7. Hallar las curvas que verifican cada una de las siguientes propiedades geométricas:

   a) La distancia de un punto de la curva al origen es igual a la longitud del segmento de la normal en el punto delimitado por el propio punto y el eje OX.

   b) La proyección sobre el eje OX de la parte de la normal en (x, y) delimitada por (x, y) y el eje OX es 1.

   c) La proyección sobre el eje OX de la parte tangente entre (x, y) y el eje OX tiene longitud 1.

   d) La distancia del origen a cada tangente es igual a la abcisa del punto de tangencia correspondiente.

8. Hallar las trayectorias ortogonales a las familias de curvas siguientes:

$$\text{(a) } x^2 + y^2 = c^2. \quad \text{(b) } y^2 = 4c(x + c). \quad \text{(c) } y = cx^4.$$

9. Hallar la ecuación diferencial que proporcionan las curvas planas (respecto de un sistema de coordenadas cartesianas regular) tales que la tangente a la curva en los puntos M de ella que corta al eje OY en un punto B de forma que $\overline{MB} = \overline{AB}$ siendo A=$(0, 0)$ en un punto fijo del eje OX.

10. Hallar la ecuación de las curvas planas tales que la tangente en un punto M cualquiera de ellas corta al eje OY en un punto P de modo que el punto medio del segmento $\overline{MP}$ está en la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 1$.

11. Comenzó a nevar una mañana y continuó nevando con regularidad durante todo el día. Al mediodía una maquina quitanieve comenzó a limpiar una carretera a ritmo constante en términos de volumen de nieve retirado por hora. A las dos de la tarde la máquina había avanzado dos kilómetros y a las cuatro de la tarde tan sólo un kilómetro más. ¿A que hora comenzó a nevar?

12. Entre los alumnos de esta asignatura se extiende el rumor de que el examen de problemas va a ser muy difícil. Si hay 1000 alumnos de dicha asignatura y el rumor se extiende de manera proporcional al número de alumnos que todavía no lo han oído, ¿cuántos días tardarán en saberlo 950 alumnos sabiendo que a los dos días lo sabían 850 alumnos?

13. Un tanque contiene inicialmente 1000 litros de solución salina que contiene 10 Kg. de sal. Otra solución salina que contiene 25 Kg. de sal por litro se vierte en el tanque a la razón de $10\, l/\min$ mientras que simultaneamente, la solución bien mezclada sale del tanque a razón de $15\, l/\min$. Encontrar la cantidad de sal que hay en el tanque en un momento t.

14. En una galería subterranea de $15 \times 15 \times 1.2m$ hay un 0.2% de CO_2, mientras que el aire del exterior tiene un 0.055% de CO_2. Se instalan ventiladores que introducen en la galería 9 metros cúbicos de aire del exterior por minuto, de forma que por el otro extremo de la galería sale la misma cantidad de aire. ¿Qué concentración de CO_2 habrá al cabo de 20 minutos en la galería?

15. En una mañana de sábado, mientras las personas trabajan, un calefactor mantiene la temperatura interior de un edificio a $21\,^oC$. A mediodía se apaga el calentador y la gente regresa a

casa. La temperatura exterior permanece constante a $12\,^oC$ durante el resto de la tarde. Si la constante de tiempo del edificio es de 3 horas, ¿en qué momento la temperatura interior del edificio será de $16\,^o$C?

16. Un taller mecánico sin calefacción ni aire acondicionado tiene una constante de tiempo de 2 horas. Si la temperatura exterior varía según la función $E(t) = 30 - 15\cos(2\pi t/24)$, determinar la temperatura del taller a lo largo del día.

17. En un día caluroso con una temperatura exterior de $40\,^oC$, se enciende dentro de un edificio un aparato aire acondicionado que disipa 24000 kilocalorías por hora. El aprovechamiento es de medio grado por cada 1000 kilocalorías y la constante de tiempo del edificio es de 3 horas. Si inicialmente la temperatura del edificio era de $35\,^oC$, determinar la temperatura al cabo de 3 horas. ¿Cuál es el valor máximo de temperatura que puede tener el edificio en estas condiciones?

Capítulo 4

Teoría general de sistemas y ecuaciones lineales

Sumario. Sistemas de ecuaciones diferenciales. Teorema de existencia y unicidad de soluciones. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Teorema de existencia y unicidad de soluciones. Sistemas homogéneos: Teorema de caracterización de soluciones. Sistemas no homogéneos: Teorema de caracterización de soluciones. Ecuaciones diferenciales lineales de orden n. Teoremas de caracterización de soluciones.

4.1 Introducción a los sistemas de ecuaciones diferenciales

Para nosotros, un sistema de ecuaciones diferenciales es una expresión de la forma

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', y_2, y_2', ..., y_m, y_m') = 0; \\ F_2(x, y_1, y_1', y_2, y_2', ..., y_m, y_m') = 0; \\ \vdots \\ F_m(x, y_1, y_1', y_2, y_2', ..., y_m, y_m') = 0; \end{cases}$$

donde $y_1, y_2, ..., y_m$ son funciones reales a determinar que dependen de x y $F_i : A \subseteq \mathbb{R}^{1+2m} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, son funciones reales de varias variables. Se suele suponer que hay igual número de ecuaciones que de incógnitas de manera que todas las ecuaciones son independientes, es decir, ninguna puede deducirse de las demás. Estamos interesados en aquellos sistemas de ecuaciones diferenciales en los que podemos despejar la primera derivada de cada una de las funciones incógnita, es decir, sistemas de la forma

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ \vdots \\ y_m' = f_m(x, y_1, y_2, ..., y_m); \end{cases}$$

donde $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^{1+m} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, son funciones reales. Ejemplos de estos sistemas son

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 + y_2^2; \\ y_2' = x + y_1 + y_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 + y_2^2 - y_3; \\ y_2' = x + y_1 + y_2 y_3; \\ y_3' = y_1 y_2 y_3; \end{cases}$$

En general la resolución de estos sistemas no es posible, salvo en casos excepcionales. Sólo para el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, que veremos un poco más tarde existen algoritmos que permiten el cálculo explícito de las soluciones. Sin embargo, es relativamente sencillo saber cuándo un sistema tiene solución, o más precisamente cuándo un problema de condiciones iniciales asociado tiene solucón. Primero claro está, debemos definir qué entendemos por un problema de condiciones iniciales para sistemas de ecuaciones diferenciales. Dicho problema es un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ \vdots \\ y_m' = f_m(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_1(x_0) = y_1, y_2(x_0) = y_2, ..., y_m(x_0) = y_m \end{cases}$$

junto con las condiciones $y_i(x_0) = y_i$, donde $x_0, y_1, y_2, ..., y_m$ son números reales. Por ejemplo

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 + y_2^2 - y_3; \\ y_2' = x + y_1 + y_2 y_3; \\ y_3' = y_1 y_2 y_3; \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1, \end{cases}$$

es un problema de condiciones iniciales. Nótese que todas las condiciones iniciales implican el conocimiento de la función en 0, es decir, lo siguiente

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 + y_2^2 - y_3; \\ y_2' = x + y_1 + y_2 y_3; \\ y_3' = y_1 y_2 y_3; \\ y_1(0) = 2, y_2(1) = 0, y_3(0) = 1, \end{cases}$$

no sería un problema de condiciones iniciales, ya que conocemos y_2 en 1 e y_1 e y_3 en 0.

Para el caso de los problemas de condiciones iniciales para sistemas de ecuaciones diferenciales tenemos el siguiente resultado análogo al de ecuaciones diferenciales de orden uno.

Teorema 4.1 *Sea el problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ \vdots \\ y_m' = f_m(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_1(x_0) = y_1, y_2(x_0) = y_2, ..., y_m(x_0) = y_m \end{cases}$$

donde $(x_0, y_1, ..., y_m) \in A$, $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^{1+m} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, *son funciones reales continuas en el abierto* A. *Supongamos además que las funciones* $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ *existen y son continuas en* A. *Entonces existe una solución del problema de condiciones iniciales anterior* $y_i : I \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, *definido en un intervalo abierto* I *de la recta real.*

Este resultado es fácil de aplicar. Por ejemplo el problema que consideramos anteriormente

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 + y_2^2 - y_3; \\ y_2' = x + y_1 + y_2 y_3; \\ y_3' = y_1 y_2 y_3; \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1, \end{cases}$$

es tal que $f_1(x, y_1, y_2, y_3) = xy_1 + y_2^2 - y_3$, $f_2(x, y_1, y_2, y_3) = x + y_1 + y_2 y_3$ y $f_3(x, y_1, y_2, y_3) = y_1 y_2 y_3$ son funciones definidas en $\mathbb{R}^4$, continuas y las derivadas parciales de cada función respecto de y_1, y_2 e y_3 son continuas. Entonces este problema de condiciones iniciales tiene solución única, aunque no tengamos ni idea de cómo calcularla. Se verá en la asignatura de cuarto curso métodos numéricos cómo obtener soluciones aproximadas, y en esta misma asignatura estudiaremos cómo obtener información parcial sobre el sistema incluso sin conocer las soluciones.

4.2 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Como hemos comentado anteriormente en general no va a ser posible resolver sistemas de ecuaciones diferenciales salvo en ciertos casos particulares. Uno de ellos va a ser el de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, cuya teoría general pasamos a estudiar. Vamos a ver a continuación cómo son las soluciones de un sistema de este tipo, pero antes necesitamos conocer un poco más sobre éstos. Un sistema de *ecuaciones diferenciales lineales* es una expresión de la forma

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + ... + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + ... + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + ... + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases}$$

donde para cada $1 \leq i, j \leq n$, a_{ij} y b_j son funciones reales definidas sobre un intervalo I. Si denotamos por

$$\mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x))_{1\leq i\leq n}^{1\leq j\leq n} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & ... & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & ... & a_{2n}(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & ... & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

y por

$$\mathbf{b}(x) = (b_1(x), b_2(x), ..., b_n(x))^t = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ ... \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)^t = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix},$$

el sistema anterior puede escribirse de forma matricial como

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x), \tag{4.1}$$

donde por $\mathbf{y}'$ se entenderá la derivada coordenada a coordenada, es decir,

$$\mathbf{y}' = (y_1', y_2', ..., y_n')^t = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ ... \\ y_n' \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, los sistemas

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 + e^x y_2 + 1 - x^2, \\ y_2' = y_1 - y_2 + e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + x^2 y_2 + y_3 + 1 - x^2, \\ y_2' = xy_1 - x^2 y_2 + e^{-x}, \\ y_3' = y_1 + (1-x)y_2 + y_3 \end{cases}$$

son lineales. Un sistema se dirá *homogéneo* si $\mathbf{b}(x) = (0, 0, ..., 0)^t$, es decir, el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + x^2 y_2 + y_3, \\ y_2' = xy_1 - x^2 y_2, \\ y_3' = y_1 + (1-x)y_2 + y_3 \end{cases}$$

es homogéneo. Se dirá *no homogéneo* en caso contrario. Nosotros le prestaremos una gran atención a los sistemas lineales con coeficioentes constantes. Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales se dirá de *coeficientes constantes* si la matriz $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}$ es constante. Ejemplos de tales sistemas, tanto homogéneos como no homogéneos son

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + 1 - x^2, \\ y_2' = y_1 - y_2 + e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 - y_2 + 7y_3, \\ y_3' = -4y_1 + y_2 + y_3. \end{cases}$$

Veremos en los sucesivos temas cómo resolver estos últimos sistemas, dando un algoritmo que permitirá el cálculo de la solución general del mismo.

Previamente, estudiaremos la teoría general de los sistemas de ecuaciones lineales y para posteriormente particularizarla al caso de las ecuaciones lineales de orden mayor o igual que dos (ver la última sección de este tema). Esta teoría general de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales se sustenta en la noción de espacio vectorial de dimensión finita estudiadas en la parte de álgebra lineal impartida durante el curso y utiliza el siguiente resultado sobre existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones y sistemas que se deducen directamente del Teorema 4.1.

Teorema 4.2 *Sea* $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$ *un sistema de ecuaciones diferenciales lineales donde* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{b}$ *están definidas en un intervalo* $I_{x_0} = [x_0 - a, x_0 + a]$. *Si estas funciones son continuas en dicho intervalo, entonces el problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

tiene solución única definido en todo I_{x_0}.

Recordemos por un instante dos nociones que será importante tener claras para entender la teoría que a continuación vamos a desarrollar. Por un lado hemos de tener presente que bajo la notación que estamos utilizando, una solución de un sistema lineal es una función $\mathbf{y} : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, o dicho de otro modo, un vector cuyas componentes son funciones reales. Por ejemplo, dado el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1, \end{cases}$$

una solución del mismo es $\mathbf{y}(x) = (\sin x, \cos x)^t$, es decir, $y_1(x) = \sin x$ e $y_2(x) = \cos x$.

Por otra parte, recordemos una noción de básica del álgebra lineal. Si tenemos n vectores cuyas componentes son funciones $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$, se dicen linealmente independientes si para toda combinación lineal

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n = \mathbf{0},$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, y $\mathbf{0}$ es el vector que tiene a la función nula en cada componente, entonces necesariamente $\alpha_i = 0$, $1 \leq i \leq n$.

Vamos a empezar el estudio de los sistemas homogéneos, empezando por el siguiente resultado. Las demostraciones de los siguientes resultados están basados en el Teorema 4.2.

Teorema 4.3 *El conjunto de soluciones del sistema homogéneo*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} \tag{4.2}$$

tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n *sobre* $\mathbb{R}$*, esto es, cualquier solución* $\mathbf{y}$ *del mismo es de la forma*

$$\mathbf{y} = c_1 \cdot \mathbf{y}_1 + c_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + c_n \cdot \mathbf{y}_n$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ *e* $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ *son soluciones linealmente independientes del mismo.*

Demostración. En primer lugar, veamos que cualquier combinación lineal de soluciones del sistema (4.2) es una solución del mismo. Para ello, sean $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_k$ soluciones de (4.2) y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$. Consideramos el vector de funciones $\mathbf{z} = \alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_k \cdot \mathbf{y}_k$ y derivamos respecto de la variable independiente (notar que $\mathbf{z} = \mathbf{z}(x)$), obteniéndose, por ser $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_k$ soluciones de (4.2) que

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}' &= \alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1' + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2' + ... + \alpha_k \cdot \mathbf{y}_k' \\
&= \alpha_1 \cdot \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_k \cdot \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}_k \\
&= \mathbf{A}(x) \cdot [\alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_k \cdot \mathbf{y}_k] \\
&= \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{z},
\end{aligned}$$

que prueba que $\mathbf{z}$ es solución.

Sea ahora $\mathcal{C} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, es decir, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\mathbf{u}_i$ es el vector de $\mathbb{R}^n$ que tiene 0 en todas las componentes salvo en la i–ésima, donde tiene un 1. Sea x_0 un número real y supongamos que $\mathbf{A}(x)$ está definida en I_{x_0} (ver Teorema 4.2). Para cada $1 \leq i \leq n$, consideramos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}; \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{u}_i. \end{cases}$$

En virtud del Teorema 4.2, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ existe una única solución de dicho problema, que denotaremos por $\mathbf{y}_i$, definida en I_{x_0}. Vamos a ver que $\mathcal{B} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n\}$ forman una base del conjunto de soluciones del sistema 4.2.

Veamos primero que son linealmente independientes. Para ello sea

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n = \mathbf{0}.$$

Particularizamos en x_0 y obtenemos que

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1(x_0) + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2(x_0) + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n(x_0) = \mathbf{0}(x_0) = \mathbf{0},$$

y por ser cada $\mathbf{y}_i$ solución del problema de condiciones iniciales, $\mathbf{y}_i(x_0) = \mathbf{u}_i$, $1 \leq i \leq n$, de donde

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Como los vectores $\mathbf{u}_i$ son los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, son linealmente independientes y por tanto $\alpha_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, de donde $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ son linealmente independientes.

Acto seguido, vamos a ver que $\mathcal{B}$ es un sistema generador del conjunto de soluciones del sistema (4.2). Para ello sea $\mathbf{z}$ una solución arbitraria del sistema (4.2). Sea x_0 el número real del apartado anterior. Como $\mathcal{C}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, se verifica que existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{z}(x_0) = \alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{u}_n.$$

Sea el vector de funciones

$$\mathbf{z}_1 = \alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n$$

y consideremos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}; \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{z}(x_0). \end{cases}$$

Claramente tanto $\mathbf{z}$ como $\mathbf{z}_1$ son soluciones de dicho problema. Como la solución es única en virtud del Teorema 4.2, se tiene que

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 = \alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n,$$

por lo que $\mathcal{B}$ también es un sistema generador y la demostración concluye. ■

Aunque el resultado anterior caracteriza las soluciones del sistema homogéneo, el cálculo explícito de las soluciones dista mucho de estar al alcance. Un primer avance en el objetivo del cálculo de las soluciones lo proporciona el determinante *wronskiano*, definido de la manera siguiente.

Dadas $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se define su determinante wronskiano como la función real $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n] : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida todo $x \in I$ como

$$W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n](x) := |\mathbf{y}_1(x); \mathbf{y}_2(x); ...; \mathbf{y}_n(x)|.$$

El determinante wronskiano resulta ser útil a la hora de determinar si n soluciones del sistema homogéneo son o no linealmente independientes, como pone de manifiesto el siguiente resultado.

Proposición 4.4 *Sean $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ soluciones del sistema homogéneo $\mathbf{y}' = A(x) \cdot \mathbf{y}$. Son equivalentes:*

(a) $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ son linealmente independientes.

(b) $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n](x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

(c) Existe $x_0 \in I$ tal que $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n](x_0) \neq 0$.

Demostración. Veamos en primer lugar que (a) implica (b). Procedemos por reducción al absurdo suponiendo que (b) es falso, esto es, existe $x_0 \in I$ tal que $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n](x_0) = 0$. Entonces los vectores de $\mathbb{R}^n$ son linealmente dependientes, es decir, existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tal que

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1(x_0) + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2(x_0) + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n(x_0) = \mathbf{0}.$$

Consideremos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}; \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Obviamente el vector de funciones $\mathbf{0}$ (cuyas componentes son la función nula) es solución de dicho problema. Por otra parte, procediendo como en el final de la demostración del Teorema 4.3, vemos que la función

$$\mathbf{z} = \alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n$$

también es solución de dicho problema. Como la solución debe ser única por el Teorema 4.2, tenemos que

$$\mathbf{z} = \mathbf{0} = \alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n.$$

Como los escalares α_i no eran todos nulos, tenemos que las funciones $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ no pueden ser linealmente independientes, lo que nos lleva a una contradicción.

(b) implica (c) es trivial. La demostración de (c) implica (a) es análoga a la demostración del Teorema 4.3, cuando se comprueba que las funciones son linealmente independientes. ■

Ahora bien, seguimos todavía muy lejos de resolver un sistema homogéneo. De hecho, los métodos que permitirán dar soluciones explícitas a los sistemas planteados tendrán que esperar a los próximos temas. La teoría general, en lo que a la estructura de las soluciones, queda cerrada al establecer la siguiente caracterización de los sistemas no homogéneos.

Teorema 4.5 *El conjunto de soluciones del sistema*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \tag{4.3}$$

es de la forma

$$\mathbf{y} = c_1 \cdot \mathbf{y}_1 + c_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + c_n \cdot \mathbf{y}_n + \mathbf{y}_p,$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ *son soluciones linealmente independientes del problema homogéneo e* $\mathbf{y}_p$ *es una solución particular del problema no homogéneo.*

Demostración. Sea $\mathbf{y}_p$ una solucion particular del sistema (4.3) y sea $\mathbf{y}$ otra solución. Consideremos el vector de funciones $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_p$ y veamos que es solución del sistema homogéneo asociado a (4.3). Para ello calculamos

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= \mathbf{y}' - \mathbf{y}_p' \\ &= \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x) - [\mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}_p + \mathbf{b}(x)] \\ &= \mathbf{A}(x) \cdot [\mathbf{y} - \mathbf{y}_p] \\ &= \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Por el Teorema 4.2, existen soluciones del sistema homogéneo asociado linealmente independientes $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ tales que

$$\mathbf{z} = c_1 \cdot \mathbf{y}_1 + c_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + c_n \cdot \mathbf{y}_n,$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta la definición de $\mathbf{z}$ concluimos que

$$\mathbf{y} = c_1 \cdot \mathbf{y}_1 + c_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + c_n \cdot \mathbf{y}_n + \mathbf{y}_p,$$

con lo que se concluye la demostración. ■

4.3 Teoría general para ecuaciones lineales de orden n

Una ecuación diferencial de orden $n > 1$ es una expresión de la forma

$$y^{n)} = f(x, y, y', ..., y^{n-1)}), \tag{4.4}$$

donde $f : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Esta ecuación puede transformarse en un sistema de ecuaciones diferenciales de orden uno de la manera siguiente. Introducimos las variables dependientes $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$,...,$y_n = y^{n-1)}$ y entonces la ecuación (4.4) puede escribirse como el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ ... \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}$$

Por ejemplo, la ecuación de orden tres

$$y^{3)} = x + yy' - y'',$$

puede escribirse como el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = x + y_1 y_2 - y_3. \end{cases}$$

De aqui se ve que para tener un problema de condiciones para la ecuación, necesitamos n condiciones iniciales $y_1(x_0) = y(x_0) = y_0$, $y_2(x_0) = y'(x_0) = y_0'$,...,$y_n(x_0) = y^{n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$, es decir, necesitamos conocer el valor de la función y de las sucesivas derivadas hasta la $n-1$ en un punto x_0. Entonces, en virtud del Teorema 4.1 vemos que si f es continua y las derivadas $\frac{\partial f}{\partial y_i}$, $1 \leq i \leq n$, son continuas, el problema de condiciones iniciales tiene solución única. Por ejemplo, el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y^{3)} = x + yy' - y'', \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2, \end{cases}$$

tiene solución única.

Nos ocuparemos expecialmente de ecuaciones diferenciales de orden n que llamaremos lineales y que a continuación describimos. Por una *ecuación diferencial lineal de orden n* entenderemos una expresión de la forma

$$a_n(x)y^{n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \tag{4.5}$$

donde para $0 \leq i < n$, a_i y b son funciones reales de variable real definidas en un intervalo de la recta real I. Siempre que $a_n(x)$ sea diferente de cero, podemos escribir la ecuación como

$$y^{n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \tag{4.6}$$

donde $p_i(x) = a_i(x)/a_n(x)$, $0 \leq i < n$, y $q(x) = b(x)/a_n(x)$. Por ejemplo, las ecuaciones

$$y''' + x^2 y' = x,$$

$$y'' + 2y' + y = e^x,$$

$$y^{6)} - 7e^x y^{3)} + x^2 y'' + (\log x)y = 0$$

son ecuaciones lineales de órdenes tres, dos y seis, respectivamente. Como hemos visto anteriormente, una ecuación de orden n puede escribirse como el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ ... \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = q(x) - [p_{n-1}(x)y_n + ... + p_1(x)y_2 + p_0(x)y_1], \end{cases}$$

que en forma matricial se escribe como

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

donde

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ -p_0(x) & -p_1(x) & -p_2(x) & -p_3(x) & ... & -p_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{b}(x) = (0, 0, ..., 0, q(x))^t$. Diremos entonces que la ecuación (4.5) es *homogénea* o *no homogénea* según se sea $\mathbf{b}(x)$ nulo o no, es decir, si $q(x) = 0$ para todo x. Además, la ecuación se dirá *de coeficientes constantes* cuando $\mathbf{A}(x)$ sea constante, es decir, cuando $p_i(x) = p_i \in \mathbb{R}$ para todo $0 \leq i < n$.

Tanto los Teoremas 4.3 y 4.5 como la Proposición 4.4 admiten la siguiente lectura en términos de ecuaciones lineales. A la vista de que cualquier ecuación lineal puede escribirse como un sistema añadiendo las derivadas como funciones, cualquier solución del sistema $\mathbf{y}$ es de la forma $(y, y', ..., y^{n-1})$, donde $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función suficientemente derivable. En esta línea, destacamos entonces que el wronskiano puede escribirse como

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2, ..., y_n](x) &= W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n](x) := |\mathbf{y}_1(x); \mathbf{y}_2(x); ...; \mathbf{y}_n(x)| \\ &= \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & y_2(x) & y_n(x) \\ y_1'(x) & ... & y_2'(x) & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{n-1)}(x) & ... & y_2^{n-1)}(x) & y_n^{n-1)}(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

donde $y_1, y_2, ..., y_n$ son las primeras componentes de $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$. Podremos enunciar entonces los siguientes resultados.

Teorema 4.6 *El conjunto de soluciones de la ecuación homogénea*

$$y^{n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$, esto es, cualquier solución y de la misma es de la forma

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + ... + c_n \cdot y_n$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2, ..., y_n$ son soluciones linealmente independientes del mismo.

Proposición 4.7 *Sean $y_1, y_2, ..., y_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ soluciones de la ecuación homogénea*

$$y^{n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0.$$

Son equivalentes:

(a) $y_1, y_2, ..., y_n$ son linealmente independientes.

(b) $W[y_1, y_2, ..., y_n](x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

(c) Existe $x_0 \in I$ tal que $W[y_1, y_2, ..., y_n](x_0) \neq 0$.

Teorema 4.8 *El conjunto de soluciones de la ecuación*

$$y^{n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

es de la forma

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + ... + c_n \cdot y_n + y_p,$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2, ..., y_n$ son soluciones linealmente independientes del problema homogéneo e y_p es una solución particular del problema no homogéneo.