Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Análisis Convexo - CM3E2]
[Prof. Jonathan Munguia] UNI, 23 de abril de 2021

Segunda Práctica Dirigida

1. Considere $P = \{x \,:\, Ax \geq 0\}$ y que $x \geq 0$ para todo $x \in P$.

   a) P es un cono.

   b) Dar una caraterización de rayo extremo de un cono poliédrico P, usando el rango de una submatriz de A. (Sug. piense en el octante positivo como el ejemplo canónico de un cono, para tener algo de intuición aquí.)

   c) Dos rayos extremos x, y de uno cono K se dicen que son los mismos si $x = \lambda y$ para algún $\lambda > 0$. Probar que el número de rayos extremos diferentes de nuestro cono poliédrico P es finito.

   Definición: Un rayo extremo de un cono K es un vector distinto de cero $x \in K$ tal que $x + y \in K$ y $x - y \in K$ implica que $y = \lambda x$ para algún λ.

2. Probar que $\overline{D} \subset \operatorname{aff}(D)$ y deduzca que $\operatorname{aff}(D) = \operatorname{aff}(\overline{D})$.

3. Para cualquier $M \subset \mathbb{R}^d$, la cápsula convexa $\operatorname{co}(M)$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas

   $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,$$

   tal que $(x_1, \cdots, x_n)$ es una familia afinamente independiente de puntos de M.

4. Para cualquier $M \subset \mathbb{R}^d$ con $\dim(\operatorname{aff}(M)) = n$, la cápsula convexa $\operatorname{co}(M)$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas de precisamente $n + 1$ puntos de M.

5. Si P es un politopo entonces $x + P$ es un politopo.

6. Si P es un politopo en $\mathbb{R}^m$ y $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una transformación afín entonces $\varphi(P)$ es un politopo en $\mathbb{R}^n$.

7. Si $x_1, \cdots, x_n$ son los vértices de un símplice S. Entonces

   a) Cada $x \in \operatorname{aff}\{x_1, \cdots, x_n\}$ tiene una única representación como una combinación afín de $x_1, \cdots, x_n$.

   b) Cada $x \in \operatorname{co}\{x_1, \cdots, x_n\}$ tiene una única representación como una combinación convexa de $x_1, \cdots, x_n$.

   Se dice que $\{x_1, \cdots, x_n\}$ es una base convexa de S.

8. Sea $M = \{x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto de puntos afinamente dependiente. Entonces, existen subconjuntos M_1 y M_2 de M con $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ y $M_1 \cup M_2 = M$ tal que

   $$\operatorname{co}(M_1) \cap \operatorname{co}(M_2) \neq \emptyset.$$

9. Los politopos en $\mathbb{R}^d$ son conjuntos compactos.

10. Sea $C \subset \mathbb{R}^d$ convexo cerrado, F una cara de C y $G \subset F$. Entonces, G es una cara de C si y solo si G es una cara de F.
    Definición: Dados $C \subset \mathbb{R}^d$ convexo cerrado y $F \subset C$. Se dice que F es una cara de C si

    $$\forall y, z \in C \; y \neq z \text{ t.q. } (y, z) \cap F \neq \emptyset \;\to\; [y, z] \subset F.$$

11. Sea $C \subset \mathbb{R}^d$ convexo cerrado y $x \in C$. Pruebe que son equivalentes:

    a) x es punto extremo de C.

    b) $\{x\}$ es una cara de C.

c) $C \setminus \{x\}$ es convexo.

12. Sea $C \subset \mathbb{R}^d$ convexo cerrado y $M \subset C$. Si $C = \text{co}(M)$ entonces $\text{ext}(C) \subset M$. Donde $\text{ext}(C)$ es el conjunto de puntos extremos de C.

13. Probar:

    a) R^d es un poliedro no acotado.

    b) Los hiperplanos son poliedros.

    c) Los subespacios de R^d son poliedros.

14. Sea $Q \subset \mathbb{R}^d$ y A un subespacio afín de $\mathbb{R}^d$ tal que $Q \subset A \neq \mathbb{R}^d$. Entonces, Q es la intersección de un número finito de semiespacios cerrados en A o $Q = A$.

15. Sea $A \subsetneq \mathbb{R}^d$ afín y sea $Q \subset A$ tal que Q es la intersección de un número finito de semiespacios cerrados en A o $Q = A$. Entonces Q es poliedro.

16. Los poliedros son cerrados y convexos.

17. La intersección de un número finito de poliedros es un poliedro.

18. Probar

    a) La traslación de un poliedro es un poliedro.

    b) La imagen de un poliedro por una transformación afín es un poliedro.

19. Sea $P \subset \mathbb{R}^d$. Entonces, P es un politopo si y solo si es un poliedro acotado.

20. Sean P_1 y P_2 politopos en $\mathbb{R}^d$ tal que $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$. Entonces $P_1 \cap P_2$ es un politopo.

21. Sea P un politopo en $\mathbb{R}^d$ y A un subespacio afín de $\mathbb{R}^d$ tal que $P \cap A \neq \emptyset$. Entonces $P \cap A$ es un politopo.

22. Considere el politopo $Q = \text{co}(v_1, \cdots, v_k)$ con $v_i \in \mathbb{R}^d$ para todo i. Probar que para función objetivo inducida por un $c \in \mathbb{R}^d$ cualquiera, existe algún v_j tal que $c^t v_j \leq c^t x$ para todo $x \in Q$.