Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Análisis Convexo - CM3E2]
[Prof: Jonathan Munguia] UNI, 28 de mayo de 2021

Práctica Calificada 3

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa propia. Demuestre que f es scs en $\text{int}(\text{dom}(f))$. [5ptos]

Solución:

a) Sea $x_0 \in \text{int}(\text{dom}\, f)$, entonces existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset \text{dom}\, f$.

b) Como f es convexa, entonces las n-funciones $\theta_i : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definidas como $\theta_i(t) = f(x_0 + te_i)$ son convexas (Ver Lema 1 de la Sesión 10).

c) Dado $|t| < r$, se tiene que $\theta_i(t) = f(x_0 + te_i) < \infty$ ya que por la parte (a), se tiene que $\|(x_0 + te_i) - x_0\| = |t| < r$. Por tanto, existe $B(0, r) \subset \text{int}(\text{dom}\, \theta_i)$, y como las funciones de 1 variable son continuas en el interior de su dominio, entonces θ_i es continua en 0 para todo $i = 1, \cdots, n$.

d) Por la parte (c), se tiene en particular que θ_i es scs en 0. Por tanto, para $\theta_i(0) = f(x_0) < \lambda$, existe $\delta_i > 0$ tal que para todo $t \in [-\delta_i, \delta_i]$ se tiene que $f(x_0 + te_i) = \theta_i(t) < \lambda$.

e) Por la convexidad de $\tilde{S}_\lambda(f)$ se deduce que $\mathbf{co}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{x_0 \pm \delta_i e_i\}\right) \subset \tilde{S}_\lambda(f)$. Por tanto, existe una vecindad abierta $V \ni x_0$ tal que $V \subset \mathbf{co}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{x_0 \pm \delta_i e_i\}\right)$. Así, $V \subset f^{-1}(]-\infty, \lambda[)$.

f) En conclusión, para cada $x_0 \in \text{int}(\text{dom}\, f)$ y para cada $\lambda > f(x_0)$ existe una vecindad abierta $V \ni x_0$ tal que para todo $x \in V$ se tiene que $\lambda > f(x)$. Por tanto f es scs en $\text{int}(\text{dom}(f))$.

2. Sean $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo abierto no vacío y $f : C \to \mathbb{R}$ diferenciable. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes: [5ptos]

a) f es estrictamente convexa.

b) $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle > 0$ para todo $x, y \in C$, $x \neq y$.

c) $f(y) > f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$ para todo $x, y \in C$, $x \neq y$.

Solución:
a) $\Rightarrow$ b) Sean $x, y \in C$ distintos cualesquiera y $\theta_{xy} : I \to \mathbb{R}$ definida como $\theta_{xy}(t) = f(x + t(y - x))$ estrictamente convexa (similar al Lema 1 de la Sesión 10) y por el Teorema 1, se tiene que

$$\theta'_{xy}(1) - \theta'_{xy}(0) > 0$$
$$\langle \nabla f(y), y - x \rangle - \langle \nabla f(x), y - x \rangle > 0,$$

donde usamos el hecho que $\theta'_{xy}(t) = \langle \nabla f(x + t(y - x)), y - x \rangle$.
b) $\Rightarrow$ c) Ahora no se puede suponer que θ' sea estrictamente creciente. Pero por la hipótesis de los gradientes, se tiene

$$\forall x, z(x \neq z) \in C \,:\; \theta'_{xz}(1) - \theta'_{xz}(0) = \langle \nabla f(z) - \nabla f(x), z - x \rangle > 0. \tag{1}$$

Luego, por el teorema de valor medio,

$$\exists \alpha \in (0,1) \text{ tal que } f(y) - f(x) = \theta_{xy}(1) - \theta_{xy}(0) = \theta'_{xy}(\alpha) = \langle \nabla f(x + \alpha(y - x)), y - x \rangle\,. \tag{2}$$

Considerando $z = x + \alpha(y - x)$, se tiene por (1):

$$\theta'_{xz}(1) > \theta'_{xz}(0) \iff \langle \nabla f(x + \alpha(y - x)), y - x \rangle > \langle \nabla f(x), y - x \rangle\,. \tag{3}$$

Se concluye de (2) y (3).
c) $\Rightarrow$ a) Para cada $\alpha \in (0,1)$, $x \neq y$ cualesquiera y tomando $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$.

$$f(y) - f(z) > \langle \nabla f(z), y - z \rangle$$
$$f(x) - f(z) > \langle \nabla f(z), x - z \rangle$$

multiplicando la primera desigualdad por $1 - \alpha$, la segunda por α y sumando se tiene:

$$\alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y) - f(z) > \langle \nabla f(z), \alpha x + (1 - \alpha)y - z \rangle = 0.$$

Por lo tanto

$$\alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y) > f(z).$$

Teorema 1 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ estrictamente convexa, entonces $f'_-(x)$ y $f'_+(x)$ existen y son estrictamente crecientes en el interior de I.*

Ver Hermann Weyl - Convex Functions on the Real Line.

3. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo abierto no vacío y $f : C \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable. Si para todo $x \in C$ la matriz $\nabla^2 f(x)$ es definida positiva entonces f es estrictamente convexa. [5ptos]

Solución: Suponga que $\nabla^2 f(x)$ es semidefinida positiva en cada punto $x \in C$. Para cualquier par de puntos $x, y \in C(x \neq y)$, la función $\theta_{xy} : I \to \mathbb{R}$ está definida en un intervalo abierto que contiene a $[0,1]$ (porque C es convexo y abierto) y es dos veces derivable. Por el teorema de valor medio, se tiene:

$$\exists\, \alpha(0,1) \text{ t.q. } \theta'_{xy}(1) - \theta'_{xy}(0) = \theta''(\alpha) = \left\langle \nabla^2 f(x + \alpha(y - x))(y - x), y - x \right\rangle > 0.$$

Esto implica que $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle > 0$. Por lo tanto, por el Problema 2, f es estrictamente convexa.

4. Probar que la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1 - \|x\|^2}\right)$ es estrictamente convexa sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x\| < 1\}$. [5ptos]

Solución: Como el gradiente de $1 - \|x\|^2$ es igual a $-2x$, se tiene que

$$\nabla f(x) = \frac{2x}{1 - \|x\|^2},$$

Luego, el gradiente de cada componente $\dfrac{2x_i}{1-\|x\|^2}$ es igual a $\dfrac{2e_i}{1-\|x\|^2}+\dfrac{4x_i x}{(1-\|x\|^2)^2}$. Por tanto su hessiana es

$$\nabla^2 f(x) = \frac{2}{1-\|x\|^2} I_n + \frac{4}{(1-\|x\|^2)^2} x x^t,$$

donde x es un vector columna no nulo y xx^t es una matriz de $n \times n$. Ahora multiplicamos por otro vector columna no nulo u:

$$\begin{aligned}\langle \nabla^2 f(x)\, u, u\rangle &= \frac{2}{1-\|x\|^2}\langle I_n u, u\rangle + \frac{4}{(1-\|x\|^2)^2}\langle x x^t u, u\rangle \\ &= \frac{2}{1-\|x\|^2}\|u\|^2 + (x^t u)^2 > 0,\end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho $\langle Au, u\rangle = u^t A u$, que $x^t u$ es un número y que $\|x\| < 1$. Por tanto, por el problema anterior se tiene que f es estrictamente convexa.