Octava sesión

Análisis Convexos - CM3E2

Jonathan Munguia[1]

[1]Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

6 de mayo de 2021

Outline

Teorema 1 (Teorema de la proyección)

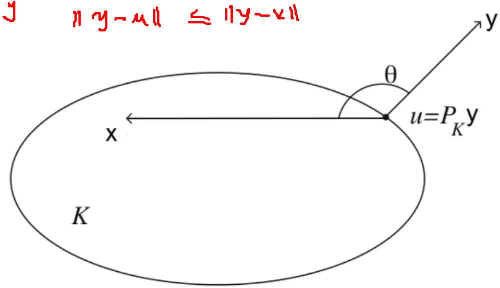
Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo cerrado no vacío. Entonces para cada $y \in \mathbb{R}^n$, existe un único $u \in K$ tal que

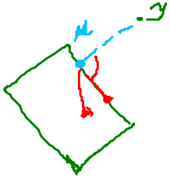
$$\|y-u\| = dist(y,K) := \min_{x \in K} \|y-x\|. \tag{1}$$

Además, u esta caracterizado por la propiedad

$$u \in K \quad \wedge \quad \langle y-u, x-u \rangle \leq 0 \quad \forall x \in K. \tag{2}$$

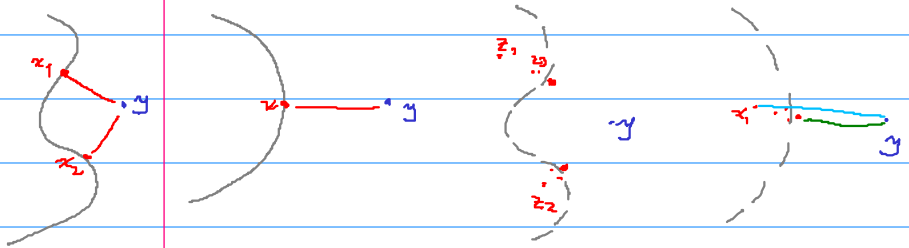
$\|y-u\| \leq \|y-x\|$



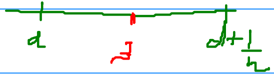


- La clausura del conjunto $\Longrightarrow$ existencia de un punto mínimo

- La convexidad $\Longrightarrow$ unicidad del punto mínimo



$$d = \inf_{x \in K} \|y - x\|$$



$\|y - x_n\|$

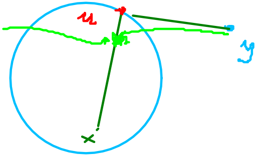
$\exists\ (x_n) \subset K$ tq $\quad d \leq \|y - x_n\| < d + \frac{1}{n}$

sucesión minimizante

$\|y - x_n\| \longrightarrow d$

 Teorema de Krein-Milman

$(1-t)u + tx$



$\|y-u\| \leq \|y-x\|$

$\leq \|y-(1-t)u-tx\|$

$\forall\ t \in (0,1)$

Observación 1

El elemento u es llamado proyección de y sobre K y es denotado por

$$u = P_K\, y.$$

$\langle y-u, x-u\rangle \leq 0$

Observación 2 (Ley del paralelogramo)

$\|u\|^2 = \langle u,u\rangle$

Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, se verifica:

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2).$$

Demostración

$x_n \quad \overset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} \quad x_m$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n, m > N$

$\| x_n - x_m \| < \varepsilon$

Cauchy

Ver Teorema 5.2 de [1].

a. Sea $d = \inf_{x \in K} \|y - x\|$ y una sucesión minimizante de este ínfimo, es decir $\{x_n\} \subset K$ tal que $d_n = \|y - x_n\| \Longrightarrow d$.

b. La sucesión $\{x_n\}$ es de cauchy, basta considerar la ley del paralelogramo para $a = y - x_n$ y $b = y - x_m$:

x_n es convergente

$$\left| y - \frac{x_n + x_m}{2} \right|^2 + \left| \frac{x_n - x_m}{2} \right|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2)$$

Como $\frac{x_n + x_m}{2} \in K$ se tiene $\left| y - \frac{x_n + x_m}{2} \right| \geq d$. Luego

Convexidad!

$$0 \leq \left| \frac{x_n - x_m}{2} \right|^2 \leq \frac{1}{2}(\underset{\to d^2}{d_n^2} + \underset{\to d^2}{d_m^2}) - d^2.$$

Entonces, $\lim_{m,n \to \infty} |x_n - x_m| = 0$. $\Rightarrow (x_n)$ es de Cauchy

$d = \lim_{n\to\infty} \|y - x_n\| = \|y - \lim x_n\| = \|y-u\|$

cerrado

Demostración (cont...)

c. Por lo tanto $\{x_n\}$ converge a algún límite $u \in K$ con $d = \|y - u\|$.

d. 1⇒2) Sea $x \in K$. Se tiene $(1-t)u + tx \in K \quad \forall t \in (0,1)$, así

convexidad

$$\|y-u\| \le \|y-(1-t)u - tx\| = \|(y-u) - t(x-u)\|.$$

$\langle (y-u) - t(x-u), (y-u) - t(x-u)\rangle$

Por lo tanto,

$$\|y-u\|^2 \le \|y-u\|^2 - 2t\langle y-u, x-u\rangle + t^2\|x-u\|^2,$$

lo cual implica que $2\langle y-u, x-u\rangle \le t\|x-u\|^2 \ \forall t \in (0,1)$. Se concluye tomando $t \to 0$.

$\to 0$

$\langle y-u, x-u\rangle \le 0$

$\|y-u\| \le \|y-x\| \quad \forall\, x \in K$

$\langle y-u,\, x-u\rangle \le 0 \quad \forall\, x \in K$

Demostración (cont...)

e. 2⇒1) Basta notar que

$$\|y-u\|^2 - \|y-x\|^2 = 2\overbrace{\langle y-u, x-u\rangle}^{\le 0} \overbrace{- \|x-u\|^2}^{\le 0} \le 0 \quad \forall x \in K.$$

f. Unicidad: Asuma que u_1 y u_2 satisface (2), se tiene

$$\langle y-u_1, \overset{u_2}{x}-u_1\rangle \le 0 \quad x \in K, \tag{3}$$
$$\langle y-u_2, \overset{u_1}{x}-u_2\rangle \le 0 \quad x \in K. \tag{4}$$

$\langle u_2-u_1, u_2-u_1\rangle \le 0$

Eligiendo $x = u_2$ en (3) y $x = u_1$ en (4), se concluye sumando las desigualdades resultantes.

$0 \le \|u_2-u_1\|^2 \le 0$

$u_2 = u_1$

Teorema 2 (Teorema de separación fuerte)

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo cerrado no vacío con $y \notin K$. Entonces existe un vector $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que

$\{x \mid \langle x, a\rangle \geq b\}$

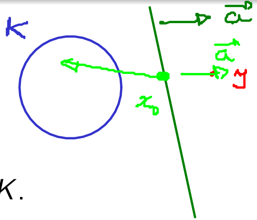
$$\langle a, x\rangle \leq b < \langle a, y\rangle \quad \forall x \in K.$$

H^+

Demostración

H^-

$= \{x \mid \langle x, a\rangle \leq b\}$



Ver Teorema 3.2.2 de [2].

1. Por el Teorema 1 existe un único $u \in K$ tal que

$$\langle \overbrace{y-u}^{0 \neq a}, x-u\rangle \leq 0 \quad \forall x \in K.$$

$H = \{x \mid \langle x, a\rangle = b\}$

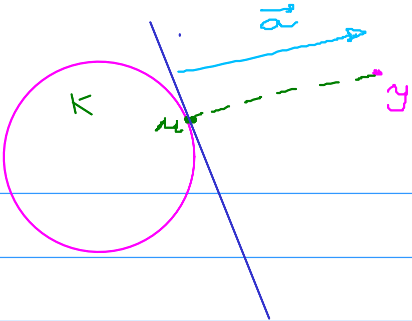
Luego, tomando $a = y - u$, se tiene

$K \subset H^-$

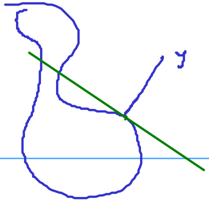
$y \in H^+, y \notin H$

$\langle x, a\rangle \leq b < \langle y, a\rangle$

$$
\begin{aligned}
a^2 = \|y-u\|^2 &= \langle y-u, y-u\rangle \\
&\leq \langle y-u, y-u\rangle - \langle y-u, x-u\rangle \\
&= \langle y-u, y-x\rangle = \langle a, y-x\rangle.
\end{aligned}
$$



$\vec{a}$
K
u
y



y

$$\overbrace{\sup_{x\in K}\langle a,x\rangle}^{b} \leq \langle a,y\rangle - \|a\|^2$$

Demostración

2. De lo anterior, se obtiene

$$\langle a,x\rangle \leq \langle a,y\rangle - \|a\|^2 \quad \forall x \in K.$$

3. Tomando $b = \sup_{x\in K}\langle a,x\rangle$, lo que implica,

$b = \langle u, x\rangle$

$$\langle a,x\rangle \leq b \quad \forall x \in K. \tag{5}$$

Por defnción de supremo y $a \neq 0$, se tiene

$$b \leq \langle a,y\rangle \underbrace{- \|a\|^2}_{<0} < \langle a,y\rangle. \tag{6}$$

De (5) y (6) concluimos.

$K \subset H^-$ $\langle a,x\rangle \leq b < \langle a,y\rangle \quad \forall x \in K$

$H = H(a,b)$

Observación 3

El Teorema 2 nos dice que existe un hiperplano $H := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a\rangle = b\}$ que separa fuertemente $\{y\}$ y K, es decir

$$\langle a, x\rangle \leq b < \langle a, y\rangle \quad \forall x \in K.$$

Observación 4

Dado $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo cerrado no vacío y $x_0 \in C$. Si $C \subset K = \{x : \langle x, a\rangle \leq b\}$ (semiespacio), entonces se dice que $H = \{x : \langle x, a\rangle = b\}$ es un hiperplano de soporte a C en x_0 si y solo si

$$\langle x, a\rangle \leq b = \langle x_0, a\rangle \quad \forall x \in C.$$

Teorema 3 (Plano de soporte)

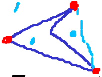
Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ convexo compacto no vacío y $\overline{x}$ un punto frontera de K. Entonces, existen $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle x, a\rangle \leq b = \langle \overline{x}, a\rangle \left(= \sup_{x \in K} \langle x, a\rangle \right) \quad \forall x \in K.$$

En otras palabras: Existe $H = \{x : \langle x, a\rangle = b\}$ un hiperplano de soporte a K en $\overline{x}$.

Demostración

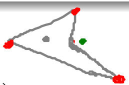
Ver Teorema 3.2.3 de [2].

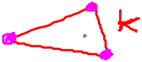


Teorema 4 (Krein-Milman,1940)

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ convexo compacto no vacío y sea $E = ext(K)$, conjunto de puntos extremos de K. Entonces, $co(E) = K$.

$K \subset co(E)$





Demostración

1. Basta ver que $K \subset \text{co}(E)$. Procediendo por contradicción, existe $x_0 \in K$ tal que $x_0 \notin \text{co}(E)$.
2. Por el Teorema 2, existe $H = \{x : \langle x, a\rangle = b\}$ con $a \neq 0$ el cual separa estrictamente $\{x_0\}$ y $\text{co}(E)$, es decir

$$\langle x, a\rangle \leq b < \langle x_0, a\rangle \quad \forall x \in \text{co}(E). \tag{7}$$

3. Como K es compacto (acotado) y $f(x) = \langle x, a\rangle$ es continua en K, entonces por el T. de Weierstrass

$$\exists u \in K, \;\; c = \langle u, a\rangle = \max_{x\in K}\langle x, a\rangle \geq \langle x_0, a\rangle > b \tag{8}$$

$K \subset \overline{H_c}$

Demostración (cont...)

4. Dado $H_c = \{x : \langle x, a\rangle = c\}$, se tiene que $u \in H_c$ y $x \in \mathcal{H}_c = \{x : \langle x, a\rangle \leq c\}$ para todo $x \in K$, es decir

$$\langle x, a\rangle \leq c = \langle x, u\rangle \quad \forall x \in K.$$

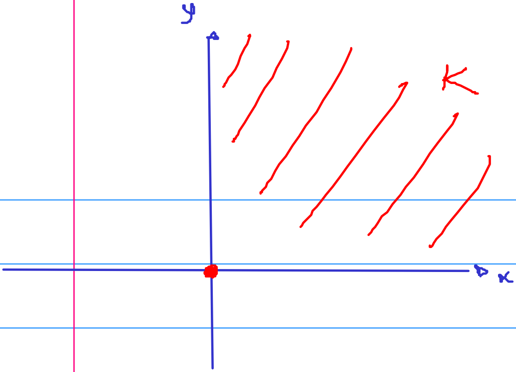
   Por tanto, H_c es un hiperplano de soporte de K en u.

5. Por el Teorema 3 de la sesión 7, se tiene que H_c admite al menos un punto extremo $\hat{x}$ de K. Por tanto, $\hat{x} \in E$ y por ende $\hat{x} \in \mathrm{co}(E)$.

6. De (7) y (8), se tiene $\hat{x} \in K \cap H_c$

$$c > b \geq \langle x, a\rangle \quad x \in \mathrm{co}(E),$$

   en particular para $\hat{x} \in H_c$, se tiene $c > \langle \hat{x}, a\rangle = c$, lo cual es una contradicción.



El no ser acotado

$co(E) \supset K$

No se va a cumplir

Teorema 5

Si S es un subconjunto finito de $\mathbb{R}^n$ y $E = ext(co(S))$, entonces $E \subset S$.

Demostración

Ver Teorema 8.1.4 de [2].

Referencias bibliográficas

1. Brezis, Heim. Functional Analysis, Sobolev Spaces, and Partial Differential Equations. Springer New York, 2011.
2. Panik, Michael J. Fundamentals of Convex Analysis. Duality, Separation, Representation, and Resolution, 1993.

FIN