Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Análisis Convexo - CM3E2]
[Prof. Jonathan Munguia] UNI, 21 de mayo de 2021

Cuarta Práctica Dirigida

1. $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es sci si y solo si

$$f(x) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k) \quad \forall\,(x_k) \subset \mathbb{R}^n \text{ con } x_k \to x,$$

   donde para toda sucesión $(z_k) \subset \mathbb{R}^n$, se define $\liminf\limits_{k\to\infty} z_k := \lim\limits_{m\to\infty}\left(\inf\limits_{k\geq m} z_k\right) = \sup\limits_{m\geq 0}\left(\inf\limits_{k\geq m} z_k\right)$.

2. Probar que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n \geq n_0 \Longrightarrow \liminf_{k\to\infty} x_k - \epsilon < x_n < \limsup_{k\to\infty} x_k + \epsilon.$$

   Donde $\limsup\limits_{k\to\infty} x_k := \lim\limits_{m\to\infty}\left(\sup\limits_{k\geq m} x_k\right) = \inf\limits_{m\geq 0}\left(\sup\limits_{k\geq m} x_k\right)$.

3. Dada $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Probar que

   a) $\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0$ t.q. $f(x) < \limsup\limits_{x\to x_0} f(x) + \epsilon \quad \forall x \in B(x_0, \delta)$.

   b) $\forall \epsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists\, x_\delta \in B(x_0, \delta)$ t.q. $\limsup\limits_{x\to x_0} f(x) - \epsilon < f(x_\delta)$.

4. Dada $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Probar que

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \inf\{y \,:\, \exists\,(x_n) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \text{ t.q. } x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to y\}.$$

5. Dadas $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Probar que

   a) $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \limsup\limits_{x\to x_0} f(x)$.

   b) $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x) + \liminf\limits_{x\to x_0} g(x) \leq \liminf\limits_{x\to x_0}(f(x) + g(x))$.

   c) $\limsup\limits_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) \leq \limsup\limits_{x\to x_0} f(x) + \limsup\limits_{x\to x_0} g(x)$.

   d) $\liminf\limits_{x\to x_0}(-f(x)) = -\limsup\limits_{x\to x_0} f(x)$.

   e) $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x) \liminf\limits_{x\to x_0} g(x) \leq \liminf\limits_{x\to x_0}(f(x)\, g(x))$.

   f) $\limsup\limits_{x\to x_0}(f(x)\, g(x)) \leq \limsup\limits_{x\to x_0} f(x) \limsup\limits_{x\to x_0} g(x)$.

   (e) y (f) se verifican siempre que f y g sean no negativas.

6. Hallar el límite inferior y superior cuando x tiende a 0 de las siguientes funciones:

   a) $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   b) $\dfrac{\cos x}{x}$.

7. Dados f, g sci en x_0. Probar que

   a) Si $a > 0$ entonces af es sci en x_0. ¿Qué sucede en el caso que $a < 0$?

b) $f+g$ es sci en x_0.

8. Encontrar los puntos de semicontinuidad de la función f definida como $f(x)=x^2-1$ para $x\in\mathbb{I}$ y cero en otro caso.

9. Sea $f:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ convexa. Probar que todos los subconjuntos de nivel de f son convexos. ¿Es cierta la proposición inversa?

10. Sea f convexa, propia y sci. Entonces todos los subconjuntos de nivel S_λ, $\lambda\in\mathbb{R}$ tienen el mismo cono de recesión.

11. Si existe un conjunto de nivel de una función f convexa, propia, sci que es no vacío y acotado, entonces todos los subconjuntos de nivel son acotados.

12. Pruebe que el ínfimo de una colección de funciones scs, es scs.

13. Si f es scs, probar que $A=\{(x,\lambda)\,:\,f(x)\geq\lambda\}$ es cerrado.

14. Sea $f:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ convexa propia. Dados $x_0\in\operatorname{ri}(\operatorname{dom}(f))$ y $x\in\operatorname{dom}(f)$ con $x\neq x_0$. Se define la función $\theta:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$, $\theta(t)=f(x_0+t(x-x_0))$. Demuestre que $0\in\operatorname{ri}(\operatorname{dom}(\theta))$. [5ptos]

15. Sea $f:(-1,1)\to(-\infty,0)$ convexa. Probar la convexidad de la siguiente función:

$$(-1,1)\times\mathbb{R}\ni(\xi,\eta)\mapsto g(\xi,\eta):=-\frac{\eta^2}{f(\xi)}.$$

[5ptos]

16. Considere un hiperplano H. Determine su cono de recesión y su espacio de linealidad.

17. ¿Cuál es $\operatorname{recc}(P)$ y el espacio de linealidad de P cuando P es un politopo?

18. Sea C un cono convexo cerrado. Probar que $\operatorname{recc}(C)=C$.

19. El espacio de linealidad de un conjunto convexo cerrado no vacío es cerrado bajo multiplicaciones por escalares.

20. Mostrar que $\operatorname{recc}(\{x\,:\,Ax\leq b\})=\{x\,:\,Ax\leq 0\}$.