Semana 9:Función de Green y funciones generalizadas para IEDO

irlamn@uni.edu.pe

FUNCION DE GREEN PARA PVF CON EDO

Supongamos que tenemos:

Un operador diferencial L, tal que:

$L[u(x)] = f(x), \ 0 < x < l \qquad (*)$

un conjunto de puntos en el intervalo $(0,l)$

$\xi_1, \dots \xi_n$, en el que aproximamos $f(\xi_1), \dots f(\xi_n)$

Supongamos que la función $G(x;\xi_k) f(\xi_k)$, se define

como solución de la Ecuación (*), y sumando todas las soluciones, se tiene que

$u(x) = \sum_{k-1}^{n} G(x;\xi_k) f(\xi_k)$, también es una solución, y si $n \to \infty$, se define como solución

$$u(x) = \int_0^l G(x;\xi) f(\xi) d\xi$$

L a función $G(x;\xi)$ se le denomina función de Green para el problema (*) no homogéneo.

Teorema . *Función de Green para un sistema de Sturm–Liouville.*

Supongamos que $\lambda = 0$ *no es un eigenvalor del siguiente sistema de Sturm–Liouville regular:*

$$\mathcal{L}y \equiv \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x), \qquad a \leq x \leq b,$$

con las condiciones a la frontera homogéneas

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \qquad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0,$$

donde p *y* q *son funciones reales continuas en* $[a, b]$, p *es positiva en* $[a, b]$, $p'(x)$ *existe y es continua en* $[a, b]$, *y* a_1, a_2, b_1, b_2, *son constantes reales dadas tales que* $a_1^2 + a_2^2 > 0$ *y* $b_1^2 + b_2^2 > 0$. *En consecuencia, para cualquier* $f \in C^2([a, b])$, *el sistema de Sturm–Liouville tiene una única solución*

$$y(x) = \int_a^b G(x,t) f(t) dt,$$

donde G *es la función de Green dada por*

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{y_2(x)y_1(t)}{p(t)W(t)}, & a \leq t < x \\ \\ \frac{y_1(x)y_2(t)}{p(t)W(t)}, & x < t \leq b \end{cases}$$

donde y_1 *y* y_2 *son soluciones distintas de cero del sistema homogéneo* $(f = 0)$ *y* W *es el Wronskiano dado por*

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}.$$

COMO OBTENER LA FUNCIÓN DE GREEN PARA FUNCIONES GENERALIZADAS ?

Esta función se obtiene mediante el uso de otra nueva función, denominda "Función generalizada" la cual debe estar asociada a una técnica como es la Transformada de Laplace o la Transformada de Fourier.
Un ejemplo de función generalizada es la función Delta de Dirac., que puede representarse por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a),\ a\, es\, un\ parámetro$$

supongamos en la Ec. (*) :

$$L[G(x;x')] = \delta(x-x'), \ \ x' \text{ es un parámetro}$$

$$-\infty < x' < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} LG(x;x') f(x') dx' = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x-x') dx' = f(x),$$

x' *es un parámetro, por la propiedad de la función* δ

$$\therefore L\{\int_{-\infty}^{\infty} G(x;x') f(x') dx'\} = f(x)$$

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x;x') f(x') dx'.$$

Ejercicio

Probar, usando

la Transformada de Laplace respecto a x de la

Ecuación:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}-k^2\right)G(x;x')=\delta(x-x');$$

$$G(0;x')=0,\ \left[\frac{\partial G(x;x')}{\partial x}\right]_{x=0}=G(1,x')$$

es

$$G(x;x')=\frac{sen\,kx\,sen\,k(1-x')}{k\,(sen\,k-k)}-\frac{senk(x-x')}{k}H(x,x').$$

Revisar las lecturas [1,2] compartidas
Ecuaciones Diferenciales Especiales
(I.3-I.5)