

Semana 3: Sesión2

irlamn@uni.edu.pe

Sesión 1

- Problemas de valor inicial con EDOS de 2do Orden
- Existencia y unicidad de soluciones
- Técnicas de resolución de las EDO de segundo orden

Sesión 2

- Ecuaciones homogéneas de segundo orden.
- Dimensión del espacio de soluciones.
- El Wronskiano. Fórmula de Abel.

INTRODUCCIÓN

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$i) y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

$$ii) y'' = f(t, y, y')$$

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

$$X'(t) = AX(t)$$

Si F es lineal

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + g_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + g_2(x) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + g_n(x) \end{cases}$$

siendo $a_{ij}(x)$ y $g_i(x)$, $1 \leq i, j \leq n$, funciones continuas en un intervalo (a, b) . Si $g_i(x) \equiv 0$, $1 \leq i \leq n$, el sistema se denomina homogéneo. La equivalente ecuación matricial es $y' = A(x)y + g(x)$ donde $A(x) = (a_{ij}(x))$ y $g(x) = (g_i(x))$.

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_N), \\ \dots\dots\dots, \\ y_N' = f_N(x, y_1, \dots, y_N), \\ y_1(x_0) = y_{1_0}, \dots\dots\dots, y_N(x_0) = y_{N_0}. \end{cases}$$

Como ya dijimos en el Tema 1, dado $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío tal que $x_0 \in I$, una solución del problema (PC) en el intervalo I , es cualquier función $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^N$, tal que :

- (ii) $(x, \varphi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in I$,
- (iii) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, para todo $x \in I$,
- (iv) $\varphi(x_0) = y_0$.

A partir de ahora, vamos a suponer siempre que Ω es un subconjunto abierto no vacío de \mathbb{R}^{N+1} , y que f es continua de Ω en \mathbb{R}^N , lo que denotaremos

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

TECNICAS DE
RESOLUCIÓN
PROBLEMAS DE
VALOR INICIAL
CAUCHY CON
EDOS DE
SEGUNDO
ORDEN

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

$$y'' = f(t, y, y')$$

$$+ C.I$$

$$y(t_0) = y_0$$

$$y'(t_0) = y'_0$$

Ejemplo Con reducción de orden

Ecuaciones Diferenciales de segundo orden No homogeneas

Ejemplos

$$y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$$

Solucion

Sea $y' = p \Rightarrow y'' = p \frac{dp}{dy}$ sustituyendo en la ecuacion dada

$$\Rightarrow p \frac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y} \text{ (Ec. de Bernoulli)}$$

$$\Rightarrow p' = z, \quad \frac{dz}{dy} + 2z = 4e^{-y}$$

Sol. general es:

$$z = 4e^{-y} + C_1 e^{-2y} \Rightarrow$$



$$\text{sea } z = p^2 = (y')^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}}$$

Separando variables e integramos

$$x + C_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4e^y + C_1}$$

$$e^y + \bar{C}_1 = (x + C_2)^2; \quad \bar{C}_1 = \frac{C_1}{4}$$



Espacio de soluciones De una EDO de 2do orden El Wronskiano y la Fórmula de Abel Lectura: formula de Abel y Liouville

A lo largo de esta sección supondremos que P , Q y R son funciones continuas en un intervalo I . La linealidad de la ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ nos permite hacer un análisis de la estructura de sus soluciones. Recordemos que la ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ se llama *ecuación homogénea asociada* a $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$, que llamaremos *ecuación completa*. Empezaremos analizando la ecuación homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$.

PROPOSICIÓN. Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones de la ecuación homogénea y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, entonces $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ también es una solución de la ecuación homogénea.

DEM. Sabemos que $\begin{cases} y'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x), \\ y''(x) = c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x). \end{cases}$ De esta forma, si $x \in I$, tenemos que

$$\begin{aligned} y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) &= c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x) + P(x)(c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x)) \\ &\quad + Q(x)(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)) \\ &= c_1 (y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x)) + c_2 (y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x)) = 0. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN. Se dice que dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son *linealmente dependientes* en un intervalo I si una de ellas es un múltiplo de la otra. En caso contrario, se dice que son *linealmente independientes*.

Al igual que ocurre con el concepto de dependencia lineal para vectores en \mathbb{R}^n , que dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sean linealmente dependientes es equivalente a que existan dos constantes c_1 y c_2 , al menos una de ellas no nula, tales que $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ para todo $x \in I$.

DEFINICIÓN. Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos funciones derivables. Se define su *determinante wronskiano* como la función $W(x) := \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$.

OBSERVACIÓN. Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son una un múltiplo de la otra, por ejemplo, $y_1(x) = cy_2(x)$ para cierta constante c y todo $x \in I$, entonces se verifica que su determinante wronskiano es cero ya que

$$W(x) := \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & cy_1(x) \\ y_1'(x) & cy_1'(x) \end{bmatrix} = 0 \quad \text{para todo } x \in I. \text{ Veremos a continuación que}$$

el recíproco de este resultado es cierto; es decir, si el determinante wronskiano de dos soluciones de una ecuación diferencial es cero, entonces las dos soluciones son linealmente dependientes y, por tanto, una solución es un múltiplo de la otra.

PROPOSICIÓN (INDEPENDENCIA LINEAL). Dos soluciones de la ecuación homogénea son linealmente dependientes en el intervalo I si, y sólo si, su determinante wronskiano es idénticamente cero en I .

DEM. Ya sabemos que si dos soluciones son linealmente dependientes su determinante wronskiano es idénticamente cero en I . Recíprocamente, supongamos que el determinante wronskiano de dos soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ es idénticamente cero en I . Sea $a \in I$ un punto cualquiera y considere-

mos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \alpha y_1(a) + \beta y_2(a) = 0, \\ \alpha y_1'(a) + \beta y_2'(a) = 0 \end{cases}$ con incógnitas α y β . Puesto que el determi-

nante de la matriz del sistema es cero, el sistema tiene una solución c_1 y c_2 no nula. Consideremos la función $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, que es solución de la ecuación lineal homogénea con valores iniciales nulos. Por la unicidad de la solución de un problema de valores iniciales se tiene que la función $y(x)$ es idénticamente cero. Es decir, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente dependientes.

EJEMPLO. Es fácil comprobar que las funciones $y_1(x) = \sin x$ e $y_2(x) = \cos x$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea $y'' + y = 0$. Su determinante wronskiano es

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{bmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

Por tanto, las funciones $y_1(x) = \sin x$ e $y_2(x) = \cos x$ son linealmente independientes.

En el siguiente resultado veremos que dos soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea generan cualquier otra solución mediante una combinación lineal de éstas. Antes de ello veamos que siempre existen dos soluciones linealmente independientes.

OBSERVACIÓN (EXISTENCIA DE SOLUCIONES LINEALMENTE INDEPENDIENTES). Consideremos una solución $y_1(x)$ del problema de valores iniciales $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, con $y(a) = 1$ e $y'(a) = 0$, siendo $a \in I$. Sea $y_2(x)$ una solución del problema de valores iniciales $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, con $y(a) = 0$ e $y'(a) = 1$. El teorema de existencia y unicidad garantiza la existencia de estas dos soluciones. Su determinante wronskiano, en el punto a , es $W(a) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$. Por tanto, estas dos soluciones son linealmente independientes.

TEOREMA. Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$. Entonces $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ es la solución general de dicha ecuación, es decir, si $y(x)$ es otra solución de la ecuación homogénea, existen dos constantes c_1 y c_2 tales que $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$.

DEM. Tomemos una solución $y(x)$ de la ecuación homogénea. Comprobemos entonces que existen dos constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha y_1(a) + \beta y_2(a) = y(a), \\ \alpha y_1'(a) + \beta y_2'(a) = y'(a). \end{cases}$$

Puesto que el determinante de la matriz del sistema es no nulo (ya que

las dos soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes), éste tiene que tener una única solución c_1 y c_2 . Tenemos que ver que la función $y(x)$ coincide con $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ en todos los puntos del intervalo. Puesto que $y(x) - (c_1y_1(x) + c_2y_2(x))$ es solución de la ecuación lineal homogénea con valores iniciales nulos, el teorema de existencia y unicidad nos muestra que la función $y(x) - (c_1y_1(x) + c_2y_2(x))$ es idénticamente nula.

EJEMPLO. Sabemos que las funciones $y_1(x) = \sin x$ e $y_2(x) = \cos x$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $y'' + y = 0$. Por el teorema anterior, todas las soluciones de esta ecuación son de la forma $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ para ciertas constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Con lo visto hasta ahora, tenemos descrita la estructura del conjunto de las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea. ¿Qué ocurre con la ecuación completa? La respuesta nos la proporciona el siguiente resultado.

TEOREMA. Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ y sea $y_p(x)$ una solución particular de la ecuación completa

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x).$$

Entonces $y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ es la solución general de dicha ecuación, es decir, para cada solución $y(x)$ de la ecuación completa, existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que $y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

DEM. Sea $y(x)$ una solución cualquiera de la ecuación completa $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$. Entonces, para la función diferencia $y(x) - y_p(x)$ se verifica que

$$\begin{aligned} & y''(x) - y_p''(x) + P(x)(y'(x) - y_p'(x)) + Q(x)(y(x) - y_p(x)) \\ &= (y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x)) - (y_p''(x) + P(x)y_p'(x) + Q(x)y_p(x)) = R(x) - R(x) = 0. \end{aligned}$$

Es decir, la diferencia de las dos soluciones $y(x)$ e $y_p(x)$ es una solución de la ecuación homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$. Por tanto, el teorema anterior asegura que existen dos constantes c_1 y c_2 tales que $y(x) - y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. Para terminar, basta despejar $y(x)$.

EJEMPLO. Ya sabemos que la solución general de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ viene dada por $c_1 \sin x + c_2 \cos x$. Para obtener la solución general de la ecuación $y'' + y = x$, será suficiente obtener una solución particular. Observemos que ésta puede ser, por ejemplo, la función $y_p(x) = x$. De esta forma la solución general de la ecuación completa es $y(x) = x + c_1 \sin x + c_2 \cos x$.

Fórmulas de Abel y Liouville. De acuerdo con lo expuesto anteriormente, para resolver la ecuación completa $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ necesitamos hallar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ y una solución particular de la completa.

En general no es posible obtener tales soluciones de forma explícita. Sin embargo, en algunos casos particulares podemos obtener dichas soluciones. Las fórmulas de Abel y Liouville nos muestran cómo hacerlo.

PROPOSICIÓN (ABEL). El determinante wronskiano $W(x)$ de dos soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de la ecuación homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ es una solución de la ecuación lineal de primer orden $W' + P(x)W = 0$. Por tanto, existe una constante c tal que $W(x) = ce^{-\int P(x)dx}$.

DEM. Puesto que $W(x) = y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)$, se tiene que

$$W'(x) = y_1'(x)y_2'(x) + y_1''(x)y_2(x) - y_1(x)y_2''(x) - y_1'(x)y_2'(x) = y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x).$$

De esta forma, obtenemos que

$$\begin{aligned} W'(x) + P(x)W(x) &= y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) + P(x)(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)) \\ &= y_1(x)(y_2''(x) + P(x)y_2'(x)) - y_2(x)(y_1''(x) + P(x)y_1'(x)) \\ &= y_1(x)(-Q(x)y_2(x)) - y_2(x)(-Q(x)y_1(x)) = 0. \end{aligned}$$

Tenemos así que el determinante wronskiano verifica la ecuación $W' + P(x)W = 0$. Como sabemos la solución de esta ecuación lineal de primer orden es $W(x) = ce^{-\int P(x)dx}$.

OBSERVACIÓN. Como hemos comentado, en general no existe un procedimiento para calcular dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$. No obstante, si conocemos una solución no nula de la ecuación homogénea, digamos $y_1(x)$, la fórmula de Abel asegura que $y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x) = ce^{-\int P(x)dx}$. Por tanto, resolviendo esta ecuación diferencial lineal de primer orden es posible obtener otra solución $y_2(x)$ de la ecuación homogénea de forma que ambas funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes, puesto que su wronskiano es no nulo. En algunos casos es fácil obtener una solución particular no nula de la ecuación

homogénea. En estos casos se puede reducir el orden de la ecuación, obteniéndose una ecuación diferencial lineal de primer orden cuyas soluciones son soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden linealmente independientes de la solución particular ya conocida. Vamos a mostrar otro camino que permite llegar a la misma conclusión sin hacer uso explícito de la fórmula de Abel.

FÓRMULA DE LIOUVILLE. Sea $y_1(x)$ una solución no nula de la ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$. Si la función y_1 es no nula, existirá un punto x_0 tal que $y_1(x_0) \neq 0$. De la continuidad de la función y_1 se deduce que existe un intervalo I centrado en el punto x_0 de forma que $y_1(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. En este intervalo I es en el que trabajaremos para realizar la construcción que sigue. Buscamos otra solución $y_2(x)$ de la ecuación con la propiedad de que ambas sean linealmente independientes en I . Para ello, encontraremos una función $v(x)$ tal que la función $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ es solución de la ecuación lineal homogénea. Para las derivadas de esta función tenemos que

$$y_2'(x) = v'(x)y_1(x) + v(x)y_1'(x) \quad \text{e} \quad y_2''(x) = v''(x)y_1(x) + v(x)y_1''(x) + 2v'(x)y_1'(x).$$

Puesto que la función $y_2(x)$ tiene que ser solución de la ecuación diferencial se tiene que cumplir

$$\begin{aligned}
0 &= y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x) = \\
&= (v''(x)y_1(x) + v(x)y_1''(x) + 2v'(x)y_1'(x)) + P(x)(v'(x)y_1(x) + v(x)y_1'(x)) + Q(x)v(x)y_1(x)) \\
&= v(x)(y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x)) + v''(x)y_1(x) + v'(x)(2y_1'(x) + P(x)y_1(x)) \\
&= v''(x)y_1(x) + v'(x)(2y_1'(x) + P(x)y_1(x))
\end{aligned}$$

De esta forma $v''(x)y_1(x) + v'(x)(2y_1'(x) + P(x)y_1(x)) = 0$. Esta ecuación es de variables separadas, con función incógnita $v'(x)$. Su solución viene dada por $v'(x) = \frac{1}{y_1(x)^2} e^{-\int P(x)dx}$. Por tanto, tenemos

que $v(x) = \int \frac{1}{y_1(x)^2} e^{-\int P(x)dx} dx$. Obtenemos así la segunda solución de la ecuación diferencial que

viene dada por $y_2(x) = \left(\int \frac{1}{y_1(x)^2} e^{-\int P(x)dx} dx \right) y_1(x)$. Además las dos soluciones son linealmente independientes. Para ello, basta comprobar que su determinante wronskiano es distinto de cero. En efecto, $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = v'(x)y_1(x)^2 = e^{-\int P(x)dx} \neq 0$.

La expresión $y_2(x) = \left(\int \frac{1}{y_1(x)^2} e^{-\int P(x)dx} dx \right) y_1(x)$ se conoce como *fórmula de Liouville*.

EJEMPLO. Consideremos la ecuación diferencial $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$. Es fácil comprobar que la función $y_1(x) = x$ es una solución. Por tanto, si aplicamos la fórmula de Liouville obtenemos otra solución linealmente independiente. En efecto,

$$y_2(x) = \left(\int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{-2x}{x^2-1} dx} dx \right) x = \left(\int \frac{1}{x^2} e^{\log(x^2-1)} dx \right) x = \left(\int \frac{x^2-1}{x^2} dx \right) x = \left(x + \frac{1}{x} \right) x = 1 + x^2.$$

Obtenemos así que la solución general de la ecuación es $y(x) = c_1x + c_2(1 + x^2)$.

**Resolución de EDOs de, 2do
orden, y de orden n lineales
Homogéneas y no Homogéneas.**

Vamos a analizar en esta sección la estructura del conjunto de soluciones de la ecuación diferencial lineal de orden n

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x)$$

siendo $a_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, y $g(x)$ funciones continuas en un intervalo (a, b) .

Definición 3.1.1. *Dado un conjunto de funciones $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ definidas en un intervalo (a, b) y derivables hasta el orden $n-1$, se denomina **wronskiano** de estas funciones y se denota por $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ a la función definida por el determinante*

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Teorema 3.1.2. *Si las funciones y_1, y_2, \dots, y_n son linealmente dependientes en el intervalo (a, b) , entonces $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \equiv 0$.*

Para resolver la ecuación homogénea se buscan soluciones de la forma $y = e^{\lambda x}$. Al sustituir estas funciones en la ecuación se obtiene que $(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n)e^{\lambda x} = 0$ luego

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

expresión que se denomina **ecuación característica** de la ecuación homogénea, y **polinomio característico** al polinomio que la define. Por tanto, $y = e^{\lambda x}$ es solución de la

Teorema 3.1.3. *Si las funciones y_1, y_2, \dots, y_n son soluciones de la ecuación homogénea en el intervalo (a, b) , entonces cualquier combinación lineal suya también lo es.*

Teorema 3.1.4. *Si las funciones y_1, y_2, \dots, y_n son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea en el intervalo (a, b) , entonces su wronskiano en ese intervalo no es idénticamente nulo.*

$$y_i^{(n)} + a_1(x)y_i^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y_i' + a_n(x)y_i = 0$$

Lema 3.1.5. *Si y_1, y_2, \dots, y_n son funciones derivables hasta el orden n , entonces*

$$W'[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

$$W'[y_1, y_2, \dots, y_n] + a_1(x)W[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0$$

que tiene por solución general $W[y_1, y_2, \dots, y_n] = Ce^{-\int a_1(x) dx}$ obteniéndose el resultado.

$W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) \neq 0$. Se determinan $\varphi(x_0), \varphi'(x_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0)$ y se considera el sistema de ecuaciones lineales en las variables c_1, c_2, \dots, c_n

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n c_k y_k(x_0) = \varphi(x_0) \\ \sum_{k=1}^n c_k y'_k(x_0) = \varphi'(x_0) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n c_k y_k^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

que tiene solución única porque el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo.

Teorema 3.1.10. *Si $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea en el intervalo (a, b) y φ_p es una solución cualquiera de la ecuación no homogénea, entonces para toda solución φ de la ecuación no homogénea existen constantes c_1, c_2, \dots, c_n tales que*

$$\varphi = \varphi_p + \sum_{k=1}^n c_k y_k.$$

Para resolver la ecuación homogénea se buscan soluciones de la forma $y = e^{\lambda x}$. Al sustituir estas funciones en la ecuación se obtiene que $(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n)e^{\lambda x} = 0$ luego

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

expresión que se denomina **ecuación característica** de la ecuación homogénea, y **polinomio característico** al polinomio que la define. Por tanto, $y = e^{\lambda x}$ es solución de la

ecuación homogénea si y solo si λ es raíz de su ecuación característica. Dichas raíces se denominan **autovalores** o **valores propios** de la ecuación homogénea. Los autovalores reales o complejos y su multiplicidad determinan los distintos tipos de soluciones de la ecuación homogénea:

1. Si los autovalores son reales y simples, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, entonces un conjunto fundamental de soluciones estaría formado por

$$\begin{cases} y_1 = e^{\lambda_1 x} \\ y_2 = e^{\lambda_2 x} \\ \vdots \\ y_n = e^{\lambda_n x} \end{cases}$$

y por tanto la solución general es una combinación lineal de estas funciones.

2. Si hay un autovalor real de multiplicidad m , λ , entonces un conjunto fundamental de soluciones estaría formado por las siguientes funciones (ejercicio):

$$\begin{cases} y_1 = e^{\lambda x} \\ y_2 = x e^{\lambda x} \\ \vdots \\ y_m = x^{m-1} e^{\lambda x} \end{cases}$$

3. Si hay dos autovalores complejos simples, $\alpha \pm \beta i$, entonces un conjunto fundamental de soluciones en el plano complejo sería $z_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}$ y $z_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$, y también

$$\begin{cases} y_1 = \frac{z_1+z_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x \\ y_2 = \frac{z_1-z_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x \end{cases}$$

4. Si hay dos autovalores complejos de multiplicidad m , $\alpha \pm \beta i$, utilizando los resultados de los dos casos anteriores se tiene que un conjunto fundamental de soluciones estaría formado por las siguientes funciones:

$$\begin{cases} y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \\ y_2 = x e^{\alpha x} \cos \beta x \\ \vdots \\ y_m = x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \\ y_{m+1} = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \\ y_{m+2} = x e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \\ \vdots \\ y_{2m} = x^{m-1} e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \end{cases}$$

5. Finalmente, si los autovalores son de varios de los tipos anteriores, un conjunto fundamental de soluciones estaría formado por la conjunción de las funciones que aportara cada tipo.

Ec. Dif. ordinarias no homogéneas

Por el Teorema 3.1.10, obtener la solución general de la ecuación no homogénea se reduce a encontrar una solución particular de la misma y la solución general de la ecuación homogénea asociada.

Si $g(x) = e^{\alpha x}(P_m(x) \cos \beta x + Q_r(x) \sen \beta x)$, siendo $P_m(x)$ y $Q_r(x)$ polinomios de grados m y r , respectivamente, una solución particular de la ecuación no homogénea es

$$\varphi_p = x^s e^{\alpha x} (R_k(x) \cos \beta x + S_k(x) \sen \beta x)$$

siendo s el orden de multiplicidad de la raíz de la ecuación característica de la ecuación homogénea $\alpha \pm \beta i$, $k = \max(m, r)$ y $R_k(x)$ y $S_k(x)$ polinomios de grado k de coeficientes indeterminados que hay que calcular. Esta técnica es conocida como **método de los coeficientes indeterminados**.

Si $g(x)$ es una combinación lineal de ese tipo de funciones, una solución particular de la ecuación no homogénea es la misma combinación lineal de las respectivas soluciones particulares para cada una de dichas funciones.

En general, se puede emplear el método de variación de las constantes que consiste en obtener primero la solución general de la ecuación homogénea

$$\sum_{k=1}^n c_k y_k$$

y buscar a continuación una solución particular de la no homogénea pero considerando las constantes como funciones que hay que determinar

$$\varphi_p = \sum_{k=1}^n c_k(x) y_k.$$

Para ello hay que imponer n condiciones que se obtienen derivando φ_p n veces y sustituyendo los resultados en la ecuación diferencial. Las n condiciones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n c'_k(x) y_k = 0 \\ \sum_{k=1}^n c'_k(x) y'_k = 0 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n c'_k(x) y_k^{(n-2)} = 0 \\ \sum_{k=1}^n c'_k(x) y_k^{(n-1)} = g(x) \end{array} \right.$$

El sistema tiene solución única pues el determinante de la matriz de coeficientes es $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ que no se anula en ningún punto de (a, b) .

Ejercicios:

1. Resolver:

i) $y'' - y = \sin^2 x$.

ii) $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$.

iii) $x^2 y'' - 6x^2 y' + 9x^2 y = e^{3x}$ con $x > 0$.

2. Resuelve la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 0$ y encuentra la solución particular que verifique $y(0) = y'(0) = 1$.

3. Prueba que si $xe^{\lambda x}$ es solución de una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes homogénea, entonces su ecuación característica tiene a λ como raíz doble.



Aplicaciones

