Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-2

[Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2]
[Prof: Los Profesores] UNI, 23 de noviembre de 2021

Práctica Calificada 5

1. Encontrar dos soluciones linealmente independientes alrededor de $x_0 = 0$ para la siguiente ecuación diferencial

$$4x^2y'' - 4x^2y' + (1-2x)y = 0.$$

¿Qué tipo de punto es $x_0 = 0$? [8ptos]

Solución: La ecuación tiene la forma

$$L[y] = p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0,$$

donde $p(x) = 4x^2$, $q(x) = -4x^2$ y $r(x) = 1 - 2x$. Como $p(0) = 0$, entonces $x_0 = 0$ es un punto singular. Además como las siguientes funciones son polinomios

$$(x - x_0)\frac{q(x)}{p(x)} = -x \quad \wedge \quad (x - x_0)^2\frac{r(x)}{p(x)} = \frac{1-2x}{4},$$

entonces son analíticas (en particular en $x_0 = 0$) Por tanto x_0 es un punto singular regular. Consideremos una solución de la forma

$$y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

donde $r \in \mathbb{R}$. Reemplazando en la EDO

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_kx^{k+r-2} - 4x^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_kx^{k+r-1} + (1-2x)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r} \\ &= \big(4r(r-1)+1\big)a_0x^r + \sum_{k=0}^{\infty}\big((4(k+r)(k+r-1)+1)a_k - (4(k+r-1)+2)a_{k-1}\big)x^{k+r}. \end{aligned}$$

Igualando a cero el coeficiente correspondiente a la menor potencia y considerando $a_0 \neq 0$, obtenemos la **ecuación indicial**:

$$4r(r-1) + 1 = 0.$$

Resolviendola obtenemos $r = 1/2$. Luego, igualamos a cero los coeficientes correspondiente a x^{k+r}

$$(4(k+r)(k+r-1)+1)a_k - (4(k+r-1)+2)a_{k-1} = 0.$$

Despejamos a_k y consideramos $r = 1/2$

$$a_k = \frac{1}{k}a_{k-1}.$$

Multiplicando los k primeros coeficientes y simplificando, se obtiene

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_k = a_0 \times \frac{a_1}{2} \times \frac{a_2}{3} \times \cdots \times \frac{a_{k-1}}{k} \Longrightarrow a_k = \frac{1}{k!}a_0.$$

Considerando $a_0 = 1$, obtenemos una solución

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{k+1/2} = x^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = x^{1/2} e^x.$$

En general, no se puede expresar la serie en términos de funciones elementales.
Aplicamos el método de Frobenius (Ver Teorema 2 Sección 7.3 pag. 521 de William A. Adkins & Mark G. Davidson - Ordinary Differential Equations. Springer, 2012) para obtener la segunda solución:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \ln x + x^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \\ &= x^{1/2} e^x \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1/2}. \end{aligned}$$

Ahora, la sustituimos en la ecuación diferencial y resolvemos para hallar los coeficientes b_k. Se produce un largo cálculo y obtenemos alguna relación de recursividad para b_k. Por ejemplo, los tres primeros términos son

$$b_1 = b_0 - 1,\ b_2 = \frac{2b_1 - 1}{4},\ \ b_3 = \frac{6b_2 - 1}{18}, \cdots$$

Luego fijamos b_0 y obtenemos una solución y_2. Finalmente, la solución general es $y = Ay_1 + By_2$ para A y B en $\mathbb{R}$.

2. Calcule la serie de Fourier de $f(x) = x^2$ para $x \in [0, 2\pi]$ y f tiene un período 2π. [6ptos]

Solución: Siguiendo el Teorema 5.9 pag 169 de Russell L. Herman - A Second Course in Ordinary Differential Equations: Dynamical Systems and Boundary Value Problems. La representación en serie de Fourier de $f(x)$ definida en $[a, b]$ cuando existe, está dada por

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big\{ a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x) \big\}, \ \text{ con } \omega_0 = \frac{2\pi}{b-a}$$

donde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos(n\omega_0 x)\, dx \quad n = 0, 1, 2, \cdots \\ b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin(n\omega_0 x)\, dx \quad n = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

Se tiene que $\omega_0 = 1$, luego los coeficientes son

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{8\pi^2}{3},\\
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\sin(nx)}{n} + \frac{2x\cos(nx)}{n^2} - \frac{2\sin(nx)}{n^3}\right]\Bigg|_0^{2\pi}\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{4\pi}{n^2}\right) = \frac{4}{n^2},\\
b_n &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2\cos(nx)}{n} + \frac{2x\sin(nx)}{n^2} + \frac{2\cos(nx)}{n^3}\right]\Bigg|_0^{2\pi}\\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{4\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} - \frac{2}{n^3}\right) = -\frac{4\pi}{n}.
\end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene

$$f(x) \approx \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

3. Calcule la serie de Fourier de $f(x) = x^2 - x$ para $x \in [-2, 2]$ (periodo 4) y determine su suma sobre $[-2, 2]$. [6ptos]

Solución: Procediendo como en el problema anterior, se tiene $\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. luego los coeficientes son

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2}(x^2 - x)\,dx = \int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = \frac{8}{3},\\
a_n &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2}(x^2 - x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{n\pi}\left[x^2\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2 - 2\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right]\\
&= \frac{8}{n^2\pi^2}\left[x\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2 - \int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right]\\
&= \frac{8}{n^2\pi^2}\left[2\cos n\pi - \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2\right] = (-1)^n\frac{16}{n^2\pi^2},\\
b_n &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2}(x^2 - x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = -\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{n\pi}\left[x\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2 - \int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right]\\
&= \frac{2}{n\pi}\left[2\cos n\pi - \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2\right] = (-1)^n\frac{4}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Reemplazando, se obtiene la expansión de Fourier de f

$$f(x) \sim \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Finalmente, obtenemos la suma de Fourier, extensión periódica:

$$F(x) = \begin{cases} 4 & , x = -2 \\ x^2 - x & , -2 < x < 2 \\ 4 & , x = 2. \end{cases}$$