Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-2

[**Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2**]
[**Prof: Los Profesores**] UNI, 19 de octubre de 2021

Práctica Calificada 3

1. Dada la función $f(t) = t^p$, para $p > -1$. Demuestre que

   a) $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$, $s > 0$. [1ptos]

   b) Sea p un entero n en la parte (a). Entonces $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$. [1ptos]

   c) En el caso que $p = -1/2$. Se tiene que $\mathcal{L}(f)(s) = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$, $s > 0$. [1ptos]

   d) En el caso que $p = 1/2$. Se tiene que $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$, $s > 0$. [1ptos]

   e) Halle la transformada de Laplace de $g(t) = \dfrac{e^{3t}}{\sqrt{t}}$. [1ptos]

Solución: Considerando la función Gamma $\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^p\,dx$. Si $p > 0$ se tiene que $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$. Si $p = n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$ y $\Gamma(1) = 1$.

a)

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty e^{st}t^p\,dt = \frac{1}{s^{p+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^p\,dx \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \ s > 0. \end{aligned}$$

b) Se deduce de (a) y del hecho que $\Gamma(p+1) = p!$ si p es entero positivo.

c) Se deduce, al reemplazar $p = -1/2$ en (a) y del hecho que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

d) Para $p = 1/2$, se tiene

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{(1/2)\Gamma(1/2)}{s^{3/2}}.$$

e) Por el teorema de traslación:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{e^{3t}t^{-1/2}\} = \mathcal{L}\{t^{-1/2}\}(s-3) = \sqrt{\frac{\pi}{s-3}}, \ s > 3.$$

2. Halle la transformada de Laplace de $f(t) = 2te^{t^2}\cos(e^{t^2})$. Demuestre que no es de orden exponencial. [5ptos]

Solución: Hallamos la transformada de Laplace de f

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} 2t\, e^{t^2} \cos(e^{t^2})\, dt,$$

existe, desde que por integración por partes obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= e^{-st} \sin(e^{t^2})\Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} \sin(e^{t^2})\, dt \\ &= -\sin(1) + s\mathcal{L}\{\sin(e^{t^2})\},\ \ s > 0.\end{aligned}$$

La transformada de Laplace de $\sin(e^{t^2})$ existe debido a que es continua y es de orden exponencial pues

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t} |\sin(e^{t^2})| = 0.$$

Por tanto existe la transformada de Laplace de f aunque no se puede hallar por métodos exactos.

Ahora, veamos que f no es orden exponencial. Supongamos que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que f es de orden exponencial, pero

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-at}|f(t)| = \lim_{t\to+\infty} 2te^{t^2-at} |\cos(e^{t^2})| = +\infty,$$

debido a que el coseno es acotado y la exponencial crece porque $t^2 - at \to +\infty$. Por, tanto f no es orden exponencial.

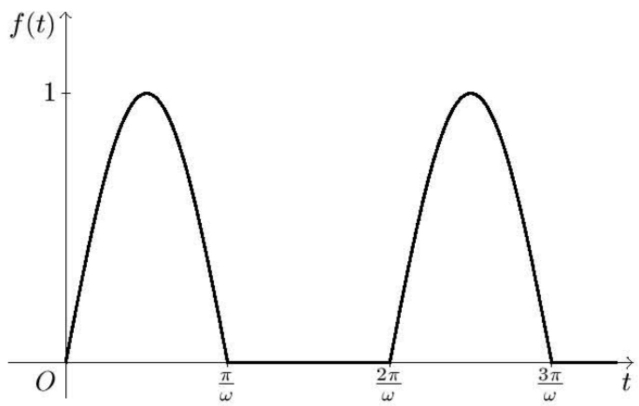
Definición.- Se dice que f es de orden exponencial α si existen constantes $M > 0$ y α tal que para algún $t_0 \geq 0$,

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t},\ \ t \geq t_0.$$

3. Hallar la transformada de Laplace de la función periódica con periodo $T = 2\pi/\omega$:

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega t, & \frac{2n\pi}{\omega} < t < \frac{(2n+1)\pi}{\omega} \\ 0, & \frac{(2n+1)\pi}{\omega} < t < \frac{(2n+2)\pi}{\omega}, \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

[5ptos]



Solución: La función f es acotada, continua y periódica con periodo $T = 2\pi/\omega$, así

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} F_1(s), \quad \text{donde } F_1(s) = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st}\sin(\omega t)\,dt.$$

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \frac{e^{-st}}{s^2+w^2}\big(-s\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)\big)\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} \\ &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}(1+e^{-\frac{\pi s}{\omega}}). \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\omega}{(s^2+w^2)(1-e^{-\frac{\pi s}{\omega}})}.$$

4. Resuelva el siguiente sistema EDO por medio de la transformada de Laplace.

$$\begin{aligned} x' + y' + x + y &= 1, \\ x' + y &= e^t, \\ x(0) = -1 \ , \ y(0) &= 2. \end{aligned}$$

[5ptos]

Solución: Aplicamos transformada de Laplace a las EDO's:

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}(x) + 1 + s\mathcal{L}(y) - 2 + \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y) &= \frac{1}{s}, \\ s\mathcal{L}(x) + 1 + s\mathcal{L}(y) &= \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= \frac{-s^2+s+1}{s(s-1)^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}. \end{aligned}$$

Tomando la transformada inversa, se obtiene

$$x = 1 - 2e^t + te^t, \quad y = 2e^t - te^t.$$