Décima sesión

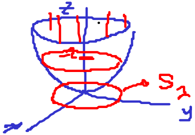
Análisis Convexos - CM3E2

Jonathan Munguia[1]

[1]Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

13 de mayo de 2021

Outline



$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Definición 1

Dado una funcion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, consideremos los siguientes conjuntos:

$$
\begin{aligned}
dom(f) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\} \\
epi(f) &:= \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\} \\
\widetilde{epi}(f) &:= \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) < \lambda\} \\
S_\lambda &:= \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \lambda\} \\
\widetilde{S}_\lambda &:= \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \lambda\}
\end{aligned}
$$

$f(x) = \inf_{(x,\lambda)\in epi f} \lambda$

$(x,\lambda) \in epi f \Longleftrightarrow f(x) \leq \lambda \Leftrightarrow x \in S_\lambda(f)$

$f(x) \leq \inf [\lambda : (x,\lambda) \in epi f]$

$(x, f(x))$

$\leq f(x)$

Proposición 1

1. $\lambda < \mu \Rightarrow \widetilde{S}_\lambda(f) \subset S_\lambda(f) \subset \widetilde{S}_\mu(f) \subset S_\mu(f)$
2. $\lambda < \mu$ *y* $(x,\lambda) \in epi(f) \Rightarrow (x,\mu) \in epi(f)$
3. $f(x) = \text{ínf}\,[\lambda \colon (x,\lambda) \in epi(f)] = \text{ínf}\,[\lambda \colon x \in S_\lambda(f)]$
4. $f(x) = \text{ínf}\,[\lambda \colon (x,\lambda) \in \widetilde{epi}(f)] = \text{ínf}\,[\lambda \colon x \in \widetilde{S}_\lambda(f)]$
5. $f_1 \leq f_2 \Leftrightarrow epi(f_1) \supset epi(f_2) \Leftrightarrow S_\lambda(f_1) \supset S_\lambda(f_2)$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$
6. $f_1 \leq f_2 \Leftrightarrow epi(f_1) \supset \widetilde{epi}(f_2) \Leftrightarrow \widetilde{S}_\lambda(f_1) \supset \widetilde{S}_\lambda(f_2)$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$
7. $S_\lambda(f) \times \{\lambda\} = epi(f) \cap [\mathbb{R}^n \times \{\lambda\}]$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$
8. $\widetilde{S}_\lambda(f) \times \{\lambda\} = \widetilde{epi}(f) \cap [\mathbb{R}^n \times \{\lambda\}]$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$

Demostración

1. Dado $x \in \widetilde{S}_\lambda(f)$ entonces $f(x) < \lambda \leq \lambda < \mu \leq \mu$, por ende $\widetilde{S}_\lambda(f) \subset S_\lambda(f) \subset \widetilde{S}_\mu(f) \subset S_\mu(f)$
2. Si $(x, \lambda) \in epi(f)$, entonces $f(x) \leq \lambda < \mu$ obtenemos $f(x) < \mu$ que implica $f(x) \leq \mu$ por lo tanto $(x, \mu) \in epi(f)$
3. Para $(x, \lambda) \in \operatorname{epi} f$ se tiene $f(x) \leq \lambda$. Por tanto,

   $$f(x) \leq [\lambda \,:\, (x, \lambda) \in \operatorname{epi} f],$$

   además se alcanza el mínimo en $f(x)$ pues $(x, f(x)) \in \operatorname{epi}(f)$. La segunda igualdad se sigue de

   $$(x, \lambda) \in \operatorname{epi} f \Leftrightarrow f(x) \leq \lambda \Leftrightarrow x \in S_\lambda(f).$$

4. Similar al ítem 3.

Demostración (cont...)

5. $\Rightarrow$) Si $f_1 \leq f_2$: Dado $(x, \lambda) \in epi(f_2)$, entonces $f_1(x) \leq f2(x) \leq \lambda$ por lo tanto $(x, \lambda) \in epi(f_1)$
   $\Rightarrow$) Si $epi(f_1) \supset epi(f_2)$: Dado $x \in S_\lambda(f_2)$, entonces $f_2(x) \leq \lambda$ que implica $(x, \lambda) \in epi(f_2) \subset epi(f_1)$, esto es $f_1(x) \leq \lambda$ por ende $x \in S_\lambda(f_1)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$
   $\Rightarrow$) Si $S_\lambda(f_1) \supset S_\lambda(f_2)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$: Por el absurdo, consideremos $f_1 > f_2$, luego si $x \in S_\lambda(f_2)$, entonces $f_2(x) \leq \lambda$ que a su vez $f_1(x) \leq \lambda$ por lo tanto $f_2(x) < f_1(x) \leq \lambda$, entonces $f_2(x) < \lambda$ y eso significa que $x \in \widetilde{S}_\lambda(f_2)$ esto contradice al ítem 1. En conclusión $f_1 \leq f_2$
6. Similar al ítem 5
7. Dado $(x, \lambda) \in S_\lambda(f) \times \{\lambda\} \Leftrightarrow f(x) \leq \lambda$ y $\lambda \in \{\lambda\} \Leftrightarrow$ $(x, \lambda) \in epi(f)$ y $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \{\lambda\} \Leftrightarrow$ $(x, \lambda) \in epi(f) \cap [\mathbb{R}^n \times \{\lambda\}]$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$
8. Similar al ítem 7

Definición 2 (Función convexa)

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es convexa si su epígrafo:

$$\operatorname{epi}(f) := \Big\{ (x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \, : \, f(x) \leq \mu \Big\},$$

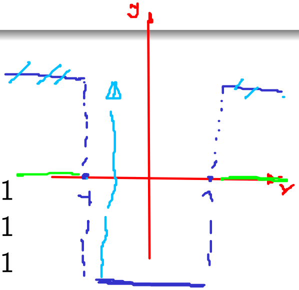
es convexo.

Ejemplo 1

Sea $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, definida como

$$f(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\infty & si \ |x| < 1 \\ 0 & si \ |x| = 1 \\ +\infty & si \ |x| > 1 \end{cases}$$



$\operatorname{dom} f = [-1, 1]$

Es una función convexa "impropia".

Definición 3 (Dominio efectivo)

El dominio efectivo de f, se define como

$$\mathrm{dom}(f) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \, : \, f(x) < \infty \right\}.$$

Teorema 1 (Representación algebraica)

$f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es convexa si y solo si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \forall t \in (0,1) \ : \quad f(t\,x + (1-t)y) \leq t\,f(x) + (1-t)f(y).$$

Teorema 2

$f:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es convexa si y solo si

$$\forall x, y \in dom(f)\,,\ \forall t \in (0,1)\ :\ f(t\,x + (1-t)y) \leq t\,f(x) + (1-t)f(y).$$

Demostración

La ida se obtiene directamente del Teorema 1 y el regreso notando que si $(x_1, \mu_1), (x_2, \mu_2) \in \operatorname{epi}(f)$ entonces $x_1, x_2 \in \operatorname{dom}(f)$.

Definición 4

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Una función $f: C \to \overline{\mathbb{R}}$ se dice que es convexa sobre C si

$$\forall x, y \in C\,,\ \forall t \in (0,1)\ :\ f(t\,x + (1-t)y) \leq t\,f(x) + (1-t)f(y).$$

Observación 1

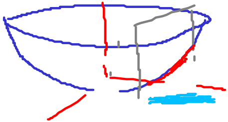
Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Una función $f : C \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ que cumple

$$\forall x, y \in C\,, \forall t \in (0,1)\ :\ f(t\,x + (1-t)y) \leq t\,f(x) + (1-t)f(y).$$

Se puede extender a una función convexa $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ definida como

$$\widehat{f}(x) := \begin{cases} f(x) & si\, x \in C \\ +\infty & si\, x \notin C \end{cases}$$

Basta aplicar el Teorema 2 para $C = \mathrm{dom}(\widehat{f})$.



Lema 1

$f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es convexa si y solo si para todo $x, d \in \mathbb{R}^n$, la función $f_{x,d} : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $f_{x,d}(t) = f(x + td)$ es convexa.

$x \longrightarrow y$

Demostración

$\Longleftarrow$) Por el Teorema 2, basta notar que para $x, y \in \mathrm{dom}(f)$, $\cancel{t}\,\lambda \in (0,1)$ y la convexidad de $f_{x.y-x}$, se cumpla que

$$
\begin{aligned}
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f_{x,y-x}(1-\lambda) = f(x + (1-\lambda)(y-x)) \\
&= f_{x,y-x}(\lambda 0 + (1-\lambda)1) \\
&\leq \lambda f_{x,y-x}(0) + (1-\lambda) f_{x,y-x}(1) \\
&= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).
\end{aligned}
$$

Demostración (cont...)

$\Longrightarrow$) Similarmente, dados $x, d \in \mathbb{R}^n$ fijos arbitrarios, sean $t_1, t_2 \in \operatorname{dom}(f_{x,d})$ y $\lambda \in (0,1)$. Luego, $x + t_1 d \wedge x + t_2 d \in \operatorname{dom}(f)$, y por la convexidad de f, se tiene

$$\begin{aligned} f_{x,d}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= f\big(x + (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)d\big) \\ &= f\big(\lambda(x + t_1 d) + (1-\lambda)(x + t_2 d)\big) \\ &\leq \lambda f(x + t_1 d) + (1-\lambda) f(x + t_2 d) \\ &= \lambda f_{x,d}(t_1) + (1-\lambda) f_{x,d}(t_2). \end{aligned}$$

Definición 5 (Función finita)

Dado $C \subset \mathbb{R}^n$, una función $f : C \to \overline{\mathbb{R}}$ se dice finita si $-\infty < f(x) < \infty$ para todo $x \in C$.

$x \in ri(dom f) \Rightarrow \exists W$ abierto de $\mathbb{R}^n$ tq
$x \in W \cap aff(dom f)$

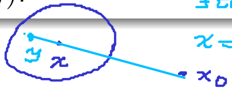
Proposición 2

$x_0 \in dom f$

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa. Si existe x_0 tal que $f(x_0) = -\infty$, entonces $f(x) = -\infty$ para todo $x \in ri(dom(f))$.

$\exists t \in (0,1)$ tq

$\exists y \in dom f$



$x = t x_0 + (1-t) y$

Observación 2

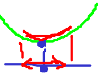
Si una función toma algún valor $-\infty$, entonces no puede tomar valor finito fuera de la frontera relativa de su dominio efectivo. Esta anomalía es superada con la sgte definición.

$f(x) \leq \underbrace{t f(x_0) + (1-t) f(y)}_{-\infty}$

$\Rightarrow f(x) = -\infty$

Definición 6 (Función propia)

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es propia, si existe $x \in \mathbb{R}^n$ con $f(x) < +\infty$ y $f(y) > -\infty$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

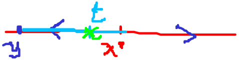


Teorema 3

Si $C \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, $f : C \to \mathbb{R}$ es una función convexa y $x^* \in C$ un minimizador local de f, entonces x_0 es un minimizador global.

Demostración

Consideremos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que alcanza un mínimo local en $x^* \in \mathbb{R}$, es decir

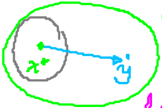


$$\exists r > 0 \, t.q \; x \in I = (x^* - r, x^* + r) \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(x^*) \leq f(x).$$

Dado $y \notin I$, se puede tomar t suficientemente pequeño tal que $x^* + t(y - x^*) \in I$ con $t \in (0, 1)$. Luego, se tiene

$$f(x^*) \leq f(x^* + t(y - x^*)) \leq (1 - t)f(x^*) + tf(y),$$

lo cual implica que $\boxed{f(x^*) \leq f(y).}$



$C \quad f_{x,d}(t) = f(x+td)$

$d = y - x \qquad x = x^*$

$f(x^*) = f_{x,d}(0) \leq f_{x,d}(1) = f(y)$

Demostración (cont...)

En general, dado $y \in C$, por el Lema 1, basta observar por la convexidad de $f_{x^*,y-x^*}$ que

$$f(x^*) = f_{x^*,y-x^*}(0) \leq f_{x^*,y-x^*}(1) = f(y).$$

Tarea

$f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$

Extender el resultado anterior a funciones propias.

Teorema 4

Si $f : I = (a,b) \to \mathbb{R}$ es convexa entonces es continua.

f es continua en x_0 si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$

$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$

$\underbrace{f(x_0) - \varepsilon}_{\lambda} < f(x) < \underbrace{f(x_0) + \varepsilon}_{\lambda}$

$\lambda < f(x_0)$

Definición 7 (Función semicontinua)

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Se dice que

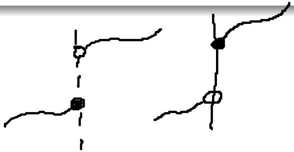
i) f es semicontinua inferior (sci) en x_0 si

$$\forall \lambda < f(x_0), \exists r > 0 \text{ t.q } x \in B(x_0, r) \Rightarrow \lambda < f(x).$$

i) f es semicontinua superior (scs) en x_0 si

$$\forall \lambda > f(x_0), \exists r > 0 \text{ t.q } x \in B(x_0, r) \Rightarrow \lambda > f(x).$$

f es sci (scs) si es sci (scs) en todo $x \in \mathbb{R}^n$.



$\forall \lambda < f(x_0)$, $\exists r > 0$ tq $x \in B(x_0, r)$

$\Rightarrow \lambda < f(x)$

Definición 8

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, se define el límite inferior y superior como

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) := \lim_{r \to 0^+} \left(\inf_{x \in B[x_0, r] \setminus \{x_0\}} f(x) \right),$$

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) := \lim_{r \to 0^+} \left(\sup_{x \in B[x_0, r] \setminus \{x_0\}} f(x) \right)$$

Proposición 3

f es semicontinua inferior en x_0 si

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x).$$

Observación 3

Notamos que

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{r>0} \left[\inf_{x \in B[x_0,r] \setminus \{x_0\}} f(x) \right]$$

pues la aplicación $r \mapsto \inf_{x \in B[x_0,r] \setminus \{x_0\}} f(x)$ es decreciente.

Proposición 4

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f es semicontinua inferior en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si y solo si

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x)$$

Demostración.

($\Longrightarrow$) Sea f semicontinua inferior en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y supongamos que $f(x_0) > \liminf_{x \to x_0} f(x)$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0) > \lambda > \liminf_{x \to x_0} f(x)$$

□

Demostración.

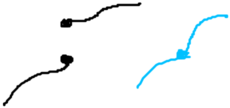
$(\Longleftarrow)$ Luego por la semicontinuidad inferior tenemos que existe $r > 0$ tal que si $x \in B[x_0, r] \setminus \{x_0\}$ implica $\lambda < f(x)$, esto implica a su vez que

$$\lambda \leq \inf_{x \in B[x_0, r] \setminus \{x_0\}} f(x)$$

por tanto

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) < \lambda \leq \sup_{r > 0} \left[\inf_{x \in B[x_0, r] \setminus \{x_0\}} f(x) \right] = \liminf_{x \to x_0} f(x)$$

esta contradicción muestra lo pedido. $\square$



Proposición 5

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f continua en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si y solo si f semicontinua inferior y superior en $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Demostración.

sci

$(\Longrightarrow)$ Es directo de la definición de continuidad.

scs

$(\Longleftarrow)$ Sea $\epsilon > 0$, entonces $f(x_0) - \epsilon < f(x_0) < f(x_0) + \epsilon$, luego de la semicontinuidad superior e inferior, sin pérdida de generalidad existe $r > 0$ tal que si $x \in B(x_0, r)$ implica $\underline{f(x_0) - \epsilon < f(x)} < \underline{f(x_0) + \epsilon}$, esto es

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

$\square$

Definición 9 (Subnivel)

Se define el subnivel λ de una función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ como

$$S_\lambda(f);= \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, f(x) \leq \lambda\}.$$ pag 16 y 17

Proposición 6

Teorem. 2.1 (El-di)

f es sci $\iff$ *epi*(f) *es cerrado* $\iff S_\lambda(f)$ *es cerrado para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposición 7 (Mínimo global)

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ *compacto no vacío y* f *sci en* C*. Entonces,*

¿ ?

$$\exists x_0 \in C \text{ t.q } f(x_0) \leq f(x) \; \forall x \in C.$$

Definición 10 (Función marginal)

Sean $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ y $\varphi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$. Se define la función marginal de φ respecto a x como la función $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$h(x) = \inf_{y \in Y} \varphi(x, y) \quad \forall x \in X.$$

Proposición 8

Si Y es compacto no vacio y φ sci en $(\overline{x}, y)$ para todo $y \in Y$, entonces h es sci en $\overline{x}$ y

$$S(\overline{x}) := \{y \in Y : h(\overline{x}) = \varphi(\overline{x}, y)\}$$

es compacto no vacio.

Demostración

La compacidad de Y y la semi-continuidad inferior de $\varphi(\overline{x}, \cdot)$ implican que $S(\overline{x})$ es compacto no vacío. Sean $\lambda < h(\overline{x})$ y μ tales que $\lambda < \mu < h(\overline{x})$. Para $y \in Y$, tenemos $\mu < \varphi(\overline{x}, y)$ y por lo tanto, existe una vecindad abierta V_y de $\overline{x}$, y una vecindad abierta W_y de y, tales que $\mu < \varphi(x, z)$ para todo $(x, z) \in V_y \times W_y$. Siendo Y compacto y $Y = \bigcup_{y \in Y} W_y$, existe un subconjunto finito J de Y tal que $Y = \bigcup_{y \in J} W_y$. El conjunto $V = \bigcap_{y \in J} V_y$ es una vecindad abierta de $\overline{x}$ y para todo $(x, y) \in V \times Y$, se cumple $\varphi(x, y) > \mu > \lambda$, de donde $h(x) \geq \mu > \lambda$.

FIN