Rockafellar
Conjugate Duality and Optimization

$K : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ($K = L$ lagrangiano)

Defino la función supremo de K respecto a la 2da variable y la función ínfimo de K respecto a la primera variable

$$f : X \to \overline{\mathbb{R}} \qquad\qquad g : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$$f(x) = \sup_{y \in Y} K(x,y) \qquad\qquad g(y) = \inf_{x \in X} K(x,y) \qquad \ldots (1)$$

$$g(\bar{y}) = \inf_{x \in X} K(x, \bar{y})$$

De (1)

$$f(x) = \sup_y K(x,y) \geq K(x,y) \geq \inf_x K(x,y) = g(y)$$

$$f(x) \geq K(x,y) \geq g(y) \qquad \forall x \in X ,\ \forall y \in Y \qquad \ldots (2)$$

Defino 2 problemas de optimización

$$\inf_{x \in X} f(x) \qquad \wedge \qquad \sup_{y \in Y} g(y) \qquad \ldots (3)$$

De (2), se deduce que

$$\inf_{x \in X} f(x) \geq \sup_{y \in Y} g(y) \qquad \ldots (4)$$

Si existe $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ soluciones de los problemas de optimización (3), es decir

$$f(\bar{x}) = \inf_{x \in X} f(x) \qquad \wedge \qquad g(\bar{y}) = \sup_{y \in Y} g(y) \qquad \ldots (5)$$

De (2) obtenemos

$$f(\bar{x}) \geq K(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{y}) \qquad \ldots (6)$$

Si además se cumple la igualdad en (4), es decir $f(\bar{x}) = g(\bar{y})$, obtenemos

$$f(\bar{x}) = K(\bar{x}, \bar{y}) = g(\bar{y}) \qquad \ldots (7)$$

Procedo por contradicción

$$\exists\, x_0 \in X \text{ tq } K(x_0, \bar{y}) < K(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow \overbrace{\inf_{x \in X} K(x, \bar{y})}^{g(\bar{y})} \leq K(x_0, \bar{y}) < K(\bar{x}, \bar{y}) \ (\Rightarrow\Leftarrow)$$

Contradice (7)

De (1) $g(\bar{y}) = \inf_{x \in X} K(x, \bar{y})$

Por lo tanto

$$\forall x \in X \qquad K(x, \bar{y}) \geq K(\bar{x}, \bar{y}),$$

De manera similar $\forall y \in Y \qquad K(\bar{x}, \bar{y}) \geq K(\bar{x}, y)$

Condición de Punto silla

$$K(x,\bar{y}) \geq K(\bar{x},\bar{y}) \geq K(\bar{x},y) \quad \forall x \in X, \ \forall y \in Y \qquad \dots (8)$$

Viceversa, supongamos que $\exists (\bar{x},\bar{y}) \in X \times Y$ tal que satisfacen (8)

$$\inf_x K(x,\bar{y}) \geq K(\bar{x},\bar{y}) \geq \sup_y K(\bar{x},y) \Rightarrow g(\bar{y}) \geq K(\bar{x},\bar{y}) \geq f(\bar{x})$$

De (2) se deduce q'

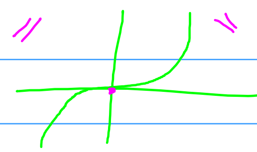
$$f(\bar{x}) = K(\bar{x},\bar{y}) = g(\bar{y}) \qquad \dots (9)$$

Luego, De (4)

$$f(\bar{x}) \geq \inf_{x \in X} f(x) \geq \sup_{y \in Y} g(y) \geq g(\bar{y})$$

y por (9), se obtiene la igualdad

$$\underbrace{f(\bar{x}) = \inf_{x \in X} f(x) = \sup_{y \in Y} g(y)}_{\text{Valor de punto silla de } K} = g(\bar{y}) \qquad \dots (10)$$



$$\inf_x \sup_y K(x,y) = \sup_y \inf_x K(x,y)$$ este valor se alcanza en $(\bar{x},\bar{y})$

Además $(\bar{x},\bar{y})$ es solución de los problemas de optimización.

Definición

Dado $K : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ se cumple

$$\inf_x \sup_y K(x,y) \geq \sup_y \inf_x K(x,y) \qquad \dots (*)$$

Si se cumple la igualdad en (*), a ese valor común se le llama valor silla de K. El valor silla de K existirá por ejemplo si existe un punto silla de K, es decir, exista $(\bar{x},\bar{y}) \in X \times Y$ tq

$$K(x,\bar{y}) \geq K(\bar{x},\bar{y}) \geq K(\bar{x},y) \quad \forall x \in X, \ \forall y \in Y \qquad \dots (**)$$

entonces el valor silla será $K(\bar{x},\bar{y})$.

Teorema

Un par $(\bar{x},\bar{y}) \in X \times X^*$ satisface (**) si y solo si

$(\bar{x},\bar{y})$ resuelven los problemas de optimización (3) y el valor silla de K existe, es decir

$$\inf_x \sup_y K(x,y) = \sup_y \inf_x K(x,y).$$

Eladio:

$$\alpha = \inf_{x\in X} f(x), \quad h(u) = \inf_{x\in X} \varphi(x,u), \quad \varphi(x,0) = f(x), \ \forall x \in X$$

$$\beta = \inf_{u^*} h^*(u^*),$$

$$h^*(u^*) = \sup_u \left[\langle u,u^* \rangle - h(u) \right] = \underline{\sup_{(x,u)} \left[\langle u,u^* \rangle - \varphi(x,u) \right] = \varphi^*(0,u^*)}$$

$$-\beta = -\inf_{u^*} h^*(u^*) = \sup_{u^*} -h^*(u^*) = \sup_{u^*} \inf_{(x,u)} \left[\varphi(x,u) - \langle u,u^* \rangle \right]$$

$$= \sup_{u^*} \inf_x \left[\underbrace{\inf_u \left\{ \varphi(x,u) - \langle u,u^* \rangle \right\}}_{L(x,u^*)} \right]$$

(definición) $L(x,u^*)$ Lagrangiano