SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN-TÉCNICAS DE RESOLUCIÓN

IRLAMN@UNI.EDU.PE

Introducimos para simplicidad del Tema el siguiente sistema de dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= f(x,y,t) \\ y'(t) &= g(x,y,t) \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

ó expresada en general de la forma siguiente de la forma

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(t,x(t),x'(t),y(t),y'(t)) &= 0 \\ \Phi_2(t,x(t),x'(t),y(t),y'(t)) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1.2)$$

Ejemplo 1: El sistema:

$$\left.\begin{aligned} x' &= 2x^3y + e^t y \\ y' &= t^3 x \end{aligned}\right\}$$

es un sistema de ecuaciones de primer orden escrito en forma (1.1)

Ejemplo 2: El sistema

$$\left.\begin{aligned} xy' + x'^2 y - t^3 &= 0 \\ y' + x' \cos t - x^3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

está escrito en forma de (1.2)

Ejemplo 3: El sistema de ecuaciones de segundo orden:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= 2x + 3y \\ y'' &= 6x^2 + y' + 3t^2 x' \end{aligned}\right\}$$

es equivalente al sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\left.\begin{aligned} x' &= z \\ y' &= p \\ z' &= 2x + 3y \\ p' &= 6x^2 + p + 3t^2 z \end{aligned}\right\}$$

donde z y p son dos nuevas variables dependientes: $z = x'$, $p = y'$.

Un problema de valor inicial o problema de Cauchy será ahora un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{aligned} x'(t) &= f(x,y,t) \\ y'(t) &= g(x,y,t) \end{aligned}\right\} \\ \\ \left.\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \text{C.I} \end{array}\right\} \textbf{P.V.I}$$

Sistemas acoplados y no acoplados. Un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden está desacoplado si es de la forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,t) \\ \frac{dy}{dt} &= g(y,t) \end{aligned}\right\}$$

Evidentemente un sistema desacoplado es un conjunto de dos ecuaciones -

" Independientes" . En caso contrario se dice que el sistema es acoplado.

Es decir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,t) \\ \frac{dy}{dt} &= g(y,t) \end{aligned}\right\} \textbf{(desacoplado)} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,y,t) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y,t) \end{aligned}\right\} \textbf{(acoplado)}$$

Teorema de Picard: Dado un problema de valor inicial(**P.V.I**), si las funciones $f(x,y,t)$ y $g(x,y,t)$ son de clase C^1 en un entorno del punto (x_0, y_0, t_0), entonces el P.V.I tiene solución y además es única en dicho entorno.

(La demostración queda como ejercicio)

Un sistema desacoplado su resolución se reduce a la Integración de ambas ecuaciones por separado.

Cuando un sistema es acoplado existen distintas técnicas de resolución. Exactas y apróximadas

Ejemplo : Consideremos el sistema desacoplado:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2\frac{t}{x} \\ \frac{dy}{dt} = y \end{array}\right\}$$

La primera ecuación nos proporciona $\frac{1}{2}x^2(t) = t^2 + C_1 \Rightarrow x(t) = \pm\sqrt{2t^2 + 2C_1}$, mientras que la segunda tiene como solución general $y(t) = C_2 e^t$.

Ejemplo :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2xy \\ \frac{dy}{dt} = y \end{array}\right\}$$

Se trata de un sistema acoplado, pero es evidente que la segunda ecuación es una ecuación desacoplada y podemos resolverla fácilmente:

Luego: Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x'(t) = 2xC_1e^t \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2C_1e^t dt \Rightarrow \ln|x| = 2C_1e^t + C_2$$

Ejemplo : Ahora consideremos el P.V. I

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{dx}{dt} & = 2xy \\ \frac{dy}{dt} & = y \end{array}\right\}; \qquad \left.\begin{array}{ll} x(0) & = 1 \\ y(0) & = 1 \end{array}\right\}$$

Sustituyendo la condición para la variable y encontramos directamente que $C_1 = 1$, es decir: $y(t) = e^t$. De manera análoga: $C_2 = -2$ y así la solución particular del P.V.I. es:

$$x = e^{2(e^t - 1)}, \qquad y = e^t$$

Cuya solución está representada graficamente en la siguiente figura:

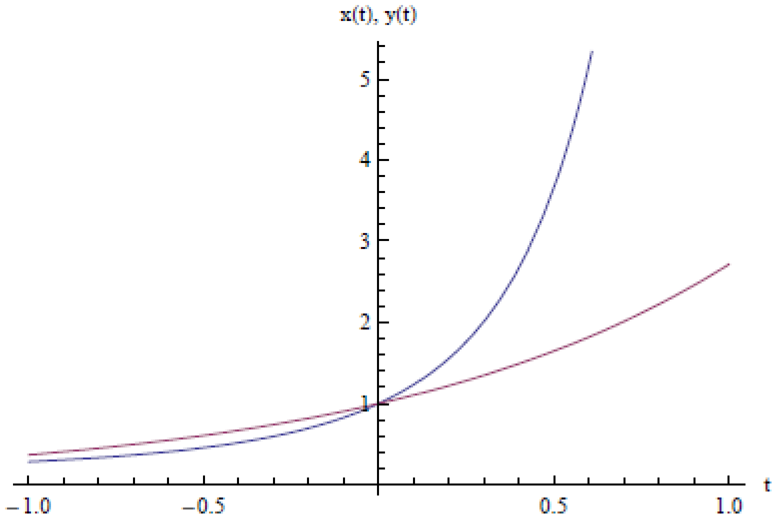


Figura: representación gráfica de la solución del P.V.I

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA SOLUCIÓN DE UN SISTEMA EDO

Dado un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,y,t) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y,t) \end{aligned}\right\}$$

sea $(x(t), y(t))$ una solución particular del mismo. Podemos entonces representar independientemente las funciones $x(t)$ e $y(t)$ frente a la variable de la que dependen, es decir t. Pero también es posible identificar la solución particular como las ecuaciones paramétricas de una curva $\sigma : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$. En tal caso, al plano $\mathbb{R}^2$ en el que representamos dicha curva se le denomina "plano de fase" del sistema y a la curva "órbita solución".

EL PLANO DE FASES. PUNTOS DE REPOSO

Supóngase que del sistema autónomo se hace $f(x,y) = ax + by$ y $g(x,y) = cx + dy$, entonces se obtiene el sistema:

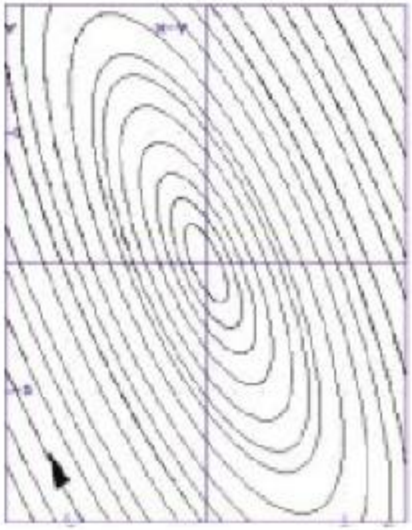
$$\frac{dx}{dt} = f(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x,y)$$

Si se aplica la *regla de la cadena* se obtiene el sistema equivalente:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \qquad \text{(EF)}$$

$x(t)\wedge y(t)$ que dependen del *parámetro t* y de las *constantes arbitrarias* $c_1 \wedge c_2$, lográndose en los planos *xt* y *yt* *familias de curvas* o *curvas integrales*. Ahora bien, es posible eliminar el parámetro *t* de las funciones $x(t)\wedge y(t)$ obteniéndose una familia de curvas en el plano *xy*; a estas curvas se les conoce como ***trayectorias*** y al plano *xy* que las contiene se le denomina ***plano de fases***, donde $x(t)\wedge y(t)$ son sus ***fases***. A la ecuación (EF) se le conoce también como ***la ecuación del plano de fases***.



El plano de fases es muy útil en la interpretación del comportamiento de las variables involucradas en un fenómeno que puede ser modelado a través del sistema EDO. En la figura de la izquierda, se muestran algunas trayectorias de un sistema en el plano de fases. Más adelante se verá que cuando las

Si el sistema admite la *solución trivial* $x\equiv 0 \wedge y\equiv 0$;

geométricamente esta solución representa el origen de coordenadas en el plano de fases. A esta solución se le conoce también como ***solución de equilibrio*** y al punto $(0,0)$ como ***punto singular***, ***punto crítico*** o simplemente ***punto de reposo***. Aunque también pueden ser puntos de reposo aquellos valores x e y tales que $g(x,y) \equiv 0 \wedge f(x,y) \equiv 0$, siendo estas últimas, expresiones más generales que la forma lineal dada por el sistema EDO. La solución de equilibrio *caracteriza la estabilidad del sistema en cuestión*.

Actualmente existen muchos softwares en diversos lenguajes de programación como los Applets de Java, que fácilmente visualizan el plano de fases y sus trayectorias. Por ejemplo, si un sistema de ecuaciones diferenciales representa el fenómeno de las oscilaciones de un sistema físico *masa-resorte*, las fases serían la posición $x(t)$ y la velocidad $y(t)$. En el plano de fases se vería con claridad, como se comportan estas magnitudes en torno a la posición de equilibrio, por ejemplo, cuándo la velocidad es máxima, etc.

El software Graphic Calculus de VUsoft©, creado por **Piet van Blockland**, **Carel van de Giessen** y por **David Tall**, es una extraordinaria herramienta que permite visualizar el plano de fases para un sistema lineal de ecuaciones diferenciales y así poder hacer un análisis de estabilidad cualitativa del sistema.

Ejemplo: El sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2\cos t \\ \frac{dy}{dt} &= -\operatorname{sen} t \end{aligned}\right\}$$

con la condición inicial $(x(0), y(0)) = (0,1)$ tiene como solución particular a: $x(t) = 2\operatorname{sen} t$, $y(t) = \cos t$, que son las ecuaciones paramétricas de una elipse en el plano centrada en el origen

del mismo y con semiejes 2 y 1 respectivamente. Es fácil eliminar el parámetro t entre ambas ecuaciones y obtener así la ecuación implícita de dicha órbita: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. (Ver Figura 2).

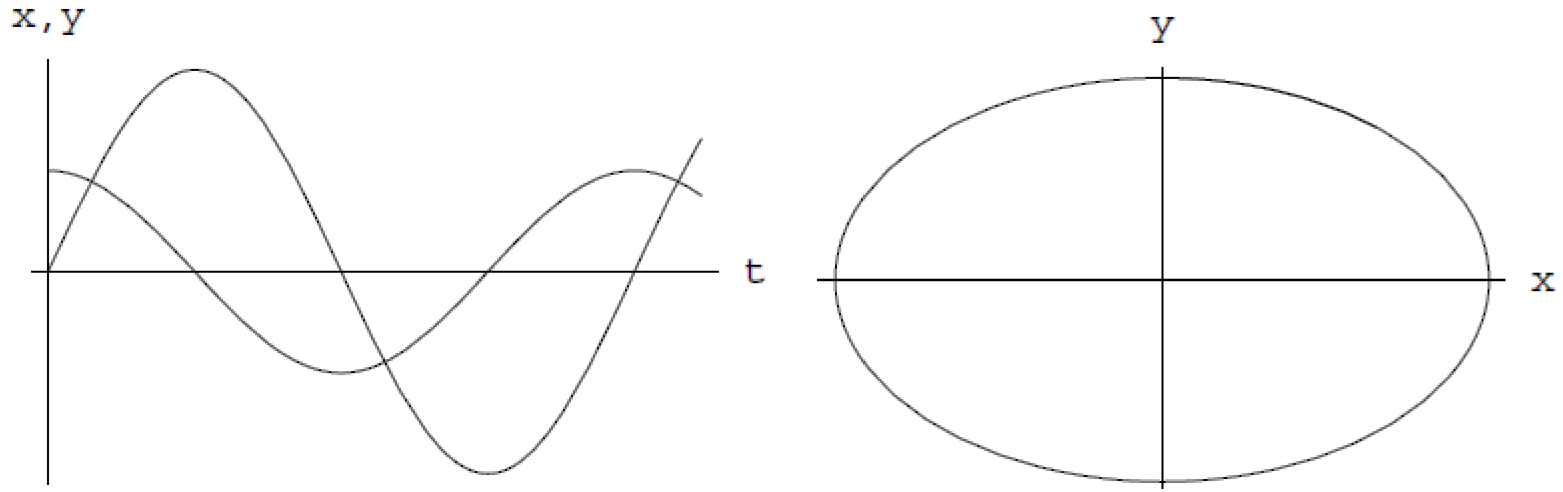


Figura 2: *Gráficas de las soluciones (izquierda) y de la órbita (derecha).*

Ver mas ejemplos en la lectura compartida
(Págs. 257-265;Libro Masias Ferrer)

Un sistema de condiciones iniciales $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ se traduce en fijar un punto por el que pasa la órbita.

RESOLUCION DE SISTEMAS EDO LINEALES

Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y + f(t) \\ \frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y + g(t) \end{array}\right\}$$

Si los coeficientes $a(t), b(t), c(t)$ y $d(t)$ son constantes,

tendremos un sistema lineal cuya matriz es de coeficientes constantes

SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON COEFICIENTES CONSTANTES MEDIANTE EL METODO DE LOS OPERADORES

En esta sección aprenderemos a resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. A estos sistemas los llamaremos sistemas lineales. El tema abarca el estudio de los sistemas lineales de primer orden, así como de orden superior, con dos o más funciones desconocidas, en casos homogéneos y no homogéneos. Todos los sistemas lineales que se tratan en este tema son de coeficientes constantes. Debido a esto, es posible utilizar el método de los operadores diferenciales para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. El método se basa en la eliminación que se utiliza para la resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas. En el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, el método de eliminación reduce el sistema a una sola ecuación diferencial de orden n con coeficientes constantes en términos de una de las variables.

Ejemplo 1. Escriba los sistemas dados en términos del operador diferencial D.

$$a)\ 5x'-2y=3 \rightarrow 5D[x]-2y=3$$
$$2x+4y'=7 \rightarrow 2x+4D[y]=7$$

$$b)\ x'-x+2y=0 \rightarrow (D-1)[x]+2y=0$$
$$3x+y'=0 \rightarrow 3x+D[y]=0$$

$$c)\ x''-4y'=0 \rightarrow D^2[x]-4D[y]=0$$
$$x''+x'+y''=0 \rightarrow (D^2+D)[x]+D^2[y]=0$$

$$d)\ x''+x'+y'+y=0 \rightarrow (D^2+D)[x]+(D+1)[y]=0$$
$$x'''+y''+y=0 \rightarrow D^3[x]+(D^2+1)[y]=0$$

Ejemplo 2. Exprese en notación matricial los sistemas siguientes:

$$a)\ (D^2+D)[x]+(D+1)[y]=0$$
$$D^3[\mathrm{x}]+(D^2+1)[y]=0$$

La parte izquierda del sistema puede escribirse como el producto matricial de la matriz operacional por el vector solución:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (D^2+D) & (D+1) \\ D^3 & (D^2+1) \end{bmatrix}}_{\substack{\text{A} \\ \text{Matriz operacional o} \\ \text{"matriz de coeficientes"} \\ \text{del sistema}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\substack{\text{X} \\ \text{Vector} \\ \text{solución}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{F} \\ \text{Vector de} \\ \text{términos no} \\ \text{homogéneos}}}$$

Observe que la matriz del sistema contiene operadores diferenciales. Por esta razón se le llama matriz operacional, ya que puede interpretarse como un operador que opera sobre un vector cuyos componentes son funciones.

$$b)\ \begin{array}{l} D[x]+y+z=0 \\ -x+D[y]+z=0 \\ x+y+D[z]=0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{bmatrix} D & 1 & 1 \\ -1 & D & 1 \\ 1 & 1 & D \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{F}$$

Ejemplo 3. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales por el método de eliminación.

$$x'-x+2y=0$$

$$3x+y'=0$$

Se trata de un sistema lineal homogéneo de primer orden con coeficientes constantes. Para empezar a resolverlo primero expresamos el sistema en términos del operador diferencial *"D"*.

$$(D-1)[x]+2y=0 \qquad (1)$$

$$3x+D[y]=0 \qquad (2)$$

Ahora aplicamos la eliminación en forma parecida a como se resuelve un sistema de ecuaciones algebraicas. En este caso podemos eliminar a la función *y(t)* al multiplicar la primera ecuación por el operador *"D"*, la segunda por -2 y luego sumarlas:

Ahora aplicamos la eliminación en forma parecida a como se resuelve un sistema de ecuaciones algebraicas. En este caso podemos eliminar a la función *y(t)* al multiplicar la primera ecuación por el operador *"D"*, la segunda por -2 y luego sumarlas resulta:

$$D\big[(D-1)[x]+2y=0\big]=D(D-1)[x]+2D[y]=0$$

$$-2\big[3x+D[y]=0\big]= \qquad -6x-2D[y]=0$$

$$\overline{D(D-1)[x]-6x=0+0=0} \qquad (3)$$

Que puede ser expresada así:

$$D(D-1)[x]-6x=0$$

$$(D^2-D)[x]-6x=0$$

$$(D^2-D-6)[x]=0$$

Cuyo polinomio característico es:

$$\lambda^2-\lambda-6=0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-3)(\lambda+2)=0$$

Las raíces son: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$ y por lo tanto la función *x(t)* es:

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}$$

Encontrar *y(t)* tenemos dos opciones: La primera es resolver al sistema y eliminar a *x(t)* para obtener *y(t)*:

$$-3\left[(D-1)[x] + 2y = 0\right] = -3(D-1)[x] - 6y = 0$$

$$(D-1)\left[3x + D[y] = 0\right] = \underline{3(D-1)[x] + D(D-1)[y] = 0}$$

$$\mathrm{D(D-1)[y] - 6y = 0}$$

La ecuación diferencial resultante es:

$(D^2 - D - 6)[y] = 0$ y su ecuación auxiliar es : $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$

Las raíces son: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$ por lo tanto la función *y(t)* es: $y(t) = c_3 e^{3t} + c_4 e^{-2t}$

Nota:

Las constantes $c_3 \; y \, c_4$ no necesariamente son iguales a $c_1 \; y \, c_2$ encontradas para la función *x(t)*. Sin embargo, dado que se trata de un sistema con dos ecuaciones diferenciales de primer orden, se tendrá una constante por cada ecuación. Para encontrar la relación entre las constantes c_1, c_2, c_3, c_4, sustituimos las funciones *x(t)* y *y(t)* encontradas en una de las ecuaciones del sistema. Tomemos la ecuación dos ya que es la más sencilla:

Resulta:

$$3\left(c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}\right) + D\left(c_3 e^{3t} + c_4 e^{-2t}\right) = 0$$

$$3c_1 e^{3t} + 3c_2 e^{-2t} + 3c_3 e^{3t} - 2c_4 e^{-2t} = 0 \; \ldots\ldots \; (*)$$

Puesto que las funciones e^{3t}, e^{-2t} son linealmente independientes en cualquier intervalo (ya que son los elementos de un conjunto fundamental de soluciones de una EDO lineal homogénea de coeficientes constantes), entonces la combinación lineal expresada en $(*)$ debe cumplirse solo en el caso que las constantes sean todas igual a cero, entonces:

$$3c_1e^{3t} + 3c_3e^{3t} + 3c_2e^{-2t} - 2c_4e^{-2t} = 0$$

$$(3c_1 + 3c_3)e^{3t} + (3c_2 - 2c_4)e^{-2t} = 0$$

$$\therefore \quad 3c_1 + 3c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = -3c_1/3 = -c_1$$

$$3c_2 - 2c_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_4 = -3c_2/(-2) = \frac{3}{2}c_2 \qquad \Rightarrow \quad y(t) = -c_1e^{3t} + \frac{3}{2}c_2e^{-2t}$$

La solución del sistema $\begin{bmatrix} (D-1) & 2 \\ 3 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es $X = \begin{bmatrix} c_1e^{3t} + c_2e^{-2t} \\ -c_1e^{3t} + \frac{3}{2}c_2e^{-2t} \end{bmatrix}$.

Una forma más sencilla de encontrar la función *y(t)* una vez conocida *x(t)*, es utilizar el sistema para obtener una ecuación para *y(t)* en términos de *x(t)* y *x'(t)*.

Por ejemplo, al despejar a *y(t)* de la ecuación (1) del sistema obtenemos: $y = -\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x$

y sustituyendo aquí la expresión obtenida para *x(t)* obtenemos el mismo resultado, veamos:

$$y(t) = -\frac{1}{2}\left(3c_1e^{3t} - 2c_2e^{-2t}\right) + \frac{1}{2}c_1e^{3t} + \frac{1}{2}c_2e^{-2t}$$

$$y(t) = -\frac{3}{2}c_1e^{3t} + c_2e^{-2t} + \frac{1}{2}c_1e^{3t} + \frac{1}{2}c_2e^{-2t}$$

$$y(t) = -c_1e^{3t} + \frac{3}{2}c_2e^{-2t}$$

Ahora comprobamos la solución obtenida. Para esto aplicamos la matriz operacional al vector solución obtenido:

$$\begin{bmatrix} (D-1) & 2 \\ 3 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1e^{3t} + c_2e^{-2t} \\ -c_1e^{3t} + \dfrac{3}{2}c_2e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3c_1e^{3t} - 2c_2e^{-2t} - c_1e^{3t} - c_2e^{-2t} - 2c_1e^{3t} + 3c_2e^{-2t} \\ 3c_1e^{3t} + 3c_2e^{-2t} - 3c_1e^{3t} - 3c_2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3c_1e^{3t} - 3c_1e^{3t} - 3c_2e^{-2t} + 3c_2e^{-2t} \\ 3c_1e^{3t} - 3c_1e^{3t} + 3c_2e^{-2t} - 3c_2e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se puede optar por cualquiera de los procedimientos, pero el último es el mas extenso.

En general el procedimiento utilizado para resolver el ejemplo 3 funciona para cualquier sistema lineal de orden n con coeficientes constantes. Veamos algunos ejemplos de orden superior.

Ejemplo 4. Resolver el sistema

$$x''-4y'=0$$
$$x''+x'+y''=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D^2[x]-4D[y]=0 \\ (D^2+D)[x]+D^2[y]=0 \end{cases}$$

Ahora eliminamos a la función *y(t)* del sistema:

$$D\left[D^2[x]-4D[y]=0\right]= \qquad D^3[x]-4D^2[y]=0$$
$$4\left[(D^2+D)[x]+D^2[y]=0\right]=\underline{4\left(D^2+D\right)[x]+4D^2[y]=0}$$
$$=\left(D^3+4D^2+4D\right)[x]=0$$

La ecuación diferencial resultante en términos de *x(t)* es: $\left(D^3+4D^2+4D\right)[x]=0$

$$\lambda^3+4\lambda^2+4\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=0; \quad \lambda^2+4\lambda+4=0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda=\frac{-4\pm\sqrt{16-4(1)(4)}}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2=\lambda_3=-2 \qquad \Rightarrow \qquad x(t)=c_1+c_2e^{-2t}+c_3te^{-2t}$$

Para encontrar la función *y(t)* utilizamos el sistema para expresar a *y(t)* en términos de *x(t)* y sus derivadas. Para esto observe que de la primera ecuación del sistema podemos despejar a *y'(t)* y luego integrar para obtener *y(t)*:

$$x''-4y'=0 \quad \Rightarrow \quad 4y'=x'' \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{1}{4}x'' \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{4}\int x''dt=\frac{1}{4}x'+c_4$$

$\Rightarrow \; y(t)=\frac{1}{4}x'+c_4$, donde la derivada de x(t) es: $x'(t)=-2c_2e^{-2t}-2c_3te^{-2t}+c_3e^{-2t}$

$$\Rightarrow \quad y(t)=\frac{1}{4}x'+c_4=-\frac{1}{2}c_2e^{-2t}-\frac{1}{2}c_3te^{-2t}+\frac{1}{4}c_3e^{-2t}+c_4$$

$\therefore$ La solución general del sistema es:

$$x(t)=c_1+c_2e^{-2t}+c_3te^{-2t}$$

$$y(t)=-\frac{1}{2}c_2e^{-2t}-\frac{1}{2}c_3te^{-2t}+\frac{1}{4}c_3e^{-2t}+c_4$$

Observe que la solución general contiene cuatro constantes ya que resolvimos un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Ahora comprobamos que la solución obtenida satisface el sistema. Para la comprobación necesitamos las segundas derivadas de x(t) y y(t), por lo que enseguida las calculamos.

$$x''(t)=4c_2e^{-2t}-2c_3e^{-2t}+4c_3te^{-2t}-2c_3e^{-2t}=4c_2e^{-2t}+4c_3te^{-2t}-4c_3e^{-2t}$$

Pero $y'(t)=\frac{1}{4}x''(t)$, entonces: $y'(t)=c_2e^{-2t}+c_3te^{-2t}-c_3e^{-2t}$

$$y''(t)=-2c_2e^{-2t}+2c_3e^{-2t}-2c_3te^{-2t}+c_3e^{-2t}=-2c_2e^{-2t}+3c_3e^{-2t}-2c_3te^{-2t}$$

Sustituyendo en el sistema:

$$x''-4y' = 0 = \left(4c_2e^{-2t} + 4c_3te^{-2t} - 4c_3e^{-2t}\right) - 4\left(c_2e^{-2t} + c_3te^{-2t} - c_3e^{-2t}\right)$$

$$= 4c_2e^{-2t} - 4c_2e^{-2t} + 4c_3te^{-2t} - 4c_3te^{-2t} - 4c_3e^{-2t} + 4c_3e^{-2t} = 0$$

Se satisface la primera ecuación. Derivemos la segunda.

$$\begin{aligned} x''+x'+y'' = 0 &= \left(4c_2e^{-2t} + 4c_3te^{-2t} - 4c_3e^{-2t}\right) + \left(-2c_2e^{-2t} - 2c_3te^{-2t} + c_3e^{-2t}\right) \\ &\quad + \left(-2c_2e^{-2t} + 3c_3e^{-2t} - 2c_3te^{-2t}\right) \\ &= 4c_2e^{-2t} - 2c_2e^{-2t} - 2c_2e^{-2t} + 4c_3te^{-2t} - 2c_3te^{-2t} - 2c_3te^{-2t} \\ &\quad - 4c_3e^{-2t} + c_3e^{-2t} + 3c_3e^{-2t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se satisface la primera ecuación. Derivemos la segunda.

$$\begin{aligned} x''+x'+y'' = 0 &= \left(4c_2e^{-2t} + 4c_3te^{-2t} - 4c_3e^{-2t}\right) + \left(-2c_2e^{-2t} - 2c_3te^{-2t} + c_3e^{-2t}\right) \\ &\quad + \left(-2c_2e^{-2t} + 3c_3e^{-2t} - 2c_3te^{-2t}\right) \\ &= 4c_2e^{-2t} - 2c_2e^{-2t} - 2c_2e^{-2t} + 4c_3te^{-2t} - 2c_3te^{-2t} - 2c_3te^{-2t} \\ &\quad - 4c_3e^{-2t} + c_3e^{-2t} + 3c_3e^{-2t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se satisface la segunda ecuación. Por tanto se ha comprobado que la solución encontrada satisface al sistema.

EJERCICIOS

En los siguientes problemas, resuelva cada uno de los sistemas de ecuaciones, analícense sus puntos de reposo y determine si es estable, asintóticamente estable ó inestable, la solución de dichos sistemas.

1.- $$\frac{dx}{dt} = -2x + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = -4y$$

2.- $$\frac{dx}{dt} = 5x + 4y, \quad \frac{dy}{dt} = -3x - 2y$$

3.- $$\frac{dx}{dt} = x + 6y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + 2y$$

4.- $$\frac{dx}{dt} = 2x + 5y, \quad \frac{dy}{dt} = -5x - 6y$$

5.- $$\frac{dx}{dt} = 3x + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 4x + y$$

6.- $$\frac{dx}{dt} = x + y, \quad \frac{dy}{dt} = -4x - 3y$$

7.- $$\frac{dx}{dt} = 3x + 7y, \quad \frac{dy}{dt} = x - 3y$$

8.- $$\frac{dx}{dt} = 3x, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + 3y$$

MÉTODO DE LOS VALORES Y VECTORES PROPIOS PARA RESOLVER SISTEMAS EDO

La solución del sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes $\frac{d\mathbf{X}}{dt} - \mathbf{AX} = \mathbf{0}$ se propondrá de la forma: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} e^{\lambda t}$, donde $x_1 = \alpha_1 e^{\lambda t}, x_2 = \alpha_2 e^{\lambda t}, \ldots, x_n = \alpha_n e^{\lambda t}$ y $\alpha_j, \lambda \in \Re$.

$$\text{Si } \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \text{ entonces } \mathbf{X} = \tilde{\mathbf{A}} e^{\lambda t}$$

Ejemplo .- Resuelva el siguiente sistema lineal homogéneo:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 4x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 5x_2$$

Solución.- El sistema, en forma matricial tiene la forma:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

la solución propuesta viene dada por $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{A}} e^{\lambda t}$ y cuya derivada, por $\mathbf{X}' = \tilde{\mathbf{A}} \lambda e^{\lambda t}$.

Como determinar $\tilde{\mathbf{A}}$ mediante el método de valores y vectores propios?