Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Análisis Convexo - CM3E2]
[Prof. Jonathan Munguia] UNI, 7 de mayo de 2021

Tercera Práctica Dirigida

1. Si X tiene interior no vacío en $\mathbb{R}^n$. Probar que $\dim(X) = n$.

2. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ con interior no vacío y $A \subset \operatorname{int}(X)$. ¿Puede suceder que el $\operatorname{ri}(A)$ sea no vacío a pesar de que el $\operatorname{int}(A)$ sea vacío?

3. Dé un ejemplo de un conjunto cerrado cuya cápsula convexa no lo sea.

4. Dado $C \subset \mathbb{R}^d$ convexo. Probar que

   a) $\operatorname{rb} C = \operatorname{rb}(\overline{C}) = \operatorname{rb}(\operatorname{ri} C)$.

   b) $\operatorname{aff} C = \operatorname{aff}(\overline{C}) = \operatorname{aff}(\operatorname{ri}(C)$.

   Donde rb denota la frontera relativa al $\operatorname{aff} C$ y se calcula como $\operatorname{rb} C = \overline{C} \setminus \operatorname{ri} C$.

5. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo y $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una transformación afín. Mostrar que $\operatorname{ri} \varphi(C) = \varphi(\operatorname{ri} C)$.

6. Sean C, D convexos en $\mathbb{R}^d$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostrar que

   a) $\operatorname{ri}(\lambda C) = \lambda \operatorname{ri} C$.

   b) $\operatorname{ri}(C + D) = \operatorname{ri} C + \operatorname{ri} D$.

7. Sea $(C_i)_{i \in I}$ una familia de subconjuntos convexos en $\mathbb{R}^d$ tal que

   $$\bigcap_{i \in I} \operatorname{ri} C_i \neq \emptyset.$$

   Entonces,

   $$\overline{\bigcap_{i \in I} C_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{C_i}.$$

   ¿Qué pasa si no se cumple la hipótesis?

8. Sea $(C_i)_{i=1}^n$ una familia finita de subconjuntos convexos en $\mathbb{R}^d$ tal que

   $$\bigcap_{i=1}^n \operatorname{ri} C_i \neq \emptyset.$$

   Entonces,

   $$\operatorname{ri} \bigcap_{i=1}^n C_i = \bigcap_{i=1}^n \operatorname{ri} C_i.$$

   ¿Qué pasa si no se cumple la hipótesis?

9. Si C es convexo y M es un subespacio afín el cual intersecta al $\operatorname{ri} C$. Entonces

   a) $\operatorname{ri}(M \cap C) = M \cap \operatorname{ri} C$.

   b) $\overline{M \cap C} = M \cap \overline{C}$.

10. Dar un ejemplo de un cono convexo que no es cerrado.

11. Sea $C \subset \mathbb{R}^d$ convexo cerrado y $x \in C$. Pruebe que son equivalentes:

    a) x es punto extremo de C.

b) $\{x\}$ es una cara de C.

c) $C \setminus \{x\}$ es convexo.

12. Considere el politopo $P = \text{co}(x_1, \cdots, x_p)$. Mostrar que si x es un punto extremo de P, entonces $x \in \{x_1, \cdots, x_p\}$. ¿Es cada x_j necesariamente un punto extremo?

13. Considere un cono poliedral $C = \{x : Ax \leq 0\}$ donde $A, 0$ son matrices de $m \times n$. Mostrar que 0 es el único punto extremo de C.

14. Sea F una cara de un conjunto convexo C. Mostrar que cada punto extremo de F es también un punto extremo de C.

15. Encontrar todas las caras de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$.

16. Considere el conjunto $C = B + [0,1] \times \{0\}$ donde B es la bola unitaria en $\mathbb{R}^2$. Encontrar un punto sobre la frontera de C el cual es una cara de C pero no es cara expuesta.

17. Sea $P \subset \mathbb{R}^2$ un poliedro el cual es el conjunto solución de

$$\begin{array}{cl} x - y & \leq 0; \\ -x + y & \leq 1; \\ 2y & \geq 5; \\ 8x - y & \leq 16; \\ x + y & \geq 4. \end{array}$$

Encontrar todos los puntos extremos de P.