# Función de Green - funciones generalizadas para EDO

irlamn@uni.edu.pe

# FUNCION DE GREEN PARA PVF CON EDO

Supongamos que tenemos:

*Un operador diferencial L, tal que:*

$L[u(x)] = f(x), \ 0 < x < l \qquad (*)$

un conjunto de puntos en el intervalo *( 0,l)*

$\xi_1, \dots .\xi_n$, en el que aproximamos $f(\xi_1), \dots f(\xi_n)$

Supongamos que la función $G(x;\xi_k) f(\xi_k)$, se define

como solución de la Ecuación (*), y sumando todas las soluciones, se tiene que

$u(x) = \sum_{k-1}^{n} G(x;\xi_k) f(\xi_k)$, también es una solución, y si $n \to \infty$, se define como solución

$$u(x) = \int_0^l G(x;\xi) f(\xi) d\xi$$

L a función $G(x;\xi)$ se le denomina función de Green para el problema (*) no homogéneo.

# COMO OBTENER LA FUNCIÓN DE GREEN ?

Esta función se obtiene mediante el uso de otra nueva función, denominda "Función generalizada" la cual debe estar asociada a una técnica como es la Transformada de Laplace o la Transformada de Fourier.

Un ejemplo de función generalizada es la función Delta de Dirac., que puede representar se por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a),\ a\, es\, un\ parámetro$$

supongamos en la Ec. (*) :

$$L[G(x;x')] = \delta(x - x'), \quad x' \textit{ es un parámetro}$$

$$-\infty < x' < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} LG(x;x') f(x') dx' = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x - x') dx' = f(x),$$

$x'$ *es un parámetro, por la propiedad de la función* $\delta$

$$\therefore L\{ \int_{-\infty}^{\infty} G(x;x') f(x') dx' \} = f(x)$$

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x;x') f(x') dx'.$$

# Ejercicio

Probar, usando

la Transformada de Laplace respecto a x de la

Ecuación:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}-k^2\right)G(x;x')=\delta(x-x');$$

$$G(0;x')=0,\ \left[\frac{\partial G(x;x')}{\partial x}\right]_{x=0}=G(1,x')$$

*es*

$$G(x;x')=\frac{sen\,kx\,sen\,k(1-x')}{k\,(sen\,k-k)}-\frac{senk(x-x')}{k}H(x,x').$$

# Teorema

Dado el PVF

$$\begin{aligned} L[u(x)] &= f(x), \qquad x \in (a,b) \\ L &= -\frac{d}{dx}[p(x)\frac{d}{dx}] + q(x) \\ VF &: \quad c_a u(a) + d_a u\prime(a) = 0, \quad c_b u(b) + d_b u\prime(b) = 0 \end{aligned}$$

i) Demuestre que la solución existe y es única si y solo si $L[u(x)] = 0$
ii) Demuestre que si $f(x) \neq 0$ la solución existe, es única y toma la forma

$$u(x) = \int_a^b G(x, x\prime) f(x\prime) dx\prime$$

donde $G(x, x\prime)$ es la función de Green.que varía respecto a $x$ y al parametro $x\prime \in (a,b)$.

i) Supongamos la EDO homogénea asociada al PVF

$$L[y(x)] = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}y\right) + q(x)y = 0$$

$$donde: \; y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$$y(x) = y_h + y_p$$

Donde $y_h$ es la solución general linealmente independiente de la EDO homogénea, es decir satisface que, el Wronskiano $W(x) \neq 0$. Asumiendo esta afirmación, ahora buscamos la solución particular $y_p$.

Para hallar $y_p$ hacemos variar los parámetros constantes: $\begin{aligned} c_1 &= u_1(x) \\ c_2 &= u_2(x) \end{aligned}$

$$\Rightarrow \; y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

$$u_1' = \frac{f(x)y_2(x)}{p(x)W(x)}, \quad u_2' = -\frac{f(x)y_1(x)}{p(x)W(x)}, \quad ......(*)$$

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

Integrando en (*)

$$u_1 = \int_{c_1}^{x} \frac{y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} f(\xi)d\xi,$$

$$u_2 = -\int_{c_2}^{x} \frac{y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} f(\xi)d\xi$$

haciendo $x' = \xi \;\; en \; (a,b)$

$$y_p = y_1(x) \int_{c_1}^{x} \frac{y_2(\xi)}{\mathrm{p}(\xi)W(\xi)} f(\xi)d\xi$$
$$- y_2(x) \int_{c_2}^{x} \frac{y_1(\xi)}{\mathrm{p}(\xi)W(\xi)} f(\xi)d\xi.$$

$a \leq x \leq b.$

$c_1 = b \quad c_2 = a.$

$$y_p = -y_1(x) \int_{x}^{b} \frac{y_2(\xi)}{\mathrm{p(x)}W} d\xi - y_2(x) \int_{a}^{x} \frac{y_1(\xi)}{\mathrm{p(x)}W} d\xi, \quad a_1 = c_1,\ a_2 = d_1,\ y_p = u$$

$$a_1 y_p(a) + a_2 y_p'(a) = -[a_1 y_1(a) + a_2 y_1'(a)] \int_{a}^{b} \frac{y_2(\xi)}{\mathrm{p(x)}W} d\xi$$
$$- [a_1 y_2(a) + a_2 y_2'(a)] \int_{a}^{a} \frac{y_1(\xi)}{\mathrm{p(x)}W} d\xi = 0,$$

y de modo similar para $b$

Considerando como la función de Green

$$G(x;\xi) = \begin{cases} -\dfrac{y_1(\xi)y_2(x)}{p(\xi)\ W(\xi)}, & \text{if } a \le \xi \le x \text{ (o } \ \xi \le x \le b), \\ -\dfrac{y_1(x)y_2(\xi)}{p(\xi)\ W(\xi)}, & \text{if } x \le \xi \le b \text{ (o } \ a \le x \le \xi). \end{cases}$$

Tales que

$G(\xi;x)$ *satisface:*

1. $G(x;\xi) = G(\xi;x)$
2. *la continuidad en* $\xi = x$.
3. *Es derivable y continua hasta la derivada de segundo orden continua*
4. *satisface las condiciones de contorno*

$$a_1 G(\xi;a) + a_2 G'(\xi;a) = b_1\ G(\xi;\ b) + b_2 G'(\xi;\ b) = 0.$$

*En el salto de discontinuidad* $\xi = x$

$$G_x(\xi+;\xi) - G_x(\xi-;\xi) = -\frac{1}{p(\xi)}.$$

*y=u=0, si solo si L[u(x)]=0.*

*ii)* *si $f(x)$ es diferente de cero, por tanto $w(x)$ es no singular, entonces la solución existe y es de la forma:*

$$y(x)=u(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi,$$

**Ejemplo.-** Resolver el PVF

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y &= xe^{-2x} \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

# Solución

$$y''+4y'+5y=0$$

$$m^2 4m+5=0$$

$$y_k(x)=e^{-2x}(A\cos x+B\sin x)$$

$$y_1(x)=e^{-2x}\cos x,\ y_2(x)=e^{-2x}\sin x$$

$$y_p=u_1y_1+u_2y_2$$

$$W(x)=e^{-4x}\neq 0,\ \forall x\in(0,1)$$

$$p(x)=e^{-4x}$$

$$f(x)=xe^{-2x}$$

$$f(\xi)=\xi e^{-2\xi}$$

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi, \qquad G(x;\xi) = \begin{cases} -\dfrac{y_1(\xi) y_2(x)}{p(\xi)\, W(\xi)}, & \text{if } a \le \xi \le x \text{ (o } \ \xi \le x \le b), \\ -\dfrac{y_1(x) y_2(\xi)}{p(\xi)\, W(\xi)}, & \text{if } x \le \xi \le b \text{ (o } \ a \le x \le \xi). \end{cases}$$

$$y(x) = -e^{-2x} \sin x \int_0^x \xi e^{4\xi} \cos\xi d\xi - e^{-2x} \cos x \int_x^1 \xi e^{4\xi} \sin\xi d\xi$$

$$y(x) = -e^{-2x} [\sin x \int_0^x \xi e^{4\xi} \cos\xi d\xi + \cos x \int_x^1 \xi e^{4\xi} \sin\xi d\xi]$$

$$Sea \;\; C = \int_0^x \xi e^{4\xi} \cos\xi d\xi \,,\, D = \int_x^1 \xi e^{4\xi} \sin\xi d\xi$$

$$\Rightarrow y(x) = -e^{-2x} [C \sin x + D \cos x]$$

$$y(0) = y(1) = 0$$