RESUMEN TLaplace_Aplicaciones -EDO

Irlamn@uni.edu.pe

Que es la Transformada de laplace?

La *transformada de Laplace* es una transformada integral con límites de integración de 0 y ∞, y el núcleo e^{-st}. Se representa como L, y la transformada de Laplace de una función $f(t)$ se define como

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-st} f(t)\,dt$$

Existencia de transformadas de Laplace

La transformada de Laplace de una función existe si y solo si la integral impropia converge por lo menos para algunos valores de s.

Observación.- una función $f(t)$. Para tener una transformada de Laplace, es suficiente (pero no necesario) que una función $f(t)$ sea continua por partes y de orden exponencial. Se dice que una función $f(t)$ es continua por partes en un intervalo finito $a \leq t \leq b$ si este intervalo puede subdividirse en un número finito de subintervalos de tal manera que $f(t)$ sea continua en cada subintervalo y tenga límites finitos en los puntos terminales. Se dice que una función $f(t)$ es de orden exponencial si existe una constante a tal que

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} e^{-at} |f(t)| = M$$

donde M es una constante positiva finita o cero para todas las t en las que $f(t)$ está definida.

Propiedades de las transformadas de Laplace Las propiedades básicas de las transformadas de Laplace pueden resumirse así:

1. $L\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} = C_1 L\{f_1(t)\} + C_2 L\{f_2(t)\}$
2. $L\{e^{kt} f(t)\} = F(s - k)$
3. $L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$
4. $L\left\{\dfrac{1}{t} f(t)\right\} = \displaystyle\int_s^\infty F(s)\,ds$
5. $L\left\{\displaystyle\int_0^t f(t)\,dt\right\} = \dfrac{1}{s} F(s)$
6. $L\{f(kt)\} = \dfrac{1}{k} F\left(\dfrac{s}{k}\right)$

Función de escalón unitario La función de escalón unitario se define por :

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases}$$

Prop. TL. de Escalón Unitario:

1. $L\{u(t)\} = \dfrac{1}{s}$

2. $L\{u(t - t_0)\} = \dfrac{e^{-t_0 s}}{}$

3. $L\{u(t - t_0)f(t)\} = e^{-t_0 s}L\{f(t + t_0)\}$

4. $L\{u(t - t_0)f(t - t_0)\} = e^{-t_0 s}L\{f(t)\}$

Transformadas de Laplace de derivadas

La transformada de Laplace de las derivadas de una función $f(t)$ existe si $f(t)$ y sus derivadas son continuas, y de orden exponencial. Estas transformadas de Laplace pueden expresarse como

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$L\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0)$$
$$-s^{(n-2)}f'(0) - \cdots f^{(n-1)}(0)$$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$. También $f(0)$, $f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$ son los valores iniciales de $f(t)$ y sus derivadas.

Transformadas inversas de Laplace Determinar las funciones originales de su transformada se llama *encontrar la inversa* (o *invertir la función transformada*). La *transformada inversa de Laplace* se representa por el símbolo L^{-1}. Las propiedades básicas de la transformada de Laplace invertida pueden resumirse así:

1. $L^{-1}\{C_1F_1(s) + C_2F_2(s)\}$
$= C_1L^{-1}\{F_1(s)\} + C_2L^{-1}\{F_2(s)\}$
2. $L^{-1}\{F(s-k)\} = e^{kt}L^{-1}\{F(s)\}$
3. $L^{-1}\{sF(s)\} = \dfrac{d}{dt}L^{-1}\{F(s)\}$
4. $L^{-1}\left\{\dfrac{F(s)}{s}\right\} = \displaystyle\int_0^t L^{-1}\{F(s)\}dt$
5. $L^{-1}\left\{\dfrac{d^nF(s)}{ds^n}\right\} = (-t)^nL^{-1}\{F(s)\}$
6. $L^{-1}\{e^{-t_0s}F(s)\} = u(t-t_0)f(t-t_0)$
7. $L^{-1}\{F(ks)\} = \dfrac{1}{k}f\left(\dfrac{t}{k}\right)$

Teorema de convolución Al resolver ecuaciones diferenciales frecuentemente acabamos teniendo una expresión para $Y(s)$ que puede expresarse como el producto de dos funciones de s cuyas inversas se conocen. Es decir, $Y(s)$ puede expresarse como $Y(s) = F(s)\,G(s)$, donde $F(s)$ y $G(\mathrm{s})$ son las transformadas de las funciones conocidas $f(\mathrm{t})$ y $\mathrm{g}(t)$. En tales casos, la transformada inversa de $Y(s)$ puede determinarse por el *teorema de convolución*, que puede expresarse como

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$
$$= \int_0^t f(t)g(t-\tau)d\tau$$

donde τ es una variable ficticia.

Ejemplo

. Hallar $L(H(t))$ siendo $H(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(2u) \cos(t-u)\, du$

$$L(H(t)) = L(\operatorname{sen}(2s)).L(\cos(s)) = \frac{2}{s^2+4}.\frac{s}{s^2+1}\,.$$

Resolución de ecuaciones diferenciales La resolución de ecuaciones diferenciales por transformada de Laplace incluye tres pasos básicos: 1) aplicar la transformada de Laplace a la ecuación diferencial, 2) despejar la transformada de la variable dependiente $Y(s)$, y 3) determinar la función incógnita $y(t)$ obteniendo la inversa de $Y(s)$. El procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales es similar al procedimiento para una sola ecuación diferencial, salvo que la transformada de un sistema de ecuaciones diferenciales da por resultado un sistema de ecuaciones algebraicas, que necesita resolverse simultáneamente para las transformadas de las funciones incógnitas antes de poder aplicar la transformada inversa.

Ejemplo . Halla la solución de la ecuación diferencial

$$y'' + y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$$

$$L(y'' + y) = L(x) \Rightarrow L(y'') + L(y) = L(x) \Rightarrow s^2 y_s - sy(0) - y'(0) + y_s = \frac{1}{s^2}$$

$$s^2 y_s - s + 2 + y_s = \frac{1}{s^2} \Rightarrow y_s(s^2+1) = \frac{1}{s^2} + (s-2) \Rightarrow y_s = \frac{1 + s^2(s-2)}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{Bs + C}{s^2+1}$$

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = -3 \Rightarrow y_s = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}$$

La solución será

$$y(x) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) - 3L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = x + \cos(x) - 3\,\mathrm{sen}(x)$$

Ejemplo: Halla la solución de la ecuación diferencial

$$y'' + y = cos(t) \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$L(y'') + L(y) = L(cos(t)) \Rightarrow s^2 y_s - sy(0) - y'(0) + y_s = \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow y_s(s^2+1) - 1 = \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow$$

$$y_s = \frac{s^2+s+1}{(s^2+1)^2} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{(s^2+1)^2} \Rightarrow A = 0, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad D = 0$$

$$y_s = \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{(s^2+1)^2} \Rightarrow y(x) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right) = \operatorname{sen}(t) + \frac{t}{2}\operatorname{sen}(t)$$

Expansión de fracciones parciales Si usted usa MATLAB pero no están disponibles ni la caja de herramientas Symbolic Math ni MuPAD, MATLAB puede calcular los coeficientes en una expansión de fracciones parciales con la función `residue`. Sea $X(s)$ la transformada. Los coeficientes de expansión se llaman *residuos* y los factores del denominador de $X(s)$ se llaman *polos*. Los polos incluyen las raíces características del modelo y cualesquiera raíces del denominador introducidas por la función de entrada. Si el orden m del numerador de $X(s)$ es mayor que el orden n del denominador, la transformada puede representarse por un polinomio $K(s)$, llamado *término directo*, más una relación de dos polinomios en los que el grado del denominador es mayor que el del numerador. La sintaxis de la función residuo es

```
[r,p,K] = residue(num,den)
```

donde `num` y `den` son arreglos que contienen los coeficientes del numerador y el denominador de $X(s)$. La salida de la función consiste en el arreglo `r`, que contiene los residuos; el arreglo `p`, que contiene los polos, y el arreglo `k` que contiene los coeficientes del término directo $K(s)$ en forma de polinomio.

Considere la ecuación $x'' + 9x' + 14x = 3f' + 2f$, donde $f(t) = 4e^{-7t}$. Si las condiciones iniciales son cero, la transformada de la respuesta forzada es

$$X(s) = \frac{3s + 2}{s^2 + 9s + 14}F(s) = \frac{3s + 2}{s^2 + 9s + 14}\left(\frac{4}{s + 7}\right) = \frac{12s + 8}{(s + 2)(s + 7)^2}$$

$$= \frac{12s + 8}{s^3 + 16s^2 + 77s + 98}$$

Funciones de transferencia La respuesta completa de una ecuación diferencial lineal ordinaria es la suma de las respuestas libre y forzada. Para condiciones iniciales cero, la respuesta libre es cero, y la respuesta completa es la misma que la respuesta forzada. Entonces podemos enfocar nuestro análisis sólo en los efectos de la entrada considerando que las condiciones iniciales son temporalmente cero. Cuando terminemos de analizar los efectos de la entrada, podremos sumar al resultado la respuesta libre debida a cualesquiera condiciones iniciales no cero. El concepto de la *función de transferencia* es útil para analizar el efecto de la entrada.

La función de transferencia es la transformada de la respuesta forzada dividida entre la transformada de la entrada. En otras palabras, es la transformada de la respuesta completa dividida entre la transformada de la entrada, bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales sean cero. La función de transferencia $T(s)$ puede usarse como un multiplicador para obtener la transformada de la respuesta forzada $X(s)$ a partir de la transformada de la entrada $F(s)$; es decir, $X(s) = T(s)F(s)$. La función de transferencia es una propiedad exclusiva del modelo del sistema. El concepto de función de transferencia es extremadamente útil por las Sgtes. razones:

1. *Funciones de transferencia y software*. Ciertas funciones útiles en los programas de software necesitan una descripción del sistema basada en la función de transferencia.
2. *Equivalencia de ecuación diferencial*. La función de transferencia es equivalente a la ecuación diferencial; contiene la misma información, una puede obtenerse a partir de la otra.
3. *Función de transferencia y raíces características*. El denominador de la función de transferencia es el polinomio característico; entonces, la función de transferencia nos dice algo acerca del comportamiento intrínseco del modelo, aparte de los efectos de la entrada y de los valores específicos de las condiciones iniciales.

Corrimiento con la función de Heaviside

MATLAB Symbolic Math Toolbox
`syms t s` `laplace(sin(t)*(heaviside(t-2*pi)-heaviside(t-3*pi)), t,s)`
MuPAD
`transform::laplace(sin(t)*(heaviside(t-2*PI)` ` -heaviside(t-3*PI)),t,s)`
Maple
`with(inttrans)` `laplace(sin(t)*(Heaviside(t-2*Pi)-Heaviside(t-3*Pi)), t,s)`
Mathematica
`LaplaceTransform[Sin[t]*UnitStep[t-2*Pi]-` ` Sin[t]*UnitStep[t-3*Pi],t,s]`

Los polos repetidos son $s = -7, -7$; uno de ellos es una raíz característica y el otro se debe a la entrada $f(t)$. Para obtener la expansión, teclee

```
[r, p, k] = residue ([12, 8], [1, 16, 77, 98])
```

La respuesta que da MATLAB es `r = [0.64, 15.2, -0, 64]`, `p = [-7, -7, -2]` y `K = [ ]`, el cual es un arreglo vacío que implica la ausencia de término directo. Esto corresponde a la expansión

$$X(s) = 0.64\frac{1}{s+7} + 15.2\frac{1}{(s+7)^2} - 0.64\frac{1}{s+2}$$

Observe que para los residuos debidos a polos repetidos, el residuo que corresponde a la potencia *más alta* se muestra como el *último* de dichos residuos. Aquí la respuesta es

$$x(t) = 0.64e^{-7t} + 15.2te^{-7t} - 0.64e^{-2t}$$

Los polos complejos se manejan así: considere la expansión

$$x'' + 6x' + 34x = 4g' + g$$

donde $g(t)$ es una función de escalón unitario y las condiciones iniciales son cero. La transformada de la respuesta es

$$X(s) = \frac{4s+1}{s^2+6s+34}G(s) = \frac{4s+1}{s^2+6s+34}\,\frac{1}{s} = \frac{4s+1}{s^3+6s^2+34s}$$

Para obtener la expansión, teclee

```
[r,p,K]=residue([4, 1],[1, 6, 34, 0])
```

Observe que el último coeficiente en el denominador es 0. La respuesta dada por MATLAB es `r = [-0.0147-0.3912i -0.0147+0.3912i, 0.0294]`, `p = [-3+5i, -3-5i, 0]` y `K = [ ]`. Este resultado corresponde a la expresión

$$X(s) = \frac{-0.0147 - 0.3912i}{s + 3 - 5i} + \frac{-0.0147 + 0.3912i}{s + 3 + 5i} + \frac{0.0294}{s}$$

y, por tanto, la respuesta es

$$\begin{aligned} x(t) &= (-0.0147 - 0.3912i)e^{(-3+5i)t} \\ &\quad + (-0.0147 + 0.3912i)e^{(-3-5i)t} + 0.0294 \end{aligned}$$

Esta forma no es muy útil debido a sus coeficientes complejos, pero podemos convertirla a una forma más útil observando que los primeros dos términos en la expansión tienen la forma

$$\frac{C + iD}{s + a - ib} + \frac{C - iD}{s + a + ib}$$

que corresponde a la función de tiempo:

$$(C + iD)e^{(-a+ib)t} + (C - iD)e^{(-a-ib)t}$$

Usando las identidades de Euler: $e^{\pm ibt} = \cos bt \pm i \,\operatorname{sen} bt$, la forma anterior puede escribirse como

$$2e^{-at}(C \cos bt - D \,\operatorname{sen} bt)$$

Usando esta identidad con $C = -0.0147$ y $D = -0.3912$, podemos escribir la respuesta como

$$x(t) = 2e^{-3t}(-0.0147 \cos 5t + 0.3912 \,\operatorname{sen} 5t) + 0.0294$$

Si todo lo que usted necesita es una gráfica de la solución, los métodos de funciones de transferencia proporcionan una forma fácil de obtenerla.

Métodos de funciones de transferencia en MATLAB La caja de herramientas MATLAB Control Systems proporciona comandos para crear funciones de transferencia, convirtiendo modelos de variable de estado a la forma de función de transferencia, y calculando y graficando la respuesta de ecuaciones lineales con coeficientes constantes para escalones, impulsos y funciones de entrada definidas por el usuario.

Un *objeto LTI* describe un modelo lineal, invariable con el tiempo (es decir, con coeficientes constantes). Considere la función de transferencia:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{4s + 7}{5s^2 + 4s + 7}$$

Para crear su representación en MATLAB, use la función `tf (num, den)`, donde `num` y `den` son matrices de coeficientes del numerador y el denominador de la función de transferencia dispuestos en orden de potencias descendentes de *s*. Para esta función de transferencia, teclee `sys1 = tf([4, 7], [5, 4, 7])` para asignar el nombre de variable `sys1` a la función de transferencia. Si el objeto LTI ya existe, podemos extraer los coeficientes del numerador y del denominador del modelo de función de transferencia usando la función `tfdata`. Su sintaxis es

```
[num, den] = tfdata(sys).
```

MATLAB proporciona diversas funciones de resolución para ecuaciones lineales. Estas funciones de resolución se clasifican por el tipo de función de entrada que pueden aceptar: una *entrada escalonada*, una *entrada de impulsos* y una función de entrada definida por el usuario. En su forma básica, cada una de las funciones pone automáticamente un título y etiquetas de eje en la gráfica. Para graficar la respuesta de escalón unitario o la respuesta de impulso unitario del modelo `sys1`, teclee `step(sys1)` o `impulse(sys1)`.

La función `lsim` grafica la respuesta del sistema a una entrada definida por el usuario. La sintaxis básica para condiciones iniciales cero es `lsim(sys,u,t)`, donde `sys` es el objeto `LTI`, `t` es un arreglo de valores de la variable independiente (por ejemplo, el tiempo) con espaciado regular (como `t = [t0: dt: t1]`) y `u` es una matriz con tantas columnas como entradas cuyo renglón *i* especifica el valor de la entrada en el tiempo $t(i)$.

Por ejemplo, para graficar la respuesta forzada del modelo `sys1` para la entrada en *rampa* $f(t) = 1.5t$ en el intervalo $0 \leq t \leq 2$ con una gráfica con 300 puntos, teclee

```
t = linspace(0,2,300);
f = 1.5*t;
[y, t] = lsim(sys1,f,t);
plot(t,y,t,f),xlabel('t'),ylabel('x(t) and f(t)')
```

Como otro ejemplo, para encontrar la respuesta a la función de fuerza sinusoidal $f(t) = 15$ sen $(3t)$, reemplace el segundo renglón del programa anterior por `f = 15*sin(3*t)`.

Siempre puede crear cualquier función complicada de entrada para usarse con `lsim` definiendo un vector que contenga los valores de las funciones de entrada en el tiempo específico, por ejemplo, usando lazos `for` y declaraciones condicionales. MATLAB proporciona la función `gensig` que facilita la construcción de funciones de entrada *periódicas*. La sintaxis `[u, t] = gensig (type, period)` genera una entrada periódica de un tipo específico `type` que tiene un periodo `period`. Los siguientes tipos están disponibles: onda sinusoidal (`type` = 'sin'), onda cuadrada (`type` = 'square') y pulso periódico de amplitud angosta (`type` = 'pulse'). El vector `t` contiene los tiempos, y el vector `u` contiene los valores de entrada en esos tiempos. Todas las entradas generadas tienen amplitud de una unidad. La sintaxis

```
[u, t]=gensig(type, period, dur, dt)
```

especifica la duración en el tiempo `dur` de la entrada, y el espaciado `dt` entre los instantes.

Por ejemplo, suponga que se aplica al modelo una onda cuadrada con un periodo de 5:

$$x'' + 2x' + 4x = 4f(t)$$

Su función de transferencia es

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

Para encontrar la respuesta para condiciones iniciales cero en el intervalo $0 \leq t \leq 10$, y usando un tamaño de escalón de 0.01, introduzca

```
sys2=tf(4,[1,2,4]);
[u, t]=gensig('square',5,10,0.01);
[y, t]=lsim (sys2,u,t);plot(t,y,u), . . .
    axis([0 10 -0.5 1.5]), . . .
    xlabel('Time'),ylabel('Response')
```

Conversión entre la forma de función de transferencia y la forma de variable de estado MATLAB puede obtener una descripción de la función de transferencia a partir de la forma de variable de estado $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{r}$ con la función `tf`. Suponga que `sys1` está en la forma de variable de estado, habiéndose creado mediante el tecleo de `sys = ss(A, B, C, D)`, como se explicó en la sección 7-8. La matriz de funciones de transferencia se encuentra tecleando `sys2 = tf(sys1)`.

Por otro lado, si ya tenemos un objeto LTI `sys2` creado en forma de función de transferencia, teclear `[A, B, C, D] = ssdata(sys2)` producirá las matrices estándar para la forma de variable de estado. Esta es una forma simple de obtener la descripción de variable de estado a partir de una función de transferencia que tiene dinámica de numerador.

La función `ssdata` no siempre dará un conjunto de variables de estado idénticas a las obtenidas de la manera usual. Por ejemplo, la función de transferencia

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{1}{5s^2 + 7s + 4}$$

corresponde a la ecuación $5x'' + 7x' + 4x = r(t)$, y normalmente decidiríamos que $x_1 = x$ y $x_2 = x'$ fueran las variables de estado. Sin embargo, en MATLAB, los comandos

```
sys = tf(1,[5,7,4]);
[A,B,C,D] = ssdata(sys)
```

dan los siguientes resultados

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1.4 & -0.8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = (0 \quad 0.4) \quad \mathbf{D} = 0$$

Esto corresponde a las ecuaciones de estado:

$$x_1' = -1.4x_1 - 0.8x_2 + 0.5r(t)$$

$$x_2' = x_1$$

y la ecuación de salida; $y = 0.4x^2$. Como la salida y debe ser la misma que x, vemos de inmediato que $x_2 = y/0.4 = x/0.4 = 2.5x$. La otra variable de estado x_1 se relaciona con x_2 por la segunda ecuación de estado: $x_1 = x_2'$. Entonces, $x_1 = 2.5x'$.