Método de Frobenius y las EDOs con puntos singulares regulares

irlamn@uni.edu.pe

Dada la EDO

$$\boxed{t^2 x'' + t\, a^*(t) x' + b^*(t) x = 0}$$

$t=0$ **es punto singular regular de** *la EDO* **si** $a^*(t)=ta(t)$ y $b^*(t)=t^2 b(t)$ **son analíticas en** $t=0$.

Ej 1. $\boxed{t(t-1)^2x'' - tx' + (t-1)x = 0}$, es decir, *sean:* [e*] $t^2x'' - t\frac{t}{(t-1)^2}x' + \frac{t}{t-1}x = 0$.

[e] $x'' - \frac{1}{(t-1)^2}x' + \frac{1}{t(t-1)}x = 0$,

$t=0$ y $t=1$ son puntos singulares de la ecuación (todos los demás son regulares).

Como $a^*(t) = -\frac{t}{(t-1)^2}$ y $b^*(t) = \frac{t}{t-1}$ son analíticas en $t=0$, el punto es singular regular.

Con $t-1=s$ obtenemos: $s^2(s+1)x'' - (s+1)x' + sx = 0$, es decir, $s^2x'' - s\frac{1}{s}x' + \frac{s}{s+1}x = 0$

(estas derivadas son con respecto a s, pero las hemos dejado tal cual, pues $\frac{ds}{dt} = 1$).

Como $-\frac{1}{s}$ no es analítica en 0 (aunque $\frac{s}{s+1}$ sí lo sea), $t=1$ ($s=0$) es singular no regular.

Ej 2. $\boxed{t^2x''+\operatorname{sen}t\,x'+t^{5/3}x=0} \to x''-\frac{\operatorname{sen}t}{t^2}x'+t^{-1/3}x=0$ ó $t^2x''+t\frac{\operatorname{sen}t}{t}x'+t^{5/3}x=0$.

$a(t)$ y $b(t)$ no son ni continuas en $t=0$ (no es punto regular). Tampoco es singular regular:

$a^*(t)=\frac{\operatorname{sen}t}{t}=\frac{t-\frac{1}{6}t^3+\cdots}{t}=1-\frac{1}{6}t^2+\cdots$ sí es analítica en $t=0$ (con radio $R=\infty$), pero no lo es $b^*(t)=t^{5/3}$ (es continua y derivable, pero ya no existe la derivada segunda en 0).

Los $t_0\neq 0$ son puntos regulares de la ecuación, por ser $a(t)$ y $b(t)$ analíticas en $t=t_0$.

[Escribir sus desarrollos en ese punto se podría hacer con un poco de trabajo; por ejemplo, en torno a $t=1$: $t=s+1 \to x''+\frac{\cos 1\operatorname{sen}s+\operatorname{sen}1\cos s}{(s+1)^2}x'+(1+s)^{-1/3}x=0\ldots$].

Queremos resolver [e*] cerca de $t=0$ suponiendo que $a^*(t)$ y $b^*(t)$ son analíticas en ese punto, es decir, que admiten desarrollo en serie válido en $|t|<R$ (mínimo de los radios de convergencia):

$$\boxed{a^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k^* t^k = a_0^* + a_1^* t + \cdots\ ,\ \ b^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k^* t^k = b_0^* + b_1^* t + \cdots}\ ,\ |t|<R.$$

[e*] se resolverá con el **método de Frobenius**, que detallaremos en el teorema de esta sección. No lo probaremos, pero intentemos hacer creíbles sus hipótesis y conclusiones. La ecuación más sencilla del tipo [e*] es la de Euler (en ella $a^*(t)$ y $b^*(t)$ son 'series' que se reducen a su primer término). Viendo sus soluciones está claro que no hay, en general, soluciones analíticas de [e*]. Pero ya que hay soluciones de Euler de la forma t^r se podría pensar que [e*] posee soluciones en forma de serie que comiencen por términos t^r.

Probemos por tanto en [e*] la solución $x = t^r \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k = c_0 t^r + c_1 t^{r+1} + c_2 t^{r+2} + \cdots$.

Debe ser entonces:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k t^{k+r} + \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^* t^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_k t^{k+r}\Big) + \Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k^* t^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+r}\Big) = 0$$

El coeficiente que acompaña a la potencia de menor orden (t^r) debe anularse:

$$\big[r(r-1)+a_0^* r+b_0^*\big]c_0 = 0.$$

Si la serie ha de empezar por términos t^r, debe ser $c_0 \neq 0$. Por tanto, los únicos r para los que pueden existir soluciones no triviales de la forma $t^r \sum$ son las raíces del polinomio:

$$\boxed{Q(r) \equiv r(r-1)+a_0^* r+b_0^*} \;, \quad \text{llamado } \textbf{polinomio indicial} \text{ de [e*].}$$

Esto es coherente con las ecuaciones de Euler. Para ellas, si $Q(r)$ tenía dos raíces distintas r_1 y r_2, dos soluciones independientes de la ecuación eran t^{r_1} y t^{r_2}. Pero si la raíz era doble sólo existía una solución de esa forma, y la segunda era la primera multiplicada por el $\ln t$; por tanto, también es de esperar que en la solución general de [e*] aparezcan logaritmos.

Pero al resolver por series [e*] pueden aparecer problemas que no se presentan en el caso particular de las de Euler. Igualando a 0 el coeficiente que acompaña a t^{r+k} tenemos:

$$\left[(r+k)(r+k-1)+(r+k)a_0^*+b_0^*\right]c_k+\left[(r+k-1)a_1^*+b_1^*\right]c_{k-1}+\cdots=0$$

donde los puntos representan los términos con c_{k-2}, c_{k-3}, … De esta expresión podemos despejar el c_k en función de los anteriores ya calculados siempre que el corchete que le acompaña, que es $Q(r+k)$, no se anule. Si r_1 es la mayor de las dos raíces $Q(r_1+k)\neq 0\ \forall k$. Pero si r_2 es la menor, y r_1-r_2 es un entero positivo n, el $Q(r_2+k)=0$ si $k=n$, y, salvo que los demás sumandos también se anulen (con lo que c_n quedaría indeterminado), no hay forma de anular el coeficiente de t^{r_2+n} y no pueden existir soluciones $t^{r_2}\sum$.

Teorema de Frobenius

Teor 1.

Supongamos que el polinomio indicial $Q(r) = r(r-1) + a_0^* r + b_0^*$ tiene raíces reales r_1, r_2 con $r_1 \geq r_2$.

Entonces siempre existe una solución x_1 de [e*] de la forma

$$x_1 = t^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \,, \; c_0 \neq 0 \,.$$

La segunda solución x_2 linealmente independiente es, según los casos:

a] Si $r_1 - r_2$ no es cero ni entero positivo: $x_2 = t^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \,, \; b_0 \neq 0 \,.$

b] Si $r_1 = r_2$, $x_2 = t^{r_1+1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + x_1 \ln t \,.$

c] Si $r_1 - r_2 = 1, 2, 3, \ldots$, $x_2 = t^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + d x_1 \ln t \,, \; b_0 \neq 0 \,, \; d \in \mathbf{R} \,.$

Todas las soluciones están definidas al menos para $0 < t < R$ y los coeficientes c_k, b_k y la constante d se pueden determinar sustituyendo cada una de las soluciones en la ecuación.

Ej 3. $\boxed{2tx''+x'+tx=0}$, o sea, $t^2x''+t\frac{1}{2}x'+\frac{t^2}{2}x=0 \to a^*(t)=\frac{1}{2}$, $b^*(t)=\frac{t^2}{2}$.

$a^*(t)$ y $b^*(t)$ analíticas ($R=\infty$) $\Rightarrow$ $t=0$ singular regular. Como $a_0^*=\frac{1}{2}$ y $b_0^*=0$,

el polinomio indicial es $r(r-1)+\frac{1}{2}r+0=r(r-\frac{1}{2}) \to r_1=\frac{1}{2}$, $r_2=0$, con $r_1-r_2 \notin \mathbf{N}$.

Las dos series solución linealmente independientes son, pues:

$x_1=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1/2}$, $c_0 \neq 0$ y $x_2=\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$, $b_0 \neq 0$ (convergen $\forall t \in \mathbf{R}$, según el teorema).

Llevando x_1 a la ecuación inicial (las series se derivan como las de potencias habituales):

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2(k+\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{1}{2})c_k t^{k-1/2} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+\tfrac{1}{2})c_k t^{k-1/2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+3/2} = 0$$

(ahora las 3 series empiezan por $k=0$ pues no se anulan los primeros términos al derivar).

Igualando a 0 los coeficientes de las diferentes potencias de t:

$t^{-1/2}$: $[2(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}]c_0 = 0 \cdot c_0 = 0$ y c_0 queda indeterminado como debía.

$t^{1/2}$: $[2(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})+\frac{3}{2}]c_1 = 0 \to c_1 = 0$,

$t^{k-1/2}$: $[2(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})+(k+\frac{1}{2})]c_k + c_{k-2} = 0 \to c_k = -\frac{1}{k(2k+1)}c_{k-2}$, $k=2,3,\ldots$

Por tanto: $c_3=c_5=\cdots=0$, $c_2=-\frac{1}{2\cdot5}c_0$, $c_4=-\frac{1}{4\cdot9}c_2=\frac{1}{2\cdot4\cdot5\cdot9}c_0$, ... y la primera solución es:

$$x_1=t^{1/2}\Big[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2\cdot4\cdots2m\cdot5\cdot9\cdots(4m+1)}t^{2m}\Big]$$ (eligiendo, por ejemplo, $c_0=1$).

Para la otra raíz del polinomio indicial: $\sum_{k=0}^{\infty}2k(k-1)b_kt^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}kb_kt^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^{k+1}=0\rightarrow$

t^0: $b_1=0$, t^1: $[4+2]b_2+b_0=0\rightarrow b_2=-\frac{1}{6}b_0$.

t^{k-1}: $[2k(k-1)+k]b_k+b_{k-2}=0\rightarrow b_k=-\frac{1}{k(2k-1)}b_{k-2}$, $k=2,3,\ldots\rightarrow$

$b_3=b_5=\cdots=0$, $b_4=-\frac{1}{4\cdot7}b_2=\frac{1}{2\cdot4\cdot3\cdot7}b_0$, $\ldots\rightarrow x_2=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2\cdot4\cdots2m\cdot3\cdot7\cdots(4m-1)}t^{2m}$

El criterio del cociente prueba que, como debían, las series convergen $\forall t$. La x_2 vale $\forall t$, pero x_1 sólo si $t>0$ (en $t=0$ no derivable). Una x_1 válida $\forall t\neq0$ es $x_1=|t|^{1/2}[1+\sum]$.

Ej 4. $\boxed{t^2x''+2t^2x'+(t^2+\frac{1}{4})x=0}$ $a^*(t)=2t$, $b^*(t)=t^2+\frac{1}{4}$ analíticas en **R**.

$t=0$ singular regular; $r(r-1)+\frac{1}{4}=0 \to r=\frac{1}{2}$ doble $\to$

$$x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^{k+1/2} \to \sum_{k=0}^{\infty}\left[k^2c_kt^{k+1/2}+(2k+1)c_kt^{k+3/2}+c_kt^{k+5/2}\right]=0\,,$$

$$\to c_1=-c_0\,,\quad c_k=-\frac{2k-1}{k^2}c_{k-1}-\frac{1}{k^2}c_{k-2}\,,\ k=2,3,\dots$$

$$\to c_2=\frac{1}{2}c_0\,,\ c_3=-\frac{1}{6}c_0\,,\ \dots\,,\ c_k=(-1)^k\frac{1}{k!}c_0 \to x_1=t^{1/2}e^{-t}$$

Como la raíz es doble, la otra solución necesariamente contiene un logaritmo:

$$x_2=t^{3/2}\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^k+x_1\ln t \to x_2'=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\tfrac{3}{2})b_kt^{k+1/2}+\tfrac{1}{t}x_1+x_1'\ln t\,,$$

$$x_2''=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\tfrac{3}{2})(k+\tfrac{1}{2})b_kt^{k-1/2}-\tfrac{1}{t^2}x_1+\tfrac{2}{t}x_1'+x_1''\ln t \to$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k^2+2k+1)b_kt^{k+3/2}+(2k+3)b_kt^{k+5/2}+b_kt^{k+7/2}\right]+\ln t\left[t^2x_1''+2t^2x_1'+(t^2+\tfrac{1}{4})x_1\right]=0$$

El último corchete es 0 por ser x_1 solución (lo que acompaña a $\ln t$ siempre se anula).

$$\to b_0=b_1=b_2=\cdots=0 \to x_2=t^{1/2}e^{-t}\ln t$$

[Para comprobarlo podemos hacer $y=re^tx \to t^2y''+\frac{1}{4}y=0$ (Euler) $\to y=c_1t^{1/2}+c_2t^{1/2}\ln t$; o también, una vez hallada la x_1, se puede calcular otra solución con la fórmula de 2.2:

$x_2=t^{1/2}e^{-t}\int\frac{e^{-2t}}{te^{-2t}}\,dt=t^{1/2}e^{-t}\ln t$, exactamente la misma x_2 hallada con las series].

Como se ha visto en el ejemplo anterior, son más largas las cuentas para el cálculo de la x_2 en el caso **b]** del teorema que en el **a]**. Y también son más complicadas las del **c]**, caso al que pertenecen los tres siguientes ejemplos.

Ej 5. $\boxed{t^2x'' + 2t^2x' - 2x = 0}$ $t=0$ singular regular, $a^*(t)=2t$, $b^*(t)=-2$ analíticas en $\mathbf{R}$.

El polinomio indicial $r(r-1)+0r-2$ tiene por raíces $r_1=2$ y $r_2=-1$. Así pues:

$$x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+2}\,,\ c_0\neq 0 \to \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_k t^{k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+2)c_k t^{k+3} - \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k t^{k+2} = 0$$

$$\to c_0 \text{ indeterminado, } \ c_k = -\frac{2(k+1)}{k(k+3)}c_{k-1}\,,\ k=1,2,\dots$$

$$\to c_1=-c_0\,,\ c_2=\tfrac{3}{5}c_0\,,\ c_3=-\tfrac{4}{15}c_0\,,\ \dots,$$

$$c_k=(-1)^k\,\frac{2(k+1)}{k(k+3)}\,\frac{2k}{(k-1)(k+2)}\,\frac{2(k-1)}{(k-2)(k+1)}\cdots c_0 = \frac{(-2)^k(k+1)}{(k+3)!}\,6c_0$$

Por tanto, eligiendo $c_0=\frac{1}{6}$, $\ x_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k(k+1)}{(k+3)!}\,t^{k+2} \to x_1'=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k(k+1)(k+2)}{(k+3)!}\,t^{k+1}$

La segunda solución (caso **c]** del teorema) es

$$x_2=\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k-1}+d x_1 \ln t\ ,\ b_0\neq 0\ ,\ d \text{ constante (quizás nula)} \rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k-1)(k-2)b_k t^{k-1}+2(k-1)b_k t^k-2b_k t^{k-1}\right]$$
$$+d\left[(-1+2t)x_1+2tx_1'\right]+d\ln t\left[t^2x_1''+2t^2x_1'-2x_1\right]=0$$

Como siempre, el tercer corchete se anula, por ser x_1 solución. Sustituyendo las series de x_1 y x_1' escritas arriba en el segundo corchete y agrupando potencias de t:

$$-2b_0-2b_1-2b_2t+\left[2b_3+2b_2-2b_3-\tfrac{d}{6}+\tfrac{2d}{3}\right]t^2+\cdots=0 \rightarrow$$

$$b_1=-b_0\ ,\ b_2=0\ ,\ d=0\ ;\ \ b_0\ ,\ b_3 \text{ indeterminados.}$$

Como $d=0$, en la expresión de x_2 no aparece el $\ln t$. Sabíamos que debía ser $b_0 \neq 0$. El hecho de que también b_3 quede indeterminado se debe a que proporciona potencias t^2, comienzo de la serie de x_1. Elegimos $b_0=1$ y $b_3=0$ (para no volver a calcular x_1). Como en la regla de recurrencia cada b_k depende de b_{k-1} es $b_4=b_5=\cdots=0$.

Concluimos que: $x_2=\frac{1}{t}(1-t)=\frac{1}{t}-1$ [es fácil comprobar que satisface la ecuación].

[De esta solución x_2 sacaríamos otra con: $x_1^*=\frac{1-t}{t}\int\frac{t^2 e^{-2t}}{(1-t)^2}dt$. La primitiva no parece calculable, pero esto no impide desarrollar e integrar para obtener una serie solución:

Lo más corto para desarrollar el integrando (se podría hacer un cociente) es:

$$\frac{1}{(1-t)^2}=\frac{d}{dt}\frac{1}{1-t} \to t^2[1-2t+2t^2+\tfrac{4}{3}t^3+\cdots][1+2t+3t^2-4t^3+\cdots]=t^2+t^4+\tfrac{2}{3}t^5+\cdots$$

$$\to x_1^*=[\tfrac{1}{t}-1][\tfrac{1}{3}t^3+\tfrac{1}{5}t^5+\tfrac{1}{9}t^6+\cdots]=\tfrac{1}{3}t^2-\tfrac{1}{3}t^3+\tfrac{1}{5}t^4-\tfrac{4}{45}t^5+\cdots\ .$$

Aunque no lo pareciese, la primitiva sí se puede hallar: $u=t^2e^{-2t}$, $dv=\frac{1}{(1-t)^2}$ $\to$

$$\int\frac{t^2e^{-2t}}{(1-t)^2}dt=\frac{t^2e^{-2t}}{1-t}-\int 2te^{-2t}dt=\frac{1}{2}\frac{1+t}{1-t}e^{-2t} \to x_1^\bullet=(1+\tfrac{1}{t})\,e^{-2t}.$$

x_1 no es exactamente ni x_1^* ni $x_1^\bullet$ (es $3x_1^*$ y una combinación lineal de x_2 y $x_1^\bullet$)].

Ej 6. Estudiemos cuántas soluciones analíticas linealmente independientes tiene:

$$\boxed{2tx'' + (t-2)x' + 3x = 0}\ , \text{ es decir, }\ t^2x'' + t(\tfrac{t}{2}-1)x' + \tfrac{3t}{2}x = 0\ .$$

$t=0$ singular regular. $r(r-1)-r=0 \to r_1=2$, $r_2=0$. Es seguro analítica $x_1=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+2}$

$$\to \sum_{k=0}^{\infty}\left[2(k+2)(k+1)c_k t^{k+1} - 2(k+2)c_k t^{k+1} + (k+2)c_k t^{k+2} + 3c_k t^{k+2}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+2)kc_k t^{k+1} + (k+5)c_k t^{k+2}] = 0\ .$$

Calculemos, por ejemplo, los tres primeros términos de esta primera serie:

t^1: $0\,c_0 = 0$, c_0 indeterminado ; t^2: $6c_1+5c_0=0$, $c_1=-\frac{5}{6}c_0$;

t^3: $16c_2+6c_1=0$, $c_2=-\frac{3}{8}c_1=\frac{5}{16}c_0$; ... $\to$

$$x_1 = t^2 - \tfrac{5}{6}t^3 + \tfrac{5}{16}t^4 + \cdots\ [\to x_1' = 2t - \tfrac{5}{2}t^2 + \tfrac{5}{4}t^3 + \cdots\ ]$$

La $x_2=\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + d x_1 \ln t$ será analítica si $d=0$ y no lo será si $d\neq 0$. Hay que trabajar:

$$x_2'=\sum_{k=1}^{\infty} k b_k t^{k-1} + d x_1' \ln t + \tfrac{d}{t} x_1 \; ; \;\; x_2''=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) b_k t^{k-2} + d x_1'' \ln t + \tfrac{2d}{t} x_1' - \tfrac{d}{t^2} x_1 \to$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) b_k t^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[k b_k t^k - 2k b_k t^{k-1} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} 3 b_k t^k + 4 d x_1' - \tfrac{4d}{t} x_1 + d x_1 = 0 \to$$

$$t^0 \text{:}\;\; -2b_1+3b_0=0 \to b_1=b_0 \,;$$

$$t^1 \text{:}\;\; 4b_2+b_1-4b_2+3b_1+8d-4d=0 \to \; d=-b_1=-\tfrac{3}{2} b_0 \neq 0 \,.$$

Por tanto, la segunda solución contiene el $\ln t$ y no es analítica en $t=0$:

$$x_2 = 1 + \tfrac{3}{2} t + \cdots - \tfrac{3}{2} x_1 \ln t \,.$$

[No es analítica, pero sí es continua en $t=0$, pues $x_1 \ln t \underset{t\to 0}{\to} 0$ (si $a>0$, $t^a \ln t \underset{t\to 0}{\to} 0$)].

Ejercicios

1. Verificar que $x = 0$ es un punto singular regular de cada ecuación diferencial y que las raíces de la ecuación indicial no difieren por un entero. Usar el método de Frobenius para hallar las dos soluciones linealmente independientes y el correspondiente intervalo de convergencia:
   a) $2xy'' - y' + 2y = 0$.
   b) $3xy'' + (2 - x)y' + y = 0$.
   c) $2x^2y'' + 3xy' + (2x - 1)y = 0$.
   d) $2(x^2 + x^3)y'' + (x - 5x2)y' + y = 0$.
   e) $x^2y'' + (x - 3/4)y = 0$.

2. Hallar las dos soluciones en serie de Frobenius linealmente independientes de cada ecuación diferencial. Calcular $a_0, \ldots, a_n$ para n, al menos para n=7 y grafique cada solución :

a) $2x^2(x^2+x+1)y'' + x(5x^2+3x+3)y' - y = 0.$

b) $x^2(x+8)y'' + x(3x+2)y' + (x+1)y = 0.$

c) $4x^2y'' + x(4x^2+2x+7)y' - (-7x^2-4x+1)y = 0.$

d) $2x^2(3x+2)y'' + x(11x+4)y' + (-2+x)y = 0.$

e) $18x^2(x+1)y'' + 3x(x^2+11x+5)y' + (5x^2+2x-1)y = 0.$

f) $x^2(x+6)y'' + x(4x+11)y' + (2x+1)y = 0.$

g) $10x^2(2x^2+x+1)y'' + x(13+13x+66x^2)y' - (1+4x+10x^2)y = 0.$

Ecuación de Bessel

La ecuación de **Bessel** es: [B] $\boxed{t^2x''+tx'+t^2-p^2]x=0}$, $p\geq 0$.

$t=0$ es singular regular con polinomio indicial r^2-p^2, $r_1=p$, $r_2=-p$. Entonces

$$x_1=t^p\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k\ ,\ t>0\ ,\quad (\text{acotada en } t=0\ \forall p)$$

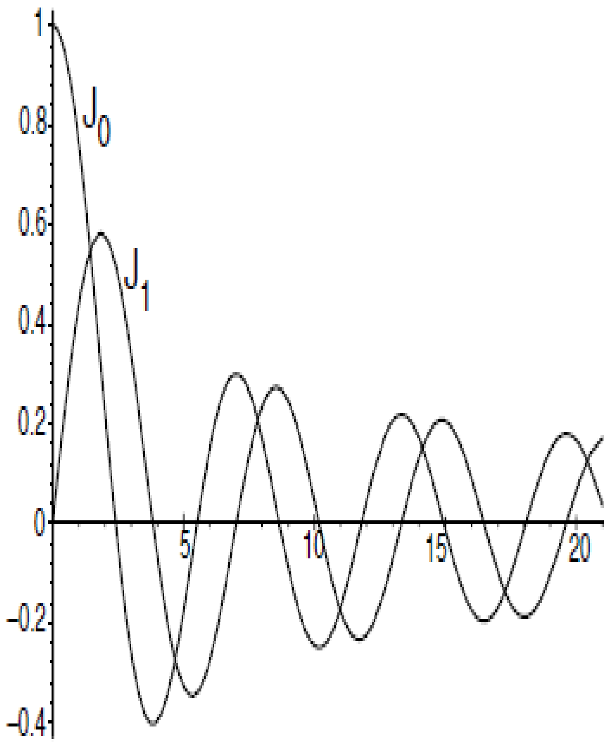
es una solución definida por una serie que converge en todo **R**. Llevándola a [B]:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[k(2p+k)c_kt^{p+k}+c_kt^{p+k+2}\right]=0\ ;\ c_k=-\frac{c_{k-2}}{k(2p+k)}\ ,\ k=2,3,\ldots;\quad c_1=0\rightarrow c_3=\cdots=0$$

$$c_2=-\frac{c_0}{2^2(p+1)}\ ;\ c_4=\frac{c_0}{2^42(p+1)(p+2)}\ ;\ \ldots\rightarrow\ x_1=c_0\,t^p\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^mt^{2m}}{2^{2m}m!(p+1)\cdots(p+m)}\right]$$

Eligiendo $c_0=\frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$ $\rightarrow$ $\boxed{J_p(t)\equiv\left[\frac{t}{2}\right]^p\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+m+1)}\left[\frac{t}{2}\right]^{2m}}$ **[función de Bessel de primera especie y orden** p**]**

En particular son: $J_0(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left[\frac{t}{2}\right]^{2m}$, $J_1(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+1)!}\left[\frac{t}{2}\right]^{2m+1}$,



cuyas gráficas son las de la izquierda. Se prueba que, al igual que J_0 y J_1, todas las J_p son oscilatorias y que para t grande se parecen a:

$$J_p \sim \cos\left[t-(2p+1)\frac{\pi}{4}\right]$$

Cada J_p tiene un infinitos ceros en $(0,\infty)$ [que deben conocerse para resolver algunas EDPs]:

los de J_0 son: 2.4048, 5.5201, 8.6532, … ;
los de J_1: 3.8317, 7.0156, 10.1735, … .

Para hallar una solución linealmente independiente de [B] (necesariamente no acotada en $t=0$), Frobenius nos dice que si $r_1-r_2=2p\neq 0,1,\ldots$ la x_2 es de la forma:

$$x_2=t^{-p}\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k\,,\ t>0\ \text{(llevándola a [B] se tiene } J_{-p}(t)\equiv\left[\tfrac{t}{2}\right]^{-p}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+m+1)}\left[\tfrac{t}{2}\right]^{2m}\text{)}.$$

Si $p\notin\mathbf{N}$, pero $2p\in\mathbf{N}$ ($p=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\ldots$), podría x_2 contener un $\ln t$ pero no es así (caso **c]** de Frobenius con $d=0$). De hecho, haciendo $p=\frac{1}{2}$ en $J_{\pm p}$ se tiene:

$$J_{\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{t}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^{2m+1}}{2^{2m+1}m!(m+\frac{1}{2})\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}=\boxed{\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\operatorname{sen} t}\ ,\ J_{-\frac{1}{2}}(t)=\cdots=\boxed{\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t}\ ,$$

soluciones que son linealmente independientes (la expresión asintótica es exacta para $p=\frac{1}{2}$). Como veremos que $J_{p+1}=\frac{2p}{t}J_p-J_{p-1}$, **todas las** $J_{\frac{2n+1}{2}}$**,** $n\in\mathbf{Z}$**, son funciones elementales** (las demás J_p no lo son).

Para $p=n\in\mathbf{N}$ el atajo anterior no sirve, pues es fácil ver que cambiando n por $-n$ la J_{-n} que aparece no es independiente de J_n [es $J_{-n}=(-1)^n J_n$]. Tendríamos que hallar las x_2 de Frobenius (y obtendríamos un $\ln t$ en su larga expresión). Por ejemplo, para $p=0$ (que seguro contiene logaritmos) se acaba obteniendo:

$$x_2(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right]\left[\frac{t}{2}\right]^{2m}+J_0(t)\ln t\equiv K_0(t)\ ,\ \ t>0$$

[**función de Bessel de segunda especie y orden** 0]

Popiedades de la derivada de J_p

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[t^p J_p(t)\right]=t^p J_{p-1}(t)\ ,\ \ \frac{d}{dt}\left[t^{-p}J_p(t)\right]=-t^{-p}J_{p+1}(t)}$$ (En particular, $[tJ_1]'=J_0$, $[J_0]'=-J_1$).

(Son inmediatas: $\frac{d}{dt}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^{2m+2p}}{2^{2m+p}m!\Gamma(p+m+1)}=t^p\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^{2m+2p-1}}{2^{2m+p-1}m!\Gamma(p+m+1)}$ y similar la otra).

Derivando y despejando la J_p' en ambas:

$$J_p'=J_{p-1}-\frac{p}{t}J_p=-J_{p+1}+\frac{p}{t}J_p\ \Rightarrow\ \boxed{J_{p+1}=\frac{2p}{t}J_p-J_{p-1}}\ ,$$

relación de recurrencia citada, que expresa cada J_{p+1} en función de las anteriores.