Semana 2-IEDO
PVI- EDO-1er Orden-Exactas-EDO Lagrange y Clairaut

irlamn@uni.edu.pe

Contenido

- Problemas de valor inicial.
- Existencia y unicidad de soluciones
- Técnicas de solución de las EDO de primer orden
  Exactas .

- Ecuaciones homogéneas de primer orden
  y grado n.
- Ecuaciones de Lagrange -Clairaut

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE VALOR INICIAL

1. Se considera la ecuación diferencial

$$x' = F(t,x)\,, \tag{2.1}$$

donde $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una función continua que satisface:

(a) Para cualquier $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ existe una única solución $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ del problema de valores iniciales constituido por la ecuación diferencial (2.1) y la condición inicial $x(t_0) = x_0$.

(b) El conjunto de todas las soluciones de la ecuación (2.1) definidas en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real.

$$x' = F(t,x)\,,$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Es denominado un PVI

SÍSTEMAS EDO de Primer Orden

Un sistema de n ecuaciones diferenciales de orden k se expresa

$$\begin{cases} y_1' = F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

*La **solución general** del sistema*

$$y(x_0) = (y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0)) = (y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n})$$

Si F es lineal

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + g_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + g_2(x) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + g_n(x) \end{cases}$$

siendo $a_{ij}(x)$ *y* $g_i(x)$, $1 \leq i, j \leq n$, *funciones continuas en un intervalo* (a, b). *Si* $g_i(x) \equiv 0$, $1 \leq i \leq n$, *el sistema se denomina* **homogéneo**. *La equivalente ecuación matricial es* $y' = A(x)y + g(x)$ *donde* $A(x) = (a_{ij}(x))$ *y* $g(x) = (g_i(x))$.

EXISTENCIA Y UNIICIDAD DE SOLUCIÓN DE UN PVI CONTINUO

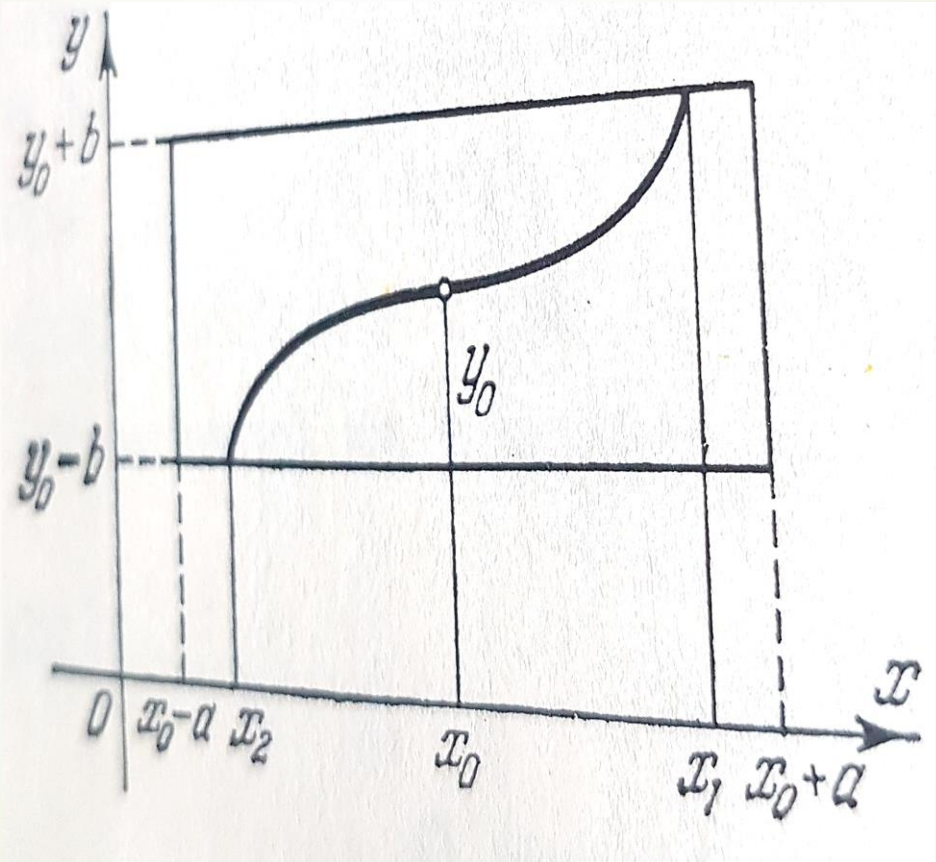

Figura 1

EXISTENCIA Y UNIICIDAD DE SOLUCIÓN DE UN PVI CON APROXIMACIÓN

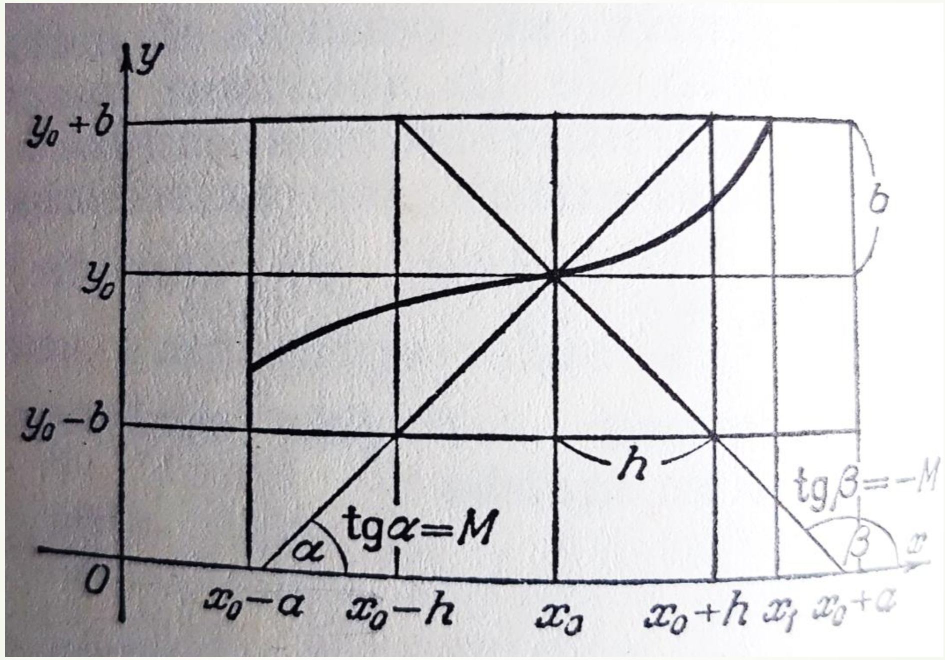

Figura 2

Tipos de EDOs. que resolvemos como PVI, son de la forma:

1) $y' + ay = b$, $y(t_0) = y_0$

2) $y' + ay = b(t)$, $y(t_0) = y_0$

3) $y' + a(t)y = b(t)$, $y(t_0) = y_0$

4) $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$

5) $y = f(t, y')$, $y(t_0) = y_0$

1 *Problemas de valor inicial*

En esta práctica se analizan los métodos de resolución de problemas de valor inicial con ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O.s, o en ingles, O.D.E.s). Consideraremos inicialmente métodos numéricos para resolver problemas de valor inicial donde se dan las condiciones iniciales en un único punto. El problema de Cauchy para las E.D.O.s consiste en encontrar una función $y(t):[a,b]\rightarrow\Re$ tal que dada la función $f(t,y):[a,b]\times\Re\rightarrow\Re$ y $\eta\in\Re$ se verifique

$$\begin{cases} y'(t)=f\left(t,y(t)\right) & a\leq t\leq b \\ \quad y'(a)=\eta \end{cases}$$

que es, dicho de otra forma, el problema de resolver una ecuación diferencial de primer orden con una condición inicial.

Lema 1.1 *Supongamos que* Ω *es un subconjunto abierto no vacío de* $\mathbb{R}^{N+1}$*, y que* $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$*. Sean* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalo de interior no vacío tal que* $x_0 \in I$*, y* $\varphi : I \to \mathbb{R}^N$ *una función dada. Bajo estas condiciones,* φ *es solución del problema* (PC) *en el intervalo* I*, si y sólo si satisface las tres condiciones siguientes, denominadas formulación integral del problema* (PC)*:*

(j) $\varphi \in C(I; \mathbb{R}^N)$,

(jj) $(x, \varphi(x)) \in \Omega$, *para todo* $x \in I$,

(jjj) $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds, \quad \forall\, x \in I$, *donde la integral está efectuada componente a componente.*

1 Formulación integral del Problema de Cauchy

El objetivo del presente Tema, y del siguiente, es analizar el Problema de Cauchy para un SDO de primer orden en forma normal. En concreto, consideremos el problema

$$(PC)\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

con $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$, una función dada, siendo $N \geq 1$ entero, y donde $(x_0, y_0) \in \Omega$ está fijado. Recordemos que cuando usamos la notación $(x, y) \in \mathbb{R}^{N+1}$, ello significa que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^N$. Recordemos también, que si $N = 1$, el SDO $y' = f(x, y)$ es en realidad una EDO de primer orden en forma normal, y si $N > 1$, entonces (PC) es una notación abreviada para el problema

$$
\begin{cases}
y_1' = f_1(x, y_1, ..., y_N), \\
............................., \\
............................., \\
y_N' = f_N(x, y_1, ..., y_N), \\
y_1(x_0) = y_{1_0}, ..., y_N(x_0) = y_{N_0}.
\end{cases}
$$

Como ya dijimos en el Tema 1, dado $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío tal que $x_0 \in I$, una solución del problema (PC) en el intervalo I, es cualquier función $\varphi : I \to \mathbb{R}^N$, tal que :

(ii) $(x, \varphi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in I$,

(iii) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, para todo $x \in I$,

(iv) $\varphi(x_0) = y_0$.

A partir de ahora, vamos a suponer siempre que Ω es un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^{N+1}$, y que f es continua de Ω en $\mathbb{R}^N$, lo que denotaremos

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

DOMINIO MAXIMAL

Así, por ejemplo, si consideramos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} y, & si\ y \geq 1, \\ x^3, & si\ y < 1,\ y \geq x^2, \\ xy, & si\ y < 1,\ y < x^2,\ x \geq 0, \\ 0, & si\ y < 1,\ y < x^2,\ x < 0, \end{cases}$$

es sencillo comprobar que los conjuntos Ω_1 *y* Ω_2 *dados por*

$$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 1\},$$

$$\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y < 1\} \setminus \{(x,x^2);\ x \in [-1,0]\},$$

son los correspondientes dominios maximales de existencia y unicidad, siendo $\Omega_1 \cup \Omega_2$, *el abierto maximal de existencia y unicidad para la EDO* $y' = f(x,y)$.

Método de Separación de variables

Un caso especial de EDOs de primer orden son aquellas en las que la ecuación diferencial puede reescribirse de manera que un lado de la igualdad solo dependa de la función y y el otro lado solo de la variable x. Más concretamente,

$$y' = F(x,y)$$

$$y' = f(y)g(x)$$

$$\frac{1}{f(y)}\frac{dy}{dx} = g(x)$$

- Ejemplo

$$y' = e^{x-2y}\cos x$$

$$e^{2y}\frac{dy}{dx} = e^{x}\cos x.$$

Sin embargo, la EDO $y' = y^2 - \operatorname{sen} x$ no es separable.

Así, por ejemplo, la EDO $y' = (1-y^2)x^2$ es separable ya que la podemos reescribir de la forma $\frac{1}{1-y^2}\frac{dy}{dx} = x^2$. Aquí hay que tener en cuenta que las funciones $y(x) = -1$, $y(x) = 1$ son dos soluciones de la EDO original; éstos son los valores donde $1 - y^2 = 0$.

¿Cómo se resuelven las EDOs separables?

Dada la EDO $g(y)\frac{dy}{dx} = h(x)$, basta escribirla como $g(y)dy = h(x)dx$ e integrar a ambos lados de la igualdad, esto es,

$$\int g(y)dy = \int h(x)dx.$$

De esta manera se obtendrán todas las soluciones de la EDO de manera implícita.

Ejemplo 1 : Dada la EDO $y^2y' = x-2$, podemos encontrar sus soluciones reescribiendo la ecuación como $y^2dy = (x-2)dx$ e integrando a ambos lados, con lo que obtenemos

$$y^3 + c_1 = x^2 - 2x + c_2.$$

De esta forma, las soluciones vienen dadas por $y^3 = x^2 - 2x + c$, o equivalentemente, $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x + c}$.

Ejemplo 2 : La EDO $y' = \frac{y}{1+x^2}$ puede resolverse integrando sobre la igualdad $\frac{1}{y}dy = \frac{1}{1+x^2}dx$, salvo cuando $y = 0$. La función $y(x) = 0$ es solución de la EDO y el resto de soluciones pueden calcularse integrando la igualdad anterior que nos dará

$$\ln|y| = \operatorname{arctg} x + c.$$

Tomando exponenciales sobre la igualdad obtenemos $y = c_0 e^{\operatorname{arctg} x}$, donde $c_0 = \pm e^c$. Por tanto, todas las soluciones vienen dadas por $y = c_0 e^{\operatorname{arctg} x}$, para c_0 cualquier número real, incluyendo el caso $c_0 = 0$ que nos dará la solución previa $y(x) = 0$.

Ejemplo 3 : Consideremos el PVI dado por la EDO $e^{x+y}\, y' = x$ con condición inicial $y(0) = 0$. La ecuación puede reescribirse como

$$e^y\, dy = x\, e^{-x}\, dx$$

y, así, si integramos se obtiene $e^y = -(1+x)e^{-x} + c$. Ahora, la condición inicial $y(0) = 0$ nos dice que $1 = -1 + c$, de donde $c = 2$. Esto es, la solución del PVI viene dada por $e^y = -(1+x)e^{-x} + 2$, o equivalentemente $y = \ln(2 - (1+x)e^{-x})$.

Ejemplo 4 : El PVI con ecuación $y' = -2xy^2$ y condición inicial $y(3) = \frac{1}{10}$ puede ser resuelto reescribiendo la EDO como

$$\frac{dy}{y^2} = -2x\,dx$$

e integrando. Obsérvese que estamos dividiendo por y^2 y podría ocurrir que $y(x) = 0$, que es solución de la EDO pero no es la solución buscada del PVI ya que no cumple la condición inicial. Así, tenemos que $\frac{1}{y} = x^2 + c$, esto es, $y = \frac{1}{c+x^2}$. Ahora, de la condición inicial obtenemos que $10 = 3^2 + c$, por lo que $y = \frac{1}{1+x^2}$.

¿Cómo se resuelven las EDOs lineales de primer orden?

Para resolver la ecuación $a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$, primero hemos de resolver la ecuación homogénea asociada $a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$. Esta última EDO es separable y puede resolverse como se explicó en la sección anterior. La solución de la EDO homogénea es de la forma $y(x) = c_0 y_1(x)$ para una cierta constante c_0.

Si $b(x)$ no es cero, las soluciones de la ecuación $a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$, vendrán dadas de la forma $y(x) = u(x)y_1(x)$, para una cierta función $u(x)$ a determinar. Es decir, se sustituirá la constante c_0 dada en las soluciones de la EDO homogénea por la función $u(x)$.

Entonces se sustituye la función $y(x) = u(x)y_1(x)$ sobre la ecuación $a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ y esto nos dará una ecuación de donde podremos despejar $u'(x)$. Finalmente, integrando la expresión de $u'(x)$ calculamos $u(x)$ y, por tanto, las soluciones de la EDO.

Ejemplo

Para resolver la EDO de primer orden lineal $\operatorname{arctg}(x)y' - \frac{2}{1+x^2}\, y = \operatorname{arctg}^3(x)$ primero se debe resolver la EDO homogénea $\operatorname{arctg}(x)y' - \frac{2}{1+x^2}\, y = 0$. Ésta la podemos reescribir (para $y \neq 0$) como

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{\operatorname{arctg}(x)(1+x^2)}.$$

Con lo que integrando obtenemos $y = c_0 \operatorname{arctg}^2(x)$.

Por tanto, las soluciones de la EDO $\operatorname{arctg}(x)y' - \frac{2}{1+x^2}\, y = \operatorname{arctg}^3(x)$ las obtendremos de la forma $y = u(x)\operatorname{arctg}^2(x)$ donde, para calcular $u(x)$, sustituimos en la ecuación, con lo que

$$\operatorname{arctg}^3(x) = \operatorname{arctg}(x)(u(x)\operatorname{arctg}^2(x))' - \frac{2}{1+x^2}(u(x)\operatorname{arctg}^2(x)) = u'(x)\operatorname{arctg}^3(x).$$

Tenemos entonces que $u'(x) = 1$ o bien $u(x) = x + c$, por lo que las soluciones de la EDO inicial son $y = (x+c)\operatorname{arctg}^2(x)$.

DEFINICION EDO Exacta

Diremos que una EDO de primer orden es exacta si se escribe de la forma

$$f(x,y)\frac{dy}{dx} + g(x,y) = 0,$$

y se cumple que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$.

¿Cómo se resuelven las EDOs exactas?

Si la EDO $f(x,y)\frac{dy}{dx}+g(x,y)=0$ (o equivalentemente $f(x,y)dy+g(x,y)dx=0$) es exacta entonces las soluciones vendrán dadas de manera implícita de la forma $F(x,y)=0$, donde la función de dos variables $F(x,y)$ se puede calcular de una cualquiera de las dos siguientes formas:

1. Se toma
$$F(x,y)=F_1(x)+\int f(x,y)dy,$$
donde para calcular $F_1(x)$ se debe tener en cuenta que $\frac{\partial F}{\partial x}=g(x,y)$.

2. Se toma
$$F(x,y)=F_2(y)+\int g(x,y)dx,$$
donde para calcular $F_2(y)$ se debe tener en cuenta que $\frac{\partial F}{\partial y}=f(x,y)$.

Ejemplo

El PVI, con ecuación $3(1+x^2)y^2y' + 2xy^3 - \frac{2x}{1+x^4} = 0$ y condición inicial $y(0) = 2$, tiene una EDO exacta ya que

$$\frac{\partial(3(1+x^2)y^2)}{\partial x} = 6xy^2 = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^3 - \frac{2x}{1+x^4}\right).$$

Así, la ecuación se puede resolver tomando

$$F(x,y) = F_2(y) + \int \left(2xy^3 - \frac{2x}{1+x^4}\right) dx = F_2(y) + x^2y^3 - \operatorname{arctg}(x^2),$$

donde $F_2(y)$ se calcula tomando

$$3(1+x^2)y^2 = \frac{\partial F}{\partial y} = F_2'(y) + 3x^2y^2.$$

Por tanto, $F_2'(y) = 3y^2$, con lo que $F_2(y) = y^3 + c$. Y las soluciones de la EDO están dadas por las funciones $y^3 + c + x^2y^3 - \operatorname{arctg}(x^2) = 0$.

Si usamos la condición inicial $y(0) = 2$ obtenemos $8 + c = 0$, por lo que la solución del PVI es $y = \sqrt[3]{\frac{8+\operatorname{arctg}(x^2)}{1+x^2}}$.

Ejemplo 1 : Es fácil ver que la EDO $(x-2y)y' + 2x + y = 0$ es exacta ya que

$$\frac{\partial (x-2y)}{\partial x} = 1 = \frac{\partial (2x+y)}{\partial y}.$$

Las soluciones vendrán dadas por $F(x,y) = 0$, donde tomamos por ejemplo

$$F(x,y) = F_1(x) + \int (x-2y)dy = F_1(x) + xy - y^2.$$

Y la función $F_1(x)$ se calcula si se tiene en cuenta que

$$2x + y = \frac{\partial F}{\partial x} = F_1'(x) + y.$$

Por tanto, $F_1'(x) = 2x$ o lo que es lo mismo $F_1(x) = x^2 + c$.

Como conclusión, las soluciones de nuestra EDO vienen dadas de forma implícita como $x^2 + xy - y^2 + c = 0$. Despejando la función y en la igualdad anterior se obtiene

$$y = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{4c+5x^2}\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{4c+5x^2}\right).$$

PVI con EDO de primer orden no lineal y grado n-Ec. Lagrange y Clairaut

$a)\,EDO.de\,Lagrange$

$y = x\varphi(y') + \psi(y')$

$Sustituyendo\ por\ el\ parámetro\ y' = p, se\,reduce\,a\,una\,EDO\,lineal$

$\mathrm{Re}\,solviendo\,se\,obtiene\,la\,solución\ paramétrica:$

$x = r(p,C)$

$y = r(p,C)\varphi(p) = \psi(p)$

$b)\, EDO.\, de\, Clairaut$

$y = xy' + \psi(y')$

$Solución\ paramétrica: y = Cx + \psi(C)\ ...(*)$

$Sustituyendo\ y' = p$

$se\, obtiene: y = xp + \psi(p),\ x + \psi'(p)$

Entonces eliminando p de las ecuaciones anteriores

se obtiene la solución singular (Curva envolvente de la familia (*)).

Ver ejemplos en el siguiente link

https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_diferencial_de_Clairaut

EJERCICIOS

A. *Para las ecuaciones diferenciales de primer orden dadas, determine aproximadamente la región del plano xy donde se garantiza la existencia y la unicidad de una solución a través de cualquier punto especificado mediante el teorema de la existencia y la unicidad.*

1. $y' = \dfrac{x}{y}$
2. $y' = xy$
3. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
4. $y' = y(1 - x^2)$
5. $y' = \dfrac{xy}{y^2 - 1}$
6. $y' = 1 + xy$

B. *Encuentre de la solución de los Sgtes. PVI*

1. $x^2y' + xy = 4, \; y(0) = 3$
2. $y' = 2(x - y)^3, \; y(0) = 0$
3. $y' = \dfrac{x^3 - xy^2}{y^3}, \; y(0) = -1$
4. $4y'y'' = x - 1, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1/4$
5. $y' - y = y^4, y(0) = 1$
6. $y'' + 3y'^2 = y', \quad y(1) = 1, \quad y'(0) = 1$

C. Compruebe que si $y_1(x)$ es una solución, la transformación $y = y_1 + 1/z$ reduce la ecuación de Riccati a una ecuación lineal en z.