FUNCIÓN DELTA -PROPIEDADES

irlamn@uni.edu.pe

INTRODUCCION A LA TEORIA DE DISTRIBUCIONES MEDIANTE LAS FUNCIONES DE PRUEBA

1) *La Delta de Dirac como límite de una secuencia.*

Consideremos la ec. diferencial lineal inhomogénea $\frac{du}{dt} - au = f(t)$. Desde un punto de vista intuitivo, parecería razonable representar la inhomogeneidad $f(t)$ como una suma de términos impulsivos concentrados en intervalos de tiempo muy pequeños, y obtener luego la solución como suma de las soluciones particulares para cada uno de estos términos. La formalización de esta idea requiere el concepto de *distribución* o función generalizada, que discutiremos a continuación.

Consideremos la función

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/\varepsilon & |x| \le \varepsilon/2 \\ 0 & |x| > \varepsilon/2 \end{cases} \qquad \varepsilon > 0$$

Se cumple $\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x)dx = 1\ \forall\, \varepsilon > 0$. Además, si f es una función continua arbitraria,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) f(x) dx = \varepsilon^{-1} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} f(x) dx = \frac{F(\varepsilon/2) - F(-\varepsilon/2)}{\varepsilon}$$

donde F es una primitiva de f. Para $\varepsilon \to 0^+$, $g_\varepsilon(x)$ estará concentrada cerca del origen y obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) f(x)dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{F(\varepsilon/2)-F(-\varepsilon/2)}{\varepsilon}\\ &= F'(0) = f(0)\end{aligned}$$

$\exists\ \forall\ f$ continua en un entorno de $x = 0$,

Podemos entonces definir la distribución o función generalizada $\delta(x)$ (delta de Dirac) como el límite

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} g_\varepsilon(x)$$

que satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)dx = f(0)$$

(es 0 si $x \neq 0$ y ∞ si $x = 0$)

Se puede encontrar una buena aproximación de la función Delta?. Veamos: Sea

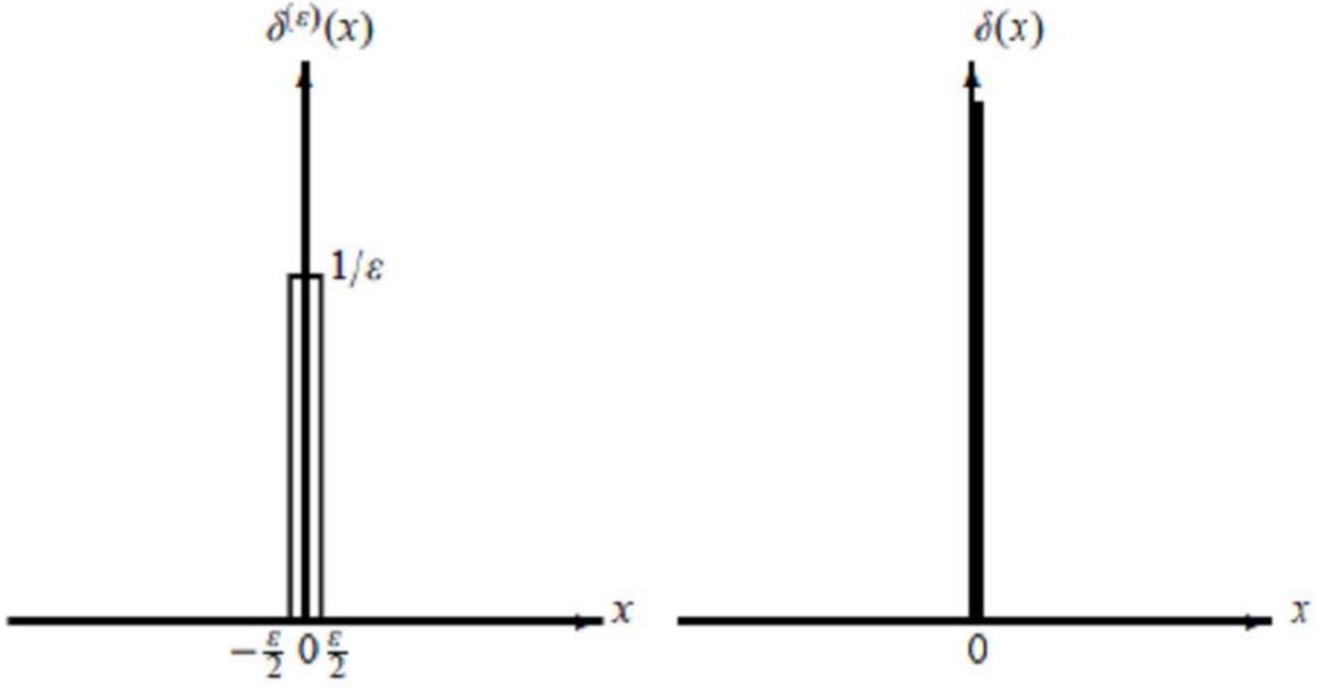
ε mucho menor que la longitud en la cual f varía apreciablemente. Físicamente, $\delta(x)$ puede interpretarse como la densidad lineal de masa correspondiente a una masa puntual de magnitud 1 localizada en el origen.

Notemos también que si $ab \neq 0$ y $a < b$,

$$\int_a^b \delta(x) f(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^b g_\varepsilon(x) f(x) dx = \begin{cases} f(0) & a < 0 < b \\ 0 & \substack{a<b<0 \text{ o} \\ 0<a<b} \end{cases}$$

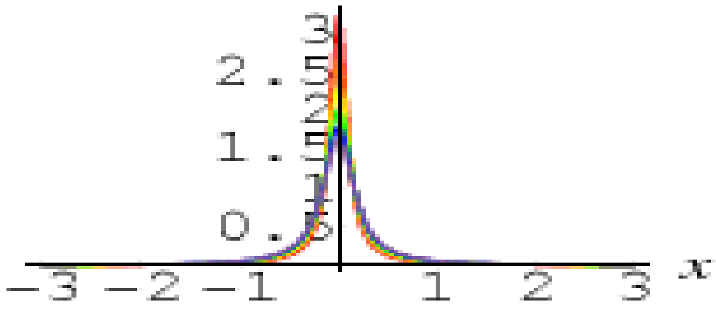
Consideraremos en lo sucesivo *funciones de prueba* f, que son funciones acotadas y derivables a cualquier orden, y que se anulan fuera de un intervalo *finito* I (recordemos ante todo que tales funciones existen: si $f(x) = 0$ para $x \leq 0$ y $x \geq 1$, y $f(x) = e^{-1/x^2} e^{-1/(1-x)^2}$ para $|x| < 1$, f es derivable a *cualquier* orden en $x = 0$ y $x = 1$). En tal caso existen muchas otras funciones $g_\varepsilon(x)$ que convergen a $\delta(x)$, que pueden ser derivables a cualquier orden. Un conocido ejemplo es

La función delta $\delta(x)$ está definida por $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta^{(\varepsilon)}(x)$.

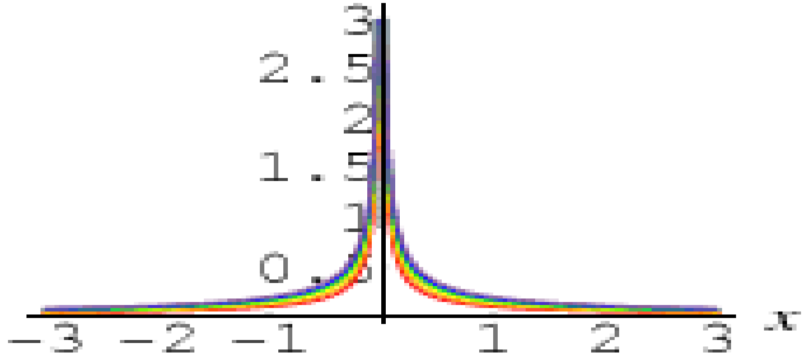


Aproximación de la función Delta de Dirac

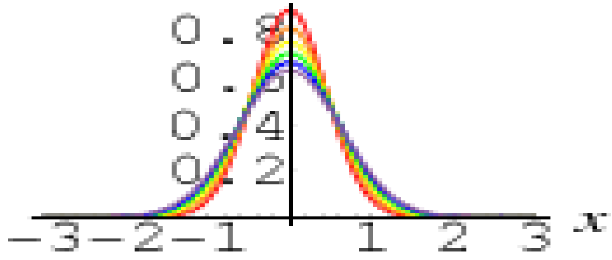
$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$



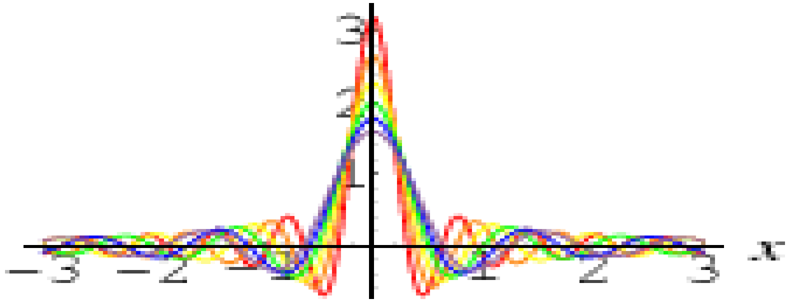
$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2} \epsilon \, |x|^{\epsilon - 1}$$



$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{\pi \epsilon}} e^{-x^2/(4\epsilon)}$$



$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$



$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{e^{-x^2/2\varepsilon^2}}{\sqrt{2\pi}\varepsilon}$$

En efecto, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\varepsilon^2}dx = 1 \; \forall\varepsilon > 0$ y

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\varepsilon^2} f(x)dx = f(0)$$

La gráfica de $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} e^{-x^2/2\varepsilon^2}$ es la "campana" de Gauss, con área 1 y dispersión $\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) x^2 dx = \varepsilon^2$. Para $\varepsilon \to 0^+$, $g_\varepsilon(x)$ se concentra alrededor de $x = 0$, pero mantiene su área constante.

En general, si $g_\varepsilon(x)$ está definida $\forall\ x \in \Re$ y $\varepsilon > 0$, diremos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} g_\varepsilon(x) = \delta(x) \text{ sii } \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) f(x) dx = f(0)$$

$\forall$ *función de prueba* f.

Por ejemplo, si $g(x) \geq 0\ \forall x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1 \Rightarrow$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{-1} g(x/\varepsilon) = \delta(x)$$

En efecto, si $\varepsilon > 0$, $\varepsilon^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} g(x/\varepsilon)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)du = 1$ y $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1}\int_a^b g(x/\varepsilon)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a/\varepsilon}^{b/\varepsilon} g(u)du =$ $\begin{cases} 1 & a<0<b \\ 0 & a<b<0 \text{ o } 0<a<b \end{cases}$. Por lo tanto, si $|f(x)| \leq M$ $\forall x$ y $ab > 0$, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1}\left|\int_a^b g(x/\varepsilon)f(x)dx\right| \leq M \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1}\int_a^b g(x/\varepsilon)dx = 0$. De este modo, si $t > 0$ y f es continua y acotada,

$$I_f \equiv \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} g(x/\varepsilon)f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1}\int_{-t}^{t} g(x/\varepsilon)f(x)dx$$

Si $m_t \leq f(x) \leq M_t$ para $x \in [-t,t] \Rightarrow m_t \leq I_f \leq M_t$ $\forall t > 0$, pero por continuidad de f, $\lim_{t\to 0^+} M_t = \lim_{t\to 0^+} m_t = f(0)$, por lo que $I_f = f(0)$.

Propiedades (ver aquí)

https://www.youtube.com/watch?v=bq3uxH7op18

$$\delta(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0+} \mathrm{Im}[\frac{1}{x+i\varepsilon}] = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$

Otro ejemplo muy utilizado es también

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon \frac{\sin^2(x/\varepsilon)}{x^2}$$

que corresponden a $g(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ y $g(x) = \frac{\sin^2(x)}{\pi x^2}$. No obstante, existen también funciones $g(x)$ no siempre positivas que satisfacen $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^{-1} g(x/\varepsilon) = \delta(x)$. Por ejemplo la fórmula de Dirichlet,

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\sin(x/\varepsilon)}{x} dx = f(0)$$

corresponde a $g(x) = \sin(x)/(\pi x)$ e implica

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x} = \delta(x)$$

aún cuando $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \sin(x/\varepsilon)/x$ es no nulo (no existe) para $x \neq 0$ (sólo es nulo el promedio: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\varepsilon t} \int_{x_0-t}^{x_0+t} g(x/\varepsilon) dx = 0$ si $0 < t < |x_0|$).

2) *Propiedades básicas de la delta.*

La composición de $\delta(x)$ con otras funciones se define de modo tal que se sigan cumpliendo las reglas usuales de integración. Por ejemplo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) f(u + x_0) du = f(x_0)$$

Asimismo, si $a \neq 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) f(x) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) f(\frac{u}{a}) du = \frac{1}{|a|} f(0)$$

por lo que

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)\,, \quad a \neq 0$$

En particular, $\delta(-x) = \delta(x)$.

Para una función invertible y derivable $g(x)$ que posee una sóla raíz x_1 ($g(x_1) = 0$), con $g'(x_1) \neq 0$, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(g(x)) f(x) dx = \int_{r_-}^{r_+} \delta(u) \frac{f(g^{-1}(u))}{|g'(g^{-1}(u))|} du = \frac{f(x_1)}{|g'(x_1)|}$$

donde $(r_-, r_+) \subset$ en la imagen $g(\Re)$, con $r_\pm \gtrless 0$ y $g^{-1}(0) = x_1$. Por lo tanto, en este caso,

$$\delta(g(x)) = \frac{\delta(x - x_1)}{|g'(x_1)|}$$

En general, para una función $g(x)$ derivable con raíces aisladas x_n y $g'(x_n) \neq 0$ tenemos

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|}$$

Sin embargo $\delta(x^2)$ y en general, $\delta(x^n), n > 1$, no están definidas para funciones de prueba arbitrarias. Tampoco lo está el producto $\delta(x)\delta(x) = [\delta(x)]^2$. Notemos también que si $g(x)$

es una función de prueba,

$$g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x)$$

Derivadas de $\delta(x)$. Si queremos que se siga cumpliendo la integración por partes, podemos definir también la derivada $\delta'(x)$ t.q. (recordar que f se anula fuera de un intervalo finito)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f'(x) dx = -f'(0)$$

y en general, la derivada enésima $\delta^{(n)}(x)$ t.q.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x) f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

De este modo,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-x_0) f(x) dx \\ f^{(n)}(x_0) &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x-x_0) f(x) dx \end{aligned}$$

Notemos también que si $a \neq 0$,

$$\delta^{(n)}(ax) = \frac{1}{a^n |a|} \delta^{(n)}(x)$$

En particular, $\delta^{(n)}(-x) = (-1)^n \delta^{(n)}(x)$.

Ejercicios: Probar que

1. $g(x)\delta'(x) = g(0)\delta'(x) - g'(0)\delta(x),$
2. $[\delta(x)g(x)]' = \delta'(x)g(x) + \delta(x)g'(x) = g(0)\delta'(x),$
3. $[\delta(g(x))]' = \delta'(g(x))g'(x).$

4. Dada la función de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$H'(x) = \delta(x)$$

Mostraremos que efectivamente $H'(x) = \delta(x)$ (lo que es intuitivamente razonable) de modo que $H(x)$ representa la "primitiva" de $\delta(x)$, al menos en forma simbólica. En efecto, para una función de prueba $f(x)$, obtenemos, integrando por partes,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H'(x) f(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x) f'(x) dx = -\int_{0}^{\infty} f'(x) dx = f(0)$$

Mediante $H(x)$ podemos escribir una integral en un intervalo finito como una integral en toda la recta, donde los límites quedan determinados por el integrando:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} H(b-x) f(x) dx$$

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [H(b-x) - H(a-x)] f(x) dx$$