Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Análisis Convexo - CM3E2]
[Prof: Jonathan Munguia] UNI, 11 de junio de 2021

Quinta Práctica Dirigida

1. Sea f una función convexa propia. Probar que f_∞ es la menor función h tal que
$$f(z) \leq f(x) + h(z - x) \quad \forall z, \forall x.$$

2. Sea $f(x) = \ln(e^{x_1} + \cdots + e^{x_n})$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $n > 1$. Hallar f_∞.

3. Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío de $\mathbb{R}^n$. Considere el problema de optimización
$$\min_{x \in C} f(x),$$
donde f es fuertemente convexa y sci. Demuestre que existe una única solución optimal.

4. Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío y $x \notin C$. Probar que existe $a \neq 0$ tal que
$$\sup_{y \in C} \langle a, y \rangle < \langle a, x \rangle.$$

5. Sea K un cono convexo cerrado no vacío y $x \notin K$. Si existe $a \neq 0$ tal que $\sup\limits_{y \in K} \langle a, y \rangle > 0$, entonces
$$\forall y \in K : \quad \langle a, y \rangle \leq 0.$$

6. Sean C_1, C_2 subconjuntos convexos disjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^n$. Si C_1 es compacto y C_2 es cerrado, entonces existen $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que
$$\forall x \in C_1, \forall y \in C_2 : \quad \langle a, x \rangle < b < \langle a, y \rangle.$$

7. Sea C es convexo no vacío. Probar que
$$\sup_{x \in \overline{C}} \langle a, x \rangle = \sup_{x \in \operatorname{ri} C} \langle a, x \rangle.$$

8. Sea C un subconjunto convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$. Si $0 \notin C$ y $\dim(\operatorname{aff} C) < n$ entonces
$$\forall x \in C : \quad \langle a, x \rangle > 0.$$

9. Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un cono probar que
$$K^\circ = \big\{ s \in \mathbb{R}^n : \langle s, x \rangle \leq 1 \quad \forall x \in K \big\}.$$

10. Sea $0 \in K \subset \mathbb{R}^n$. Probar que
$$K^\circ = \big\{ s \in \mathbb{R}^n : \langle s, x \rangle \leq 1 \quad \forall x \in K \big\}.$$

11. Si K es un cono entonces $(\operatorname{co} K)^\circ = K^\circ$.

12. Sea K un cono convexo. Probar que su polar K° es acotada si y solo si 0 es un punto interior de K.

13. Sea K un cono convexo no vacío. Probar que $K^{\circ\circ} = (\overline{K})^{\circ\circ} = \overline{K}$.

14. Dado $K = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\|_p \leq t\}$. Probar que $K^* = \{(u, s) : \|u\|_q \leq s\}$. Donde p y q son conjugados.