Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2]
[Los profesores] UNI, 08 de junio de 2021

Cuarta Práctica Dirigida

1. Una pequeña bola de cobre a $80°C$ se deja caer en un tanque grande lleno de agua helada a $0°C$, como se muestra en la Figura 1. Se transfiere calor de la bola de cobre al agua, haciendo que la temperatura de la bola comience a disminuir. El coeficiente de transferencia de calor entre la bola y el agua es tal que la variación de la temperatura de la bola con respecto al tiempo $T(t)$ está regida por

$$T^{'} + 0{,}01T = 0$$

con $T(0) = 80$. Determine la distribución de temperatura $T(t)$ resolviendo este problema de valor inicial mediante la transformada de Laplace.

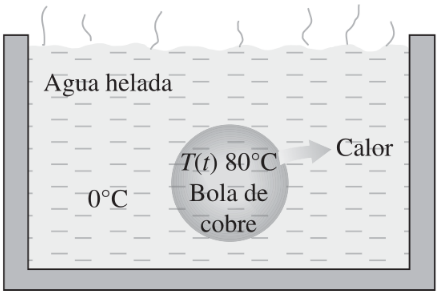

Figura 1:

2. Encuentra la solución de:

$$y^{''} + 4y^{'} + 13y = 2t + 3e^{-2t}\cos 3t,$$
$$y(0) = 0, \qquad y^{'}(0) = -1.$$

3. Resuelva por Laplace el siguiente problema no homogéneo:

$$\begin{cases} y'' + y' = h(t)\,, t > 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Donde $h(t) = 1$ en $[\pi, 2\pi)$ y $h(t) = 0$ en otro caso.

4. Resolver: $y^{''} + y = \sin 2t$ con $y(0) = 2$, y $y^{'}(0) = 1$.

5. Resolver: $y^{''} - 2y^{'} + 5y = -8e^{-t}$, con $y(0) = 2$, y $y^{'}(0) = 12$.

6. $\frac{d^2y}{dt^2} + y = t^2 + 1$; $y(\pi) = \pi^2$, $y^{'}(\pi) = 2\pi$. [Sugerencia: hacer primero la sustitución de $x = t - \pi$.]

7. $\frac{d^2y}{dt^2} - y = -10\sin 2t$; $y(\pi) = -1$, $y^{'}(\pi) = 0$. Ver Ejercicio 6.

8. $\frac{d^4y}{dt^4} + y = \begin{cases} 0, & t \leq 1; \\ t-1, & t > 1; \end{cases}$ con $y(1) = y^{'}(1) = 1$ y $y^{''}(1) = y^{'''}(1) = 0$. Ver Ejercicio 6.

9. Utilice la transformada de Laplace para resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dt} + 2y + \int_0^t y(t)dt = \begin{cases} t, & t < 1, \\ 2-t, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & t > 2, \end{cases}$$

sujeta a la condición inicial $y(0) = 1$.

10. Se golpea con un martillo una masa estacionaria m que reposa encima de un resorte lineal (cuya constante de resorte es k) en el tiempo $t = 0$, con un impulso I, como se muestra en la Figura 2. Como resultado de este impulso, la masa comienza a vibrar hacia arriba y hacia abajo. Escogiendo el eje x hacia abajo con su origen ubicado en el centro de gravedad de la masa cuando la masa está en equilibrio estático, la formulación matemática de este problema puede expresarse como

$$mx^{''} + kx = I\delta(t - 0)$$

con $x(0) = x^{'}(0) = 0$.

Determine el movimiento de la masa $x(t)$ resolviendo este problema de valor inicial usando la transformada de Laplace.

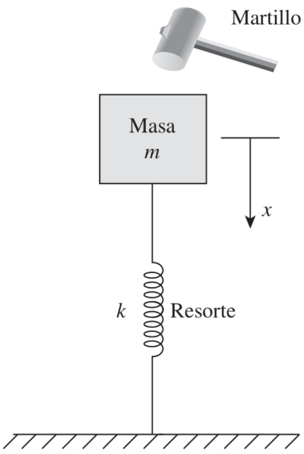

Figura 2:

11. Encuentre la solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} (D^2 + D - 6)y &= h(t), \\ y(0) = y^{'}(0) &= 0, \end{aligned}$$

dado que $h(t)$ es una función de orden exponencial.

12. Resuelva el siguiente sistema de problemas de valor inicial usando el método de transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} &x^{'} + 2y = e^{-3t} \\ &y^{'} + 3x = t, \quad x(0) = 1 \quad \text{y} \quad y(0) = 2. \end{aligned}$$

13. Grafique las siguientes funciones y determine su transformada de Laplace:

   a) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3\pi \\ \sin t, & t \geq 3\pi. \end{cases}$

   b) $f(t) = \begin{cases} t, & t \leq 1, \\ 2 - t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & t > 2. \end{cases}$

   c) $f(t) = \begin{cases} \cos 2t, & t \leq \pi, \\ 0, & t > \pi. \end{cases}$

   d) $f(t) = \begin{cases} -1, & t < 1, \\ 0, & 1 \leq t \leq 2 \\ 1, & t > 2. \end{cases}$

14. Resuleva las siguientes sistemas de problemas de valor inicial usando el método de transformada de Laplace:

   a)

$$\begin{cases} x'' + x - 2y = 3\delta(t), \\ y' + 5x = 0, \\ x(0) = x'(0) = 0, y(0) = 1. \end{cases}$$

   b)

$$\begin{cases} x'' + y' = 5e^{-t}, \\ y'' - x = \sin t, \\ x(0) = 1, x'(0) = 0, y(0) = -2, y'(0) = 0. \end{cases}$$

15. La Figura 3 es una representación de un paquete de instrumentos de masa m en una cápsula espacial soportada por una suspensión de rigidez k. Cuando el cohete entra en ignición, la aceleración y'' aumenta como $y'' = bt$, donde b es constante. Sea $z = x - y$, y suponga que $z(0) = z'(0) = 0$. Obtenga la expresión para el desplazamiento relativo $z(t)$ y la aceleración $x''(t)$ que experimenta el paquete.

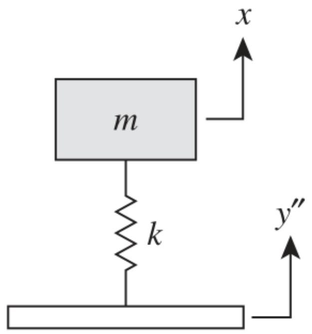

Figura 3:

16. Una viga uniforme en voladizo de longitud L está sujeta a una fuerza concentrada f_0 en el punto medio, $x = L/2$. Vea la Figura 4. La deflexión vertical resultante $y(x)$ de la viga está dada por

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = f_0\delta\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

donde E es el módulo de Young, que depende del material de la viga, e I es el momento de inercia, que depende de la geometría de la viga. Use la transformada de Laplace para encontrar la deflexión $y(x)$ para las condiciones de frontera dadas $y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0$

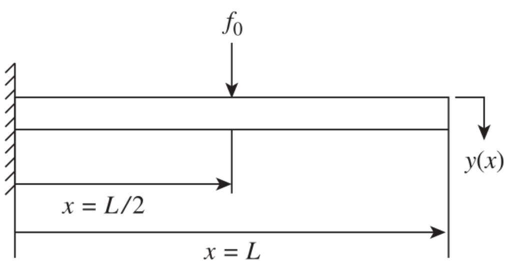

Figura 4:

17. Encuentre la función de Green y una inversa por la derecha de $y'' + y = \tan x$.

18. Encuentre una función de Green para el operador

$$L = D^2 - 2aD + a^2 + b^2, \quad b \neq 0$$

19. Encuentre la solución particular de la ecuación diferencial

$$(4D^4 - 4D^3 + 5D^2 - 4D + 1) = \ln t$$

que satisface las condiciones iniciales $y(1) = y^{'}(1) = y^{''}(1) = y^{'''}(1) = 0$.

20. Resolver el problema de valor inicial

$$(D^2 - 1)y = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ t - 1, & t > 1, \end{cases}$$
$$y(0) = y^{'}(0) = 0,$$

de 3 maneras diferentes:

a) Usando la transformada de Laplace directamente.

b) Determinando primero la función de Green para $D^2 - 1$.

c) Resolviendo el problema de valor inicial

$$(D^2 - 1)y = t - 1; \qquad y(1) = a, \qquad y^{'}(1) = b,$$

con una apropiada elección de las constantes a, b.

21. Encuentre la función de Green y una inversa por la derecha del problema de valor de frontera $y'' = x^2$, $y(0) = y(1) = 0$.