Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-2

[Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2]
[Los profesores] UNI, 30 de noviembre de 2021

Sexta Práctica Dirigida

1. Use la fórmula de rodriguez para deducir los 5 primeros polinomios de Legrendre, denotados por P_n, donde n es el grado.

2. Verifique que el polinomio de Legendre de grado 3 es ortogonal en el espacio de funciones polinomiales a trozos sobre el intervalo $[-1, 1]$, $PC[-1, 1]$, a cada polinomio de grado menor que 3.

3. Probar que P_{2m} y P_{2n+1} son ortogonales en $PC[-1, 1]$ para todo m y n.

4. Use la fórmula de rodriguez para probar que P_1 es ortogonal a P_n en $PC[-1, 1]$ para todo $n \neq 1$.

5. Demuestre que si $PC[-1, 1]$ tiene una base B que consta de polinomios, entonces B debe contener exactamente un polinomio de cada grado. Por lo tanto, deduzca que la única base polinomial para $PC[-1, 1]$ salvo múltiplos escalares es la secuencia
$$p_0(x),\ p_1(x),\ p_2(x), \cdots,$$
la cual es la ortogonalización por Gram-Schmidt de la secuencia $1, x, x^2, \cdots$.

6. Discuta la naturaleza de las soluciones de la ecuación de Legendre
$$(1-t^2)x'' - 2tx' + p(p+1)x = 0,$$
en torno al punto regular $t = 0$ y en torno a los puntos singular regulares $t = 1$ y $t = -1$.

7. Discutir la solución de la ecuación de Bessel
$$t^2x'' + tx' + (t^2 - p^2)x = 0, \quad p \geq 0,$$
en torno al punto singular regular $t = 0$.

8. Discuta la naturaleza de las soluciones de la ecuación
$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0,$$
en torno a sus puntos singulares.

9. Hallar la solución en torno a $t = 0$ de la ecuación de Bessel de orden cero, $p = 0$:
$$t^2x'' + tx' + t^2x = 0.$$

10. Hallar la solución en torno a $t = 0$ de la ecuación de Bessel de medio orden, $p = 1/2$:
$$t^2x'' + tx' + (t^2 - 1/4)x = 0.$$

11. Hallar la solución en torno a $t = 0$ de la ecuación de Bessel de orden uno, $p = 1$:
$$t^2x'' + tx' + (t^2 - 1)x = 0.$$

12. Resuelva la ecuación diferencial de Legendre en torno al punto regular (ordinario) $t = 0$
$$(1-t^2)x'' - 2tx' + n(n+1)x = 0,\ n \in \mathbb{R},\ x \in (-1, 1).$$

13. Resuelva la ecuación diferencial de Laguerre en torno al punto singular regular $t = 0$
$$tx'' + (1-t)x' + nx = 0,\ n \in \mathbb{R},\ x \in [0, \infty).$$

14. Resuelva la ecuación de Hermite en torno al punto regular $t = 0$

$$x'' - 2tx' + 2nx = 0,\ n \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}..$$

15. Mostrar que las soluciones polinomiales de Legendre, Laguerre y Hermite son ortogonales y, por lo tanto, pueden usarse para formar una serie de Fourier.

16. Hallar la relación de recurrencia, la función generatriz y la Fórmula de rodriguez correspondiente a las soluciones polinomiales de Legendre, Laguerre y Hermite.

17. Halle la relación de recurrencia, la función generatriz y la Fórmula de rodriguez correspondiente a las soluciones polinomiales de la ecuación de Chebyshev:

$$(1 - t^2)x'' - tx' + \alpha^2 x = 0,$$

correspondiente a los puntos singulares ± 1 y el punto regular 0.