Dieciseisava sesión

Análisis Convexos - CM3E2

Jonathan Munguia[1]

[1]Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

10 de junio de 2021

Outline

Definición 1 (Cono polar)

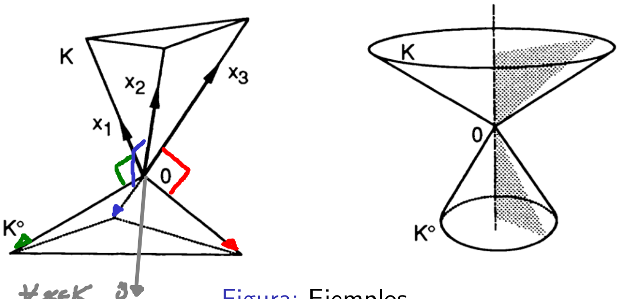
Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ no vacío. El cono polar de K, denotado por K°, es definido como

$$K^\circ := \{s \in \mathbb{R}^n : \langle x, s\rangle \leq 0 \text{ para todo } x \in K\}$$
$$= \bigcap_{x \in K} \underbrace{\{s \in \mathbb{R}^n : \langle x, s\rangle \leq 0\}}_{\text{Semiespacios}}.$$

Observación 1

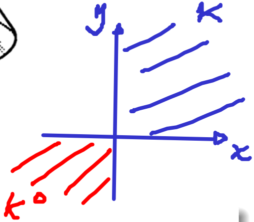
i) Si K es un subespacio, entonces $K^\circ = K^\perp$, en otras palabras la polaridad generaliza la ortogonalidad.

ii) K° es un cono convexo cerrado conteniendo el origen, pues es la intersección de conos convexos cerrados (semiespacios homogéneos cerrados).



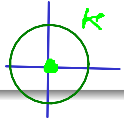
$\langle y, x\rangle \leq 0 \quad \forall x \in K \quad y$

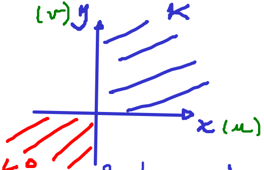
Figura: Ejemplos



Ejemplos

- La polar de $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ es $\mathbb{R}^2_{\leq 0}$
- La polar de bola unitaria $B(0,1)$ es el origen.





$K = \mathbb{R}^2_{\geq 0} = \{ (x,y) \mid x \geq 0 , y \geq 0 \}$ K^0

$K^0 = \{ (u,v) \mid \langle (u,v), (x,y) \rangle \leq 0 \quad \forall x \geq 0, \forall y \geq 0 \}$

$= \{ (u,v) \mid ux + vy \leq 0 \text{ — — } \}$

- $(u<0 \wedge v=0) \vee (u=0 \wedge v<0)$ ✓
- $(u<0 \wedge v<0)$ ✓
- $(u<0 \wedge \underline{v>0}) \vee (u>0 \wedge v<0) \Rightarrow \left\langle (u,v), \left(\frac{-v^2}{u}, 2v \right) \right\rangle = -v^2 + 2v^2 = v^2 > 0$ ✗

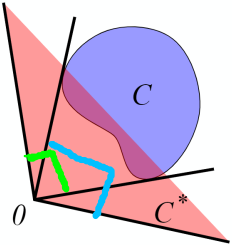
$x = -\frac{v^2}{u} \quad y = 2v$

- $u>0 \wedge v>0 \Rightarrow ux + vy \geq 0 \quad \forall x \geq 0 \quad \forall y \geq 0$ ✗

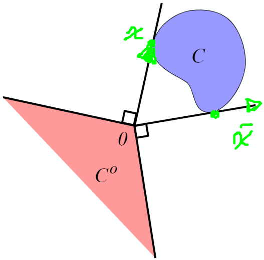
Definición 2 (Cono dual)

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ no vacío. El cono dual de K, denotado por K^*, es definido como

$$K^* := \{s \in \mathbb{R}^n : \langle x, s\rangle \geq 0 \text{ para todo } x \in K\}$$



Cono dual C^*



Cono polar C°

$x \in \mathbb{R}^n$

$\|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p}$ $\|u\|_* = \sup\{\langle u, x\rangle \mid \|x\| \leq 1\}$

$\|x\|_q$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p, q \in \mathbb{N}$

Observación 2

El cono dual y el cono polar son simétricos entre sí con respecto al origen, es decir, dado $K \subset \mathbb{R}^n$, se tiene que $K^* = -K^\circ$.

Ejemplo 1

El dual del cono $K = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq t\}$ asociado con la norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$ es el cono definido por la norma dual,

$$K^* = \{(u, s) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|u\|_* \leq s\},$$

donde la norma dual es dada por $\|u\|_* = \sup\{\langle u, x\rangle : \|x\| \leq 1\}$.

$K^* = \{(u, s) \mid \underbrace{\langle (u, s), (x, t)\rangle}_{\langle u, x\rangle + st} \geq 0 \quad \forall \|x\| \leq t\}$ PDQ $\|u\|_* \leq 1$

Propiedades

1) $x^* \in K_2^\circ \Rightarrow \forall x \in K_2 : \langle x^*, x \rangle \leq 0$

En particular $x \in K_1$ $\Rightarrow \langle x^*, x \rangle \leq 0 \ \forall x \in K_1$

$\Rightarrow x^* \in K_1^\circ$

1) $K_1 \subset K_2 \Longrightarrow K_2^\circ \subset K_1^\circ$.
2) $(\overline{K})^\circ = K^\circ$.
3) $(\text{cono}(K))^\circ = K^\circ$.
4) $K \subset K^{\circ\circ}$.

2) $K \subset \overline{K} \Rightarrow \overline{K}^\circ \subset K^\circ$

Veamos q' $K^\circ \subset \overline{K}^\circ \Rightarrow \langle y, x \rangle \leq 0 \ \forall x \in \overline{K}$

$x^* \in K^\circ \Rightarrow \langle x^*, x \rangle \leq 0 \ \forall x \in K$

$\langle x^*, \bar{x} \rangle = ¿?$

$\bar{x} \in \overline{K} \Rightarrow \exists (x_n) \subset K$ tq $x_n \to \bar{x}$

Sabemos $\langle x^*, x_n \rangle \leq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$n \to \infty \downarrow$

$\langle x^*, \bar{x} \rangle \leq 0 \ \forall \bar{x} \in \overline{K}$

$\Rightarrow x^* \in \overline{K}^\circ$

3) $(\text{Cono}(K))^{\circ} = K^{\circ}$ $\qquad$ $\text{Cono}\,K = \{tx,\ t>0\}$

$K \subset \text{cono}(K) \Rightarrow \text{Cono}(K)^{\circ} \subset K^{\circ}$

$\supset$ ¿?

$x^* \in K^{\circ} \Rightarrow \langle x^*, x \rangle \leq 0 \quad \forall x \in K$

Cono K

$t>0 \Rightarrow \langle x^*, tx \rangle \leq 0 \Rightarrow x^* \in \underline{\text{Cono}(K)^{\circ}}$

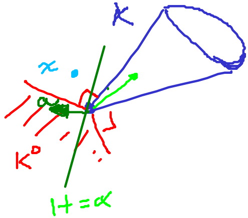
4) $K \subset K^{\circ\circ} = (K^{\circ})^{\circ}$

$x \in K,\ x^* \in K^{\circ} \Rightarrow \langle x, x^* \rangle \leq 0 \quad \ldots (**)$

$x \in K, \quad \langle x, x^* \rangle = $ ¿? $\quad x^* \in K^{\circ}$

$\langle x, x^* \rangle \overset{(**)}{\leq} 0 \quad \forall x^* \in K^{\circ} \Rightarrow x \in (K^{\circ})^{\circ}$

$K \subset K^{\circ\circ}$

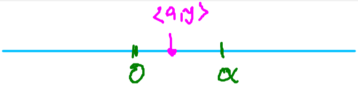


Proposición 1

Si K es un cono convexo cerrado no vacío, entonces $K^{\circ\circ} = K$.

Demostración

Ver Proposición 3.1 de [2].



Supongamos $\exists x \in K^{\circ\circ} \wedge x \notin K$ (convexo cerrado)

$\Rightarrow \exists a \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$ tq $\forall y \in K$: $\langle a,y\rangle \leq \alpha < \langle a,x\rangle$ — Teorema 2 de la sesión 8

$\langle a,y\rangle \leq \sup_{y \in K} \langle a,y\rangle = \alpha \geq 0$ $(0 \in K)$ (K cono cerrado)

$\Rightarrow \langle a,y\rangle \leq 0 \quad \forall y \in K$

$\Rightarrow a \in K^{\circ}$

pero $x \in K^{\circ\circ} \overset{(**)}{\Rightarrow} \langle x,a\rangle \leq 0 \quad \langle a,x\rangle \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$.

$T \subset K^{\circ\circ}$

cono convexo cerrado más pequeño que contiene a K

$K \subset T \Rightarrow T^{\circ} \subset K^{\circ}$

$\Rightarrow K^{\circ\circ} \subset T^{\circ\circ} = T$

$\Rightarrow K^{\circ\circ} \subset T \subset K^{\circ\circ}$

$\Rightarrow T = K^{\circ\circ}$

Corolario 1

$K^{\circ\circ}$ es el cono convexo cerrado más pequeño que contiene a K.

Demostración

Ver Corolario 3.1 de [2].

Ej: $K^{\circ\circ} = (\overline{K})^{\circ\circ} = \overline{K}$

Definición 3 (Direcciones tangente)

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ no vacío. Se dice que $d \subset \mathbb{R}^n$ es una dirección tangente a S en $x \in S$ cuando existen sucesiones $(x_k) \subset S$ y $(t_k) \subset \mathbb{R}$ tal que, cuando $k \to +\infty$,

$$x_k \to x\,, \quad t_k \downarrow 0\,, \quad \frac{x_k - x}{t_k} \to d\,.$$

El conjunto de todas estas direcciones es llamado cono tangente o cono de Boulingand a S en $x \in S$, denotado por $T_S(x)$.
Ver Definición 5.1.1 pag 62 de [1].

Proposición 2

El cono tangente a un conjunto convexo cerrado C en $x \in C$ es la clausura del cono generado por $C \setminus \{x\}$.

Demostración

Ver Proposición 5.2.1 pag 65 de [1] o Definición 3.15 pag 104 de [3].

Definición 4 (Cono normal)

La dirección $s \in \mathbb{R}^n$ se dice normal a C en $x \in C$ cuando

$$\langle s, y - x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C.$$

El conjunto de tales direcciones se llama cono normal a C en x, denotado por $N_C(x)$.
Ver Definición 2.9 pag 42 de [3] o Definición 5.2.3 pag 65 de [1].

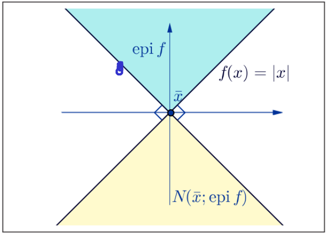


Figura: Epígrafo de la función valor absoluto y su cono normal en el origen.

Proposición 3

El cono normal es el polar del cono tangente.

Demostración

Ver Proposición 5.2.4 pag 66 de [1].

Proposición 4 Tangente normal.

El cono ~~normal~~ es el polar del cono ~~tangente~~.

Demostración

Ver Corollary 5.2.5 pag 66 de [1].

Referencias bibliográficas

1. Jean-Baptiste Hiriart-Urruty and Claude Lemarechal. Fundamentals of Convex Analysis, Springer, 1st ed. 2001.
2. Jean-Pierre Crouzeix and Eladio Ocaña. Análisis convexo. Fondo Editorial EDUNI, 2018.
3. Boris S. Mordukhovich and Nguyen Mau Nam. An Easy Path to Convex Analysis and Applications. Morgan & Claypool Publishers series, 2014.

FIN