Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-2

[Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2]
[Los profesores] UNI, 14 de diciembre de 2021

Sétima Práctica Dirigida

1. Dada $f \in PC[-1,1]$ y la suma parcial de la expansión en serie de Legendre:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x), \quad a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)P_k(t)\,dt.$$

   Deduzca la identidad de Christoffel para hallar K_n en

$$S_n(x) = \int_{-1}^{1} K_n(t,x) f(t)\,dt.$$

2. Pruebe que la serie de Legendre de una función $f \in PC[-1,1]$ converge puntualmente en puntos del intervalo $(-1,1)$ donde f es continua y posea derivadas por la derecha y la izquierda.

3. Denotamos por L_2^w al espacio de funciones continuas a trozos en $\mathbb{R}$ de cuadrado integrable con respecto a la función peso $e^{-x^2/2}$, es decir

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} f(x)^2\,dx < \infty.$$

   Pruebe que L_2^w es un espacio vectorial con producto interno, dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} f(x)g(x)\,dx.$$

4. Demuestre que los polinomios $1, x, x^2, \cdots$ son linealmente independientes en L_2^w y deduzca una base ortogonal de polinomios de p_n de grado n.

5. Dado que lo polinomios de Hermite están definidos por la fórmula

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

   Halle los 5 primeros polinomios y demuestre que son ortogonales en L_2^w.

6. Discutir la solución de la ecuación de Bessel

$$t^2 x'' + t x' + (t^2 - p^2)x = 0, \quad p \geq 0,$$

   en torno al punto singular regular $t = 0$.

7. Discuta la naturaleza de las soluciones de la ecuación

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0,$$

   en torno a sus puntos singulares.

8. Hallar la solución en torno a $t = 0$ de la ecuación de Bessel de orden cero, $p = 0$:

$$t^2 x'' + t x' + t^2 x = 0.$$

9. Hallar la solución en torno a $t = 0$ de la ecuación de Bessel de medio orden, $p = 1/2$:

$$t^2 x'' + t x' + (t^2 - 1/4)x = 0.$$

10. Hallar la solución en torno a $t = 0$ de la ecuación de Bessel de orden uno, $p = 1$:
$$t^2x'' + tx' + (t^2 - 1)x = 0.$$

11. Resuelva la ecuación diferencial de Laguerre en torno al punto singular regular $t = 0$
$$tx'' + (1 - t)x' + nx = 0,\ n \in \mathbb{R},\ x \in [0, \infty).$$

12. Resuelva la ecuación de Hermite en torno al punto regular $t = 0$
$$x'' - 2tx' + 2nx = 0,\ n \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}..$$

13. Mostrar que las soluciones polinomiales de Legendre, Laguerre y Hermite son ortogonales y, por lo tanto, pueden usarse para formar una serie de Fourier.

14. Hallar la relación de recurrencia, la función generatriz y la Fórmula de rodriguez correspondiente a las soluciones polinomiales de Legendre, Laguerre y Hermite.

15. Halle la relación de recurrencia, la función generatriz y la Fórmula de rodriguez correspondiente a las soluciones polinomiales de la ecuación de Chebyshev:
$$(1 - t^2)x'' - tx' + \alpha^2x = 0,$$
correspondiente a los puntos singulares ± 1 y el punto regular 0.