Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[**Análisis Convexo - CM3E2**]
[**Prof: Jonathan Munguia**] UNI, 25 de junio de 2021

Práctica Calificada 4

1. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tal que su función soporte σ_A es una función lineal. Mostrar que A es un conjunto unitario. [5ptos]

Solución: Supongamos que σ_A es finita y que A es no vacío. Como σ_A es lineal, luego por el Teorema de representación de Riesz, existe $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sigma_A(d) = \langle p, d\rangle$ para todo $d \in \mathbb{R}^n$, se tiene por definición que

$$\langle x, d\rangle \leq \langle p, d\rangle \quad \forall x \in A. \tag{1}$$

Luego, por (1) y la linealidad de σ_A, se tiene

$$\langle x, -d\rangle \leq \sigma_A(-d) = \langle p, -d\rangle \leq \langle x, -d\rangle \Longrightarrow \langle p, -d\rangle = \langle x, -d\rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dado $x, y \in A$, se tiene tomando en particular $d = x - y$

$$\langle x, d\rangle = \langle y, d\rangle \Longrightarrow \|x - y\| = 0 \Longrightarrow x = y.$$

Por tanto A es unitario.

2. Dada $f : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} +\infty\,, & x < 0 \\ -\sqrt{x}\,, & x \geq 0. \end{cases}$$

Hallar la función conjugada de f. [5ptos]

Solución: Por definición, se tiene

$$f^*(x^*) = \sup_{x \geq 0} \Big[x x^* + \sqrt{x} \Big].$$

En el caso que $x^* \geq 0$, se tiene que $x x^* + \sqrt{x} \geq 0$,

$$f^*(x^*) = \lim_{x \to +\infty} \Big[x x^* + \sqrt{x} \Big] = +\infty.$$

Si $x^* < 0$, entonces la función $h(x) = x x^* + \sqrt{x}$ tendrá su máximo,

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + x^* = 0 \implies x = \frac{1}{4(x^*)^2}.$$

Luego, evaluando $f^*(x^*) = -\dfrac{1}{4x^*}$, por tanto

$$f^*(x^*) = \begin{cases} +\infty, & x^* \geq 0 \\ -\frac{1}{4x^*}, & x^* < 0. \end{cases}$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa, sci y propia. Si la función asintótica de f esta dada por

$$f_\infty(d) = \begin{cases} 0\,, & d = 0 \\ > 0\,, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, demuestre que $0 \in \text{int}(\text{dom}\, f^*)$.
(Sug. Bajo las hipótesis de f se tiene que $f_\infty = \sigma_{\text{dom}\, f^*}$) [5ptos]

Solución: De la sugerencia y tomando $S = \text{dom}\, f^*$ en el Teorema 1, se tiene

$$\langle 0, d\rangle = 0 < \sigma_{\text{dom}\, f^*}(d) \quad \forall d \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \in \text{int}(\text{dom}\, f^*).$$

Teorema 1 *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Se cumple*

$$int\, S = \{s \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle s, d\rangle < \sigma_S(d) \quad \forall d \neq 0\}.$$

Demostración
Podemos suponer que S convexo cerrado y no vacío. En efecto, S cerrado porque S y $\overline{S}$ tienen la misma función soporte y el mismo interior. Si $S = \emptyset$ entonces $\sigma_S \equiv -\infty$, pues por convección $\sup \emptyset = -\infty$. Luego, aplicamos el Teorema 2.2.3 parte (iii) de Hirriat - Lemaréchal. Fundamentals of Convex Analysis.

4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa, sci y propia y $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$\varphi(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda f(\frac{x}{\lambda})\,, & \lambda > 0 \\ f_\infty(x)\,, & \lambda = 0 \\ +\infty\,, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Halle la conjugada de φ. [5ptos]

Solución: Sea $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$\psi(x^*, \lambda^*) = \begin{cases} 0 & f^*(x^*) + \lambda^* \leq 0, \\ +\infty & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

esta es convexa, sci y propia. Se demuestra que $\varphi = \psi^*$. Luego, por la Proposición 3.3 de Ocaña - Crouzeix. Análisis convexo, se tiene que $\varphi^* = \psi^{**} = \psi$. (Véase Ejemplo 3.1 de la misma referencia o Corolario 13.5.1 de Rockafellar - Convex Analysis)