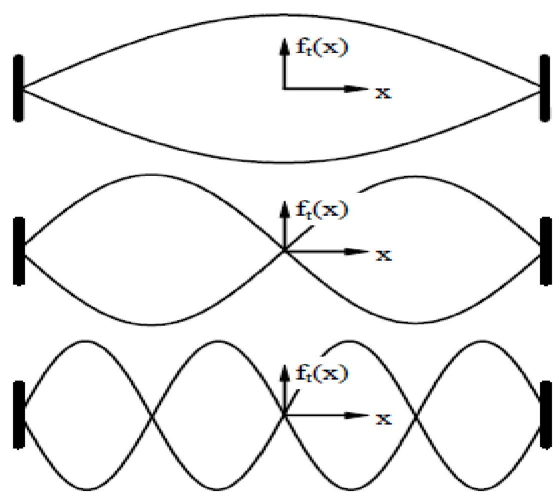
INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE FOURIER

irlamn@uni.edu.pe

INTRODUCCIÓN

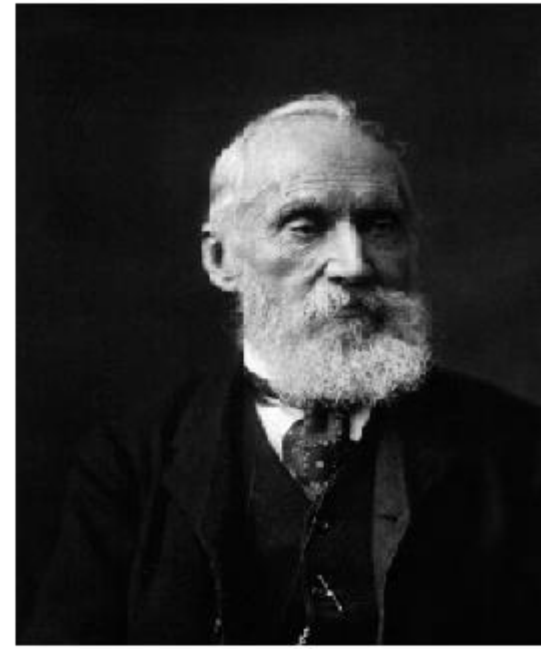
Las series e integrales de Fourier constituyen un tema clásico del análisis matemático. Desde su aparición en el siglo XVIII en el estudio de las vibraciones de una cuerda, las series de Fourier han sido una piedra de toque para el desarrollo de los conceptos básicos del análisis –función, integral, serie, convergencia...–, y la evolución de estos conceptos ha ido abriendo a su vez nuevos rumbos en el análisis de Fourier. Así lo expresa Zygmund en el prólogo de su famoso libro sobre series trigonométricas (1958):

Consideremos las vibraciones normales de una cuerda



Jean-Baptiste Joseph Fourier,
Matemático-Físico, Francés
(1768-1830)

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)
Matemático alemán



William Thomson, Lord Kelvin,
Físico -Matemático de Reino
Unido (1824-1907)

En su trabajo, Fourier afirmaba que cualquier distribución calórica, en este caso se trata de una distribución espacial aunque podría ser temporal, podía descomponerse en una suma de distribuciones espaciales sinusoidales. Esto es lo que se conoce como Serie de Fourier, aunque más tarde generalizaría esta teoría para extenderla a señales aperiódicas, recibiendo el nombre de Transformada de Fourier. Las objeciones de sus coetáneos a esta teoría se centraban en la proposición de que una función discontinua pudiera representarse de esta manera. A pesar de estas trabas muchos investigadores empezaron a generalizar el trabajo de Fourier, extrapolándolo a campos distintos del análisis del calor.

En 1829, Dirichlet estableció las condiciones bajo las cuales la función periódica puede representarse mediante una Serie de Fourier. De forma que todas las magnitudes físicas conocidas poseen características que permiten su análisis mediante las teorías de Fourier.

Una de las múltiples aplicaciones fue, a finales del siglo XIX, la de Lord Kelvin que diseñó una computadora analógica con el fin de predecir el flujo y reflujo de las mareas, en la que se pone de manifiesto la utilidad de las teorías propuestas por Fourier para obtener la periodicidad de ciertos fenómenos a través de su observación en el tiempo.

Series de Fourier

Son herramientas de la matemática básica del Análisis de **Fourier,** que se utilizan para representar a las funciones periódicas a través de la descomposición de la función en una suma infinita de funciones trigonométricas (sinusoidales) mucho más simples es decir, como una combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras.

CONCEPTOS GENERALES

Definición 1.-Función Periódica

$$f(t) = f(t + T)$$

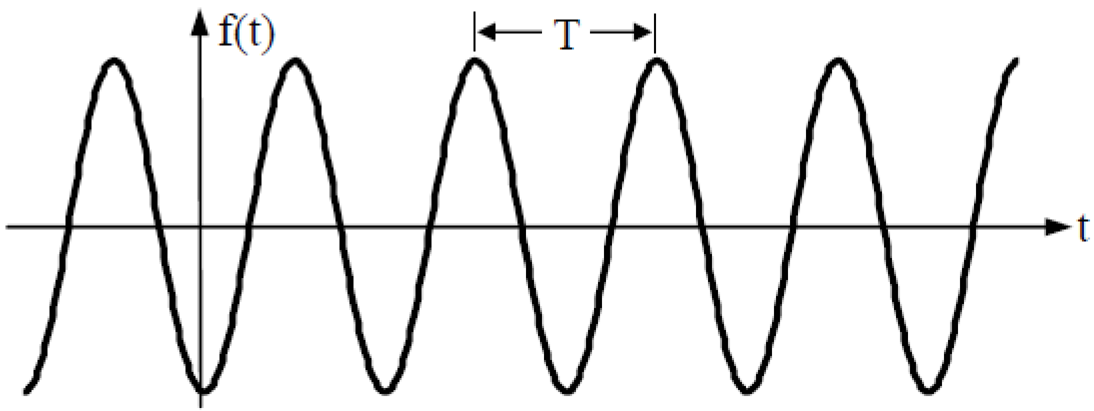


Figura 1: Representación de una onda periódica

Definición 2.-Función Par e impar

f es par si f(-t)=f(t)

f es impar si f(-t)=-f(t)

En una función periódica se define la frecuencia como la inversa de período, o sea, como el número de ciclos por segundo:

$$fr = 1/T$$

Su unidad es el Hercio (Hz). Si se supone que un ciclo equivale a 2π radianes, entonces el número de radianes en un segundo es lo que se conoce como pulsación o frecuencia angular en rad/s

$$\omega_0 = 2\pi/T$$

En una onda periódica se definen el valor de pico máximo F_{p+} y el valor de pico mínimo F_{p-} como sus valores máximo y mínimos en un período, respectivamente. El valor de pico a pico F_{pp} es la diferencia entre ambos:

$$\left.\begin{array}{l} F_{p+} = \max\{f(t)\} \\ F_{p-} = \min\{f(t)\} \end{array}\right\} \rightarrow F_{pp} = F_{p+} - F_{p-}$$

Unos valores típicamente asociados a una función periódica son el de su valor medio:

$$F_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)\,d\tau$$ y su valor eficaz o RMS:

$$F = F_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(\tau)\,d\tau}$$

REPRESENTACION DE ONDAS

Ejemplo de onda mas representativa

$$f(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \theta)$$

siendo A lo que se conoce como amplitud y θ su fase inicial. En este caso el valor de pico (máximo y mínimo) es $F_p = A$ y el valor de pico a pico $F_{pp} = 2A$. Asimismo, el valor medio para esta forma de onda es igual a cero y su valor eficaz $A/\sqrt{2}$.

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES PERIODICAS MEDIANTE SERIES DE FOURIER

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega_0 t+b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\left(n\omega_0 t-\theta_n\right)$$

donde:

- ω_0 (o $fr=\omega_0/2\pi$) es la frecuencia de la función periódica y recibe el nombre de frecuencia fundamental
- a_n, b_n, C_n y θ_n son los coeficientes de la Serie de Fourier que definen las senoides cuya frecuencia es múltiplo de la fundamental

La componente de la Serie de Fourier cuya frecuencia coincide con la fundamental (n=1) recibe el nombre de componente fundamental: $a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \operatorname{sen} \omega_0 t$ o $C_1 \cos(\omega_0 t - \theta_1)$. Al resto de las componentes se les denomina componentes armónicas, así el armónico de orden n o enésimo sería aquel cuya frecuencia es n veces la fundamental: $a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t$ o $C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$. Igualmente, la frecuencia de las componentes armónicas recibe a su vez el nombre de frecuencia armónica. En el caso de C_n y θ_n, éstas se suelen llamar además amplitud armónica y ángulo de fase.

Los valores de $a_0/2$ y C_0 representan el valor medio de la función f(t) a lo largo de un período por lo que reciben el nombre de componente continua.

Para el cálculo de los coeficientes de Fourier se emplean las integrales:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_T f(t)dt;\ \ a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(n\omega_0 t)dt;\ \ b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)dt$$

$$C_0 = \frac{a_0}{2};\quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2};\quad \theta_n = \tan^{-1}(b_n/a_n)$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}C'_n\cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

donde cada coeficiente C'_n representa el valor eficaz del armónico de orden n, es decir:

$$C'_n = C_n/\sqrt{2}$$

La energía representada como una función f(t) en un intervalo de tiempo (a, b) se puede expresar por:

$$E = \int_a^b \left[f(t) \right]^2 dt$$

Esta ecuación integral expresa que si f(t) es la corriente que circula por una resistencia de 1Ω, entonces E es la energía disipada en esa resistencia en el intervalo de tiempo (a, b).

En el caso de una función periódica se puede hablar de energía media por período o potencia media P cuya expresión es:

$$P = \frac{1}{T} \int_T \left[f(t) \right]^2 dt$$

donde T es el período.

Nota: Recordar para operar en la búsqueda de la serie de Fourier:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha\pm\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Ejemplo

Determinar los coeficientes de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -\pi \leq t < 0, \\ \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq t < \pi. \end{cases} \qquad \text{y} \qquad f(t + 2\pi) = f(t)\,.$$

Las gráficas de las primeras sumas parciales $\{S_k\}_{k=1}^{10}$

y $\{S_k\}_{k=1}^{100}$, de la Serie

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

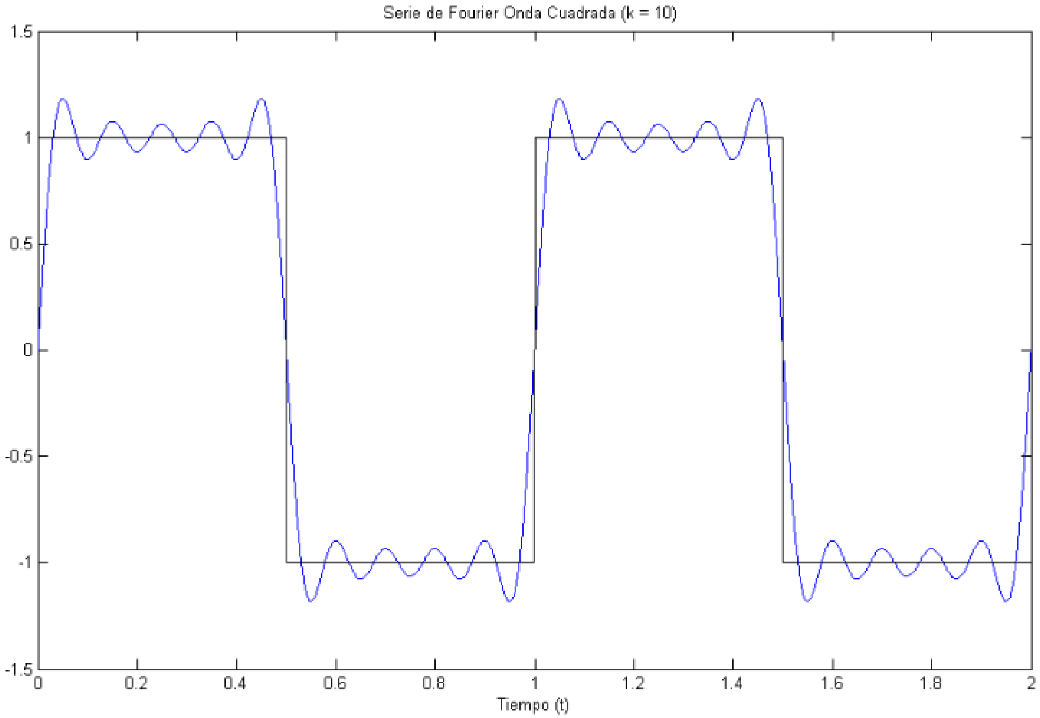
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\ dt \text{ para todo } n \geq 0$$

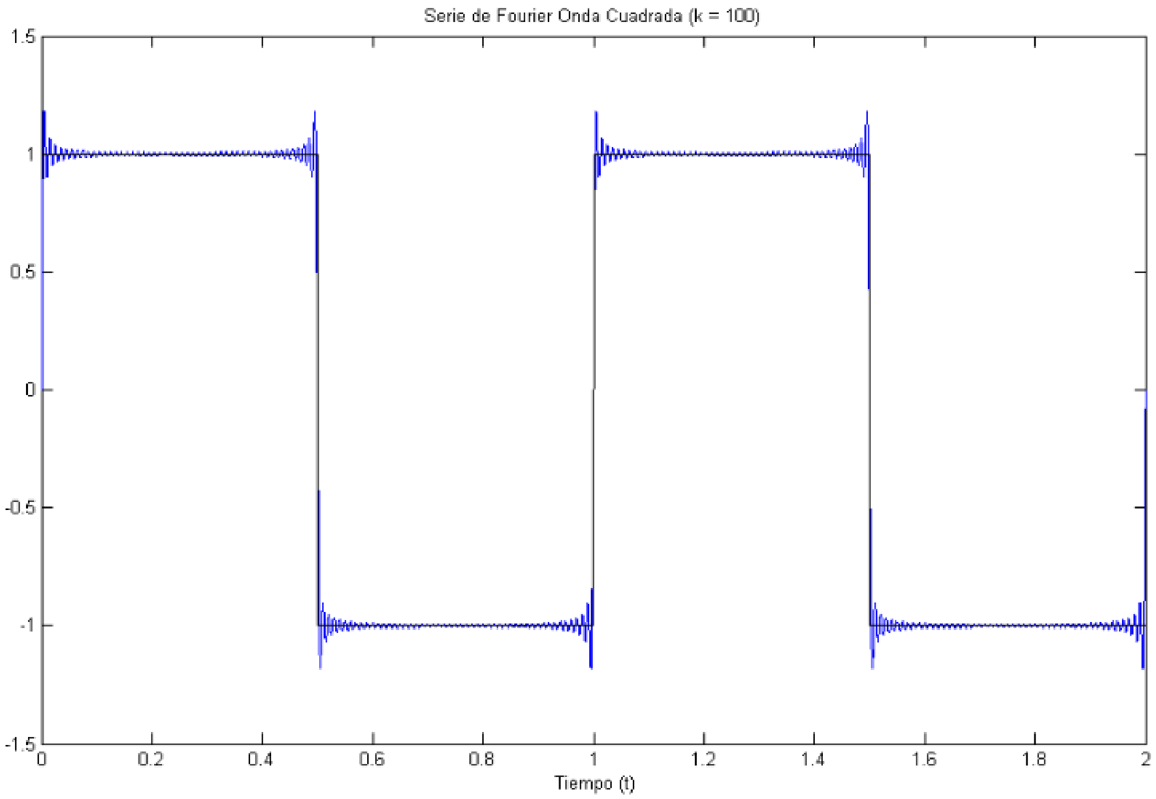
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\ dt \text{ para todo } n > 0.$$

Gráfica para k=10

$$S_K = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\mathbf{k}} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen}(2n+1)x$$



Gráfica para k=100



Convergencia Puntual

$$f(t) \sim S(t)$$

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right).$$

Teorema 1 ***Condición suficiente de convergencia puntual de una serie de Fourier***

Sea $f(t)$ *una función* 2π*-periódica , continua a trozos en el intervalo* $[-\pi, \pi[$ *y que tiene derivada por la izquierda y por la derecha en todo punto de dicho intervalo. Entonces la serie de Fourier de* $f(t)$ *converge y su suma es*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

Serie de Fourier para una función de periodo $2L$

En muchas ocasiones es deseable adaptar la forma de una serie de Fourier a funciones periódicas de periodo $p = 2L > 0$ en el intervalo $[-L, L[$. Esto se consigue gracias a un cambio de variable.

Sea $f(t)$ una función periódica de periodo $2L$. Para desarrollar en serie de Fourier en $[-L, L[$ hacemos un cambio de variable, poniendo

$$\frac{t}{x} = \frac{L}{\pi},$$

entonces

$$f(t) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right)$$

Si definimos

$$g(x) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right)$$

La función g es una función periódica de x de periodo 2π ya que

$$g(x+2\pi) = f\left(\frac{L}{\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{\pi}x + 2L\right) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right) = g(x).$$

Entonces el desarrollo en serie de Fourier de la función $g(x)$ es

$$g(x) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

con coeficientes de Fourier

$$\boxed{\begin{array}{l} a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\ dx \text{ para todo } n \geq 0. \\[2ex] b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\ dx \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{array}}$$

entonces, como $x = \frac{\pi}{L}t$ sustituyendo se obtiene

$$g\left(\frac{\pi}{L}t\right) = f\left(\frac{L}{\pi}\frac{\pi}{L}t\right) = f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right),$$

y

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\, dt \text{ para todo } n \geq 0. \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\, dt \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}}$$

Generalmente se escribe $w_0 = \frac{\pi}{L}$, y por lo tanto,

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)\right),$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(nw_0 t)\ dt \text{ para todo } n \geq 0.$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\sin(nw_0 t)\ dt \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio

Determinar la serie de Fourier de la función ***Onda cuadrada periódica***

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad -2 < t < -1 \\ k & si \quad -1 < t < 1 \\ 0 & si \quad 1 < t < 2 \end{cases} \qquad con\ p = 2L = 4,\ L = 2.$$

Teorema 2 . ***Serie de Fourier de funciones pares e impares***
Sea f una función $2L$-periódica integrable de Riemann en $[-L, L]$.

(i) Si f es par la serie de Fourier de f es una serie de Fourier de cosenos

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) t$$

donde los coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ se determinan a partir de la función f según las fórmulas

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos(nt) \; dt \; para \; todo \; n \geq 0$$

(ii) Si f es impar la serie de Fourier de f es una serie de Fourier de senos

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) t$$

cuyos coeficientes $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ se determinan a partir de la función f según las fórmulas

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) t \; dt \; para \; todo \; n = 1, 2, \ldots$$

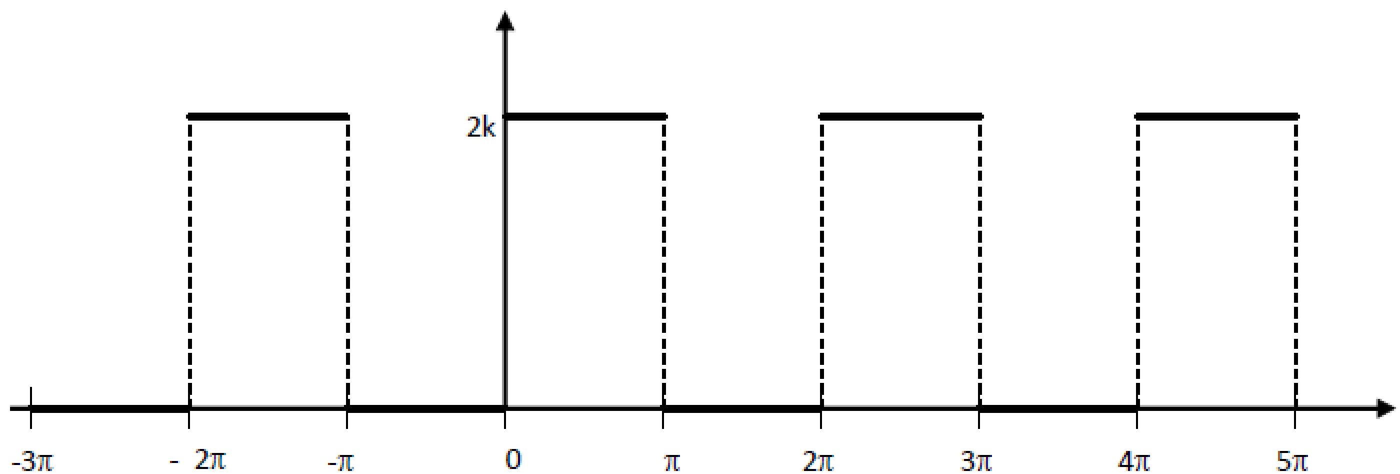
Teorema 3. Serie de una ***Suma de funciones***

Los coeficientes de Fourier de una suma $f_1 + f_2$ *son las sumas de los coeficientes de Fourier de* f_1 *y* f_2 *correspondientes.*

Los coeficientes de Fourier de αf *son el producto de* α *y los coeficientes de Fourier de* f *correspondientes.*

Ejemplo: ***Pulso rectangular***

La función $f^*(t)$ *de la siguiente gráfica*



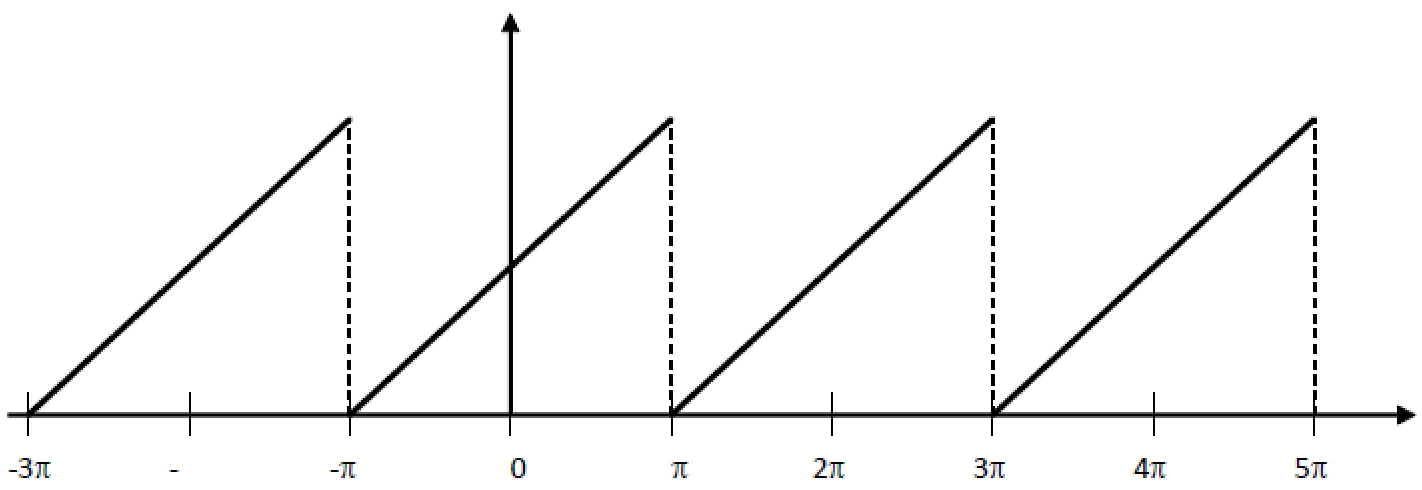
es:

$$f^*(t) = k + \frac{4k}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + ...\right).$$

Ejercicio

Determinar la serie de Fourier de la función

$$g(t) = t + \pi \ \ si \ -\pi \leq t < \pi \qquad y \qquad f(t+2\pi) = f(t).$$



EXERCISES

A) In Exercises 1–6, determine if $f(x)$ is piecewise continuous and if it is piecewise smooth (assume that $L > 0$). (If f is actually continuous or smooth, say so.)

1. $f(x) = |x|$, on $-L \leq x \leq L$
2. $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{if } -L \leq x < 0, \\ x^2, & \text{if } 0 \leq x \leq L \end{cases}$
3. $f(x) = x^{2/3}$, on $-L \leq x \leq L$
4. $f(x) = x^{4/3}$, on $-L \leq x \leq L$
5. $f(x) = \begin{cases} \tan x, & \text{if } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{if } x = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$
6. $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{if } x = -3, \\ x, & \text{if } -3 < x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{if } 1 < x \leq 3 \end{cases}$

7. $f(0) = 0$ and, for $x \neq 0, -L \leq x \leq L$,
   a) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$
   b) $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$
   c) $f(x) = x^3\sin\frac{1}{x}$

7. $f(0)=0$ and, for $x \neq 0, -L \leq x \leq L$,

   a) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$
   b) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$
   c) $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$

B) In Exercises 8–13, sketch three periods of the graph of the Fourier series of $f(x)$.

8. $f(x) = x^2$ on $-2 \leq x \leq 2$

9. $f(x) = x + 1$ on $-2 \leq x \leq 2$

10. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } -3 \leq x < 0, \\ 1 - x, & \text{if } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

11. $f(x) = |3 - x|$ on $-1 \leq x \leq 1$

12. $f(x) = \begin{cases} 2 + x, & \text{if } -3 \leq x < -1, \\ 4, & \text{if } -1 \leq x < 2, \\ 6 - x, & \text{if } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x = -1, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \\ 2, & \text{otherwise} \end{cases}$
    on $-1 \leq x \leq 1$

- https://ecuaciondiferencialejerciciosresueltos.com/funciones-pares-e-impares
- https://es.wikipedia.org/wiki/Fen%C3%B3meno_de_Gibbs
- https://es.wikipedia.org/wiki/Identidad_de_Parseval
- https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Fourier
- Transformada de Fourier y la EDOS