SEMANA 2. Resolución de EDOS de Primer orden

Ecuaciones Diferenciales de pimer orden con funciones Homogéneas

La función $f(x, y)$ es homogénea de grado n

Si dado un parámetro $t \in R$, se tiene :

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Si $n = 0$

$f(tx, ty) = f(x, y)$, entonces $f(x,y)$ es homogénea de grado cero

irlamn@uni.edu.pe

EDOS de primer orden de función homogénea y reducibles a V.S

Una EDO de primer orden $y' = f(x,y)$ es llamada homogénea respecto a f si $f(x,y)$ es homogénea de grado cero.

Si $y' = f(x,y)$ es homogénea....(1)

ésta siempre se puede expresar como

$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow$ haciendo $u = \frac{y}{x}$

Entonces (1) se reduce a la EDO de V.S

$$x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u, \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

Observaciones:

1. Si $u = u_0$ es un cero de la ecuación $\varphi(u)\text{-}u = 0$

Entonces la solución de la EDO es $y = u_0 x$

(la cual es una recta que pasa por el origen)

2. Existen EDOS que trasladando el origen a otro punto $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, haciendo $x = \xi + x_0,\ \ y = \eta + y_0$, éstas pueden ser reducidas a la forma:

$\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$, donde (x_0, y_0) es la intersección de las rectas

$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$

$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

3. En caso contrario (paralelas) hacemos lo siguiente:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda,\ \ a_1 \neq 0,\ a_2,\ b_1 \neq 0,\ b_2,\ \text{ctes.}$$

$$\frac{dy}{dx} = f\left[\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\lambda(a_1 x + b_1 y) + c_2}\right] = \phi(a_1 x + b_1 y)$$

Haciendo $u = a_1 x + b_1 y,\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} = b_1 \phi(u)$, V.S

$$\Rightarrow \int \frac{du}{\phi(u)} = b_1 \int dx.$$

4. La EDO Exacta $f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy = 0$, es reducible a una EDO homogénea, y ésta una de V.S. si $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ son funciones homogéneas del mísmo grado.

Método Factor integrante: EDO lineal de 1er orden coeficientes variables y no homogénea

$$y' + p(x)y = f(x)........(1)$$

Se realiza en dos etapas, primero hallamos la solución general, resolvemos la EDO

$$i)\ \frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \text{es } V.S \Rightarrow y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow y(x)e^{\int p(x)dx} = C \Rightarrow \frac{d[y(x)e^{\int p(x)dx}]}{dx} =$$

$$e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)dx}p(x)y = 0.....(2)$$

tomamos como Factor Integrante (F.I) al término $e^{\int p(x)dx}$,
multiplicando a (1), utilizamos para hallar la solución completa

$$ii) e^{\int p(x)dx}\{\frac{dy}{dx} + p(x)y\} = e^{\int p(x)dx}\{f(x)\}...(3)$$

$\Rightarrow$ Por (2), la EDO (3) puede ser expresada por :

$$\frac{d}{dx}\{ye^{\int p(x)dx}\} = f(x)e^{\int p(x)dx}, \text{ al integrar resulta}$$

$$\text{y(x)} = e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + Be^{-\int p(x)dx},\ B = cte.$$

Metodo gráfico-Campo direccional-Isoclinas

Uno de los métodos para resolver varias clases de ecuaciones diferenciales es la manera gráfica. Es decir mediante la interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales y sus soluciones.

Para ver esta metodología es útil analizar las ecuaciones de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Cuya solución es una función $y = g(x)$. Geométricamente, en la ecuación se afirma que, en cualquier punto (x, y) la pendiente (dy/dx) de la solución en ese punto está dada por $f(x, y)$. Esto puede indicarse si se traza un pequeño segmento rectilíneo que pase por el punto (x, y) con la pendiente $f(x, y)$. La colección de todos esos segmentos rectilíneos se llama **campo direccional** de la ecuación diferencial.

En resumen, en la gráfica del campo de direcciones de una ecuación diferencial se pueden apreciar todas las soluciones de la ecuación dada. Por el teorema de existencia y unicidad, cada curva solución se determina, ya sea dándole un valor a la constante c o de forma equivalente, estipulando un punto (x_0, y_0) del plano por donde pasa la solución.

Isoclinas trazar manualmente el campo direccional de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, debemos considerar que la pendiente y' de la supuesta solución tiene valor constante en todos los puntos de la curva, $f(x, y) = c$. Estas curvas se denominan curvas isoclinas. Para ecuaciones relativamente simples es posible trazar el campo direccional dibujando unas cuantas isoclinas y luego insertar los segmentos rectilíneos tangentes a la solución en varios puntos de cada una. Para este procedimiento se hace variar el parámetro c.

Ejemplo

- **Representación gráfica de campo de direcciones (campo direccional, campo pendiente o campo de elementos lineales)**

Sea $y' = x - y$ para los puntos $(-1,1), (0,1)$ y $(1,1)$

SOLUCIÓN

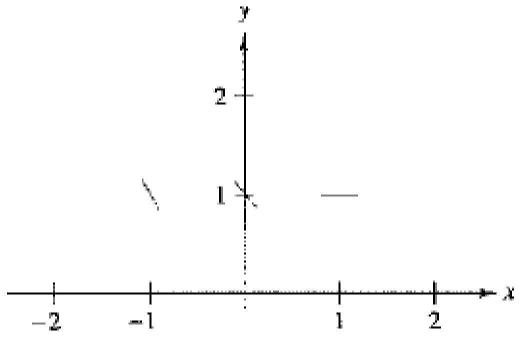
La pendiente de la curva en cualquier punto (x, y) es

$F(x, y) = x - y$. Asi:

La pendiente en el punto $(-1,1)$ es $y' = -1 - 1 = -2$;

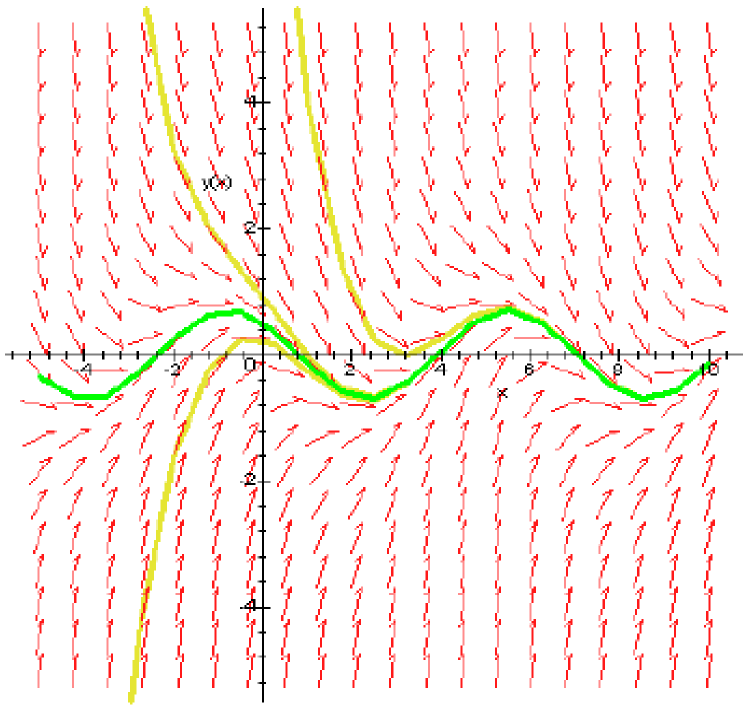
La pendiente en $(0,1)$ es $y' = 0 - 1 = -1$;

La pendiente en $(1,1)$ es $y' = 1 - 1 = 0$;



1. Para la ecuación $y' = -y - sen(x)$

Cuya solución general es $y = \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2} + ce^{-x}$

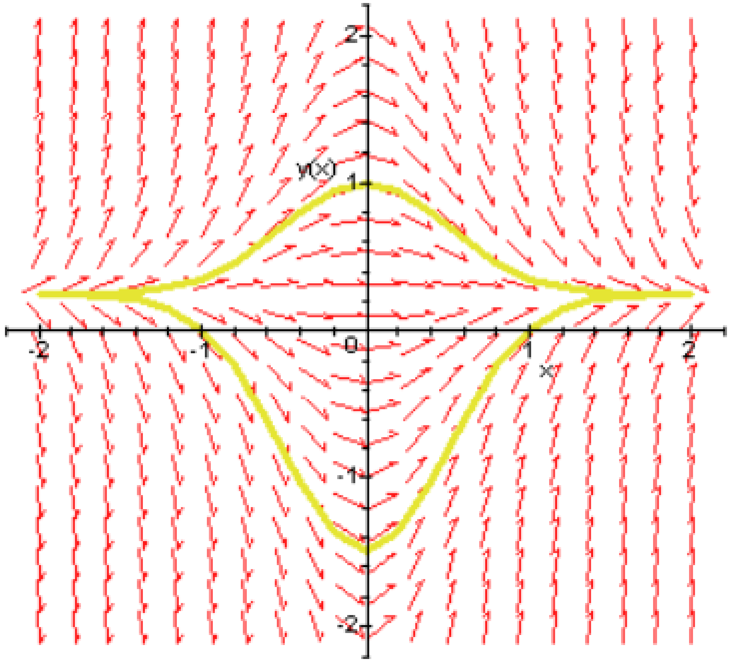


El campo de direcciones se muestra en la figura siguiente, junto con la gráfica de cuatro miembros de la familia de soluciones (que llamamos curvas isoclinas.) Se puede apreciar que tres de las curvas convergen a una cuarta (onda verde en la pantalla). Esta cuarta curva es la solución que se obtiene al poner $c = 0$, es decir $y = (sen(x) + \frac{\cos(x)}{2})$

2. En el caso de la ecuación $y' = x - 4xy$ la solución general es

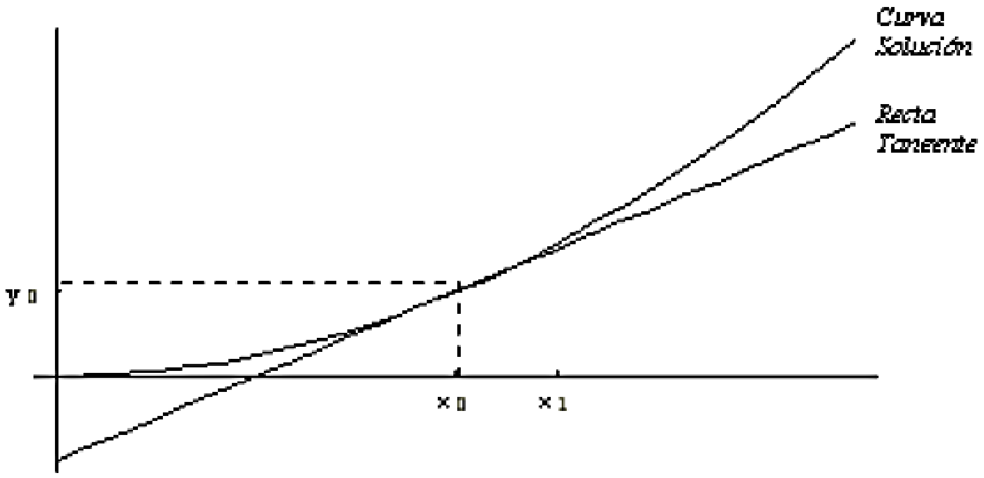
$$y = \frac{1}{4} + ce^{-2x^2}$$

Se ilustra el campo de direcciones y algunas curvas isóclinas: $c = 1$ y $c = -1.5$

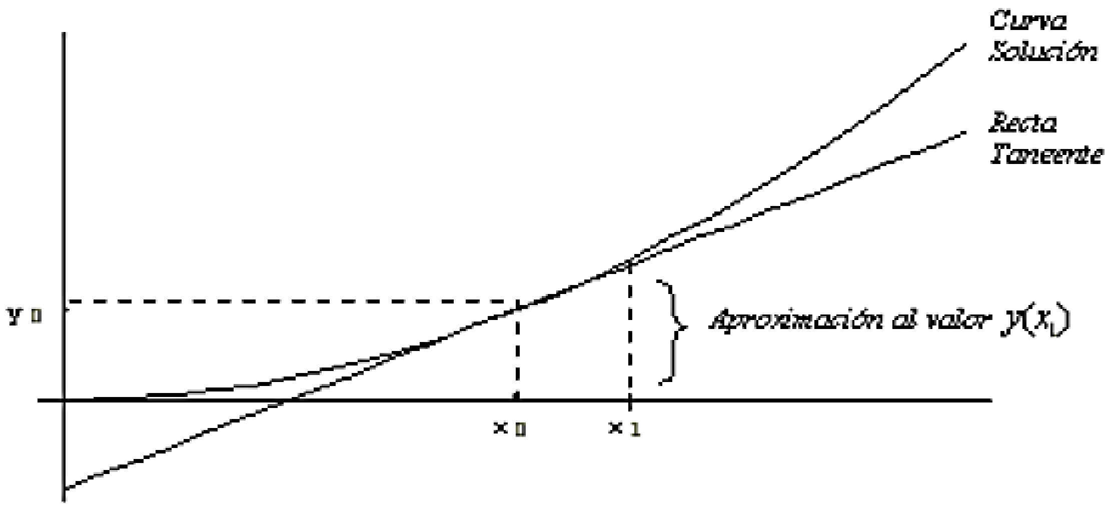


METODO DE EULER

Supongamos que tuviéramos la curva solución de la ecuación diferencial y trazamos la recta tangente a la curva en el punto dado por la condición inicial.



Debido a que la recta tangente aproxima a la curva en valores cercanos al punto de tangencia, podemos tomar el valor de la recta tangente en el punto x_1 como una aproximación al valor deseado $y(x_1)$.



Así, calculemos la ecuación de la recta tangente a la curva solución de la ecuación diferencial dada en el punto (x_0, y_0), sabemos que la ecuación de la recta es:

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

donde m es la pendiente. En este caso, sabemos que la pendiente de la recta tangente se calcula con la derivada:

$$m = y'\big|_{(x_0, y_0)} = f(x_0, y_0)$$

$$y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0$$

Ahora bien, suponemos que x_1 es un punto cercano a x_0, y por lo tanto estará dado como $x_1 = x_0 + h$. De esta forma, tenemos la siguiente aproximación:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) \approx f(x_0, y_0)(\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0}) + y_0$$

De aquí, tenemos nuestra fórmula de aproximación:

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

Esta aproximación puede ser suficientemente buena, si el valor de h es realmente pequeño, digamos de una décima ó menos. Pero si el valor de h es más grande, entonces podemos cometer mucho error al aplicar dicha fórmula. Una forma de reducir el error y obtener de hecho un método iterativo, es dividir la distancia $h = |x_1 - x_0|$ en n partes iguales (procurando que estas partes sean de longitud suficientemente pequeña) y obtener entonces la aproximación en n pasos, aplicando la fórmula anterior n veces de un paso a otro, con la nueva h igual a $\frac{|x_1 - x_0|}{n}$.

En una gráfica, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{cccc} x_0 & x_0+h & x_0+2h & \cdots x_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ y_0 & y_1 & y_2 & \cdots y_n \\ & & & (\textit{solución}) \end{array}$$

Ahora bien, sabemos que:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Para obtener y_2 únicamente hay que pensar que ahora el papel de (x_0, y_0) lo toma el punto (x_1, y_1), y por lo tanto, si substituimos los datos adecuadamente, obtendremos que:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

De aquí se ve claramente que la fórmula recursiva general, está dada por:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Esta es la conocida fórmula de Euler que se usa para aproximar el valor de $y(x_1)$ aplicándola sucesivamente desde x_0 hasta x_1 en pasos de longitud h.

Ejemplo 1

Dada la siguiente ecuación diferencial con la condición inicial:

$$y' = 2xy$$
$$y(0) = 1$$

Aproximar $y(0.5)$.

NOTA

Primero observamos que esta ecuación sí puede resolverse por métodos tradicionales de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, podemos aplicar el método de separación de variables. Veamos las dos soluciones.

Solución Analítica.

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2xdx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$$

$$\ln|y| = x^2 + c$$

$$x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$\ln 1 = 0^2 + c$$

$$0 = c$$

Por lo tanto, tenemos que la curva solución real está dada:

$$\ln y = x^2$$

$$e^{\ln y} = e^{x^2}$$

$$y = e^{x^2}$$

Y por lo tanto, el valor real que se pide es:

$$y(0.5) = e^{(0.5)^2} = 1.28403$$

formula de Euler,

De esta forma, tenemos los siguientes datos:

$$\begin{cases} x_0 & = & 0 \\ y_0 & = & 1 \\ h & = & 0.1 \\ f(x,y) & = & 2xy \end{cases}$$

Sustituyendo estos datos en la formula de Euler, tenemos, en un primer paso:

$$\begin{cases} x_1 & = & x_0 + h & = & 0.1 \\ y_1 & = & y_0 + hf(x_0, y_0) & = & 1 + 0.1[2(0)(1)] & = & 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + h = 0.2 \\ y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1 + 0.1[2(0.1)(1)] = 1.02 \end{cases}$$

Y así sucesivamente hasta obtener y_5. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1
2	0.2	1.02
3	0.3	1.0608
4	0.4	1.12445
5	0.5	1.2144

$$E_{rp} = \left| \frac{1.28402 - 1.2144}{1.28402} \times 100\% \right| = 5.42\%$$

Ejemplo 2

Aplicar el método de Euler para aproximar $y(1.3)$, dada la ecuación diferencial.

$$y' = x^2 + 0.5y^2$$

$$y(1) = 2$$

Solución

Nuevamente vemos que nos conviene dividir en pasos la aproximación. Así, elegimos nuevamente $h = 0.1$ para obtener el resultado final en tres pasos. Por lo tanto, aplicamos el método de Euler con los siguientes datos:

$$\begin{cases} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & 2 \\ h & = & 0.1 \\ f(x,y) & = & x^2 + 0.5y^2 \end{cases}$$

En un primer paso, tenemos que:

$$\begin{cases} x_1 &= x_0 + h &= 1.1 \\ y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) &= 2 + 0.1\left[1^2 + 0.5(2)^2\right] &= 2.3 \end{cases}$$

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	1	2
1	1.1	2.3
2	1.2	2.6855
3	1.3	3.1901

De lo cual, concluimos que la aproximación buscada es:

$$y(1.3) \approx 3.1901$$