SEMANA 3
RESOLUCIÓN EXACTA EDOS DE 2do ORDEN HOMOGENEAS Y NO HOMOGENEAS

irlamn@uni.edu.pe

Cálculo de la solución de una ecuación homogénea con coeficientes constantes

Consideraremos una ecuación **homogénea** lineal de orden 2 **con coeficientes constantes**:

$$a_0 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2\, y = 0\ .$$

Buscaremos soluciones de la forma exponencial:

$$\boxed{y(x) = e^{mx}.}$$

Teniendo en cuenta que $\dfrac{d^k y(x)}{dx^k} = m^k e^{mx},\ \forall k \in \mathbb{N}$ y sustituyendo en la ecuación, se obtiene

$$a_0\, m^2 e^{mx} + a_1\, m e^{mx} + a_2\, e^{mx} = 0.$$

De modo que m debe ser **raíz** del polinomio:

$$\boxed{a_0\, m^2 + a_1\, m + a_2 = 0,}$$

conocido con el nombre de **ecuación característica** de la E. D. O.

Vamos a ver que, a partir de las **raíces de la ecuación característica** se puede obtener la **solución general de la E. D. O.** Para ello veremos tres casos distintos:

1. Caso de raíces reales simples

Sea una ecuación **homogénea** lineal de orden 2 **con coeficientes constantes**. **Si** la **ecuación característica** de la E. D. O. tiene 2 **raíces reales distintas** m_1, m_2, **entonces** el **sistema fundamental de soluciones** es:

$$\{e^{m_1 x}, e^{m_2 x}\}.$$

Por tanto, la **solución general** de la E. D. O. es:

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}}$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplo 1

Sea la ecuación	$y'' - 3y' + 2y = 0.$
Su ecuación característica es	$m^2 - 3m + 2 = 0,$
cuyas raíces son	$m_1 = 1, \quad m_2 = 2.$
Entonces, la solución general es	$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}.$

2. Caso de una raíz real doble

Sea una ecuación **homogénea** lineal de orden 2 **con coeficientes constantes**. **Si** la **ecuación característica** de la E. D. O. tiene **una raíz real** m **de multiplicidad** 2 **entonces** el **sistema fundamental de soluciones** correspondiente a esa **raíz** es:

$$\{e^{mx}, x\,e^{mx}\}\,.$$

Por tanto, la **solución general** de la E. D. O. correspondiente a esa **raíz** viene dada por:

$$\boxed{(c_1 + c_2 x)\,e^{mx}}$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplo

Sea la ecuación	$y'' - 6y' + 9y = 0.$
Su ecuación característica es	$m^2 - 6m + 9 = 0,$
cuyas raíces son	$m_1 = m_2 = 3.$
Entonces, la solución general es	$y(x) = (c_1 + c_2 x)\,e^{3x}.$

3 Caso de dos raíces complejas conjugadas

Sea una ecuación **homogénea** lineal de orden 2 **con coeficientes constantes**. **Si** la **ecuación característica** de la E. D. O. tiene **dos raíces complejas conjugadas simples** $m_1 = a + bi,\ m_2 = a - bi$, **entonces** el **sistema fundamental de soluciones** correspondiente a **ambas raíces** es:

$$\{e^{ax}\, sen(bx), e^{ax}\, cos(bx)\}\ .$$

Por tanto, la **solución general** de la E. D. O. correspondiente a **ambas raíces** viene dada por:

$$\boxed{y(x) = e^{ax}\,(c_1\, sen(bx) + c_2\, cos(bx)).}$$

Ejemplo

1. Sea la ecuación $y'' + y = 0.$

   Su ecuación característica es $m^2 + 1 = 0,$

   cuyas raíces son $m_1 = i, \quad m_2 = -i.$

   (Esto es, $a = 0,\ b = 1$).

   Entonces, la solución general es $y(x) = c_1\, sen(x) + c_2\, cos(x).$

2. Sea la ecuación $y'' - 6y' + 25y = 0.$

   Su ecuación característica es $m^2 - 6m + 25 = 0,$

   cuyas raíces son $m_1 = 3 + 4i, \quad m_2 = 3 - 4i.$

   (Esto es, $a = 3,\ b = 4$).

   Entonces, la solución general es $y(x) = e^{3x}\,(c_1\, sen(4x) + c_2\, cos(4x)).$

Ecuaciones No Homogéneas

Cálculo de la solución de una ecuación no homogénea

Estudiaremos dos métodos diferentes para el cálculo de una solución particular de las ecuaciones no homogéneas lineales de orden 2:

1. Método de Coeficientes Indeterminados

Diremos que una función es **de tipo CI** si es de alguno de los siguientes tipos:

1. x^n, **con** $n \in \mathbb{N}$.
2. e^{ax}, con a una constante arbitraria.
3. $sen(bx+c)$, con b, c constantes.
4. $cos(bx+c)$, con b, c constantes.

o bien un **producto finito** de dos o más funciones de los tipos anteriores.

Sea f una función de **tipo CI**. Al **conjunto** formado por f y todas las **funciones de tipo CI linealmente independientes** tales que f y **todas sus derivadas** son **combinaciones lineales** de ellas se llama **conjunto CI de** f.

Ejemplo

1. Sea $f(x) = x^3$. Su conjunto CI es $S = \{x^3, x^2, x, 1\}$.
2. Sea $f(x) = e^{2x}$. Su conjunto CI es $S = \{e^{2x}\}$.
3. Sea $f(x) = x^2\, sen(x)$. Su conjunto CI es
   $S = \{x^2\, sen(x), x^2 \cos(x), x\, sen(x), x \cos(x), sen(x), \cos(x)\}$.

Observación **RESTRICCIONES** del **método de Coeficientes Indeterminados**:

- Sólo es utilizable para **coeficientes constantes**.
- Sólo es utilizable cuando el **segundo miembro es de tipo CI**.

Consideraremos una ecuación no homogénea lineal de orden 2 con coeficientes constantes:

$$a_0 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2\, y = F(x),$$

donde F es una combinación lineal finita de funciones de tipo CI de la forma:

Entonces, para construir una **solución particular** de la ecuación se procede del modo siguiente:

1. Para cada u_i se calcula su **conjunto CI** correspondiente, que denotaremos por S_i.
2. Se **eliminan** los conjuntos S_i que son **idénticos** o están **contenidos en otros**.
3. Si alguno de los conjuntos restantes **incluye soluciones** de la correspondiente **ecuación homogénea**, se **multiplican** todas las funciones del conjunto **por la potencia más baja de x** tal que el **conjunto resultante no contenga** ya **soluciones** de la ecuación homogénea.
4. Se forma una **combinación lineal** de todos los elementos de todos los conjuntos resultantes.
5. Se **determinan los coeficientes** de dicha combinación lineal, **sustituyéndola en la ecuación**.

Ejemplo Resolver la ecuación:

$$y'' - 2y' - 3y = 2\,e^{x} - 10\,sen(x).$$

(H) La ecuación **homogénea** asociada es $y'' - 2y' - 3y = 0$,
cuya ecuación característica es $m^2 - 2m - 3 = 0$, con raíces $m_1 = 3$, $m_2 = -1$.
Entonces, la función complementaria es $y_c(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$.

(N H 1) El término **no homogéneo** consta de dos **funciones** de **tipo CI**:

$$u_1(x) = e^x, \quad u_2(x) = sen(x),$$

cuyos conjuntos CI son $S_1 = \{e^x\}, \quad S_2 = \{sen(x), cos(x)\}$.

(N H 2, 3) No son reducibles ni contienen soluciones de la homogénea.

(N H 4) Por tanto, la solución particular será:

$$y_p(x) = A_1 e^x + A_2 sen(x) + A_3 cos(x).$$

(N H 5) Derivando, sustituyendo en la ecuación e igualando coeficientes se obtiene:

$$\begin{cases} \quad A_1 & -2A_1 & -3A_1 & = 2 \\ -A_2 & +2A_3 & -3A_2 & = -10 \\ -A_3 & -2A_2 & -3A_3 & = 0 \end{cases}$$

cuya solución es $A_1 = -\frac{1}{2}, \quad A_2 = 2, \quad A_3 = -1$, de donde

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}e^x + 2sen(x) - cos(x).$$

Entonces, la **solución general** de la ecuación es

$$\boxed{y(x) = y_c + y_p = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + 2sen(x) - cos(x).}$$

Ejemplo Resolver la ecuación $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x}$.

(H) La ecuación **homogénea** asociada tiene ecuación característica $m^2 - 3m + 2 = 0$, cuyas raíce

son: $m_1 = 1$, $m_2 = 2$. Entonces, la función complementaria es $y_c(x) = c_1e^x + c_2e^{2x}$.

(N H 1) El término **no homogéneo** consta de las **funciones de tipo CI**:

$$u_1(x) = x^2 , \quad u_2(x) = e^x , \quad u_3(x) = xe^x , \quad u_4(x) = e^{3x} ,$$

cuyos conjuntos CI son: $S_1 = \{x^2, x, 1\}$, $S_2 = \{e^x\}$, $S_3 = \{xe^x, e^x\}$, $S_4 = \{e^{3x}\}$.

(N H 2) Como $S_2 \subset S_3$ se puede **ELIMINAR** el conjunto S_2.

(N H 3) Además, **en** S_3 la función e^x es **solución de la homogénea**, por tanto se tiene e

nuevo conjunto $S_3' = \{x^2e^x, xe^x\}$.

(N H 4) Finalmente, tenemos $S_1 = \{x^2, x, 1\}$, $S_4 = \{e^{3x}\}$, $S_3' = \{x^2e^x, xe^x\}$.

La solución particular será de la forma: $y_p(x) = A_1x^2 + A_2x + A_3 + A_4e^{3x} + A_5x^2e^x + A_6xe^x$.

(N H 5) Derivando y sustituyendo en la ecuación se llega a:

$$A_1 = 1,\ A_2 = 3,\ A_3 = \frac{7}{2},\ A_4 = 2,\ A_5 = -1,\ A_6 = -3.$$

Entonces, la solución general es:

$$\boxed{y(x) = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 2e^{3x} - x^2e^x - 3xe^x .}$$

Método de Variación de Constantes

Como se ha mencionado anteriormente, el **método de coeficientes indeterminados** presenta varias **restricciones**. Vamos a ver ahora un método que puede ser utilizado **en el caso general**: el método de **variación de constantes** (o variación de parámetros). Por **simplicidad** se describirá el método para una ecuación de **orden 2**, aunque es aplicable para ecuaciones de **cualquier orden**.

Consideremos, entonces, la ecuación lineal de orden 2:

$$a_0(x)\,\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\,\frac{dy}{dx} + a_2(x)\,y = F(x)\ ,$$

donde suponemos conocidas dos soluciones linealmente independientes y_1 , y_2 de la ecuación **homogénea** correspondiente. Entonces la solución general de la homogénea será:

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Sustituyendo los **parámetros** por **funciones**, vamos a buscar funciones v_1 , v_2 , que se determinarán a partir de la ecuación, de forma que la solución de la ecuación **no homogénea** sea:

$$\boxed{y(x) = v_1(x)\cdot y_1(x) + v_2(x)\cdot y_2(x).}$$

Derivando la expresión de $y(x)$ se tiene:

$$y'(x) = v_1'(x) \cdot y_1(x) + v_1(x) \cdot y_1'(x) + v_2'(x) \cdot y_2(x) + v_2(x) \cdot y_2'(x).$$

De las infinitas **soluciones** de la E.D.O. **buscamos la que**, además, **verifica**:

$$v_1'(x) \cdot y_1(x) + v_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \ ,$$

De esta forma la expresión anterior se reduce a:

$$y'(x) = v_1(x) \cdot y_1'(x) + v_2(x) \cdot y_2'(x).$$

Derivando de nuevo:

$$y''(x) = v_1'(x) \cdot y_1'(x) + v_1(x) \cdot y_1''(x) + v_2'(x) \cdot y_2'(x) + v_2(x) \cdot y_2''(x).$$

Sustituyendo en la ecuación y **reordenando** se tiene:

$$v_1(x) \cdot [a_0(x) \cdot y_1''(x) + a_1(x) \cdot y_1'(x) + a_2(x) \cdot y_1(x)] +$$

$$v_2(x) \cdot [a_0(x) \cdot y_2''(x) + a_1(x) \cdot y_2'(x) + a_2(x) \cdot y_2(x)] +$$

$$a_0(x) \cdot [v_1'(x) \cdot y_1'(x) + v_2'(x) \cdot y_2'(x)] = F(x).$$

Como y_1, y_2 son soluciones de la ecuación **homogénea** esto se reduce a:

$$v_1'(x) \cdot y_1'(x) + v_2'(x) \cdot y_2'(x) = \frac{F(x)}{a_0(x)} \ .$$

En resumen, se tiene que v_1', v_2' deben ser **solución del** siguiente **S. E. L.**:

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{F(x)}{a_0(x)} \end{pmatrix},}$$

cuyo determinante es el **wronskiano** $W(y_1, y_2)$, que es **no nulo**.

Por tanto, el sistema tiene **solución única** (v_1', v_2') que, mediante **integración**, nos proporciona v_1 y v_2, **salvo constantes** de integración.

Ejemplo Resolver la ecuación $y'' + y = tg(x)$.

Claramente, la función $tg(x)$ no es de tipo CI, por tanto aplicaremos el método de variación de constantes:

La función complementaria es $y_c(x) = c_1 sen(x) + c_2 cos(x)$.

Buscamos una solución de la forma $y(x) = v_1(x) sen(x) + v_2(x) cos(x)$.

El sistema a resolver queda $\begin{pmatrix} sen(x) & cos(x) \\ cos(x) & -sen(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ tg(x) \end{pmatrix}$,

cuya solución es $v_1'(x) = sen(x), \quad v_2'(x) = -\dfrac{sen^2(x)}{cos(x)}$,

Mediante **integración**, $v_1(x) = -cos(x) + c_1,\ v_2(x) = sen(x) - log \mid sec(x) + tg(x) \mid + c_2$.

Entonces, la solución general es:

$$\boxed{y(x) = -cos(x) \cdot log\,|\,sec(x) + tg(x)\,| + c_1\, sen(x) + c_2\, cos(x)\ .}$$

La ecuación de Cauchy-Euler

La **dificultad** principal en el **método de variación de parámetros** es **obtener la función complementaria** en el caso en que los **coeficientes no son constantes**. Sabemos cómo obtenerla en el caso de coeficientes constantes por medio de la ecuación característica, pero el caso de coeficientes variables no puede ser tratado de la misma forma. **Solamente en algunos casos puede ser obtenida la solución de manera explícita**.

En este apartado veremos un **caso particular** en que, mediante un **cambio de variable**, se pueden **transformar** determinadas ecuaciones de **coeficientes no constantes** en otras de **coeficientes constantes** y, por tanto, se pueden resolver.

Estudiemos la **ecuación de Cauchy-Euler** (o ecuación equidimensional), que es una ecuación de coeficientes variables de la forma:

$$\boxed{a_0\, x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1\, x \frac{dy}{dx} + a_2\, y = F(x),\ x \neq 0.}$$

Para los valores de la variable independiente $x > 0$, la **transformación** $x = e^t,\ t \in \mathbb{R}$ **reduce** la ecuación de **Cauchy-Euler** a una ecuación lineal con **coeficientes constantes**. (Para $x < 0$, el cambio adecuado es $x = -e^t$). Por simplicidad lo veremos en el caso de orden 2, pero es válido para ecuaciones de cualquier orden.

Sea entonces la ecuación de segundo orden

$$a_0\, x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1\, x \frac{dy}{dx} + a_2\, y = F(x), \quad x > 0.$$

Teniendo en cuenta que $\qquad x = e^t \quad \Leftrightarrow \quad t = log(x)$

se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Con lo que, sustituyendo en la ecuación, se obtiene la ecuación lineal de orden 2 y coeficientes constantes:

$$a_0 \frac{d^2y}{dt^2} + (a_1 - a_0) \frac{dy}{dt} + a_2 y = F(e^t) \ ,$$

que puede ser resuelta por los métodos ya vistos.

Observación A partir de aquí hay **dos opciones**:

1. Aplicar el **método CI** para obtener la **solución particular** y, posteriormente, **deshacer** el **cambio de variable** (si $F(e^t)$ es de tipo CI).

2. **Deshacer** el **cambio de variable** y aplicar el **método de variación de constantes** a la ecuación de Cauchy-Euler.

Ejemplo Encontrar la única solución del problema con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^3, \quad x > 0 \\ y(1) = 1, \ \ \dfrac{dy}{dx}(1) = 2. \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variable $x = e^t$ se tiene la ecuación de coeficientes constantes:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}.$$

Como su ecuación característica es $m^2 - 3m + 2 = 0$, con raíces $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, la función complementaria de esta ecuación es:

$$y_c(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Como el segundo miembro es la función de tipo CI e^{3t}, cuyo conjunto CI es $S = \{e^{3t}\}$, la solución particular la buscamos de la forma:

$$y_p(t) = Ae^{3t}.$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación se obtiene que $A = \frac{1}{2}$, por tanto, la solución será:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t}.$$

Deshaciendo el cambio de variable se tiene entonces:

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{2} x^3.$$

Al imponer las condiciones iniciales, se tiene que $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 0$. Así pues,

$$y(x) = \frac{x + x^3}{2}$$