Diecinueveava sesión

Análisis Convexos - CM3E2

Jonathan Munguia[1]

[1]Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

22 de junio de 2021

Outline

1. Función soporte
   - Función soporte

Definición 1 (Función sublineal)

Una función $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se llama sublineal si es convexa y positivamente homogénea de grado 1. Es decir,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \wedge t > 0 : \quad \sigma(tx) = t\sigma(x).$$

Definición 2 (Función subaditiva)

Una función $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se dice subaditiva si

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n : \quad \sigma(x_1 + x_2) \leq \sigma(x_1) + \sigma(x_2).$$

Ejemplo 1

La función soporte es sublineal y subaditiva. Las funciones indicador y distancia son subaditiva.

Proposición 1

Una función $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *es sublineal si y solo si su epigrafo* $epi(\sigma)$ *es un cono convexo no vacío en* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$*.*

Proposición 2

Una función $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*, no identicamente igual a* $+\infty$*, es sublineal si y solo si una de las sgtes propiedades cumple:*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \wedge t_1, t_2 > 0 : \quad \sigma(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leq t_1 \sigma(x_1) + t_2 \sigma(x_2),$$

o σ *es positivamente homogénea y subaditiva.*

Ver las demostraciones en [1] pag 124.

Observación 1

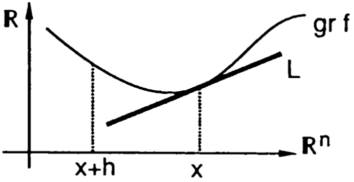
Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en x, entonces existe una única función lineal l_x que aproxima $f(x+h) - f(x)$ al primer orden

$$f(x+h) - f(x) = l_x(h) + o(|h|).$$

Geométricamente, la gráfica de f tiene un hiperplano tangente en $(x, f(x))$.

$l_x(y) = \langle y, x \rangle$

Teorema de Representación de Riesz



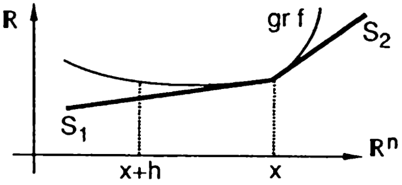
linealidad tangencial

Observación 2

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa. Puede no existir una función lineal que aproxime $f(x+h) - f(x)$ alrededor de x, aunque geométricamente existan hiperplano tangentes en $(x, f(x))$. Se puede probar que existe una única función sublineal σ_x tal que

$$f(x+h) - f(x) = \sigma_x(h) + o(|h|).$$

Geométricamente, la gráfica de f tiene un cono trasladado tangente en $(x, f(x))$.



sublinealidad tangencial

$$\sigma_S(d) = \delta^*(d \mid S) = \delta^*(d \mid \overline{S}) = \delta^*(d \mid \overline{co}(S))$$

Observación 3

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ no vacío.

- Si S es acotado entonces σ_S es finita en todas partes.
- Si S no es acotada entonces σ_S puede tomar valor $+\infty$.
- Como $\sigma_S = \sigma_{\overline{S}} = \sigma_{\overline{\text{co}}(S)}$ entonces solo estudiaremos funciones soporte de conjuntos convexos cerrados no vacíos.

Ver Proposición 2.1.3 y Proposición 2.2.1de [1].

$$\text{epi } f = \text{epi } g \Rightarrow f = g$$

$$\sigma_{S_1} = \sigma_{S_2} \Rightarrow S_1 = S_2 \; \times$$

$U = \{$ convexos cerrados no vacíos $\}$ $\quad \phi : U \longrightarrow V$

$V = \{$ funciones sublineales sci $\}$ $\quad S \longrightarrow \sigma_S$

$f \in V \Rightarrow \exists\, S \in U \mid f = \sigma_S$

Teorema 1

La aplicación $S \to \sigma_S$ para $S \subset \mathbb{R}^n$ es una aplicación biyectiva entre los conjuntos convexos cerrados no vacíos y las funciones sublineales sci.

Demostración

Es sobreyectiva gracias al Teorema 3 de la sesión 18. Además es inyectiva aplicando el Teorema 1 (de la proyección) de la sesión 8. Ver también Teorema 3.1.1 de [1].

$L = \{ \ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineales $\}$ $\quad \phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow L$

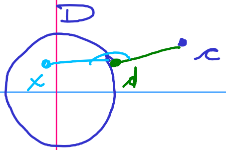
$x \longrightarrow \ell_x(\cdot) = \langle \cdot, x \rangle$

Injectividad $\quad \sigma_{S_1} = \sigma_{S_2}$

$\Rightarrow S_1 = S_2$

Inyectividad

C, D convexos cerrados no vacíos, $\underline{c \in C}$ cualquiera



$\forall c \in C$, $\exists\, d \in D$ (T. de la proyección)

tq $\langle x-d, c-d\rangle \le 0 \quad \forall x \in D$

$$\langle c-d, x\rangle \le \langle c-d, d\rangle \quad \forall x \in D$$

$$\sup_{x \in D} \langle c-d, x\rangle \le \langle c-d, d\rangle$$

$$\sup_{x \in D} \langle c-d, x\rangle = \sigma_D(c-d) = \sigma_C(d-d)$$

$$\forall x \in C: \quad \langle c-d, x\rangle \le \langle c-d, d\rangle$$

para $c \in C$ $\quad \langle c-d, c-d\rangle \le 0 \Rightarrow \underline{c = d}$

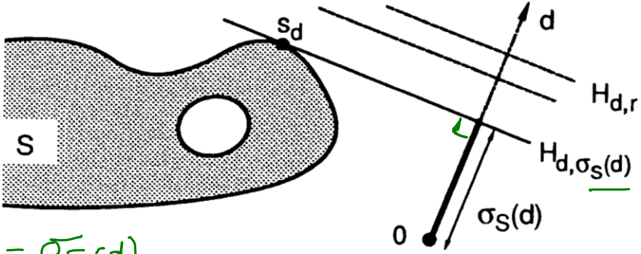
$\Rightarrow \underline{c \in D}$

Construcción

Dado $S \subset \mathbb{R}^n$, la función soporte $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, d vector unitario y $r \in \mathbb{R}$. Supongamos que se puede tomar r suf. grande tal que $S \subset H^-_{d,r} := \{z : \langle z, d\rangle \leq r\}$ (por ejemplo S convexo). Se demostró que $\sigma_S(d)$ es el valor más pequeño tal que S se mantenga en $H^-_{d,r}$. Es decir, apoyando sobre S el hiperplano $H_{d,r} := \{z : \langle z, d\rangle = r\}$.

$\|d\| = 1$

$$\overbrace{\frac{\langle S_d, d\rangle}{\|d\|}}^{\|Proy_d\, S_d\|} = \sigma_S(d)$$



Hiperplanos y funciones de soporte

Proposición 3

Sean σ_1 y σ_2 las funciones soporte de los conjuntos convexos cerrados no vacíos S_1 y S_2.

i) $S_1 \subset S_2 \Longleftrightarrow \sigma_1(d) \leq \sigma_2(d) \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$.

ii) *Si t_1 y t_2 son positivos, entonces* $t_1\sigma_1 + t_2\sigma_2$ *es la funcion soporte de* $\overline{t_1 S_1 + t_2 S_2}$.

Proposición 4

Sea $\{\sigma_j\}_{j\in J}$ las funciones soporte de la familia de conjuntos convexos cerrados no vacíos. Entonces

i) $\sup_{j\in J} \sigma_j$ *es la funcion soporte de* $\overline{co}\{\cup S_j \ : \ j \in J\}$.

ii) *Si* $S := \cap_{j\in J} S_j \neq \emptyset$, *entonces* $\sigma_S = \overline{co}\{\text{ínf}\, \sigma_j \ : \ j \in J\}$.

Ver los Teoremas 3.3.1 y 3.3.2 de [1].

Definición 3 (Cono barrera)

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$. El cono barrera de C, denotado por K, es el dominio efectivo de la función soporte de C.

$$K = \mathrm{dom}(\sigma_C).$$

Observación 4

- K es un cono convexo.
- K no es cerrado aunque C lo sea.
- K es el cono barrera de $\mathrm{co}(C)$, $\overline{C}$ y $\overline{\mathrm{co}}(C)$.

$y = -e^x$

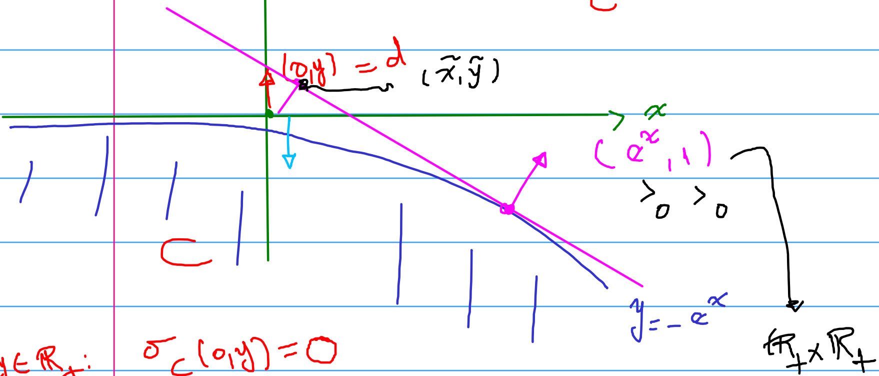
Ejemplo 2

Dado $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y + e^x \leq 0\}$. Demuestre que $K = \mathbb{R}^2_{++} \cup (\{0\} \times \mathbb{R}_+)$.

$C \neq \mathbb{R}^2$

$K = \operatorname{dom} \sigma_C$

Encontrar $d \in \mathbb{R}^2$ tq $\sigma_C(d) < \infty$



$\forall y \in \mathbb{R}_+ : \quad \sigma_C(0,y) = 0$

$$\sigma_C\left(\frac{(e^x,1)}{\|(e^x,1)\|}\right) = \|(\tilde{x},\tilde{y})\|$$

$K \subset C_\infty^\circ = \{ y \mid \langle y, x \rangle \leq 0 \ \forall x \in C_\infty \}$

$x^* \in K \implies \sigma_C(x^*) < \infty$

$d \in C_\infty = C_\infty(a)$, para $a \in C \implies \forall \lambda > 0 : a + \lambda d \in C$ $\quad \ldots (*)$

Teorema 2

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo cerrado no vacío y K su cono barrera. Entonces $K \subset (C_\infty)^\circ$ y $K^\circ = C_\infty$. Se deduce que $\overline{K} = (C_\infty)^\circ$. $\quad \overline{K} = K^{\circ\circ}$

$K^\circ \supset (C_\infty^\circ)^\circ = C_\infty$

Demostración

Ver Teorema 3.6 de [2]. $\quad$ prop. 3.1 de [2]

$\infty > \sigma_C(x^*) = \sup_{y \in C} \langle y, x^* \rangle \overset{*}{\geq} \underbrace{\langle a + \lambda d, x^* \rangle}_{\lambda \langle d, x^* \rangle + \langle a, x^* \rangle}$

Como λ es tan grande

$\implies \langle d, x^* \rangle \leq 0 \quad \forall d \in C_\infty \implies \boxed{x^* \in C_\infty^\circ}$

Per contraposizione: $d \notin C_\infty \Rightarrow d \notin K^\circ$

$\Rightarrow \exists\, a \in C, \ \exists\, \lambda > 0$ t.q. $a + \lambda d \notin C$

T. Separazione — convesso chiuso non vuoto

$\Rightarrow \exists\, x^* \neq 0$ t.q. $\langle x, x^* \rangle < \langle a + \lambda d, x^* \rangle \ \forall x \in C$

$$\underbrace{\sup_{x \in C} \langle x, x^* \rangle}_{\sigma_C(x^*)} \le \langle a + \lambda d, x^* \rangle < \infty \Rightarrow \boxed{x^* \in K} \quad \therefore (\alpha)$$

In particolare $x = a$. in (α) $\langle a, x^* \rangle < \langle a + \lambda d, x^* \rangle$ $\therefore (\beta)$

$$0 < \lambda \langle d, x^* \rangle \Rightarrow \langle d, x^* \rangle > 0$$

Da (α), (β) $\Rightarrow d \notin K^\circ$ $\quad \therefore \quad \boxed{K^\circ \subset C_\infty}$

C acotado $\Longleftrightarrow$ $\overline{Co}(C)$ es acotado

$\Longleftrightarrow$ $(\overline{Co}(C))_\infty = \{0\}$ prop 1.14 de [2]

$K_{\overline{Co}(C)} = K_C = K$ $\quad (K_{\overline{Co}(C)})^0 = K^0$

Corolario 1

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ no vacío. Entonces C es acotado si y solo si $K = \mathbb{R}^n$.

Demostración

Ver Corolario 3.3 de [2]. $\boxed{\square}$

$C \neq \emptyset \Rightarrow \sigma_C$ es propia

$\Longleftrightarrow$ $K^0 = \{0\}$

$\Longleftrightarrow$ $K^{00} = \{0\}^0 = \mathbb{R}^n$, K es cono convexo no vacío

$\Longleftrightarrow$ $\overline{K} = \mathbb{R}^n$ $\Longleftrightarrow$ $K = \mathbb{R}^n$

(K convexo)

Por prop 2.16 de [2]

$a \in \mathrm{dom}\, f$ y $d \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f_\infty(d) = \sup_{t>0} \dfrac{f(a+td) - f(a)}{t}$

Proposición 5

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa sci y propia. Entonces $f_\infty(d) = \sigma_{dom(f^*)}(d)$ para todo $d \in \mathbb{R}^n$.

Demostración

Ver Proposición 3.4 de [2].

$f(a+td) \underset{\text{prop 3.3 de [2]}}{=} f^{**}(a+td) = \sup_{x^* \in \mathrm{dom}(f^*)} \left[\langle x^*, a+td \rangle - f^*(x^*) \right]$

$$f_\infty'(d) = \sup_{t>0} \frac{\sup_{x^* \in \operatorname{dom} f^*} \left[\overbrace{\langle x^*, a + td \rangle} - f^*(x^*) \right] - f(a)}{t}$$

$$= \sup_{x^* \in \operatorname{dom} f^*} \ \sup_{t>0} \ \frac{1}{t} \left[t\langle x^*, d\rangle + \langle x^*, a\rangle - f^*(x^*) - f(a) \right]$$

$$= \sup_{x^* \in \operatorname{dom} f^*} \left[\langle x^*, d\rangle + \cancel{\sup_{t>0} \frac{1}{t} \overset{\le 0}{\underbrace{\left[\langle x^*, a\rangle - f^*(x^*) - f(a) \right]}_{\langle x^*, a\rangle \le f^*(x^*) + f(a)}}} \right]$$

$$= \sup_{x^* \in \operatorname{dom} f^*} \langle x^*, d\rangle = \sigma_{\operatorname{dom} f^*}(d)$$

Prop 2.18 de [2] $\quad f$ es inf-compacto $\iff S_0(f_\infty) = \{0\}$

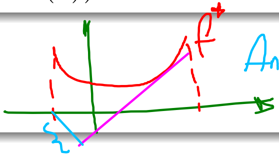
$S_0(f_\infty) = \{d \mid f_\infty(d) \le 0\}$ $\qquad f_\infty(d) \le 0 \iff d = 0$

Corolario 2

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa sci y propia. Entonces

i) f es inf-compacto si y solo si $0 \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f^*))$.

ii) f^* es inf-compacto si y solo si $0 \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$.



Analizar!

Demostración

Ver Corolario 3.4 de [2].

$$f_\infty(d) = \begin{cases} 0, & \text{Si } d = 0 \\ >0, & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

$\|$

$\sigma_{\mathrm{dom} f^*}(d)$

$\sigma_{\mathrm{dom} f^*}(d) = \sup_{x \in \mathrm{dom} f^*} \langle d, x \rangle$ ✓

¿$0 \in \mathrm{dom} f^*$? ✓ $\to B(0,r) \subset \mathrm{dom} f^*$ ✓

Referencias bibliográficas

1. Jean-Baptiste Hiriart-Urruty and Claude Lemarechal. Fundamentals of Convex Analysis, Springer, 1st ed. 2001.
2. Jean-Pierre Crouzeix and Eladio Ocaña. Análisis convexo. Fondo Editorial EDUNI, 2018.
3. Boris S. Mordukhovich and Nguyen Mau Nam. An Easy Path to Convex Analysis and Applications. Morgan & Claypool Publishers series, 2014.
4. Dimitri P. Bertsekas. Convex Analysis and Optimization. Athena Scientific, 2003.
5. R. Schneider. Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

FIN