Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2]
[Prof: Los Profesores] UNI, 24 de mayo de 2021

Práctica Calificada 3

1. Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias usando el Teorema de Cayley-Hamilton:

$$\begin{cases} x^{'} = 2x + y - z \\ y^{'} = -3x - y + z + t \\ z^{'} = 9x + 3y - 4z \\ x(0) = z(0) = 0, y(0) = 3. \end{cases}$$

Solución:

a) Expresamos el sistema en su forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}'}_{\overline{x}'(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}}_{\overline{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}}_{\overline{r}(t)}.$$

Con $\overline{x}(0) = (3, 3, 3)^t$. La solución de la ecuación homogénea relacionada es

$$\overline{x}_h(t) = e^{At}C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

A continuación, calculamos la matriz e^{At}, por medio del Teorema de Cayley-Hamilton:

$$e^{At} = x_1(t)I_n + x_2(t)A + x_3(t)A^2,$$

donde las funciones x_i son calculadas por medio del polinomio característico de A (Ver Teorema 1).

b) Hallamos el polinomio característico de A:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1,$$

cuyo único valor propio es $\lambda = -1$ de multiplicidad 3, y su único valor propio independiente (salvo múltiplo por escalares) es $\mathbf{v} = (1, 0, 3)^t$.

c) Luego, la solución general de la EDO homogénea correspondiente a este polinomio característico es

$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + c_3t^2e^{-t}.$$

Considerando $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 0$, se obtiene $x_1(t) = e^{-t} + te^{-t} + \dfrac{t^2}{2}e^{-t}$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$, se obtiene $x_2(t) = te^{-t} + t^2e^{-t}$,

$x(0)=0,\ x'(0)=0,\ x''(0)=1$, se obtiene $x_3(t)=\dfrac{t^2}{2}e^{-t}$.
Entonces

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= x_1(t)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + x_2(t)\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1\\ -3 & -1 & 1\\ 9 & 3 & -4\end{bmatrix} + x_3(t)\begin{bmatrix} -8 & -2 & 3\\ 6 & 1 & -2\\ -27 & -6 & 10\end{bmatrix}.\\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{-3t^2+6t+2}{2} & t & \dfrac{t^2-2t}{2}\\ -3t & 1 & t\\ \dfrac{-9t^2+18t}{2} & 3t & \dfrac{3t^2-6t+2}{2}\end{bmatrix} e^{-t}.
\end{aligned}
$$

Sumando a la primera columna 3 veces la tercera columna, la primera columna se convierte en $(1,0,3)^t$. Luego sumando a la tercera columna $t-1$ veces la nueva primera columna, se obtiene la solución general homogénea:

$$
\begin{aligned}
\overline{x}_h(t) &= e^{At}C\\
&= \begin{bmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2}-\dfrac{1}{6}\\ 0 & 1 & t\\ 3 & 3t & \dfrac{3t^2}{2}+\dfrac{1}{2}\end{bmatrix} e^{-t}\times\begin{bmatrix} C_1\\ C_2\\ C_3\end{bmatrix}\\
&= C_1\underbrace{\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 3\end{bmatrix} e^{-t}}_{\overline{x}_1} + C_2\underbrace{\begin{bmatrix} t\\ 1\\ 3t\end{bmatrix} e^{-t}}_{\overline{x}_2} + C_3\underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{t^2}{2}-\dfrac{1}{6}\\ t\\ \dfrac{3t^2}{2}+\dfrac{1}{2}\end{bmatrix} e^{-t}}_{\overline{x}_3}.
\end{aligned}
$$

Se puede obtener las soluciones linealmente independientes $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ y $\overline{x}_3$ del sistema homogéneo de manera más rápida usando la técnica de los vectores propios, en particular para el valor propio λ de multiplicadad 3 (Ver Yunus A. Cengel - Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería y Ciencias, pag. 376):

$$
\begin{aligned}
\overline{x}_1 &= \mathbf{v}e^{\lambda t}\\
\overline{x}_2 &= \mathbf{v}te^{\lambda t} + \mathbf{u}e^{\lambda t}\\
\overline{x}_3 &= \frac{1}{2}\mathbf{v}t^2e^{\lambda t} + \mathbf{u}te^{\lambda t} + \mathbf{w}e^{\lambda t},
\end{aligned}
$$

donde $\mathbf{v}$ es el valor propio correspondiente a λ y $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ se determinan como

$$
(\lambda I_n - A)\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \wedge \quad (\lambda I_n - A)\mathbf{w} = \mathbf{u}.
$$

d) Por el método de variación de parámetros, consideramos una solución particular de la forma:

$$
\overline{x}_p(t) = e^{At}C(t),
$$

luego reemplazando en la EDO no homogénea, obtenemos C como:

$$\begin{aligned} C(t) &= \int e^{-At}\overline{r}(t)\,dt \\ &= \int \begin{bmatrix} -\frac{3t^2}{2}+\frac{1}{2} & -t & \frac{t^2}{2}+\frac{1}{6} \\ 3t & 1 & -t \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{t^3}{3} \\ \frac{t^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

luego, la solución particular es

$$\begin{aligned} \overline{x}_p(t) &= e^{At}C(t) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{t^3}{6} \\ \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^3}{2} \end{bmatrix} e^{-t}, \end{aligned}$$

e) Finalmente, la solución general es

$$\overline{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 3t \end{bmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2}-\frac{1}{6} \\ t \\ \frac{3t^2}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} \frac{t^3}{6} \\ \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^3}{2} \end{bmatrix} e^{-t}. \tag{1}$$

De la condición inicial, se obtiene $C = (C_1, C_2, C_3)^t$:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 3 \\ 21/2 \end{bmatrix}.$$

Reemplazando en (1) se obtiene la solución del PVI.

Teorema 1 *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *con polinomio característico*

$$p(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0,$$

luego

$$e^{At} = x_1(t)I_n + x_2(t)A + x_3(t)A^2 + \cdots + x_n(t)A^{n-1},$$

donde $x_k(t)$*,* $1 \leq k \leq n$*, son soluciones independientes de la EDO de orden* n*:*

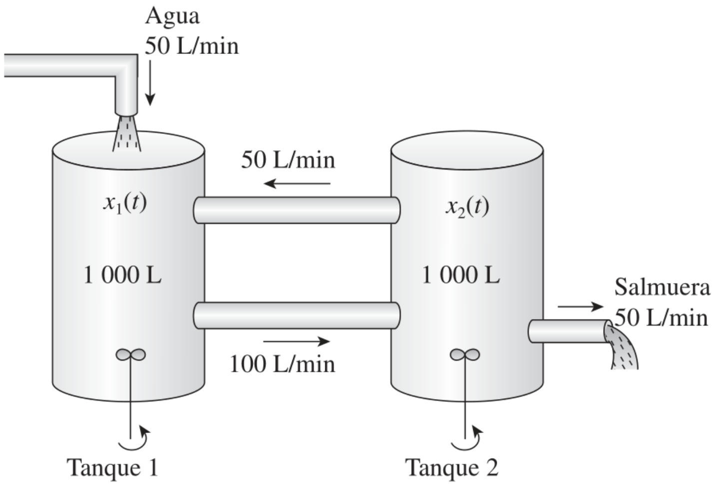
$$x^{(n)} + c_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + c_1x' + c_0x = 0,$$

satisfaciendo las siguientes condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} x_1(0) &= 1 \\ x_1'(0) &= 0 \\ &\vdots \\ x_1^{(n-1)}(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_2(0) &= 0 \\ x_2'(0) &= 1 \\ &\vdots \\ x_2^{(n-1)}(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad \left.\begin{aligned} x_n(0) &= 0 \\ x_n'(0) &= 0 \\ &\vdots \\ x_n^{(n-1)}(0) &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Ver Teorema 2 de `http://msvlab.hre.ntou.edu.tw/grades/engmath_1/2000/matrix.pdf` cuya demostración se basa en el Teorema de Cayley-Hamilton.

2. Dos tanques de salmuera, cada uno de los cuales contiene 1000 L (litros) de salmuera, están conectados como se muestra en la figura. En cualquier tiempo t, el primer tanque y el segundo contienen $x_1(t)$ y $x_2(t)$ kg de sal, respectivamente. La concentración de la salmuera en cada tanque se mantiene uniforme mediante agitación continua. Entra agua al primer tanque a razón de 50 L/min, y la salmuera se descarga del segundo tanque con el mismo caudal.
La salmuera se bombea del primer tanque al segundo a razón de 100 L/min, y del segundo tanque al primero a razón de 50 L/min. Obtenga las ecuaciones diferenciales que rigen el contenido de sal en cada tanque en función del tiempo: $x_1(t)$ y $x_2(t)$.



Solución:

a) Consideremos que la cantidad de sal en cada tanque por litro es $\dfrac{x_1}{1000}$ y $\dfrac{x_2}{1000}$ kg.

b) Las tasas de cambio del contenido de sal en cada tanque (en L/min, entradas y salidas) pueden expresarse como:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -100\frac{x_1}{1000} + 50\frac{x_2}{1000},\\ \frac{dx_2}{dt} &= +100\frac{x_1}{1000} - 100\frac{x_2}{1000}.\end{aligned}$$

3. Use la definición para determinar la transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} 2 & , \quad 0 < t \leq 5, \\ 0 & , \quad 5 < t \leq 10, \\ e^{4t} & , \quad 10 < t. \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t)) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \\
&= \int_0^5 e^{-st} 2\,dt + \int_{10}^\infty e^{-st} e^{4t}\,dt \\
&= 2\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^5 + \frac{e^{-st+4t}}{-s+4}\Big|_{10}^\infty \\
&= \frac{2}{-s}(e^{-5s} - 1) + \frac{1}{-s+4}(0 - e^{-s\cdot 10 + 4\cdot 10}) \\
&= \frac{2}{s} - \frac{2e^{-5s}}{s} + \frac{1}{s-4} e^{-10s} e^{40}.
\end{aligned}$$

4. Hallar la transformada de Laplace inversa de la siguiente función:

$$\frac{2s-3}{s^2+2s+10}.$$

Solución:

a) Por la propiedad de corrimiento, se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s+1)-5}{(s+1)^2+9}\right\} = e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-5}{s^2+9}\right\}.$$

b) Aplicando la linealidad, y las propiedades

$$\mathcal{L}\{\sin wt\} = \frac{w}{s^2+w^2} \quad \wedge \quad \mathcal{L}\{\cos wt\} = \frac{s}{s^2+w^2}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-5}{s^2+9}\right\} &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\} - \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\} \\
&= 2\cos 3t - \frac{5}{3}\sin 3t.
\end{aligned}$$

c) Finalmente

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-3}{s^2+2s+10}\right\} = e^{-t}\Big[2\cos 3t - \frac{5}{3}\sin 3t\Big].$$