Sexta sesión

Análisis Convexos - CM3E2

Jonathan Munguia[1]

[1]Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

20 de noviembre de 2020

Outline

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ afín $\Rightarrow f$ es continua

$f(x) = Ax + b$

$|f(x) - f(y)| = \| Ax + \cancel{b} - Ay - \cancel{b} \|$

$= \| A(x-y) \| < \delta$

$\leq \|A\| \, \|x - y\| \leq \varepsilon$

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{\|A\|}$

La continuidad de una función afín es consecuencia de una propiedad algebraica, la linealidad. Con las funciones convexas, las cosas no son tan simples, pero aún así, una gran cantidad de propiedades topológicas están implícitas solo en la convexidad a través del concepto de $\boxed{\text{interior relativo}}$.

ri

Definición 1 (Bola cerrada)

Se define la bola cerrada centrada en x_0 con radio $r \geq 0$ en $\mathbb{R}^n$ como

$$B[x, r] := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Definición 2 (Punto interior)

$\{p\}$

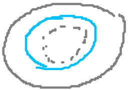
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que $x \in \Omega$ es un punto interior de Ω si existe $\delta > 0$ tal que $B[x, \delta] \subset \Omega$.

Definición 3 (Conjunto interior y conjunto abierto)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se define el interior de Ω como

$$\mathrm{int}(\Omega) := \{x \in \Omega : x \text{ es un punto interior de } \Omega\}.$$

Se dice que Ω es abierto si $\mathrm{int}(\Omega) = \Omega$.



Proposición 1

El interior de un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se puede caracterizar como

$$int(\Omega) = \bigcup \{ U \subset \Omega \,:\, U \, es \, abierto \}.$$

Definición 4 (Conjunto cerrado)

Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si su complemento $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Definición 5

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se define la clausura de Ω como

$$\overline{\Omega} := \bigcap \{ C \supset \Omega \,:\, C \, es \, cerrado \}.$$

Definición 6 (Punto de adherencia)

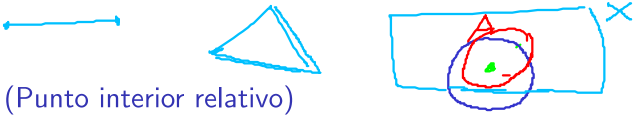
Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto de adherencia de Ω si para todo $\boxed{r > 0}$: $B[x, r] \cap \Omega \neq \emptyset$.

Proposición 2

La clausura de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto de sus puntos de adherencia.

Observación 1

En el caso de los conjuntos convexos, el concepto de interior puede estudiarse a través de un concepto más conveniente llamado interior relativo. Este concepto está motivado por el hecho de que un segmento de línea o triángulo en $\mathbb{R}^3$ tiene una especie de interior natural que no es realmente un interior en el sentido clásico en $\mathbb{R}^3$.



Definición 7 (Punto interior relativo)

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$ y $A \subset X$. Diremos que $x \in A$ es un punto interior de A relativo a X si existe $r > 0$ tal que $B[x, r] \cap X \subset A$.

$\mathbb{R}^n$

$B[x,r] \subset A$

Definición 8 (Conjunto Interior y abierto relativo)

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$ y $A \subset X$. Se define el interior relativo de A con respecto a X como el conjunto de sus puntos interiores relativos. En particular, si A es convexo y $X = \text{aff}(A)$, entonces se escribirá el interior relativo de A como

$$\text{ri}(A) := \{x \in A \,:\, x \text{ es un punto interior relativo a } \text{aff}(A)\}.$$

Se dice que A es abierto relativo con respecto a $\text{aff}(A)$ si $\text{ri}(A) = A$.

$\dim A = \dim \text{aff}(A)$

Proposición 3

El interior relativo de un subconjunto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se puede caracterizar como

$$ri(\Omega) = \bigcup \{ U \subset \Omega \ : \ U \, \text{es abierto relativo a} \, \overbrace{aff(\Omega)}^{\mathbb{R}^n} \}.$$

Proposición 4

$p \in A \quad \exists\, r_p > 0 \ \text{tq} \ B(p, r_p) \cap X \subset A$

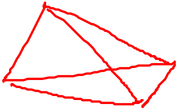
Dado $X \subset \mathbb{R}^n$. $A \subset X$ es un abierto relativo en X si y solo si $A = X \cap U$ para algún U abierto de $\mathbb{R}^n$.

$U = \bigcup_{p\in A} B(p, r_p)$

Proposición 5

$A \subset U \cap X \overset{p \in A}{=} \bigcup \left(B(p,r_p) \cap X \right) \subset A$

Sea $A \subset X$ abierto relativo en X. A es abierto en $\mathbb{R}^n$ si y solo si X es abierto en $\mathbb{R}^n$.



Observación 2

$n = \dim C = \dim \operatorname{aff}(C)$

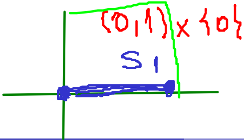
- Dado $C \subset \mathbb{R}^n$. Se verifica que $\operatorname{ri}(C) \subset C \subset \overline{C}$.
- Si C es un conjunto convexo $n-$dimensional, es decir $\operatorname{aff}(C) = \mathbb{R}^n$, entonces $\operatorname{ri}(C) = \operatorname{int}(C)$.

  $S_1 \subset S_2$

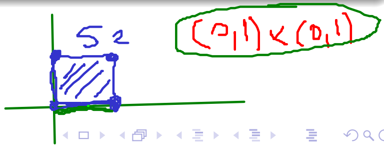
  $\operatorname{int}(S_1) \subset \operatorname{int}(S_2)$
- $S_1 \subset S_2$ no implica necesariamente $\operatorname{ri}(S_1) \subset \operatorname{ri}(S_2)$, salvo que $\operatorname{aff}(S_1) = \operatorname{aff}(S_2)$. Por ejemplo, sean $S_1 = [0,1] \times \{0\}$ y $S_2 = [0,1] \times [0,1]$.

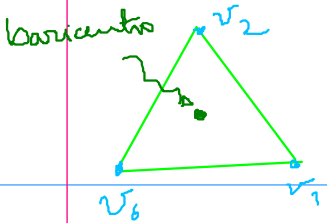
Proposición 6

Sea S_m un $m-$símplice de $\mathbb{R}^n$ con $m \geq 1$. Entonces $ri(S_m) \neq \emptyset$.



$\operatorname{ri} S_1 \not\subset \operatorname{ri} S_2$





2-Símplice
$= \text{Co}\{v_0, v_1, v_2\}$
$\{v_i\}$ afína ind.

0-Símplice $\sim$ p $\quad ri\{p\} = \emptyset$

$x \in S_m = \text{Co}\{v_0, \dots, v_m\}$ af. ind. $\quad m \leq n$

$\exists! \; \lambda_i > 0$ tq $x = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i v_i$ con $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$

$L = \text{Span}\{v_1 - v_0, \dots, v_m - v_0\} \approx v_0$

$\bar{x} \in L \Rightarrow \bar{x} = \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i (v_i - v_0) = \boxed{\sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i v_i} - \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i v_0$

$\bar{x} = \sum_{i=0}^{m} \bar{\lambda}_i v_i$ con $\sum_{i=0}^{m} \bar{\lambda}_i = 0$!

$\bar{\lambda}_0 = 0$

Affirmo: $x \in L$

$\exists! \lambda_i$ t.q. $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (v_i - v_0) \iff \exists! \lambda_i$ t.q. $x = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i v_i$ con $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$

$\Rightarrow$]

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i - \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right) v_0 + \lambda_0 v_0 - \lambda_0 v_0 \quad \text{con } \lambda_0 = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \lambda_i v_i - \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i\right)}_{0} v_0$$

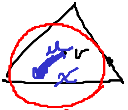
$\Leftarrow$]

$$x = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i v_i \quad \text{con } \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0}_{} \to \lambda_0 = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

$$= \lambda_0 v_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$$

$$= \left(-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right) v_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (v_i - v_0)$$

$A : L \to \mathbb{R}^{m+1}$



$u \to A(u) = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$A(0) = 0$ continua $\quad \lim_{u \to 0} A(u) = 0$

Obs: $\|A(u)\| < \frac{1}{m+1}$ siempre q' $\|u\| \le \delta$

Afirmo: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|u - 0\| < \delta \Rightarrow \|Au - 0\| < \varepsilon$

$$B[v, \delta] \cap \text{aff } S_m \subset S_m$$

$$v = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} v_i \Rightarrow v \in ri(S_m)$$

En efecto:

$\to x \in B[v, \delta] \cap \text{aff } S_m$ fijo arbi.

$x = v + u$ con $u \in B[0, \delta] \to \|u\| \le \delta$

$v, x \in \text{aff } S_m \Rightarrow u = x - v \Rightarrow u \in L$

Como $\{v_1 - v_0, \ldots, v_m - v_0\}$ son l.i

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (v_i - v_0) \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall\, i = 1, \ldots, m$$

luego $\lambda_0 = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$

$\Rightarrow A(0) = (0, \ldots, 0)$ es decir $A(0) = 0$

Por la continuidad en 0, se tiene

$\varepsilon = \frac{1}{m+1}$, $\exists\, \delta > 0$ tq $\|u\| < \delta \Rightarrow \|A(u)\| < \frac{1}{m+1}$.

$u \in L,\quad A(u) = (\alpha_0, \dots, \alpha_m)$

$\Rightarrow u = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i v_i$ cu $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 0$

$-\alpha_i < |\alpha_i| \le \|Au\| < \frac{1}{m+1} \quad \forall\, i = 0, \dots, m$

$\Rightarrow x = v + u = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} v_i + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i v_i$

$= \sum_{i=0}^{m} \overbrace{\left(\frac{1}{m+1} + \alpha_i \right)}^{\mu_i} v_i = \sum_{i=0}^{m} \mu_i v_i \qquad \mu_i \ge 0$

$-\alpha_i < \frac{1}{m+1} \Rightarrow \frac{1}{m+1} + \alpha_i > 0 \qquad \sum_{i=0}^{m} \mu_i \overset{?}{=} 1$

$$\sum_{i=0}^{m} \mu_i = \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{1}{m+1} + \alpha_i \right) = 1 + \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \alpha_i}_{=0}$$

$\Rightarrow \quad x \in S_m = co(v_0, \dots, v_m)$

i.e. $\quad v \in ri\, S_m$

(baricentro).

$$x = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i x_i \iff x = x_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x_i - x_0)$$

Boris!

Lema 1

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo no vacío de dimensión $m \geq 1$. Entonces existen $m+1$ puntos afinamente independientes $v_0, \cdots, v_m$ en C. ← Caratheodory

Teorema 1

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo no vacío. Entonces $ri(C)$ es no vacío.

Corolario 1

Si $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, entonces $\operatorname{aff}(C) = \operatorname{aff}(\operatorname{ri}(C))$.

Proposición 7

Si $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, entonces $ri(C)$ es convexo.

Proposición 8

Si $S \subset \mathbb{R}^n$, entonces $aff(\overline{S}) = aff(S)$.

Proposición 9

Si $C \subset \mathbb{R}^n$ *es convexo, entonces* $\overline{C}$ *es convexo.*

Proposición 10

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ *convexo no vacío. Si* $p \in ri(C)$ *y* $q \in \overline{C}$*, entonces*

$$\forall t \in (0,1) \ : \quad p + t(q-p) \in ri(C).$$

Proposición 11

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ *convexo, entonces*

$$ri(C) = ri(\overline{C}) \quad \wedge \quad \overline{ri(C)} = \overline{C}.$$

FIN