Quinta sesión

Análisis Convexos - CM3E2

Jonathan Munguia[1]

[1]Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

27 de abril de 2021

Outline

Proposición 1

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$*. Un elemento* $x \in \mathbb{R}^n$ *es una combinación convexa de* U*, si y solo si existen* $p \in \mathbb{N}$*,* $\underline{t_i > 0}$ *y* $\{x_i\}_{i=1}^{p} \subset U$ *tales que*

$$x = \sum_{i=1}^{p} t_i x_i \ , \quad \sum_{i=1}^{p} t_i = 1 \, .$$

Teorema 1 (Carathéodory)

Dado $S \subset \mathbb{R}^n$. Si $x \in co(S)$, entonces existen $p \in \mathbb{N}$ con $p \leq n$, $x_i \in S$, $t_i > 0$ para $i = 0, 1, \cdots, p$, tales que los $p + 1$ puntos x_i son afinamente independientes y

$$x = \sum_{i=0}^{p} t_i x_i \ , \quad \sum_{i=0}^{p} t_i = 1 \, .$$

Demostración

$\{x_0, x_1, \ldots, x_p\} \Leftrightarrow \{x_1 - x_0, \ldots, x_p - x_0\}$ L.i.

x_{i_0}

Si $x \in \mathrm{co}(S)$, entonces $x = \sum_{i=0}^{p} \mu_i x_i$ para $\mu_i > 0$, $x_i \in S$ y $\sum_{i=0}^{p} \mu_i = 1$. Si los $p + 1$ son afinamente independientes, entonces $p \leq n$. Sino, primero eliminamos los x_i nulos y si los puntos restantes continuan siendo afinamente dependientes, es decir existen $\gamma_i \in \mathbb{R}$ no todos nulos tal que

$x_i \neq 0$

$$\sum_{i=1}^{p} \gamma_i (x_i - x_0) = 0.$$

Demostración (cont...)

Suponemos que $I := \{i : \gamma_i > 0\} \neq \emptyset$ y sea $\epsilon > 0$ tal que

$- \sum_{i=1}^{p} x_0$

$$
\begin{aligned}
x - x_0 &= \sum_{i=1}^{p} \mu_i (x_i - x_0) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \mu_i (x_i - x_0) - \epsilon \overbrace{\sum_{i=1}^{p} \gamma_i (x_i - x_0)}^{=0} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \underbrace{\overbrace{(\mu_i - \epsilon\gamma_i)}^{\beta_i}}_{\geq 0} (x_i - x_0).
\end{aligned}
$$

si $\gamma_i \leq 0 \Rightarrow \beta_i \geq 0$

$\mu_i \geq \epsilon \gamma_i$

$\frac{\mu_i}{\gamma_i} \geq \epsilon \quad \forall i \in I$

Tomando $\epsilon = \min\left\{\frac{\mu_i}{\gamma_i} : i \in I\right\} = \frac{\mu_{i_0}}{\gamma_{i_0}}$, con $i_0 \in I$ y $\beta_i = \mu_i - \epsilon\gamma_i$

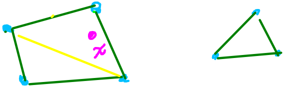
$\beta_{i_0} = 0$

Demostración (cont...)

Entonces, obtenemos la relación

$$x - x_0 = \sum_{i=1}^{p} \beta_i (x_i - x_0) \text{ con } \beta_{i_0} = 0 \text{ y } \beta_i \geq 0 \text{ para todo } i = 1, \cdots, p.$$

Continuando este procedimiento, después de un número finito de etapas, podemos representar x como combinación convexa de elementos afinamente independientes.



Corolario 1 (Carathéodory)

Para cualquier $M \subset \mathbb{R}^d$ con $\dim(\text{aff}(M)) = n$, la cápsula convexa $\text{co}(M)$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas de familias $n+1$ puntos de M afinamente independientes, es decir

$$\text{co}(M) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i x_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t_i \geq 0,\ \{x_i\}_{i=0}^{n} \subset M \text{ afin. independiente} \right\}$$

Demostración

- Para cada $x \in \text{co}(M)$, por el teorema anterior, existe un conjunto de puntos $x_0, x_1, \cdots, x_p$ con $\underline{p \leq n}$ afinamente independientes que lo generan. Es decir $\{x_1 - x_0, \cdots, x_p - x_0\}$ son linealmente independientes.
- Ademá, existe $\{v_1 - x_0, \cdots, v_n - x_0\}$ una base de $\overbrace{\text{aff}(M) - x_0}^{\text{subespacio vectorial}}$.

$v_1, \dots, v_n \in \text{aff}(M)$

Cont...

- Luego, completando con vectores linealmente independientes obtenemos otra base $\{x_1 - x_0, \cdots, x_p - x_0, v_{j_1} - x_0, \cdots, v_{j_{n-p}} - x_0\}$
- Así, $\{x_0, x_1, \cdots, x_p, x_{p+1}, \cdots, x_n\}$ con $x_{p+i} = v_{j_i}$, $i = 1, \cdots, n-p$, forma una familia de $n+1$ puntos afinamente independientes que generan a x, donde hemos completando con nulos los coeficientes correspondiente a los últimos $n-p$ puntos.

Observación 1

El teorema de Carathéodory no establece la existencia de una base con $n+1$ elementos para la cápsula convexa de un conjunto, como es el caso de las combinaciones lineales. Aquí, los generadores x_j pueden depender de la x particular que se vaya a calcular.

Corolario 2

La cápsula convexa de un conjunto compacto, es compacto.

Demostración

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Consideramos

$$K = \left\{ t = (t_0, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \,\mathrm{con}\, \{t_i\}_{i=0}^{n} \in [0,1] \right\},$$

$n+1$

claramente $K = I^n \cap h^{-1}(\{1\})$ es compacto, donde $h(t) = \sum_{i=0}^{n} t_i$ e $I = [0,1]$. Además, sea $f : \mathbb{R}^{n+1} \times (\mathbb{R}^n)^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, definida como

$$f(t, x_0, x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} t_i x_i. \qquad x_i \in S$$

Siendo K, S compactos y f continua, entonces $\mathrm{co}(S) = f(K \times S^{n+1})$ es compacto.

Observación 2

Otra forma de probar el Corolario 2. Dado S compacto y $\{x_n\}$ una sucesión en co(S) probar que existe una subsucesión convergente en co(S). Ver Teorema 2.8 de [2].

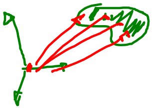
Teorema 2

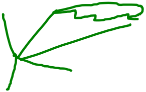
Sea $M = \{x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ *un conjunto de puntos afinamente dependiente. Entonces, existen subconjuntos* M_1 *y* M_2 *de* M *con* $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ *y* $M_1 \cup M_2 = M$ *tal que*

$$co(M_1) \cap co(M_2) \neq \emptyset.$$

Demostración

Ver Teorema 2.6 de [2].





Corolario 3

Para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y para todo $x \in K_\Omega \setminus \{0\}$, donde $K_\Omega = \text{cono-convexo}(\Omega)$, tenemos que

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \text{ con } \lambda_i > 0,\ a_i \in \Omega, \text{ cuando } i = 1, \cdots, m \ \text{ y } m \leq n$$

donde los a_i son linealmente independientes.

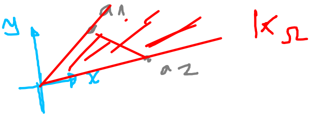
Demostración

Se sigue usando los mismos argumentos del Teorema 1. Ver Proposición 3.5 de [1].

$\Omega_1 = \{a_2, \cdots, a_m\}$

$\Omega_2 = \{a_1, a_3, a_4, \cdots, a_m\}$

$\Omega = \{a_1, a_2\}$ l.i



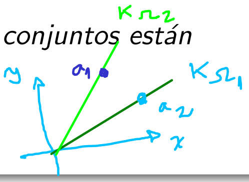
Proposición 2

Sea $a_1, \cdots, a_m$ elementos linealmente dependientes en $\mathbb{R}^n$, donde $a_i \neq 0$ para todo $i = 1, \cdots, m$. Defina los conjuntos

$$\Omega := \{a_1, \cdots, a_m\} \quad \wedge \quad \Omega_i := \Omega \setminus \{a_i\}, \ \ i = 1, \cdots, m.$$

Entonces, las cápsulas convexas cónicas de estos conjuntos están relacionadas como

$$K_\Omega \overset{\supset}{=} \bigcup_{i=1}^{m} K_{\Omega_i} \, .$$



a_{i_0}

$\Omega_i \subset \Omega$ $\{a_1, \ldots, a_m\}$ son l.d

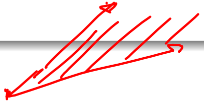
Demostración

$\Omega_{i_0} \supset \{a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}\}$ l.i

(Puede ver Proposición 3.8 de [1])
Es inmediato que $K_{\Omega_i} \subset K_\Omega$ para todo $i = 1, \cdots, m$.
Veamos la inclusión inversa, para cada $x \in K_\Omega$, se tiene por el Corolario 3 que existen $a_{n_1}, \cdots, a_{n_k} \in \Omega$ linealmente independientes con $\{n_1, \cdots, n_k\} \subset \{1, \cdots, m\}$ y $\mu_j > 0$ para $j = 1, \cdots, k$, tal que $x = \sum_{j=1}^{k} \mu_j a_{n_j}$. Por la dependencia de los a_i con $i = 1, \cdots, m$, existe $i_0 \in \{1, \cdots, m\} \setminus \{n_1, \cdots, n_k\}$, entonces $x \in K_{\Omega_{i_0}}$ $\subset \bigcup K_{\Omega_i}$

Proposición 3

Sea $\Omega = \{a_1, \cdots, a_m\} \subset \mathbb{R}^n$*. Entonces, la cápsula cónica convexa* K_Ω *generada por* Ω *es cerrada.*

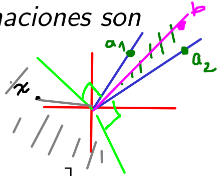


Demostración

Ver Proposición 3.9 de [1].

Teorema 3

Sea $\Omega = \{a_1, \cdots, a_m\} \subset \mathbb{R}^n$ *y* $b \in \mathbb{R}^n$*. Las sgtes afirmaciones son equivalentes:*



i) $b \in K_\Omega$

ii) *Para* $x \in \mathbb{R}^n$ *cualesquiera, se tiene la implicación*

$$\Big[\langle a_i, x\rangle \leq 0,\ i = 1, \cdots, m\Big] \Longrightarrow \Big[\langle b, x\rangle \leq 0\Big].$$

Demostración

Ver Teorema 3.10 de [1].

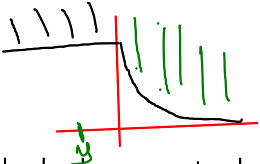
Definición 1 (Función convexa)

Una función $f:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es convexa si su epígrafo:

$$\operatorname{epi}(f) := \Big\{(x,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,:\, f(x) \leq \mu\Big\},$$

es convexo. Además, consideramos las sgtes reglas:

$$\begin{aligned}
\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty \quad &\text{para} \quad -\infty < \alpha \leq \infty,\\
\alpha - \infty = -\infty + \alpha = -\infty \quad &\text{para} \quad -\infty < \alpha \leq \infty,\\
\alpha\,\infty = \infty\,\alpha = \infty\,,\ \alpha(-\infty) = (-\infty)\alpha = -\infty \quad &\text{para} \quad 0 < \alpha \leq \infty,\\
\alpha\,\infty = \infty\,\alpha = -\infty\,,\ \alpha(-\infty) = (-\infty)\alpha = \infty \quad &\text{para} \quad -\infty \leq \alpha < 0,\\
&-(-\infty) = \infty.
\end{aligned}$$



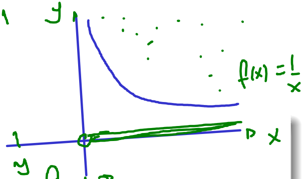
Observación 3

La definición es dada desde un punto de vista geométrico. Además, la definición del epigrafo no involucra lo que pasa cuando f alcanza el valor ∞.

Ejemplo 1

Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0, \\ +\infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $(0, \infty) \notin \operatorname{epi}(f)$, es más $(y, \infty) \notin \operatorname{epi}(f)$ para todo $y < 0$. Luego, claramente $\operatorname{epi}(f)$ es convexo y por tanto f es convexa.

f es convexa $\quad \operatorname{epi} f \subset \mathbb{R}^{n+1}$



Definición 2 (Dominio efectivo)

El dominio efectivo de f, se define como

$y \le 0 \Rightarrow f = +\infty$

$\langle 0, +\infty \rangle$

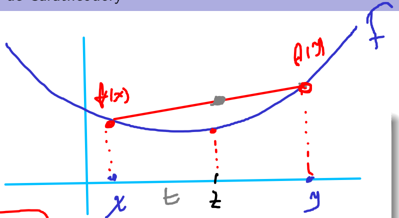
$f(x) \le \mu < +\infty$

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(f) &:= \operatorname{proy}_{\mathbb{R}^n} \operatorname{epi}(f) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \mu \in \mathbb{R},\ (x, \mu) \in \operatorname{epi}(f)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \infty\}. \end{aligned}$$

Observación 4

$\operatorname{dom}(f)$ es convexo. Basta notar que la proyección $\operatorname{proy} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{proy}(x, \mu) = x$ es afín y por ende lleva convexos en convexos.

$\operatorname{proy}(\operatorname{epi} f) =: \operatorname{dom} f$



Teorema 4 (Representación algebraica)

$f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *es convexa si y solo si*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \forall t \in (0,1) : \quad f(\overbrace{t\,x + (1-t)y}^{z}) \leq \underbrace{t\,f(x) + (1-t)f(y)}.$$

Demostración

$\Rightarrow$) Se nota que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \forall t \in (0,1) : \quad f(t\,x + (1-t)y) \leq \infty.$$

Si $x \in \mathrm{dom}(f) \wedge y \notin \mathrm{dom}(f)$ o $x, y \notin \mathrm{dom}(f)$ se verifica que $t\,f(x) + (1-t)f(y) = \infty$.

Demostración (cont...)

En caso que $x, y \in \mathrm{dom}(f)$ y $t \in (0,1)$, se tiene en particular que $(x, f(x)), (y, f(y)) \in \boxed{\mathrm{epi}(f)}$ y por la convexidad del $\mathrm{epi}(f)$ se obtiene

$f(z) \leq \mu$

$$\begin{aligned} &\big(\overbrace{t\,x + (1-t)y}^{z}, \overbrace{t\,f(x) + (1-t)f(y)}^{\mu}\big) \\ &= t(x, f(x)) + (1-t)(y, f(y)) \in \mathrm{epi}(f), \end{aligned}$$

luego, se verifica la propiedad

$$f\big(t\,x + (1-t)y\big) \leq t\,f(x) + (1-t)f(y).$$

Demostración (cont...)

$\Leftarrow$) Sean $(x_1, \mu_1), (x_2, \mu_2) \in \text{epi}(f)$ y $t \in (0, 1)$, es decir $\boxed{f(x_i) \leq \mu_i,}$ $i = 1, 2$. Así por la propiedad, se tiene

$$f(t\,x_1 + (1-t)x_2) \overset{\text{propiedad}}{\leq} t\,\underbrace{f(x_1)}_{\mu_1} + (1-t)\underbrace{f(x_2)}_{\mu_2} \leq t\mu_1 + (1-t)\mu_2,$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} &t(x_1, \mu_1) + (1-t)(x_2, \mu_2) \\ &= (t\,x_1 + (1-t)x_2, t\mu_1 + (1-t)\mu_2) \in \text{epi}(f), \end{aligned}$$

así, se concluye que $\text{epi}(f)$ es convexo.

Referencias bibliográficas

1. Boris S. Mordukhovich and Nguyen Mau Nam. An Easy Path to Convex Analysis and Applications. Morgan & Claypool Publishers series, 2014.
2. Brondsted, Arne. An Introduction to Convex Polytopes. Graduate Texts in Mathematics, vol 90, 1983.

FIN