Onceava sesión

Análisis Convexos - CM3E2

Jonathan Munguia[1]

[1]Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

18 de mayo de 2021

Outline

Definición 1 (Regularizante)

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, se define la regularización sci de f, denotada por $\overline{f}$ (ó $\mathrm{cl}(f)$) como

$$\overline{f}x := \left(\sup_{\substack{g \le f \\ g \ sci}} g\right)(x) = \sup_{\substack{g \le f \\ g \ sci}} g(x).$$

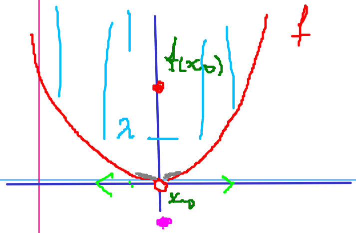
Ejemplo 1

Halle las regularizantes de

a) $f(x) = x^2$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 1$.

b) $g(x) = x$ si $x < 0$ y $g(x) = x + 1$ en otro caso.

c) $h(x) = \left(\dfrac{1}{\|x\|}, -1\right)$ si $x \neq 0$ y $h(0) = (0, 0)$.



$\text{epi}(\bar f) = \overline{\text{epi} f}$

$\bar f = x^2 \leq f$

$S_0(\bar f) = \{0\}$ ≠

$S_0(f) = \emptyset$

$S_0(f) = \emptyset$

f sci en $x_0 \iff \forall \lambda < f(x_0), \exists V \ni x_0, \forall x \in V: \lambda < f(x)$

f no es sci en $x_0 \iff \exists \lambda < f(x_0): \forall V \ni x_0, \exists x \in V: \lambda \geq f(x)$

$\bar f(x) = \sup\limits_{\substack{g \leq f \\ g \text{ sci}}} g(x) \longrightarrow$ es la sci más grande mayorada por f.

sci

g sci $\quad g(x) \leq f(x)$

$\sup g(x) \leq f(x)$

$\bar f(x) \leq f(x)$

epi h es cerrado

$\exists\, h$ sci tq

* $\bar f \leq h \leq f \iff \text{epi} \bar f \supset \text{epi} h \supset \text{epi} f$

$\supset \overline{\text{epi} f}$

$\exists\, h$ sci tq

$x \in \mathbb{R}^n$ quelconque $\quad \bar{f}(x) \le h(x) \le f(x)$

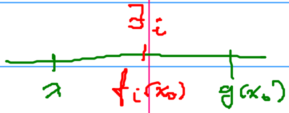
$$\bar{f}(x) = \sup_{\substack{g \text{ sci} \\ g \le f}} g(x)$$ in particular

$$\bar{f}(x) \ge h(x) \Rightarrow \bar{f}(x) = h(x)$$
$$\Rightarrow \bar{f} = h$$

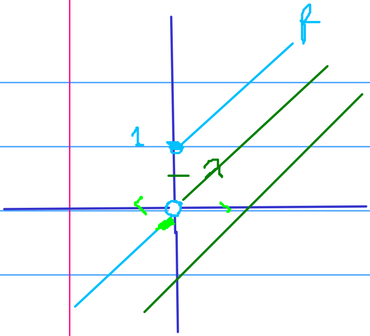
$$g(x) = \sup_{i \in I} f_i(x), \quad \forall i \in I : f_i \text{ sci}$$

$\lambda < g(x_0) \Rightarrow \exists i \in I$ tq $\lambda < f_i(x_0)$, $\exists V \ni x_0$ tq

$x \in V \Rightarrow \lambda < f_i(x) \le g(x)$

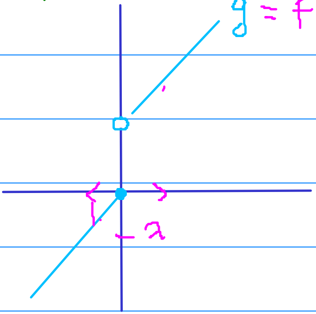


$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x<0 \\ x+1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



$\times$ $g(x) = x$ es sí

$g = f$



$$h(x) = \begin{cases} (0,0) & \text{si } x = 0 \\ \left(\frac{1}{|x|}, -1\right) & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

h es sci $\iff$ epi h es cerrado

no es sci en $(0,0)$

epi h es cerrado.

$\operatorname{graf} h|_C$, $C = \mathbb{R}^2_+$

Proposición 1

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, *se cumple*

a) $epi(\overline{f}) = \overline{epi(f)}$.

b) $S_\lambda(\overline{f}) = \bigcap_{\mu > \lambda} \overline{S_\mu(f)}$.

Demostración

Ver Proposición 2.4 de [1]

Proposición 2

f *es sci en* x_0 *si y solo si* $f(x_0) = \overline{f}(x_0)$.

Demostración

Ver Proposición 2.5 de [1]

$\mathrm{epi}\,\overline{f} \overset{\supseteq}{\underset{\subseteq}{=}} \overline{\mathrm{epi}\,f}$

- $\overline{f} \leq f \iff \mathrm{epi}\,\underbrace{\overline{f}}_{\text{sci}} \supseteq \mathrm{epi}\,f$

$\supseteq \overline{\mathrm{epi}\,f}$

Sea

- g tq $\mathrm{epi}\,g = \overline{\mathrm{epi}\,f} \Rightarrow g$ es sci

$\mathrm{epi}\,g \supseteq \mathrm{epi}\,f \iff g \leq f$

$\Rightarrow \quad g \leq \overline{f} \Longrightarrow \mathrm{epi}\,g \supseteq \mathrm{epi}\,\overline{f}$

$\overset{\displaystyle\|}{\overline{\mathrm{epi}\,f}}$

$$S_\lambda(\bar{f}) = \bigcap_{\mu > \lambda} \overline{S_\mu(f)}$$

$$S_\lambda(\bar{f}) \times \{\lambda\} = \operatorname{epi}(\bar{f}) \cap [\mathbb{R}^n \times \{\lambda\}]$$

$$= \overline{\operatorname{epi}(f)} \cap [\mathbb{R}^n \times \{\lambda\}]$$

$$= \left\{ \bigcap_{\mu > \lambda} \overline{S_\mu(f)} \right\} \times \{\lambda\}$$

Prop : f es sci en x_0 $\iff$ $f(x_0) = \overline{f}(x_0)$

$\Leftarrow$

sci

$\lambda < f(x_0) = \overline{f}(x_0)$, $\exists V \ni x_0$ tq $\forall x \in V$: $\lambda < \overline{f}(x)$

$\lambda \leq f(x)$

$\Rightarrow$ Si $f(x_0) > \overline{f}(x_0) \Rightarrow f$ no es sci en x_0

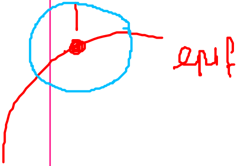
$\exists \lambda < f(x_0)$, $\forall V \ni x_0$, $\exists x \in V$: $\lambda \geq f(x)$

$(x_0, \overline{f}(x_0)) \in \text{epi}\,\overline{f}$

$\overline{f}(x_0) < \lambda$

$\Rightarrow \forall V \ni x_0$ $\quad (x_0, \overline{f}(x_0)) \in \underbrace{\text{epi}\,\overline{f}}_{\overline{\text{epi}\,f}} \cap (V \times]-\infty, \lambda[)$ ---(*)

$(x_0, \overline{f}(x_0)) \in \overline{\text{epi}\,f}$ $=$ $\forall W \Rightarrow W \cap \text{epi}\,f \neq \emptyset$



en particulier

$\hat{W} = V_x \;]-\infty, \lambda[$

$\mathrm{epi} f \cap V_x \,]-\infty, \lambda[\neq \emptyset$

$\exists (x, \mu) \in \mathrm{epi} f \cap V_x \,]-\infty, \lambda[\Rightarrow f(x) \leq \mu < \lambda$

$\Rightarrow f(x) < \lambda$

$\therefore \exists x \in V \text{ tq } f(x) \leq \lambda \Rightarrow f$ n'est pas s.c.i. en x_0

Outline

Proposición 3

f es convexo si y solo si $epi(f)$ es convexo.

Demostración

De la definición de función convexa tenemos :
f es convexa $\Leftrightarrow$ $epi(f)$ es convexo $\equiv \{(x,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}$ es convexo, es decir:
f es convexa $\Leftrightarrow \{(x,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) < \lambda \vee f(x) = \lambda\}$ es convexo, y separando los conjuntos:
f es convexa $\Leftrightarrow \{(x,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) < \lambda\}$ es convexo $\vee$
$M = \{(x,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) = \lambda\}$ es convexo.

Cont...

reescribiendo :
f es convexa $\Leftrightarrow \widetilde{epi(f)}$ es convexo $\vee$ f es convexa $\Leftrightarrow M$ es convexo.
tomando el primer caso, concluimos :
f es convexa $\Leftrightarrow \widetilde{epi(f)}$ es convexo.

Proposición 4

Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ familia de conjuntos convexos, entonces $sup\{f_i\}$ es convexo.

Demostración

Sea $f = sup\{f_i\}$. Afirmo : $\forall i \in I$, $epi(f) = \bigcap\limits_{i\in I} epi(f_i)$, en efecto:
$(\subseteq)$ Sea $(x,\lambda) \in epi(f)$, entonces $f(x) \leq \lambda$ y como
$\forall i \in I, f_i(x) \leq f(x) \leq \lambda$, entonces $f_i(x) \leq \lambda$; es decir $(x,\lambda) \in epi(f_i)$,
entonces $\forall i \in I, epi(f) \subset \bigcap\limits_{i\in I} epi\{f_i\}$.

Cont...

$(\supseteq)$ Sea $(x, \lambda) \in \bigcap_{i \in I} epi\{f_i\}$ entonces $\forall i \in I, f_i(x) \leq \lambda$; tomando supremo, se tiene que $f(x) \leq \lambda$; de modo que $(x, \lambda) \in epi(f)$.
Por lo tanto:

$$\forall i \in I, epi(f) = \bigcap_{i \in I} epi\{f_i\}$$

y como la intersección de una colección de conjuntos convexos es convexo, entonces $\sup_{i \in I}\{f_i\}$ es convexo.

Proposición 5

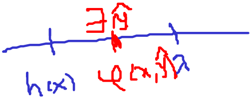
Si $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ es convexa, entonces la función marginal $h : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $h(x) = \inf\limits_{y \in \mathbb{R}^p} (\varphi(x, y))\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ es convexa.

Demostración

PDQ $\widetilde{epi}\, h$ es convexo

De la Proposición 3 se tiene que, φ es convexa $\Leftrightarrow$ $\widetilde{epi}(\varphi)$ es convexa $\equiv \{(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} : \varphi(x, y) < \lambda\}$ es convexo y como $h(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^p} \varphi(x, y) \Leftrightarrow \exists y \in Y / \varphi(x, y) < \lambda$. Por tanto

$h(x) < \lambda \Leftrightarrow \exists \hat{y}$ tq $\varphi(x, \hat{y}) < \lambda$



$$\widetilde{epi}(\cancel{f}\,h) = \text{proy}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}}\, \widetilde{epi}(\varphi).$$

$(x, \lambda) \in \widetilde{epi}\, h \Leftrightarrow (x, \hat{y}, \lambda) \in \widetilde{epi}\, \varphi$

De lo cual se sigue que $\widetilde{epi}(\cancel{f}\,h)$ es convexo y por tanto f es convexa.

$\theta : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \operatorname{dom} \theta$ es convexo

$\nexists$ dom θ es un intervalo

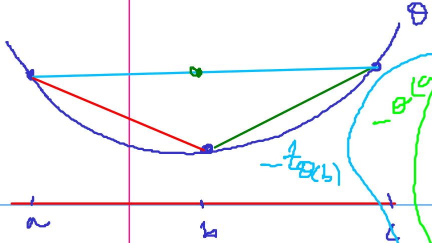
Teorema 1

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no vacio y $\theta : I \to \mathbb{R}$. Cada una de las tres condiciones siguientes es equivalente a la convexidad de θ :

$$\frac{\theta(c)-\theta(a)}{c-a} \leq \frac{\theta(c)-\theta(b)}{c-b}, \text{ para todo } a, b, c \in I \text{ tales que } a < b < c \tag{1}$$

$$\frac{\theta(b)-\theta(a)}{b-a} \leq \frac{\theta(c)-\theta(a)}{c-a}, \text{ para todo } a, b, c \in I \text{ tales que } a < b < c \tag{2}$$

$$\frac{\theta(b)-\theta(a)}{b-a} \leq \frac{\theta(c)-\theta(b)}{c-b}, \text{ para todo } a, b, c \in I \text{ tales que } a < b < c \tag{3}$$



$$\theta(b) \le \underbrace{t\theta(a) + (1-t)\theta(c)}_{t\theta(a)+\theta(c)-t\theta(c)}$$

$-\theta(a)$

$-t\theta(b)$

$$t\,[\theta(c)-\theta(a)] \le \theta(c) - \theta(b)$$

$$0 < t = \frac{c-b}{c-a} < 1$$

$$\checkmark\ \frac{\theta(c)-\theta(a)}{c-a} \le \frac{\theta(c)-\theta(b)}{b-c}$$

$$\theta(b) - \theta(a) \le [\theta(c)-\theta(a)](1-t)$$

$$t\,[\theta(b)-\theta(a)] \le (1-t)\,[\theta(c)-\theta(b)]$$

$$\frac{\theta(b)-\theta(a)}{b-a} \le \frac{\theta(c)-\theta(a)}{c-a}$$

$$\frac{\theta(b)-\theta(a)}{b-a} \le \frac{\theta(c)-\theta(b)}{b-c}$$

Demostración

Sabemos que θ es convexa si y solo si para todo $a, b, c \in I$, con $a < b < c$, se cumple

$$\theta(b) \leq t\theta(a) + (1-t)\theta(c)$$

donde $t = (c-b)/(c-a)$. Esta desigualdad es equivalente a cada una de las tres relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} t\left[\theta(c) - \theta(a)\right] &\leq \theta(c) - \theta(b) \\ \theta(b) - \theta(a) &\leq (1-t)[\theta(c) - \theta(a)] \\ t\left[\theta(b) - \theta(a)\right] &\leq (1-t)[\theta(c) - \theta(b)] \end{aligned}$$

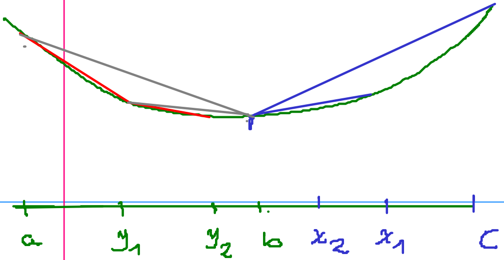
Si se reemplaza el valor de t en cada una de estas relaciones, se verifican las desigualdades (1), (2) y (3).

$$\exists \theta'_-(b) = \lim_{y \to b^-} \frac{\theta(y) - \theta(b)}{y - b} \Leftrightarrow \forall y_n \to b^- \quad f(y_n) \to \theta'_-(b)$$

Teorema 2

Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no vacio, $\theta : I \to \mathbb{R}$ convexa, y $a, b, c \in I$ con $a < b < c$. Entonces θ es continua en b y admite las derivadas por la izquierda y por la derecha en ese punto. Además

$$\frac{\theta(a) - \theta(b)}{a - b} \leq \theta'_-(b) \leq \theta'_+(b) \leq \frac{\theta(c) - \theta(b)}{c - b} \tag{4}$$



$$\frac{\theta(a)-\theta(b)}{a-b} \le \underbrace{\frac{\theta(y_1)-\theta(b)}{y_1-b}}_{f(y_n)} \le \frac{\theta(y_2)-\theta(b)}{y_2-b}$$

$$\frac{\theta(a)-\theta(b)}{a-b} = \frac{\theta(b)-\theta(a)}{b-a}$$

$$\le \overbrace{\frac{\theta(x_2)-\theta(b)}{x_2-b}}^{f(x_n)} \le \frac{\theta(x_1)-\theta(b)}{x_1-b} \le \frac{\theta(c)-\theta(b)}{c-b}$$

$y_n \to b^- \Rightarrow f(y_n)$ es creciente y acotada

$\Rightarrow f(y_n)$ es convergente

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{y\to b^-} f(y) =: \theta'_-(b)$$

$$f(y_n) \le f(x_n) \Rightarrow \theta'_-(b) \le \theta'_+(b) \le$$

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) \le \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

Corolario

Toda función convexa de una variable real es continua en el interior de su dominio

Demostración

Sean y_1, y_2, x_1, x_2 tales que $a < y_1 < y_2 < b < x_2 < x_1 < c$ Se obtiene la siguiente cadena de desigualdades:

$$\frac{\theta(a)-\theta(b)}{a-b} \leq \frac{\theta\left(y_1\right)-\theta(b)}{y_1-b} \leq \frac{\theta\left(y_2\right)-\theta(b)}{y_2-b} \leq \cdots$$
$$\cdots \leq \frac{\theta\left(x_2\right)-\theta(b)}{x_2-b} \leq \frac{\theta\left(x_1\right)-\theta(b)}{x_1-b} \leq \frac{\theta(c)-\theta(b)}{c-b}$$

Hacer $y \rightarrow b_-$ y $x \rightarrow b_+$

Cont...

Sean y_1, y_2 tales que $a < y_1 < y_2 < b$. Se obtiene la siguiente cadena de desigualdades, usando la primera desigualdad de la proposición 1 para los puntos $a < y_1 < b$ y posteriormente usando la misma desigualdad para los puntos $y_1 < y_2 < b$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq \frac{f(y_1) - f(b)}{y_1 - b} \leq \frac{f(y_2) - f(b)}{y_2 - b}$$

Sean x_1, x_2 tales que $b < x_2 < x_1 < c$. Se obtiene la siguiente cadena de desigualdades, usando la segunda desigualdad de la proposición 1 para los puntos $b < x_1 < c$ y posteriormente usando la misma desigualdad para los puntos $b < x_2 < x_1$

$$\frac{f(x_2) - f(b)}{x_2 - b} \leq \frac{f(x_1) - f(b)}{x_1 - b} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

Cont...

Ahora consideremos una sucesión $y_n \in I$, creciente que converge a b (es decir converge a b por la izquierda) y $y_1 > a$, y una sucesión decreciente $x_n \in I$ que converge a b (es decir converge a b por la derecha) y $x_1 < c$, entonces:

$$a < y_1 < \cdots < y_n < \cdots < b < \cdots < x_n < \cdots < x_1 < c$$

Consideremos i, j naturales arbitrarios, vemos que se cumple $y_i < b < x_j$, por lo que aplicando la tercera desigualdad de la proposición 1, se cumple para todo $i, j \in \mathbb{N}$

$$\frac{f(y_i) - f(b)}{y_i - b} \leq \frac{f(x_j) - f(b)}{x_j - b}$$

Cont...

Así aplicando las desigualdades mostradas en la primera parte de esta prueba, veremos que:

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} \leq \frac{f(y_1)-f(b)}{y_1-b} \leq \frac{f(y_2)-f(b)}{y_2-b} \leq \cdots$$

$$\cdots \leq \frac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b} \leq \frac{f(x_1)-f(b)}{x_1-b} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

Y como $y_n \to b_-$ y $x_n \to b_+$, mostramos lo que queríamos.

$[a,c] \subset I$ } Dados $a < b < c$ en I

Cont... $b \in \text{int } I$

Afirmo que f es Lipschitz en $[a, c]$, en efecto, dados $x_1, x_2 \in \langle a, c\rangle$ con $x_1 < x_2$, se tiene

$$-K \leq f'_+(a) \leq \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
$$\leq \frac{f(c) - f(x_2)}{x_2 - c} \leq f'_-(c) \leq K,$$

donde $K = \max\{|f'_+(a)|, |f'_-(c)|\}$, es decir solo depende de a y c. Luego,

$$\left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| \leq K \Longrightarrow |f(x_2) - f(x_1)| \leq K|x_2 - x_1|,$$

por tanto f es Lipscthitz y continua en $b \in \langle a, c\rangle$.

f es continua en b $\therefore$ f es conti. int I

Proposición 6

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no vacío y $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces, para todo $a, b, c \in int(I)$, con $a < b < c$, se cumple:

$$f'_{+}(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_{-}(b) \leq f'_{+}(b) \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \leq f'_{-}(c)$$

Demostración

Vemos que como los tres puntos pertenecen al interior de I, entonces existen $d, e \in I$ tal que $d < a$ y $c < e$, así podemos usar la desigualdad derecha de la proposición 2 para el intervalo $d < a < b$ y la desigualdad izquierda para el intervalo $b < c < d$ obteniendo lo que queríamos.

Observación 1

Vemos que si la función es derivable, cumple que para todo $a, b, c \in int(I)$ y $a < b < c$ entonces $f'(a) \leq f'(b) \leq f'(c)$

Teorema 3

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto no vacío y $f : I \to \mathbb{R}$ derivable. Las tres condiciones siguientes son equivalentes:

- *f es convexa en I.*
- *$(t - s)\left(f'(t) - f'(s)\right) \geq 0$ para todo $t, s \in I$.*
- *$f(t) \geq f(s) + (t - s)f'(s)$ para todo $t, s \in I$*

Demostración

Si f es convexa, entonces usando la observación 1 se muestra (b), (c) se muestra por la proposición 3 (se observan los casos donde $t < s$ y $s < t$ y se obtiene la misma desigualdad ordenando términos).
Asumamos ahora (b), entonces para todo $a, b, c \in I$ tal que $a < b < c$, por el Teorema del valor medio existen s, t tal que $a < s < b < t < c$ y como $t > s$ entonces $f'(t) \geq f'(s)$ y:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(s) \leq f'(t) = \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

Y por la proposición 1 (tercera desigualdad) tenemos que f es convexa.

Cont...

Asumamos ahora (c), entonces para todo $a, b, c \in I$ tal que $a < b < c$
Vemos que usando (c) en $t = a$ y $s = b$, obtenemos:

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq f'(b)$$

Y usando (c) en $t = c$ y $t = b$, obtenemos:

$$\frac{f(c) - f(b)}{c - b} \geq f'(b)$$

Juntando los dos y usando la Proposición 1 (desigualdad 3) vemos que la función es convexa.

Teorema 4

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto no vacío y $f : I \to \mathbb{R}$ dos veces derivable. Entonces f es convexa si y solo si $f''(t) \geq 0$ para todo $t \in I$

Demostración

Como vemos en el Teorema 1, f es convexa si y solo si f' es no decreciente (condición 2) y eso se dá si y solo si $f''(t) \geq 0$ para todo $t \in I$ pues la segunda derivada existe.

f sci $\Rightarrow$ epi f es cerrado $\Rightarrow$ $S_\lambda(f)$ es cerrado $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f es sci

f sci $\Rightarrow$ epi f es cerrado

$f(x_0) \leq \lambda_0$

¿ $\text{epi} f^c$ es abierto? sea $(x_0, \lambda_0) \in \text{epi} f^c$

$\Rightarrow$ $\lambda_0 < f(x_0)$ $\Rightarrow$ $\exists\, V' \ni x_0$ tq $\lambda_0 < f(x)$ $\forall\, x \in V'$

$\mu = \frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} \lambda_0$

Como $\lambda_0 < f(x_0)$ $\longrightarrow$ $\lambda_0 < \mu < f(x_0)$ ... (*)

$\exists\, V \ni x_0$ tq $\mu < f(x)$ $\forall\, x \in V$ ... (**)

Afirmo: $V \times (-\infty, \mu)$ es una vecindad de (x_0, λ_0) contenida en $\text{epi} f^c$

Referencias bibliográficas

1. Jean-Pierre Crouzeix and Eladio Ocaña. Análisis convexo. Fondo Editorial EDUNI, 2018.

FIN