Veinteava sesión

Análisis Convexos - CM3E2

Jonathan Munguia[1]

[1]Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

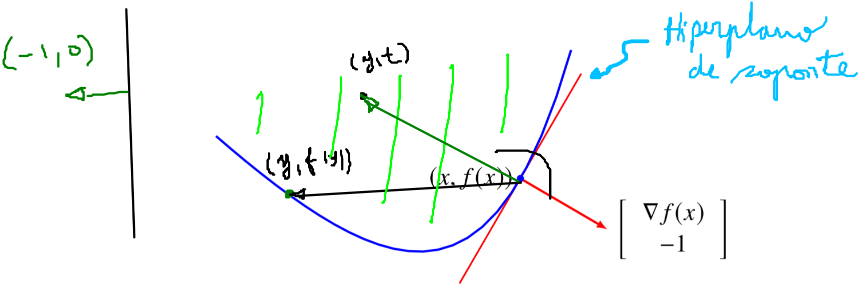
24 de junio de 2021

Outline

Motivación

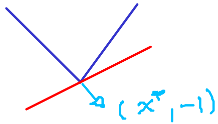
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa diferenciable y $x \in \text{dom}(f)$. Entonces

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \quad \forall y \in \text{dom}(f).$$



Si f es propia, entonces se puede definir el hiperplano de soporte no vertical de f en $(x, f(x))$:

$$\langle (y,t) - (x, f(x)), (\nabla f(x), -1) \rangle \leq 0 \quad \forall (y,t) \in \text{epi}(f).$$



Definición 1 (Subgradiente y subdiferencial)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa y $x \in \mathrm{dom}(f)$. Un elemento $x^* \in \mathbb{R}^n$ es llamado un subgradiente de f en x si

$$f(y) \geq \overbrace{f(x) + \langle x^*, y - x\rangle}^{h(y)} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

La colección de todos los subgradientes de f en x es llamado el subdiferencial de f en x y es denotado por $\partial f(x)$:

$$\partial f(x) := \{\overset{= \nabla f(x)}{x^*} \;:\; f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x\rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Por convención: Si $x \notin \mathrm{dom}(f)$ entonces $\partial f(x) = \emptyset$.

Interpretación

$\lambda \geq f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y-x \rangle$

Dado $x^* \in \partial f(x)$ y $(y, \lambda) \in \text{epi}(f)$, se tiene

$$\lambda \geq f(x) + \langle x^*, y - x\rangle$$
$$\iff 0 \geq \big\langle (y, \lambda) - (x, f(x)), (x^*, -1) \big\rangle.$$

Luego, $H = \{(y, \mu) \ : \ f(x) + \langle x^*, y - x\rangle = \mu\}$ es un hiperplano de soporte del epi(f) que pasa por debajo de f. Lo intersecta en $(x, f(x))$.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

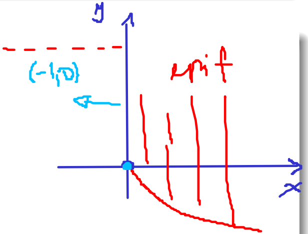
Pag 47 del libro Eladio

Observación 1

- Si f es de valor real entonces $\partial f(x)$ es no vacío y compacto.
- Si f es convexa y diferenciable en x, entonces $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.
- Si f es de valor real extendido entonces $\partial f(x)$ puede ser no acotado e incluso puede ser vacío para algunos puntos en la frontera del $\text{dom}(f)$.

Ejemplo 1

$f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$



Sea $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$x > 0$

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x \geq 0 \\ +\infty & x < 0 \end{cases}$$

El único hiperplano de soporte al $\text{epi}(f)$ en $(0, f(0))$ es vertical y por lo tanto $\partial f(0) = \emptyset$.

$x < 0 \qquad \partial f(x) = \emptyset$

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, & x \geq 0 \\ +\infty, & x < 0 \end{cases}$$

$$f^*(x^*) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4x^*}, & x^* < 0 \\ +\infty, & x^* \geq 0 \end{cases}$$

f convexa y propia

$x^* \in \partial f(x) \iff x^* \cdot x = f^*(x^*) + f(x)$

$$\begin{cases} x^* x = -\dfrac{1}{4x^*} - \sqrt{x}, & x \geq 0,\ x^* < 0 \\ \emptyset, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\Rightarrow \partial f(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$ y vacío en otro caso

$(x=0)$ $\exists x^* \in \partial f(0)$

$\forall y \in \mathbb{R}: f(y) \geq \underbrace{f(0)}_{0} + \langle x^*, y-0 \rangle$

$f(y) \geq x^* y$

$$\begin{cases} \text{Si } y>0 & -\sqrt{y} \geq x^* y \\ & -\dfrac{1}{\sqrt{y}} \geq x^* \\ & y \to \infty \downarrow \\ & \boxed{x^* \leq 0} \\ \text{Si } y<0 & +\infty \geq x^* y \ ✓ \\ \text{Si } y=0 & 0 \geq 0 \end{cases}$$

$x^* \leq 0$ $y<0$

$f(y) \geq x^* y \geq 0$

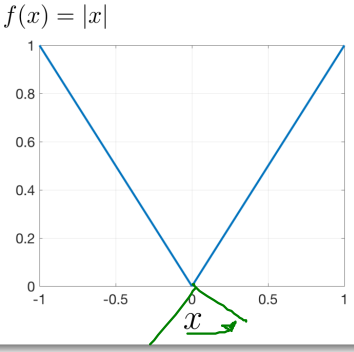
$y>0$

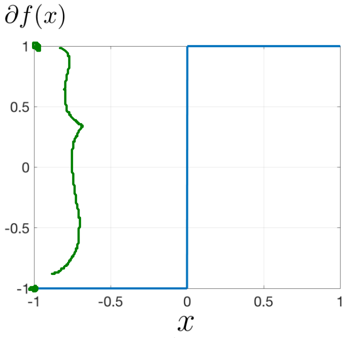
$x^* y \leq 0$

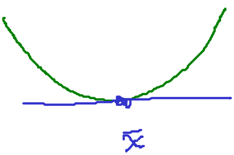
Ejemplo 2

Dada la función real $f(x) = |x|$, se tiene que

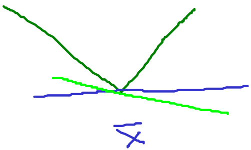
$$\partial f(x) = \begin{cases} \{-1\} & x < 0 \\ [-1, 1] & x = 0 \\ \{1\} & x > 0. \end{cases}$$







$m = 0$ (pendiente



$m = 0$ (pend

Proposición 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa y $\overline{x} \in dom(f)$. Entonces f alcanza su mínimo local/global en $\overline{x}$ si y solo si $0 \in \partial f(\overline{x})$.

$$0 \in \partial f(\bar{x}) \iff f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle 0, x - \bar{x} \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\iff f(x) \geq f(\bar{x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\iff \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = f(\bar{x})$$

$$\iff \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = f(\bar{x})$$

Proposición 2

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *convexa propia y* f^* *su conjugada. Entonces son equivalentes:*

i) $x^* \in \partial f(x)$

ii) $f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle$

Demostración

$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$

$\langle x^*, y \rangle - \langle x^*, x \rangle$

$$
\begin{aligned}
x^* \in \partial f(x) &\iff \langle x^*, x \rangle - f(x) \geq \langle x^*, y \rangle - f(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \\
&\iff \langle x^*, x \rangle - f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left[\langle x^*, y \rangle - f(y) \right] \\
&\iff \langle x^*, x \rangle - f(x) = f^*(x^*).
\end{aligned}
$$

para $x \in \mathbb{R}^n$

Por tanto $\partial f(x) = \{x^* : f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle\}$.

Proposición 3

Dada la función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *y* $x \in dom(f)$*, entonces* $\partial f(x)$ *es un subconjunto convexo y cerrado de* $\mathbb{R}^n$*.*

Demostración

$\{x^* : f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y-x\rangle \ \forall y\}$

Dado que $\partial f(x)$ se puede expresar como intersección de conjuntos convexos cerrados, es decir

$$\partial f(x) = \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{x^* \ : \ f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x\rangle\right\}$$

Por tanto, $\partial f(x)$ es convexo y cerrado.

Observación 2

Se sabe que $\partial f(x)$ puede ser vacío, el cual es convexo y cerrado.

Proposición 4

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa propia. Si $\partial f(a) \neq \emptyset$, entonces f es sci en a.

Observación 3

La recíproca de la proposición es falsa, considere el ejemplo anterior $f(x) = -\sqrt{x}$ si $x \geq 0$ y $+\infty$ en otro caso. Esta es claramente convexa y sci.

$x < 0$

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\} & x > 0 \\ \emptyset & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$\leftarrow$ TAREA

$a \in \text{dom} f$ y $\partial f(a) \neq \emptyset$

$$x^* \in \partial f(a) \Rightarrow f(x) \geq \underbrace{f(a) + \langle x^*, x-a \rangle}_{h_a(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$h_a(x)$ es continua (es sci)

$$\lambda < f(a) = h_a(a) \Rightarrow \exists V \ni a \text{ tq } \lambda < h_a(x) \leq f(x) \quad \forall x \in V$$

$\therefore$ f es sci en a

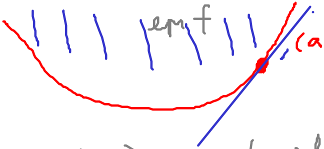
Proposición 5 (Subgradiente conjugado)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *convexa sci propia. Entonces* $x^* \in \partial f(x)$ *si y sólo si* $x \in \partial f^*(x^*)$.

Demostración

Debido a que $f = f^{**}$, se tiene

$$\begin{aligned} x^* \in \partial f(x) &\iff f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle \\ &\iff f^*(x^*) + (f^*)^*(x) = \langle x^*, x \rangle \\ &\iff x \in \partial f^*(x^*). \end{aligned}$$



$C = \operatorname{epi} f \neq \emptyset$

$D = \{(a, f(a))\} \neq \emptyset$

$(a, f(a)) \in \underbrace{\partial(\operatorname{epi} f)}_{\text{frontera}} \Rightarrow \underbrace{(a, f(a))}_{= \, ri\, D} \notin ri(\operatorname{epi} f)$

Teorema 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa sci propia. Entonces $\partial f(a) \neq \emptyset$ para todo $a \in ri(dom(f))$.

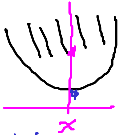
Teorema de separación (Teorema 3.4 del Libro Eladio)

C y D convexos no vacíos y $ri\, C \cap ri\, D = \emptyset$.

$\Rightarrow \underline{\exists a \neq 0}$ tq $\underline{\langle a, y - x \rangle > 0}$ $\forall \underline{x \in ri\, C}$ $\forall \underline{y \in ri\, D}$

$\exists \ (x^*, \alpha^*) \neq 0$

(Teorema de separación)



$$\langle (x^*, \alpha^*), (a, f(a)) - (x, \lambda) \rangle > 0 \quad \forall (x, \lambda) \in ri(\operatorname{epi} f)$$

$$\langle (a, f(a)), (x^*, \alpha^*) \rangle > \langle (x, \lambda), (x^*, \alpha^*) \rangle$$

$$\langle a, x^* \rangle + \alpha^* f(a) > \langle x, x^* \rangle + \alpha^* \lambda$$

λ puede ser arbitrariamente grande

$\Rightarrow \quad \alpha^* < 0$ (en particular $\alpha^* = -1$)

$$\langle a, x^* \rangle - f(a) > \langle x, x^* \rangle - \lambda \qquad \forall x \in \operatorname{dom} f.$$

$\lambda \to f(x) \Rightarrow \quad \langle a, x^* \rangle - f(a) \geq \langle x, x^* \rangle - f(x)$

$a \in ri(\operatorname{dom} f)$

$$\langle a, x^* \rangle - f(a) \underset{\leq}{\geq} \sup_{x \in \mathrm{dom} f} \left[\langle x, x^* \rangle - f(x) \right]$$

$$\| $$

$$f^*(x^*) \quad , \quad a \in \mathrm{dom} f$$

$$\Rightarrow \quad \langle a, x^* \rangle - f(a) = f^*(x^*)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x^* \in \partial f(a)} \quad \Rightarrow \quad \underline{\partial f(a) \neq \emptyset}$$

FIN