10. Halle la solución general por serie de potencias de la siguiente EDO en el intervalo $(0, +\infty)$

$$2xy'' + 5y' + xy = 0\,,$$

demuestre que las raíces del polinomio indicial no defieren en un entero. (Sug. Halle dos soluciones en serie linealmente independientes por el método de Frobenius alrededor del punto singular regular $x_0 = 0$)

$\cdot x^2$

Solución: $x = x_0 = 0$ $\quad (x - x_0)^2 = x^2$ $\quad x = 0$

$y'' + \frac{5}{2x}y' + \frac{1}{2}y = 0 \to xy'' - \frac{5}{2}y' + \frac{1}{2}yx = 0$

$\to x^2y'' - \frac{5}{2}xy' + \frac{1}{2}x^2y = 0$

analítica en $x=0$

a) Llevamos la ecuación a su forma reducida:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad P(x) = \frac{5}{2x}, \; Q(x) = \frac{1}{2}.$$

Claramente $x_0 = 0$ es singular y como las siguientes funciones

$p(0) = 0$ $\quad q(0) = 0$

$$p(x) = xP(x) = \frac{5}{2}, \quad q(x) = x^2Q(x) = \frac{x^2}{2},$$

son analíticas alrededor de $x_0 = 0$, entonces $x_0 = 0$ es un punto singular regular, se sabe que el desarrollo en series tendrá potencias fraccionarias o negativas de x, por lo que es natural considerar las soluciones de Frobenius de la forma

$$y(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^{n+r},$$

$y(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$

$y(x).x^r$

donde r se determina al igualar a cero el coeficiente total de la potencia mínima de x, esta ecuación se conoce como **ecuación indicial**

$$\boxed{r(r-1) + p(0)r + q(0) = 0.}$$

$r(r-1) + \frac{5}{2}r$

$r(r-1+\frac{5}{2})$

$r(r+\frac{3}{2})$

De aquí obtenemos dos raíces que si son reales tal que $r_1 \geq r_2$ y $r_1 - r_2$ no es entero, entonces por el **Teorema de Frobenius** existen dos soluciones linealmente independientes de la EDO, de la forma

$\sum a_n x^{n+r_1}$

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{n\geq 0} a_n x^n \quad , \quad y_2 = x^{r_2}\sum_{n\geq 0} b_n x^n.$$

b) Reemplazando la solución de Frobenius en la EDO, se obtiene

$$2xy'' + 5y' + xy = 2x\sum_{n\geq 0}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + 5\sum_{n\geq 0}(n+r)c_n x^{n+r-1} + x\sum_{n\geq 0} c_n x^{n+r}$$

$$= x^r\left[\sum_{n\geq 0}(n+r)(2n+2r+3)c_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0} c_n x^{n+1}\right]$$

$$= x^r\left[r(2r+3)c_0x^{-1} + (r+1)(2r+5)c_1x^0 + \sum_{n\geq 2}(n+r)(2n+2r+3)c_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0} c_n x^{n+1}\right]$$

$$= x^r\left[r(2r+3)c_0x^{-1} + (r+1)(2r+5)c_1x^0 + \sum_{n\geq 0}[(n+r+2)(2n+2r+7)c_{n+2} + c_n]x^{n-1}\right] = 0.$$

Como $c_0 \neq 0$, se obtiene la ecuación indicial $r(2r+3) = 0$ y las raíces son

$$r_1 = 0\,, \quad r_2 = -\frac{3}{2},$$

cuya diferencia no es entera. Claramente del segundo sumando, se obtiene que $c_1 = 0$ y de la sumatoria

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+r+2)(2n+2r+7)}\,, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

De lo cual se deduce que los coeficientes impares son nulos ya que $c_1 = 0$.
Analizamos el caso $r_1 = 0$

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(2n+7)}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

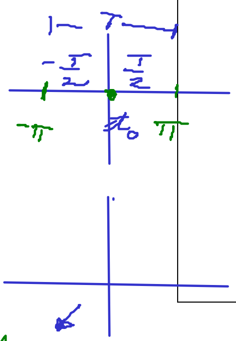
Multiplicando los coeficientes pares y simplificando, se obtiene

$$c_2 \times c_4 \times c_6 \times \cdots \times c_{2n} = \frac{-a_0}{2 \cdot 7} \times \frac{-a_2}{4 \cdot 11} \times \frac{-a_4}{6 \cdot 15} \times \frac{-a_{2n-2}}{(2n)(4n+3)}$$

$$c_{2n} = \frac{a_0(-1)^n}{2^n n! \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdots (4n+3)},$$

Así, se obtiene la solución para $a_0 = 1$

$$y_1(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n! \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdots (4n+3)},$$



de manera similar se obtiene la otra solución para $r_2 = -3/2$

$$y_2(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n! \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}.$$

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos nx + b_n \sin nx\}$

Luego, por el Teorema de Frobenius, se obtiene la solución general

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

$t_0 = \frac{\pi}{2}$ $\quad T = \pi$

$f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$

11. a) Sea $f(x) = x + x^3$ para $x \in [0, \pi]$. ¿Cuáles coeficientes de la serie de Fourier de f son cero? ¿Cúales son no nulos? ¿Por qué?

$f: [t_0 - \frac{T}{2}, t_0 + \frac{T}{2}] \to \mathbb{R}$

b) Sea $g(x) = \cos(x^5) + \sin(x^2)$. ¿Cuáles coeficientes de la serie de Fourier de g son cero? ¿Cúales son no nulos? ¿Por qué?

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T} t\right)\right]$

Solución:

$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f$ $\qquad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f \cos\left(\frac{2n\pi}{T} t\right)$

a) $f(x)$ es una función impar. En efecto

$$f(-x) = -x + (-x)^3 = -x - x^3 = -(x + x^3) = -f(x),$$

por lo tanto $a_n = 0$ y b_n puede ser distinto de cero.

$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f \sin\left(\frac{2n\pi}{T} t\right)$

a) $g(x)$ es una función par. En efecto,

$$g(-x) = \cos((-x)^5) + \sin((-x)^2) = g(x),$$

por lo tanto $b_n = 0$ y a_n puede ser distinto de cero.

12. Suponga que $f(x)$ es definida para $x \in [0, 7]$, y $f(x) = 2e^{-4x}$. Otra función, $F(x)$, dada por

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cos(\pi n x/7), \quad a_n = \frac{2}{7} \int_0^7 2e^{-4x} \cos(\pi n x/7)\, dx.$$

Hallar $F(3)$ y $F(-2)$.

Solución: La función $F(x)$ es la expansión coseno de Fourier de f. En el dominio de f, es decir, para $x \in [0, 7]$, tenemos que $F(x) = f(x)$. Por lo tanto, como $3 \in [0, 7]$, entonces $F(3) = f(3) = 2e^{-12}$. Para los valores negativos de x, la serie del coseno converge a la extensión par de $f(x)$, la cual es $2e^{-4|x|}$. Por lo tanto, $F(-2) = f(2) = 2e^{-8}$.