Polinomios ortogonales

Juan Luis Sánchez Salas

21 de junio de 2013

Índice general

Abstract

This memoir is devoted to orthogonal polynomials. Orthogonality is understood in the frame of Hilbert spaces of square integrable real functions with respect to some Borel measure on $\mathbb{R}$. In this way, when we speak about a sequence of orthogonal polynomials we will understand that there is some measure μ such that these polynomials belongs to the Hilbert space $L^2(\mu)$ and they are orthogonal with respect to its inner product. On the other hand, starting from a Borel measure μ on $\mathbb{R}$ such that the functions x^n for $n = 0, 1, 2, \ldots$ are integrable, then the Graam-Schmidt orthogonalization process with provide us with a sequence of orthogonal polynomials.

The first paragraph just was a naive approach to the topic. Actually, orthogonal polynomials appeared long time ago in Mathematical Analysis in relation with different kinds of problems, as partial differential equations, potential theory, approximation theory... As in the case of trigonometric series, developments of functions in series of orthogonal polynomials was used much time before having a correct understanding of their convergence. The families of orthogonal polynomials that first appeared, usually linked to famous mathematician's name, are the classical orthogonal polynomials. For instance the polynomials of Legendre, Laguerre, Hermite or Tchebycheff, among others. We quote just the families that we are going to study more carefully.

The first chapter of this work contains some preliminary basic material to deal with orthogonality of functions. After that, some basic results are proven about orthogonal families of polynomials. It is worth saying that many properties shared by the classical polynomials are just consequence from a functional abstract point of view. For instance, the fact that they satisfy a three term linear recurrence formula (like Fibonacci sequence) can be obtained just from the orthogonality relation. Moreover, a converse obtained by Favard is true: under very general conditions a sequence of poly-

nomial satisfying such a kind of recurrence formula are orthogonal with respect to some Borel measure. More general properties can be obtained in a very general frame. For classical polynomials, the measure that make them orthogonal is given by a continuous positive weight function on some interval. This fact has consequences on the distribution of the zeros of the polynomials and it can be used for special purposes in interpolation. Another consequence is that classical polynomials satisfies a Sturm-Liouville type differential equation. Actually the solutions of a Sturm-Liouville homogeneous problem can be given the structure of Hilbert space with a natural orthogonal basis made up of eigenfunctions (not necessarily polynomials). That is something done with tools of Functional Analysis that are out of the scope of this work, so we will just be able to obtain the differential equation in particular cases. Other technique that can be applied to an abstract family of orthogonal polynomials $(P_n(x))$ is to obtain its generating function, that is, a two variables function $G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) t^n$ that "codifies" all the polynomials in a very simple way. Sometimes is difficult to establish the equivalence between the orthogonal, the recurrence and/or the differential relations for a family of polynomials. The generating function can help us to link the several alternative ways to introduce a family of orthogonal polynomial. Surprisingly, giving the weight function that describes the inner product is not always the simplest way. There is also an expression, the so called Rodrigues formula, that allow us to obtain the polynomials by iterated derivation of some functions. The last section is devoted to know when the sequence of orthogonal polynomials is actually a basis for the Hilbert space. If the measure μ has compact support, then it follows easily from Weierstrass approximation theorem. In the case of noncompact support, that is the case of Laguerre or Hermite polynomials, it is true that they are basis of their respective Hilbert spaces but special proofs are needed. That will be done in the case of Laguerre polynomials (the proof for Hermite polynomials is similar but we will omit it for space reasons).

The second chapter is about Legendre polynomials, introduced in year 1785 in relation with the gravitational attraction of spheroids. We start with Rodrigues formula as a simple way to introduce the Legendre polynomials and we continue finding the generating function. After that, we are now ready to prove that they are orthogonal in the interval $[-1,1]$ with respect to the Lebesgue measure (the weight function is just the indicator function of $[-1,1]$). The recurrence relation is discussed in a section. As the polynomials are just orthogonal but not orthonormal, the computation of the norms of polynomials is necessary in order to express the coefficients of the development of a given function in series of these polynomials and this will be done so in every of the remaining chapters. The last section contains some details of the application that motivated to Adrien-Marie Legendre the introduction of his polynomials. The problem is to know the potential produced by a distribution of mass with spheroid symmetry, that is, a revolution ellipsoid. Newton already knew that spherical distributions of mass were equivalent to one point concentred mass, and that simplification could not explain some phenomenons like the precession of equinoxes. This has also some interest to explain the form of our planet Earth, but we cannot give all the details here.

The third chapter deals with Hermite polynomials. The weight function can be either $e^{-x^2/2}$ or e^{-x^2} with no much care from the theoretical point of view, but in the first case we speak about "probabilistic Hermite polynomials" and in the second case about "physical Hermite polynomials". For the sake of simplicity we shall use only the weight e^{-x^2}. Notice that these polynomials are considered along all the real line. We discuss the generating function, the recurrence relation and orthogonality in this order. Completeness is done for Laguerre polynomials, being the proof similar for Hermite polynomials but rather long to be included here. The application we have chosen for Hermite polynomials is the quantum harmonic oscillator equation that comes from the application of Schrödinger equation to hydrogen atom. Hermite polynomials allow us to explain the energy levels and the shape of orbitals.

The fourth chapter is devoted to Laguerre polynomials. The classical Laguerre polynomials can be regarded like a particular case of the so called Laguerre generalized polynomials depending on a real parameter. In some of the developments of this chapter we shall use rather the generalized polynomials instead of the classical ones. The Hermite polynomials can be reduced to the generalized Laguerre polynomials with a change of variable and a suitable value of the parameter. Among other things, in this chapter is proved the completeness of the Laguerre system with some detail. The application that we have chosen is related to the Laplace transformation because the transformed of Laguerre polynomials is particularly simple.

The last chapter is about Tchebycheff polynomials. These family of polynomials can be defined from trigonometric functions and they are for this reason tightly related to Fourier series. We follow the same schema that in previous chapters for Tchebycheff polynomials: Rodrigues type formula, generating function, recurrence equation and differential equation. Perhaps the most interesting about this polynomials is that the orthogonal development of a function also converges uniformly if the function is not "very bad", for instance, if the function satisfies the Lipschitz condition. For this reason, and many others that we have not time to explain, Tchebycheff polynomials are very appreciated in approximation theory and numerical analysis.

There are many topics related to orthogonal polynomials that we cannot include in this work by reasons of space or time. Giving details of any possible application is a very ambitious task that correctly achieved will produce a thick monograph on orthogonal polynomials rather excessive for a end of degree dissertation. For instance, we decided not to include many formulas fulfilled by Legendre polynomials, recurrence ones or differential equations. As well, after this memoir was written, we decided to remove from the main text some proofs whose length were more significant than their difficulty or deepness, and some of them can be found in the Appendix. This is the case of the computation of Hermite polynomials' norm, for instance. As we have mention above, the Sturm-Liouville theory is quite related to orthogonal polynomials but unfortunately the mathematical requirements to deal with are without the scope of this work. For similar reasons we had to resign including many applications in approximation theory of Tchebycheff polynomials. Moreover, the sole application that we have chosen for that chapter, that is, the uniform convergence of the orthogonal development under the Dini-Lipschitz hypothesis needs the help of several deep results whose proofs exceed the objectives of this work. Finally we want to apology if the jury considers that some missing topic should have been included in this work. There was too much material around orthogonal polynomials and we just had to make a choice.

Capítulo 1

Propiedades generales.

En esta primera sección vamos a introducir los elementos necesarios que necesitamos para poder trabajar adecuadamente y dar una serie de resultados generales que verifican todos los polinomios ortogonales.

1.1. Definiciones y resultados básicos.

El marco más general en el que vamos a considerar la ortogonalidad de funciones en general, y de polinomios en particular, es el espacio de Hilbert $L^2(\mu)$ donde μ es una medida positiva de Borel en la recta real $\mathbb{R}$. Recordemos que $L^2(\mu)$ se compone de las funciones de cuadrado integrable respecto a μ, es decir

$$L^2(\mu) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \int_a^b |f(x)|^2 \, d\mu(x) < \infty\}.$$

Formalmente los elementos de este espacio son clases de equivalencia de funciones (iguales en casi todo punto) y no funciones individuales. Esto no será un problema en nuestro tratamiento ya que esencialmente trabajaremos con funciones continuas, o mejor dicho, el único representante continuo en su clase continuo, lo que determina unívocamente la función. La medida μ será casi siempre absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, lo que se traducirá en el manejo de una función *peso* $p(x)$ y la integración respecto a dx en lugar de $d\mu$ ($d\mu(x) = p(x)dx$).

Para poder hablar de polinomios ortogonales en $L^2(\mu)$ es preciso que $x^n \in L^2(\mu)$ para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, obviamente. Cuando μ es finita y está soportada por un intervalo compacto este requisito se cumple de manera trivial. Fuera de este caso, es necesario imponer condiciones a μ que se traducen en un rápido decrecimiento de $p(x)$, como veremos más adelante con los polinomios de Laguerre y Hermite. De ahora en adelante, cada vez que nos refiramos a una medida μ supondremos que es una medida de Borel sobre $\mathbb{R}$ positiva tal que $x^n \in L^2(\mu)$ para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Recordemos que el producto escalar de dos elementos $f, g \in L^2(\mu)$ se define mediante

$$\langle f, g \rangle = \int f(x) g(x) \, d\mu(x)$$

lo que nos permite definir a su vez una norma $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Con esta norma $L^2(\mu)$ es completo, es decir, un espacio de Hilbert, lo que desempeña un papel fundamental para la existencia de mejores aproximaciones. No consideraremos el espacio de Hilbert complejo, ya que todos los polinomios estudiados son reales.

Esta es la definición alrededor de la que gira este trabajo:

Definición 1.1.1 *Dada una sucesión de polinomios* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$*, diremos que* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de polinomios ortogonales respecto a la medida positiva de Borel* μ *si verifica que:*

1. $P_n(x)$ *es un polinomio de grado* n *con coeficientes reales.*

2. *Se tiene la condición de ortogonalidad mutua en* $L^2(\mu)$*, es decir*

$$\langle P_n(x), P_m(x) \rangle = A_n \delta_{n,m}$$

   donde $A_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$*.*

Diremos que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de polinomios ortogonales si existe una medida* μ *tal que verifica lo anterior. Además, en el caso en que* $A_n = \|P_n(x)\|^2 = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$*, decimos que* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de polinomios ortonormales.*

Recordemos que $\delta_{n,m}$ es la delta de Kronecker definida por

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

Es fácil comprobar que si $\{P_n(x) : n = 0, 1, 2, \dots\}$ es una sucesión de polinomios (no necesariamente ortogonales) tal que $P_n(x)$ tiene grado n, entonces, todo polinomio de grado m puede escribirse de la forma

$$P(x) = \sum_{n=0}^{m} c_n P_n(x). \tag{1.1}$$

En otras palabras, $\{P_n(x) : n = 0, 1, 2, \dots\}$ es una base algebraica del espacio de polinomios reales.

Veamos ahora una serie de propiedades generales de todos los polinomios ortogonales.

Teorema 1.1.2 *Dada una medida μ existe una sucesión de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ respecto a ella. Esta sucesión está determinada salvo factores constantes.*

Demostración. Partiendo de que $x^n \in L^2(\mu)$ para cada $n = 0, 1, 2, \dots$ podemos emplear el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmicht, que producirá una sucesión $\{P_n(x) : n = 0, 1, 2, \dots\}$ donde $P_0(x) = 1$ y $P_n(x)$ es combinación lineal de $\{1, x, \dots, x^n\}$, es decir, un polinomio. Por otra parte, $P_n(x)$ es el único polinomio mónico (el coeficiente de x^n es 1) de grado n ortogonal a las funciones $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$, lo que determina, salvo factores constantes, la sucesión de polinomios. ■

Este principio de unicidad contenido en el teorema anterior puede reformularse como criterio. La prueba, que a estas alturas no aporta nada, la omitimos.

Proposición 1.1.3 *Sea $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de polinomios. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión de polinomios ortogonales.*

ii) $\langle P(x), P_n(x)\rangle = 0$ *si* $P(x)$ *es un polinomio de grado* m *con* $m < n$.

iii) $\langle x^m, P_n(x)\rangle = 0$ *si* $m < n$.

1.2. Fórmula de recurrencia.

En esta sección vamos a demostrar que los polinomios ortogonales satisfacen fórmulas recursivas que ligan términos de distintos grados, de manera análoga a lo que ocurre con la sucesión de Fibonacci.

Teorema 1.2.1 (Relación de recurrencia a tres términos) *Dada una sucesión de polinomios ortogonales* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$*, existen sucesiones* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *de números reales con* $a_n > 0$*, tales que*

$$xP_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + a_{n-1} P_{n-1}(x) \qquad \textit{para } n \geq 1 \tag{1.2}$$

$$xP_0(x) = a_0 P_1(x) + b_0 P_0(x) \tag{1.3}$$

Demostración. Como $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales, por defición de ésta (definición 1.1.1), sabemos que $P_n(x)$ es un polinomio de grado n; lo cual implica que $xP_n(x)$ es un polinomio de grado $n+1$ y, con ello, que $xP_n(x)$ se puede expresar de la forma

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{n,k} P_k(x) \tag{1.4}$$

donde

$$c_{n,k} = \frac{\langle P_k(x), xP_n(x)\rangle}{\langle P_k(x), P_k(x)\rangle}$$

gracias a la ortogonalidad. Ahora bien, como $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales, en particular, la sucesión $\{P_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$ también es una sucesión de polinomios ortogonales, donde observemos que los coeficientes $c_{n,k}$ vienen dados por

$$c_{n,k} = \frac{\langle P_k(x), xP_n(x)\rangle}{\langle P_k(x), P_k(x)\rangle} = \frac{\int_{\mathbb{R}} P_k(x) x P_n(x)\, d\mu(x)}{\langle P_k(x), P_k(x)\rangle} = \frac{\langle xP_k(x), P_n(x)\rangle}{\langle P_k(x), P_k(x)\rangle}$$

de donde obtenemos que $\langle P_k(x), xP_n(x)\rangle = \langle xP_k(x), P_n(x)\rangle$. Pero ahora bien, por la proposición 1.1.3 anterior, sabemos que $\langle xP_k(x), P_n(x)\rangle = 0$ si $k+1 < n$ (ya que $xP_n(x)$ es un polinomio de grado $k+1$); es decir, que $\langle xP_k(x), P_n(x)\rangle = 0$ si $k < n-1$.
Lo cual implica que la expresión (1.4) se reduce a

$$xP_n(x) = c_{n,n-1} P_{n-1}(x) + c_{n,n} P_n(x) + c_{n,n+1} P_{n+1}(x). \tag{1.5}$$

Llamemos

$$b_n := c_{n,n} = \frac{\langle P_n(x), xP_n(x)\rangle}{\langle P_n(x), P_n(x)\rangle} = \frac{\int_{\mathbb{R}} P_n(x) x P_n(x)\, d\mu(x)}{\int_{\mathbb{R}} P_n(x) P_n(x)\, d\mu(x)}$$

y, por otra parte, tenemos que

$$c_{n,n-1} = \frac{\langle P_{n-1}(x), xP_n(x)\rangle}{\langle P_{n-1}(x), P_{n-1}(x)\rangle} \quad \text{y que} \quad c_{n,n+1} = \frac{\langle P_{n+1}(x), xP_n(x)\rangle}{\langle P_{n+1}(x), P_{n+1}(x)\rangle},$$

de donde si definimos $a_n := c_{n,n+1}$ y $a_{n-1} := c_{n,n-1} = c_{n-1,n}$, obtenemos de (1.5) la fórmula

$$xP_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + a_{n-1} P_{n-1}(x)$$

que es válidad para $n \geq 1$. Para el caso $n = 0$, la ecuación (1.4) queda reducida a la forma

$$xP_0(x) = \sum_{k=0}^{1} c_{0,k} P_k(x) = c_{0,0} P_0(x) + c_{0,1} P_1(x)$$

y, por cómo hemos definido las sucesiones a_n y b_n anteriormente, obtenemos que

$$xP_0(x) = b_0 P_0(x) + a_0 P_1(x)$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Observación 1.2.2 *Si llamamos $k_n \neq 0$ al coeficiente principal de $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, observemos que la comparación en (1.2) de términos del mismo grado permite establecer que $a_n = \frac{k_n}{k_{n+1}}$.*

Además, este teorema admite un recíproco en el sentido de que cada sucesión de polinomios que satisfagan una relación de recurrencia como la del teorema anterior, entonces la sucesión de polinomios que se obtiene es ortogonal, y este teorema recibe el nombre de teorema de Favard, que enunciamos y demostramos a continuación.

Teorema 1.2.3 (Teorema de Favard) *Sean $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$,$\{b_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ dos sucesiones arbitrarias de números reales tales que $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dada la recurrencia*

$$xP_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + a_{n-1} P_{n-1}(x) \quad \textit{para } n \geq 1 \tag{1.6}$$

$$xP_0(x) = a_0 P_1(x) + b_0 P_0(x) \tag{1.7}$$

si $P_0(x) = 1$, entonces la sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonal respecto de una medida μ.

Demostración. Demostraremos que existe un único funcional lineal positivo Λ sobre los polinomios tal que $\Lambda(P_n(x)P_m(x)) = 0$ si $m \neq n$. La existencia de la medida se deducirá entonces del Teorema de Riesz [9, Teorema 2.14, pag 46]. Para ello, vamos a definir el funcional Λ impoiniendo que sea lineal, que $\Lambda(P_0(x)) = 1$ y que $\Lambda(P_n(x)) = 0$ $\forall n \geq 1$; es decir, definimos el funcional Λ con las condiciones

$$\Lambda(1) = 1 \quad \text{y} \quad \Lambda(P_n(x)) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

De la relación (1.7), obtenemos que (despejando $P_1(x)$ y puesto que $P_0(x) = 1$)

$$P_1(x) = a_0^{-1}(xP_0(x) + b_0)$$

e imponiendo la condición $\Lambda(P_1(x)) = 0$, se obtiene que

$$0 = \Lambda(P_1(x)) = \Lambda(a_0^{-1}(xP_0(x) + b_0)) = a_0^{-1}\Lambda(xP_0(x) + b_0) = a_0^{-1}(\mu_1 + b_0)$$

y, como $a_0 > 0$, su inverso también lo es y, por lo tanto, de aquí obtenemos cuánto vale el μ_1.
Por otro lado, de la relación (1.6), despejando $P_{n+1}(x)$, tenemos que

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{a_n}(xP_n(x) - b_nP_n(x) - a_{n-1}P_{n-1}(x)) \quad \text{para } n \geq 1$$

e imponiendo la condición $\Lambda(P_2(x)) = 0$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} 0 = \Lambda(P_2(x)) &= \Lambda(a_1^{-1}(xP_1(x) - b_1P_1(x) - a_0P_0(x)) = \\ &= a_1^{-1}\Lambda(xP_1(x) - b_1a_0^{-1}(xP_0(x) + b_0) - a_0P_0(x)) = \\ &= a_1^{-1}\Lambda(xP_1(x) - b_1a_0^{-1}xP_0(x) - b_1b_0a_0^{-1} - a_0P_0(x)) = \\ &= a_1^{-1}(\mu_2 - b_1a_0^{-1}\mu_1 - b_1b_0a_0^{-1} - a_0) = a_1^{-1}(\mu_2 + (\mu_1b_1 + b_1b_0)a_0^{-1} - a_0) \end{aligned}$$

lo cual es una ecuación de la cual podemos despejar μ_2.
Análogamente, repitiendo este procedimiento, podemos obtener todos los coeficientes μ_n, ya que de cada condición $\Lambda(P_n(x)) = 0$ podemos despejar un μ_n por ser $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Observemos que, de la relación de recurrencia del enunciado, obtenemos que $\Lambda(xP_n(x)) = 0$ si $n \geq 2$ (ya que de (1.6), al aplicarle Λ al miembro de la izquierda, también se lo estás aplicando al miembro de la derecha y éste es 0 por (1.8)).
Usando esto y multiplicando la relación de recurrencia por x, tenemos que

$$\Lambda(x^2P_n(x)) = 0 \quad \text{si} \quad n \geq 3$$

y así, razonando sucesivamente de la misma manera, se deduce fácilmente que

$$\Lambda(x^kP_n(x)) = 0 \qquad \forall 0 \leq k < n. \tag{1.9}$$

Además, por otro lado, tenemos que (utilizando que Λ es lineal y las ecuaciones (1.6) y (1.9))

$$\Lambda(x^n P_n(x) = \Lambda(x^{n-1} x P_n(x)) =$$

$$= \Lambda(x^{n-1} a_n P_{n+1}(x) + x^{n-1} b_n P_n(x) + x^{n-1} a_{n-1} P_{n-1}(x)) =$$

$$= a_n \Lambda(x^{n-1} P_{n+1}) + b_n \Lambda(x^{n-1} P_n(x)) + a_{n-1} \Lambda(x^{n-1} P_{n-1}) =$$

$$= a_{n-1} \Lambda(x^{n-1} P_{n-1}) = a_{n-1} \Lambda(x^{n-2} x P_{n-1}) =$$

$$= a_{n-1} \Lambda(x^{n-2} a_{n-1} P_n(x) + x^{n-2} b_n P_{n-1}(x) + x^{n-2} a_{n-2} P_{n-2}(x)) =$$

$$= a_{n-1}(a_{n-1} \Lambda(x^{n-2} P_n(x)) + b_n \Lambda(x^{n-2} P_{n-1}(x)) + a_{n-2} \Lambda(x^{n-2} P_{n-2}(x))) =$$

$$= a_{n-1} a_{n-2} \Lambda(x^{n-2} P_{n-2}(x)) = ... = a_{n-1} a_{n-2} ... a_0 > 0 \quad \text{para } n \geq 1 \quad (1.10)$$

Y con esto ya hemos terminado el resultado ya que, gracias a la proposición 1.1.3, sabemos que las condiciones (1.9) y (1.10) son equivalentes a que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sea una sucesión de polinomios ortogonales (ya que el que $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ implica que Λ es definido positivo), que es lo que queríamos demostrar. ■

En relación con la recurrencia, por problemas de espacio dejamos para el Apéndice la relación de Chistoffel-Darboux(Apéndice 1).

1.3. Ceros de los polinomios ortogonales.

En esta sección, para más sencillez en las cuentas, vamos a considerar que la medida μ viene dada a partir de un peso $p(x)$ definido positivo en un cierto intervalo en el cuál estemos trabajando. Comenzamos con una observación sencilla, dada como un lema.

Lema 1.3.1 *Sea $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ una familia de polinomios ortogonales en $[a, b]$ con la función peso $p(x)$. Sea $Q_k(x)$ un polinomio cualquiera de grado k. Entonces, $P_n(x)$ es ortogonal a $Q_k(x)$ si $n > k$.*

Sea ahora $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ una familia de polinomios ortogonales sobre el intervalo $[a, b]$ relativos al peso $p(x)$. Entonces, se tiene que:

Teorema 1.3.2 *Los polinomios $P_n(x)$ tienen exactamente n raíces reales simples en el intervalo abierto (a, b).*

Demostración. Para demostrar este resultado, vamos a utilizar el procedimiento de reducción al absurdo. Para ello, supongamos que $P_n(x)$ sólo tiene $k < n$ raíces reales en (a, b) de multiplicidad impar(es decir, simples ó de multiplicidad 3 ó 5 etc...) y veamos si podemos obtener una contradicción. Llamamos $x_1, ..., x_k$ a estas raíces y llamamos también

$$Q(x) =: \prod_{i=1}^{k}(x - x_i) \qquad \forall x \in (a, b) \tag{1.11}$$

Observemos que, por un lado, si multiplicamos por $P_n(x)$ la expresión (1.11), tendríamos que $P_n(x)Q(x)$ tiene signo constante en (a, b) $\forall x \in (a, b)$, salvo en los puntos x_i donde $Q(x)$ se anule; lo cual implica que

$$\int_a^b P_n(x)Q_n(x)p(x)\,dx \neq 0 \tag{1.12}$$

Pero, por otro lado, por la proposición 1.1.3, por ser $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de polinomios ortogonales, sabemos que

$$\langle x^m, P_n(x)\rangle = 0 \quad \text{si} \quad m < n.$$

Luego, como $Q(x)$ es un polinomio de grado k y $k < n$, por esta proposición tenemos que $\langle Q(x), P_n(x)\rangle = 0$ y, con ello, que $\int_a^b P_n(x)Q_n(x)p(x)\,dx = 0$, lo cual es una contradicción con (1.12).
Con esto hemos visto que $P_n(x)$ tiene exactamente n raíces de multiplicidad impar en (a, b). Veamos ahora que éstas son simples.
Para ello, vamos a razonar de nuevo por el método de reducción al absurdo. Supongamos que α es una raiz no simple de $P_n(x)$; es decir, que $P_n(x)$ se puede factorizar de la forma

$$P_n(x) = (x - \alpha)^m S_{n-m}(x) \quad \text{para } m \geq 2.$$

Si m es par, sea $T(x) =: S_{n-m}(x)$ y si m es impar, sea $T(x) =: (x - \alpha)S_{n-m}(x)$ y supongamos, por simplicidad, que m es impar (para el caso m par, la demostración es análoga).
En este caso, tenemos que, por un lado que

$$\langle P_n(x), T(x)\rangle = \int_a^b P_n(x)T(x)p(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b (x - \alpha)^m S_{n-m}(x)(x - \alpha)S_{n-m}(x)p(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b (x-\alpha)^{m+1}(S_{n-m}(x))^2 p(x)\,dx \neq 0$$

ya que los dos primeros términos son positivos (por tratarse de potencias pares ya que m es impar) y $p(x)$ sabemos que es positivo por definición y, por otro lado, como grado$[T(x)] = n - m + 1 < n$ (ya que $m \geq 2$), el Lema 1.3.1 nos dice que $\langle P_n(x), T(x)\rangle = 0$, lo cual es una contradicción y, con ello, obtenemos que las raíces son simples, como queríamos demotrar.■

Ahora bien, cuando los polinomios de una familia ortogonal cumplen una ecuación diferencial, la localización de los ceros de los polinomios necesita a menudo el empleo del teorema siguiente, debido a Sturm.

Teorema 1.3.3 *Consideremos las ecuaciones diferenciales*

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) + \alpha(x) f(x) = 0 \tag{1.13}$$

$$\frac{d^2 g}{dx^2}(x) + \beta(x) g(x) = 0 \tag{1.14}$$

de las que $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son dos funciones continuas sobre $[a,b]$ tales que $\alpha(x) \leq \beta(x) \quad \forall x \in [a,b]$ y no iguales. Supongamos además que conocemos una solución $f(x)$ de (1.13) de manera que $f(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$ y $f(b) = 0$. Si $g(x)$ es una solución no nula de (1.14) que parte de la misma manera que la solución $f(x)$ (es decir, si $g(a) = f(a)$ y $g'(a) = f'(a)$), entonces $g(x)$ tiene al menos un cero sobre (a,b).

Demostración. Para demostrar este resultado vamos a razonar por el método de reducción al absurdo; es decir, supongamos que $g(x)$ no se anula sobre (a,b) y veamos si podemos obtener una contradicción. Que $g(x)$ no se anule sobre (a,b) implica que $g(x)$ conserva su signo constante (ya sea positivo o negativo). Supongamos que el signo de $g(x)$ es positivo. Multiplicando la ecuación (1.13) por $g(x)$ y la ecuación (1.14) por $f(x)$, tenemos que:

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) g(x) + \alpha(x) f(x) g(x) = 0$$

$$\frac{d^2 g}{dx^2}(x) f(x) + \beta(x) g(x) f(x) = 0$$

y restando, se nos queda que

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) g(x) - \frac{d^2 g}{dx^2}(x) f(x) + (\alpha(x) - \beta(x)) f(x) g(x) = 0.$$

Observemos además que

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x)g(x) - \frac{d^2 g}{dx^2}(x)f(x) = \frac{d}{dx}\Big(g(x)f^{'}(x) - f(x)g^{'}(x)\Big).$$

Luego, con todo esto, hemos obtenido que

$$\frac{d}{dx}\Big(g(x)f^{'}(x) - f(x)g^{'}(x)\Big) + (\alpha(x) - \beta(x))f(x)g(x) = 0.$$

Por tanto, integrando entre a y b, tenemos que (por las propiedades de la integral, por hipótesis y porque $f(b) = 0$).

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\Big(g(x)f^{'}(x) - f(x)g^{'}(x)\Big)\,dx + \int_a^b (\alpha(x) - \beta(x))f(x)g(x)\,dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [g(x)f^{'}(x) - f(x)g^{'}(x)]_a^b + \int_a^b (\alpha(x) - \beta(x))f(x)g(x)\,dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(b)f^{'}(b) - f(b)g^{'}(b) - g(a)f^{'}(a) + f(a)g^{'}(a) + \int_a^b (\alpha(x) - \beta(x))f(x)g(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(b)f^{'}(b) = -\int_a^b (\alpha(x) - \beta(x))f(x)g(x)\,dx \qquad (1.15)$$

Observemos que $f^{'}(b) \neq 0$, ya que si $f^{'}(b) = 0$, como $f(b) = 0$, obtendríamos que $f(x) \equiv 0$ sobre $[a, b]$ debido a la unicidad de las ecuaciones diferenciales (ya que sabemos que f es solución de (1.13)), lo cual sería una contradicción con que $f(x) > 0 \;\; \forall x \in (a, b)$. Y, además, observemos que $f^{'}(b) < 0$, ya que sabemos que la función f es positiva y se anula en b.
Luego, según este razonamiento y puesto que $g(x)$ es positivo, obtenemos que el primer miembro de (1.15) es negativo o nulo (ya que $g(b)$ puede ser 0). Pero por otro lado, como tanto $f(x)$ como $g(x)$ mantienen su signo constante, son positivas y, por hipótesis, sabemos que $\alpha(x) < \beta(x)$, de aquí obtenemos que el segundo miembro de (1.15) es positivo, de donde obtenemos la contradicción deseada. ■

Finalmente, para cerrar esta sección, vamos a demostrar lo que se conoce como propiedad de entrelazamiento, que nos dice lo siguiente:

Teorema 1.3.4 *Si* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *es una familia de polinomios ortogonales, entonces entre dos ceros de* $P_n(x)$ *siempre existe un cero de* $P_{n+1}(x)$*.*

Demostración. Consideremos dos ceros consecutivos de $P_n(x)$ en el intervalo de definición (a,b). Digamos $a < \alpha < \beta < b$ y veamos si existe una raiz de $P_{n+1}(x)$ en el intervalo (α, β). Como α y β son dos ceros consecutivos y por el teorema 1.3.2 sabemos que los ceros de un polinomio ortogonal son simples, esto implica que $P_n^{'}(\alpha)$ y $P_n^{'}(\beta)$ tienen que tener signo distinto. Por otro lado, evaluando (5.19) en α y β respectivamente, tenemos que (puesto que ambas son raíces de $P_n(x)$ y, por la observación 1.2.2, sabemos que $\frac{k_n}{k_{n+1}} = a_n > 0$)

$$-P_n^{'}(\alpha)P_{n+1}(\alpha) > 0$$

y que

$$-P_n^{'}(\beta)P_{n+1}(\beta) > 0.$$

Por otro lado, como $P_n^{'}(\alpha)$ y $P_n^{'}(\beta)$ tienen signos distintos, de estas dos relaciones, obtenemos que $P_{n+1}(\alpha)$ y $P_{n+1}(\beta)$ tienen que tener signo distinto. Luego, como $P_{n+1}(x)$ es una función continua (de hecho, es un polinomio) y $P_{n+1}(\alpha)$ y $P_{n+1}(\beta)$ tienen signo distinto, como $\alpha < \beta$, el teorema de Bolzano-Weierstrass nos dice que que $P_{n+1}(x)$ tiene que tener un cero en (α, β), que era lo que queríamos demotrar. ■

1.4. Función generatriz.

Sea $G(x,t)$ una función generatriz desarrollable en serie de potencias de t en un cierto dominio D de la forma $G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)t^n$. A $G(x,t)$ se le llama función generatriz de las funciones $\varphi_n(x)$.
Para todos los polinomios ortogonales, podemos definir una función generatriz $G(x,t)$, de tal manera que cada uno de los polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sería proporcional al cociente de t^n del desarrollo en serie de Taylor en potencias de t alrededor del punto $x = 0$. Es decir, esta función generatriz, que constituye una forma alternativa de definir los polinomios ortogonales, la podemos expresar por la serie

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)t^n$$

donde a_n es una constante.
Observemos que las funciones generatrices no son exclusivas de los polinomios ortogonales y que se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.4.1 *Los polinomios $P_n(x)$ definidos por el desarrollo*

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

son ortogonales respecto de una medida $\mu(x)$ $\Leftrightarrow$ la integral

$$I = \int_a^b G(x,t) G(x,t^{'})\, d\mu(x)$$

depende sólo del producto $tt^{'}$.

Demostración. Por cómo hemos definido la función $G(x,t)$, tenemos que:

$$I = \int_a^b G(x,t)G(x,t^{'})\, d\mu(x) = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x) t^{'m}\, d\mu(x) =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} t^n t^{'m} \int_a^b P_n(x)P_m(x)\, d\mu(x) = \sum_{n,m=0}^{\infty} t^n t^{'m} \langle P_n(x), P_m(x)\rangle. \quad (1.16)$$

Luego, como los polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ son ortogonales, por definición de éstos, tenemos que

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} t^n t^{'n} A = A \sum_{n=0}^{\infty} (tt')^n$$

(puesto que A es una constante), de donde se deduce trivialmente que I depende sólo del producto $tt^{'}$.
Veamos ahora la otra implicación; es decir, supongamos que

$$I = \sum_{n,m=0}^{\infty} t^n t^{'m} \langle P_n(x), P_m(x)\rangle$$

sólo depende del producto $tt^{'}$; es decir, que es de la forma

$$I(tt^{'}) = \sum_{n=0}^{\infty} (tt')^n \langle P_n(x), P_m(x)\rangle, \quad (1.17)$$

y veamos que la sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal.
Sabemos que la sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal si $\langle P_n(x), P_m(x)\rangle = 0$ si $n \neq m$ y $\langle P_n(x), P_m(x)\rangle = A_n$ con A_n una constante. Como I se puede expresar de la forma (1.16), que I dependa sólo del producto $tt^{'}$, implica que

necesariamente, para $n \neq m$ se debe de cumplir que $\langle P_n(x), P_m(x)\rangle = 0$, ya que si $\langle P_n(x), P_m(x)\rangle \neq 0$ para $n \neq m \Rightarrow I$ sería de la forma (1.16) en contradicción con que I depende sólo del producto $tt^{'}$. Por otro lado, si $I(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, esto implica que

$$I(tt^{'}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (tt')^n \tag{1.18}$$

y, como sabemos que dos series de potencias son iguales $\Leftrightarrow$ tienen los mismos coeficientes, juntando (1.17) y (1.18), obtenemos que $c_n = \langle P_n(x), P_m(x)\rangle$ con c_n constante para $n = m$, de donde obtenemos que la sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal, que es lo que queríamos demostrar. ■

1.5. Familia total de polinomios.

Uno de los motivos por los que los polinomios ortogonales son interesantes es que son un análogo infinito dimensional de las bases ortonormales de espacios de dimensión finita con producto escalar; es decir, nos permiten expresar funciones de un cierto espacio vectorial como combinaciones lineales de polinomios ortogonales. La demostración de este hecho requiere de los siguientes teoremas de aproximación de funciones cuya demostración la podemos encontrar en [10, Teorema 1.12.30, pag 105] y [9, Teorema 3.14, pag 78] respectivamente.

Teorema 1.5.1 (Teorema de aproximación de Weierstrass) *Toda función continua en un intervalo compacto puede ser aproximada uniformemente por polinomios; es decir, el conjunto de los polinomios de una variable es denso en el espacio $(C(K), \|.\|_\infty)$ con $K \subset \mathbb{R}$ un compacto; es decir, que si f es continua entonces existe $g \in K$ tal que $\|f - g\|_\infty < \epsilon$ para $\epsilon > 0$.*

Teorema 1.5.2 *Sea μ una medida de Borel regular sobre un espacio topológico X. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$ y para toda función $f \in L^2(\mu)$, existe $g \in C(X)$ tal que $\|f - g\| < \epsilon$.*

Veamos ahora el resultado y la demostración del resultado citado anteriormente:

Teorema 1.5.3 *Si μ es una medida de Borel regular definida en $\mathbb{R}$ con soporte compacto, entonces los polinomios son densos en $L^2(\mu)$.*

Demostración. Supongamos que $I = [a,b]$ es el soporte compacto de la medida μ. Dado $\epsilon > 0$ y $f \in L^2(\mu) = L^2(\mu|_I)$ (donde esta última igualdad es porque I es el soporte compacto y lo que se salga fuera de él, como la medida es nula, no nos importa), por el Teorema 1.5.2, sabemos que existe $g \in C(I) : \|f - g\|_2 < \frac{\epsilon}{2}$. Luego, si probamos que, para un polinomio q, se cumple que

$$\|g - q\|_2 < \frac{\epsilon}{2}, \tag{1.19}$$

aplicando la desigualdad triangular, ya tendríamos lo que buscamos. Por tanto, veamos si se verifica (1.19). Sabemos que,

$$\|g - q\|_2 = \left(\int_I (g(x) - q(x))^2 d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Según esto, ver que se verifica (1.19) es equivalente a ver que se verifica

$$\int_I (g(x) - q(x))^2 d\mu(x) < \frac{\epsilon^2}{4} \tag{1.20}$$

Ahora bien, por el teorema de aproximación de Weierstrass 1.5.1, por ser I un compacto, sabemos que existe un polinomio q tal que $\|g - q\|_\infty < \frac{\epsilon}{2\sqrt{\mu(I)}}$ (donde la norma $\|.\|_\infty$ es sobre el intervalo I). Por tanto, tenemos que

$$\int_I (g(x) - q(x))^2 d\mu(x) \leq \mu(I) \|g - q\|_\infty < \mu(I) \frac{\epsilon^2}{4\mu(I)} = \frac{\epsilon^2}{4}$$

lo cual implica que se cumple (1.19) y, haciendo la desigualdad triangular, tenemos que

$$\|f - q\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - q\|_2 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Capítulo 2

Los polinomios de Legendre.

2.1. Introducción.

Los polinomios de Legendre son unos de los ejemplos más importantes de los polinomios ortogonales, porque aparecen como soluciones en varios problemas clásicos de la física, como el cáculo del potencial producido por una masa con simetría esferoide.

2.2. Definición y primeras propiedades.

El primero de los ejemplos de una base ortonormal de polinomios en la cual podremos expresar cualquier función continua en el intervalo cerrado $[-1,1]$ serán los polinomios de Legendre. Estos vienen construidos a partir de la fórmula de Rodrigues(Apéndice 2)

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2\dots \tag{2.1}$$

donde, por definición, se toma $P_0(x) = 1$. Luego, de aquí se obtiene que los primeros polinomios de Legendre son: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$,

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5),$$

$$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x).$$

Además, estos polinomios de Legendre son las soluciones de la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] + n(n+1)P = 0 \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2\dots \tag{2.2}$$

la cual surge, inevitablemente, cuando se resuelve la parte angular de una función de onda al emplear la ecuación de Schrödinger, donde esta misma ecuación puede aparecer en numerosos textos y tratados escritos de la siguiente manera:

$$(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2} - 2x\frac{dP}{dx} + n(n+1)P = 0 \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2...$$

Sabemos además que, de acuerdo con el desarrollo binomial, se tiene que

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k}$$

Luego, sustituyendo esta expresión en (2.1), tenemos que:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!}x^{2n-2k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2k}$$

y, como

$$\frac{d^n}{dx^n}x^r = \begin{cases} 0 & \text{si } n > r \\ \frac{r!}{(r-n)!}x^{r-n} & \text{si } n \le r \end{cases}$$

sutituyendo, tenemos que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \tag{2.3}$$

donde el símbolo $[v]$ denota el mayor entero $\le v$.

Observemos, además, que, al ser los polinomios de Legendre un conjunto completo de funciones, ellos expanden el espacio de funciones continuas en el intervalo cerrado $x \in [-1, 1]$ y, por ello, cualquier función en el intervalo $[-1, 1]$ puede ser expresada en esa base de la forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2}\left[\int_{-1}^{1} f(t)P_k(t)\,dt\right] P_k(x) \tag{2.4}$$

Antes de entrar en el detalle de las propiedades de estos polinomios, hay que enfatizar que los polinomios de Legendre constituyen la única base ortogonal para un espacio de Hilbert con un producto interno definido como el producto simple de funciones en el intervalo cerrado. Al ortonormalizar mediante Gram-Schmidt la base $1, x, x^2, ..., x^n...$ del espacio de polinomios de grado n en el intervalo $[-1, 1]$, con el producto interno definido por $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$ se obtienen los polinomios de Legendre y, como hemos dicho antes, estos polinomios de Legendre surgen, originalmente, como soluciones a la ecuación diferencial ordinarida del tipo

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0 \quad \text{para} \quad x \in [-1, 1]$$

o, de manera equivalente, a ecuaciones como

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2...$$

donde $y = P_n(x)$ y $\lambda = n(n+1)$.

2.3. Función generatriz de los polinomios de Legendre y algunas propiedades.

En este apartado, vamos a ver que se puede encontrar una función generatriz $G(x,t)$ de los polinomios de Legrendre; es decir, una función que verifique que

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad \text{con} \quad |t| < 1, |x| \leq 1 \tag{2.5}$$

para la cual, los $P_n(x)$ son los coeficientes de su desarrollo en serie de potencias.
Para ello, vamos a suponer que $G(x,t)$ es de la forma

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

y vamos a ver que el desaroolo en serie de la función $G(x,t)$ tiene como coeficientes a los $P_n(x)$. Antes de ello, observemos que esta serie converge para $|2xt + t^2| < 1$. Para demostrar que el desarrollo en serie de la función

$G(x,t)$ tiene como coeficientes a los $P_n(x)$ razonamos de la siguiente manera: Como

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{2.6}$$

derivando respecto de t, tenemos que:

$$\frac{dG(x,t)}{dt} = -\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x+2t) = \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.7}$$

Luego, combinando las expresiones (2.6) y (2.7), tenemos que:

$$(t-x)G(x,t) + (1-2xt+t^2)\frac{dG(x,t)}{dt} = 0$$

y, consecuentemente, por (2.5), tenemos que:

$$(t-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n + (1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} = 0$$

Desarrollando esta identidad, tras algunos cálculos, llegamos a que:

$$(t-x)P_0(x) + \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} xP_n(x)t^n +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2xnP_n(x)t^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(x)t^n = 0$$

De donde, juntando las series y desarrollando éstas un poco para dejarlas todas de la forma $\sum_{n=2}^{\infty} \ldots t^n$ tenemos que:

$$(t-x)P_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)^n - \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)t^n + \sum_{n=2}^{\infty} nP_{n-1}(x)t^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tP_0(x) - xP_0(x) + P_1(x) + 2P_2(x)t + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n -$$

$$-3xP_1(x)t - \sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)t^n + \sum_{n=2}^{\infty} nP_{n-1}(x)t^n = 0$$

Y, por lo tanto, agrupándolo todo, tenemos que:

$$(P_1(x) - xP_0(x)) + (2P_2(x) - 2xP_1(x) + P_0(x))t +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}((n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x))t^n=0$$

Luego, como todos los términos son positivos y la suma de ellos es 0, se tiene que

$$P_1(x)-xP_0(x)=0 \tag{2.8}$$

$$2P_2(x)-2xP_1(x)+P_0(x)=0 \tag{2.9}$$

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0 \tag{2.10}$$

donde (2.8) se cumple siempre y cuando $P_0(x)=1$ y $P_1(x)=x$ y (2.9) y (2.10) conforman la relación de recurrencia de los polinomios de Legendre que veremos a continuación y, por lo tanto, con esto queda demostrado que el desarrollo en serie de potencias de la función generatriz tiene como coeficientes a los polinomios de Legendre y, con ello, que ésta viene dada por

$$G(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n \quad \text{con} \quad |t|<1, |x|\leq 1\blacksquare \tag{2.11}$$

Acabamos de ver que la función generatriz de los polinomios de Legendre viene dada por la expresión (2.11). Luego, utilizando esta última expresión de la función generatriz, se pueden comprobar varias propiedades, que son las siguientes:

1. La paridad de los polinomios de Legendre está bien definida; es decir, que se verifica que

$$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x) \tag{2.12}$$

Demostración. Para demostrar esto, partimos de $G(-x,-t)$, hacemos cuentas e igualamos coeficientes de polinomios, obteniendo que:

$$G(-x,-t)=\frac{1}{\sqrt{1-2(-x)(-t)+(-t)^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(-x)(-1)^nt^n$$

Pero, por otro lado, tenemos que

$$G(-x,-t)=\frac{1}{\sqrt{1-2(-x)(-t)+(-t)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

Luego, igualando ambas ecuaciones, tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(-x)(-1)^nt^n=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

y, por igualdad de polinomios, tenemos que

$$P_n(x) = P_n(-x)(-1)^n$$

O lo que es lo mismo, que

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

que es lo que queríamos demostrar. $\blacksquare$

2. Mediante la expresión (2.12), es posible determinar los valores de los polinomios de Legendre para $x = 1$ y $x = -1$

   Lo vemos primero para $x = 1$. Bien, gracias a la expresión de la función generatriz de los polinomios de Legendre, tenemos que:

   $$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow \frac{1}{1-t} = P_n(1)\sum_{n=0}^{\infty} t^n \Rightarrow \frac{1}{1-t} = P_n(1)\frac{1}{1-t}$$

   De donde obtenemos que

   $$P_n(1) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.13}$$

   Veamoslo ahora para $x = -1$. Obviamente, de (2.12) y de (2.13), obtenemos que

   $$P_n(-1) = (-1)^n P_n(1) = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.14}$$

2.4. Ortogonalidad.

Teorema 2.4.1 *Sea $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ una familia de polinomios de Legendre de grado n. Entonces, se verifica que:*

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \quad si \quad n \neq m$$

Demostración. Sabemos que, por ser $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ una familia de polinomios de Legendre de grado n, los polinomios $P_n(x)$ y $P_m(x)$ satisfacen las ecuaciones

$$((1-x^2)P_n'(x))' + n(n+1)P_n(x) = 0 \tag{2.15}$$

$$((1-x^2)P_m^{'}(x))^{'} + m(m+1)P_m(x) = 0 \tag{2.16}$$

Multiplicando la ecuación (2.15) por $P_m(x)$ y la ecuación (2.16) por $P_n(x)$ y restando ambas, tenemos que:

$$(n(n+1)-m(m+1))P_n(x)P_m(x) = P_n(x)((1-x^2)P_m^{'}(x))^{'} - P_m(x)((1-x^2)P_n^{'}(x))^{'}$$

Por tanto, haciendo las derivadas, desarrollando e integrando a ambos lados entre $[-1,1]$ tenemos que:

$$(n(n+1)-m(m+1))\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \int_{-1}^{1} -2xP_n(x)P_m^{'}(x)\,dx +$$

$$+\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n(x)P_m^{''}(x)\,dx + \int_{-1}^{1} 2xP_n^{'}(x)P_m(x)\,dx - \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n^{''}(x)P_m(x)\,dx =$$

$$= \Big[(1-x^2)P_n(x)P_m^{'}(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n^{'}(x)P_m^{'}(x)\,dx -$$

$$-\Big[(1-x^2)P_n^{'}(x)P_m(x)\Big]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n^{'}(x)P_m^{'}(x)\,dx = 0$$

Luego, de aquí obtenemos que $(n(n+1)-m(m+1))\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0$ y, como si $n \neq m \Rightarrow n(n+1) \neq m(m+1)$, de aquí obtenemos que $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0$ si $n \neq m$, que es lo que queríamos demotrar. ■

Observación 2.4.2 *Observemos que lo que nos dice este teorema es que la familia $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ de los polinomios de Legendre constituyen una familia de polinomios ortogonales con respecto al peso*

$$p(x) = \begin{cases} 1 & si\ |x| \leq 1 \\ 0 & si\ |x| > 1 \end{cases}$$

según la definición de éstos al principio del proyecto.

2.5. Norma de los polinomios de Legendre.

Conociendo la ortogonalidad de los polinomios de Legendre, procedemos a encontrar el valor de su norma mediante el siguiente teorema:

Teorema 2.5.1 *Para $n = 0, 1, 2, 3...$ se tiene que*

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\,dx = \frac{2}{2n+1}. \tag{2.17}$$

Es decir, que la norma de los polinomios $P_n(x)$ es $\sqrt{\frac{2}{2n+1}}$.

Demostración. Para demostrar este teorema, definimos $V(x) = (x^2 - 1)^n$. Luego, por la fórmula de Rodrigues y, puesto que $P_n(x)$ son los polinomios de Legendre, sabemos que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\,dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{n!2^n}\right)^2 \frac{d^n}{dx^n}V(x)\frac{d^n}{dx^n}V(x)\,dx \qquad (2.18)$$

Ahora bien, llamamos $I := \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}V(x)\frac{d^n}{dx^n}V(x)\,dx$. Luego, notemos que, para $0 \leq m < n$, se tiene que

$$\frac{d^m}{dx^m}V(-1) = \frac{d^m}{dx^m}V(1) = 0 \qquad (2.19)$$

Por tanto, integrando I por partes y usando (2.19) en cada paso, obtenemos que:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}V(x)\frac{d^n}{dx^n}V(x)\,dx$$

$$= \left[\frac{d^n}{dx^n}V(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}V(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}V(x)\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}V(x)\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}V(x)\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}V(x)\,dx$$

$$= -\left(\left[\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}V(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}V(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}V(x)\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}V(x)\,dx\right)$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}V(x)\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}V(x)\,dx = ...$$

$$= \int_{-1}^{1} (-1)^n V(x)\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}V(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (-1)^n (x^2-1)^n (2n)!\,dx =$$

$$= (2n)! \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,dx = (2n)!2\int_{0}^{1} (1-x^2)^n\,dx =$$

Haciendo el cambio de variable $x = \cos\theta$,

$$= (2n)!2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\operatorname{sen}^2\theta)^n(-\operatorname{sen}\theta)\,d\theta = (2n)!2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}\theta)^{2n+1}\,d\theta.$$

Luego, sutituyendo en (2.18), y puesto que sabemos que

$$\frac{2}{2^{2z+1}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}\theta)^{2z+1}\,d\theta = \frac{(z!)^2}{(2z+1)!},$$

tenemos que:

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{1}{(n!)^2 2^{2n}}(2n)!2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}\theta)^{2n+1}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{(n!)^2 2^{2n}}(2n)!2\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\frac{2^{2z+1}}{2} = \frac{2}{2n+1}$$

como queríamos demostrar. ■

De este teorema, observammos que los polinomios de Legendre no están normalizados y, además que, juntando los teoremas (2.4.1) y (2.5.1), obtenemos que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \tag{2.20}$$

donde δ_{nm} es la delta de Kronecker.

2.6. Relaciones de recurrencia.

Supongamos que conocemos todos los polinomios de Legendre hasta el polinomio $P_n(x)$ y queremos generar el próximo. Obviamente, como $P_n(x)$ es un polinomio de grado n, ese polinomio que buscamos será de grado $n+1$. Luego, en vez de generarlo a partir de $P_{n+1}(x)$ directamente(que es lo que buscamos), vamos a generarlo a partir del polinomio $xP_n(x)$ (que, por ser $P_n(x)$ un polinomio de grado n, $xP_n(x)$ será un polinomio de grado $n+1$)
Hemos visto que los polinomios de Legendre son una base del espacio de las funciones continuas en el intervalo $[-1,1]$. Luego, según esto, por (2.4) tenemos que $xP_n(x)$ se puede expresar de la forma siguiente:

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2k+1}{2}\left[\int_{-1}^{1} tP_n(t)P_k(t)\,dt\right] P_k(x) \tag{2.21}$$

(donde el sumatorio es hasta $n+1$ porque nosotros sólo queremos calcular el polinomios $P_{n+1}(x)$ a partir de los anteriores).
Ahora bien, por ser la sucesión de polinomios de Legendre una sucesión de polinomios ortogonales, podemos apreciar que, por la proposición (1.1.3),

$$\int_{-1}^{1} tP_n(t)P_k(t)\,dt = 0 \quad \text{si} \quad k+1 < n$$

(ya que $P_k(t)t$ es un polinomios de grado $k+1$); es decir que

$$\int_{-1}^{1} tP_n(t)P_k(t)\,dt = 0 \ \text{ si } \quad k < n-1.$$

Lo cual implica que, de la expresión (2.21) únicamente sobreviven 3 términos y se reduce a la forma siguiente:

$$xP_n(x) = \frac{2(n-1)+1}{2}\left[\int_{-1}^{1} tP_n(t)P_{n-1}(t)\,dt\right]P_{n-1}(x)+$$

$$\frac{2n+1}{2}\left[\int_{-1}^{1} tP_n(t)P_n(t)\,dt\right]P_n(x)+\frac{2(n+1)+1}{2}\left[\int_{-1}^{1} tP_n(t)P_{n+1}(t)\,dt\right]P_{n+1}(x) =$$

$$= AP_{n-1}(x) + BP_n(x) + CP_{n+1}(x)$$

Calculamos ahora el valor de A, B y C. Observemos que

$$B = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} tP_n(t)P_n(t)\,dt = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} tP_n^2(t)\,dt =$$

$$= \frac{2n+1}{2}\left[\left[t\frac{2}{2n+1}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{2}{2n+1}\,dt\right] = 0$$

Según esto, tenemos que la relación de recurrencia queda de la forma

$$xP_n(x) = AP_{n-1}(x) + CP_{n+1}(x) \tag{2.22}$$

Para calcular estos coeficientes A y C vamos a desarrollar la expresión (2.22) anterior por la fórmula de Rodrigues, de donde obtenemos que

$$x\frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n =$$

$$A\frac{1}{(n-1)!2^{n-1}}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^{n-1} + C\frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^{n+1} \tag{2.23}$$

Observemos que $(x^2-1)^n = x^{2n} + \ldots$; luego, $\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{(2n)!}{n!}x^n$.
Análogamente, obtenemos que $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}x^{n-1}$ y que $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!}x^{n+1}$.
Luego, según esto, e igualando los términos de mayor grado de la expresión (2.23), tenemos que:

$$\frac{(2n)!}{n!2^n n!} = C\frac{(2n+2)!}{(n+1)!2^{n+1}(n+1)!}$$

y, con ello, que

$$C = \frac{(2n)!((n+1)!)^2 2^{n+1}}{(n!)^2 2^n (2n+2)!} = \frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2n+1}$$

Por otro lado, por (2.13), tomando x= 1, observemos que la relación (2.22) se queda de la forma

$$1 = A + C$$

Luego, como $C = \frac{n+1}{2n+1}$ eso implica que $A = \frac{n}{2n+1}$ y, sustituyendo ambas expresiones en (2.22), obtenemos que la relación de recurrencia queda de la forma siguiente:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)P_n(x) - nP_{n-1}(x) \tag{2.24}$$

Observación 2.6.1 *Estos polinomios de Legendre tienen muchas más relaciones de recurrencia pero, por falta de espacio, no podemos ponerlas todas y sólo ponemos la más importante. Las demás relaciones las podemos encontrar en el Apéndice 3.*

2.7. Desarrollo de una función en serie de $P_n(x)$.

Lo que vamos a hacer en este apartado es ver cómo una función se puede expresar como una serie de Fourier en términos de los polinomios de Legendre.

Para ello, supongamos que una función $f(x)$ tiene un desarrollo convergente de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \text{para } -1 < x < 1 \tag{2.25}$$

Multiplicando esta última expresión (2.25) a ambos lados por $P_m(x)$ (con m fijo) e integrando entre -1 y 1, (donde estamos suponiendo que la integración de la serie es término a término), tenemos que:

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx$$

y, además, aplicando la ortonormalidad (2.20) de los polinomios de Legendre, tenemos que:

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)\,dx = c_m \int_{-1}^{1} P_m^2(x)\,dx \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx = c_n \frac{2}{2n+1}$$

y, con ello, que

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx \quad \text{para } n \in \mathbb{N} \tag{2.26}$$

Todo esto que acabamos de deducir, se puede formalizar en el siguiente teorema:

Teorema 2.7.1 *La familia de los polinomios de Legendre es total sobre L_p^2; dicho de otra manera, toda función $f(x)$ para la cual la integral $\int_{-1}^{1} f(x)^2\, dx$ existe, es desarrollable en serie de los $P_n(x)$ sobre el intervalo $[-1, 1]$ de la forma*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

con

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx para\ n \in \mathbb{N}$$

Éste es un caso particular del teorema más general que vimos en las propiedades generales, en el que demostrábamos que los polinomios eran densos en $L^2(\mu)$.

2.8. El potencial fuera de un esferoide uniforme.

Como aplicación de los polinomios de Legendre, vamos a calcular un hecho bien conocido como es el potencial debido a una esfera uniforme; es decir, vamos a calcular el potencial gravitatorio generado fuera de un esferoide de densidad de masa uniforme γ y radio a. Para ello, vamos a considerar dos masas puntuales m y $m^{'}$ cuyos vectores posición van a ser $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ respectivamente. Antes de nada, es conveniente que adoptemos el cambio estándar a coordenadas polares (r, θ, ϕ), alineados a lo largo del eje z para poder obtener unas expresiones del potencial gravitacional que más adelante nos harán falta.
Sabemos que estas coordenadas polares están relacionadas con regulares coordenadas cartesiananas de la siguiente manera

$$x = r \sin\theta \cos\phi \tag{2.27}$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi \tag{2.28}$$

$$z = r \cos\phi \tag{2.29}$$

Consideremos, además, la posibilidad de que tengamos una distribución de masas axialmente simétrica; es decir, que tengamos una $\rho(\mathbf{r})$ que sea independiente del ángulo ϕ. Es de esperar que esta distribución de masas genere un potencial gravitacional simétrico respecto de un eje de la forma $\Phi(r,\theta)$. Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos tomar $\phi = 0$ cuando evaluemos Φ en la ecuación

$$\Phi(r) = -G \int \frac{\rho(r')}{|r' - r|}\, d^3\mathbf{r}' \tag{2.30}$$

donde la integral es donde la masa esté concentrada, que es la expresión general para el potencial gravitacional $\Phi(r)$, generada por una distribución de masas continua $\rho(r)$. Para ver cómo se puede obtener esta ecuación (2.30) consulte [11, Tema 12, pag 173].
De hecho, dado que $d^3\mathbf{r}' = r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi'$ en coordenadas esféricas, esta ecuación (2.30) queda de la forma

$$\Phi(r,\theta) = -G \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho(r',\theta') r'^2 \sin\theta'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dr' d\theta' d\phi' \tag{2.31}$$

donde el lado derecho está evaluado en $\phi = 0$.
Sin embargo, como $\rho(r',\theta')$ es independiente de ϕ', la expresión de arriba se puede escribir de la forma

$$\Phi(r,\theta) = -2\pi G \int_0^\infty \int_0^\pi \rho(r',\theta') r'^2 \sin\theta' < |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} > dr' d\theta' \tag{2.32}$$

donde $< . >$ denota un promedio sobre el ángulo azimutal ϕ', donde recordemos que el promedio de una función viene dado por $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ y por lo tanto, el promedio de una constante es ella misma. Ahora bien, observemos que (puesto que $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = \sqrt{< \mathbf{r}' - \mathbf{r}, \mathbf{r}' - \mathbf{r} >}$)

$$|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^{-1} = (r^2 - 2\mathbf{r}'\mathbf{r} + r'^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{2.33}$$

y que

$$\mathbf{r}'\mathbf{r} = rr'F \tag{2.34}$$

donde, para $\phi = 0$,

$$F = \sin\theta \sin\theta' \cos\theta' + \cos\theta \cos\theta' \tag{2.35}$$

Y, por lo tanto, tenemos que

$$|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^{-1} = (r^2 - 2rr'F + r'^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{2.36}$$

Supongamos ahora que $r > r'$.
En este caso, nosotros podemos desarrollar $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^{-1}$ como una serie de potencias convergente en $\frac{r'}{r}$ de la siguiente forma

$$|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^{-1} = \frac{1}{r}\left[1 + (\frac{r'}{r})F + \frac{1}{2}(\frac{r'}{r})^2(3F^2 - 1) + O(\frac{r'}{r})^3\right] \tag{2.37}$$

Veamos ahora un pormedio de esta expresión sobre el ángulo azimutal $\phi^{'}$. Como $< 1 >= 1$, $< \cos\phi^{'} >= 0$ y $< \cos^2\phi^{'} >= \frac{1}{2}$ es fácil ver que

$$< F >= \cos\theta\cos\theta^{'} \tag{2.38}$$

y que

$$< F^2 >= \frac{1}{2}\sin^2\theta\sin\theta^{'} + \cos^2\theta\cos^2\theta^{'} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cos^2\theta^{'} - \frac{1}{2}\right) \tag{2.39}$$

Y, por lo tanto, según esto, tenemos que:

$$< |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^{-1} >=$$
$$\frac{1}{r}\left[1 + (\frac{r'}{r})\cos\theta\cos\theta^{'} + \frac{1}{2}(\frac{r'}{r})^2\left(\frac{2}{3}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cos^2\theta^{'} - \frac{1}{2}\right) + O(\frac{r'}{r})^3\right] \tag{2.40}$$

Ahora bien, como muy bien sabemos, los polinomios de Legendre vienen dados por la fórmula de Rodrigues de la forma

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.41}$$

Y, algunos de ellos son

$$P_0(x) = 1, \tag{2.42}$$

$$P_1(x) = x, \tag{2.43}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \tag{2.44}$$

etc. Además, también sabemos que los polinomios de Legendre cumplen la siguiente condición de ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \tag{2.45}$$

Recordemos también que los polinomios de Legendre forman un conjunto completo; es decir, que cualquier otra función (que tenga unas buenas propiedades en función de x) puede representarse como suma ponderada de los $P_n(x)$. Igualmente, cualquier otra función (que tenga unas buenas propiedades) en función de θ puede representarse como una suma ponderada de los $P_n(\cos\theta)$. Luego, una comparación de la ecuación (2.40) y las ecuaciones (2.42) - (2.44), hace razonable pensar el que, cuando $r > r'$, la expansión completa de $< |\mathbf{r'} - \mathbf{r}|^{-1} >$ sea de la forma

$$< |\mathbf{r'} - \mathbf{r}|^{-1} >= \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta^{'}) \tag{2.46}$$

Por otro lado, análogamente a lo que acabamos de hacer, cuando $r' > r$, podemos expresar $< |\mathbf{r'} - \mathbf{r}|^{-1} >$ en potencias de $\frac{r}{r'}$ de la forma

$$< |\mathbf{r'} - \mathbf{r}|^{-1} >= \frac{1}{r'}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta^{'}) \tag{2.47}$$

Luego, de las ecuaciones (2.32), (2.46) y (2.47), obtenemos que:

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(r)P_n(\cos\theta) \tag{2.48}$$

donde

$$\Phi_n(r) = \frac{-2\pi G}{r^{n+1}}\int_0^r\int_0^\pi \rho(r',\theta^{'})r'^{n+2}\sin\theta^{'}P_n(\cos\theta^{'})\,dr'd\theta^{'} -$$

$$-2\pi G r^n\int_r^\infty\int_0^\pi \rho(r',\theta^{'})r'^{1-n}\sin\theta^{'}P_n(\cos\theta^{'})\,dr'd\theta^{'} \tag{2.49}$$

Además, como los $P_n(\cos\theta)$ forman un conjunto completo, nosotros siempre podemos escribir

$$\rho(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho(r)P_n(\cos\theta) \tag{2.50}$$

Ahora bien, observemos que, con la ayuda de la ecuación (2.45), los coeficientes de esta expresión (2.50) pueden ser calculados de la siguiente forma

$$\rho(r) = (n+\frac{1}{2})\int_0^\pi \rho(r,\theta)\sin\theta P_n(\cos\theta)\,d\theta \tag{2.51}$$

Lo cual implica que la expresión (2.49) queda reducida a la forma:

$$\Phi_n(r) = \frac{-2\pi G}{(n+\frac{1}{2})r^{n+1}}\int_0^r r'^{n+2}\rho(r')\,dr' - \frac{2\pi G r^n}{n+\frac{1}{2}}\int_r^\infty r'^{1-n}\rho(r')\,dr' \tag{2.52}$$

y, con ello, que ya tenemos una expresión general para el potencial gravitacional $\Phi(r,\theta)$ generada por cualquier distribución de masas con simetría axial $\rho(r,\theta)$.// Una vez visto esto, volvamos a lo que nos interesa, que es calcular el potencial gravitatorio generado fuera de un esferoide de densidad de masa uniforme γ y radio a. Recordemos que un esferoide es un cuerpo sólido producido por la rotación de una elipse alrededor de uno de los dos ejes de abcisas (ya sea el mayor ó el menor). Supongamos que el eje de rotación coincide con el eje z y que el límite exterior del esferoide satisfaga la relación

$$r = a\left[1 - \frac{2}{3}\epsilon P_2(\cos\theta)\right] = \beta_\theta \tag{2.53}$$

donde ϵ es llamado la excentricidad.
Aquí, nosotros estamos asumiendo que $|\epsilon| << 1$, lo cual implica que el esferoide está muy cerca de ser una esfera. Si $\epsilon > 0 \Rightarrow$ el esferoide es ligeramente aplastado a lo largo del eje de simetría y es denomiado achatada. De la misma manera, si $\epsilon < 0 \Rightarrow$ el esferoide es ligeramente alargada a lo largo del eje y se denomina prolato. Obviamente, si $\epsilon = 0 \Rightarrow$ el esferoide se reduce completamente a una esfera.
Ahora bien, de acuerdo con las ecuaciones (2.48) y (2.49), el potencial gravitacional generado fuera de una distribución de masas con simetría axial (es decir, cuando $r' > r$) se puede escribir de la forma

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} \tag{2.54}$$

donde

$$J_n = -2\pi G \int_0^r \int_0^\pi \rho(r,\theta) r^{n+2} \sin\theta P_n(\cos\theta)\, dr d\theta \tag{2.55}$$

(ya que fuera del esferoide, la masa se hace prácticamente 0).

Aquí, la integral se toma sobre toda la sección transversal de la distribución en el espacio $r - \theta$. Luego, de ello se deduce que, para un esferoide uniforme, tenemos que:

$$J_n = -2\pi G\gamma \int_0^\pi P_n(\cos\theta)\sin\theta \int_0^{\beta_\theta} r^{n+2}\, dr d\theta \tag{2.56}$$

Por tanto, resolviendo la integral

$$\int_0^{\beta_\theta} r^{n+2}\, dr = \left[\frac{r^{3+n}}{3+n}\right]_0^{\beta_\theta} = \frac{\beta_\theta^{3+n}}{3+n}$$

tenemos que:

$$J_n = -\frac{2\pi G\gamma}{3+n}\int_0^\pi P_n(\cos\theta)\sin\theta\beta_\theta^{3+n}\,d\theta \tag{2.57}$$

y, sustituyendo β_θ por su expresión (2.53), tenemos que:

$$J_n \simeq -\frac{2\pi G\gamma a^{3+n}}{3+n}\int_0^\pi P_n(\cos\theta)\sin\theta\left[P_0(\cos\theta) - \frac{2}{3}(3+n)\epsilon P_2(\cos\theta)\right]d\theta \tag{2.58}$$

para la primera potencia de ϵ.

Por otro lado, debido a la relación de ortogonalidad (2.45) de los polinomios de Legendre, es claro que, para la primera potencia de ϵ, los dos únicos J_n distintos de 0 son:

$$J_0 = -\frac{2\pi G\gamma a^3}{3}\int_0^\pi P_0(\cos\theta)\sin\theta\left[P_0(\cos\theta) - \frac{2}{3}3\epsilon P_2(\cos\theta)\right]d\theta =$$

$$= -\frac{2\pi G\gamma a^3}{3}\int_0^\pi P_0^2(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta =$$

$$= -\frac{2\pi G\gamma a^3}{3}\frac{2}{1} = -\frac{4\pi G\gamma a^3}{3} = -GM \tag{2.59}$$

y

$$J_2 = -\frac{2\pi G\gamma a^5}{5}\int_0^\pi P_2(\cos\theta)\sin\theta\left[P_0(\cos\theta) - \frac{2}{3}5\epsilon P_2(\cos\theta)\right]d\theta =$$

$$= -\frac{2\pi G\gamma a^5}{5}\int_0^\pi P_2^2(\cos\theta)\sin\theta - \frac{10}{3}\epsilon\,d\theta = \frac{20\pi G\gamma a^5}{25}\int_0^\pi P_2^2(\cos\theta)\sin\theta\epsilon\,d\theta =$$

$$= \frac{20\pi G\gamma a^5}{15}\frac{2}{5}\epsilon = \frac{8\pi G\gamma a^5}{15}\epsilon = \frac{2}{4}GMa^2\epsilon \tag{2.60}$$

donde

$$M := \frac{4\pi}{3}a^3\gamma$$

Por tanto, el potencial gravitacional fuera de un esferoide uniforme de masa total M, con radio a y excentricidad ϵ viene dado por

$$\Phi(r,\theta) = -\frac{GM}{r} + \frac{2}{5}\frac{GMa^2}{r^3}\epsilon P_2(\cos\theta) + O(\epsilon^2) \tag{2.61}$$

En particular, el potencial gravitacional en la superficie del esferoide viene dada por

$$\Phi(\beta_\theta,\theta) = -\frac{GM}{\beta_\theta} + \frac{2}{5}\frac{GMa^2}{\beta_\theta^3}\epsilon P_2(\cos\theta) + O(\epsilon^2) \tag{2.62}$$

donde, sustituyendo β_θ por su expresión (2.53), obtenemos que:

$$\Phi(\beta_\theta, \theta) \simeq -\frac{GM}{a}\left[1 + \frac{4}{15}\epsilon P_2(\cos\theta) + O(\epsilon^2)\right] \tag{2.63}$$

Consideremos ahora un esferoide autogravitante de masa M, radio a y con excentricidad ϵ; por ejemplo, una estrella ó un planeta. Supongamos, por motivos de simplicidad, que el esferoide está compuesto de un fluido incomprensible de densidad uniforme y que su potencial gravitacional en su superficie viene dado por la expresión (2.63). Sin embargo, la condición para un estado de equilibrio es que el potencial debe der ser constante a lo largo de la superficie. Si éste no es el caso, entonces no habrá fuerzas gravitatorias que actúen tangencialmente a la superficie. Tales fuerzas no podrán ser compensadas por la presión interna, la cuál sólo actúa como una fuerza normal a la superficie.

Por lo tanto, a partir de (2.63), es evidente que la condición de equilibrio es cuando $\epsilon = 0$. En otras palabras, la configuración de equilibrio de una masa autogravitante es la esfera. Las desviaciones de esta configuración sólo pueden ser causadas por fueras (además de la propia gravedad y de la presión interna) como, por ejemplo, las fuerzas centrífugas, debido a la rotación ó las fuerzas de marea debido a las masas en órbita.

Capítulo 3

Los polinomios de Hermite.

3.1. Introducción y definición.

Los polinomios de Hermite son una secuencia de polinomios ortogonales clásicos que surgen en la probabilidad, por ejemplo, en la serie de Edgeworth, y en la física, donde dar lugar a los estados propios del oscilador armónico cuántico del cuál hablaremos al final de este capítulo. Estos polinomios llevan el nombre en honor al matemático francés Charles Hermite.

Observación 3.1.1 *Los polinomios de Hermite se pueden definir de la forma física ($H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$) ó de la forma probabilística ($H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{\frac{-x^2}{2}}$); donde ambas definiciones no son exactamente iguales; se tiene la siguiente relación entre ellos*

$$H_n^{phys}(x) = 2^{\frac{n}{2}} H_n^{prob}(\sqrt{2}x).$$

En este trabajo, sólo vamos a trabajar con los polinomios de Hermite de forma física, pero he mencionado esta observación para saber que los polinomios de Hermite se pueden definir de otra forma, donde las propiedades que cumpla una, las cumple la otra, pero con sus respectivos cambios.

Los polinomios de Hermite aparecen por primera vez a raíz de la resolución del problema del oscilador armónico unidimensional de Mecánica Cuántica. Éstos están definidos en toda la recta real; es decir, su dominio será $x \in (-\infty, \infty)$. Por tanto, para garantizar que la norma de los vectores en este espacio vectorial sea finita, la función peso (que recordemos que venía dada por $p(x)$) en el producto interno dado al principio del trabajo en la sección de propiedades generales debería decrecer más rápido que $|x|^n$. La función más sencilla que cumple estos requisitos es $p(x) = e^{-x^2}$. Por tanto, el producto interno mencionado anteriormente, para estos polinomios de Hermite se puede definir como

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)f(x)g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)g(x)\,dx.$$

Es decir,

Definición 3.1.2 *Debido a las fórmulas de Rodrigues y al peso que hemos considerado anteriormente, se definen los polinomios de Hermite mediante la expresión*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad \textit{para} \quad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{3.1}$$

Luego, $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ son polinomios de grado n y de aquí se deduce que los primero polinomios de Hermite son: $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$,

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12,$$
$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x,$$
$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120, \ldots$$

3.2. Función generatriz y algunas propiedades básicas.

Coonsideremos la función

$$G(x,t) = e^{t^2} e^{-(t-x)^2}. \tag{3.2}$$

Desarrollando el cuadrado, tenemos que:

$$G(x,t) = e^{t^2} e^{-(t^2-2tx+x^2)} = e^{t^2-t^2+2tx-x^2} = e^{2tx-x^2} \tag{3.3}$$

y, desarrollando esta expresión en su desarrollo en serie de Taylor, tenemos que (puesto que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$)

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(t)}{n!} x^n \quad \text{donde} \quad A_n(t) = \left.\frac{\partial^n G}{\partial x^n}\right|_{x=0}$$

De la identidad formal $\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial (t-x)}$ se tiene que

$$A_n(t) = \left.\frac{\partial^n G}{\partial x^n}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^n G}{\partial (t-x)^n}(-1)^n\right|_{x=0}$$

$$= e^{t^2} \frac{\partial^n}{\partial(t-x)^n} e^{-(t-x)^2} (-1)^n \Big|_{x=0} = e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} (-1)^n = H_n(t)$$

Lo cual implica que

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^n \Leftrightarrow e^{2tx-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^n \tag{3.4}$$

Así $G(x,t) = e^{2tx-x^2}$ es la función generatriz de los polinomios de Hermite.

Veamos ahora una serie de propiedades básicas de estos polinomios de Hermite que se obtienen a partir de esta función generatriz. Comencemos observando que si se desarrolla la expresión (3.3) en serie de potencias de t, obtenemos que

$$G(x,t) = e^{2tx-x^2} = e^{2xt} e^{-t^2} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2xt)^r}{r!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^k}{k!} = \sum_{r,k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^r}{r!k!} t^{r+2k}$$

de donde haciendo $r + 2k = n$ obtenemos que

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

con

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k} \tag{3.5}$$

Luego, de ésta expresión (3.5), se deduce que $H_n(x)$ es un polinomio de grado n y, además, que $H_n(x)$ tiene la paridad de n; es decir, que se verifica que

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \tag{3.6}$$

que

$$H_{2n+1}(0) = 0 \tag{3.7}$$

y que

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \tag{3.8}$$

3.3. Relaciones de recurrencia.

Observemos de la sección anterior que el desarrollo de $G(x,t)$ en potencias de t es uniformemente convergente con respecto a x sobre todo el intervalo finito; lo cual quiere decir que esta función $G(x,t)$ es derivable término a término. Ahora bien, tenemos dos posibilidades con las cuales podemos derivar la función $G(x,t)$. Derivando respecto de t y respecto de x. Estudiamos ambos casos por separado:

Caso 1. De la expresión (3.4), derivando a ambos lados con respecto a t, tenemos que:

$$2xe^{2tx-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(t)}{n!} x^n \Leftrightarrow 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(t)}{n!} x^n$$

Reordenando la suma en el lado derecho de la última expresión para poder tener las mismas potencias en ambas series, observemos que tenemos que:

$$2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^{n+1} = H_0'(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}'(t)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

de donde comparando los coeficientes de las potencias de x en cada serie, obtenemos que

$$H_0'(t) = 0$$

y que

$$2H_n(t) = \frac{H_{n+1}'(t)}{n+1} \tag{3.9}$$

lo cual puede ser reescrito de la forma

$$2nH_{n-1} = H_n'(t) \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.10}$$

Observación 3.3.1 *Aunque en un principio sólo tiene sentido considerar los polinomios de Hermite con índice positivo, la expresión (3.10) puede ser extendida a $n = 0$, aunque esto haga aparecer un factor $H_{n-1}(x)$. En general, las relaciones de recurrencia que obtendremos en este capítulo pueden considerarse válidas para cualquier índice entero, adoptando la convención de que los polinomios con subíndices negativos tomen un valor adecuado, como por ejemplo, cero.*

Caso 2. De la expresión (3.4), derivando a ambos lados con respecto a x, tenemos que:

$$(2t-2x)e^{2tx-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} nx^{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(t)}{n!}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(t)}{n!}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{n+1}(t)}{n!}x^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(t)}{n!}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{n-1}(t)}{(n-1)!}x^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{n+1}(t)}{n!}x^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(t)}{n!}x^n - 2n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{n-1}(t)}{n!}x^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{n+1}(t)}{n!}x^n \Leftrightarrow$$

Por tanto, comparando los coeficientes de las potencias de x en cada serie, obtendremos que:

$$2tH_0(t) = H_1(t) \quad \text{para} \quad n = 0$$

$$2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t) = H_{n+1}(t) \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots$$

O, si tenemos en cuenta la observación 3.3.1 citada anteriormente, obtendríamos que

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t) \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, 3... \tag{3.11}$$

Observemos además que, juntando (3.10) y (3.11), podemos obtener una tercera fórmula de recurrencia dada por

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - H_n^{'}(t) \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.12}$$

Derivando esta expresión (3.12) respecto de t, tenemos que:

$$H_{n+1}^{'}(t) = 2H_n(t) + 2tH_n^{'}(t) - H_n^{''}(t)$$

y sustituyendo en esta última expresión la expresión (3.9), tenemos que:

$$2(n+1)H_n(t) = 2H_n(t) + 2tH_n^{'}(t) - H_n^{''}(t)$$

Es decir, que

$$H_n^{''}(t) - 2tH_n^{'}(t) + 2nH_n(t) = 0 \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.13}$$

Es decir, los polinomios de Hermite $H_n(t)$ son una solución de la ecuación de Hermite

$$y^{''}(t) - 2ty^{'}(t) + 2ny = 0 \tag{3.14}$$

3.4. Ortogonalidad.

Pasamos a continuación a tratar un tema común para todos los polinomios que estamos tratanto y, en especial, para los polinomios de Hermite, la ortogonalidad. Para ello, vamos a demostrar que la familia de polinomios $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal con respecto al peso $p(x) = e^{-x^2}$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. En otras palabras, veamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = 0 \quad \text{para} \quad n \neq m \tag{3.15}$$

Demostración. Sabemos que una de las soluciones de la ecuación de Hermite (3.14) son los polinomios de Hermite. Luego, haciendo el cambio de variable

$$y = e^{\frac{x^2}{2}} u$$

tenemos que la expresión (3.14) queda de la forma siguiente (puesto que $y' = e^{\frac{x^2}{2}} xu + e^{\frac{x^2}{2}} u'$ y $y'' = e^{\frac{x^2}{2}} xxu + e^{\frac{x^2}{2}} u + e^{\frac{x^2}{2}} xu' + e^{\frac{x^2}{2}} u''$)

$$e^{\frac{x^2}{2}} xxu + e^{\frac{x^2}{2}} u + e^{\frac{x^2}{2}} xu' + e^{\frac{x^2}{2}} u'' - 2xe^{\frac{x^2}{2}} xu + e^{\frac{x^2}{2}} u' + 2ne^{\frac{x^2}{2}} u = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\frac{x^2}{2}} (x^2 u + u + xu' + u'x + u'' - 2x^2 u - 2xu' + 2nu) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u'' + (x^2 + 1 - 2x^2 + 2n)u = 0$$

Es decir, tenemos que

$$u'' + (2n + 1 - x^2)u = 0 \tag{3.16}$$

donde obviamente, por el comentario anterior, $u_n(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} H_n(x)$ es solución de la ecuación (3.16). Luego, según esto, tenemos que $u_n(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} H_n(x)$ y $u_m(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} H_m(x)$ satisfacen respectivamente las ecuaciones

$$u_n'' + (2n + 1 - x^2)u_n = 0 \tag{3.17}$$

y

$$u_m'' + (2n + 1 - x^2)u_m = 0 \tag{3.18}$$

Multiplicando la ecuación (3.17) por u_m y la (3.18) por u_n tenemos que:

$$u_m u_n'' + (2n + 1 - x^2)u_n u_m = 0 \tag{3.19}$$

y

$$u_n u_m'' + (2n + 1 - x^2)u_m u_n = 0 \tag{3.20}$$

Luego, restando (3.19) y (3.20) tenemos que

$$u_m u_n'' + (2n+1-x^2)u_n u_m - u_n u_m'' - (2n+1-x^2)u_m u_n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (u_m u_n'' - u_n u_m'') + (2n+1-x^2-2m-1+x^2)u_n u_m = 0$$

Es decir, que se verifica que

$$\frac{d}{dx}(u_m u_n' - u_n u_m') + 2(n-m)u_n u_m = 0 \tag{3.21}$$

E integrando esta expresión (3.21) sobre $(-\infty, \infty)$, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}(u_m u_n' - u_n u_m') + 2(n-m)u_n u_m \, dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}(u_m u_n' - u_n u_m') \, dx + 2(n-m) \int_{-\infty}^{\infty} u_n u_m \, dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big[u_m u_n' - u_n u_m'\Big]_{-\infty}^{\infty} + 2(n-m) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} H_n(x) e^{\frac{-x^2}{2}} H_m(x) \, dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(n-m) \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} H_n(x) H_m(x) \, dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-m) \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} H_n(x) H_m(x) \, dx = 0 \tag{3.22}$$

De donde, si $n \neq m$ obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} H_n(x) H_m(x) \, dx = 0$$

lo cual implica que la sucesión de polinomios $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal, que es lo que queríamos demostrar. ■

Observación 3.4.1 *El valor*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)^2 \, dx = 2^n n \sqrt{\pi} \delta_{nm} \tag{3.23}$$

puede obtenerse a partir de la fórmula de recurrencia y una tediosa manipulación que omitimos por falta de espacio, pero que podemos encontrar en el Apéndice 4.

3.5. Conexión con el oscilador armónico cuántico.

Para cerrar este capítulo de polinomios de Hermite, vamos a mostrar la conexión de los polinomios de Hermite con el oscilador armónico cuántico. En primer lugar, el análogo del oscilador armónico cuántico clásico en la mecánica cuántica es descrito por la ecuación de Schrödinger de la forma

$$\psi'' + \frac{2m}{h^2}(E - V(y))\psi = 0 \tag{3.24}$$

donde ψ es el estado de una partícula de masa m en el potencial $V(y)$, con la energía E.
Supongamos que el potencial $V(y)$ tiene la forma $V(y) = y^2$ y, por lo tanto, consideramos la siguiente ecuación

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{2m}{h^2}(E - y^2))\psi = 0 \tag{3.25}$$

Para simplificar esta ecuación, vamos a hacer el cambio de variable $y = kx$ siendo k una constante. Por tanto, según esto, la ecuación (3.25) queda de la forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2mk^4}{h^2}x^2\psi = -\frac{2mk^2}{h^2}E\psi \tag{3.26}$$

donde ahora la diferenciación es con respecto a la nueva variable x.
Luego, eligiendo la constante k apropiadamente, nuestra ecuación se queda de la forma

$$\psi'' - x^2\psi = -\beta\psi \tag{3.27}$$

donde $\beta =: \sqrt{\frac{2m}{h^2}}E$ y queda evidente que la derivación sigue siendo respecto de x
La ecuación (3.27) es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables. Para revolver esta ecuación, primero observemos que $\varphi(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\psi'' - x^2\psi = -\psi$$

Luego, vamos a buscar soluciones de la forma

$$\varphi_n(x) = \varphi(x)H(x) \tag{3.28}$$

que es lo que corresponde esencialmente al método de variación de los parámetros, donde aquí $\varphi(x)$ es la solución definida arriba y $H(x)$ es una función que está por determinar.

Para encontrar la forma de $H(x)$, sustituimos el valor de $\varphi_n(x)$ dado en (3.28) en la ecuación (3.27), de donde obtenemos que se verifica que:

$$-\beta(\varphi(x)H(x)) = (\varphi(x)H(x))^{''} - x^2(\varphi(x)H(x)) =$$

$$= \varphi^{''}(x)H(x) + \varphi^{'}(x)H^{'}(x) + \varphi^{'}(x)H^{'}(x) + \varphi(x)H^{''}(x) - x^2\varphi(x)H(x)$$

Sustituyendo $\varphi(x)$ por su valor, tenemos que:

$$e^{\frac{-x^2}{2}}x^2H(x) - e^{\frac{-x^2}{2}}H(x) - 2e^{\frac{-x^2}{2}}xH^{'}(x) +$$

$$+e^{\frac{-x^2}{2}}H^{''}(x) - x^2e^{\frac{-x^2}{2}}H(x) + \beta e^{\frac{-x^2}{2}}H(x) = 0$$

de donde obtenemos que(puesto que $e^{\frac{-x^2}{2}}$ no se anula):

$$H^{''}(x) - 2xH^{'}(x) + (\beta - 1)H(x) = 0 \tag{3.29}$$

Luego, considerando $\beta - 1 = 2n \Rightarrow \beta = \beta_n =: 2n + 1$ en (3.29), obtenemos nada menos que la ecuación diferencial de Hermite (3.13), cuyas soluciones sabemos que son los polinomios de Hermite; es decir, que $H(x) = H_n(x)$. ■

Observación 3.5.1 *Este método de obtener las soluciones de la ecuación no lineal no proporciona todas las soluciones de la ecuación no lineal. Pero se puede comprobar que cualquier otra solución de la ecuación que no venga dada por los polinomios de Hermite, no satisface la condición de que sea de cuadrado integrable y, por lo tanto, no podemos considerarla como solución.*

Capítulo 4

Los polinomios de Laguerre.

4.1. Introducción y definición

Los polinomios de Laguerre son una familia de polinomios ortogonales $\{L_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ en el intervalo $[0,\infty)$ con respecto al producto escalar definido por el peso $p(x) = e^{-x}$. A partir de la fórmula de Rodrigues, podemos definir los polinomios de Laguerre mediante la expresión

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \tag{4.1}$$

Observación 4.1.1 *Los polinomios de Laguerre tienen una generalización denominada polinomios generalizados de Laguerre y que viene dada por la expresión*

$$L_n^{\alpha}(x) = x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha} e^{-x}) \quad para \quad \alpha > -1 \tag{4.2}$$

la cual utilizaremos en algunos apartados de este capítulo para obtener algunas propiedades más fácilmente. Observamos que los polinomios clásicos de Laguerre se obtienen con $\alpha = 0$.

Ahora bien, por la regla de Leibniz para la derivada n-ésima de un producto de funciones tenemos las siguientes expresiones para los polinomios de Laguerre

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} x^n \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} e^{-x} =$$

$$= e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} x^n = e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} n(n-1)...(k+1)x^k =$$

$$= e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} n(n-1)...(n-k+1) x^{n-k} e^{-x} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} n(n-1)...(n-k+1) x^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{(n!)^2}{k!((n-k)!)^2} x^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{[n(n-1)...(n-k+1)]^2}{k!} x^{n-k} =$$

$$= (-1)^n \left(x^n - \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} - ... + (-1)^n n! \right) =$$

$$= 1 - \binom{n}{1} \frac{x}{1!} + \binom{n}{2} \frac{x^2}{2!} - ... \pm \binom{n}{n} \frac{x^n}{n!} \tag{4.3}$$

donde en cada ocasión, eligiremos la que mejor nos convenga para la sencillez de las cuentas. Según este desarrollo de los polinomios de Laguerre, observamos que los primero polinomios de Laguerre son de la forma siguiente: $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$, $L_2(x) = x^2 - 4x + 2$,

$$L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 16,$$

$$L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24.$$

Observación 4.1.2 *Haciendo cuentas análogas, de la fórmula (4.2) obtenemos que el desarrollo para los polinomios generalizados de Laguerre es de la forma*

$$L_n^{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!(n+\alpha)!}{k!(n-k)!(\alpha+k)!} x^k \tag{4.4}$$

Observemos además que los polinomios de Laguerre generalizados verifican que

$$L_n^{\alpha}(0) = \frac{(n+\alpha)!}{\alpha!} \tag{4.5}$$

ya que sabemos que cuando sustituimos una sucesión de polinomios en x descrita como una serie dependiente de x, cuando sustituimos x por el 0, el único elemento que sobrevive es el que tiene x^0. Luego, como en la expresión (4.4) el término x^0 se obtiene cuando $k = 0$, tenemos que

$$L_n^{\alpha}(0) = (-1)^0 \frac{n!(n+\alpha)!}{0!(n-0)!(\alpha+0)!} = \frac{n!(n+\alpha)!}{n!\alpha!} = \frac{(n+\alpha)!}{\alpha!} \blacksquare$$

4.2. Función generatriz

En esta sección estudiamos la función generatriz de los polinomios de Laguerre. Para ello, afirmamos que los polinomios de Laguerre tienen una función generatriz dada por

$$G(x,t) = \frac{1}{1-t}e^{\frac{-xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!}t^n \tag{4.6}$$

Para comprobarlo realizaremos transformaciones sucesivas hasta llegar a (4.6):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!}t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}\frac{n(n-1)...(k+1)}{n!}x^k t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}\frac{1}{k!}x^k t^n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}t^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k!}\frac{t^k}{(1-t)^{k+1}} = \frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k t^k}{k!(1-t)^k} =$$

$$= \frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{-xt}{1-t}\right)^k}{k!} = \frac{1}{1-t}e^{\frac{-xt}{1-t}}$$

como queríamos demostrar. ■

Observación 4.2.1 *Haciendo cuentas análogas, obtenemos que los polinomios generalizados de Laguerre tienen la función generatriz*

$$G_\alpha(x,t) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}e^{\frac{-xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^\alpha(x)}{n!}t^n \tag{4.7}$$

Veamos ahora las relaciones de recurrencia que verifican estos polinomios de Laguerre y sus polinomios generalizados.

4.3. Relaciones de recurrencia y ecuación de Laguerre

Observemos que, reescribiendo la ecuación (4.6), tenemos que

$$e^{\frac{-xt}{1-t}} = \frac{1}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^n \tag{4.8}$$

Luego, derivando esta expresión respecto de t a ambos lados, tenemos que:

$$e^{\frac{-xt}{1-t}}\left(\frac{-x(1-t)+xt(-1)}{(1-t)^2}\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^n+(1-t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}nt^{n-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\frac{-xt}{1-t}}\left(\frac{-x}{(1-t)^2}\right)=(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n(x)}{(n-1)!}t^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^n$$

Sustituyendo (4.8) en esta expresión, tenemos que:

$$\frac{-x}{(1-t)^2}(1-t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^n=(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n(x)}{(n-1)!}t^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^n=(1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n+1}(x)}{n!}t^n-(1-t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n+1}(x)}{n!}t^n-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n+1}(x)}{n!}t^{n+1}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n+1}(x)}{n!}t^{n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^{n+1}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n+1}(x)}{n!}t^n-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n(x)}{(n-1)!}t^n+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{L_{n-1}(x)}{(n-2)!}t^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n-1}(x)}{(n-1)!}t^n$$

De donde comparando coeficientes en t, tenemos que:

$$-x\frac{L_n(x)}{n!}=\frac{L_{n+1}(x)}{n!}-2\frac{L_n(x)}{(n-1)!}+\frac{L_{n-1}(x)}{(n-2)!}-\frac{L_n(x)}{n!}+\frac{L_{n-1}(x)}{(n-1)!}$$

y, realizando unas sencillas cuentas, obtenemos que:

$$\Rightarrow L_{n+1}(x)+L_n(x)(-2n-1+x)+n^2L_{n-1}(x)=0 \tag{4.9}$$

Observación 4.3.1 *Haciendo cuentas análogas con (4.7), obtenemos que*

$$\Rightarrow L_{n+1}^{\alpha}(x)-L_n^{\alpha}(x)(2n+1+\alpha-x)+n(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x)=0 \tag{4.10}$$

Observemos además que, de la ecuación (4.4), tenemos que:

$$nL_{n-1}^{\alpha} + L_n^{\alpha-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{n!(\alpha+n-1)!}{k!(n-1-k)!(\alpha+k)!} + \frac{n!(\alpha+n-1)!}{k!(n-k)!(\alpha-1+k)!} \right] x^k + (-1)^n x^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n!(\alpha+n-1)!}{k!(n-1-k)!(\alpha+k-1)!} \left(\frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{n-k} \right) x^k + (-1)^n x^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n!(\alpha+n-1)!}{k!(n-1-k)!(\alpha+k-1)!} \left(\frac{n-k+\alpha+k}{(\alpha+k)(n-k)} \right) x^k + (-1)^n x^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n!(\alpha+n)!}{k!(n-k)!(\alpha+k)!} x^k + (-1)^n x^n = L_n^{\alpha}(x)$$

Es decir, que se verifica que:

$$nL_{n-1}^{\alpha} + L_n^{\alpha-1} = L_n^{\alpha}(x) \tag{4.11}$$

Derivando esta expresión respecto de x, tenemos que:

$$\frac{d}{dx} L_n^{\alpha}(x) = n \frac{d}{dx} L_{n-1}^{\alpha} + \frac{d}{dx} L_n^{\alpha-1} \tag{4.12}$$

y, derivando la expresión (4.7) respecto de x, obtenemos que:

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{\frac{-xt}{1-t}} \frac{-t}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{d}{dx} L_n^{\alpha}(x)}{n!} t^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{\alpha}(x)}{n!} t^n \frac{-t}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{d}{dx} L_n^{\alpha}(x)}{n!} t^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{\alpha}(x)}{n!} t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{d}{dx} L_n^{\alpha}(x)}{n!} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{d}{dx} L_n^{\alpha}(x)}{n!} t^{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_{n-1}^{\alpha}(x)}{(n-1)!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{d}{dx} L_n^{\alpha}(x)}{n!} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{d}{dx} L_{n-1}^{\alpha}(x)}{(n-1)!} t^{n+1}$$

De donde comparando coeficientes en t, tenemos que:

$$-\frac{L_{n-1}^{\alpha}(x)}{(n-1)!} t^n = \frac{\frac{d}{dx} L_n^{\alpha}(x)}{n!} t^n - \frac{\frac{d}{dx} L_{n-1}^{\alpha}(x)}{(n-1)!} t^{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -nL_{n-1}^{\alpha}(x) = \frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x) - n\frac{d}{dx}L_{n-1}^{\alpha}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow nL_{n-1}^{\alpha}(x) = n\frac{d}{dx}L_{n-1}^{\alpha}(x) - \frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x) \tag{4.13}$$

Es decir, reordenando, tenemos que:

$$n\frac{d}{dx}L_{n-1}^{\alpha}(x) = \frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x) + nL_{n-1}^{\alpha}(x) \tag{4.14}$$

Observemos además que, cambiando n por $n+1$ en (4.13), obtenemos que:

$$(n+1)L_n^{\alpha}(x) = (n+1)\frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x) - \frac{d}{dx}L_{n+1}^{\alpha}(x)$$

Es decir, que:

$$\frac{d}{dx}L_{n+1}^{\alpha}(x) = (n+1)\left(\frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x) - L_n^{\alpha}(x)\right) \tag{4.15}$$

Por otro lado, derivando respecto de x la expresión (4.10), tenemos que:

$$\frac{d}{dx}L_{n+1}^{\alpha}(x) - \left(-L_n^{\alpha}(x) + (2n+1+\alpha-x)\frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x)\right) +$$

$$+n(n+\alpha)\frac{d}{dx}L_{n-1}^{\alpha}(x) = 0 \tag{4.16}$$

Luego, sustituyendo (4.14) y (4.15) en (4.16), obtenemos que:

$$(n+1)\frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x) - (n+1)L_n^{\alpha}(x) + L_n^{\alpha}(x) - (2n+1+\alpha-x)\frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x) +$$

$$+(n+\alpha)\frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x) + n(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x) = 0$$

de donde desarrollando, obtenemos que:

$$x\frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x) - nL_n^{\alpha}(x) + n(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x) = 0 \tag{4.17}$$

Ahora bien, de esta ecuación (4.17), obtenemos que, por un lado (teniendo en cuenta (4.13))

$$x\frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x) - nL_n^{\alpha}(x) + n(n+\alpha)\frac{d}{dx}L_{n-1}^{\alpha}(x) - (n+\alpha)\frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x) = 0$$

de donde se obtiene que

$$n(n+\alpha)\frac{d}{dx}L_{n-1}^{\alpha}(x) = nL_n^{\alpha}(x) + \frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x)(n+\alpha-x) \tag{4.18}$$

y, por otro lado, derivando la ecuación (4.17) respecto de x y utilizando (4.18), tenemos que:

$$\frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x) + x\frac{d^2}{dx^2}L_n^{\alpha}(x) - n\frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x) + n(n+\alpha)\frac{d}{dx}L_{n-1}^{\alpha}(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\frac{d^2}{dx^2}L_n^{\alpha}(x) + \frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x) - n\frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x) + nL_n^{\alpha}(x) + \frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x)(n+\alpha-x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\frac{d^2}{dx^2}L_n^{\alpha}(x) + (\alpha+1-x)\frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x) + nL_n^{\alpha}(x) = 0$$

Es decir, que $L_n^{\alpha}(x)$ es solución de la ecuación de Laguerre generalizada

$$xy^{''} + (\alpha+1-x)y^{'} + ny = 0$$

y, en particular, para $\alpha = 0$, obtenemos que los polinomios de Laguerre $L_n(x)$ son soluciones de la ecuación de Laguerre

$$xy^{''} + (1-x)y^{'} + ny = 0 \tag{4.19}$$

Ahora bien, consideremos la ecuación (4.19), pero en una forma más general; es decir, consideremos

$$xy^{''} + (1-x)y^{'} + \lambda y = 0$$

Luego, buscando soluciones del tipo

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

es fácil demostrar que los a_n satisfacen la siguiente relación de recurrencia

$$a_{n+1} = \frac{n-\lambda}{(n+1)^2}a_n$$

4.4. Ortogonalidad

Aplicaremos el Teorema 1.4.1 para comprobar la ortogonalidad respecto al peso $p(x) = e^{-x}$. Es decir, tenemos que ver que la integral

$$I = \int_0^{+\infty} G(x,t)G(x,t^{'})p(x)\,dx$$

depende sólo del producto $tt^{'}$. En efecto

$$I = \int_0^{+\infty} G(x,t)G(x,t^{'})p(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-t}e^{\frac{-xt}{1-t}}\frac{1}{1-t^{'}}e^{\frac{-xt^{'}}{1-t^{'}}}e^{-x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-t^{'})}\int_0^{+\infty} e^{-x\left(\frac{t}{1-t}+\frac{t^{'}}{1-t^{'}}+1\right)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-t^{'})}\int_0^{+\infty} e^{-x\left(\frac{(1-t^{'})t+(1-t)t^{'}+(1-t)(1-t^{'})}{(1-t)(1-t^{'})}\right)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-t^{'})}\int_0^{+\infty} e^{-x\left(\frac{t-t^{'}t+t^{'}-t^{'}t+1-t^{'}-t+t^{'}t}{(1-t)(1-t^{'})}\right)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-t^{'})}\int_0^{+\infty} e^{-x\left(\frac{1-t^{'}t}{(1-t)(1-t^{'})}\right)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-t^{'})}\left[e^{-x}\left(\frac{1-t^{'}t}{(1-t)(1-t^{'})}\right)\frac{(1-t)(1-t^{'})}{1-t^{'}t}\right]_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-t^{'})}\frac{(1-t)(1-t^{'})}{1-t^{'}t}(-1) = \frac{1}{tt^{'}-1}$$

Lo cual implica que I sólo depende del producto $tt^{'}$ y, por el teorema mencionado anteriormente, obtenemos que la familia de polinomios de Laguerre es ortogonal.
Haciendo cuentas análogas, obtenemos que para los polinomios generalizados de Laguerre $L_n^{\alpha}(x)$, la integral I queda de la forma

$$I = \frac{\alpha!}{(1-tt^{'})^{\alpha+1}} \tag{4.20}$$

de donde se deduce que, aplicando de nuevo el teorema mencionado anteriormente, éstos también son ortogonales.
Ahora bien, observemos que

$$(1-tt^{'})^{-\alpha-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha-1)(-\alpha-2)...(-\alpha-n)}{n!}(tt^{'})^{n}(-1)^{n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n)}{n!}(tt^{'})^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)!}{\alpha!n!}(tt^{'})^{n}$$

Luego, sustituyendo esta última expresión en (4.20), obtenemos que:

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha!(\alpha+n)!}{\alpha!n!}(tt^{'})^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)!}{n!}(tt^{'})^{n}$$

Por otro lado, el Teorema 1.4.1 mencionado anteriormente, nos dice que si $G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$, entonces

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\langle P_n(x),P_n(x)\rangle(tt^{'})^{n}$$

y que si $I=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, entonces

$$\langle P_n(x),P_n(x)\rangle=c_n$$

Luego, como en este caso tenemos que $G_\alpha(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^\alpha(x)}{n!}t^n$, el Teorema 1.4.1 nos dice que

$$\langle\frac{L_n^\alpha(x)}{n!},\frac{L_n^\alpha(x)}{n!}\rangle=\frac{(\alpha+n)!}{n!}\Rightarrow\langle L_n^\alpha(x),L_n^\alpha(x)\rangle=n!(\alpha+n)!$$

Lo cual implica que la ortogonalidad de los polinomios de Laguerre viene dada por

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}L_n(x)L_m(x)\,dx=(n!)^2\delta_{nm}\tag{4.21}$$

4.5. Relaciones entre los polinomios $L_n^\alpha(x)$ y $H_n(x)$

Antes de nada, recordemos cómo se puede calcular el factorial de un número semientero. Para cualquier $z\in\mathbb{C}$ tal que $Rez>-1$, sabemos que se verifica que:

$$\sqrt{\pi}(2z)!=2^{2z}z!(z-\frac{1}{2})!$$

o, equivalentemente, multiplicando por $2z+1$ a ambos lados, tenemos que

$$\sqrt{\pi}(2z+1)! = 2^{2z+1} z!(z+\frac{1}{2})! \tag{4.22}$$

Luego, observemos que esta fórmula (4.22) permite el cálculo de factoriales semienteros de la siguiente manera:

$$(n+\frac{1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi}(2n+1)!}{2^{2n+1} n!} \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.23}$$

Cosideremos ahora el polinomio $L_n^{\frac{1}{2}}(x^2)$. Luego, según (4.4), tenemos que

$$L_n^{\frac{1}{2}}(x^2) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!(n+\frac{1}{2})!}{k!(n-k)!(\frac{1}{2}+k)!} x^{2k} \tag{4.24}$$

Pero ahora bien, por (4.23), observemos que se verifica que

$$\frac{n!(n+\frac{1}{2})!}{k!(k+\frac{1}{2})!} = \frac{2^{2k+1}(2n+1)!}{2^{2n+1}(2k+1)!}$$

Luego, según esto, tenemos que (multiplicando por x a ambos lados de (4.24))

$$xL_n^{\frac{1}{2}}(x^2) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^{2k+1}(2n+1)!}{(2k+1)!(n-k)!} x^{2k+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{2n+1} x L_n^{\frac{1}{2}}(x^2) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2n+1)!}{(2k+1)!(n-k)!} (2x)^{2k+1} \tag{4.25}$$

Pero, por otra parte, de (3.5)), tenemos que:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{2n+1}{2}]} (-1)^k \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-2k)!} (2x)^{2n+1-2k}$$

y, haciendo el cambio de variable $k = n - r$, tenemos que

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \frac{(2n+1)!}{(n-r)!(2n+1-2n+2r)!} (2x)^{2n+1-2n+2r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_{2n+1}(x) = (-1)^n \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(2n+1)!}{(n-r)!(2r+1)!} (2x)^{2r+1} \tag{4.26}$$

de donde se deduce que, juntanto (4.25) y (4.26),

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} x L_n^{\frac{1}{2}}(x^2) \tag{4.27}$$

De la misma manera, si consideramos el polinomio $L_n^{-\frac{1}{2}}(x^2)$, se establece con facilidad la siguiente expresión

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} L_n^{-\frac{1}{2}}(x^2) \tag{4.28}$$

4.6. Aplicación de los polinomios de Laguerre

Sabemos que la transformada de Laplace de una función $f(t)$ definida para todos los números positivos $t \geq 0$, es la función $F(s)$ definida por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt$$

y se dice que F es la transformada de Laplace de f.
A principios del siglo XX, la transformada de Laplace se convirtió en una herramienta común de la teoría de vibraciones y de la teoría de circuitos, dos de los campos donde ha sido aplicada con más éxito. En general, la transformada es adecuada para resolver sistemas de ecuaciones lineales con condiciones iniciales en el origen.

Una de sus ventajas más significativas radica en que la integración y la derivación (operaciones analíticas) se convierte en multiplicación y división (operaciones algebraicas). Esto transforma las ecuaciones diferenciales e integrales en ecuaciones polinómicas, mucho más fáciles de resolver. Además, esta transformada es lineal. Debido a la gran importancia de estas transformadas de Laplace, las utilizamos como principal aplicación de los polinomios de Laguerre, ya que éstos son la función para la cuál la transformada de Laplace es más sencilla (obviamente después de la función x^n) y viene dada de la forma

$$\int_0^\infty L_n(x) e^{-tx}\, dx = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{t}\right)^n \tag{4.29}$$

Demostración. En esta ocasión, vamos a considerar la expresión de los polinomios de Laguerre dada por

$$L_n(x) = 1 - \binom{n}{1}\frac{x}{1!} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{2!} - ... \pm \binom{n}{n}\frac{x^n}{n!} \tag{4.30}$$

Para demostrar (4.29), vamos a calcular la transformada de Laplace de la función x^n y, como la transformada de Laplace es lineal, a partir de ella podemos obtener la de $L_n(x)$ gracias a la expresión (4.30). Luego, calculamos la transformada de Laplace de la función x^n.

$$y_n(t) = \int_0^\infty x^n e^{-xt}\,dx = \left[-x^n \frac{1}{t} e^{-xt}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{nx^{n-1}}{t} e^{-xt}\,dx =$$

$$= \frac{n}{t}\int_0^\infty x^{n-1} e^{-xt}\,dx = \frac{n}{t} y_{n-1}(t)$$

Observemos de esta última expresión que:

$$\text{Para } n = 0 \Rightarrow y_0(t) = \int_0^\infty e^{-xt}\,dx = \left[-\frac{1}{t}e^{-xt}\right]_0^\infty = \frac{1}{t}$$

$$\text{Para } n = 1 \Rightarrow y_1(t) = \int_0^\infty x e^{-xt}\,dx = \frac{1}{t} y_0(t) = \frac{1}{t^2}$$

$$\text{Para } n = 2 \Rightarrow y_2(t) = \int_0^\infty x^2 e^{-xt}\,dx = \frac{2}{t} y_1(t) = \frac{1}{t^3}$$

de donde haciendo un proceso de inducción, se puede comprobar fácilmente que

$$y_n(t) = \int_0^\infty x^n e^{-xt}\,dx = \frac{n!}{t^{n+1}} \tag{4.31}$$

Por tanto, como la transformada de Laplace es lineal, aplicando la transformada (4.31), obtenemos que la transformada de Laplace de (4.30) es de la forma siguiente:

$$\int_0^\infty L_n(x)e^{-tx}\,dx = \int_0^\infty \left(1 - \binom{n}{1}\frac{x}{1!} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{2!} - \ldots \pm \binom{n}{n}\frac{x^n}{n!}\right) e^{-tx}\,dx =$$

$$\frac{1}{t} - \binom{n}{1}\frac{1}{t^2} + \binom{n}{2}\frac{1}{t^3} - \ldots \pm \binom{n}{n}\frac{1}{t^{n+1}} =$$

$$\frac{1}{t}\left(1 - \binom{n}{1}\frac{1}{t} + \binom{n}{2}\frac{1}{t^2} - \ldots \pm \binom{n}{n}\frac{1}{t^n}\right)$$

donde, gracias a la fórmula del binomio de Newton, obtenemos que

$$\int_0^\infty L_n(x)e^{-tx}\,dx = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{t}\right)^n$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Esto es muy importante porque cualquier polinomio con coeficinetes constantes que se pueda expresar en función de los polinomios de Laguerre de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n$, como la transformada de Laplace es lineal, éste polinomio se puede expresar de la forma $\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(1 - \frac{1}{t}\right)^n$ lo cual es una expresión algebraica mucho más sencilla.

4.7. Completitud de los polinomios de Laguerre

La completitud de las funciones de Laguerre y de Hermite aún no las hemos estudiado, ya que hasta ahora, la completitud sólo ha sido probada para intervalos finitos y sabemos que estas funciones tienen un intervalo de definición infinito. Llamamos a un sistema de funciones en el intervalo $0 \leq x < \infty$ completo si cada función continua $f(x)$ para la cual la integral $\int_0^\infty f^2(x)\,dx$ existe, puede ser aproximada arbitrariamente bien en media por una combinación lineal de funciones. Ahora bien, vamos a estudiar la completitud de los polinomios de Laguerre y la de los polinomios de Hermite se obtendrán a partir de éstos haciendo un cambio de variable.

Para ello, observemos que estudiar la completitud de los polinomios L_n es equivalente a estudiar la completitud de las funciones

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)}{n!}$$

porque sabemos que tenemos un isomorfismo de $L^2_p[0,\infty]$ en $L^2[0,\infty]$ multiplicando una función por la raíz cuadrada de su peso(y nosotros sabemos que el peso considerado para los polinomios de Laguerre es e^{-x}). A estas funciones φ_n se les conoces como las funciones de Laguerre.
Por las propiedades que acabamos de ver, sabemos que los polinomios de Laguerre poseen una función generatriz que verifica que:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{1-t} e^{\frac{-xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n$$

Multiplicando a ambos lados por $e^{-\frac{x}{2}}$, tenemos que:

$$\frac{1}{1-t} e^{\frac{-xt}{1-t}} e^{-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n e^{-\frac{x}{2}}$$

de donde

$$g(x,t) := \frac{1}{1-t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)x} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi_n(x).$$

Observemos que la igualdad

$$g(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi_n(x) \tag{4.32}$$

es una igualdad en sentido puntual y nosotros lo que queremos ver es que sea una igualdad en $L^2[0,\infty]$. Por eso, no podemos poner a continuación la igualdad (4.32) como tal, porque ésta es puntual y queremos probarla para todo el espacio, donde la dificultad de esto es que, como el intervalo donde está definido es infinito, eso puede hacer que la convergencia sea infnita. Veamos que esto no ocurre.

Para ello, vamos a probar que la serie infinita $\sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi_n(x)$ converge en media(es decir, que es convergente en $L^2[0,\infty]$) a la función generatriz $g(x,t)$ para $|t| < 1$.

Para probar esto, vamos a ver que $g \in L^2[0,\infty]$, que $\sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi_n(x) \to h(x,t)$ en $L^2[0,\infty]$ y finalmente, vamos a ver que ese $h(x,t)$ al que converge $\sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi_n(x)$ en $L^2[0,\infty]$ es precisamente nuestra función g y, con ello, tendremos probada la igualdad (4.32) en $L^2[0,\infty]$. Lo comprobamos:

$$\int_0^{\infty} g^2(x,t)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1-t)^2} e^{-\left(\frac{1+t}{1-t}\right)x}\,dx =$$
$$= \frac{1}{(1-t)^2} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{1+t}{1-t}\right)x}\,dx = \frac{1}{(1-t)^2} \int_0^{\infty} e^{-s} \frac{1-t}{1+t}\,dx =$$
$$= \frac{1-t}{(1-t)^2(1+t)} \int_0^{\infty} e^{-s}\,dx = \frac{1}{(1-t)(1+t)} \left[-e^{-s}\right]_0^{\infty} =$$
$$= \frac{1}{1-t^2}(-0+1) = \frac{1}{1-t^2}$$

lo cual implica que $g \in L^2[0,\infty]$.

Ahora bien, sabemos que $\varphi_n(x)$ es una familia ortonormal en $L^2[0,\infty]$ (puesto que ya hemos visto que $L_n(x)$ es una familia ortogonal en $L_p^2[0,\infty]$ y cuál era su norma). Por tanto, cualquier función de cuadradro integrable por la que la multipliquemos hará que ésta sea convergente en la norma del espacio y, como la sucesión $(t^n)_n$ es de cuadrado sumable(puesto que $\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} = \frac{1}{1-t^2} < +\infty$ para $|t| < 1$), eso implica que $\sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi_n(x)$ converge a un cierto límite $h(x,t)$ en $L^2[0,\infty]$.

En particular las sumas parciales

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} t^k \varphi_k(x)$$

convergen a $h(x,t)$ en $L^2[0,\infty]$. Por un teorema de [5, Tema 3, Proposición 3.14] sabemos que existe una subsucesión $(S_{nj})_j$ tal que $S_{nj} \to h(x,t)$ en casi todo punto. Pero, por ser $(S_{nj})_j$ una subsucesión de $(S_n)_n$, por otro lado, tenemos que $S_{nj} \to g(x,t)$ en todo punto. Luego, como el límite es

único, tenemos que $g(x,t) = h(x,t)$ en casi todo punto, lo que demuestra la igualdad (4.32) en $L^2[0,\infty]$.
Con esto hemos visto que $\frac{1}{1-t}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi_n(x)$ ocurre en $L^2[0,\infty]$ para $|t| < 1$. Ahora bien, como $\frac{1+t}{1-t}$ es una función siempre positiva (para $|t| < 1$), para cualquier valor $\alpha > 0$, existirá un t tal que $\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$. Luego, para este valor de t, tendremos que:

$$e^{-\alpha x} = \frac{1}{cte} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi_n(x) \quad \text{en} \quad L^2[0,\infty] \tag{4.33}$$

Por últimno, vamos a ver que cualquier función de $L^2[0,\infty]$ se puede expresar en función de $e^{-\alpha x}$ y, como éstos se expresan en función de las funciones $\varphi_n(x)$ por (4.33), y éstas sabemos que sí son ortonormales en $L^2[0,\infty]$ y tenemos la isometría citada anteriormente, ya lo tendríamos. Por tanto, veamos que cualquier función de $L^2[0,\infty]$ se puede expresar en función de $e^{-\alpha x}$.
Para ello, supongamos que $f(x) \in L^2[0,\infty]$ es una función con soporte compacto y acotada(ya que sabemos que éstas son densas) y hacemos el cambio de variable $\lambda = e^{-x}$. Como $x \in [0,+\infty] \Rightarrow \lambda \in [1,0) \Rightarrow \lambda \in [0,1]$. Despejando x en función de λ, tenemos que

$$-x = \ln(\lambda) \Rightarrow x = -\ln(\lambda)$$

y, consideramos la función $f(x)$ anterior de tal forma que verifique que

$$f(-\ln(\lambda)) = k(\lambda) \tag{4.34}$$

con $k(\lambda)$ una función contina a trozos en el intervalo $[0,1]$.
Observemos que la función $\frac{k(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}$ es, por otra parte, una función de cuadrado integrable en $[0,1]$ y, por tanto, puede ser aproximada en media por una función continua a trozos $G(\lambda)$ en el intervalo cerrado $[0,1]$ (por ejemplo, podemos tomar $G(\lambda)$ idénticamente igual a 0 para un entorno suficientemente pequeño del origen e igual a $\frac{k(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}$ en el intervalo $[0,1]$).
Como $G(\lambda) \in L^2[0,\infty]$ (y, por lo tanto, también $\frac{k(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}$), sabemos que ésta se puede aproximar en media por polinomios algebraicos; es decir, que existe una suceción $(h_n(\lambda))_n$ de polinomios de la forma

$$h_n(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n$$

tales que

$$\int_0^1 \left(\frac{k(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} - h_n(\lambda)\right)^2 d\lambda \to 0 \tag{4.35}$$

Pero ahora bien, observemos que también $f(x)$ se puede aproximar en media en el intervalo $[0,\infty]$ por el polinomio algebraico

$$\sqrt{\lambda}h_n(\lambda) = e^{-\frac{x}{2}}(a_0 + a_1 e^{-x} + a_2 e^{-2x} + \cdots + a_n e^{-nx})$$

ya que de (4.35), obtenemos que:

$$\int_0^1 \Big(k(\lambda) - \sqrt{\lambda}h_n(\lambda)\Big)^2 \frac{1}{\lambda}\, d\lambda \to 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int_\infty^0 \Big(k(e^{-x}) - e^{-\frac{x}{2}}h_n(e^{-x})\Big)^2\, dx \to 0$$

y, por (4.34), tenemos que

$$\int_0^\infty \Big(f(x) - e^{-\frac{x}{2}}h_n(e^{-x})\Big)^2\, dx \to 0$$

Lo cual implica que $f(x)$ se puede aproximar por polinomios algebraicos y exponenciales lo cual termina la prueba por el razonamiento realizado anteriormente. ■

Observación 4.7.1 *La prueba de la completitud de los polinomios de Hermite se demuestra de manera similar a la que acabamos de hacer de los polinomios de Laguerre ó se puede reducir a la demostración de los polinomios de Laguerre generalizados mediante un cambio de variable.*

Capítulo 5

Los polinomios de Tchebycheff.

Los polinomios de Tchebycheff, descubiertos por el matemático ruso Pafnuti Cvóvich Tchebycheff(1821-1894), son polinomios de gran importancia en la teoría de aproximación de funciones, ya sea por interpolación o bien por ajuste en los llamados nodos de Tchebycheff (la raíces de estos polinomios).

5.1. Definición, función generatriz y propiedades básicas

Definición 5.1.1 *Los polinomios de Tchebycheff se pueden definir por la condición*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad \textit{para} \quad n \in \mathbb{N} \quad y \quad x \in [-1, 1] \tag{5.1}$$

o mediante la fórmula de Rodrigues, de la forma

$$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}) \quad \textit{para} \quad n \in \mathbb{N} \quad y \quad x \in [-1, 1] \tag{5.2}$$

Según esto, observemos que los primeros polinomios de Tchebycheff vienen dados por: $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$,

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \ldots$$

Observemos que estos polinomios de Tchebycheff $T_n(x)$ se pueden expresar a partir de la función generatriz

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n \tag{5.3}$$

(que no demostramos por la falta de espacio en el proyecto, pero que se hace de forma análoga a cómo lo hemos hecho en los otros polinomios) y, a partir de la cual, obtenemos que los polinomios $T_n(x)$ se pueden expresar de la forma

$$T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k} \tag{5.4}$$

Luego, a partir de estas dos expresiones (5.3) y (5.4), veamos ahora una serie de propiedades básicas que verifican estos polinomios de Tchebycheff que se deducen fácilmente a partir de su definición trigonométrica:

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x),$$

$$T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n,$$

$$T_{2n}(0) = (-1)^n, \quad T_{2n+1}(0) = 0.$$

$$T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x) = 2T_n(x)T_m(x) \tag{5.5}$$

Sólo la última merece comentar que procede de las fórmulas de adición para cosenos. Se puede aumentar el alcance de esta fórmula a cada $n, m \in \mathbb{N}$ con el convenio $T_{-n}(x) = T_n(x)$.

5.2. Fórmulas de recurrencia

Cuando los dos primeros polinomios de Tchebycheff $T_0(x)$ y $T_1(x)$ son conocidos, todos los demás polinomios $T_n(x)$ para $n \geq 2$ pueden ser obtenidos a partir de la fórmula de recurrencia

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{5.6}$$

En efecto, como la ecuación (5.5) es válida para cada $n, m \in \mathbb{N}$, en particular, también es válida para $n \in \mathbb{N}$ y $m = 1$. Por tanto, tomando $m = 1$ en (5.6), tenemos que:

$$T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x) = 2T_n(x)T_1(x) = 2xT_n(x) \Rightarrow T_{n+1}(x) = 2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$$

Otra relación de recurrencia que verifican estos polinomios $T_n(x)$ es la siguiente:

$$(1-x^2)T_n^{'}(x) = -nxT_n(x) + nT_{n-1}(x) \tag{5.7}$$

Para demostrar la igualdad (5.7), hacemos el siguiente cambio de variable

$$\phi = \arccos x$$

Entonces,

$$x = \cos\phi \Rightarrow 1 = \sin(\phi)\phi^{'} \Rightarrow \phi^{'} = \frac{-1}{\sin\phi} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\phi)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Luego, según esto, tenemos que

$$T_n^{'}(x) = (\cos(n\phi))^{'} = -n\phi^{'}\sin(n\phi) = \frac{n\sin(n\phi)}{\sin\phi} \tag{5.8}$$

Por tanto, lo que vamos a hacer es partir del miembro de la derecha de (5.7) y ver si llegamos a la expresión (5.8).

$$-nxT_n(x) + nT_{n-1}(x) = -nx\cos(n\phi) + n\cos((n-1)\phi) =$$

$$= -nx\cos(n\phi) + n\cos(n\phi - \phi) =$$

$$= -nx\cos(n\phi) + n(\cos(n\phi)\cos(\phi) + \sin(n\phi)\sin(\phi)) =$$

$$= -nx\cos(n\phi) + n\cos(n\phi)\cos(\phi) + n\sin(n\phi)\sin(\phi) =$$

$$= -nx\cos(n\phi) + nx\cos(n\phi) + n\sin(n\phi)\sin(\phi = n\sin(n\phi)\sin(\phi =$$

$$= -n\sin(n\phi)\frac{1}{\phi^{'}} = n\sin(n\phi)\sqrt{1-x^2}$$

y, puesto que $1 = -\sin(\phi)\phi^{'}$, tenemos que:

$$-nxT_n(x) + nT_{n-1}(x) = n\sin(n\phi)\sqrt{1-x^2}(-\sin(\phi)\phi^{'}) =$$

$$= n\sin(n\phi)\sqrt{1-x^2} - (\frac{1}{\sin(\phi)})(-\sin(\phi)) = \frac{n\sin(n\phi)\sqrt{1-x^2}}{\sin(\phi)}\sqrt{1-x^2} =$$

$$= \frac{n\sin(n\phi)}{\sin(\phi)}(1-x^2) = (1-x^2)T_n^{'}(x)$$

que es lo que queríamos demostrar.

5.3. Ecuación diferencial de Tchebycheff

Por cómo hemos definido los polinomios de Tchebycheff, sabemos que éstos vienen dados por

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N} \ \text{ y } \ x \in [-1, 1]$$

Luego, considerando $y(x) := T_n(x)$ por lo que hemos visto en la sección anterior, si hacemos el cambio de variable $\phi = \arccos x$ y derivamos respecto de x, sabemos que obtenemos que

$$y^{'}(x) = \frac{n \sin(n\phi)}{\sin(\phi)}$$

Derivando otra vez esta última expresión respecto de x, tenemos que:

$$y^{''}(x) = \left(\frac{n \sin(n\phi)}{\sin(\phi)}\right)^{'} = \frac{-n^2 y(x)}{(\sin(\phi))^2} + \frac{y^{'}(x)\cos(\phi)}{(\sin(\phi))^2} =$$

$$= \frac{-n^2 y(x)}{1 - x^2} + \frac{y^{'}(x)x}{1 - x^2}$$

(hemos omitido algún tedioso cálculo) obteniendo así la ecuación

$$(1 - x^2)y^{''}(x) - xy^{'}(x) + n^2 y(x) = 0 \tag{5.9}$$

que se conoce como ecuación diferencial de Tchebycheff y, como hemos llamado $y(x) := T_n(x)$, eso implica que los polinomios de Tchebycheff satisfacen la ecuación (5.9).

5.4. Ortogonalidad

En este apartado vamos a comprobar que la familia de polinomios de Tchebycheff $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal y, para ello, vamos a demostrar el siguiente teorema:

Teorema 5.4.1 *La familia de polinomios $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal con respecto a la función de peso $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Es decir, en el intervalo $[-1, 1]$, se tiene que*

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \begin{cases} 0 & si\ m \neq n \\ \pi & si\ m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & si\ m = n \neq 0 \end{cases}$$

Demostración. Vamos a ver en primer lugar cuál es la expresión de la integral

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \tag{5.10}$$

en función de n y de m mediante un cambio de variable y después de eso, distinguiremos entre los casos que queremos estudiar. El cambio de variable que vamos a realizar es

$$\phi = \arccos x$$

Según esto y de la definición de los polinomios de Tchebycheff, obtenemos que

$$T_n(x) = \cos(n\phi)$$

y que

$$T_m(x) = \cos(m\phi)$$

Además, por un lado, como $\phi = \arccos x$, se tiene que

$$\cos(\phi) = x \Rightarrow -\sin(\phi)d\phi = dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\phi = -\frac{dx}{\sin(\phi)} = -\frac{dx}{\sqrt{1-\cos^2(\phi)}} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

y, por otro lado, los límites de integración quedan de la forma

$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow \cos(\phi) = -1 \Rightarrow \phi = \pi \\ x = 1 \Rightarrow \cos(\phi) = 1 \Rightarrow \phi = 0 \end{cases}$$

Luego, según esto, obtenemos que:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{\pi}^{0} \cos(n\phi)\cos(m\phi) - d\phi = \int_{0}^{\pi} \cos(n\phi)\cos(m\phi)\,d\phi$$

y, como sabemos que el cos verifica la propiedad

$$\cos(n\phi)\cos(m\phi) = \frac{1}{2}[\cos((m+n)\phi) + \cos((m-n)\phi)]$$

obtenemos que esto permite expresar la integral (5.10) de la siguiente forma:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} [\cos((m+n)\phi) + \cos((m-n)\phi)]\,d\phi \tag{5.11}$$

Estudiamos ahora cada uno de los casos alternativos que tenemos para n y m.

- Si $m \neq n$.

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos((m+n)\phi)+\cos((m-n)\phi)]\,d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((m+n)\phi)}{m+n} + \frac{\sin((m-n)\phi)}{m-n}\right]_0^{\pi} = 0$$

- Si $m = n = 0$.

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(0\phi)+\cos(0\phi)]\,d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+1)\,d\phi = \int_0^{\pi}\,d\phi = \pi$$

- Si $m = n \neq 0$.

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(2n\phi)+\cos(0\phi)]\,d\phi =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(2n\phi)+1]\,d\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2n\phi)}{2n}+\phi\right)_0^{\phi} = \frac{1}{2}(0+\phi) = \frac{\phi}{2}$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

5.5. Aplicación de los polinomios de Tchebyceff. Aproximación de funciones

En esta sección vamos a ver una interesantísima aplicación de los polinomios de Tchebycheff en la cual veremos que una función que se pueda desarrollar en serie de los polinomios de Tchebycheff converge uniformemente, bajo ciertas condiciones. Para ello, necesitemos algunos teorema que mencionaremos (pero no demostraremos debido a su dificultad y complejidad y porque se salen del contenido de este trabajo) del análisis numérico en su respectivo momento. Comenzaremos con un par de definiciones técnicas.

Definición 5.5.1 *Se define la distancia a una función f de los polinomios de grado n por*

$$E_n(f) = \text{ínf}\,\{||f-p||_\infty : p \textit{ polinomio de grado } \leq n\}$$

donde

$$||\cdot||_\infty$$

es la norma del supremo en $C[-1,1]$.

Definición 5.5.2 *Se define el módulo de continuidad de una función f como*

$$w_f(\delta) = \sup \{|f(x) - f(y)| : |x - y| \leq \delta\}$$

Observemos que la distancia siempre se alcanza debido a la compacidad. Ahora bien, una vez definido estos conceptos, el teorema [3, Jackson's Theorem V, pag 147] nos dice que:

$$E_n(f) \leq w_f(\frac{\pi}{n+1}) \tag{5.12}$$

Con esto, observemos que si $\epsilon > 0$ y tomamos $\delta > 0$ tal que $w_f(\delta) < \epsilon$, entonces si $|x-y| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$, lo cual nos permite obtener que:

$$\text{Una función } f\text{es uniformemente continua } \Leftrightarrow \lim_{\delta \to 0} w_f(\delta) = 0$$

Por lo tanto, gracias a [4, Section 4.7, pags 225-226] tenemos la relación

$$E_n(f) \leq ||f - C_n||_\infty \leq \left(4 + \frac{4}{\pi^2}\ln(n)\right) E_n(f)$$

donde $C_n(x)$ es un polinomio que se puede expresar en serie de los polinomios de Tchebycheff de la forma

$$C_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j T_j(x) \quad \text{con} \quad c_j = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)T(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

Luego, si

$$\ln(n) E_n(f) \to 0 \quad \text{cuando} \quad \delta \to 0 \tag{5.13}$$

obtendremos que el desarrollo en serie de polinomios de Tchebycheff converge uniformemente y, esta condición (5.13), es precisamente lo que nos dice que se cumple el teorema [3, Dini-Lipschitz Theorem, pag 146]. Un ejemplo de funciones que verifican esta condición son las funciones Lipschitzianas.

Observemos además que, que se cumpla la condicíon

$$\lim_{n \to +\infty} E_n(f) = 0$$

es equivalente a que se cumpla el enunciado del teorema de Weierstrass. Es decir, este teorema nos dice que las funciones continuas se pueden aproximar por polinomios; pero, además, observemos que la condición (5.12) nos dice con qué velocidad se aproximan estos polinomios, ya que se puede demostrar fácilmente que, para una función Lipschitziana f, se verifica que $w_f(\delta) \leq c\delta$ donde c es la constante de Lipstchitz.
Otra aplicación de estos polinomios es la posibilidad de interpolar polinomios mediante éstos.

Apéndices.

1. Ecuación de Chistoffel-Darboux.
Esta identidad, demostrada por Chistoffel en el caso de los polinomios de Legendre (que más adelante hablaremos de ellos), fue generalizada por Darboux para el caso de un peso cualquiera; por eso recibe el nombre de ambos.

Por otro lado, sabemos que una función que juega un papel importante en la teoría de polinomios ortogonales es el núcleo y éste viene dado por

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(y) \tag{5.14}$$

Además, esta suma (5.14) puede ser calculada en forma cerrada de la forma

$$K_n(x,y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \left(\frac{P_n(y)P_{n+1}(x) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} \right) \tag{5.15}$$

Lo comprobamos:

Demostración. Para demostrar esta igualdad vamos a utilizar el procedimiento de inducción sobre n, utilizando la relación de recurrencia (1.2) dada en el teorema 1.2.1. Para ello, llamamos

$$D_n(x,y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \left(\frac{P_n(y)P_{n+1}(x) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} \right) \tag{5.16}$$

Observemos que, para $n = 0$, por cómo hemos definido los coeficientes k_n en la observación 1.2.2 y puesto que $P_0(x)$ y $P_1(x)$ son polinomios de grado 0 y 1 respectivamente, tenemos que

$$P_0(x) = k_0$$

y que

$$P_1(x) = k_1 x + a$$

donde a es una constante. Luego, reemplazando esto en (5.16), tenemos que (puesto que $n = 0$)

$$D_0(x,y) = \frac{k_0}{k_1}\left(\frac{P_0(y)P_1(x) - P_0(x)P_1(y)}{x-y}\right) =$$

$$= \frac{k_0}{k_1}\left(\frac{k_0k_1x + k_0a - k_0k_1y - k_0a}{x-y}\right) = \frac{k_0}{k_1}\left(\frac{k_1(x-y)k_0}{x-y}\right) = k_0^2$$

y, como

$$K_0(x,y) = \sum_{k=0}^{0} P_k(x)P_k(y) = P_0(x)P_0(y) = k_0^2$$

juntando ambas cosas, se obtiene (5.15).

Supongamos ahora que (5.15) se verifica para n y veamos que se verifica para $n+1$. Es decir, sabiendo que $K_n(x,y) = D_n(x,y)$, veamos si se verifica que $K_{n+1}(x,y) = D_{n+1}(x,y)$.

Recordando que $a_n = \frac{k_n}{k_{n+1}}$ (por la observación 1.2.2), de la defición de $D_n(x,y)$, tenemos que:

$$D_{n+1}(x,y) - D_n(x,y) =$$

$$= a_{n+1}\left(\frac{P_{n+1}(y)P_{n+2}(x) - P_{n+1}(x)P_{n+2}(y)}{x-y}\right) -$$

$$-a_n\left(\frac{P_n(y)P_{n+1}(x) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}\right) \tag{5.17}$$

y, reemplazando P_{n+2} en términos de P_{n+1} y de P_n usando la relación de recurrencia (1.2), tenemos que:

$$xP_{n+1}(x) = a_{n+1}P_{n+2}(x) + b_{n+1}P_{n+1}(x) + a_nP_n(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1}P_{n+2} = xP_{n+1}(x) - b_{n+1}P_{n+1}(x) - a_nP_n(x).$$

Sustituyendo en (5.17), tenemos que:

$$D_{n+1}(x,y) - D_n(x,y) =$$

$$= \frac{P_{n+1}(y)(xP_{n+1}(x) - b_{n+1}P_{n+1}(x) - a_nP_n(x))}{x-y} -$$

$$-\frac{P_{n+1}(x)(yP_{n+1}(y) - b_{n+1}P_{n+1}(y) - a_nP_n(y))}{x-y} -$$

$$-a_n\left(\frac{P_n(y)P_{n+1}(x)-P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}\right)$$

y desarrollando, obtenemos que

$$D_{n+1}(x,y)-D_n(x,y)=\frac{(x-y)P_{n+1}(y)P_{n+1}(x)}{x-y}=P_{n+1}(y)P_{n+1}(x)$$

Luego, con esto hemos obtenido que

$$D_{n+1}(x,y)-D_n(x,y)=P_{n+1}(y)P_{n+1}(x) \tag{5.18}$$

Pero ahora bien, como $K_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}P_k(x)P_k(y)$, sabemos que

$$K_{n+1}(x,y)-K_n(x,y)=P_{n+1}(y)P_{n+1}.$$

Luego, sustituyendo en (5.18), tenemos que

$$D_{n+1}(x,y)-D_n(x,y)=K_{n+1}(x,y)-K_n(x,y)$$

y, como $K_n(x,y)=D_n(x,y)$ (por hipótesis de inducción), de aquí obtenemos que

$$D_{n+1}(x,y)=K_{n+1}(x,y),$$

que era lo que queríamos demostrar. ■

Observación 5.5.3 *1. Juntando (5.14) y (5.15) obtenemos la identidad de Christoffel-Darboux.*

2. Observemos que, a partir de (5.15), tomando el límite cuando $y\to x$ y usando la regla de L'Hópital para evaluar el cociente indeterminado en la suma del lado derecho, obtenemos que se verifica que

$$\frac{k_n}{k_{n+1}}(P_n(x)P'_{n+1}(x)-P'_n(x)P_{n+1}(x))=\sum_{k=0}^{n}P_k^2(x)>0 \tag{5.19}$$

fórmula que utilizaremos para demostrar la propiedad de entrelazamiento.

3. Esta igualdad de Christoffel-Darboux sólo se verifica para familias de polinomios ORTONORMALES.

2. Demostramos la fórmula de Rodrigues a partir de la cual vienen dados los polinomios de Legendre. Sabemos que los polinomios de Legendre surgen, originalmente, como soluciones de una ecuación diferencial ordinaria del tipo $(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2}-2x\frac{dP}{dx}+n(n+1)P=0$ para $n=0,1,2\dots$ y que la solución de esta ecuación es única; es decir, que si existe otra solución de esta ecuación, ésta tiene que coincidir con los polinoios de Legendre. Luego, según esto, veamos que se verifica que $P_n(x)=\frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ para $n=0,1,2\dots.$ Lo comprobamos:

Demostración. Para demostrar esto, consideremos en primer lugar la ecuación diferencial ordinaria que satisface el polinomio $r(x):=(x^2-1)^n$; es decir, consideremos

$$\frac{d^n}{dx}(x^2-1)^n=n(x^2-1)^{n-1}2x=2nx(x^2-1)^{n-1}$$

O lo que es lo mismo, consideremos $r'=2nx(x^2-1)^{n-1}\Leftrightarrow(x^2-1)r'=2nxr$ Derivando esta última expresión $(n+1)$ veces y utilizando la expresión de la fórmula de Leibnitz para la derivada n-ésima de un producto (que sabemos que viene dada por $(fg)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^k}{dx^k}f\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}g$), tenemos que:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)r'=2n\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(xr)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)\frac{d^{n+1-k}}{dx^{n+1-k}}r'=2n\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{d^k}{dx^k}x\frac{d^{n+1-k}}{dx^{n+1-k}}r$$

Puesto que la derivada n-ésima de x^2-1 es 0 si $n\geq 3$ y puesto que la drivada n-ésima de x es 0 si $n\geq 2$, tenemos que:

$$\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)\frac{d^{2-k}}{dx^{2-k}}r'=2n\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}\frac{d^k}{dx^k}x\frac{d^{1-k}}{dx^{1-k}}r$$

y, desarrollando los sumatorios, obtenemos que

$$(x^2-1)\frac{d^3}{dx^3}r+2*2x\frac{d^2}{dx^2}r+1*2\frac{d}{dx}r=2n(x\frac{d}{dx}r+1*1*r)$$

Y generalizando, ya que $n+1=2$ en la izquierda y $n+1=1$ en la derecha, tenemos que:

$$(x^2-1)\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}r+2(n+1)x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}r+n(n+1)\frac{d^n}{dx^n}r=2nx\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}r+2n(n+1)\frac{d^n}{dx^n}r$$

Luego, llamando $u = \frac{d^n}{dx^n} r$ tenemos que:

$$(x^2-1)u^{''} + 2(n+1)xu^{'} + n(n+1)u = 2nxu^{'} + 2n(n+1)u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2-1)u^{''} + 2(n+1)xu^{'} + n(n+1)u - 2nxu^{'} - 2n(n+1)u = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2-1)u^{''} + u^{'}(2(n+1)x - 2nx) + u(n(n+1) - 2n(n+1)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2-1)u^{''} + 2xu^{'} - n(n+1)u = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-x^2)u^{''} - 2xu^{'} + n(n+1)u = 0$$

que observamos que es la misma ecuación que la que satisfacen los polinomios de Legendre. Por tanto, según esto, concluimos que $u = \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$ es solución de la ecuación de la ecuación de Legendre y, por consiguiente, que es proporcional a los polinomios de Legendre; es decir, que $\exists c$ una costante tal que

$$P_n(x) = c\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$$

Veamos por último que, utilizando que $P_n(1) = 1$, c tiene que ser $\frac{1}{n!2^n}$ (que es lo que sabemos que tiene que salir).
Para ello, observemos que

$$P_n(x) = c\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n) = c\frac{d^n}{dx^n}\left[(x+1)^n(x-1)^n\right].$$

Pero, observemos además que $\frac{d^n}{dx^n}\left[(x+1)^n(x-1)^n\right] = \frac{d^n}{dx^n}\left[(x+1)(x-1)\right]^n = n!(x+1)^n +$ términos que contienen al factor $(x-1)$ (debido a la fórmula de Leibnitz para la derivada n-ésima de un producto anterior recordada).
Por tanto, según esto y aplicando que $P_n(1) = 1$, obtenemos que:

$$1 = P_n(1) = cn!(1+1)^n + 0$$

(puesto que cuando $x = 1$, los términos con factor $(x-1)$ se hacen 0) y, con ello, que $c = \frac{1}{n!2^n}$, como queríamos demostrar. ■

3. Relaciones de recurrencia de los polinomios de Legendre.

1. Consideremos el polinomio $(x^2-1)P_n^{'}(x)$ que, como $P_n(x)$ es un polinomio de grado n, $P_n^{'}(x)$ es un polinomio de grado $n-1$ y sumándole los dos grados del x^2-1, obtenemos que $(x^2-1)P_n^{'}(x)$ es un polinomio de grado $n+1$.
   Buscamos poner este polinomio como combinación lineal de otros polinomios de Legendre. Para ello, por el mismo razonamiento que hemos

hecho anteriormente en la sección de relaciones de recurrencia de los polinomios de Legendre, sabemos que $(x^2-1)P_n^{'}(x)$ se puede expresar de la forma siguiente:

$$(x^2-1)P_n^{'}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2} \left[\int_{-1}^{1} (t^2-1)P_k(t)P_n^{'}(t)\, dt \right] P_k(x) \quad (5.20)$$

Observemos que

$$\int_{-1}^{1} (x^2-1)P_k(x)P_n^{'}(x)\, dx = \int_{-1}^{1} P_n(x)\frac{d}{dx}(P_k(x)(x^2-1))\, dt \text{ salvo el signo}$$

de donde resulta que, por la proposición (1.1.3), esta integral es nula para $n+1 < k$ y para $k+1 < n$; es decir, es nula para $k < n-1$ y para $k > n+1$.
Lo cual implica que la expresión (5.20) queda reducida de la siguiente forma:

$$(x^2-1)P_n^{'}(x) = \sum_{k=n-1}^{n+1} \frac{2k+1}{2} \left[\int_{-1}^{1} (t^2-1)P_k(t)P_n^{'}(t)\, dt \right] P_k(x) =$$

$$\frac{2(n-1)+1}{2} \left[\int_{-1}^{1} (t^2-1)P_{n-1}(t)P_n^{'}(t)\, dt \right] P_{n-1}(x) +$$

$$+\frac{2n+1}{2} \left[\int_{-1}^{1} (t^2-1)P_n(t)P_n^{'}(t)\, dt \right] P_n(x) +$$

$$+\frac{2(n+1)+1}{2} \left[\int_{-1}^{1} (t^2-1)P_{n+1}(t)P_n^{'}(t)\, dt \right] P_{n+1}(x) =$$

$$= AP_{n-1}(x) + BP_n(x) + CP_{n+1}$$

Calculamos ahora cuánto valen los coeficientes A, B y C

$$B = \frac{2n+1}{2} \left[\int_{-1}^{1} (t^2-1)P_n(t)P_n^{'}(t)\, dt \right] P_n(x) =$$

$$= \frac{2n+1}{2} \left[\left[(t^2-1)\frac{1}{2}P_n^2(t) \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}P_n^2(t)2t\, dt \right] P_n(x) = 0$$

(puesto que la función $P_n^2(t)t$ es una función impar).
Calculamos ahora los coeficientes A y C.
Para ello, partiendo de

$$(x^2-1)P_n^{'}(x) = AP_{n-1}(x) + CP_{n+1}(x) \quad (5.21)$$

y aplicando las fórmulas de Rodrigues, tenemos que: (puesto que $P_n^{'}(x) = \left(\frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right)^{'} = \frac{1}{n!2^n}\frac{(2n)!}{(n-1)!}x^{n-1} = \frac{n}{n!2^n}\frac{(2n)!}{n!}x^{n-1}$)

$$\frac{n}{n!2^n}\frac{(2n)!}{n!}x^{n-1} = \frac{A}{(n-1)!2^{n-1}}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C}{(n+1)!2^{n+1}}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!}x^{n+1}$$

De donde igualando coeficientes de mayor grado, tenemos que:

$$\frac{n(2n)!}{n!n!2^n} = \frac{C(2n+2)!}{(n+1)!2^{n+1}(n+1)!} \Rightarrow C = \frac{n(2n)!(n+1)!(n+1)!2^{n+1}}{n!n!2^n(2n+2)!} =$$

$$= \frac{2(n+1)!(n+1)!(2n)!}{n!n!(2n+2)!} = \frac{2(n+1)(n+1)n(2n)!}{(2n+2)!} =$$

$$= \frac{2(n+1)(n+1)n}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(n+1)n}{2n+1} \Rightarrow C = \frac{(n+1)n}{2n+1}$$

Por otro lado, por (2.13), tomando x= 1, observemos que (5.21) se queda de la forma $0 = A + C$.
Luego, $0 = A + \frac{(n+1)n}{2n+1} \Rightarrow A = \frac{-(n+1)n}{2n+1}$ y, por lo tanto, juntándolo todo, tenemos que:

$$(x^2-1)P_n^{'}(x) = \frac{-(n+1)n}{2n+1}P_{n-1}(x) + \frac{(n+1)n}{2n+1}P_{n+1}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2-1)(2n+1)P_n^{'}(x) = n(n+1)P_{n+1}(x) - n(n+1)P_{n-1}(x) \Rightarrow$$

$$(x^2-1)(2n+1)P_n^{'}(x) = n(n+1)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) \qquad (5.22)$$

Observemos además que de la relación (2.24) tenemos que:

$$\frac{(2n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x)}{n} = P_{n-1}(x)$$

Luego, sustituyendo esta última expresión en (5.22), tenemos que:

$$(x^2-1)(2n+1)P_n^{'}(x) =$$

$$= n(n+1)\left[P_{n+1}(x) - \frac{(2n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x)}{n}\right] =$$

$$= n(n+1)\left[\frac{nP_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + (n+1)P_{n+1}(x)}{n}\right] =$$

$$= (n+1)nP_{n+1}(x) - (n+1)(2n+1)xP_n(x) + (n+1)^2P_{n+1}(x) =$$

$$= P_{n+1}(x)\left[(n+1)+(n+1)^2\right]-(n+1)(2n+1)xP_n(x) =$$
$$= P_{n+1}(x)\left[n^2+n+n^2+2n+1\right]-(n+1)(2n+1)xP_n(x) =$$
$$= (2n+1)(n+1)P_{n+1}(x)-(n+1)(2n+1)xP_n(x)$$

Lo cual implica que:

$$(x^2-1)P_n^{'}(x) = (n+1)\left[P_{n+1}(x)-xP_n(x)\right] \tag{5.23}$$

Pero, como de la expresión

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x)$$

se tiene que

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$$

sustituyendo esto en la relación (5.23), tenemos que:

$$(x^2-1)P_n^{'}(x) = (2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)-(n+1)xP_n(x) =$$
$$= xP_n(x)(2n+1-n-1)-nP_{n-1}(x) = nxP_n(x)-nP_{n-1}(x)$$

Lo cual implica que

$$(x^2-1)P_n^{'}(x) = n\left[xP_n(x)-P_{n-1}(x)\right] \tag{5.24}$$

2. Derivando la función generatriz (2.11) con respecto a x y haciendo cuentas, podemos obtener otra relación de recurrencia de los polinomios de Legendre dada por

$$P_{n-1}^{'}(x)+P_{n+1}^{'}(x) = 2xP_n^{'}(x)+P_n(x) \quad \text{para } n \geq 1 \tag{5.25}$$

Demostración. Derivando la (2.11) respecto a x, tenemos que: Por un lado, que

$$\frac{dG(x,t)}{dx} = \frac{d}{dx}\left((1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}}(-2t) =$$
$$= \frac{t}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{t}{\sqrt{1-2xt+t^2}(1-2xt+t^2)} = \frac{tG(x,t)}{1-2xt+t^2} \tag{5.26}$$

Y, por otro lado, tenemos que:

$$\frac{dG(x,t)}{dx} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}P_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'}(x)t^n \quad (5.27)$$

De donde igualando ambas expresiones (5.26) y (5.27), tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'}(x)t^n = \frac{tG(x,t)}{1-2xt+t^2} = \frac{t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n}{1-2xt+t^2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1}}{1-2xt+t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'}(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'}(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2xP_n^{'}(x)t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'}(x)t^{n+2}$$

Desarrollamos ambos lados término a término e igualamos coeficientes a ver si podemos obtener una relación entre ellos, teniendo que:

$$P_0(x)t + P_1(x)t^2 + P_2(x)t^3 + \cdots = P_0^{'}(x) + P_1^{'}(x)t + P_2^{'}(x)t^2 + P_3^{'}(x)t^3 -$$

$$-2xP_0^{'}(x)t - 2xP_1^{'}(x)t^2 - 2xP_2^{'}(x)t^3 + P_0^{'}(x)t^2 + P_1^{'}(x)t^3 + \cdots =$$

$$= t(P_1^{'}(x) - 2xP_0^{'}(x)) + t^2(P_2^{'}(x) - 2xP_1^{'}(x) + P_0^{'}(x)) + t^3(P_3^{'}(x) - 2xP_2^{'}(x) + P_1^{'}(x)) + \ldots$$

Por tanto, igualando términos, tenemos que:

$$P_0(x) = P_1^{'}(x) - 2xP_0^{'}(x)$$

$$P_1(x) = P_2^{'}(x) - 2xP_1^{'}(x) + P_0^{'}(x)$$

$$P_2(x) = P_3^{'}(x) - 2xP_2^{'}(x) + P_1^{'}(x)$$

$$\vdots$$

Luego, igualando sucesivamente todos los términos de todos los grados, obtenemos que, en general, la relación que hay entre los coeficientes es

$$P_n(x) = P_{n+1}^{'}(x) - 2xP_n^{'}(x) + P_{n-1}^{'}(x)$$

y, con ello, que

$$P_{n+1}^{'}(x) + P_{n-1}^{'}(x) = 2xP_n^{'}(x) + P_n(x)$$

que es lo que queríamos demostrar. ∎

3. Otra fórmula de recurrencia es la siguiente:

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x). \qquad (5.28)$$

Demostración. Sabemos que los polinomios de Legrendre se definen a partir de la fórmula de Rodrigues de la siguiente forma:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad \text{para} \quad n = 0,1,2,\dots$$

Luego, partiendo de $P'_{n+1}(x)$, tenemos que:

$$P'_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(x^2-1)^{n+1} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(\frac{d}{dx}(x^2-1)^{n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}((n+1)(x^2-1)^n 2x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}((x^2-1)^n x) =$$

$$= \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{d}{dx((x^2-1)^n x)}\right] = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(n(x^2-1)^{n-1}2xx+(x^2-1)^n) =$$

$$= \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(n(x^2-1)^{n-1}2x^2) + \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n =$$

$$= \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(2x^2 n(x^2-1)^{n-1}) + P_n(x) = 2nP_n(x) + P'_{n-1} + P_n(x)$$

de donde obtenemos que

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Observación 5.5.4 *Demostramos ahora la última igualdad. Observemos que* $(x^2-1)^n$ *se puede expresar de la siguiente forma:*

$$(x^2-1)^n = (x^2-1)(x^2-1)^{n-1} = x^2(x^2-1)^{n-1} - (x^2-1)^{n-1}$$

Luego, según esto, tenemos que:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{d^n}{dx^n}\left[x^2(x^2-1)^{n-1}\right] - \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^{n-1}\right] =$$

$$= \frac{d^n}{dx^n}\left[x^2(x^2-1)^{n-1}\right] - \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^{n-1}\right] \tag{5.29}$$

Y, por las fórmulas de Rodrigues, tenemos que

$$n!2^n P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[x^2(x^2-1)^{n-1}\right] - \frac{d}{dx}\left[2^{n-1}(n-1)!P_{n-1}(x)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n!2^n P_n(x) + 2^{n-1}(n-1)!P'_{n-1}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[x^2(x^2-1)^{n-1}\right] \tag{5.30}$$

Y, por lo tanto, juntando (5.29) y (5.30), tenemos que:

$$\frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(2x^2n(x^2-1)^{n-1}) =$$

$$= \frac{2n(n!2^n P_n(x) + 2^{n-1}(n-1)!P'_{n-1}(x))}{n!2^n} = 2nP_n(x) + P'_{n-1}(x)$$

4. Recordemos que la identidad de Chistoffel-Darboux venía dada por:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(y) = \frac{k_n}{k_{n+1}}\left(\frac{P_n(y)P_{n+1}(x) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}\right) \tag{5.31}$$

donde k_n era el coeficiente principal de $P_n(x)$ y, además, recordemos que esta identidad sólo se verificaba para familias de polinomios ortonormales.
Luego, como nosotros queremos obtener una relación de recurrencia a partir de esta identidad con los polinomios de Legendre y sabemos que estos no están normalizados, para poder aplicar la fórmula con ellos, tenemos que dividir por la norma de los polinomios de Legendre, que sabemos que viene dada por $\sqrt{\frac{2}{2n+1}}$. Luego, multiplicando por esta cantidad y aplicando la identidad de Chistoffel-Darboux (5.31) con los polinomios de Legendre, obtenemos que ésta se escribe de la siguiente forma:

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\frac{2k+1}{2}}P_k(x)\sqrt{\frac{2k+1}{2}}P_k(y) =$$

$$\frac{k_n}{k_{n+1}}\left(\frac{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(y)\sqrt{\frac{2(n+1)+1}{2}}P_{n+1}(x) - \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)\sqrt{\frac{2(n+1)+1}{2}}P_{n+1}(y)}{x-y}\right) =$$

$$= \frac{k_n}{k_{n+1}} \left(\frac{\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(y) \sqrt{\frac{2n+3}{2}} P_{n+1}(x) - \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) \sqrt{\frac{2n+3}{2}} P_{n+1}(y)}{x-y} \right) =$$

$$= \frac{k_n}{k_{n+1}} \left(\frac{\sqrt{\frac{(2n+1)(2n+3)}{4}} P_n(y) P_{n+1}(x) - \sqrt{\frac{(2n+1)(2n+3)}{4}} P_n(x) P_{n+1}(y)}{x-y} \right) =$$

$$= \frac{k_n}{k_{n+1}} \sqrt{(2n+1)(2n+3)} \left(\frac{P_n(y)P_{n+1}(x) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{2(x-y)} \right) \quad (5.32)$$

Ahora bien, de (2.3) , sabemos que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

donde el símbolo $[v]$ denota el mayor entero $\leq v$.
Normalizando estos polinomios para poder meterlos en la identidad de Chistoffel-Darboux, tenemos que:

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

y, como el coeficiente de mayor grado es cuando $k = 0$, obtenemos que k_n vale

$$k_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(-1)^0(2n-20)!}{2^n 0!(n-0)!(n-0)!} = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n! n!} = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \quad (5.33)$$

y, análogamente, obtenemos que:

$$k_{n+1} = \sqrt{\frac{2(n+1)+1}{2}} \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2} = \sqrt{\frac{2n+3}{2}} \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2} \quad (5.34)$$

Luego, dividiendo ambas expresiones (5.33) y (5.34), tenemos que:

$$\frac{k_n}{k_{n+1}} = \frac{\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}}{\sqrt{\frac{2n+3}{2}} \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}} = \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}} \frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \quad (5.35)$$

Por tanto, sustituyendo esta ecuación (5.35) en la expresión (5.32), y desarrollando unas simples cuentas, tenemos que:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2} P_k(x)P_k(y) = \frac{n+1}{2} \left(\frac{P_n(y)P_{n+1}(x) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} \right)$$

Y, por lo tanto, la expresión final que obtenemos es:

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) P_k(x)P_k(y) = (n+1) \left(\frac{P_n(y)P_{n+1}(x) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} \right) \tag{5.36}$$

5. Vamos a obtener el valor de las derivadas de los polinomios de Legendre en los puntos 1 y -1.
   Para ello, partimos de la ecuación (5.22), que recordemos que nos decía que:

$$(x^2-1)(2n+1)P_n^{'}(x) = n(n+1)(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))$$

   Derivando respecto de x esta expresión a ambos lados, tenemos que:

$$(x^2-1)(2n+1)P_n^{''}(x) + (2n+1)2xP_n^{'}(x) = n(n+1)(P_{n+1}^{'}(x) - P_{n-1}^{'}(x))$$

   Y, utilizando la fórmula de recurrencia (5.28), obtenemos que:

$$(x^2-1)(2n+1)P_n^{''}(x) + (2n+1)2xP_n^{'}(x) = n(n+1)(2n+1)P_n(x)$$

   de donde, dividiviendo por $2n+1$ (que lo podemos hacer, ya que $n \in \mathbb{N}$) y, pasándolo todo a la derecha, tenemos que:

$$(1-x^2)P_n^{''}(x) - 2xP_n^{'}(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \tag{5.37}$$

   de donde observemos que ésta es la ecuación diferencial que cumplían los polinomios de Legendre.
   Luego, a partir de ésta fórmula, notemos que si le damos el valor de $x = 1$, tenemos que

$$(1-1)P_n^{''}(1) - 2P_n^{'}(1) + n(n+1)P_n(1) = 0$$

   y, como $P_n(1) = 1$, obtenemos que

$$P_n^{'}(1) = \frac{n(n+1)}{2} \tag{5.38}$$

y, si le damos el valor de $x = -1$, tenemos que:

$$(1-1)P_n^{''}(-1) - 2(-1)P_n^{'}(-1) + n(n+1)P_n(-1) = 0$$

y, como $P_n(-1) = (-1)^n$, obtenemos que:

$$P_n^{'}(-1) = \frac{-n(n+1)(-1)^n}{2} = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2} \tag{5.39}$$

4. Veamos qué valor tiene la expresión (3.22) para $n = m$. Para ello, realizamos los siguienes pasos.

1. Por la fórmula de recurrencia (3.11) sabemos que se cumple que

   $$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \quad \text{para} \quad n \geq 1$$

   Luego, sustituyendo n por $n-1$, tenemos que se cumple que

   $$H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x) = 0 \quad \text{para} \quad n \geq 2 \tag{5.40}$$

2. Multiplicando (5.40) por $H_n(x)$, tenemos que:

   $$H_n^2(x) - 2xH_n(x)H_{n-1}(x) + 2(n-1)H_n(x)H_{n-2}(x) = 0 \quad \text{para} \quad n \geq 2 \tag{5.41}$$

3. A esta igualdad (5.41) le restamos la igualdad (3.11) multiplicada por $H_{n-1}(x)$ y obtenemos que:

   $$H_n^2(x) - 2xH_n(x)H_{n-1}(x) + 2(n-1)H_n(x)H_{n-2}(x) -$$

   $$-H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) + 2xH_n(x)H_{n-1}(x) - 2nH_{n-1}^2(x) = 0 \quad \text{para} \quad n \geq 2$$

   de donde obtenemos que

   $$H_n^2(x) + 2(n-1)H_n(x)H_{n-2}(x) - H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) - 2nH_{n-1}^2(x) = 0$$

   para $n \geq 2$

4. Multiplicando por e^{-x^2}, integrando sobre $(-\infty, \infty)$ y aplicando (3.15), tenemos que:

   $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = 2n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x)\, dx \quad \text{para} \quad n \geq 2 \tag{5.42}$$

5. Aplicando reiteradamente la igualdad (5.42), obtenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = 2^{n-1}(n-1)! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_1^2(x)\, dx =$$

$$= 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_0^2(x)\, dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 2^n n\sqrt{\pi} \quad \text{para} \quad n \geq 2$$

Pero observemos que, además, para $n = 0$ y para $n = 1$, se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_0^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi} = 2^0 0! \sqrt{\pi}$$

y que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_1^2(x)\, dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_0^2(x)\, dx = 2\sqrt{\pi} = 2^1 1! \sqrt{\pi}$$

Lo cual implica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = 2^n n\sqrt{\pi} \quad \text{para} \quad n \geq 0 \tag{5.43}$$

y, con ello, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = 2^n n\sqrt{\pi}\delta_{nm} \tag{5.44}$$

Bibliografía

[1] Y.Ayant, M.borg *Funciones especiales* Alhambra 1974.

[2] G. Szegö *Orthogonal Polynomials* American Mathematical Society, Providence, RI, 1939.

[3] E.W. Cheney *Introduction to Approximation Theory* ,1982.

[4] Kendall E.Atkison *An introduction to numerical analisys* Second Edition 1978.

[5] Cohn *Measure teory* 1980.

[6] CourantHilbert *Methods of Mathmatical Physics* Volumen I y II, 1989.

[7] N.S.Koshlyakov y otros *Differential equations of mathematical physics* North-Holland Pub. Co.(Amsterdam and New York) 1964.

[8] S.L.Sobolev *Partial differential equations of mathematical physics* Courier Dover Publications 1964.

[9] W.Rudin *Análisis real y complejo* McGraw-Hill, 1988.

[10] Bernardo Cascales y otros *Análisis Funcional* e-lectolibris, 2013.

[11] Recurso web `http://farside.ph.utexas.edu/teaching/336k/newton.pdf`

[12] Recurso web `http://amatema.webs.ull.es/anamat_p0304/Matematicas/Funciones%20Especiales/RFESPT5.PDF`

[13] Recurso web `http://farside.ph.utexas.edu/teaching/336k/newton/Newtonhtml.html`

[14] Recurso web http://macul.ciencias.uchile.cl/~jrogan/cursos/mfm2p00/cap11.pdf

[15] Recurso web http://macul.ciencias.uchile.cl/~jrogan/cursos/mfm2p00/cap12.pdf

[16] Recurso web http://www.bsu.edu/libraries/virtualpress/mathexchange/07-01/HermitePolynomials.pdf

[17] Recurso web http://macul.ciencias.uchile.cl/~jrogan/cursos/mfm2p00/cap13.pdf

[18] Recurso web file:///I:/Trabajo%20de%20fin%20de%20carrera/Polinomios%20de%20Laguerre/Laguerre%20Polynomials.htm

[19] Recurso web file:///I:/Trabajo%20de%20fin%20de%20carrera/Polinomios%20de%20Laguerre/THE%20LAGUERRE%20POLYNOMIALS.htm

[20] Recurso web file:///I:/Trabajo%20de%20fin%20de%20carrera/Polinomios%20de%20Laguerre/Laguerre%20Polynomial.htm

[21] Recurso web http://www.uru.edu/fondoeditorial/articulos/LEGENGRE.pdf

[22] Recurso web http://metodosmatematicosiii.wikispaces.com/file/view/Legendre.pdf/394614436/Legendre.pdf

[23] Recurso web http://casanchi.com/mat/tchebycheff01.pdf

[24] Recurso web http://www.mhtlab.uwaterloo.ca/courses/me755/web_chap6.pdf

[25] Recurso web file:///I:/Trabajo%20de%20fin%20de%20carrera/Polinomios%20de%20tchebycheff/Chebyshev%20Polynomial.htm