**Universidad Nacional de Ingeniería**
**Escuela Profesional de Matemática**
**Ciclo 2021-1**

**[Análisis Convexo - CM3E2]**
**[Prof: Jonathan Munguia]** UNI, 09 de julio de 2021

---

## Práctica Calificada 5

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \max_i |x_i|.$$

Mostrar que $\partial f(0) = \mathrm{co}(e_1, \cdots, e_n, -e_1, \cdots, -e_n)$ donde $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$, $i = 1, \cdots, n$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$. [8ptos]

**Solución:** Como $\partial f(0) = \{s \in \mathbb{R}^n : \langle s, d\rangle \le f'(0, d) \quad \forall d \in \mathbb{R}^n\}$, donde $f'(0, d) = f(d)$. Si consideramos $s = e_i =: v_i$, se obtiene para cada $d \in \mathbb{R}^n$ que $\langle s, d\rangle = d_i \le f(d)$, entonces $e_i \in \partial f(0)$ para $1 \le i \le n$. De manera similar $v_{n+i} := -e_i \in \partial f(0)$ para $1 \le i \le n$. Luego, si $s \in C := \mathrm{co}(\{v_i\}_{i=1}^{2n})$, entonces $s = \sum_{i=1}^{2n} t_i v_i$ con $\sum_i t_i = 1$,

$$\langle s, d\rangle = \sum_i t_i \langle v_i, d\rangle \le f(d) \Longrightarrow \mathrm{co}(\{v_i\}_{i=1}^{2n}) \subset \partial f(0).$$

2. Sean $f$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexas y sci. Dado $s \in \mathbb{R}^n$, mostrar la equivalencia de las siguientes proposiciones:

   i) $f^*(s) + g^*(-s) \le 0$;

   ii) Existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \ge \langle s, x\rangle + r \ge -g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Asumiendo la existencia de algún $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\overline{x}) = -g(\overline{x})$, establezca la relación

$$\{s \in \mathbb{R}^n : f^*(s) + g^*(-s) \le 0\} = \partial f(\overline{x}) \cap -\partial g(\overline{x}).$$

[12ptos]

**Solución:** i)$\Longrightarrow$ ii):

$$g^*(-s) \le -f^*(-s) = -\sup_{y \in \mathbb{R}^n} [\langle y, s\rangle - f(y)]$$
$$\Longrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [\langle x, -s\rangle - g(x)] \le \inf_{y \in \mathbb{R}^n} [f(y) - \langle y, s\rangle],$$

tomando $r$ como semisuma del supremo e ínfimo anterior, se tiene

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad f(x) \ge r + \langle x, s\rangle \ge -g(x). \tag{1}$$

ii)$\Longrightarrow$ i): De la hipótesis y la definición de conjugada, se tiene

$$\begin{aligned} -r &\geq \langle s, x\rangle - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ -r &\geq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} [\langle s, x\rangle - f(x)] \\ -r &\geq f^*(s), \end{aligned}$$

de manera similar

$$\begin{aligned} r &\geq \langle -s, x\rangle - g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ r &\geq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} [\langle -s, x\rangle - g(x)] \\ r &\geq g^*(-s), \end{aligned}$$

así se obtiene $0 \geq f^*(s) + g^*(-s)$.
Existe $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ con $f(\overline{x}) = -g(\overline{x})$, tal que

$$A := \{s \in \mathbb{R}^n \,:\, f^*(s) + g^*(-s) \leq 0\} = \partial f(\overline{x}) \cap -\partial g(\overline{x}) := B.$$

$A \subset B$ : Dado $s \in A$, tomando $x = \overline{x}$ en (1), se deduce que

$$f(\overline{x}) = -g(\overline{x}) = \langle s, \overline{x}\rangle + r, \tag{2}$$

De (1) y (2), se obtiene

$$f(x) \geq f(\overline{x}) + \langle s, x - \overline{x}\rangle \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow s \in \partial f(\overline{x}), \tag{3}$$
$$g(x) \geq g(\overline{x}) + \langle -s, x - \overline{x}\rangle \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow -s \in \partial g(\overline{x}), \tag{4}$$

luego $s \in B$.
$B \subset A$ : Sea $s \in \partial f(\overline{x}) \cap -\partial g(\overline{x})$, por la hipótesis $f(\overline{x}) = -g(\overline{x})$ y (3)-(4), obtenemos

$$\begin{aligned} -r \geq \langle s, x\rangle - f(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n &\Longrightarrow -r \geq f^*(s), \\ r \geq \langle -s, x\rangle - g(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n &\Longrightarrow r \geq g^*(-s), \end{aligned}$$

luego, $0 \geq f^*(s) + g^*(-s)$.