Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Análisis Convexo - CM3E2]
[Prof: Jonathan Munguia] UNI, 04 de junio de 2021

Examen Parcial

1. Sea $c \in \mathbb{R}^n$ y $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo compacto. Considere el problema de optimización:

$$\min_{x \in C} \langle c, x \rangle.$$

Demuestre que existe al menos una solución optimal que es un punto extremo de C. [5ptos]

Solución: Como C es compacto y $\langle c, x\rangle$ es continua entonces se alcanza el mínimo (existe solución). Sea $x^* \in C$ una solución optimal (punto donde se alcanza el mínimo). Por el Teorema de Krein-Milman existen $x_i \in \operatorname{ext}(C)$ tal que $x^* = \sum_i \lambda_i x_i$ con $\sum_i \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$ (combinación convexa). Como se tiene que

$$\langle c, x^* \rangle = \sum_i \lambda_i \langle c, x_i \rangle,$$

entonces $\langle c, x^*\rangle = \langle c, x_i\rangle$ para todo i, pues si para algún i se tuviera que $\langle c, x^*\rangle < \langle c, x_i\rangle$, entonces se llegaría a una contradicción. Luego, existen x_i puntos extremos de C que son soluciones optimales.

2. Sea f convexa, propia y sci. Demuestre que todos los subconjuntos de nivel S_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$ tienen el mismo cono de recesión. [5ptos]

Solución:

a) Si f es impropia, entonces $f \equiv -\infty$ sobre $\operatorname{dom} f$, luego todos los conjuntos de nivel tienen el mismo cono de recesión.

b) Sea f es propia. Denotamos por V_λ el corte del epígrafo a una altura λ, es decir

$$V_\lambda = \big\{(x,\lambda) \,:\, f(x) \leq y\big\} = \operatorname{epi} f \cap \big\{(x,\lambda) \,:\, x \in \mathbb{R}^n\big\}.$$

c) Si S_λ es vacío, entonces $\operatorname{recc}(S_\lambda) = \{0\}$.

d) Si $S_\lambda \neq \emptyset$ entonces $V_\lambda \neq \emptyset$. Dado que f es convexa y sci entonces $\operatorname{epi} f$ es convexo cerrado. Además $\big\{(x,\lambda) \,:\, x \in \mathbb{R}^n\big\}$ es un hiperplano en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ por tanto es convexo cerrado. Luego, por la Proposición 1, se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{recc}(V_\lambda) &= \operatorname{recc}(\operatorname{epi} f) \cap \operatorname{recc}\big\{(x,\lambda) \,:\, x \in \mathbb{R}^n\big\} \\ &= \operatorname{recc}(\operatorname{epi} f) \cap \big\{(d,0) \,:\, d \in \mathbb{R}^n\big\} \\ &= \big\{(d,0) \,:\, (d,0) \in \operatorname{recc}(\operatorname{epi} f)\big\}. \end{aligned}$$

e) Por la parte d) se observa que $\text{recc}(V_\lambda)$ es independiente de λ. Como $V_\lambda = \text{proy}^{-1}(S_\lambda) \neq \emptyset$ y la proyección es lineal, se tiene por la Proposición 2 que

$$\begin{aligned}\text{proy}^{-1}(\text{recc}(S_\lambda)) &= \text{recc}(\text{proy}^{-1}(S_\lambda)) \\ &= \big\{(d,0) \,:\, (d,0) \in \text{recc}(\text{epi}f)\big\}.\end{aligned}$$

Por tanto, los conos de recesión de los subnivel no vacíos son iguales, es decir

$$\text{recc}(S_\lambda) = \big\{d \,:\, (d,0) \in \text{recc}(\text{epi}f)\big\}.$$

Proposición 1 *Si $\{C_i : i \in I\}$ es una colección arbitraria de conjuntos convexos cerrados en $\mathbb{R}^n$ cuya intersección es no vacía, entonces*

$$\textit{recc}\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right) = \bigcap_{i\in I} \textit{recc}(C_i).$$

Ver Corolario 8.3.3 de Rockafellar - Convex Analysis.

Proposición 2 *Si A es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y sea $C \in \mathbb{R}^n$ conjunto convexo cerrado tal que $A^{-1}C \neq \emptyset$. Entonces*

$$\textit{recc}(A^{-1}C) = A^{-1}(\textit{recc}(C)).$$

Ver Corolario 8.3.4 de Rockafellar - Convex Analysis.

3. Determine que

a) La siguiente función es convexa pero no estrictamente convexa en el intervalo $[0,3]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0,1] \\ 0, & x \in [1,2] \\ x-2, & x \in [2,3] \end{cases}.$$

[2.5ptos]

b) La función $f(x) = (1+x^2)^{1/2}$ es estrictamente convexa pero no fuertemente convexa en $\mathbb{R}$. [2.5ptos]

Solución:

a) Gráficamente es claro que $\text{epi}\, f$ es convexo. Analíticamente, se observa que como es afín a trozos entonces es convexa a trozos. Entonces bastaría tomar un par de puntos en las distintas zonas. Por ejemplo, dados $x \in (0,1)$, $y \in (1,2)$ y $t \in (0,1)$, se tiene que si $tx + (1-t)y \in (0,1)$ entonces

$$\begin{aligned}f(tx+(1-t)y) &= 1 - (tx + (1-t)y) \\ &= t(1-x) + (1-t)(1-y) \\ &< t(1-x) + 0 = tf(x) + (1-t)f(y),\end{aligned}$$

y en el caso que $tx + (1-t)y \in (1,2)$ es trivial. Sin embargo no es estrictamente convexa, porque posee una sección constante, es decir para $x, y \in [1,2]$ y $t \in [0,1]$, se tiene que

$$f(tx+(1-t)y) = 0 = tf(x) + (1-t)f(y).$$

b) Por el Teorema 1, $f(x) = (1+x^2)^{1/2}$ es estrictamente convexa pues

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0.$$

Se puede probar de diferentes maneras que f no es fuertemente convexa.

Primera forma:

Si f es fuertemente convexa, entonces existe $\mu > 0$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y $t \in [0,1]$:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{\alpha}{2}t(1-t)\|x-y\|^2$$

Si tomamos $x > 0$, $y = x+1$ y $t = 1/2$ y reordenando se obtiene

$$0 < \mu \leq 4(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x+1)^2} - \sqrt{4+(2x+1)^2}),$$

ahora tomamos límite cuando $t \to +\infty$, esto tiene sentido porque la función tiene a ser lineal (grafique!) y por ende no se puede aproximar por una cuadrática por debajo. El límite del lado derecho tiende a cero cuando $t \to \infty$, lo cual es una contradicción, por lo tanto f no es fuertemente convexa.

Segunda forma:

Si f es fuertemente convexa, entonces existe $\mu > 0$ tal que $f''(x) \geq \mu > 0$. Como

$$\lim_{x \to +\infty} f''(x) = 0.$$

Entonces se llega a un absurdo, por lo tanto f no es fuertemente convexa.

Teorema 1 *Suponga que f'' existe sobre (a,b). Entonces f es convexa si y solo si $f''(x) \geq 0$. Y si $f''(x) > 0$ sobre (a,b), entonces f es estrictamente convexa sobre el intervalo.*

Ver Teorema C de Hermann Weyl - Convex Functions on the Real Line.

4. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, compacto no vacío. Considere un problema de optimización:

$$\min_{x \in C} f(x),$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es estrictamente convexa. Demuestre que existe una única solución optimal.[5ptos]

Solución:

a) No podemos asegurar existencia de solución porque se puede encontrar funciones estrictamente convexas que no tengan mínimo. Por ejemplo, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida como

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

Sin embargo, si adicionalmente f es sci (el ejemplo no lo es), entonces si existe solución, véa Proposición 2.2 de Crouzeix & Ocaña - Análisis convexo.

b) En el caso de existir solución, esta es única. Sean x_1 y x_2 minimizadores globales distintos de f. Entonces, para $\lambda \in (0,1)$,

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) < (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) = f(x_1),$$

lo cual contradice la suposición de que x_1 es un minimizador global.