HUGO BARRANTES

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Material complementario

UNED
UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA
Institución Benemérita de la Educación y la Cultura

PROMADE
PROGRAMA DE PRODUCCIÓN DE MATERIAL DIDÁCTICO ESCRITO

Producción académica
y asesoría metodológica

Mario Marín Romero

Revisión filológica
María Benavides González

Diagramación
Hugo Barrantes Campos

Encargado de cátedra
Eugenio Rojas Mora

Esta guía de estudio ha sido confeccionada en la UNED, en el año 2011, para ser utilizada en la asignatura "Ecuaciones Diferenciales", código 192, que se imparte en los programas de profesorado y bachillerato en Enseñanza de la Matemática.

Universidad Estatal a Distancia
Vicerrectoría Académica
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

PRESENTACIÓN

El presente material es un complemento del texto *Ecuaciones diferenciales*. Aquí se estudia un método que consiste en transformar ciertos problemas de valores iniciales en problemas de tipo algebraico. Así, se resuelven estos últimos y, mediante un proceso inverso, se obtiene la solución a los problemas originales de valores iniciales. Este método está ligado con una transformación llamada transformada de Laplace y su transformación inversa.

La transformada de Laplace se define mediante una integral impropia; por tal motivo, se inicia con una sección que brinda los elementos básicos de este concepto.

El formato de esta guía es semejante al del texto citado. En general, se sigue una metodología en la cual se tratan de deducir las técnicas por utilizar. El tema contiene bastantes elementos teóricos, por lo tanto aparece un buen número de definiciones y teoremas; además, se provee una serie bastante amplia de ejemplos.

Al final, se proporcionan las soluciones de todos los ejercicios propuestos. Estas se brindan con bastante detalle, aunque no tanto como en los ejemplos resueltos, de modo que le permitan al estudiante tener una guía adecuada con respecto a la forma de resolverlos.

Agradezco a Eugenio Rojas y a Mario Marín la revisión del material, así como sus sugerencias para mejorarlo.

CONTENIDOS

OBJETIVOS

- Utilizar la definición de integral impropia para calcular este tipo de integrales de algunas funciones.
- Aplicar diversos criterios para determinar si la integral impropia de una función dada es convergente.
- Calcular la transformada de Laplace de funciones dadas.
- Calcular la transformada inversa de Laplace de funciones dadas.
- Aplicar la transformada de Laplace y su transformada inversa para resolver ecuaciones diferenciales lineales con valores iniciales.
- Aplicar la transformada de Laplace y su transformada inversa para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con valores iniciales.

1. Integrales impropias

Recuerde que el concepto de *integral definida* se define para funciones acotadas en intervalos cerrados y acotados de números reales. Esto implica que, cuando se considera una integral del tipo

$$\int_a^b f(x)dx,$$

se supone que la función f tiene como dominio un intervalo $[a, b]$ y es acotada en ese dominio. Sin embargo, en algunos contextos, se requiere trabajar con funciones no acotadas o cuyo dominio es un intervalo no acotado. Por ejemplo, pueden aparecer expresiones del tipo

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \quad \text{o} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx.$$

En el primer caso, la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no es acotada en $[0, 1]$ ni está definida en 0. En el segundo, el intervalo no es acotado. Sin embargo, en ambos casos se puede asignar un valor apropiado a la expresión.

Por analogía con las integrales definidas, la expresión $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ se puede interpretar como el área bajo la curva $y = \frac{1}{x^2}$, sobre el intervalo de longitud infinita (no acotado) $[1, +\infty[$. Así se ilustra en la figura 1.

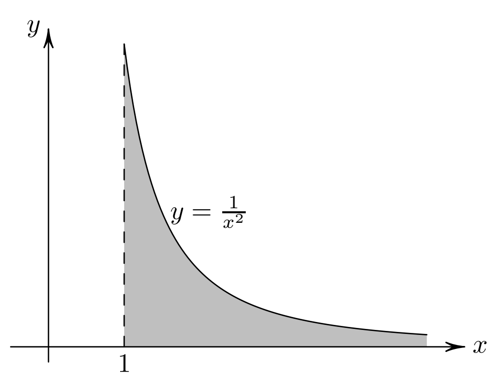


Figura 1. Área bajo la curva $y = \frac{1}{x^2}$.

Una pregunta interesante es si esta área es finita, es decir, si tiene asignado un número real o es infinita. Se puede estimar esto si primero se calcula la integral $\int_1^b \frac{1}{x^2}dx$ y luego se analiza qué sucede a medida que b se hace arbitrariamente grande, esto es, se observa qué pasa cuando $b \to +\infty$. Si se realiza el cálculo mencionado, se obtiene:

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \int_1^b x^{-2}dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^b = -\frac{1}{b} + 1.$$

Si $b \to +\infty$, entonces $-\frac{1}{b} + 1 \to 1$. Por este motivo, parece razonable decir que el área bajo la curva es igual a 1.

Considere ahora la curva $y = \frac{1}{x}$ (vea la figura 2). Si se trata de estimar el área bajo esta curva sobre el intervalo $[1, +\infty[$, mediante el procedimiento anterior, se obtiene:

$$\int_1^b \frac{1}{x}dx = \ln x|_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b - 0 = \ln b.$$

Si $b \to +\infty$, entonces $\ln b \to +\infty$, por ello, en este caso, es razonable decir que el área bajo la curva es infinita.

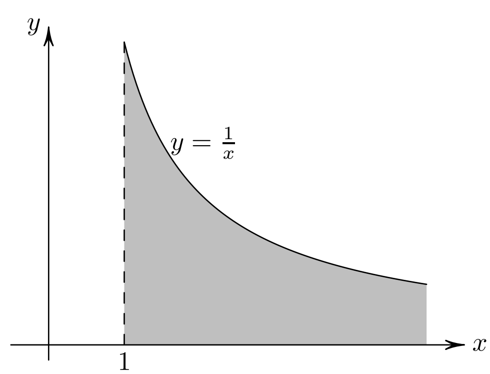


Figura 2. Área bajo la curva $y = \frac{1}{x}$.

Antes de proceder a formalizar lo comentado previamente, se definirá cierto tipo de funciones que son integrables sobre intervalos de la forma $[a, b]$.

Definición 1

Se dice que una función de valores reales f es **continua a trozos** en un intervalo $[a, b]$ si:

i) f es continua o el número de discontinuidades de f en $[a, b]$ es finito.

ii) Los límites

$$\lim_{h\to 0^+} f(x_0+h) \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0^+} f(x_0-h)$$

existen (son números reales) en cada punto $x_0 \in [a,b]$. Note que solo uno de estos límites es pertinente si $x_0 = a$ o $x_0 = b$.

A partir del curso de cálculo integral, se sabe que si f es una función continua a trozos en $[a,b]$, entonces la integral $\int_a^b f(x)dx$ existe.

Ejemplo 1

- La función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1-x & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

  es continua a trozos en $[0,2]$.

  En efecto:

  i) Solo tiene una discontinuidad en el punto $x_0 = 1$.

  ii) Por la definición de continuidad, los límites existen en todos los puntos donde f es continua. Entonces, solo resta verificar que los límites existen en los puntos de discontinuidad. Se observa que:

$$\lim_{h\to 0^+} f(1+h) = \lim_{h\to 0^+} [1-(1+h)] = \lim_{h\to 0^+} (-h) = 0.$$

  Al hacer $h \to 0^+$, se consideran valores de h positivos, por lo que $1+h > 1$ y, por lo tanto, $f(1+h) = 1-(1+h)$.

  De modo análogo:

$$\lim_{h\to 0^+} f(1-h) = \lim_{h\to 0^+} (1-h)^2 = 1.$$

  Se concluye que los dos límites existen.

  De lo anterior, se deduce que f es continua a trozos en $[0,2]$.

- La función

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

  no es continua a trozos en $[-1,1]$.

En efecto, g solo tiene un punto de discontinuidad en $x_0 = 0$, pero

$$\lim_{h \to 0^+} g(0+h) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} = +\infty,$$

por lo que no existe el límite. □

El comportamiento de las funciones alrededor de los puntos de dicontinuidad, tanto cuando son continuas a trozos como cuando no lo son, se ilustra en la figura 3, que representa, respectivamente, las funciones f y g del ejemplo anterior.

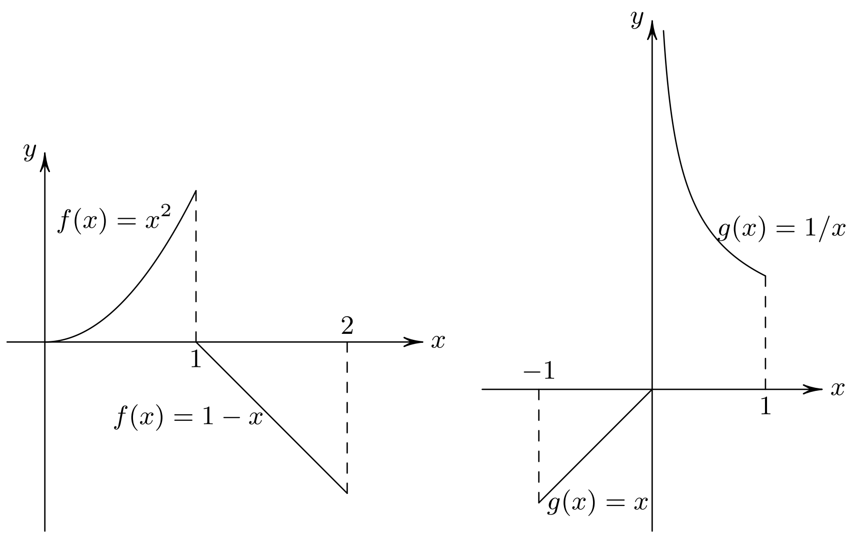


Figura 3. Gráficas de f y g del ejemplo 1.

En lo que sigue se tratará con funciones continuas a trozos.

Definición 2

Sea f una función definida en $[a, +\infty[$, continua a trozos en todos los intervalos de la forma $[a, b]$. Si el límite

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

es finito (es igual a un número real), entonces la **integral impropia** de f en el intervalo $[a, +\infty[$ es

$$\int_a^{+\infty} f(x) = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

y se dice que la integral impropia es **convergente**.

Si el límite indicado es $+\infty$ o $-\infty$, se dice que la integral impropia es **divergente**.

En cualquier otro caso, la función no tiene integral impropia en el intervalo.

Ejemplo 2

De acuerdo con lo hecho al comienzo de esta sección:

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ es convergente e igual a 1.
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ es divergente. $\square$

Ejemplo 3

Estudiar la integral $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x dx$.

Solución:

Se calcula

$$\int_0^b \operatorname{sen} x dx = -\cos x|_0^b = -\cos b + \cos 0 = 1 - \cos b.$$

Resulta que, cuando $b \to +\infty$, el valor de $\cos b$ va desde -1 hasta 1 y, por lo tanto, $\operatorname{sen} x$ no tiene integral impropia en el intervalo $[0, +\infty[$. $\square$

Ejemplo 4

Evaluar $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-2x} dx$.

Solución:

Se calcula primero $\int_0^b xe^{-2x} dx$.

Se utiliza integración por partes; para ello, se hace $u = x$ y $dv = e^{-2x} dx$, por lo que $du = dx$ y $v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^b xe^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} xe^{-2x}\Big|_0^b - \frac{1}{2} \int_0^b e^{-2x} dx \\
&= \left[-\frac{1}{2} xe^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^b \\
&= -\frac{1}{2} be^{-2b} - \frac{1}{4} e^{-2b} + 0 + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} xe^{-2x} dx &= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{2} be^{-2b} - \frac{1}{4} e^{-2b} + \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b}{e^{2b}} + \frac{1}{2e^{2b}} \right) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

$\square$

Observe que si f está definida en $[a, +\infty[$, y es continua a trozos en todo intervalo $[a, b]$, y si c es cualquier número real con $c \geq a$, entonces

$$\int_a^t f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^t f(x)dx,$$

por lo que las dos integrales $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ e $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ son de la misma naturaleza. Esto es, una de ellas es convergente si y solo si la otra también lo es.

Por ejemplo, como $\int_0^{+\infty} xe^{-2x}dx$ es convergente (vea el ejemplo anterior), también lo es $\int_1^{+\infty} xe^{-2x}dx$.

La integral impropia de una función en el intervalo $]-\infty, a[$ se define a continuación.

Definición 3

Sea f una función definida en $]-\infty, a]$, continua a trozos en todo intervalo de la forma $[b, a]$. Si el límite

$$\lim_{b \to -\infty} \int_b^a f(x)dx$$

es finito (es igual a un número real), se define la **integral impropia** de f en el intervalo $]-\infty, a]$ como

$$\int_{-\infty}^a f(x) = \lim_{b \to -\infty} \int_b^a f(x)dx,$$

y se dice que la integral impropia es **convergente**.

Si el límite indicado es $+\infty$ o $-\infty$, se dice que la integral impropia es **divergente**. En cualquier otro caso, la función no tiene integral impropia en ese intevalo.

Ejemplo 5

Estudiar la integral $\int_{-\infty}^0 e^x dx$.

Solución:

Observe que

$$\lim_{b \to -\infty} \int_b^0 e^x dx = \lim_{b \to -\infty} e^x\Big|_b^0 = \lim_{b \to -\infty} (1 - e^b) = 1 - 0 = 1.$$

Es decir, $\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1$ y, por lo tanto, es convergente. □

También se pueden considerar integrales sobre todo el eje real; es decir, integrales del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

En este caso, si las dos integrales

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx \quad \text{y} \quad \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

son convergentes, entonces se dice que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ es convergente y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx.$$

En cualquier otro caso no es convergente.

Ejemplo 6

Determinar el área de la región limitada por la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ y el eje x (la región de la figura 4).

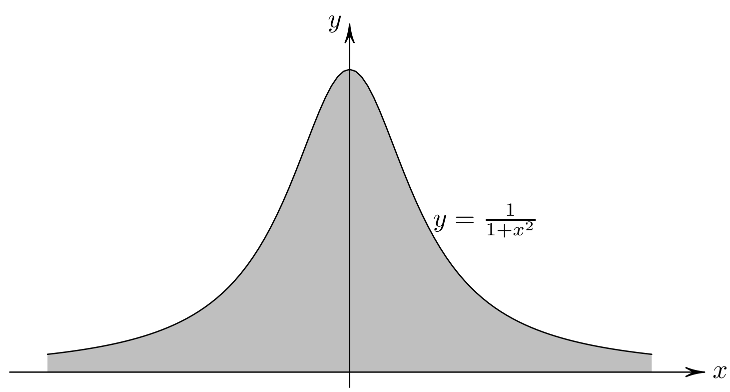


Figura 4. Área bajo la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Solución:

El área indicada es igual a la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}$. Se tiene:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} (\arctan b - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Por simetría, también es posible concluir que

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Se deduce que el área es igual a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \qquad \square$$

1. 1. Criterios de convergencia

Las integrales estudiadas anteriormente tienen la particularidad de que se puede decidir fácilmente si son o no convergentes; para ello, primero se utiliza el teorema fundamental del cálculo y luego se determina el límite correspondiente. Sin embargo, en la práctica, no siempre se puede encontrar la primitiva de una función. Aún así, muchas veces es posible determinar si la integral es convergente o divergente sin necesidad de calcularla. Para esto existe una serie de teoremas, llamados criterios de convergencia, con los cuales es posible determinar si la integral es convergente con solo determinar si la función cumple ciertas condiciones. Se presentan algunos de estos teoremas a continuación.

Teorema 1

La integral impropia

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

solo converge cuando $p > 1$.

Demostración:

A partir del ejemplo 2, si $p = 1$ entonces la integral diverge. Se asume, entonces, $p \neq 1$. Observe que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \to +\infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{1-p}(b^{1-p} - 1).$$

Si $p > 1$, entonces $1 - p < 0$; así $b^{1-p} \to 0$ cuando $b \to +\infty$. Por lo tanto,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{1-p}(b^{1-p} - 1) = \frac{1}{1-p}(-1) = \frac{1}{p-1}.$$

Si $p < 1$, entonces $1 - p > 0$; así, $b^{1-p} \to +\infty$ cuando $b \to +\infty$. Por lo tanto,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{1-p}(b^{1-p} - 1) = +\infty.$$

Se concluye que la integral impropia diverge cuando $p \leq 1$ y converge cuando $p > 1$.

$\Diamond$

Ejemplo 7

- La integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ es convergente pues $\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}}$ y $\frac{3}{2} > 1$. Además, según lo obtenido de la demostración,
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}dx = \frac{1}{\frac{3}{2}-1} = 2.$$
- La integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ no es convergente, puesto que $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ y $\frac{1}{2} < 1$.

El siguiente teorema establece un criterio de tipo teórico para la convergencia de una integral impropia.

Teorema 2 (criterio general de convergencia)

Sea f una función definida en $[a, +\infty[$, continua a trozos en todos los intervalos de la forma $[a, b]$. Para que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ sea convergente, es necesario y suficiente que, para todo número real $\varepsilon > 0$, exista otro número real A, tal que para cualesquiera t', t'', que satisfacen $t'' \geq t' \geq A$, se cumpla $\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right| \leq \varepsilon$.

Demostración:

Considere la función $F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Se sabe[1] que F tiene límite cuando $b \to +\infty$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe A, tal que si $t'' \geq t' \geq A$, entonces $|F(t'') - F(t')| \leq \varepsilon$. Observe que $F(t'') - F(t') = \int_{t'}^{t''} f(x)dx$, con lo cual se tiene lo enunciado. $\Diamond$

El teorema anterior es muy útil para probar otros teoremas más prácticos para determinar convergencia. Tal es el caso del teorema de convergencia absoluta, el cual se presenta después de la siguiente definición.

Definición 4

Sea f, definida en $[a, +\infty[$, continua a trozos en todos los intervalos de la forma $[a, b]$. Si la integral $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ es convergente, entonces se dice que la integral de f en el intervalo $[a, +\infty[$ es **absolutamente convergente**.

Observe que la integral dada en la definición es la integral del valor absoluto de f.

[1] De acuerdo con lo estudiado en el curso de Cálculo Diferencial.

Ejemplo 8

Si $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, entonces $|f(x)| = \frac{1}{x^2}$. Por otra parte, de acuerdo con el ejemplo 2, la integral $\int_1^{+\infty} |f(x)|dx$ es convergente, por lo que la integral de $-\frac{1}{x^2}$ en $[1, +\infty[$ es absolutamente convergente. $\square$

Teorema 3 (convergencia absoluta)

Sea f una función definida en $[a, +\infty[$, continua a trozos en todos los intervalos de la forma $[a, b]$. Si la integral de f es absolutamente convergente en $[a, +\infty[$, entonces la integral de f es convergente en $[a, +\infty[$.

Demostración:

Como la integral de f es absolutamente convergente en $[a, +\infty[$, entonces, del teorema 2, se obtiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe A, tal que

$$\left| \int_{t'}^{t''} |f(x)|dx \right| = \int_{t'}^{t''} |f(x)|dx \leq \varepsilon$$

para todo par de puntos t' y t'' con $t'' \geq t' \geq A$. De aquí se obtiene

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x)dx \right| \leq \int_{t'}^{t''} |f(x)|dx \leq \varepsilon$$

para todo par de puntos t' y t'' con $t'' \geq t' \geq A$. Por lo tanto, según el teorema 2, se prueba que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente. $\Diamond$

El interés práctico del concepto de convergencia absoluta es que, según el teorema anterior, el problema de estudiar la convergencia de la integral de una función f, no necesariamente positiva en todo el intervalo, puede reducirse al de estudiar la convergencia de la integral de su valor absoluto (la cual es no negativa en el intervalo).

Ejemplo 9

Sea $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in [1,2[\cup [3,4[\cup [5,6[\cup \ldots \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in [2,3[\cup [4,5[\cup [6,7[\cup \ldots \end{cases}$$

Observe que $|f(x)| = \frac{1}{x^2}$, y como $\int_1^{+\infty} |f(x)|dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ es convergente (por el teorema 1). Entonces, según el teorema 3, $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ es convergente (vea la gráfica de f en la figura 5). $\square$

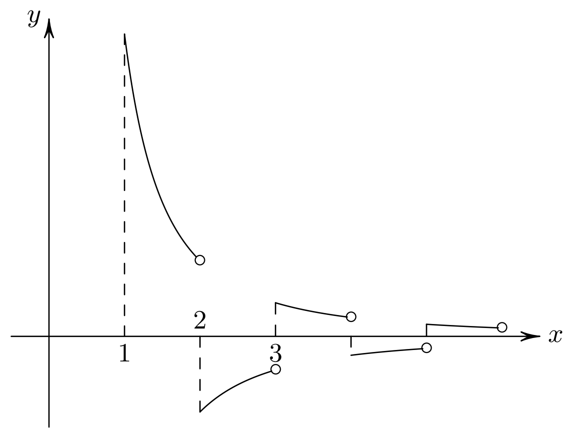


Figura 5. Gráfica de la función f del ejemplo 9.

Teorema 4 (criterio de comparación)

Sean f y g funciones definidas en $[a, +\infty[$, continuas a trozos en todos los intervalos de la forma $[a, b]$, tales que $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$; luego,

1. *Si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ es convergente, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente y, además,*

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

2. *Si $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ es divergente, entonces $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ es divergente.*

Es decir, si la integral de la función mayor es convergente, también lo es la integral de la función menor, y si la integral de la función menor es divergente, igualmente lo será la de la función mayor.

Demostración:

1. Sea $h(b) = \int_a^b |f(x)|dx$, para $b \geq a$. Como $|f(x)| \geq 0$, entonces $x_1 > x_2$ implica que $h(x_1) > h(x_2)$, es decir, h es creciente. Además,

$$h(b) = \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx = M, \tag{1}$$

esto significa que h es acotada.

Como h es creciente y acotada, entonces $\lim_{b \to +\infty} h(b)$ existe. No obstante

$$\lim_{b \to +\infty} h(b) = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Lo cual implica que la integral $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ es convergente y, de (3), se deduce que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente. Además, de (1), se obtiene:

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

2. Se deja como ejercicio para el lector. $\Diamond$

El teorema anterior permite determinar la convergencia de muchas integrales impropias si se comparan con integrales impropias cuya convergencia es conocida.

Ejemplo 10

La integral $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ es muy útil en estadística. Probar que es convergente.

Solución:

La función $y = e^{-x^2}$ no tiene primitiva en términos de las funciones elementales. Esto obliga a verificar su convergencia utilizando algún criterio que no sea la definición.

Observe que $x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq -x \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Además,

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \left(e^{-1} - e^{-b}\right) = \frac{1}{b}.$$

Esto significa que $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ es convergente y como $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$ cuando $x \geq 1$, entonces $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ es convergente.

Por otra parte, para $x > 0$ la función $f(x) = e^{-x^2}$ es decreciente y como $f(0) = 1$, entonces $e^{-x^2} \leq 1$ (para todo $x \geq 0$). Por esta razón,

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \int_0^1 1dx = 1.$$

Se concluye que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ es convergente. $\square$

Para finalizar esta sección, se enuncia un teorema que establece que la integral impropia de una combinación lineal de funciones, cuyas integrales impropias son convergentes, es también convergente.

Teorema 5

Sean f y g dos funciones definidas en $[a, +\infty[$, continuas a trozos en todos los intervalos de la forma $[a, b]$. Si las integrales impropias de f y g son convergentes y p y q son números reales cualesquiera, entonces la integral impropia de $pf + qg$ es convergente. Además, se cumple que

$$\int_a^{+\infty} [pf(t) + qg(t)]dt = p\int_a^{+\infty} f(t)dt + q\int_a^{+\infty} g(t)dt.$$

Demostración:

Por propiedades de la integral definida, para cualquier $b \geq a$,

$$\int_a^b [pf(x) + qg(x)]dx = p\int_a^b f(x)dx + q\int_a^b g(x)dx.$$

Como los dos sumandos del lado derecho de la igualdad anterior tienen límite cuando b tiende a $+\infty$, entonces también lo tiene el lado izquierdo y

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b [pf(x) + qg(x)]dx = p\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx + q\lim_{b\to+\infty}\int_a^b g(x)dx.$$

Así se demuestra lo indicado. $\Diamond$

Ejemplo 11

Por el teorema 1, la integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^5}$ es convergente y, por el ejemplo 4, $\int_1^{+\infty} xe^{-2x}dx$ también lo es, entonces la integral $\int_1^{+\infty}(2x^{-5} + 3xe^{-2x})dx$ es convergente. $\square$

Ejercicios de autoevaluación de la sección 1

1. Si $a > 0$, calcule $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}$.
2. Discuta la convergencia de $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x}dx$.
3. Determine si $\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}dx$ es o no convergente.
4. Discuta la convergencia de $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx$.
5. Calcule $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos 3x\,dx$.

   En los ejercicios del 6 al 12, determine si la integral impropia dada es convergente o divergente.

6. $\int_1^{+\infty} x^{-\pi/4}dx$.
7. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+3}$.
8. $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x dx$.
9. $\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}dx$.
10. $\int_2^{+\infty} e^{2x}(2x^2 - 4x)dx$.
11. $\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+x^4}dx$.
12. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^{1/3}}dx$.

13. Determine si $\int_{0,5}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^4+1} dx$ es o no absolutamente convergente.

    En los ejercicios del 14 al 17, calcule la integral impropia dada.

14. $\int_0^{+\infty} e^{-5x} \operatorname{sen} 2x \, dx$.
15. $\int_{-\infty}^{0} e^{2x} dx$.
16. $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$.
17. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$.
18. Determine el área de la región no acotada entre el eje x y la curva $y = \frac{2}{(x-4)^3}$, para $x \geq 6$.
19. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ e^{x+1} & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

    Dibuje la gráfica de f y evalúe $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$.

20. Determine todos los valores de p para los cuales $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ converge y calcule el valor de la integral cuando existe.

2. Conceptos básicos de transformada de Laplace

La transformada de Laplace convierte cierto tipo de ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas. De este modo, cuando se resuelve la ecuación algebraica, queda también resuelta la ecuación diferencial correspondiente. La transformada de Laplace se define mediante una integral impropia.

Definición 5 (la transformada de Laplace)

Sea f definida en $[0, +\infty[$, la **transformada de Laplace** de f es una función de s definida mediante

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \tag{2}$$

en todos los valores de s para los que la integral sea convergente.

Observe que la transformada de Laplace es una función de la variable s de tal modo, como de costumbre, la notación $\mathscr{L}\left[f(t)\right]$ hace referencia a la función en general, mientras que $\mathscr{L}\left[f(t)\right](s)$ es la función evaluada en s. Sin embargo, en algunas ocasiones, escribir

$\mathscr{L}[f(t)](s)$ puede resultar incómodo o confuso, por ello se convendrá en escribir $\mathscr{L}[f(t)]$ o $\mathscr{L}[f]$ teniendo en mente que es la transformada de Laplace de $f(t)$ evaluada en s. Así mismo, en ocasiones, por comodidad, si una función se denota con una letra minúscula, entonces su transformada de Laplace se representa con la letra mayúscula correspondiente. Por ejemplo, las transformadas de Laplace de $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ serán, respectivamente, $F(s)$, $G(s)$, $H(s)$.

En los siguientes ejemplos se calcula la transformada de Laplace de algunas funciones básicas.

Ejemplo 12

Sea $f(t) = 1$ para todo $t \in [0, +\infty[$ (la función constante 1 en el intervalo $[0, +\infty[$), entonces

$$\mathscr{L}[1] = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{s}e^{-st}\bigg|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-bs} + \frac{1}{s}\right).$$

Este límite existe cuando $s > 0$ y es igual a $\dfrac{1}{s}$, es decir,

$$\mathscr{L}[1] = \frac{1}{s} \quad \text{para } s > 0. \tag{3}$$

□

Ejemplo 13

Sea $f(t) = t$, para todo $t \in [0, +\infty[$, entonces

$$\mathscr{L}[t] = \int_0^{+\infty} e^{-st} t dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b te^{-st} dt.$$

Si se utiliza integración por partes, se obtiene

$$\int_0^b te^{-st} dt = \frac{1}{s^2}e^{-st}(-st-1),$$

por lo que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[t] &= \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{s^2}e^{-st}(-st-1)\right]_0^b \\ &= \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{s^2}e^{-bs}(-sb-1) + \frac{1}{s^2}\right].\end{aligned}$$

Este límite existe cuando $s > 0$ y es igual a $\frac{1}{s^2}$, es decir,

$$\mathscr{L}[t] = \frac{1}{s^2} \quad \text{para } s > 0. \tag{4}$$

□

Ejemplo 14

Sea a un número real cualquiera. Probar que $\mathscr{L}\left[e^{at}\right] = \dfrac{1}{s-a}$ para $s > a$.

Solución:

Se observa que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[e^{at}\right] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}dt \\
&= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-(s-a)t}dt = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^b \\
&= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{s-a}(-e^{-(s-a)b}+1) = \frac{1}{s-a},
\end{aligned}$$

si $s-a>0$, es decir, si $s>a$. □

Ejemplo 15

Probar que $\mathscr{L}\left[\cos at\right] = \dfrac{s}{a^2+s^2}$ para $s > 0$.

Solución:

Por la definición de transformada de Laplace:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[\cos at\right] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}\cos at = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-st}\cos at dt \\
&= \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{e^{-st}(-s\cos at + a \operatorname{sen} at)}{a^2+s^2}\right]_0^b \\
&= \lim_{b\to+\infty}\frac{e^{-sb}(-s\cos ab + a\operatorname{sen} ab)+s}{a^2+s^2} = \frac{s}{a^2+s^2}
\end{aligned}$$

si $s>0$. □

Se puede calcular la transformada de Laplace de diversas funciones; sin embargo, antes se establecerá para qué tipo de funciones existe con certeza tal transformada. En primer lugar, es evidente que para que $\mathscr{L}[f]$ exista, la integral $\int_0^b e^{-st}f(t)dt$ debe existir para todo $b>0$. Esto se puede lograr si f es continua a trozos en todos los intervalos de la forma $[0,b]$, puesto que, en ese caso, $g(t)=e^{-st}f(t)$ también será continua a trozos en todos los intervalos $[0,b]$ y, de esta manera, la integral $\int_0^b e^{-st}f(t)dt$ existe.

Sin embargo, la continuidad por tramos, aunque garantiza la existencia de cada integral, no necesariamente implica la existencia de $\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-st}f(t)dt$, es decir, no asegura la convergencia. Esto significa que se deben imponer algunas restricciones adicionales a la función f. A continuación, se define una propiedad la cual permite, a la función que la posea, tener transformada de Laplace.

Definición 6

Se dice que una función f es de **orden exponencial** en $[0, +\infty[$ si existen constantes C y α, con $C > 0$, tales que

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t} \tag{5}$$

para todos los valores no negativos de t en los cuales f esté definida.

Ejemplo 16

La función constante $f(t) = 1$ es de orden exponencial, puesto que

$$|f(t)| = |1| = 1 \cdot e^{0t},$$

es decir, si se toma $C = 1$ y $\alpha = 0$, se satisface (5). $\square$

Ejemplo 17

Evidentemente la función $f(t) = e^{at}$ es de orden exponencial. Basta tomar $C = 1$ y $\alpha = a$ en (5).

Ejemplo 18

Probar que las funciones $g(t) = \cos at$ y $h(t) = \operatorname{sen} at$ son de orden exponencial para todo $a \in \mathbb{R}$.

Solución:

Como $|\cos at| \leq 1 = 1 \cdot e^{0t}$ (para todo $t > 0$ y todo $a \in \mathbb{R}$), entonces, si se toma $C = 1$ y $\alpha = 0$, se satisface (5).

De modo análogo, se comprueba que $\operatorname{sen} at$ es de orden exponencial. $\square$

En el siguiente teorema se establece que basta verificar que la desigualdad (5) se satisface a partir de un valor $t_0 > 0$ para que la función sea de orden exponencial.

Teorema 6

Sea f continua a trozos en todo intervalo de la forma $[0, b]$ y suponga que existen constantes C (con $C > 0$) y α tales que $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ para todos los valores de t, con $t > t_0 > 0$, en los cuales f esté definida. Entonces, f es de orden exponencial.

Demostración:

Por hipótesis $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ para $t > t_0$. Como f es continua a trozos en $[0, t_0]$, entonces f es acotada en ese intervalo, es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq M$ para todo $t \in [0, t_0]$. Por lo tanto,

$$|f(t)| \leq M = Me^{0t}.$$

Si se toma $K = \max\{C, M\}$ y $\alpha = \max\{0, \beta\}$, se obtiene que $|f(t)| \leq Ke^{\beta t}$, por tanto f es de orden exponencial. $\Diamond$

En el siguiente ejemplo se muestran algunas funciones de orden exponencial.

Ejemplo 19

Probar que las funciones $f(t) = t^n$ (para n entero positivo), $g(t) = t^n e^{at} \operatorname{sen} ct$ (para n entero positivo) y $h(t) = t^n e^{at} \cos ct$ (para n entero positivo) son de orden

Solución:

- Sea $F(t) = \dfrac{t^n}{e^t}$, entonces $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$ (puede probarse utilizando la regla de Lôpital). Por lo tanto, existe un valor t_0 tal que para todo $t > t_0$ se cumple $|F(t)| = \left|\dfrac{t^n}{e^t}\right| < 1$, es decir, $|t^n| < e^t$. En virtud del teorema anterior, se deduce, entonces, que $f(t) = t^n$ es de orden exponencial.

- Sea $G(t) = \dfrac{t^n e^{at} \operatorname{sen} ct}{e^{2at}}$, con $a > 0$; entonces,

$$|G(t)| = \left|\frac{t^n e^{at} \operatorname{sen} ct}{e^{2at}}\right| \leq \left|\frac{t^n e^{at}}{e^{2at}}\right| = \frac{t^n}{e^{at}}.$$

  Como $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^n}{e^{at}} = 0$, existe un valor t_0 tal que para todo $t > t_0$ se tiene $\dfrac{t^n}{e^{at}} < 1$, es decir, $\left|\dfrac{t^n e^{at} \operatorname{sen} ct}{e^{2at}}\right| < 1$ y, por lo tanto, $\left|t^n e^{at} \operatorname{sen} ct\right| < e^{2at}$. Por el teorema anterior se tiene que $g(t) = t^n e^{at} \operatorname{sen} ct$ es de orden exponencial.

  Si $a \leq 0$, entonces $|g(t)| = |t^n e^{at} \operatorname{sen} ct| \leq t^n < e^t$ a partir de algún valor t_0 (vea el primer punto de este ejemplo). Luego, g es de orden exponencial.

- La prueba es análoga a la del punto anterior. $\square$

Los ejemplos previos muestran que las funciones que aparecen primordialmente en el contexto de las ecuaciones diferenciales lineales (vea el capítulo 3 del libro de texto), son de orden exponencial.

Ejemplo 20

La función $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial. En efecto, para cualquier α:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{e^{t^2}}{e^{\alpha t}} = \lim_{t \to +\infty} e^{t(t-\alpha)} = +\infty.$$

Por lo que f no es de orden exponencial. $\square$

Según el siguiente teorema, la continuidad a trozos de una función y el ser de orden exponencial garantizan que tiene transformada de Laplace.

Teorema 7

Si f es una función continua a trozos en todo intervalo de la forma $[0, b]$ y es de orden exponencial, entonces existe un número real s_0 tal que

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

es convergente para todos los valores de $s > s_0$.

Demostración:

Como f es de orden exponencial, existen $C > 0$ y α con $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ para todo $t > 0$; pero, en virtud del ejemplo 14 y del teorema 5, $\int_0^{+\infty} Ce^{-st} e^{\alpha t} dt$ es convergente y, por lo tanto, según el teorema 4, la integral $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ es convergente, puesto que $|e^{-st} f(t)| \leq Ce^{-st} e^{\alpha t}$. $\Diamond$

Según el teorema anterior y los ejemplos precedentes, las funciones 1, e^{at}, $\operatorname{sen} ct$, $\cos ct$, $t^n e^{at} \operatorname{sen} ct$ y $t^n e^{at} \cos ct$ tienen transformada de Laplace.

Ejemplo 21

La función $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 2t - 6 & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 0 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

es, evidentemente, continua a trozos y de orden exponencial.

La transformada de Laplace de f viene dada por

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[f(t)\right] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_0^2 e^{-st} dt + \int_2^3 e^{-st}(2t-6)dt + \int_0^{+\infty} e^{-st} 0 dt \\
&= -\frac{1}{s^2} e^{-st}(st+1)\Big|_0^2 - \frac{1}{s^2} e^{-st}(2st+2-6s)\Big|_2^3 \\
&= -\frac{1}{s^2} e^{-2s}(2s+1) + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2} e^{-3s} + \frac{2}{s^2} e^{-2s}(1-s) \qquad (6)\\
&= -\frac{1}{s^2}\left[e^{-2s}(4s-1) + 2e^{-3s} - 1\right]. \qquad \square
\end{aligned}$$

Además de las citadas anteriormente, el teorema 7 garantiza la existencia de la transformada de Laplace para una gran cantidad de funciones. Sin embargo, observe que las hipótesis de tal teorema son suficientes aunque no necesarias, es decir, hay funciones que tienen transformada de Laplace sin cumplir las hipótesis del teorema. Por ejemplo, la función $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ no es continua a trozos en los intervalos de la forma $[0, b]$, puesto que $\lim_{h \to 0^+} f(x_0 + h) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{0+h}} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$; sin embargo, esta tiene transformada de Laplace que es $\mathscr{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$ (no se demostrará aquí esta afirmación).

Ejercicios de autoevaluación de la sección 2

En los ejercicios del 1 al 6 utilice la definición para calcular la transformada de Laplace de la función dada.

1. $f(t) = (t-1)^2$
2. $g(t) = \operatorname{sen} at$
3. $h(t) = t \operatorname{sen} t$
4. $p(t) = e^t \cos 2t$
5. $q(t) = te^t \operatorname{sen} t$
6. $r(t) = t^2 \cos t$

En los ejercicios del 7 al 10 utilice la definición para calcular la transformada de Laplace de la función dada.

7. $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 1 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$

8. $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < a \\ k & \text{si } a \leq t < b \\ 0 & \text{si } t \geq b \end{cases}$

   con $a, b, k \in \mathbb{R}^+$.

9. $h(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ -2t+4 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$

10. $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{si } 0 \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{si } t \geq 2\pi \end{cases}$

11. Sea $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$. Pruebe que, para cualquier constante a positiva, se cumple que
$$\mathscr{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

En los ejercicios del 12 al 14 pruebe que la función dada es de orden exponencial.

12. $f(t) = t^3$
13. $q(t) = (t+1)^2$
14. $h(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$

15. Pruebe que si f es de orden exponencial, entonces también lo es la función $g(t) = \int_a^t f(x)dx$, para a un número real no negativo.

3. Propiedades de la transformada de Laplace

Se verá a continuación una serie de propiedades de la transformada de Laplace que, junto con las transformadas de algunas funciones básicas, permiten determinar la de muchas otras funciones.

Teorema 8

Sean $\mathscr{L}[f]$ y $\mathscr{L}[g]$ definidas para $s > a$ y p y q números reales cualesquiera; entonces, la transformada de Laplace de $pf + qg$ está definida para $s > a$, y se tiene
$$\mathscr{L}[pf + qg] = p\mathscr{L}[f] + q\mathscr{L}[g].$$

Demostración:

La existencia de la transformada de Laplace para las funciones f y g implica que $\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$ e $\int_0^{+\infty} e^{-st}g(t)dt$ convergen para $s > a$; entonces, en virtud del teorema 5, se tiene lo indicado. $\Diamond$

Ejemplo 22

Del ejemplo 14 se deduce que $\mathscr{L}\left[e^{3t}\right] = \frac{1}{s-3}$, para $s > 3$, y $\mathscr{L}\left[e^{-2t}\right] = \frac{1}{s+2}$, para $s > -2$; entonces, por el teorema 8, se obtiene que
$$\mathscr{L}\left[e^{3t} + 2e^{-2t}\right] = \frac{1}{s-3} + \frac{2}{s+2}, \quad \text{para } s > 3. \qquad \square$$

El objetivo primordial del estudio de la transformada de Laplace es utilizarla como una herramienta para resolver cierto tipo de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales; en ese sentido, es importante el siguiente teorema, el cual liga la transformada de Laplace de una función con la de su derivada.

Teorema 9

Sea f una función de orden exponencial y continua en $[0,+\infty[$ con derivada f' continua a trozos en todo intervalo de la forma $[0,b]$. Entonces

$$\mathscr{L}\left[f'\right] = s\mathscr{L}\left[f\right] - f(0).$$

Demostración:

Solo se demostrará el teorema en el caso en que f' es continua; si f' presenta discontinuidades (de salto, puesto que es continua a trozos), la prueba es algo más compleja.

Integrando por partes: $u = e^{-st}$, $dv = f'(t)dt$, $du = -se^{-st}dt$ y $v = f(t)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[f'\right] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt = e^{-st}f(t)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -se^{-st}f(t)dt \\
&= s\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt + \lim_{b\to+\infty}\left[e^{-st}f(t)\right]_0^b \\
&= s\mathscr{L}\left[f\right] + \lim_{b\to+\infty}\left[e^{-sb}f(b) - e^{-s\cdot 0}f(0)\right] \\
&= s\mathscr{L}\left[f\right] - f(0) + \lim_{b\to+\infty} e^{-sb}f(b).
\end{aligned}$$

Como f es de orden exponencial, entonces existen $C > 0$ y α tales que $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$; luego, $|e^{-sb}f(b)| \leq Ce^{(\alpha-s)b}$. Si $s > \alpha$ se tiene $\alpha - s < 0$ y, por lo tanto, $Ce^{(\alpha-s)b} \to 0$ cuando $b \to +\infty$; luego, $\lim_{b\to+\infty} e^{-sb}f(b) = 0$ (pues $|e^{-sb}f(b)| \leq Ce^{(\alpha-s)b}$). Se concluye entonces que

$$\mathscr{L}\left[f'\right] = s\mathscr{L}\left[f\right] - f(0),$$

como se quería demostrar. $\Diamond$

Utilizando el teorema 9 y transformadas de Laplace ya conocidas, se pueden calcular otras transformadas de Laplace.

Ejemplo 23

Se sabe que $-\frac{1}{a}(\cos at)' = \operatorname{sen} at$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[\operatorname{sen} at\right] &= \mathscr{L}\left[-\tfrac{1}{a}(\cos at)'\right] = -\frac{1}{a}\mathscr{L}\left[(\cos at)'\right] \\
&= -\frac{1}{a}(s\mathscr{L}\left[\cos at\right] - \cos(a\cdot 0)) = -\frac{1}{a}\left(s\cdot\frac{s}{a^2+s^2} - 1\right) = \frac{a}{a^2+s^2}.
\end{aligned}$$

Es decir, $\mathscr{L}\left[\operatorname{sen} at\right] = \dfrac{a}{a^2+s^2}$. $\square$

El siguiente teorema proporciona la transformada de Laplace de una potencia.

Teorema 10 (transformada de Laplace de una potencia)

Sea $f(t) = t^n$, para n entero positivo. Entonces,

$$\mathscr{L}\left[t^n\right] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

para $s > 0$.

Demostración:

Se procede por inducción:

- Si $n = 1$ y según (4), entonces $\mathscr{L}[t] = \frac{1}{s^2} = \frac{1!}{s^{1+1}}$, para $s > 0$.
- Suponga que la propiedad es válida para n (hipótesis de inducción).
- Se debe verificar que $\mathscr{L}\left[t^{n+1}\right] = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}$:

  Si $f(t) = t^{n+1}$, entonces $f'(t) = (n+1)t^n$. Luego,

$$\mathscr{L}\left[f'(t)\right] = (n+1)\mathscr{L}\left[t^n\right]. \tag{7}$$

  Por otra parte, según el teorema 9, $\mathscr{L}[f'(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)$ y, por hipótesis de inducción, $\mathscr{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Si se sustituye en (7), se obtiene:

$$s\mathscr{L}[f(t)] - f(0) = (n+1)\cdot\frac{n!}{s^{n+1}} \quad\Rightarrow\quad s\mathscr{L}[f(t)] - 0 = \frac{(n+1)!}{s^{n+1}}$$
$$\Rightarrow\quad \mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{s}\frac{(n+1)!}{s^{n+1}} \quad\Rightarrow\quad \mathscr{L}[f(t)] = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}.$$

  Es decir,

$$\mathscr{L}\left[t^{n+1}\right] = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}},$$

  como se quería demostrar. ◊

Ejemplo 24

Según el teorema anterior:

- $\mathscr{L}\left[t^2\right] = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}$.
- $\mathscr{L}\left[t^5\right] = \frac{5!}{s^6} = \frac{120}{s^6}$. □

Si en el teorema 9 se cambia la hipótesis de continuidad de f por la hipótesis de que f es continua en $]0,+\infty[$, y tiene una discontinuidad de salto en 0, entonces,

$$\mathscr{L}\left[f'\right] = s\mathscr{L}\left[f\right] - f(0^+),$$

donde

$$f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t).$$

En la figura 6 se ilustra una función continua en $]0,+\infty[$, con una discontinuidad de salto en 0; en este caso, $f(0^+) = 2$.

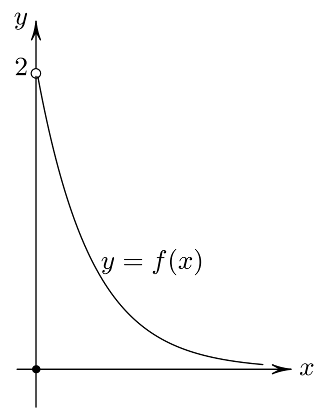


Figura 6. f tiene una discontinuidad de salto en 0.

En general, si g es una función continua a trozos en $[a,b]$, se denota por $g(c^+)$ al $\lim_{t\to c^+} g(t)$, para $t \in [a,b[$. Es decir,

$$g(c^+) = \lim_{t\to c^+} g(t).$$

Observe que si g es continua en c, entonces $g(c^+) = g(c)$; también, si g es continua por la derecha en a, entonces $g(a^+) = g(a)$.

El teorema 9 se generaliza a derivadas de orden superior mediante el teorema que se expone a continuación.

Teorema 11

Sea f una función de orden exponencial y continua en $[0,+\infty[$ tal que $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ son continuas en $[0,+\infty[$ y de orden exponencial y $f^{(n)}$ es continua a trozos en todo intervalo de la forma $[0,b]$. Entonces, $\mathscr{L}\left[f^{(n)}\right]$ existe para $s > a$ y

$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}\right] = s^n\mathscr{L}\left[f\right] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

La prueba de este teorema se hace utilizando inducción y el teorema 9, pero no se realizará aquí.

Observe que la transformada de Laplace de la derivada $n-$ésima de f está ligada con la transformada de Laplace de f y con los valores de f y sus derivadas en 0.

Más adelante, se utiliza con frecuencia la relación expresada en el teorema 11 para el caso $n = 2$; este se expresa de la siguiente manera:

$$\mathscr{L}\left[f''\right] = s^2\mathscr{L}\left[f\right] - sf(0) - f'(0). \tag{8}$$

También se puede relacionar la transformada de Laplace de una integral con la transformada de Laplace de la función integrando, según el siguiente teorema.

Teorema 12

Sea f una función continua en $[0, +\infty[$ y de orden exponencial, entonces

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \frac{1}{s}\mathscr{L}\left[f\right].$$

Demostración:

Sea $g(t) = \int_0^t f(x)dx$, entonces, por el teorema fundamental del cálculo, $g'(t) = f(t)$. Luego, por el teorema 9, se tiene

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[f\right] = \mathscr{L}\left[g'\right] = s\mathscr{L}\left[g\right] - g(0) &= s\mathscr{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right] - \int_0^0 f(x)dx \\ &= s\mathscr{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right] - 0 = s\mathscr{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right],\end{aligned}$$

es decir, $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \dfrac{1}{s}\mathscr{L}\left[f\right]$, como se quería demostrar. $\Diamond$

Cuando se calculan transformadas de Laplace, se utilizan tablas como la proporcionada en la página 35. Sin embargo, desde luego, estas son limitadas y, por lo tanto, deben conocerse algunas propiedades que permiten calcular transformadas de Laplace, de una manera eficiente, a partir de la información dada por la tabla. A continuación, se dan algunos teoremas que proveen reglas especiales, además de las generales ya estudiadas, para el cálculo de transformadas de Laplace.

Teorema 13 (primer teorema de traslación)

Si la transformada de Laplace de f existe para $s > a \geq 0$ y c es una constante cualquiera, entonces

$$\mathscr{L}\left[e^{ct}f(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-c) \quad \textit{para } s > a + c.$$

Demostración:

A partir de la definición de transformada de Laplace, se obtiene:

$$\mathscr{L}\left[e^{ct}f(t)\right](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{ct}f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-c)t}f(t)dt = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-c)$$

para $s - c > a$. $\Diamond$

El anterior teorema dice que si se multiplica f por e^{ct}, la función resultante tiene una transformada de Laplace, la cual consiste en reemplazar s por $s - c$ en la transformada de Laplace de f. Puede verse más sencillo así: si denotamos la transformada de Laplace de $f(t)$ mediante $F(s)$, entonces la transformada de Laplace de $e^{ct}f(t)$ es $F(s-c)$.

Ejemplo 25

1. En el ejemplo 23 se vio que $\mathscr{L}\left[\operatorname{sen} at\right] = F(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$, por lo tanto,

$$\mathscr{L}\left[e^{ct}\operatorname{sen} at\right] = F(s-c) = \frac{a}{(s-c)^2+a^2}, \quad \text{para } s > a.$$

2. De acuerdo con el teorema 10, $\mathscr{L}\left[t^3\right] = G(s) = \frac{6}{s^4}$, por lo tanto,

$$\mathscr{L}\left[e^5t^3\right] = G(s-5) = \frac{6}{(s-5)^4}, \quad \text{para } s > 5.$$ $\square$

En el primer teorema de traslación, se traslada la variable s de F, hay otro teorema de traslación en el que se traslada la variable t de f; pero antes, debe definirse una función especial.

Definición 7

Para cada $a \in \mathbb{R}$, la función **escalón unitaria** o **función de Heaviside** se define mediante

$$H(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < a \\ 1, & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

La función $H(t-a)$ también se escribe como $u_a(t)$. Su gráfica se muestra en la figura 7.

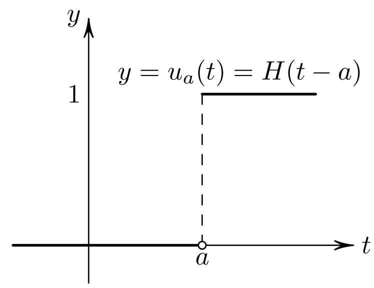


Figura 7. Función escalón unitaria.

Esta función es muy útil para describir funciones definidas por trozos. Por ejemplo, un sistema que está en reposo hasta un determinado momento $t = a$ y luego se pone en movimiento, puede ser modelado mediante la traslación de una función g hacia la derecha a unidades y anular lo que queda antes de a. Esto significa considerar funciones como la siguiente:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < a \\ g(t-a), & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

Esta fórmula se puede escribir, de un modo más fácil de usar en los cálculos, si se utiliza la función escalón unitaria, de la siguiente manera:

$$f(t) = H(t-a)g(t-a).$$

Por ejemplo, un sistema está en reposo y, en el momento $t = 2$, inicia un movimiento de tipo sinusoidal (como se observa en la figura 8); la función que describe el movimiento de este sistema es

$$f(t) = H(t-2)\,\mathrm{sen}(t-2).$$

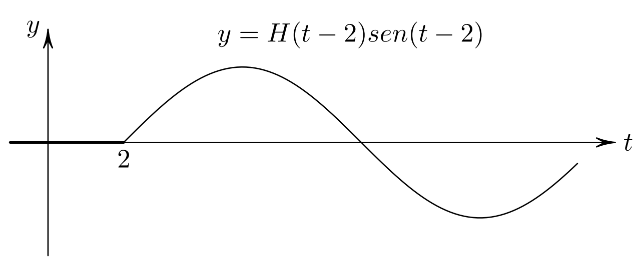


Figura 8. Movimiento sinusoidal a partir de $t = 2$.

El siguiente teorema proporciona una fórmula para la transformada de Laplace de funciones como la anteriormente descrita.

Teorema 14 (segundo teorema de traslación)

Sea

$$f(t) = H(t-a)g(t-a), \quad a \geq 0$$

una función continua a trozos de orden exponencial. Entonces

$$\mathscr{L}[f] = e^{-as}\mathscr{L}[g].$$

Demostración:

$\mathscr{L}[f] = \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt = \int_a^{+\infty} e^{-st}g(t-a)dt$. Si se hace la sustitución $x = t-a$, entonces

$$\mathscr{L}[f] = \int_0^{+\infty} e^{-s(x+a)}g(x)dx = e^{-as}\int_0^{+\infty} e^{-sx}g(x)dx = e^{-as}\mathscr{L}[g]. \qquad \Diamond$$

Observe que, si se utiliza la notación H para la función escalón unitario, lo anterior se puede escribir como

$$\mathscr{L}[H(t-a)g(t-a)] = e^{-as}\mathscr{L}[g(t)],$$

o como

$$\mathscr{L}[u_a(t)g(t-a)] = e^{-as}\mathscr{L}[g(t)],$$

si se usa la notación u_a.

Ejemplo 26

Sea $f(t) = H(t-a)\operatorname{sen} t$, determinar $\mathscr{L}[f]$.

Solución:

Observe que $f(t) = H(t-a)\operatorname{sen}(t+a-a)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f] &= \mathscr{L}[H(t-a)\operatorname{sen}(t+a-a)] \\
&= e^{-as}\mathscr{L}[\operatorname{sen}(t+a)] \quad \text{por el teorema 13} \\
&= e^{-as}\mathscr{L}[\operatorname{sen} t\cos a + \cos t\operatorname{sen} a] \\
&= e^{-as}\left(\cos a\mathscr{L}[\operatorname{sen} t] + \operatorname{sen} a\mathscr{L}[\cos t]\right) \\
&= e^{-as}\left(\cos a\cdot\frac{1}{1+s^2} + \operatorname{sen} a\cdot\frac{s}{1+s^2}\right) \\
&= \frac{e^{-as}(\cos a + s\operatorname{sen} a)}{1+s^2}. \qquad \square
\end{aligned}$$

La función de Heaviside es muy útil para describir funciones definidas a trozos. Suponga que a y b son números con $b > a$, entonces $H(t-a) = 1$ si $t \geq a$ (y es 0 si $t < a$), mientras que $H(t-b) = 1$ si $t \geq b$ (y es 0 si $t < b$). Luego,

$$H(t-a) - H(t-b) = \begin{cases} 0 - 0 = 0 & \text{si } t < a \\ 1 - 0 = 1 & \text{si } a \leq t < b \\ 1 - 1 = 0 & \text{si } t \geq b \end{cases}$$

De este modo, si se tiene una función del tipo:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ p(t) & \text{si } a \leq t < b \\ 0 & \text{si } t \geq b \end{cases}$$

entonces, se puede escribir

$$g(t) = p(t)[H(t-a) - H(t-b)]. \tag{9}$$

Ejemplo 27

Sea

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ t^2 & \text{si } 2 \leq t < 5 \\ t & \text{si } 5 \leq t \end{cases}$$

Escribir $g(t)$ en términos de funciones escalón unitario.

Solución:

Primero se observa que $g(t) = g_1(t) + g_2(t) + g_3(t)$, donde

$$g_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leq t \end{cases} \quad g_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ t^2 & \text{si } 2 \leq t < 5 \\ 0 & \text{si } 5 \leq t \end{cases} \quad g_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ t & \text{si } 5 \leq t \end{cases}$$

Según (9),

$$g_1(t) = H(t-0) - H(t-2), \quad g_2(t) = t^2(H(t-2) - H(t-5)), \quad g_3(t) = tH(t-5).$$

Por lo tanto,

$$g(t) = H(t) + (t^2-1)H(t-2) + (t-t^2)H(t-5). \qquad \square$$

Ejemplo 28

Determinar la transformada de Laplace de la función g cuya gráfica se muestra en la siguiente figura.

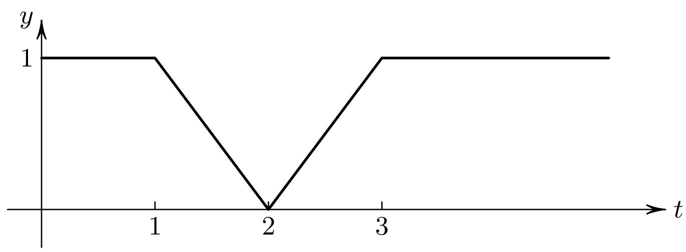


Figura 9. Gráfica de g.

Solución:

El dominio de g es $[0,+\infty[$. Observe que el primer segmento no horizontal tiene como extremos los puntos $(1,1)$ y $(2,0)$, por lo tanto, su pendiente es $\frac{0-1}{2-1}=-1$ y su ecuación es $y=2-t$ (para $t\in[1,2[$); el segundo tiene como extremos los puntos $(2,0)$ y $(3,1)$, entonces su pendiente es 1 y su ecuación es $y=t-2$ (para $t\in[2,3[$). Por esto, la función g se puede definir de la siguiente manera:

$$g(t)=\begin{cases}1 & \text{si } 0\leq t<1\\ -(t-2) & \text{si } 1\leq t<2\\ t-2 & \text{si } 2\leq t<3\\ 1 & \text{si } 3\leq t\end{cases}$$

Se ve que $g(t)$ puede escribirse como una suma de cuatro funciones

$$g(t)=g_1(t)+g_2(t)+g_3(t)+g_4(t),$$

donde

$$g_1(t)=\begin{cases}1 & \text{si } 0\leq t<1\\ 0 & \text{si } t\geq 1\end{cases}\qquad g_2(t)=\begin{cases}0 & \text{si } 0\leq t<1\\ -(t-2) & \text{si } 1\leq t<2\\ 0 & \text{si } t\geq 2\end{cases}$$

$$g_3(t)=\begin{cases}0 & \text{si } 0\leq t<2\\ t-2 & \text{si } 2\leq t<3\\ 0 & \text{si } t\geq 3\end{cases}\qquad g_4(t)=\begin{cases}0 & \text{si } 0\leq t<3\\ 1 & \text{si } t\geq 3\end{cases}$$

Según (9),

$$g_1(t) = H(t) - H(t-1), \qquad g_2(t) = -(t-2)[H(t-1) - H(t-2)],$$
$$g_3(t) = (t-2)[H(t-2) - H(t-3)], \qquad g_4(t) = H(t-3).$$

Luego,

$$\begin{aligned} g(t) &= g_1(t) + g_2(t) + g_3(t) + g_4(t) \\ &= H(t) + (1-t)H(t-1) + (2t-4)H(t-2) + (3-t)H(t-3). \end{aligned}$$

Pero lo anterior se puede escribir como

$$g(t) = H(t) - (t-1)H(t-1) + 2(t-2)H(t-2) - (t-3)H(t-3).$$

Entonces, si se aplica el segundo teorema de traslación, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[g] &= \mathscr{L}[H(t)\cdot 1 - (t-1)H(t-1) + 2(t-2)H(t-2) - (t-3)H(t-3)] \\ &= \mathscr{L}[H(t)\cdot 1] - \mathscr{L}[(t-1)H(t-1)] + 2\mathscr{L}[(t-2)H(t-2)] \\ &\quad - \mathscr{L}[(t-3)H(t-3)] \\ &= e^{-0s}\mathscr{L}[1] - e^{-s}\mathscr{L}[t] + 2e^{-2s}\mathscr{L}[t] - e^{-3s}\mathscr{L}[t] \\ &= \frac{1}{s} - e^{-s}\frac{1}{s^2} + 2e^{-2s}\frac{1}{s^2} - e^{-3s}\frac{1}{s^2} = \frac{s - e^{-s} + 2e^{-2s} - e^{-3s}}{s^2}. \end{aligned}$$ □

Se amplían las propiedades que permiten calcular la transformada de Laplace de diversas combinaciones de las funciones básicas mediante el siguiente teorema que establece que la transformada de Laplace de $t^n f(t)$ está relacionada con la $n-$ésima derivada de la transformada de Laplace de $f(t)$.

Teorema 15

Sea f una función cuya transformada de Laplace existe, entonces

$$\mathscr{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\mathscr{L}[f(t)]\right).$$

Demostración:

Se tiene $\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$; luego, derivando ambos lados con respecto a s:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\mathscr{L}[f(t)]\right) &= \frac{d}{ds}\left(\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}[e^{-st} f(t)]dt \\ &= -\int_0^{+\infty} e^{-st} t f(t)dt = -\mathscr{L}[tf(t)]. \end{aligned}$$

Es decir, $\mathscr{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}[f(t)]$.

Se procede por inducción: si $\mathscr{L}\left[t^{n-1}f(t)\right] = (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left(\mathscr{L}\left[f(t)\right]\right)$, entonces, derivando a ambos lados con respecto a s, se obtiene:

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1}\frac{d^n}{ds^n}\left(\mathscr{L}\left[f(t)\right]\right) &= \frac{d}{ds}\left(\mathscr{L}\left[t^{n-1}f(t)\right]\right)\\ &= \frac{d}{ds}\left(\int_0^{+\infty} e^{-st}t^{n-1}f(t)dt\right) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}[e^{-st}t^{n-1}f(t)]dt\\ &= -\int_0^{+\infty} e^{-st}t^n f(t)dt = -\mathscr{L}\left[t^n f(t)\right].\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathscr{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left(\mathscr{L}\left[f(t)\right]\right)$, como se quería demostrar. $\Diamond$

Ejemplo 29

Calcular la transformada de Laplace de $f(t) = t^2\cos t$.

Solución:

De acuerdo con el teorema anterior, la transformada de Laplace de f es la segunda derivada, con respecto a s de $\mathscr{L}\left[\cos t\right] = \frac{s}{1+s^2}$, es decir,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[t^2\cos t\right] &= \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{1+s^2}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{1+s^2}\right)\right)\\ &= \frac{d}{ds}\left(\frac{1-s^2}{(1+s^2)^2}\right) = \frac{2s^3-6s}{(1+s^2)^3}.\end{aligned}$$ $\square$

El siguiente teorema, que se proporciona sin demostración, permite calcular la transformada de Laplace de ciertas funciones periódicas aunque no sean continuas.

Teorema 16

Si f es de orden exponencial y es periódica con periodo p, entonces,

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right] = \frac{\int_0^p e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-ps}}.$$

Ejemplo 30

La función f, cuya gráfica se muestra en la figura 10, es periódica con periodo $p = 2$, calcular su transformada de Laplace.

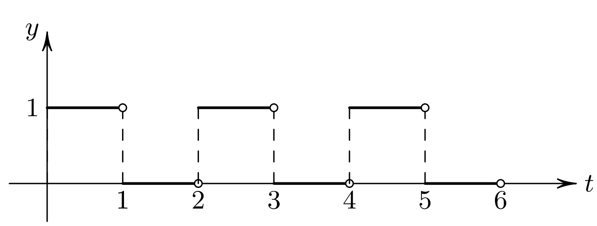


Figura 10. Gráfica de f (periódica).

Solución:

Observe que $f(t) = 1$ si $0 \leq t < 1$ y $f(t) = 0$ si $1 \leq t < 2$, por lo tanto,

$$\int_0^2 e^{-st} f(t)dt = \int_0^1 e^{-st} \cdot 1dt + \int_1^2 e^{-st} \cdot 0dt = \int_0^1 e^{-st}dt = \frac{1}{s}(1 - e^{-s}).$$

Luego,

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})} = \frac{1}{s(1 + e^{-s})}. \qquad \square$$

Se concluirá esta serie de propiedades de la transformada de Laplace con la definición de una nueva operación entre funciones f y g, cuya transformada es, precisamente, el producto de las transformadas $\mathscr{L}[f]$ y $\mathscr{L}[g]$.

Definición 8

Sean f y g funciones continuas a trozos en $[0, +\infty[$, se define su convolución $f * g$ de la siguiente manera

$$(f * g)(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(x)g(t - x)dx.$$

Ejemplo 31

Determinar $(\cos t) * (\operatorname{sen} t)$.

Solución:

Se tiene

$$\begin{aligned}
(\cos t) * (\operatorname{sen} t) &= \int_0^t \cos x \operatorname{sen}(t - x)dx \\
&= \int_0^t \cos x(\operatorname{sen} t \cos x - \operatorname{sen} x \cos t)dx \\
&= \operatorname{sen} t \int_0^t \cos^2 x dx - \cos t \int_0^t \cos x \operatorname{sen} x dx \\
&= \operatorname{sen} t \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right]_0^t - \cos t \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x\right]_0^t \\
&= \operatorname{sen} t \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right] - \cos t \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t\right] \\
&= \operatorname{sen} t \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\cos t \operatorname{sen} t\right] - \frac{1}{2}\cos t \operatorname{sen}^2 t = \frac{1}{2}t \operatorname{sen} t.
\end{aligned}$$

Esto es, $(\cos t) * (\operatorname{sen} t) = \frac{1}{2}t \operatorname{sen} t$. $\square$

Observe que si en la integral que aparece en la definición 3 se hace la sustitución $u = t - x$, se obtiene

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_0^t f(x)g(t-x)dx = \int_t^0 f(t-u)g(u)(-du) \\ &= \int_0^t g(u)f(t-u)du = g(t) * f(t). \end{aligned}$$

Esto significa que la convolución es conmutativa.

El siguiente teorema, cuya demostración no se ofrece, establece que la transformada de Laplace de una convolución es el producto de las transformadas de Laplace de las funciones involucradas.

Teorema 17 (propiedad de convolución)

Sean f y g funciones continuas a trozos en $[0, +\infty[$ y de orden exponencial. Entonces, la transformada de Laplace de la convolución $f(t) * g(t)$ existe, cuando s es mayor que cierto número c, y se tiene

$$\mathscr{L}\left[f(t) * g(t)\right] = \mathscr{L}\left[f(t)\right] \cdot \mathscr{L}\left[g(t)\right].$$

Ejemplo 32

Si $f(t) = \operatorname{sen} 3t$ y $g(t) = e^{2t}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[f(t) * g(t)\right] &= \mathscr{L}\left[e^{2t} * \operatorname{sen} 3t\right] = \mathscr{L}\left[e^{2t}\right] \cdot \mathscr{L}\left[\operatorname{sen} 3t\right] \\ &= \frac{1}{s-2} \cdot \frac{3}{s^2+9} \\ &= \frac{3}{(s-2)(s^2+9)}. \end{aligned}$$

□

El cuadro 1 presenta una tabla de transformadas de Laplace que resume los teoremas vistos y proporciona la transformada de Laplace de las funciones básicas. Es muy útil para los contenidos siguientes.

Cuadro 1: **Tabla de transformadas de Laplace**

$f(t)$	$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$
$f'(t)$	$s\mathscr{L}[f] - f(0)$
$f''(t)$	$s^2\mathscr{L}[f] - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n\mathscr{L}[f] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{s}\mathscr{L}[f]$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a), \quad \text{donde } F(s) = \mathscr{L}[f]$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(\mathscr{L}[f])$
$H(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}\mathscr{L}[f]$
$f(t) * g(t)$	$\mathscr{L}[f] \cdot \mathscr{L}[g]$
$f(t)$ periódica, periodo $p > 0$	$\frac{\int_0^p e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-ps}}$
1	$\frac{1}{s} \quad (s > 0)$
t	$\frac{1}{s^2} \quad (s > 0)$
$t^n \ (n \in \mathbb{Z}^+)$	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s > 0)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad (s > a)$
$\operatorname{sen} at$	$\frac{a}{s^2+a^2} \quad (s > 0)$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2} \quad (s > 0)$
$H(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s} \quad (s > 0)$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (s > a)$
$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \quad (s > a)$
$e^{at}\operatorname{sen} bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2} \quad (s > a)$

Ejercicios de autoevaluación de la sección 3

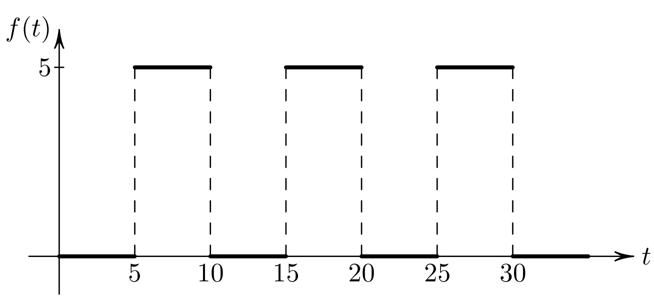
En los ejercicios del 1 al 14 determine la transformada de Laplace de la función dada.

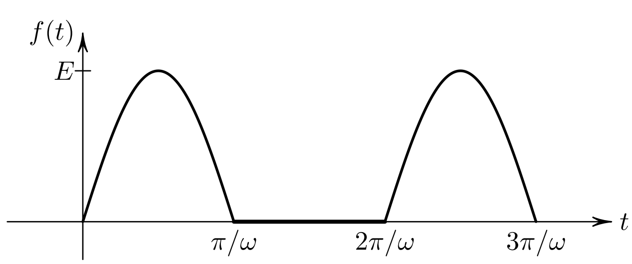
1. $f(t) = 2 \operatorname{sen} t + 3\cos 2t$
2. $g(t) = t^2 e^{4t}$
3. $h(t) = e^{-2t} \operatorname{sen} 5t$
4. $p(t) = (t+a)^3$
5. $q(t) = \operatorname{sen}^2 at$
6. $f(t) = 3e^{-t} + \operatorname{sen} 6t$
7. $g(t) = t^3 - 3t + \cos 4t$
8. $h(t) = -3\cos 2t + 5 \operatorname{sen} 4t$
9. $q(t) = 4\cos^2 3t$
10. $r(t) = \cos^3 t$
11. $f(t) = e^{-3t}(t-2)$
12. $g(t) = e^{4t}[t - \cos t]$
13. $h(t) = e^{-5t}[t^4 + 2t + 1$
14. $q(t) = t^3 \operatorname{sen} 2t$

15. Determine $\mathscr{L}\left[\int_0^t \int_0^\tau \cos(3x)dxd\tau\right]$.

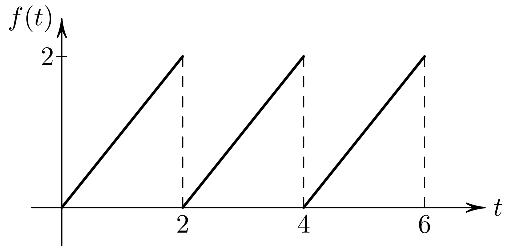
16. Sea $f(t) = |E \operatorname{sen}(\omega t)|$, donde E y ω son constantes positivas; calcule $\mathscr{L}[f]$. Sugerencia: f es periódica con periodo π/ω.

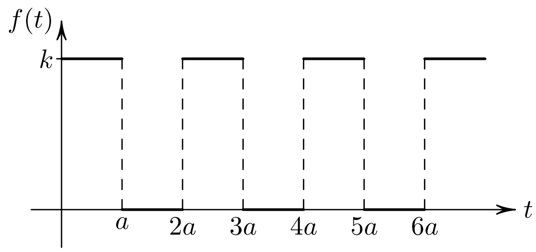
En los ejercicios del 17 al 20 determine la transformada de Laplace de la función f periódica cuya gráfica se proporciona en cada caso.

17. 

18. 

Cada segmento no recto satisface $f(t) = E \operatorname{sen}(\omega t)$

19. 

20. 

En los ejercicios del 21 al 26 escriba la función f en términos de la función de Heaviside.

21. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ t & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$

22. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ t^2 + t & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$

23. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ 1 - t & \text{si } 4 \leq t < 8 \\ 1 + t & \text{si } t \geq 8 \end{cases}$

24. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ t^3 & \text{si } t \geq 4 \end{cases}$

25. $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 3 \\ 0 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$

26. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ 1 - t^2 & \text{si } 4 \leq t < \pi \\ \cos t & \text{si } t \geq \pi \end{cases}$

En los ejercicios del 27 al 30 determine $\mathscr{L}[f]$.

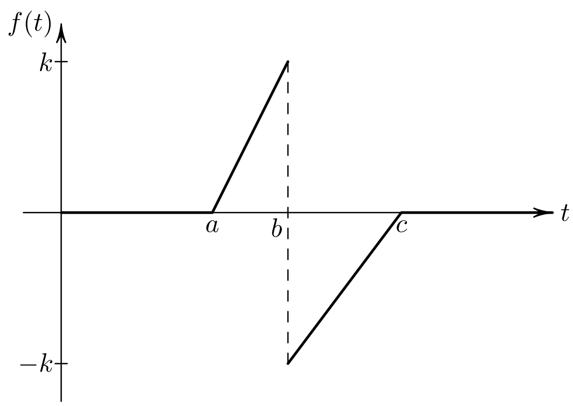
27. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ 1 + t^2 & \text{si } t \geq 5 \end{cases}$

28. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ t^2 & \text{si } 4 \leq t < 5 \\ 2t & \text{si } t \geq 5 \end{cases}$

29. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ -3e^{-2t} & \text{si } t \geq 4 \end{cases}$

30. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ e^{-3t} & \text{si } 4 \leq t < 6 \\ 1 + t & \text{si } t \geq 6 \end{cases}$

31. Escriba la función f, cuya gráfica se muestra a continuación, en términos de la función de Heaviside y luego calcule su transformada de Laplace.



En los ejercicios del 32 al 34 determine la convolución dada y la transformada de Laplace de dicha convolución.

32. $e^{at} * e^{bt}$
33. $t * \cos at$
34. $t * e^{at}$

35. Demuestre que $f * (g + h) = f * g + f * h$.

36. Demuestre que $f * (g * h) = (f * g) * h$.

4. Transformada inversa y ecuaciones diferenciales

Como se ha visto hasta aquí, la transformada de Laplace permite transformar una función de cierta variable en una función de otra variable (la cual se ha denominado s); además, se establecen relaciones entre las transformadas de las funciones y las de sus derivadas e integrales. Todo esto permite transformar una ecuación diferencial en una ecuación algebraica y es, por lo tanto, útil en la resolución de cierto tipo de ecuaciones diferenciales, tal como se verá a continuación.

4. 1. Transformada inversa

En primer lugar se enunciará, sin demostración, un teorema en el cual se establece que se puede invertir el proceso sin problemas, es decir, si se conoce la transformada de Laplace, es posible recuperar la función original.

Teorema 18 (Unicidad de la transformada inversa de Laplace)

Sean f y g funciones continuas a trozos en $[0, +\infty[$ y de orden exponencial, de modo que sus tranformadas de Laplace $\mathscr{L}[f]$ y $\mathscr{L}[g]$ existen. Suponga que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mathscr{L}[f] = \mathscr{L}[g]$ para todo $s > c$, entonces, con la posible excepción de los puntos de discontinuidad, $f(t) = g(t)$ para todo $t > 0$.

El teorema anterior dice que si una ecuación

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) \tag{10}$$

puede resolverse para una función $f(t)$, la solución es esencialmente única. Usualmente, en este contexto, se conviene que dos funciones continuas a trozos que coinciden en todos los puntos, salvo en sus puntos de discontinuidad, son idénticas.

Si la ecuación (10) tiene solución, es decir, si existe una función $f(t)$ que la satisface, entonces esta solución se llama **transformada inversa de Laplace** de $F(s)$ y se escribe

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)](t) = f(t). \tag{11}$$

Esto significa que $\mathscr{L}^{-1}[F(s)](t) = f(t)$ si y solo si $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$. De todo lo anterior también se deduce que si $F(s)$ y $G(s)$ tienen transformada inversa de Laplace y si a y b son números reales, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}[aF(s) + bG(s)](t) = a\mathscr{L}^{-1}[F(s)](t) + b\mathscr{L}^{-1}[G(s)](t).$$

Ejemplo 33

De acuerdo con los ejemplos anteriores, se tiene:

- $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right](t) = \operatorname{sen} at.$
- $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^5}\right](t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{24}\frac{24}{s^5}\right](t) = \frac{1}{24}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{24}{s^5}\right](t) = \frac{1}{24}t^4.$ □

Ejemplo 34

Calcular $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2+4)}\right]$.

Solución:

Se puede descomponer la fracción en fracciones parciales[2]:

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2+4} = \frac{(s^2+4)A + s(Bs+C)}{s(s^2+4)} = \frac{(A+B)s^2 + Cs + 4A}{s(s^2+4)}.$$

[2] Vea la técnica de descomponer una fracción en suma de fracciones parciales en cualquier texto de Cálculo Integral.

Lo anterior significa que $1 = (A+B)s^2 + Cs + 4A$; por lo tanto $A+B=0$, $C=0$ y $4A=1$. De aquí se concluye que $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$ y $C=0$; por eso,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+4)}\right] &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{4}\cdot\frac{s}{s^2+4}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right]\right) \\
&= \tfrac{1}{4}\left(1-\cos 2t\right). \qquad \square
\end{aligned}$$

Ejemplo 35

Determinar la transformada inversa de Laplace de

$$H(s) = \frac{2s+3}{s^2-4s+20}.$$

Solución:

Primero se completa cuadrados en el denominador para aplicar el primer teorema de traslación:

$$\begin{aligned}
\frac{2s+3}{s^2-4s+20} = \frac{2s+3}{(s-2)^2+16} &= \frac{2(s-2)+7}{(s-2)^2+16} \\
&= 2\cdot\frac{s-2}{(s-2)^2+16}+\frac{7}{4}\cdot\frac{4}{(s-2)^2+16}.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+16}\right] &= e^{2t}\cos 4t \quad \text{y} \\
\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s-2)^2+16}\right] &= e^{2t}\operatorname{sen} 4t
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left[H(s)\right] &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2-4s+20}\right] \\
&= 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+16}\right]+\frac{7}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s-2)^2+16}\right] \\
&= 2e^{2t}\cos 4t+\frac{7}{4}e^{2t}\operatorname{sen} 4t. \qquad \square
\end{aligned}$$

Ejemplo 36

Calcular $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-2s}}{s^2+4s+5}\right]$.

Solución:

De acuerdo con el segundo teorema de traslación:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+4s+5}\right] = H(t-2)g(t-2),$$

donde

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4s+5}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+1}\right] \\ &= e^{-2t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] \qquad \text{(por el primer teorema de traslación)} \\ &= e^{-2t}\operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

En conclusión,

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+4s+5}\right] = H(t-2)e^{-2(t-2)}\operatorname{sen}(t-2). \qquad \square$$

Ejemplo 37

Determinar $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^4+2s+1}\right]$.

Solución:

Se puede aplicar la propiedad de convolución de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^4+2s+1}\right] &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right] \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] * \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \cos t * \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

De acuerdo con el ejemplo 31, $\cos t * \operatorname{sen} t = \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t$. Es decir,

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^4+2s+1}\right] = \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t. \qquad \square$$

Antes de proceder a aplicar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales, se debe advertir que no toda función de s tiene una transformada inversa de Laplace; esto se pone de manifiesto en el siguiente teorema.

Teorema 19

Si f es una función continua a trozos de orden exponencial, entonces

$$\lim_{s\to+\infty} \mathscr{L}[f] = 0.$$

Demostración:

En efecto, en la prueba del teorema 7 se vio que existen números C y α tales que $|e^{-st}f(t)| \leq Ce^{-st}e^{\alpha t}$; esto implica que

$$|\mathscr{L}[f(t)]| \leq \int_0^{+\infty} Ce^{-(s-\alpha)t}dt = \frac{C}{s-\alpha}$$

para todo $s > \alpha$. Así, si se toma el límite cuando $s \to +\infty$ se tiene el resultado. $\Diamond$

Ejemplo 38

Sea $P(s) = \frac{s^2+1}{s^2-1}$. Observe que

$$\lim_{s\to+\infty} P(s) = \lim_{s\to+\infty} \frac{s^2+1}{s^2-1} = 1.$$

Esto indica que no existe una función $p(t)$ cuya transformada de Laplace sea $P(s)$ (no existe la transformada inversa de Laplace de $P(s)$. $\square$

4. 2. Solución de ecuaciones lineales

La técnica de la transformada de Laplace es útil para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y con condiciones iniciales. Gracias al teorema 11, las condiciones iniciales se incorporan en el proceso de resolución; esto hace que no sea necesario encontrar primero la solución general de la ecuación diferencial. Otra de las ventajas que ofrece este método es que la función $f(t)$ que aparece en la ecuación (12) no debe ser necesariamente continua; gracias a algunos de los teoremas vistos antes, puede ser continua a trozos, con la condición de que su transformada de Laplace exista.

Si se tiene una ecuación diferencial del tipo

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(t), \tag{12}$$

con condiciones iniciales $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$, el procedimiento para resolverla, mediante el uso de la transformada de Laplace, consiste en convertir el problema en una ecuación de la forma $\mathscr{L}[y] = F(s)$ y calcular $y = \mathscr{L}^{-1}[F(s)](t)$, siempre que las transformaciones involucradas existan.

Se ilustra a continuación el procedimiento mediante algunos ejemplos, primero se proporcionará uno muy sencillo. Para trabajar de modo eficiente conviene tener a mano una tabla de transformadas de Laplace como la que se brinda en la página 35.

Ejemplo 39

Resolver el problema de valores iniciales

$$4y'' - y = 1, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = \tfrac{1}{2}.$$

Solución:

Se aplica el operador $\mathscr{L}$ a ambos lados de la ecuación y se utiliza la propiedad dada por el teorema 8:

$$4\mathscr{L}\left[y''\right] - \mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[1].$$

De acuerdo con (8) y con (3), esta ecuación se puede escribir como

$$\begin{aligned} 4(s^2\mathscr{L}[y] - s\cdot 0 - \tfrac{1}{2}) - \mathscr{L}[y] &= \frac{1}{s}, \\ 4s^2\mathscr{L}[y] - 2 - \mathscr{L}[y] &= \frac{1}{s}, \\ (4s^2 - 1)\mathscr{L}[y] &= \frac{1}{s} + 2 = \frac{1+2s}{s}. \end{aligned}$$

Luego, si se despejan $\mathscr{L}[y]$, se obtiene

$$\mathscr{L}[y] = \frac{1+2s}{s(4s^2-1)} = \frac{1+2s}{s(2s-1)(2s+1)} = \frac{1}{s(2s-1)}.$$

Se puede escribir la fracción $\frac{1}{s(2s-1)}$ como una suma de fracciones parciales, así:

$$\frac{1}{s(2s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{2s-1} = \frac{(2A+B)s - A}{s(2s-1)}.$$

Si se igualan los numeradores de la primera y la última fracción en la expresión anterior, se obtiene:

$$1 = (2A+B)s - A.$$

Entonces, $2A + B = 0$, $1 = -A$; por lo que $A = -1$ y $B = 2$. En síntesis,

$$\mathscr{L}[y] = \frac{1}{s(2s-1)} = \frac{2}{2s-1} - \frac{1}{s} = \frac{1}{s-\frac{1}{2}} - \frac{1}{s},$$

es decir, si se aplica $\mathscr{L}^{-1}$ y se usa el teorema 13 y (3) (o de acuerdo con la tabla de la página 35) se tiene:

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = e^{\frac{1}{2}t} - 1.$$

Así, la solución del problema de valores iniciales es $y = e^{\frac{1}{2}t} - 1$.

Ejemplo 40

Resolver el problema de valores iniciales,

$$y'' + 9y = \tfrac{3}{2}\operatorname{sen} 2t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Si se aplica el operador $\mathscr{L}$ a ambos lados y se utilizan diferentes propiedades, se obtiene:

$$\begin{aligned}
s^2\mathscr{L}[y] + 9\mathscr{L}[y] &= \tfrac{3}{2}\mathscr{L}[\operatorname{sen} 2t], \\
s^2\mathscr{L}[y] + 9\mathscr{L}[y] &= \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4} = \frac{3}{s^2+4}, \\
(s^2+9)\mathscr{L}[y] &= \frac{3}{s^2+4}, \\
\mathscr{L}[y] &= \frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}.
\end{aligned}$$

Ahora se descompondrá $\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}$ como suma de fracciones parciales. Se hace

$$\begin{aligned}
\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)} &= \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+9} \\
&= \frac{(As+B)(s^2+9) + (Cs+D)(s^2+4)}{(s^2+4)(s^2+9)} \\
&= \frac{(A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (9A+4C)s + 9B + 4D}{(s^2+4)(s^2+9)}.
\end{aligned}$$

De aquí, $3 = (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (9A+4C)s + 9B + 4D$, de modo que, al igualar los coeficientes de las potencias iguales de s, se obtiene:

$$A + C = 0, \quad B + D = 0, \quad 9A + 4C = 0, \quad 9B + 4D = 3,$$

si se resuelve este sistema de ecuaciones: $A = 0$, $B = \frac{3}{5}$, $C = 0$ y $D = -\frac{3}{5}$. Es decir,

$$\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s^2+4} - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s^2+9};$$

por lo tanto,

$$\mathscr{L}[y] = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{s^2+4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{s^2+9}.$$

Si se aplica $\mathscr{L}^{-1}$ a ambos lados, se obtiene

$$y = \frac{3}{10} \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5} \operatorname{sen} 3t.$$

Este ejemplo ilustra lo mencionado al comienzo en cuanto a que, mediante la transformada de Laplace, el problema de valores iniciales se convierte en un problema puramente algebraico. □

Ejemplo 41

Resolver el problema de valores iniciales

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t}, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 4.$$

Solución:

Al aplicar $\mathscr{L}$, se obtiene:

$$\mathscr{L}[y''] - 3\mathscr{L}[y'] + 2\mathscr{L}[y] = 2\mathscr{L}\left[e^{3t}\right],$$

es decir,

$$\begin{aligned} s^2\mathscr{L}[y] - sy(0) - y'(0) - 3(s\mathscr{L}[y] - y(0)) + 2\mathscr{L}[y] &= 2\mathscr{L}\left[e^{3t}\right], \\ s^2\mathscr{L}[y] - 4 - 3s\mathscr{L}[y] + 2\mathscr{L}[y] &= \frac{2}{s-3}, \\ (s^2 - 3s + 2)\mathscr{L}[y] &= \frac{2}{s-3} + 4 \end{aligned}$$

y, al despejar $\mathscr{L}[y]$,

$$\mathscr{L}[y] = \frac{4s-10}{(s^2-3s+2)(s-3)} = \frac{4s-10}{(s-1)(s-2)(s-3)}.$$

Si se escribe

$$\frac{4s-10}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}$$

y se procede como en el ejemplo anterior, se obtiene:

$$\frac{4s-10}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{-3}{s-1} + \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s-3}.$$

Es decir,

$$\mathscr{L}[y] = -3\cdot\frac{1}{s-1} + 2\cdot\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-3}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y &= \mathscr{L}^{-1}\left[-3\cdot\frac{1}{s-1} + 2\cdot\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-3}\right] \\ &= -3\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]. \end{aligned}$$

Luego, de acuerdo con la tabla de transformadas, la solución del problema de valores iniciales es

$$y = -3e^{t} + 2e^{2t} + e^{3t}.$$

□

Ejemplo 42

Resolver el problema de valores iniciales

$$y'' + 6y' + 13y = 10e^{-2t}, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -13.$$

Solución:

Se tiene

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[y''] + 6\mathscr{L}[y'] + 13\mathscr{L}[y] &= 10\mathscr{L}\left[e^{-2t}\right], \\ s^2\mathscr{L}[y] - 3s + 13 + 6(s\mathscr{L}[y] - 3) + 13\mathscr{L}[y] &= \frac{10}{s+2}, \\ (s^2 + 6s + 13)\mathscr{L}[y] - 3s - 5 &= \frac{10}{s+2}, \\ \mathscr{L}[y] &= \frac{1}{s^2+6s+13}\left(\frac{10}{s+2} + 3s + 5\right) \\ &= \frac{3s^2 + 11s + 20}{(s+2)(s^2+6s+13)}. \end{aligned}$$

Al descomponer la última fracción en fracciones simples, se obtiene:

$$\mathscr{L}[y] = \frac{s-3}{s^2+6s+13} + \frac{2}{s+2}.$$

Se observa que $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{s+2}\right] = 2e^{-2t}$ y se calcula $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s-3}{s^2+6s+13}\right]$.

Se puede completar cuadrados en el denominador para aplicar el primer teorema de traslación:

$$\begin{aligned}\frac{s-3}{s^2+6s+13} &= \frac{s-3}{(s+3)^2+4} = \frac{(s+3)-6}{(s+3)^2+4}\\ &= \frac{s+3}{(s+3)^2+4} - 3\cdot\frac{2}{(s+3)^2+4}\\ &= F(s+3)-3G(s+3),\end{aligned}$$

donde

$$F(s) = \frac{s}{s^2+4} = \mathscr{L}\left[\cos 2t\right] \quad \text{y} \quad G(s) = \frac{2}{s^2+4} = \mathscr{L}\left[\operatorname{sen} 2t\right].$$

Luego, por el primer teorema de traslación

$$y(t) = 2e^{-2t} + e^{-3t}\cos 2t - 3e^{-3t}\operatorname{sen} 2t. \qquad \square$$

Recuerde que el segundo teorema de traslación establece, bajo las hipótesis apropiadas, que

$$\mathscr{L}\left[f(t-a)H(t-a)\right] = e^{-as}\mathscr{L}\left[f(t)\right],$$

por ello

$$\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-as}\mathscr{L}\left[f(t)\right]\right] = f(t-a)H(t-a).$$

Se aplicará esto para resolver la ecuación diferencial que se proporciona en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 43

Resolver $y'' + 4y = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$, donde $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < 3 \\ t & \text{si } t \ge 3 \end{cases}$.

Solución:

Observe que f se puede escribir como

$$f(t) = tH(t-3) = (t-3+3)H(t-3) = (t-3)H(t-3) + 3H(t-3).$$

Luego,

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= (t-3)H(t-3) + 3H(t-3) \quad \Rightarrow \\ \mathscr{L}\left[y''\right] + 4\mathscr{L}\left[y\right] &= \mathscr{L}\left[(t-3)H(t-3)\right] + 3\mathscr{L}\left[H(t-3)\right] \quad \Rightarrow \\ (s^2+4)\mathscr{L}\left[y\right] &= \frac{1}{s^2}e^{-3s} + \frac{3}{s}e^{-3s} \quad \text{(según el comentario previo).}\end{aligned}$$

De aquí,

$$\mathscr{L}[y] = \frac{3s+1}{s^2(s^2+4)} e^{-3s},$$

por lo que

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3s+1}{s^2(s^2+4)} e^{-3s}\right].$$

Para calcular esta transformada inversa de Laplace, observamos el factor e^{-3s} que indica la necesidad de utilizar el segundo teorema de traslación. De este modo, se calcula primero

$$g(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3s+1}{s^2(s^2+4)}\right]$$

y luego se aplica el mencionado teorema. Para emplear la técnica de descomposición en fracciones parciales se escribe

$$\frac{3s+1}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

y se determinan los valores de A, B, C y D para obtener

$$\frac{3s+1}{s^2(s^2+4)} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s^2+4}.$$

De la tabla se obtiene

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s^2+4}\right] \\ &= \frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}t - \frac{3}{4}\cos 2t - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t. \end{aligned}$$

Así, la solución del problema es

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t-3)H(t-3) \\ &= \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}(t-3) - \frac{3}{4}\cos 2(t-3) - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2(t-3)\right) H(t-3) \\ &= \frac{1}{8}\left(2t - 6\cos 2(t-3) - \operatorname{sen} 2(t-3)\right) H(t-3). \end{aligned}$$

Esta solución se puede escribir como

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < 3 \\ \frac{1}{8}\left(2t - 6\cos 2(t-3) - \operatorname{sen} 2(t-3)\right) & \text{si } t \ge 3 \end{cases} \qquad \square$$

El uso de trasformadas de Laplace resulta útil en problemas de aplicación en los que aparecen fuerzas no necesariamente continuas (pero sí continuas a trozos).

Ejemplo 44

Al suspender una masa cuyo peso es 29,4 N de cierto resorte, este se alarga 0,6125 m desde su longitud natural. A partir del reposo, en el momento $t = 0$, la masa se pone en movimiento aplicándole una fuerza externa $F(t) = \cos 4t$, pero en el instante $t = 4\pi$ esa fuerza cesa súbitamente, permitiendo que la masa continúe su movimiento. Si se desprecia la fricción, determinar la función de posición resultante para la masa.

Solución:

La posición $y(t)$ de la masa en el tiempo t se rige por la ecuación diferencial[3]

$$My'' + cy' + ky = F(t),$$

donde M es la masa del objeto, c es la constante de fricción, k es la constante de fuerza del resorte y $F(t)$ es la fuerza externa aplicada.

En este caso, el peso de la masa es $W = 29{,}4\,N$, entonces la masa es $M = \frac{29{,}4}{9{,}8} = 3$ kg. La elongación del resorte es $\Delta\ell = 0{,}6125$, por lo que su constante es $k = \frac{29{,}4}{0{,}6125} = 48\,N/\text{m}$; además, no hay fricción, por ello $c = 0$. Así, la ecuación diferencial que rige el movimiento de la masa es

$$3y'' + 48y = f(t),$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} \cos 4t & \text{si } 0 \leq t < 4\pi \\ 0 & \text{si } 4\pi \leq t \end{cases}$$

La ecuación se puede escribir como $y'' + 16y = \frac{1}{3}f(t)$. Luego, si se aplica $\mathscr{L}$ y las propiedades correspondientes, se obtiene:

$$s^2\mathscr{L}[y] + 16\mathscr{L}[y] = \tfrac{1}{3}\mathscr{L}[f(t)] \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}[y] = \frac{1}{3(s^2+16)}\mathscr{L}[f(t)]\,. \tag{13}$$

Ahora, se calcula $\mathscr{L}[f(t)]$. De acuerdo con (9),

$$f(t) = \cos 4t[H(t) - H(t-4\pi)] = (\cos 4t)H(t) - (\cos 4t)H(t-4\pi).$$

Pero si $t \geq 0$, entonces $H(t) = 1$ y, por otra parte, $\cos 4t = \cos 4(t-4\pi)$ (en virtud de la periodicidad del coseno). Por esto, se puede escribir

$$f(t) = \cos 4t - (\cos 4(t-4\pi))H(t-4\pi).$$

[3]Vea las páginas de la 9 a la 11 del libro de texto.

Entonces, de acuerdo con el segundo teorema de traslación,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[f(t)\right] &= \mathscr{L}\left[\cos 4t\right] - \mathscr{L}\left[(\cos 4(t-4\pi))H(t-4\pi)\right] \\ &= \frac{s}{s^2+16} - e^{-4\pi s}\frac{s}{s^2+16}.\end{aligned}$$

Ahora, si se sustituye en (13):

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[y\right] &= \frac{1}{3(s^2+16)}\left(\frac{s}{s^2+16} - e^{-4\pi s}\frac{s}{s^2+16}\right) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{s}{(s^2+16)^2} - \frac{1}{3}\cdot e^{-4\pi s}\frac{s}{(s^2+16)^2} \\ \Rightarrow \quad y &= \frac{1}{3}\left(\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+16)^2}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[e^{-4\pi s}\frac{s}{(s^2+16)^2}\right]\right). \qquad (14)\end{aligned}$$

Recuerde que $\mathscr{L}\left[\operatorname{sen} 4t\right] = \frac{4}{s^2+16}$, luego,

$$\mathscr{L}\left[t \operatorname{sen} 4t\right] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{4}{s^2+16}\right) = \frac{8s}{(s^2+16)^2}.$$

De aquí se deduce que

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+16)^2}\right] = \frac{1}{8}t \operatorname{sen} 4t,$$

y, de acuerdo con el segundo teorema de traslación,

$$\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-4\pi s}\frac{s}{(s^2+16)^2}\right] = \frac{1}{8}(t-4\pi)\operatorname{sen} 4(t-4\pi)H(t-4\pi).$$

En conclusión, si se sustituye en (14):

$$\begin{aligned}y &= \tfrac{1}{3}\left[\tfrac{1}{8}t \operatorname{sen} 4t - \tfrac{1}{8}(t-4\pi)\operatorname{sen} 4(t-4\pi)H(t-4\pi)\right] \\ &= \tfrac{1}{24}\left[t \operatorname{sen} 4t - (t-4\pi)(\operatorname{sen} 4t)H(t-4\pi)\right] \\ &= \tfrac{1}{24}\left[t - (t-4\pi)H(t-4\pi)\right]\operatorname{sen} 4t.\end{aligned}$$

Esta función se puede escribir como

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{24}t \operatorname{sen} 4t & \text{si } 0 \le t < 4\pi \\ \\ \frac{1}{6}\pi \operatorname{sen} 4t & \text{si } 4\pi \le t \end{cases}$$

La gráfica de y se proporciona en la figura 11. □

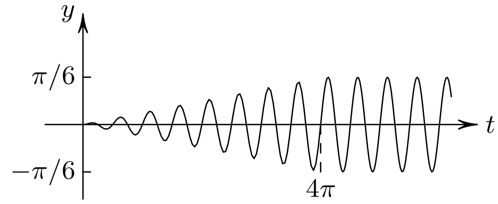


Figura 11. Gráfica de la función y del ejemplo 44.

Ejercicios de autoevaluación de la sección 4

En los ejercicios del 1 al 21, calcule la transformada inversa de Laplace de la función de s dada.

1. $F(s) = \dfrac{2s+3}{s^2-4s+20}$
2. $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$
3. $H(s) = \dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$
4. $P(s) = \dfrac{1}{s(s+2)^2}$
5. $Q(s) = \dfrac{1}{(s-a)^n}, n \in \mathbb{Z}^+$
6. $R(s) = \dfrac{3s^2}{(s^2+1)^2}$
7. $R(s) = \dfrac{2}{s^4}\left[\dfrac{1}{s}+\dfrac{3}{s^2}+\dfrac{4}{s^6}\right]$
8. $Q(s) = \dfrac{s-4}{(s^2+5)^2}+\dfrac{s}{s^2+2}$
9. $P(s) = \dfrac{1}{s^2-4s+5}$
10. $H(s) = \dfrac{s-3}{s^2+10s+9}$
11. $G(s) = \dfrac{s}{s^2-14s+1}$
12. $F(s) = \dfrac{e^{-4s}}{s(s^2+16)}$
13. $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{(s-5)^3}$
14. $G(s) = \dfrac{se^{-10s}}{(s^2+4)^2}$
15. $H(s) = \dfrac{s^2-2s+3}{s(s^2-3s+2)}$
16. $P(s) = \dfrac{4s-5}{s^3-s^2-5s-3}$
17. $Q(s)\dfrac{-s}{(s-4)^2(s-5)}$
18. $R(s) = \dfrac{s^2+4s+1}{(s-2)^2(s+3)}$
19. $R(s) = \dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2-b^2)}$
20. $Q(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s^2-9)}$
21. $P(s) = \dfrac{2}{s^3(s^2+5)}$

En los ejercicios del 22 al 37, resuelva el problema de valores iniciales que se proporciona en cada caso.

22. $y' - 2y = e^{5t}, \quad y(0) = 3.$

23. $y'' - y = 1, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

24. $y'' - y' - 2y = 4t^2, \quad y(0) = 1, y'(0) = 4.$

25. $y'' + y = e^{-2t}\operatorname{sen} t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$

26. $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 10\cos t, \quad y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 3.$

27. $y'' + 4y' + 8y = \operatorname{sen} t, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$

28. $y' - 2y = 1 - t, \quad y(0) = 1.$

29. $y'' - 4y' + 4y = 1, \quad y(0) = 1, y'(0) = 4.$

30. $y'' + 9y = t, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

31. $y'' - 10y' + 26y = 4, \quad y(0) = 3, y'(0) = 15.$

32. $y'' - 6y' + 8y = e^t, \quad y(0) = 3, y'(0) = 9.$

33. $y'' + 4y = e^{-t}\operatorname{sen} t, \quad y(0) = 1, y'(0) = 4.$

34. $y'' + 2y' - 3y = e^{-3t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$

35. $y''' - 8y = f(t), \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, donde $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ 2 & \text{si } t \geq 4 \end{cases}.$

36. $y'' - 4y' + 4y = f(t), \quad y(0) = -2, y'(0) = 1$, donde $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 3 \\ t + 2 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}.$

37. $y'' + 9y = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 1$, donde $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ \cos t & \text{si } t \geq \pi \end{cases}.$

38. Considere el problema de valores iniciales

$$y^{(4)} - 11y'' + 18y = f(t), \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0,$$

donde f es una función continua por tramos en $[0, +\infty[$. Utilice el teorema de convolución para escribir una fórmula, la cual contenga la función f, para la solución del problema.

39. Sea y la solución del problema de valores iniciales

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \tfrac{1}{a}.$$

a) Pruebe que $u = f * y$ es la solución del problema de valores iniciales

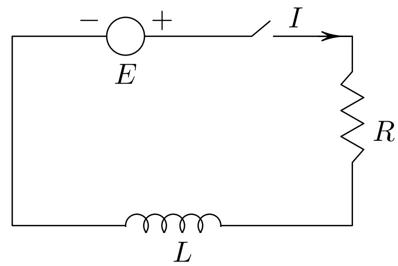
$$au'' + bu' + cu = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

b) Utilice este resultado para resolver el problema de valores iniciales

$$2u'' + 4u' + u = 1 + t^2, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

40. Obtenga la corriente en el circuito RL, que se muestra en la figura, si inicialmente la corriente es 0 y

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ 2 & \text{si } t \geq 5 \end{cases}.$$



41. Determine la corriente en el circuito RL del ejercicio anterior si, inicialmente, la corriente es 0 y $E(t) = \begin{cases} k & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ 0 & \text{si } t \geq 5 \end{cases}$.

5. Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden

Los sistemas de ecuaciones diferenciales son aquellos que contienen más de una función incógnita. Estos aparecen de modo natural en diversidad de problemas; por ejemplo, al considerar redes eléctricas con más de un circuito, como la de la figura 12.

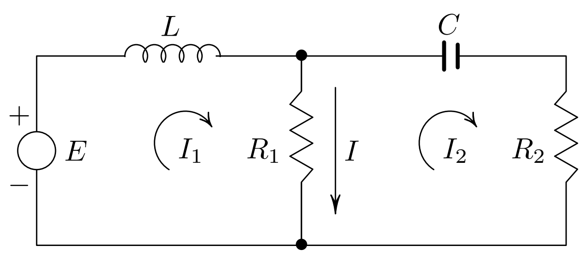


Figura 12. Red eléctrica con dos circuitos.

En la figura, $I_1(t)$ es la corriente que atraviesa el inductor en la dirección indicada e I_2 es la que atraviesa la resistencia R_2. Observe que la corriente que pasa por la resistencia R_1 es $I = I_1 - I_2$ en la dirección indicada en la gráfica. De acuerdo con la ley de Kirchof, vista en el capítulo 4 del texto, y utilizando la notación ahí indicada para el circuito de la izquierda, se cumple:

$$L\frac{dI_1}{dt} + R_1 I = E.$$

Es decir,

$$L\frac{dI_1}{dt} + R_1(I_1 - I_2) = E. \tag{15}$$

Para el circuito de la derecha se tiene

$$\begin{aligned} R_2 I_2 + \frac{1}{C}Q + R_1 I &= 0, \\ \frac{1}{C}Q + R_2 I_2 + R_1(I_2 - I_1) &= 0, \\ \frac{1}{C}Q - R_1 I_1 + (R_2 + R_1)I_2 &= 0. \end{aligned}$$

Recuerde que $\frac{dQ}{dt} = I_2$; luego, derivando en la última ecuación anterior se obtiene:

$$-R_1\frac{dI_1}{dt} + (R_2 + R_1)\frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C}I_2 = 0. \tag{16}$$

Como las corrientes en la red están relacionadas, las ecuaciones (15) y (16) forman un sistema, esto es, si se quiere determinar la intensidad de la corriente a través de la red, se deben determinar las funciones $I_1(t)$ e $I_2(t)$ que satisfacen simultáneamente el sistema:

$$\begin{aligned} L\frac{dI_1}{dt} + R_1(I_1 - I_2) &= E \\ -R_1\frac{dI_1}{dt} + (R_2 + R_1)\frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C}I_2 &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

5. 1. Algunos elementos básicos sobre sistemas

A continuación se verán algunos elementos muy básicos sobre sistemas de ecuaciones diferenciales y, posteriormente, cómo se puede utilizar la transformada de Laplace para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Definición 9

Un **sistema de ecuaciones diferenciales** ordinarias de orden n, con m ecuaciones y s incógnitas es un sistema del tipo

$$\begin{aligned} F_1\big(t, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n)}, \ldots, y_s, y_s', \ldots, y_s^{(n)}\big) &= 0 \\ &\cdots \\ F_m\big(t, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n)}, \ldots, y_s, y_s', \ldots, y_s^{(n)}\big) &= 0, \end{aligned} \tag{18}$$

donde $F_1, \ldots, F_m$ son funciones de $(n+1)s + 1$ variables y $y_1, \ldots, y_s$ son funciones de t (las funciones incógnita).

Una solución del sistema (18) es una sucesión de funciones $y_1(t), \ldots, y_s(t)$ que satisfacen simultáneamente las m ecuaciones dadas.

Ejemplo 45

El sistema

$$\begin{aligned} y_1'' + 3y_1 - y_2 &= 0 \\ y_2'' - 2y_1 + 2y_2 &= 0 \end{aligned}$$

es un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias con dos incógnitas (las funciones y_1 y y_2). Una solución del sistema es

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \cos t + \operatorname{sen} t + \cos 2t + \operatorname{sen} 2t, \\ y_2(t) &= 2\cos t + 2\operatorname{sen} t - \cos 2t - \operatorname{sen} 2t, \end{aligned}$$

puesto que,

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -\operatorname{sen} t + \cos t - 2\operatorname{sen} 2t + 2\cos 2t, \\ y_2'(t) &= -2\operatorname{sen} t + 2\cos t + 2\operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t, \\ y_1''(t) &= -\cos t - \operatorname{sen} t - 4\cos 2t - 4\operatorname{sen} 2t, \\ y_2''(t) &= -2\cos t - 2\operatorname{sen} t + 4\cos 2t + 4\operatorname{sen} 2t, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} y_1'' + 3y_1 - y_2 &= -\cos t - \operatorname{sen} t - 4\cos 2t - 4\operatorname{sen} 2t \\ &\quad + 3(\cos t + \operatorname{sen} t + \cos 2t + \operatorname{sen} 2t) \\ &\quad - (2\cos t + 2\operatorname{sen} t - \cos 2t - \operatorname{sen} 2t) \\ &= 0, \\ y_2'' - 2y_1 + 2y_2 &= -2\cos t - 2\operatorname{sen} t + 4\cos 2t + 4\operatorname{sen} 2t \\ &\quad - 2(\cos t + \operatorname{sen} t + \cos 2t + \operatorname{sen} 2t) \\ &\quad + 2(2\cos t + 2\operatorname{sen} t - \cos 2t - \operatorname{sen} 2t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Es importante observar que si se tiene una ecuación diferencial de orden n, en la cual se puede despejar la derivada de más alto orden, del siguiente modo:

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{19}$$

entonces, esta ecuación se puede convertir en un sistema de ecuaciones diferenciales si se introducen nuevas funciones que son las derivadas sucesivas de y; así:

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \ldots, \quad y_n = y^{(n-1)}.$$

Derivando en cada una de las igualdades anteriores se tiene

$$y_1' = y', \quad y_2' = y'', \quad \ldots, \quad y_n' = y^{(n)}$$

y, por lo tanto,

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \quad \ldots, \quad y_{n-1}' = y_n,$$

Con esto, la ecuación diferencial (19) es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Así, se pueden utilizar métodos numéricos, muy eficientes, que permiten obtener soluciones aproximadas de sistemas de primer orden y, de esta manera, aproximar la solución de la ecuación diferencial dada aunque sea muy complicada.

Razonando de la misma manera como se hizo antes, se deduce que también un sistema en el cual se puedan despejar las derivadas de máximo orden puede convertirse en un sistema de primer orden. El sistema del ejemplo 45 se puede escribir así:

$$\begin{aligned} y_1'' &= -3y_1 + y_2 \\ y_2'' &= 2y_1 - 2y_2 \end{aligned} \tag{20}$$

Si se introducen nuevas funciones z_1, z_2, z_3 y z_4 tales que $z_1 = y_1$, $z_2 = y_1'$, $z_3 = y_2$ y $z_4 = y_2'$, se tiene que

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = z_1', \quad z_3 = y_2, \quad z_4 = z_3',$$

entonces, el sistema (20) es equivalente al sistema:

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= -3z_1 + z_3 \\ z_3' &= z_4 \\ z_4' &= 2z_1 - 2z_3 \end{aligned}$$

Una de las ventajas que tiene el poder convertir un sistema de cualquier orden en uno de primer orden, es que las técnicas de solución sistemática se describen mejor para sistemas de primer orden; tal es el caso del siguiente teorema de existencia y unicidad, el cual se enuncia sin demostración.

Teorema 20 (Existencia y unicidad de la solución en sistemas lineales)

Sea el sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= p_{11}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2 + \cdots + p_{1n}(t)y_n + f_1(t) \\ y_2' &= p_{21}(t)y_1 + p_{22}(t)y_2 + \cdots + p_{2n}(t)y_n + f_2(t) \\ &\cdots \\ y_n' &= p_{n1}(t)y_1 + p_{n2}(t)y_2 + \cdots + p_{nn}(t)y_n + f_n(t) \end{aligned} \tag{21}$$

Si las funciones $p_{ij}(t)$ (para $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$) y las funciones f_i (para $i = 1, \ldots, n$) son continuas en un intervalo I que contenga un punto a. Entonces, para los números $b_1, \ldots, b_n$, el sistema (21) tiene una solución única, sobre todo el intervalo I, el cual satisface las condiciones iniciales

$$y_1(a) = b_1, \quad y_2(a) = b_2, \quad \ldots, \quad y_n(a) = b_n.$$

No es el objetivo de este texto estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales generales. Solo se verá una técnica de solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, de orden a lo sumo dos, con dos incógnitas.

5. 2. La transformada de Laplace para resolver sistemas

Se puede utilizar la transformada de Laplace para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Básicamente, es la misma técnica para resolver una sola ecuación que se empleó en la sección anterior; consiste, por lo tanto, en convertir el sistema diferencial en un sistema algebraico en el que las incógnitas son las transformadas de las funciones solución del sistema original. Una vez resuelto el sistema algebraico, las transformadas inversas proporcionan las soluciones buscadas. Se exponen a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 46

Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 \\ y_1(0) = 1, &\quad y_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Solución:

Se aplica $\mathscr{L}$ a ambos lados en las dos ecuaciones y se obtiene

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[y_1'\right] &= \mathscr{L}\left[y_1\right] + 2\mathscr{L}\left[y_2\right] \\ \mathscr{L}\left[y_2'\right] &= -2\mathscr{L}\left[y_1\right] + \mathscr{L}\left[y_2\right] \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s\mathscr{L}\left[y_1\right] - 1 &= \mathscr{L}\left[y_1\right] + 2\mathscr{L}\left[y_2\right] \\ s\mathscr{L}\left[y_2\right] &= -2\mathscr{L}\left[y_1\right] + \mathscr{L}\left[y_2\right] \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (s-1)\mathscr{L}\left[y_1\right] - 2\mathscr{L}\left[y_2\right] &= 1 \\ 2\mathscr{L}\left[y_1\right] + (s-1)\mathscr{L}\left[y_2\right] &= 0. \end{aligned}$$

Se pueden emplear varias técnicas para resolver este sistema algebraico en el que las incógnitas son $\mathscr{L}\left[y_1\right]$ y $\mathscr{L}\left[y_2\right]$. Se utilizará la regla de Cramer:

$$\begin{vmatrix} s-1 & -2 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix} = (s-1)^2 + 4,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[y_1\right] &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & s-1 \end{vmatrix}}{(s-1)^2+4} = \frac{s-1}{(s-1)^2+4} \\ \mathscr{L}\left[y_2\right] &= \frac{\begin{vmatrix} s-1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{(s-1)^2+4} = \frac{-2}{(s-1)^2+4}. \end{aligned}$$

De la tabla de la página 35, se concluye que la solución del problema de valores iniciales es:

$$\begin{aligned} y_1 &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right] = e^t \cos 2t, \\ y_2 &= -\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^2+4}\right] = -e^t \operatorname{sen} 2t. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 47

Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} y_1' + 2y_2' + y_1 &= 0 \\ y_1' - y_2' + y_2 &= 0 \\ y_1(0) = 0, \quad y_2(0) &= 1. \end{aligned}$$

Solución:

Se aplica $\mathscr{L}$ a ambos lados en las dos ecuaciones y se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[y_1'\right] + 2\mathscr{L}\left[y_2'\right] + \mathscr{L}\left[y_1\right] &= \mathscr{L}\left[0\right] \\ \mathscr{L}\left[y_1'\right] - \mathscr{L}\left[y_2'\right] + \mathscr{L}\left[y_2\right] &= \mathscr{L}\left[0\right] \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s\mathscr{L}\left[y_1\right] + 2s\mathscr{L}\left[y_2\right] - 2 + \mathscr{L}\left[y_1\right] &= 0 \\ s\mathscr{L}\left[y_1\right] - s\mathscr{L}\left[y_2\right] + 1 + \mathscr{L}\left[y_2\right] &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (s+1)\mathscr{L}\left[y_1\right] + 2s\mathscr{L}\left[y_2\right] &= 2 \\ s\mathscr{L}\left[y_1\right] + (1-s)\mathscr{L}\left[y_2\right] &= -1. \end{aligned}$$

Por otra parte, $\begin{vmatrix} s+1 & 2s \\ s & 1-s \end{vmatrix} = (1-\sqrt{3}s)(1+\sqrt{3}s)$, por lo que

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[y_1\right] &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2s \\ -1 & 1-s \end{vmatrix}}{(1-\sqrt{3}s)(1+\sqrt{3}s)} = \frac{2}{(1-\sqrt{3}s)(1+\sqrt{3}s)}, \\ \mathscr{L}\left[y_2\right] &= \frac{\begin{vmatrix} s+1 & 2 \\ s & -1 \end{vmatrix}}{(1-\sqrt{3}s)(1+\sqrt{3}s)} = \frac{-3s-1}{(1-\sqrt{3}s)(1+\sqrt{3}s)}. \end{aligned}$$

Si se descomponen ambas fracciones en fracciones parciales, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1-\sqrt{3}s)(1+\sqrt{3}s)} &= \frac{1}{1+\sqrt{3}s} + \frac{1}{1-\sqrt{3}s}, \\ \frac{-3s-1}{(1-\sqrt{3}s)(1+\sqrt{3}s)} &= \frac{\sqrt{3}-1}{2(1+\sqrt{3}s)} - \frac{\sqrt{3}+1}{2(1-\sqrt{3}s)}. \end{aligned}$$

De modo que

$$y_1 = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+\sqrt{3}s}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{1-\sqrt{3}s}\right],$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+\sqrt{3}s}\right] - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}s}\right].$$

Se observa que

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}s} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{\sqrt{3}}} \quad \text{y} \quad \frac{1}{1-\sqrt{3}s} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{s-\frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

Por esta razón,

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+\sqrt{3}s}\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-(1/\sqrt{3})t},$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{1-\sqrt{3}s}\right] = \frac{-1}{\sqrt{3}}\cdot\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\frac{1}{\sqrt{3}}}\right] = \frac{-1}{\sqrt{3}}e^{(1/\sqrt{3})t}.$$

En conclusión,

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-(1/\sqrt{3})t} - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{(1/\sqrt{3})t},$$
$$y_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}e^{-(1/\sqrt{3})t} + \frac{3+\sqrt{3}}{6}e^{(1/\sqrt{3})t}.$$

□

Ejemplo 48

Sean x e y funciones de t, resolver el sistema

$$x' + x + y' - y = 2$$
$$x'' + x' - y' = \cos t$$

con las condiciones $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $y(0) = 1$.

Solución:

Si se aplica $\mathscr{L}$ a ambas ecuaciones y luego se calculan las transformadas, se agrupan términos y se simplifica, se obtiene:

$$(s+1)\mathscr{L}[x] + (s-1)\mathscr{L}[y] = \frac{2}{s} + 1, \tag{22}$$
$$(s+1)\mathscr{L}[x] - \mathscr{L}[y] = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s}. \tag{23}$$

Si a la ecuación (22) se le resta la ecuación (23), se obtiene

$$\begin{aligned}
s\mathscr{L}[y] &= \frac{1}{s} + 1 - \frac{1}{s^2+1} \quad \Rightarrow \\
\mathscr{L}[y] &= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s(s^2+1)} \\
&= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1}. \qquad (24)
\end{aligned}$$

Si se sustituye (24) en la ecuación (23):

$$\begin{aligned}
(s+1)\mathscr{L}[x] &= \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} \\
&= \frac{s+1}{s^2+1} + \frac{s+1}{s^2}.
\end{aligned}$$

Entonces, $\mathscr{L}[x] = \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{1}{s^2}$. En conclusión,

$$\begin{aligned}
x &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = \operatorname{sen} t + t, \\
y &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = t + \cos t. \qquad \square
\end{aligned}$$

Ejemplo 49

Sean x e y funciones de t, resolver el sistema

$$\begin{aligned}
x' + y'' &= -\operatorname{sen} t \\
x'' - y' &= \cos t
\end{aligned}$$

con las condiciones $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Solución:

Si se aplica $\mathscr{L}$ a ambas ecuaciones y luego se calculan las transformadas, se agrupan términos y se simplifica, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[x] + s\mathscr{L}[y] &= \frac{s}{s^2+1}, \qquad (25) \\
s\mathscr{L}[x] - \mathscr{L}[y] &= \frac{1}{s^2+1}. \qquad (26)
\end{aligned}$$

Si se multiplica por s la ecuación (26), luego se suma el resultado a la ecuación (25) y se despeja $\mathscr{L}[x]$, se obtiene:

$$\mathscr{L}[x] = \frac{2s}{(s^2+1)^2}.$$

Si se procede de modo análogo, se deduce que

$$\mathscr{L}\left[y\right] = \frac{-(1-s^2)}{(s^2+1)^2}.$$

Si se observa que

$$\left(\frac{1}{s^2+1}\right)' = \frac{-2s}{(s^2+1)^2} \quad \text{y} \quad \left(\frac{s}{s^2+1}\right)' = \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2},$$

se concluye que

$$\begin{aligned} x &= \mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right] = -\mathscr{L}^{-1}\left[(\mathscr{L}\left[\operatorname{sen} t\right])'\right] = -(-t\operatorname{sen} t) = t\operatorname{sen} t \\ y &= \mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{1-2^s}{(s^2+1)^2}\right] = -\mathscr{L}^{-1}\left[(\mathscr{L}\left[\cos t\right])'\right] = -(-t\cos t) = t\cos t. \end{aligned}$$

□

Para finalizar esta sección, se resolverá el sistema propuesto al inicio para una red eléctrica, con algunos valores particulares de los parámetros.

Ejemplo 50

Determinar la intensidad de la corriente en cada uno de los circuitos de la red eléctrica descrita por el sistema de ecuaciones (17) en la página 54, si $L = 2$ henrios, $C = 8 \times 10^{-3}$ faradios, $R_1 = 50$ ohmios, $R_2 = 25$ ohmios y la fem aplicada es de 100 voltios. Suponga que, en el instante en el cual se conecta la batería ($t = 0$), no hay corriente fluyendo por la red.

Solución:

Recuerde que el sistema es

$$\begin{aligned} L\frac{dI_1}{dt} + R_1(I_1 - I_2) &= E \\ -R_1\frac{dI_1}{dt} + (R_2+R_1)\frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C}I_2 &= 0 \end{aligned}$$

donde $L = 2$, $R_1 = 50$, $E = 100$, $-R_1 = -50$, $R_2 + R_1 = 75$, $\frac{1}{C} = 125$. Además, como inicialmente no hay corriente fluyendo por la red, entonces las condiciones iniciales son $I_1(0) = 0$ e $I_2(0) = 0$. Si se sustituyen estos valores en el sistema anterior y se simplifica, se obtiene el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} + 25I_1 - 25I_2 &= 50 \\ 2\frac{dI_1}{dt} - 3\frac{dI_2}{dt} - 5I_2 &= 0 \\ I_1(0) = 0, \quad I_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

Si se aplica la transformada de Laplace a ambas ecuaciones y se simplifica, se obtiene:

$$\begin{aligned}(s+25)\mathscr{L}[I_1] - 25\mathscr{L}[I_2] &= \frac{50}{s}\\ 2s\mathscr{L}[I_1] - (3s+5)\mathscr{L}[I_2] &= 0.\end{aligned}$$

Por otra parte, $\begin{vmatrix} s+25 & -25 \\ 2s & -(3s+5) \end{vmatrix} = -(3s^2+30s+125)$, por lo tanto

$$\mathscr{L}[I_1] = \frac{\begin{vmatrix} \frac{50}{s} & -25 \\ 0 & -(3s+5) \end{vmatrix}}{-(3s^2+30s+125)} = \frac{150s+250}{s(3s^2+30s+125)}.$$

$$\mathscr{L}[I_2] = \frac{\begin{vmatrix} s+25 & \frac{50}{s} \\ 2s & 0 \end{vmatrix}}{-(3s^2+30s+125)} = \frac{100}{3s^2+30s+125}.$$

Luego,

$$I_1 = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{150s+250}{s(3s^2+30s+125)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-6s+90}{3s^2+30s+125}\right] \tag{27}$$

$$I_2 = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{100}{3s^2+30s+125}\right]. \tag{28}$$

Ahora, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{-6s+90}{3s^2+30s+125} &= \frac{-2s+30}{s^2+10s+\frac{125}{3}}\\ &= \frac{-2(s+5)+40}{(s+5)^2+\frac{50}{3}}\\ &= -2\frac{s+5}{(s+5)^2+\frac{50}{3}} + \frac{40}{(s+5)^2+\frac{50}{3}}\\ &= -2\frac{s+5}{(s+5)^2+\left(\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)^2} + 4\sqrt{6}\frac{\frac{5\sqrt{6}}{3}}{(s+5)^2+\left(\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)^2}.\end{aligned}$$

De acuerdo con esto, y según (27), se obtiene:

$$\begin{aligned}I_1 &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}\right] - 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+5}{(s+5)^2+\left(\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)^2}\right] + 4\sqrt{6}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\frac{5\sqrt{6}}{3}}{(s+5)^2+\left(\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)^2}\right]\\ &= 2 - 2e^{-5t}\cos\left(\tfrac{5}{3}\sqrt{6}\,t\right) + 4\sqrt{6}e^{-5t}\operatorname{sen}\left(\tfrac{5}{3}\sqrt{6}\,t\right).\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\frac{100}{3s^2+30s+125} = \frac{10}{3}\sqrt{6}\frac{\frac{5\sqrt{6}}{3}}{(s+5)^2+\left(\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)^2}.$$

Por lo que, según (28),

$$I_2 = \frac{10}{3}\sqrt{6}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\frac{5\sqrt{6}}{3}}{(s+5)^2+\left(\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)^2}\right] = \frac{10}{3}\sqrt{6}e^{-5t}\operatorname{sen}\left(\tfrac{5}{3}\sqrt{6}\,t\right). \qquad \square$$

Ejercicios de autoevaluación de la sección 5

En los ejercicios del 1 al 10, utilice la transformada de Laplace para resolver el sistema con condiciones iniciales que se proporciona en cada caso.

1. $y_1' + y_2 = t$
   $y_2' + 4y_1 = 0$
   $y_1(0) = 1,\ y_2(0) = -1$

2. $y_1' - 6y_1 + 3y_2 = 8e^t$
   $y_2' - 2y_1 - y_2 = 4e^t$
   $y_1(0) = -1,\ y_2(0) = 0$

3. $2y_1' + y_2' - y_1 - y_2 = e^{-t}$
   $y_1' + y_2' + 2y_1 + y_2 = e^t$
   $y_1(0) = 2,\ y_2(0) = 1$

4. $y_1'' + y_1 + y_2 = 0$
   $y_1' + y_2' = 0$
   $y_1(0) = y_1'(0) = 0,\ y_2(0) = 1$

5. $y_1'' + y_2 = 0$
   $y_2'' - y_1' = -2e^t$
   $y_1(0) = y_2(0) = 0,$
   $y_1'(0) = -2,\ y_2'(0) = 2$

6. $y_1'' - 2y_2 = 2$
   $y_1 + y_2' = 5e^{2t} + 1$
   $y_1(0) = y_1'(0) = 2,\ y_2(0) = 1$

7. $2y_1' + y_2' - 3y_2 = 0$
   $y_1' + y_2' = t$
   $y_1(0) = y_2(0) = 0$

8. $y_1' + 2y_2' - y_2 = t$
   $y_1' + 2y_2 = 0$
   $y_1(0) = y_2(0) = 0$

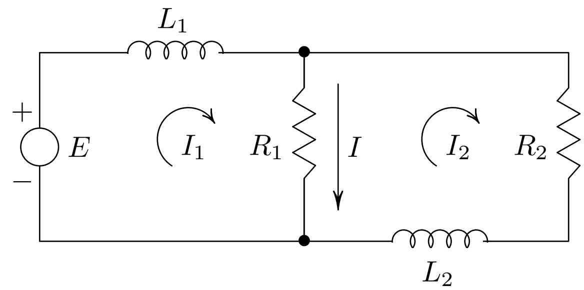
9. $y_1' + y_2' + y_1 - y_2 = 0$
   $y_1' + y_1 + 2y_2 = 1$
   $y_1(0) = y_2(0) = 0$

10. $y_1'' + y_2' = \cos t$
    $y_2'' - 2y_1' = \operatorname{sen} x$
    $y_1(0) = y_1'(0) = -1,$
    $y_2(0) = 1,\ y_2'(0) = 0$

11. Considere dos tanques conectados que contienen una solución salina. En el primero hay $X(t)$ libras de sal en 100 galones de salmuera y en el segundo, $Y(t)$ libras de sal en 200 galones de salmuera. La salmuera se mantiene uniforme en cada tanque

mediante agitación; desde el primer tanque hacia el segundo, se bombea a razón de 30 gal/min y del segundo hacia el primero, a razón de 10 gal/min. Además, al primer tanque entra agua pura a razón de 20 gal/min y por un orificio en el segundo tanque sale salmuera a razón de 20 gal/min. Si inicialmente cada tanque contiene 50 libras de sal, determine la cantidad de sal $X(t)$ y $Y(t)$ que hay en cada tanque en cada instante t.

12. Determine la corriente en cada circuito de la red proporcionada en la siguiente figura, si se sabe que al inicio ambas corrientes son iguales a 0, $L_1 = 5$ henrios, $L_2 = 10$ henrios, $R_1 = 30$ ohmios, $R_2 = 100$ ohmios y $E(t) = 2H(t-4)$ voltios.



Soluciones a los ejercicios

Ejercicios de autoevaluación de la sección 1, página 13

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+a^2} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{a}\arctan\frac{b}{a} = \frac{\pi}{2a}.$

2. $\displaystyle\int_0^b \frac{xdx}{1+x} = b - \ln(b+1) \to \infty$ cuando $b \to \infty \Rightarrow$ diverge.

3. $\displaystyle\int_b^0 \frac{xdx}{1+x^2} = -\frac{1}{2}\ln(b^2+1) \to -\infty$ cuando $b \to -\infty \Rightarrow$ diverge.

4. $\displaystyle\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$. Como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ es convergente, entonces $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right| dx$ también lo es $\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx$ es absolutamente convergente y, por lo tanto, es convergente.

5. $\displaystyle\int_0^b e^{-2x}\cos 3x\, dx = \frac{1}{13}e^{-2b}(-2\cos 3b + 3\operatorname{sen} 3b) + \frac{2}{13} \to \frac{2}{13}$ cuando $b \to \infty$ $\Rightarrow$ converge.

6. $\displaystyle x^{-\pi/4} = \frac{1}{x^{\pi/4}}$. Como $\frac{\pi}{4} < 1$, entonces la integral diverge.

7. $\dfrac{1}{x^2+x+3} < \dfrac{1}{x^2}$. Como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+3}dx$ también lo hace y, por lo tanto, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+3}dx$ converge. Del mismo modo, se deduce que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+x+3}dx$ converge. Se concluye que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+3}dx$ converge.

8. $\displaystyle\int_0^b \cos b = \operatorname{sen} b$ y $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \operatorname{sen} b$ no existe. Se deduce que la integral no converge.

9. Existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $e^x - 1 > x^4$ para $x > c$. Entonces, para $x > c$, $\dfrac{x^2}{e^x-1} < \dfrac{1}{x^2}$. Como $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ es convergente, entonces $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}dx$ es convergente. Por otra parte, $\displaystyle\int_1^{c} \frac{x^2}{e^x-1}dx$ es una integral definida, por lo tanto, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}dx$ es convergente.

10. $\displaystyle\int_2^b e^{2x}(2x^2-4x)dx = \frac{1}{2}e^{2b}(2b^2-6b+3) + \frac{1}{2}e^4 \to \infty$ cuando $b \to \infty \Rightarrow$ diverge.

11. $\dfrac{x}{1+x^4} < \dfrac{1}{x^3}$. Como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}dx$ también lo hace.

12. $\dfrac{1}{x^4+x^{1/3}} < \dfrac{1}{x^4}$. Como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4+x^{1/3}}dx$ también converge.

13. Si $x \geq 1$, entonces $0 \leq \dfrac{\ln x}{x^4+1} \leq \dfrac{x^2}{x^4+1} \leq \dfrac{1}{x^2}$. Como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^4+1}dx$ converge. Por otra parte, $\displaystyle\int_{0,5}^{1} \left|\frac{\ln x}{x^4+1}\right| dx$ es una integral definida, entonces, $\displaystyle\int_{0,5}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^4+1}dx$ converge absolutamente.

14. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-5x}\operatorname{sen} 2x\, dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-5x}\operatorname{sen} 2x\, dx$
$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{29}e^{-5b}(5\operatorname{sen} 2b + 2\cos 2b) + \frac{2}{29}\right] = \frac{2}{29}.$$

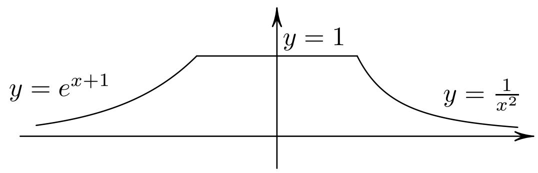
15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 e^{2x}\, dx = \lim_{b\to-\infty}\frac{1}{2}(1-e^{2b}) = \frac{1}{2}.$

16. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x}\, dx = \lim_{b\to+\infty}[-e^{-b}(b+1)+1] = 1.$

17. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3} = \lim_{b\to+\infty}\int_e^b \frac{dx}{x(\ln x)^3}\, dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{(\ln b)^2}\right) = \frac{1}{2}.$

18. $A = \displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{2dx}{(x-4)^3} = \lim_{b\to+\infty} \int_6^b \frac{2dx}{(x-4)^3}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{(b-4)^2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$

19. Gráfica:



Cálculo de la integral:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{-1} e^{x+1}dx + \int_{-1} 1dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx \\
&= \lim_{b\to-\infty} e^{x+1}\Big|_b^{-1} + x|_{-1}^{1} + \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b \\
&= \lim_{b\to-\infty} (e^0 - e^{b+1}) + 2 + \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) \\
&= 1+2+1 = 4.
\end{aligned}$$

20. Si $p=1$: $\displaystyle\int_2^b \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln b) - \ln(\ln 2) \to \infty$ cuando $b\to\infty \Rightarrow$ diverge.

Si $p \neq 1$: $\displaystyle\int_2^b \frac{dx}{x\ln x} = -\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{(\ln b)^{p-1}} + \frac{1}{(p-1)(\ln 2)^{p-1}}.$

Si $p<1$, entonces $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{(\ln b)^{p-1}} + \frac{1}{(p-1)(\ln 2)^{p-1}}\right] = +\infty$ y, en este caso, la integral diverge.

Si $p>1$, entonces $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{(\ln b)^{p-1}} + \frac{1}{(p-1)(\ln 2)^{p-1}}\right] = \frac{1}{(p-1)(\ln 2)^{p-1}}$ y, en este caso, la integral converge.

Ejercicios de autoevaluación de la sección 2, página 20

1. $\mathscr{L}\left[(t-1)^2\right] = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}(t-1)^2dt = \lim_{b\to+\infty} -\frac{e^{-st}}{s^3}(-s^2t^2-2st-2-2s^2t+2s-s^2)|_0^b$
$= \dfrac{s^2-2s+2}{s^3}.$

2. $\mathscr{L}\left[\operatorname{sen} at\right] = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\operatorname{sen} atdt = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-e^{-st}}{s^2+a^2}(a\cos at + s\operatorname{sen} at)\right]_0^b = \frac{a}{s^2+a^2}.$

3. $\mathscr{L}\left[t \operatorname{sen} t\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st} t \operatorname{sen} t dt$

$$= \lim_{b\to+\infty} -e^{-st}\frac{(ts^2+t+2s)\cos t + (ts^3+ts+s^2-1)\operatorname{sen} t}{s^4+2s^2+1}\Bigg|_0^b = \frac{2s}{s^4+2s^2+1}.$$

4. $\mathscr{L}\left[e^t \cos 2t\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^t \cos 2t dt = \lim_{b\to+\infty} \frac{2\operatorname{sen} 2t - (s-1)\cos 2t}{5-2s+s^2} e^{t-st}\Bigg|_0^b$

$$= \frac{s-1}{(s-1)^2+4}.$$

5. $\mathscr{L}\left[te^t \operatorname{sen} t\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st} te^t \operatorname{sen} t dt =$

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{-e^{t-st}}{(s^2-2s+2)^2}[(2t-2+2s-2ts+ts^2)\cos t$$

$$-(2s-4ts-ts^3+2t-s^2+3ts^2)\operatorname{sen} t]\Big|_0^b = \frac{2(s-1)}{(s^2-2s+2)^2}.$$

6. $\mathscr{L}\left[t^2 \cos t\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^2 \cos t dt =$

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{-e^{-st}}{(s^2+1)^3}[(s^5t^2+2s^3t^2+st^2+2ts^4-2t+2s^3-6s)\cos t$$

$$+(-t^2s^4-2t^2s^2-t^2-4ts^3-4ts-6s^2+2)\operatorname{sen} t]\Big|_0^b = \frac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^3}.$$

7. $\mathscr{L}\left[f(t)\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^2 e^{-st} t dt + \int_2^{+\infty} e^{-st} dt$

$$= \frac{-e^{-st}}{s^2}(st+1)\Bigg|_0^2 + \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{s}e^{-st}\Bigg|_2^b = -\frac{e^{-2s}}{s^2}(2s+1) + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}e^{-2s}.$$

8. $\mathscr{L}\left[h(t)\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st} h(t) dt = 2\int_0^1 e^{-st} t dt + \int_1^2 e^{-st}(4-2t)dt + \int_2^{+\infty} e^{-st}\cdot 0 dt$

$$= \frac{-2e^{-st}}{s^2}(st+1)\Bigg|_0^1 + \frac{2e^{-st}}{s^2}(s(t-2)+1)\Bigg|_1^2 + 0$$

$$= -\frac{2e^{-s}}{s^2}(s+1) + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^2}e^{-2s} + \frac{2}{s^2}e^{-s}(s-1).$$

9. $\mathscr{L}\left[g(t)\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t) dt = k\int_a^b e^{-st} dt = -\frac{k}{s}e^{-st}\Bigg|_a^b = \frac{k}{s}(e^{-as} - e^{-bs}).$

10. $\mathscr{L}\left[f(t)\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{2\pi} e^{-st} \operatorname{sen} t\, dt =$

$$-\frac{e^{-st}}{s^2+1}(s \operatorname{sen} t + \cos t)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{s^2+1}(1-e^{-2\pi s}).$$

11. $\mathscr{L}\left[f(at)\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(at)dt = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-st} f(at)dt.$

    Si se define $u = at$, entonces $du = a\,dt$ y, por lo tanto, $dt = \frac{1}{a}du$ y si $t = b$, entonces $u = ab$. De aquí se deduce que $\int_0^b e^{-st} f(at)dt = \dfrac{1}{a}\int_0^{ab} e^{-\frac{s}{a}u} f(u)du.$

    Como $a > 0$, entonces $ab \to +\infty$ cuando $b \to +\infty$, por lo que

$$\begin{aligned}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-st} f(at)dt &= \lim_{ab\to+\infty}\frac{1}{a}\int_0^{ab} e^{-\frac{s}{a}u} f(u)du \\ &= \frac{1}{a}\lim_{ab\to+\infty}\int_0^{ab} e^{-\frac{s}{a}u} f(u)du = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).\end{aligned}$$

12. Como $\dfrac{t^3}{e^t} \to 0$ cuando $t \to 0$, entonces existe t_0 tal que $\forall\, t > t_0$ se cumple $\left|\dfrac{t^3}{e^t}\right| < 1$, es decir $|t^3| < e^t$. Luego, según el teorema 6, $f(t) = t^3$ es de orden exponencial.

13. El procedimiento es idéntico al utilizado en el ejercicio anterior.

14. Si $t > 0$, entonces $\left|\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\right| = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} < \frac{1}{2}e^t$. Por lo tanto, $h(t)$ es de orden exponencial.

15. Si f es de orden exponencial, entonces existen constantes C y α, con $C > 0$, tales que $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$. La constante α también se puede considerar positiva, puesto que si $\beta \leq 0$, entonces $Ce^{\beta t} < Ce^t$ y se puede tomar $\alpha = 1$.

    Por otra parte:

$$\begin{aligned}|g(t)| &= \left|\int_a^t f(x)\,dx\right| \\ &\leq \int_a^t |f(x)|\,dx \\ &\leq \int_a^t Ce^{\alpha x}\,dx \\ &= \frac{C}{\alpha}e^{\alpha x}\Big|_a^t \\ &= \frac{C}{\alpha}e^{\alpha t} - \frac{C}{\alpha}e^{a\alpha} < \frac{C}{\alpha}e^{\alpha t}.\end{aligned}$$

    Por lo tanto, g es de orden exponencial.

Ejercicios de autoevaluación de la sección 3, página 36

1. $\mathscr{L}[f] = \dfrac{3s}{s^2+4} + \dfrac{2}{s^2+1}$.
2. $\mathscr{L}[g] = \dfrac{2}{(s-4)^2}$.
3. $\mathscr{L}[h] = \dfrac{5}{(s+2)^2+25}$.
4. $\mathscr{L}[p] = \dfrac{a^3}{s} + \dfrac{3a^2}{s^2} + \dfrac{6a}{s^3} + \dfrac{6}{s^4}$.
5. $\mathscr{L}[q] = \dfrac{2a^2}{4a^2s+s^3}$.
6. $\mathscr{L}[f] = \dfrac{6}{s^2+36} + \dfrac{3}{s+1}$.
7. $\mathscr{L}[g] = \dfrac{6}{s^4} + \dfrac{s}{s^2+16} - \dfrac{3}{s^2}$.
8. $\mathscr{L}[h] = \dfrac{20}{s^2+16} - \dfrac{3s}{s^2+4}$.
9. $\mathscr{L}[q] = \dfrac{4(s^2+18)}{s^2+36s}$.
10. $\mathscr{L}[r] = \dfrac{2(s^2+7)}{(s^2+1)(s^2+9)}$.
11. $\mathscr{L}[f] = \dfrac{1}{(s+3)^2} - \dfrac{2}{s+3}$.
12. $\mathscr{L}[g] = \dfrac{1}{(s-4)^2} - \dfrac{s-4}{(s-4)^2+1}$.
13. $\mathscr{L}[h] = \dfrac{1}{s+5} + \dfrac{2}{(s+5)^2} + \dfrac{24}{(s+5)^5}$.
14. $\mathscr{L}[q] = \dfrac{48(s^3-4s}{(s^2+4)^4}$.
15. $\mathscr{L}\left[\int_0^t \int_0^\tau \cos(3x)dxd\tau\right] = \dfrac{1}{s}\mathscr{L}\left[\int_0^\tau \cos(3x)dx\right] = \dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{1}{s}\mathscr{L}[\cos 3x] = \dfrac{1}{s^2}\cdot\dfrac{s}{s^2+9}$.
16. Como f es periódica con periodo π/ω, entonces

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f] &= \frac{1}{1-e^{(-\pi/\omega)s}} \int_0^{\pi/\omega} e^{-st}|E \operatorname{sen}\omega t|\, dt = \frac{E}{1-e^{(-\pi/\omega)s}} \int_0^{\pi/\omega} e^{-st} \operatorname{sen}\omega t\, dt \\
&= \frac{E}{1-e^{(-\pi/\omega)s}} \cdot -\frac{e^{-st}}{s^2+w^2}(s \operatorname{sen}(t\omega) + \omega\cos(t\omega))\Big|_0^{\pi/\omega} \\
&= \frac{E}{1-e^{(-\pi/\omega)s}} \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2}(1+e^{-s\pi/\omega}).
\end{aligned}$$

17. La función f es periódica de periodo 10 y, además,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < 5 \\ 5 & \text{si } 5 \le t \le 10 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f] &= \frac{1}{1-e^{-10s}} \int_0^{10} e^{-st} f(t)dt = \frac{5}{1-e^{-10s}} \int_5^{10} e^{-st}dt \\
&= \frac{5}{1-e^{-10s}} \cdot \frac{-1}{s} e^{-st}\Big|_5^{10} = \frac{5}{1-e^{-10s}} \cdot \frac{1}{s}(e^{-5s} - e^{-10s}).
\end{aligned}$$

18. La función f es periódica de periodo $2\pi/w$ y, además,

$$f(t) = \begin{cases} E\,\mathrm{sen}(\omega t) & \text{si } 0 \leq t < \pi/\omega \\ 0 & \text{si } \pi/\omega \leq t \leq 2\pi/\omega \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\,[f] &= \frac{1}{1-e^{(-2\pi/\omega)s}} \int_0^{2\pi/\omega} e^{-st} f(t)\,dt \\ &= \frac{E}{1-e^{(-2\pi/\omega)s}} \int_0^{\pi/\omega} e^{-st}\,\mathrm{sen}\,\omega t\,dt \\ &= \frac{E}{1-e^{(-2\pi/\omega)s}} \cdot -\frac{e^{-st}}{s^2+w^2}(s\,\mathrm{sen}(t\omega)+\omega\cos(t\omega))\Big|_0^{\pi/\omega} \\ &= \frac{E}{1-e^{(-2\pi/\omega)s}} \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2}(1+e^{-s\pi/\omega}). \end{aligned}$$

19. La función f es periódica de periodo 2 y, además, $f(t) = t$ si $t \in [0, 2]$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\,[f] &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t) dt \\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} t dt \\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \cdot \frac{-1}{s^2} e^{-st}(st+1)\Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \cdot \frac{1}{s^2}(1-e^{-2s}(2s+1)). \end{aligned}$$

20. La función f es periódica de periodo $2a$ y, además:

$$f(t) = \begin{cases} k & \text{si } 0 \leq t < a \\ 0 & \text{si } a \leq t \leq 2a \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\,[f] &= \frac{1}{1-e^{-2as}} \int_0^{2a} e^{-st} f(t) dt \\ &= \frac{k}{1-e^{-2as}} \int_0^{a} e^{-st} dt \\ &= \frac{k}{1-e^{-2as}} \cdot \frac{-1}{s} e^{-st}\Big|_0^a \\ &= \frac{k}{1-e^{-2as}} \cdot \frac{1}{s}(1-e^{-as}). \end{aligned}$$

21. $f(t) = t\,H(t-2)$.

22. $f(t) = (t^2+t)\,H(t-2)$.

23. $f(t) = (1-t)\,H(t-4) + 2t\,H(t-8)$.

24. $f(t) = t^3\,H(t-4)$.

25. $f(t) = t\,H(t) - t\,H(t-3)$.

26. $f(t) = (1-t^2)\,H(t-4) + (t^2-1+\cos t)\,H(t-\pi)$.

27. $f(t) = (1+t^2)H(t-5) = [(t-5)^2+10(t-5)+26]H(t-5) \Rightarrow$

    $\mathscr{L}\,[f] = e^{-5s}\mathscr{L}\left[t^2+10t+26\right] = \dfrac{e^{-5s}}{s^3}(2+10s+26s^2)$.

28. $f(t) = t^2H(t-4) + (2t-t^2)H(t-5)$

    $= [(t-4)^2+8(t-4)+16]H(t-4) - [(t-5)^2+8(t-5)+15]H(t-5) \Rightarrow$

    $\mathscr{L}\,[f] = e^{-4s}\mathscr{L}\left[t^2+8t+16\right] - e^{-5s}\mathscr{L}\left[t^2+8t+15\right]$

    $= \dfrac{e^{-4s}}{s^3}(2+8s+16s^2) - \dfrac{e^{-5s}}{s^3}(2+8s+15s^2)$.

29. $f(t) = -3e^{-2t}H(t-4) = -\dfrac{3}{e^8}e^{-2(t-4)}H(t-4) \Rightarrow$

    $\mathscr{L}\,[f] = -\dfrac{3}{e^8}e^{-4s}\mathscr{L}\left[e^{-2t}\right] = \dfrac{-3e^{-4s}}{e^8(s+2)}$.

30. $f(t) = e^{-3t}H(t-4) + (1+t-e^{-3t})H(t-6)$

    $= \dfrac{1}{e^{12}}e^{-3(t-4)}H(t-4) + (7+t-6-\frac{1}{e^{18}}e^{-3(t-6)})H(t-6) \Rightarrow$

    $\mathscr{L}\,[f] = \dfrac{1}{e^{12}}e^{-4s}\mathscr{L}\left[e^{-3t}\right] + e^{-6s}\mathscr{L}\left[7+t-\frac{1}{e^{18}}e^{-3t}\right]$

    $= \dfrac{e^{-4s}}{e^{12}(s+3)} + e^{-6s}\left(\dfrac{7}{s}+\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{e^{18}(s+3)}\right)$.

31. En el intervalo $[a,b[$, la función corresponde al segmento de recta que tiene como puntos extremos $(a,0)$ y (b,k), por lo que su ecuación es $y=\frac{k}{b-a}(t-a)$. En el intervalo $[b,c[$, la función corresponde al segmento de recta cuyos puntos extremos son $(b,-k)$ y $(c,0)$; por lo tanto, su ecuación es $y=\frac{k}{c-b}(t-c)$. En el resto del dominio,

la función tiene valor 0. En síntesis:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq a \\ \frac{k}{b-a}(t-a) & \text{si } a < t \leq b \\ \frac{k}{c-b}(t-c) & \text{si } b < t \leq c \\ 0 & \text{si } c < t \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{k}{b-a}(t-a)H(t-a) \\ &\quad + k\left[\left(\frac{1}{c-b} - \frac{1}{b-a}\right)(t-b) - 2\right] H(t-b) - \frac{k}{c-b}(t-c)H(t-c). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[f] &= \frac{k}{b-a}e^{-as}\mathscr{L}[t] + k\left(\frac{1}{c-b} - \frac{1}{b-a}\right)e^{-bs}\mathscr{L}[t] \\ &\quad - 2ke^{-bs}\mathscr{L}[1] - \frac{k}{c-b}e^{-cs}\mathscr{L}[t] \\ &= \frac{1}{s^2}\left[\frac{k}{b-a}e^{-as} + k\left(\frac{1}{c-b} - \frac{1}{b-a}\right)e^{-bs} - \frac{k}{c-b}e^{-cs}\right] - \frac{2k}{s}e^{-bs}. \end{aligned}$$

32. $e^{at} * e^{bt} = \int_0^t e^{ax}e^{b(t-x)}dx = \left.\frac{1}{a-b}e^{(a-b)x+bt}\right|_0^t = \frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt}).$

$\mathscr{L}\left[e^{at} * e^{bt}\right] = \mathscr{L}\left[e^{at}\right] \cdot \mathscr{L}\left[e^{bt}\right] = \frac{1}{(s-a)(s-b)}.$

33. $t * \cos(at) = \int_0^t x\cos a(t-x)dx$

$= \left.\frac{1}{a^2}(\cos a(t-x) - ax \operatorname{sen} a(t-x))\right|_0^t = \frac{1}{a^2}(1-\cos at).$

$\mathscr{L}[t * \cos(at)] = \mathscr{L}[t] \cdot \mathscr{L}[\cos(at)] = \frac{s}{s^2(s^2+a^2)}.$

34. $t * e^{at} = \int_0^t xe^{a(t-x)}dx = \left.\frac{-(ax+1)e^{a(t-x)}}{a^2}\right|_0^t = -\frac{1}{a^2}(at+1-e^{at}).$

$\mathscr{L}\left[t * e^{at}\right] = \mathscr{L}[t] \cdot \mathscr{L}\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s^2(s-a)}.$

35. $[f * (g+h)](t) = \int_0^t f(x)(g+h)(t-x)dx = \int_0^t f(x)[g(t-x) + h(t-x)]dx$

$= \int_0^t f(x)g(t-x)dx + \int_0^t f(x)h(t-x)dx = [f * g + f * h](t).$

36. $[f*(g*h)](t)=\int_0^t f(x)(g*h)(t-x)dx=\int_0^t f(t-u)(g*h)(u)\,du$

$=\int_0^t f(t-u)\left[\int_0^u g(z)h(u-z)dz\right]du=\int_0^t\int_0^u f(t-u)g(z)h(u-z)dzdu.$

$[(f*g)*h](t)=\int_0^t (f*g)(x)h(t-x)dx=\int_0^t\left[\int_0^x f(z)g(x-z)dz\right]h(t-x)\,dx$

$=\int_0^t\left[\int_0^x f(x-z)g(z)dz\right]h(t-x)dx=\int_0^t\int_0^x f(x-z)g(z)h(t-x)dzdx.$

Luego, $(f*g)*h=f*(g*h)$.

Ejercicios de autoevaluación de la sección 4, página 51

1. $f(t)=\dfrac{1}{4}e^{2t}(7\operatorname{sen}4t+8\cos 4t)$.
2. $g(t)=1-e^{-t}$.
3. $h(t)=t\operatorname{sen}t$.
4. $p(t)=\dfrac{1}{4}e^{-2t}(-2t+e^{2t}-1)$.
5. $q(t)=\dfrac{1}{(n-1)!}e^{at}t^{n-1}$.
6. $r(t)=\dfrac{3}{2}(\operatorname{sen}t+t\cos t)$.
7. $r(t)=\dfrac{t^4}{45\,360}(3\,780+54t^3+t^5)$.
8. $q(t)=\cos(\sqrt{2}t)+\frac{1}{50}(5\sqrt{5}\,t\operatorname{sen}(\sqrt{5}t)-4\sqrt{5}\operatorname{sen}(\sqrt{5}t)+20t\cos(\sqrt{5}t))$.
9. $p(t)=e^{2t}\operatorname{sen}t$.
10. $h(t)=-\dfrac{1}{2}e^{-9t}(e^{8t}-3)$.
11. $g(t)=\dfrac{12-7\sqrt{3}}{24}e^{(7-4\sqrt{3})t}+\dfrac{12+7\sqrt{3}}{24}e^{(7+4\sqrt{3})t}$.
12. $f(t)=\dfrac{1}{16}H(t-4)(1-\cos(4t-16))$.
13. $f(t)=\dfrac{1}{2}e^{5(t-1)}(t-1)^2H(t-1)$.
14. $g(t)=\dfrac{1}{4}(t-10)H(t-10)\operatorname{sen}(2t-20)$.
15. $h(t)=-2e^t+\dfrac{3}{2}e^{2t}+\dfrac{3}{2}$.
16. $p(t)=\dfrac{e^{-t}}{16}(36t+7e^{4t}-7)$.
17. $q(t)=e^{-4t}(-4t+5e^t-5)$.

18. $r(t) = \dfrac{1}{25}e^{-3t}(65te^{5t} + 27e^{5t} - 2)$.

19. $r(t) = \dfrac{e^{-bt}}{2(a^2+b^2)}(-2e^{bt}\cos(at) + e^{2bt} + 1)$.

20. $q(t) = \dfrac{e^{-3t}}{6} - \dfrac{e^{-2t}}{5} + \dfrac{e^{3t}}{30}$.

21. $p(t) = \dfrac{1}{25}(5t^2 + 2\cos(\sqrt{5}\,t) - 2)$.

22. $\mathscr{L}\left[y' - 2y\right] = \mathscr{L}\left[e^{5t}\right] \Rightarrow s\mathscr{L}\left[y\right] - 3 - 2\mathscr{L}\left[y\right] = \dfrac{1}{s-5} \Rightarrow$

$\mathscr{L}\left[y\right] = \dfrac{3s-14}{(s-5)(s-2)} \Rightarrow y = \dfrac{1}{3}e^{2t}(e^{3t} + 8)$.

23. $\mathscr{L}\left[y'' - y\right] = \mathscr{L}\left[1\right] \Rightarrow s^2\mathscr{L}\left[y\right] - 1 - \mathscr{L}\left[y\right] = \dfrac{1}{s} \Rightarrow \mathscr{L}\left[y\right] = \dfrac{1}{s(s-1)} \Rightarrow y = e^t - 1$.

24. $\mathscr{L}\left[y'' - y' - 2y\right] = \mathscr{L}\left[4t^2\right] \Rightarrow s^2\mathscr{L}\left[y\right] - s - 4 - s\mathscr{L}\left[y\right] + 1 - 2\mathscr{L}\left[y\right] = \dfrac{8}{s^3}$

$\Rightarrow \mathscr{L}\left[y\right] = \dfrac{8 + s^4 + 3s^3}{s^3(s^2 - s - 2)} \Rightarrow y = -2t^2 + 2t + 2e^{-t} + 2e^{2t} - 3$.

25. $\mathscr{L}\left[y'' + y\right] = \mathscr{L}\left[e^{-2t}\operatorname{sen} t\right] \Rightarrow s^2\mathscr{L}\left[y\right] + \mathscr{L}\left[y\right] = \dfrac{1}{(s+2)^2+1}$

$\Rightarrow \mathscr{L}\left[y\right] = \dfrac{1}{(s^2+1)((s+2)^2+1)} \Rightarrow y = \dfrac{1}{8}e^{-2t}\operatorname{sen} t + \dfrac{1}{8}e^{-2t}\cos t + \dfrac{1}{8}\operatorname{sen} t - \dfrac{1}{8}\cos t$.

26. $\mathscr{L}\left[y''' + 4y'' + 5y' + 2y\right] = \mathscr{L}\left[10\cos t\right]$

$\Rightarrow s^3\mathscr{L}\left[y\right] - 3 + 4s^2\mathscr{L}\left[y\right] + 5s\mathscr{L}\left[y\right] + 2\mathscr{L}\left[y\right] = \dfrac{10s}{s^2+1}$

$\Rightarrow \mathscr{L}\left[y\right] = \dfrac{3s^2 + 10s + 3}{(s+2)(s+1)^2(s^2+1)} \Rightarrow y = -2e^{-t}t - e^{-2t} + 2e^{-t} + 2\operatorname{sen} t - \cos t$.

27. $\mathscr{L}\left[y'' + 4y' + 8y\right] = \mathscr{L}\left[\operatorname{sen} t\right] \Rightarrow s^2\mathscr{L}\left[y\right] - s + 4s\mathscr{L}\left[y\right] - 4 + 8\mathscr{L}\left[y\right] = \dfrac{1}{s^2+1}$

$\Rightarrow \mathscr{L}\left[y\right] = \dfrac{s^3 + 4s^2 + s + 5}{(s^2+1)(s^2+4s+8)} \Rightarrow y = -2t^2 + 2t + 2e^{-t} + 2e^{2t} - 3$.

28. $\mathscr{L}\left[y' - 2y\right] = \mathscr{L}\left[1 - t\right] \Rightarrow s\mathscr{L}\left[y\right] - 1 - 2\mathscr{L}\left[y\right] = \dfrac{s-1}{s^2} \Rightarrow \mathscr{L}\left[y\right] = \dfrac{s^2+s-1}{s^2(s-2)}$

$\Rightarrow y = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{5}{4}e^{2t}$.

29. $\mathscr{L}[y''-4y'+4y]=\mathscr{L}[1]\Rightarrow s^2\mathscr{L}[y]-s-4-4s\mathscr{L}[y]+4+4\mathscr{L}[y]=\dfrac{1}{s}$

$\Rightarrow \mathscr{L}[y]=\dfrac{1+s^2}{s(s-2)^2}\Rightarrow y=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^{2t}+\frac{5}{2}te^{2t}.$

30. $\mathscr{L}\left[y''+9y\right]=\mathscr{L}[t]\Rightarrow s^2\mathscr{L}[y]+9\mathscr{L}[y]=\dfrac{1}{s^2}$

$\Rightarrow \mathscr{L}[y]=\dfrac{1}{s^2(s^2+9)}\Rightarrow y=\frac{1}{9}t-\frac{1}{27}\operatorname{sen}3t.$

31. $\mathscr{L}[y''-10y'+26y]=\mathscr{L}[4]\Rightarrow s^2\mathscr{L}[y]-3s-15-10s\mathscr{L}[y]+30+26\mathscr{L}[y]=\dfrac{4}{s}$

$\Rightarrow \mathscr{L}[y]=\dfrac{3s^2-15s+4}{s(s^2-10s+26)}\Rightarrow y=\frac{2}{13}+\frac{10}{13}e^{5t}\operatorname{sen}t+\frac{37}{13}e^{5t}\cos t.$

32. $\mathscr{L}[y''-6y'+8y]=\mathscr{L}\left[e^t\right]\Rightarrow s^2\mathscr{L}[y]-3s-9-6s\mathscr{L}[y]+18+8\mathscr{L}[y]=\dfrac{1}{s-1}$

$\Rightarrow \mathscr{L}[y]=\dfrac{3s^2-12s+10}{(s-1)(s^2-6s+8)}\Rightarrow y=\frac{1}{3}e^t+e^{2t}+\frac{5}{3}e^{4t}.$

33. $\mathscr{L}[y''+4y]=\mathscr{L}\left[e^{-t}\operatorname{sen}t\right]\Rightarrow s^2\mathscr{L}[y]-s-4+4\mathscr{L}[y]=\dfrac{1}{(s+1)^2+1}$

$\Rightarrow \mathscr{L}[y]=\dfrac{s^3+6s^2+10s+9}{(s^2+4)((s+1)^2+1)}\Rightarrow y=\frac{1}{5}e^{-t}\operatorname{sen}t+\frac{1}{10}e^{-t}\cos t+\frac{39}{20}\operatorname{sen}2t+\frac{9}{10}\cos 2t.$

34. $\mathscr{L}[y''+2y'-3y]=\mathscr{L}\left[e^{-3t}\right]\Rightarrow s^2\mathscr{L}[y]+2s\mathscr{L}[y]-3\mathscr{L}[y]=\dfrac{1}{s+3}$

$\Rightarrow \mathscr{L}[y]=\dfrac{1}{(s+3)(s^2+2s-3)}\Rightarrow y=\frac{1}{16}e^t-\frac{1}{16}e^{-3t}-\frac{1}{4}te^{-3t}.$

35. $f(t)=2H(t-4)\Rightarrow\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[2H(t-4)]=\dfrac{2}{s}e^{-4s}.$

Luego, $s^3\mathscr{L}[y]-8\mathscr{L}[y]=\dfrac{2}{s}e^{-4s}\Rightarrow\mathscr{L}[y]=\dfrac{2e^{-4s}}{s(s^3-8)}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{12}H(t-4)\left(e^{2(t-4)}+2e^{4-t}\cos(\sqrt{3}(t-4))-3\right).$

36. $f(t)=t+2H(t-3)\Rightarrow\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[t+2H(t-3)]=\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{2}{s}e^{-3s}.$

Luego, $s^2\mathscr{L}[y]+2s-1-4s\mathscr{L}[y]-8+4\mathscr{L}[y]=\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{2}{s}e^{-3s}$

$\Rightarrow\mathscr{L}[y]=\dfrac{2s^3+9s^2+1+2se^{-3s}}{s^2(s^2-4s+4)}$

$\Rightarrow y=\dfrac{2(e^{2t}(2t-7)+e^6)H(t-3)+e^6(t+e^{2t}(53t+7)+1)}{4e^6}.$

37. $f(t) = \cos tH(t-\pi) = -\cos(t-\pi)H(t-\pi)$
$\Rightarrow \mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[-\cos(t-\pi)H(t-\pi)] = \dfrac{-s}{s^2+1}e^{-\pi s}$.
Luego, $s^2\mathscr{L}[y] - s - 1 - 9\mathscr{L}[y] = \dfrac{-s}{s^2+1}e^{-\pi s}$
$\Rightarrow \mathscr{L}[y] = \dfrac{s^3+s^2+s+1-se^{-\pi s}}{(s^2+1)(s^2-9)}$
$\Rightarrow \dfrac{1}{60}e^{-3(t+\pi)}(20e^{3\pi}(2e^{6t}+1) - 3H(t-\pi)(e^{6t}+2e^{3(t+\pi)}\cos t + e^{6\pi}))$.

38. $s^4\mathscr{L}[y] - 11s^2\mathscr{L}[y] + 18\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[f(t)] \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[y] &= \mathscr{L}[f(t)] \cdot \frac{1}{s^4-11s^2+18}\\ &= \mathscr{L}[f(t)] \cdot \left[-\frac{e^{-\sqrt{2}t}(e^{2\sqrt{2}t}-1)}{14\sqrt{(2)}} - \frac{e^{-3t}}{42} + \frac{e^{3t}}{42}\right].\end{aligned}$$

Entonces, $y = f(t) * \left[-\dfrac{e^{-\sqrt{2}t}(e^{2\sqrt{2}t}-1)}{14\sqrt{(2)}} - \dfrac{e^{-3t}}{42} + \dfrac{e^{3t}}{42}\right]$.

39. (a) Como y es solución del problema de valores iniciales

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{a},$$

entonces,

$$as^2\mathscr{L}[y] - 1 + bs\mathscr{L}[y] + c\mathscr{L}[y] = 0$$

y, por lo tanto,

$$as^2\mathscr{L}[y] + bs\mathscr{L}[y] + c\mathscr{L}[y] = 1. \tag{29}$$

Si se aplica la transformada de Laplace al lado izquierdo de la ecuación

$$au'' + bu' + cu = f(t), \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \tag{30}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}as^2\mathscr{L}[u] + bs\mathscr{L}[u] + c\mathscr{L}[u] &= as^2\mathscr{L}[f*y] + bs\mathscr{L}[f*y] + c\mathscr{L}[f*y]\\ &= as^2\mathscr{L}[f]\,\mathscr{L}[y] + bs\mathscr{L}[f]\,\mathscr{L}[y] + c\mathscr{L}[f]\,\mathscr{L}[y]\\ &= \mathscr{L}[f]\,(as^2\mathscr{L}[y] + bs\mathscr{L}[y] + c\mathscr{L}[y]).\end{aligned}$$

De acuerdo con (29), la expresión entre paréntesis es igual a 1, por ello se concluye que

$$as^2\mathscr{L}[u] + bs\mathscr{L}[u] + c\mathscr{L}[u] = \mathscr{L}[f(t)],$$

esto significa que la solución de (30) es $u = f * y$.

(b) Al resolver el problema de valores iniciales

$$2y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{2},$$

se obtiene $y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(e^{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-2)t} - e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{2}+2)t}\right)$. Por lo tanto, de acuerdo con la parte (a) de este ejercicio, la solución del problema de valores iniciales propuesto es

$$u = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(e^{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-2)t} - e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{2}+2)t}\right) * (1+t^2).$$

40. La ecuación diferencial del circuito es $LI' + RI = 2H(t-5)$, con $E(0) = 0$. Por lo tanto, $Ls\mathscr{L}[I] + R\mathscr{L}[I] = \dfrac{2}{s}e^{-5s} \Rightarrow \mathscr{L}[I] = \dfrac{2e^{-5s}}{s(Ls+R)}$.
    Se concluye que $I(t) = \frac{2}{R}H(t-5)\left(1 - e^{-(R(t-5))/L}\right)$.

41. La ecuación diferencial del circuito es $LI' + RI = k(1 - H(t-5))$, con $E(0) = 0$. Por lo tanto, $Ls\mathscr{L}[I] + R\mathscr{L}[I] = \dfrac{k}{s}(1 - e^{-5s}) \Rightarrow \mathscr{L}[I] = \dfrac{k(1-e^{-5s})}{s(Ls+R)}$.
    Se concluye que $I(t) = \frac{k}{R}\left(H(t-5)(e^{-(R(t-5))/L} - 1) - e^{-(Rt)/L} + 1\right)$.

Ejercicios de autoevaluación de la sección 5, página 64

1. Se aplica la transformada de Laplace en ambas ecuaciones y se reordena:
$$\left.\begin{array}{l} s\mathscr{L}[y_1] + \mathscr{L}[y_2] = 1 + \frac{1}{s^2} \\ 4\mathscr{L}[y_1] + s\mathscr{L}[y_2] = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} -s^2\mathscr{L}[y_1] - s\mathscr{L}[y_2] = -s - \frac{1}{s} \\ 4\mathscr{L}[y_1] + s\mathscr{L}[y_2] = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\mathscr{L}[y_1] = \frac{s^2+s+1}{s(s^2-4)} \Rightarrow y_1 = \tfrac{1}{8}(3e^{-2t} + 7e^{2t} - 2).$$
    Si se procede de modo análogo con respecto a y_2, se obtiene:
$$\mathscr{L}[y_2] = \frac{s^3+4s^2+4}{s^2(4-s^2)} \Rightarrow y_2 = t + \tfrac{3}{4}e^{-2t} - \tfrac{7}{4}e^{2t}.$$

2. Se aplica la transformada de Laplace en ambas ecuaciones y se reordena:
$$\left.\begin{array}{l} (s-6)\mathscr{L}[y_1] + 3\mathscr{L}[y_2] = \frac{9-s}{s-1} \\ -2\mathscr{L}[y_1] + (s-1)\mathscr{L}[y_2] = \frac{4}{s-1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l} 2(s-6)\mathscr{L}[y_1] + 6\mathscr{L}[y_2] = \frac{18-2s}{s-1} \\ -2(s-6)\mathscr{L}[y_1] + (s-6)(s-1)\mathscr{L}[y_2] = \frac{4(s-6)}{s-1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\mathscr{L}[y_2] = \frac{2s-6}{s(s-1)(s-7)} \Rightarrow y_2 = \tfrac{2}{21}(7e^t + 2e^{7t} - 9).$$

Si se sustituye y_2 en la primera ecuación, se obtiene:

$$y_1' - 6y_1 = 6e^t - \tfrac{4}{7}e^{7t} + \tfrac{18}{7},$$

cuya solución es $y_1 = \frac{1}{35}(-42e^t + 42e^{6t} - 20e^{7t} - 15)$.

3. Se aplica la transformada de Laplace en ambas ecuaciones y se reordena:

$$\left.\begin{array}{l} (2s-1)\mathscr{L}[y_1] + (s-1)\mathscr{L}[y_2] = \frac{5s+6}{s+1} \\ (s+2)\mathscr{L}[y_1] + (s+1)\mathscr{L}[y_2] = \frac{3s-2}{s-1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} (s+1)(2s-1)\mathscr{L}[y_1] + (s+1)(s-1)\mathscr{L}[y_2] = 5s+6 \\ (1-s)(s+2)\mathscr{L}[y_1] - (s+1)(s-1)\mathscr{L}[y_2] = 3s-2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\mathscr{L}[y_1] = \dfrac{8s+4}{s^2+1} \Rightarrow y_1 = 4\operatorname{sen} t + 8\cos t.$

Si se sustituye y_1 y su derivada $y_1' = 4\cos t - 8\operatorname{sen} t$ en la segunda ecuación, se obtiene:

$$y_2' + y_2 = e^t - 20\cos t,$$

cuya solución es $y_2 = \frac{1}{2}(21e^{-t} + e^t + 20\operatorname{sen} t + 20\cos t)$.

4. Se aplica la transformada de Laplace en ambas ecuaciones y se reordena:

$$\left.\begin{array}{l} (s^2+1)\mathscr{L}[y_1] + \mathscr{L}[y_2] = 0 \\ s\mathscr{L}[y_1] + s\mathscr{L}[y_2] = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} -s(s^2+1)\mathscr{L}[y_1] - s\mathscr{L}[y_2] = 0 \\ s\mathscr{L}[y_1] + s\mathscr{L}[y_2] = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\mathscr{L}[y_1] = -\dfrac{1}{s^3} \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2}t^2.$

Si se sustituye $y_1' = -t$ en la segunda ecuación, se obtiene:

$y_2' = t \Rightarrow y_2 = \frac{1}{2}t^2 + 1$, pues $y_2(0) = 1$.

5. Se aplica la transformada de Laplace en ambas ecuaciones y se reordena:

$$\left.\begin{array}{l} s^2\mathscr{L}[y_1] + \mathscr{L}[y_2] = -2 \\ -s\mathscr{L}[y_1] + s^2\mathscr{L}[y_2] = \frac{2s-4}{s-1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} s^2\mathscr{L}[y_1] + \mathscr{L}[y_2] = -2 \\ -s^2\mathscr{L}[y_1] + s^3\mathscr{L}[y_2] = \frac{2s^2-4s}{s-1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\mathscr{L}[y_2] = -\dfrac{-2s}{(s-1)(1+s^3)} + \dfrac{2s-2}{1+s^3} \Rightarrow y_2 = -\frac{5}{3}e^{-t} - e^t + \frac{8}{3}e^{t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$

Si se procede de modo análogo con respecto a y_1, se obtiene:

$\mathscr{L}[y_1] = \dfrac{4-2s}{s(s-1)(1+s^3)} + \dfrac{2s}{1+s^3} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{3}e^{-t} + e^t + \frac{8}{3}e^{t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - 4.$

6. Se aplica la transformada de Laplace en ambas ecuaciones y se reordena:

$$\left.\begin{array}{l} s^2\mathscr{L}[y_1] - 2\mathscr{L}[y_2] = \frac{2(s^2+s+1)}{s} \\ \mathscr{L}[y_1] + s\mathscr{L}[y_2] = \frac{s^2+4s-2}{s(s-2)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} s^3\mathscr{L}[y_1] - 2s\mathscr{L}[y_2] = 2(s^2+s+1) \\ 2\mathscr{L}[y_1] + 2s\mathscr{L}[y_2] = \frac{2s^2+8s-4}{s(s-2)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathscr{L}[y_1] = \frac{2(s-1)}{(s-2)s} \Rightarrow y_1 = e^{2t} + 1.$$

Si se sustituye y_1 en la segunda ecuación, se obtiene:

$y_2' = 4e^{2t} \Rightarrow y_2 = 2e^{2t} - 1$, pues $y_2(0) = 1$.

7. Se aplica la transformada de Laplace en ambas ecuaciones y se reordena:

$$\left.\begin{array}{l} 2s\mathscr{L}[y_1] + (s-3)\mathscr{L}[y_2] = 0 \\ \mathscr{L}[y_1] + \mathscr{L}[y_2] = \frac{1}{s^3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2s\mathscr{L}[y_1] + (s-3)\mathscr{L}[y_2] = 0 \\ -2s\mathscr{L}[y_1] - 2s\mathscr{L}[y_2] = \frac{-2}{s^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathscr{L}[y_2] = \frac{2}{s^2(s+3)} \Rightarrow y_2 = \tfrac{2}{9}(3t + e^{-3t} - 1).$$

Si se sustituye $y_2' = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{-3t}$ en la segunda ecuación, se obtiene:

$y_1' = t - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{-3t} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t - \frac{2}{9}e^{-3t} + \frac{2}{9}$, pues $y_1(0) = 0$.

8. Se aplica la transformada de Laplace en ambas ecuaciones y se reordena:

$$\left.\begin{array}{l} s\mathscr{L}[y_1] + (2s-1)\mathscr{L}[y_2] = \frac{1}{s^2} \\ -s\mathscr{L}[y_1] - 2\mathscr{L}[y_2] = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathscr{L}[y_2] = \frac{1}{s^2(2s-3)} \Rightarrow y_2 = \tfrac{1}{9}(-3t + 2e^{3t/2} - 2).$$

Si se sustituye y_2 en la segunda ecuación, se obtiene:

$y_1' = -\frac{2}{9}(-3t + 2e^{3t/2} - 2) \Rightarrow y_1 = -\frac{2}{9}(-\frac{3}{2}t^2 + \frac{4}{3}e^{3t/2} - 2t) - \frac{8}{27}$, pues $y_1(0) = 0$.

9. Se aplica la transformada de Laplace en ambas ecuaciones y se reordena:

$$\left.\begin{array}{l} (s+1)\mathscr{L}[y_1] + (s-1)\mathscr{L}[y_2] = 0 \\ -(s+1)\mathscr{L}[y_1] - 2\mathscr{L}[y_2] = -\frac{1}{s} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathscr{L}[y_2] = \frac{-1}{s(s-3)} \Rightarrow y_2 = \tfrac{1}{3}(1 - e^{3t}).$$

Si se sustituye y_2 en la segunda ecuación, se obtiene:

$$y_1' + y_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{3t},$$

cuya solución es $y_1 = \frac{1}{6}e^{-t}(2e^t + e^{4t} - 3)$.

10. Se aplica la transformada de Laplace en ambas ecuaciones y se reordena:

$$\left.\begin{aligned} s^2\mathscr{L}[y_1] + s\mathscr{L}[y_2] &= \frac{-s^3}{s^2+1} \\ -2s\mathscr{L}[y_1] + s^2\mathscr{L}[y_2] &= \frac{s^3-2s^2+s-1}{s^2+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} -s^3\mathscr{L}[y_1] - s^2\mathscr{L}[y_2] &= \frac{s^4}{s^2+1} \\ -2s\mathscr{L}[y_1] + s^2\mathscr{L}[y_2] &= \frac{s^3-2s^2+s-1}{s^2+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathscr{L}[y_1] = -\frac{s^4+s^3-2s^2+s-1}{s(s^2+1)(s^2+2)} \Rightarrow$$

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{2}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + 4\cos t - 7\cos(\sqrt{2}t) + 1).$$

Si se procede de modo análogo con respecto a y_2, se obtiene:

$$\mathscr{L}[y_2] = \frac{s^3-4s^2+s-1}{(s^2+1)(s^2+2)} \Rightarrow y_2 = \tfrac{1}{2}(6\operatorname{sen} t - 7\sqrt{2}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + 2\cos(\sqrt{2}t)).$$

11. La cantidad de solución salina permanece constante en ambos tanques. La cantidad de sal por galón, en el primero, es $\frac{1}{100}X(t)$ y la cantidad de sal por galón en el segundo es $\frac{1}{200}Y(t)$. Por esta razón, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{1}{2}Y(t) - \frac{3}{10}X(t) \\ \frac{dY}{dt} &= \frac{3}{10}X(t) - \frac{3}{20}Y(t). \end{aligned}$$

Si se aplica la transformada de Laplace a ambas ecuaciones y se reordena, se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(s+\frac{3}{10}\right)\mathscr{L}[X] - \frac{1}{20}\mathscr{L}[Y] &= 50 \\ -\frac{3}{10}\mathscr{L}[X] + \left(s+\frac{3}{20}\right)\frac{1}{20}\mathscr{L}[Y] &= 50. \end{aligned}$$

La solución del sistema es:

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{25}{33}\left((33+\sqrt{33})e^{(-9-\sqrt{33})t/40} + (33-\sqrt{33}e^{(\sqrt{33}-9)t/40}\right), \\ Y(t) &= \frac{25}{11}\left((11-\sqrt{33})e^{(-9-\sqrt{33})t/40} + (11+\sqrt{33})e^{(\sqrt{33}-9)t/40}\right). \end{aligned}$$

12. Las ecuaciones diferenciales de los circuitos son:

$$\begin{aligned} 5\frac{dI_1}{dt} + 30I_1 - 30I_2 &= 2H(t-4), \\ 10\frac{dI_2}{dt} - 30I_1 + 130I_2 &= 0. \end{aligned}$$

Si se aplica la transformada de Laplace a ambas ecuaciones y se reordena, se obtiene:

$$\begin{aligned} (5s+30)\mathscr{L}\,[I_1] - 30\mathscr{L}\,[I_2] &= \frac{2}{s}e^{-4s}, \\ -30\mathscr{L}\,[I_1] + (10s+130)\mathscr{L}\,[I_2] &= 0. \end{aligned}$$

La solución del sistema es:

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \frac{1}{1650}e^{-15t}(143e^{15t} - 135e^{11t+16} - 8e^{60})H(t-4), \\ I_2(t) &= 6\left(\frac{1}{825}e^{-15(t-4)} - \frac{1}{220}e^{-4(t-4)} + \frac{1}{300}\right)H(t-4). \end{aligned}$$