Quinceava sesión

Análisis Convexos - CM3E2

Jonathan Munguia[1]

[1]Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

8 de junio de 2021

Outline

Proposición 1

Convexidad fuerte $\Longrightarrow$ *Convexidad estricta* $\Longrightarrow$ *convexidad.*
(Pero lo contrario de ninguna de las implicaciones es cierto).

 Teoremas de Separación

Recordando

Sea $H := \{x : \langle a, x\rangle = \alpha\}$ un hiperplano donde $a \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Y sus respectivos semiespacios:

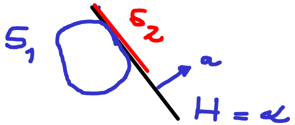
$$\mathcal{H}_1 := \{x : \langle a, x\rangle \geq \alpha\} \quad \wedge \quad \mathcal{H}_2 := \{x : \langle a, x\rangle \leq \alpha\}.$$

Definición 1

Dados $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ no vacíos. Se dice que H:

i) **separa** (débilmente) a S_1 y S_2 si

$$\forall x_1 \in S_1, \forall x_2 \in S_2 : \langle a, x_1\rangle \leq \alpha \leq \langle a, x_2\rangle.$$



Definition (cont...)

ii) **separa propiamente** a S_1 y S_2 si los separa y además ambos no están contenidos en H, es decir $\langle a, x_1 \rangle \leq \alpha \leq \langle a, x_2 \rangle$

$$\exists x_1 \in S_1,\ \exists x_2 \in S_2 \text{ tal que } \langle a, x_2 - x_1 \rangle > 0.$$

$S_1 \cup S_2 \subset H$ $\quad \langle a, x_2 \rangle = \langle a, x_1 \rangle = \alpha \quad \forall x_1\ \forall x_2$

iii) **separa estrictamente** a S_1 y S_2 si

$$\forall x_1 \in S_1,\ \forall x_2 \in S_2 :\ \langle a, x_1 \rangle < \alpha < \langle a, x_2 \rangle.$$

iv) **separa fuertemente** a S_1 y S_2 si

$H_1 \quad H \quad H_2$

$$\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},\ \forall x_1 \in S_1,\ \forall x_2 \in S_2 :\ \langle a, x_1 \rangle \leq \alpha_1 < \alpha < \alpha_2 \leq \langle a, x_2 \rangle.$$

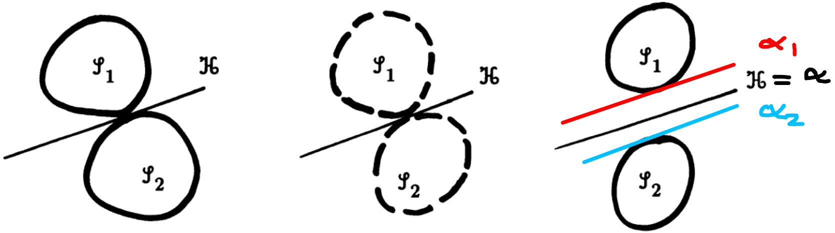
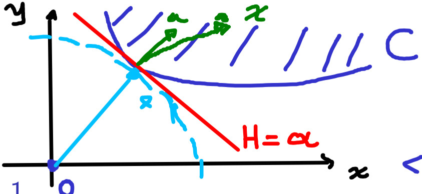


Figura: Izquierda: Propia, Centro: estricta, Derecha: Fuerte.



$\|\bar{x}\|^2$
$\shortparallel$
$\langle a, 0\rangle = 0 < \alpha \leq \langle a, x\rangle$ (Separación fuerte)

Teorema 1

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo cerrado no vacío tal que $0 \notin C$. Entonces existen $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\alpha > 0$ tales que $\langle a, x\rangle \geq \alpha$ para todo $x \in C$.

Demostración

Ver Teorema 3.1 de [1].

$m = \inf_{x \in C} \|x\|^2 < \infty$ $f(x) = \|x\|^2$ convexa, sci fuertemente, propia

$\Downarrow$

estrictamente convexa

(Si no fuera finito $\Rightarrow f(x) = \infty \ \forall x \in C$)

Teorema 2.5 de [1] $\Rightarrow$ f es inf-compacta

$S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = m\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \inf_{x \in C} \|x\|^2$ alcanza su mínimo en x_0 y es único.

$\Rightarrow \exists! \boxed{x_0 \in C}$ tq $m = \underbrace{\|x_0\|^2}_{\neq 0} \leq \|x\|^2 \ \forall x \in C.$

$0 \notin C \Rightarrow \underline{m > 0}$

$x \in C$

$\cancel{\|x_0\|^2} \leq \|x_0 + t(x - x_0)\|^2$

$= \cancel{\|x_0\|^2} + 2\cancel{t} \langle x_0, x - x_0 \rangle + \cancel{t^2} \|x - x_0\|^2$

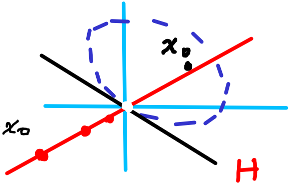
$\underline{\exists x_0 \in C}$ $\Rightarrow \langle x_0, x - x_0 \rangle \geq 0$

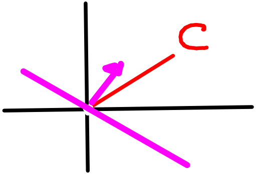
$\forall x \in C$ $\quad \underset{\substack{\| \\ a \neq 0}}{\langle x_0}, x \rangle \geq \langle x_0, x_0 \rangle = \underset{\substack{\| \\ \alpha}}{\|x_0\|^2}$

$\forall x \in C : \langle a, x \rangle \geq \alpha$

$0 \in \bar{C} \setminus C$

$t > 0$, $-tx_0$



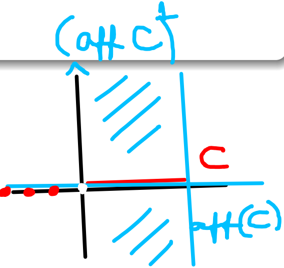


Teorema 2

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo no vacío tal que $0 \notin C$. Entonces existe $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $\langle a, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in C$ y $\langle a, x \rangle > 0$ para todo $x \in ri(C)$.

Demostración

Ver Teorema 3.2 de [1].



$0 \in \bar{C}$ → aplicamos Teorema 1

$0 \in \bar{C}$ → $\dim(\mathrm{aff}\, C) < n$

$D = C + (\mathrm{aff}\, C)^\perp$ $\quad \dim(\mathrm{aff}\, C) = n \Longrightarrow D = C$

$0 \in \bar{D}$ $\quad \mathrm{int}\, D = \mathrm{ri}\, C + \mathrm{aff}\, C^\perp$

Si $0 \in D \Rightarrow 0 = x + y \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$

$\Rightarrow x = -y \qquad -\|y\|^2 = 0$

$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 \in C$

$(\Rightarrow \Leftarrow)$

Prop 1.17 de [1] dim n

$ri(D) = ri(C) + \underbrace{ri(\mathrm{aff}\, C^{\perp})}_{\mathrm{aff}\, C^{\perp}}$

$\text{int } D = ri\, C + \mathrm{aff}\, C^{\perp} \Rightarrow ri\, C \subset \text{int } D$

$\exists x_0 \in ri\, C$

Si $\exists t > 0$ tq $-t x_0 \in \bar{C}$

$$\frac{t}{1+t} x_0 + \frac{1}{1+t}(-t x_0) = 0 \in ri\, C \subset C \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$$

$\exists x_0 \in \text{ri}\, C$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \quad -\frac{x_0}{k} \notin \overline{D} \Longrightarrow \underbrace{\overline{D} + \frac{x_0}{k}}$

cerrado convexo no vacío

$0 \notin \overline{D} + \frac{x_0}{k}$

Por el teorema

$\exists\, a_k \neq 0, \; \alpha_k \in \mathbb{R}$ tq

$$\alpha_k \leq \langle a_k, \left(x + \frac{x_0}{k}\right) \rangle, \quad x \in \overline{D}$$

unitario $\Longrightarrow a_k \rightarrow a$ unitario

en particular x_0

$$0 < \alpha_k \leq \langle a_k, \left(1 + \frac{1}{k}\right) x_0 \rangle \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot \underbrace{\|a_k\|}_{1} \cdot \|x_0\|$$

$$\leq 2\|x_0\|$$

$\Rightarrow (\alpha_k)$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$

$\ni \quad \alpha_k \to \alpha$ (Sin pérdida de generalidad)

$$\alpha_k \leq \left\langle a_k, \left(x + \frac{x_0}{k}\right) \right\rangle, \quad x \in \overline{D}$$

$k \to \infty$

$\Rightarrow$

$$0 \leq \alpha \leq \langle a, x \rangle \quad \forall x \in \overline{D} \supset C$$

$$D \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha \leq \langle a, x \rangle\}$$

$$\text{int } D \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha < \langle a, x \rangle\}$$

$\text{ri } C$

$\pm \quad \forall x \in \text{ri } C : \quad \langle a, x \rangle > \alpha .$

Corolario 1.5 de [1]

$S = D + (-C) \Rightarrow \overline{S} = \overline{D} + \overline{-C} = D - C = S$

es cerrado convexo es no vacío y $0 \notin S$

Teorema 3

Sean C, $D \subset \mathbb{R}^n$ convexos cerrados no vacíos disjuntos. Si

$$d \in C_\infty \cap D_\infty \quad \Longrightarrow \quad -d \in C_\infty \cap D_\infty.$$

Entonces, existen $a \neq 0$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\forall (x, y) \in C \times D: \quad \langle a, x \rangle \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \langle a.y \rangle.$$

Demostración

Ver Teorema 3.3 de [1].

Por el Teorema 1

$\exists a \neq 0$, $\exists \beta > 0$ $\quad \langle a, y - x \rangle \geq \beta \;\; \forall x \in C, \forall y \in D$

$\inf \langle a, y - x \rangle \geq \beta$

$$\inf \langle a, y - x \rangle \geq \beta$$

$$\underbrace{\inf_{y \in D} \langle a, y \rangle}_{\alpha_2} - \underbrace{\sup_{y \in C} \langle a, x \rangle}_{\alpha_1} \geq \beta > 0 \Rightarrow \alpha_2 > \alpha_1$$

$$\langle a, x \rangle \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \langle a, y \rangle$$

$M = \mathrm{ri}\, D - \mathrm{ri}\, C \Rightarrow$ M es convexo no vacío
$0 \notin M$.

Teorema 4 Teorema 2: $\exists a \neq 0$ tq $\langle a, y-x \rangle > 0 \ \forall y-x \in \mathrm{ri} M$

Sean C y D convexos no vacíos tales que $\mathrm{ri}\, C \cap \mathrm{ri}\, D = \emptyset$*. Entonces, existen $a \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\forall (x, y) \in \overline{C} \times \overline{D} : \quad \langle a.x \rangle \leq \alpha \leq \langle a, y \rangle,$$

y

$$\forall (x, y) \in \mathrm{ri}\, C \cap \mathrm{ri}\, D : \quad \langle a.x \rangle < \langle a, y \rangle.$$

Demostración

Ver Teorema 3.4 de [1].

$\mathrm{ri}\, M = M \Rightarrow \langle a, y \rangle > \langle a, x \rangle \quad \forall y \in \mathrm{ri}\, D, \ \forall x \in \mathrm{ri}\, C$

$\langle a,x\rangle < \langle a,y\rangle \quad \forall y\in \mathrm{ri}\, D$
$\forall x\in \mathrm{ri}\, C$

$$\sup_{x\in \mathrm{ri}\, C} \langle a,x\rangle \leq \langle a,y\rangle \quad \forall y \in \mathrm{ri}\, D$$

$$\overbrace{\sup_{x\in \mathrm{ri}\, C}}^{M} \langle a,x\rangle \leq \overbrace{\inf_{y\in \mathrm{ri}\, D} \langle a,y\rangle}^{N}$$

Tarea ¿? $\Vert$ $\qquad\qquad$ $\Vert$ convexidad

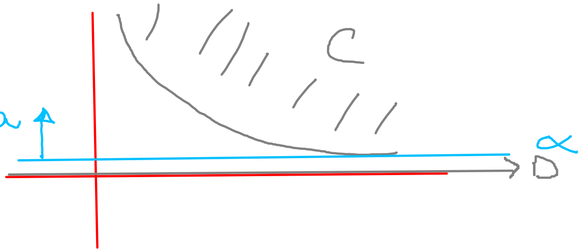
$$\sup_{x\in \bar{C}} \langle a,x\rangle \qquad \inf_{y\in \bar{D}} \langle a,y\rangle$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(M+N)$$

$$\langle a,x\rangle \leq \alpha \leq \langle a,y\rangle$$

$$\forall x\in \bar{C}, \quad \forall y\in \bar{D}$$

$(x,y)\cdot(0,1)=\alpha$



Ejemplo 1

Dados los conjuntos

$$C=\{(x,y)\,:\,x>0,\ y>0,\ xy\geq 1\}\quad\wedge\quad D=\{(x,y)\,:\,y=0\}.$$

¿Existe una separación estricta entre sus interiores relativos?

$ri\,C=\{(x,y): x>0,\ y>0,\ xy>1\}$

$ri\,D = D=\{(x,y): y=0\}$

$ri\,C\cap ri\,D=\emptyset$

$\langle a,y\rangle<\langle a,x\rangle \quad \forall\, y\in ri\,D,\ \forall\, x\in ri\,C$

$0 < \langle a,x\rangle$

$\alpha<\langle a,x\rangle \quad \forall\, x\in ri\,C$

$\alpha \quad \alpha\geq 0 \ (\geq\varepsilon)$

Referencias bibliográficas

1. Jean-Pierre Crouzeix and Eladio Ocaña. Análisis convexo. Fondo Editorial EDUNI, 2018.

FIN