Diecisieteava sesión

Análisis Convexos - CM3E2

Jonathan Munguia[1]

[1]Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

08 de enero de 2021

Outline

Definición 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. La función conjugada de f (en el sentido de Fenchel) es la función $f^* : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por

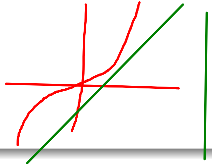
$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathrm{dom}(f)} \Big[\overbrace{\langle x, x^* \rangle - f(x)}^{g_x(x^*)} \Big] = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \big[\langle x, x^* \rangle - f(x) \big].$$

Observación 1

f^* es convexa sci porque es el supremo de funciones afines.

Ejemplo 1

- La conjugada de $f(x) = x^2$ es $f^*(y) = \left(\frac{y}{2}\right)^2$.
- La conjugada de $g(x) = x^3$ es $+\infty$.



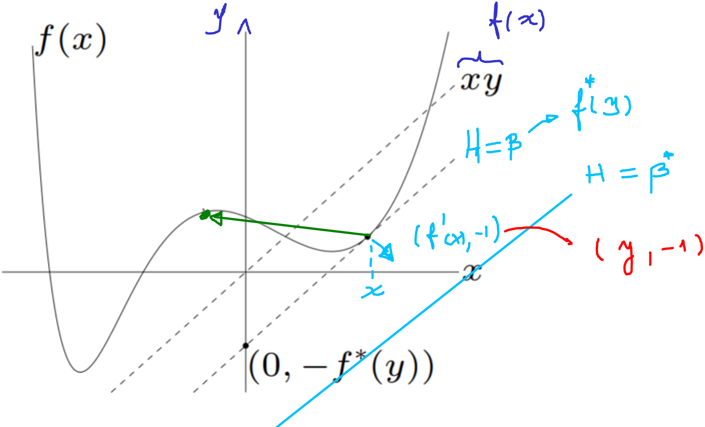


Figura: Dada la recta *xy* con pendiente *y* es traladada hasta hacerla tangente.

Teorema 1 Sesión 13

f convexa sci propia $\Rightarrow$

$$f(x) \geq f(\hat{x}_0) + \langle x-\hat{x}_0, x_1\rangle \ \forall x$$

$$= \langle x, \underbrace{x_1}_{x^*}\rangle - \left[\underbrace{\langle \hat{x}_0, x_1\rangle - f(\hat{x}_0)}_{\beta}\right]$$

$$\langle (x, f(x)), (y, -1) \rangle \leq \beta \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

$$xy - f(x) \leq \beta \quad \forall x \in \mathbb{R} \ldots\ldots (*)$$

$$\sup_x \{ \underset{\langle x, y \rangle}{xy} - f(x) \} \leq \beta$$

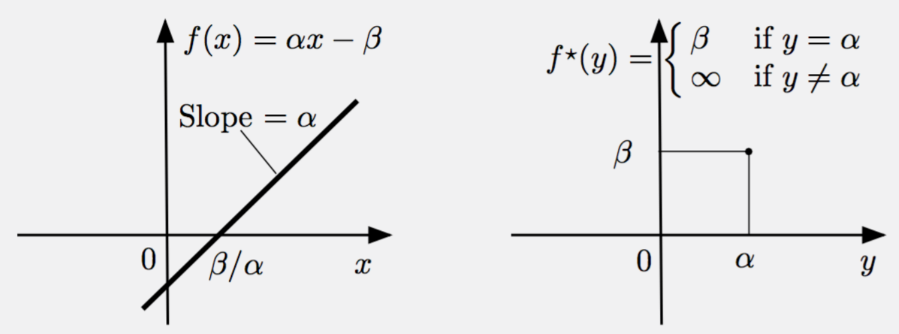
· Al β más pequeño q cumple $(*)$

$\Rightarrow$ puedo definir $y \longrightarrow f^*(y)$

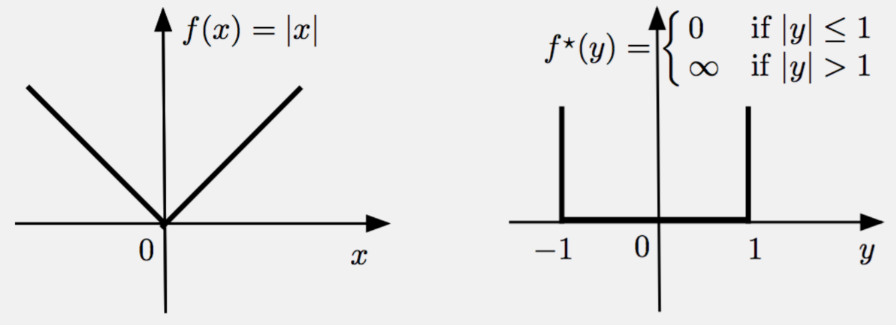
(β mínimo q' cumple $*$)

$$f^*(y) = \sup_x \{ \langle x, y \rangle - f(x) \}$$

Ejemplo 2

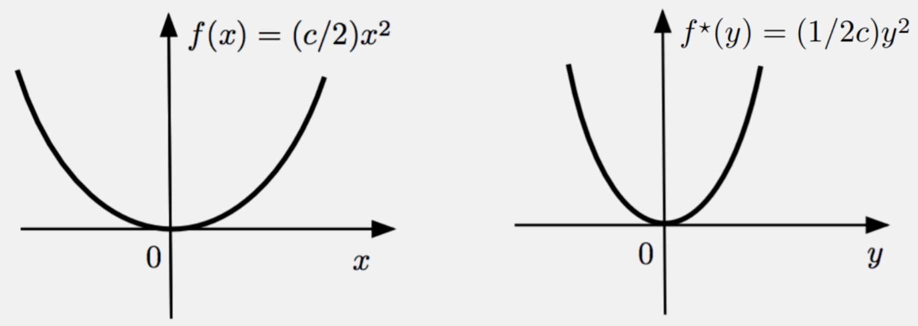

$f(x) = \alpha x - \beta$
Slope $= \alpha$
0
β/α
x
$f^\star(y) = \begin{cases} \beta & \text{if } y = \alpha \\ \infty & \text{if } y \neq \alpha \end{cases}$
β
0
α
y

Ejemplo 3



$f(x) = |x|$
0
x
$f^\star(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } |y| \le 1 \\ \infty & \text{if } |y| > 1 \end{cases}$
-1
0
1
y

Ejemplo 4



Teorema 1 (Teorema de separación fuerte)

Sean C_1, C_2 conjuntos convexos disjuntos *no vacíos de $\mathbb{R}^n$ tal que C_1 es compacto y C_2 cerrado. Entonces, existen $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\langle a, x\rangle < \alpha < \langle a, y\rangle \quad \forall x \in C_1,\ \forall y \in C_2.$$

$$\overline{f}(x) = \sup_{\substack{g \leq f \\ g \text{ sci}}} g(x) = \inf \left[\lambda : (x,\lambda) \in \overline{\text{epi} f} \right]$$

$\text{epi} \, \overline{f} = \overline{\text{epi} f}$

Proposición 1

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. *Se cumple*

$$f^* = (\overline{f})^* = (f_c)^* = (f_{\overline{c}})^*.$$

$f_c(x) = \inf \left[\lambda : (x,\lambda) \in \text{Co}(\text{epi} f) \right] \rightarrow \text{epi} \, f_C = \text{co}(\text{epi} f)$

$f_{\overline{c}}(x) = \inf \left[\lambda : (x,\lambda) \in \overline{\text{co}}(\text{epi} f) \right] \rightarrow \text{epi} \, f_{\overline{c}} = \overline{\text{co}}(\text{epi} f)$

$$f_c(x) = \inf[\lambda : (x,\lambda) \in co(epi f)]$$

Sea g t.q. $epi\, g = co(epi\, f)$

$$g(x) = \inf[\lambda : (x,\lambda) \in epi\, g] = f_c(x)$$

$\Rightarrow g = f_c$

$\Rightarrow \underset{\underset{co(epi f)}{\parallel}}{epi\, g} = epi\, f_c \Rightarrow \boxed{epi\, f_c = co(epi\, f)}$

$(x, f(x)) \in co(epi\, f) = epi\, g \Rightarrow g(x) \leq f(x) \Rightarrow f_c \leq f$

(mayorada)

Sea h convexa t.q. $f_c \leq \underline{h} \leq f$

$epi\, f_c \supset epi\, h \supset epi\, f \Rightarrow \underset{\underset{co(epi f)}{\parallel}}{co(epi\, f_c)} \supset \underset{\underset{epi\, h}{\parallel}}{co(epi\, h)} \supset co(epi\, f)$

$\Rightarrow \operatorname{epi} h = \operatorname{co} (\operatorname{epi} f) = \operatorname{epi} f_c \implies \underline{h = f_c}$

¿$\Rightarrow$ f_c es la función convexa más grande mayorada por f.

$f_{\bar{c}}$ (regularizante convexa sci de f)

Similar!

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \operatorname{dom} f} [\langle x, x^* \rangle - f(x)] \overset{¿?}{=} \underbrace{\sup_{(x,\lambda) \in \operatorname{epi} f} [\langle x, x^* \rangle - \lambda]}_{g(x^*)}$$

$$\forall (x,\lambda) \in \operatorname{epi} f : \quad \langle x, x^* \rangle - \lambda \le \mu$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall (x,\lambda) \in \overline{\operatorname{epi} f} : \quad \langle x, x^* \rangle - \lambda \le \mu$$

"$\Leftarrow$)" ✓

"$\Rightarrow$)" $\quad (\hat{x}, \hat{\lambda}) \in \overline{\operatorname{epi} f} \Rightarrow \exists\, (x_n, \lambda_n) \to (\hat{x}, \hat{\lambda})$

$$\langle x_n, x^* \rangle - \lambda_n \le \mu$$

$$\underset{n \to \infty}{\Rightarrow} \quad \langle \hat{x}, x^* \rangle - \hat{\lambda} \le \mu$$

$$\forall (x,\lambda) \in \operatorname{epi} f : \quad \langle x, x^* \rangle - \lambda \le f^*(x^*)$$

$$\Rightarrow \quad \forall (x,\lambda) \in \overline{\operatorname{epi} f} : \quad \langle x, x^* \rangle - \lambda \le f^*(x^*)$$

$$\overline{\operatorname{epi} f} = \operatorname{epi} \overline{f}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\sup_{\operatorname{epi} \overline{f}} \left[\langle x, x^* \rangle - \lambda \right]}_{= (\overline{f})^*(x^*)} \le f^*(x^*)$$

$$\left.\begin{array}{l} (\bar{f})^*(x^*) \le f^*(x^*) \\ \bar{f} \le f \overset{¿?}{\Longrightarrow} (\bar{f})^* \ge f^* \end{array}\right\} \quad \underline{\bar{f}^* = f^*}$$

Los casos $f_C^* = f_{\bar{C}}^*$ y $f^* = f_C^*$

son similares!

$$(f^*)^*(x) = \sup_{x^*} \left[\langle x, \underline{x^*} \rangle - f^*(x^*) \right]$$

$$\sup_{y} \left[\langle y, \underline{x^*} \rangle - f(y) \right]$$

Definición 2 (Función biconjugada)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. La función biconjugada de f, denotada por f^{**}, es la conjugada de la función conjugada, es decir

$$f^{**}(x) = \sup_{x^* \in \mathbb{R}^n} \left[\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \right].$$

$$= \sup_{x^*} \inf_{y} \left[\langle x - y, x^* \rangle + f(y) \right]$$

en particular $y = x$

$$\leq \sup_{x^*} \left[\langle x - x, \cancel{x^*} \rangle + f(x) \right] = f(x)$$

$$\Rightarrow \underline{f^{**} \leq f.}$$

Si $\text{epi} f = \emptyset \Rightarrow f = +\infty \ \forall x \Rightarrow f^{**} = +\infty \ \forall x$

Si $\text{epi} f \neq \emptyset \Rightarrow \exists x$ tq $f(x) < \infty$

Si $f \equiv -\infty \Rightarrow f^{**} = -\infty$

reduce $\longrightarrow$ $\boxed{f \text{ sea propia}}$

Proposición 2

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *convexa sci. Entonces*

$$f^{**}(x) \overset{\leq}{=} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

$f^{**} \leq f \Leftrightarrow \text{epi} f^{**} \subseteq \text{epi} f$

Veamos el caso $\text{epi} f^{**} \supseteq \text{epi} f$.

Por contradicción | Sup. $\exists (x, \gamma) \in \text{epi} f^{**}$

pero $(x, \gamma) \notin \text{epi} f$.

$x \in \operatorname{dom}(f^{**})$ y $\underline{\gamma \geq f^{**}(x)}$

$(x,\gamma) \notin \operatorname{epi} f$

(x,γ): compacto; $\operatorname{epi} f$: cerrado. convexo

$\Rightarrow$ por el Teorema 1. (Existe un hiperplano no vertical)

$\exists \ (y,\zeta), \ \zeta \neq 0, \ \exists \ c \in \mathbb{R}$ tq

(y,ζ) (normal)

$$\langle (y,\zeta),(z,w) \rangle < c < \langle (y,\zeta),(x,\gamma) \rangle \quad \forall (z,w) \in \operatorname{epi} f$$

$$\langle y,z \rangle + \zeta w < c < \langle y,x \rangle + \zeta \gamma$$

es un real

w puede ser arbitrariamente grande $\Rightarrow \zeta < 0$

Sin pérdida de generalidad sea $\zeta = -1$

$$\langle y, z\rangle - w < c < \langle y, x\rangle - \underbrace{\gamma}_{\leq -f^{**}(x)} \quad \forall (z, w) \in \underset{\overset{\shortparallel}{f(z)}}{\text{epi} f}.$$

$$\langle y, z\rangle - f(z) < c < \langle y, x\rangle - f^{**}(x) \quad \forall z \in \text{dom} f.$$

$$\sup_{z \in \text{dom} f} [\langle y, z\rangle - f(z)] \leq c < \langle y, x\rangle - f^{**}(x)$$

$$f^{*}(y) < \langle y, x\rangle - f^{**}(x)$$

$$f^{**}(x) < \langle y, x\rangle - f^{*}(y) \quad (\Rightarrow\!\Leftarrow)$$

$$\text{epi} f^{**} = \text{epi} f \Rightarrow \underline{f^{**} = f}$$

$(f^*)^{**} = f^*$

$\searrow$ Sci convexa

Corolario 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$f^{***}(x^*) = f^*(x^*) \quad \forall x^* \in \mathbb{R}^n.$$

$f_{\overline{c}}$ convexa Sci

Comentario

Se deduce de las Proposiciones 1 y 2 que

$$f^{**} = (f_{\overline{c}})^{**} = f_{\overline{c}},$$

$f_{\overline{c}}^{**} = f_{\overline{c}}$

$f_{\overline{c}}^{*} = f^{*}$

de donde,

$$\mathrm{epi}(f^{**}) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{epi}(f)).$$

$f_{\overline{c}}^{**} = f^{**}$

$\mathrm{epi}\, f_{\overline{c}} = \overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{epi}\, f) \Rightarrow$

FIN