Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-2

[Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2]
[Los profesores] UNI, 02 de noviembre de 2021

Cuarta Práctica Dirigida

1. Dado el problema diferencial de valor inicial (PVI):

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x) \quad \forall x \in I,$$
$$y(x_0) = 0, \;\; y'(x_0) = 0, \;\; x_0 \in I,$$

donde a_0, a_1 y h son funciones continuas sobre I.
La inversa por la derecha del operador diferencial asociado $L = D^2 + a_1(x)D + a_0(x)$ es

$$[G(h)](x) = \int_{x_0}^{x} K(x,t)h(t)\,dt,$$

donde la función de Green de L para el PVI sobre I es

$$K(x,t) = \frac{y_2(x)y_1(t) - y_1(t)y_2(t)}{W[y_1(t), y_2(t)]},$$

con y_1, y_2 soluciones linealmente independientes de $Ly = 0$. Mostrar que la función $y_p = G(h)$ satisface las condiciones iniciales $y_p(x_0) = y_p'(x_0) = 0$ para todo $h \in C(I)$. (Sug. Use la fórmula de Leibnitz para diferenciar integrales)

2. Encuentre la función de Green y una inversa por la derecha de $y'' + y = \tan x$.

3. Encontrar las funciones de Green para los siguientes operadores diferenciales lineales

   a) $D^2 + 4D + 4$
   b) $x^2D^2 - 2xD + 2$
   c) $xD^2 - (1 + 2x)D$

4. Encuentre una función de Green para el operador

$$L = D^2 - 2aD + a^2 + b^2, \quad b \neq 0$$

5. Encuentre la solución particular de la ecuación diferencial

$$(4D^4 - 4D^3 + 5D^2 - 4D + 1) = \ln t$$

que satisface las condiciones iniciales $y(1) = y'(1) = y''(1) = y'''(1) = 0$.

6. Encuentre la solución del PVI usando la técnica de Función de Green junto con la transformada de Laplace.

$$(D^2 - 2aD + a^2 + b^2)y = h(t)$$
$$y(\pi) = 2, \;\; y'(\pi) = -3.$$

7. Resolver el problema de valor inicial

$$(D^2 - 1)y = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ t - 1, & t > 1, \end{cases}$$
$$y(0) = y'(0) = 0,$$

de 3 maneras diferentes:

a) Usando la transformada de Laplace directamente.

b) Determinando primero la función de Green para $D^2 - 1$.

c) Resolviendo el problema de valor inicial

$$(D^2 - 1)y = t - 1; \qquad y(1) = a, \qquad y'(1) = b,$$

con una apropiada elección de las constantes a, b.

8. Encuentre la función de Green y una inversa por la derecha del problema de valor de frontera

$$y'' = x^2\,, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

9. a) Encuentre la función de Green para el problema de valor de frontera

$$\begin{cases} y'' + y = h \\ y(0) = y(\pi/2) = 0, \end{cases}$$

donde $h \in C[0, \pi/2]$.

b) Use el resultado en a) para encontrar la solución de

$$\begin{cases} y'' + y = x \\ y(0) = 0\,, \ y(\pi/2) = 1. \end{cases}$$

10. Demuestre que todo operador diferencial lineal normal de segundo orden

$$L = a_2(x)D^2 + a_1(x)D + a_0(x),$$

puede expresarse en forma autoadjunta o forma de Sturm-Liouville:

$$D(p(x)D) + q(x), \quad p(x) = e^{\int [a_1(x)/a_2(x)]\,dx}, \ q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}p(x).$$

11. Reescribir cada uno de los siguientes operadores diferenciales lineales en forma autoadjunta.

a) $D^2 + \frac{1}{x}D + 1, \ \ x > 0.$

b) $\cos x\, D^2 + \sin x\, D - 1, \ \ -\pi/2 < x < \pi/2.$

12. Sea el operador $L = -D^2$ definido sobre un subespacio de $C^2[a, b]$ descrito por las condiciones de frontera periódica

$$y(0) = y(2\pi)\,, \quad y'(0) = y'(2\pi).$$

Demuestre que L es simético sobre dicho subespacio y halle los autovalores y autofunciones de problema de autovalores

$$Ly = \lambda y.$$

13. Sea el operador diferencial

$$L = x^2\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx} + 2I,$$

donde I es el operador identidad.

a) Exprese L de la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)I \quad \text{(operador Sturm-Liouville).}$$

b) Halle todos los valores de λ (valores propios) para los cuales el problema de valor de frontera

$$\mathcal{L}y = \lambda\sigma y, \quad y'(1) = 0, \ y'(2) = 0.$$

tiene soluciones y_λ no triviales (vectores propios). Considere $\sigma(x) = x^{-1}$.

c) Dado el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_1^2 f(x)g(x)\sigma(x)\,dx,$$

¿Bajo qué condiciones de frontera se cumple que $\langle \mathcal{L}f, g\rangle = \langle f, \mathcal{L}g\rangle$ ($\mathcal{L}$ es simétrico)?

14. Encontrar los autovalores y autofunciones del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + (4 - 9\lambda)y = 0, \\ y(0) = y(a) = 0. \end{aligned}$$

15. Resolver el problema de autovalores

$$\begin{cases} y''(x) = \lambda y(x), \\ y(0) = 0, \\ y(l) + y'(l) = 0. \end{cases}$$

16. Considere el problema de autovalores $y'' + 2y' + \lambda y = 0$ con las condiciones de contorno $y(0) = y(1) = 0$.
    a) Mostrar que $\lambda = 1$ no es un autovalor.
    b) Mostrar que no hay ningún autovalor λ tal que $\lambda < 1$.
    c) Mostrar que el n-ésimo autovalor positivo es $\lambda_n = 1 + n^2\pi^2$, con autofunción $y_n(x) = e^{-x}\sin(n\pi x)$.
17. Sea $a > 0$, se define el operador diferencial $D[y(x)] = xy''(x) + y'(x)$ con dominio en $V = \{v \in C^2[a, b] : v(a) = v(b) = 0\}$. Comprobar que D es autoadjunto en V.
18. Escribir la ecuación diferencial $(1 + x)y''(x) - y'(x) + 2xy(x) = 0$ en forma autoadjunta.
19. Probar que si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones de la ecuación autoadjunta

$$L[y(x)] = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right) + q(x)y(x) = 0,$$

para $x \in (a, b)$, entonces $p(x)W(y_1, y_2)(x)$ es una constante.

20. Encontrar la solución del siguiente PVF en términos de desarrollos de series de autofunciones:

$$\begin{cases} y''(x) = x^2 - a^2\,, \quad x \in (0, a) \\ y(0) = y(a) = 0 \end{cases}$$

21. Encontrar la solución del siguiente PVF en términos de desarrollos de series de autofunciones del operador de Sturm-Liouville $L = -\dfrac{d^2}{dx^2}$:

$$y'' = x(x - 2\pi)\,, \quad y(0) = y'(\pi) = 0.$$

22. Determine el operador adjunto L^* y su dominio para el operador $Lu = \dfrac{du}{dx}$ donde u satisface las condiciones de frontera $u(0) = 2u(1)$ sobre $[0, 1]$.
23. Utilice el método de expansión de autofunciones para resolver el siguiente PVF:

$$\begin{cases} (xy')' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x}\,, \quad x \in [1, e] \\ y(1) = y(e) = 0. \end{cases}$$

24. Utilice el método de expansión de autofunciones para resolver el siguiente PVF:

$$y'' = x(x - 2\pi)\,, \quad y(0) = y'(\pi) = 0.$$

(Sug. Utilice el operador de Sturm-Liouville $L = -\dfrac{d^2}{dx^2}$)

25. Encontrar el operador adjunto de $Lu = u'' + 4u' - 3u$, y su correspondiente dominio, bajo las siguientes condiciones de frontera $u'(0) + 4u(0) = 0$, $u'(1) + 4u(1) = 0$, sobre el intervalo $[0, 1]$.