{''} + cx' + kx = F(t)$$

donde $c \geq 0$ *y* $k > 0$*. Analizar el comportamiento de la solución en todos los casos que pueden presentarse según sus coeficientes y de la función de la Fuerza externa de la ecuación dada.*