# Catorceava sesión

## Análisis Convexos - CM3E2

Jonathan Munguia[1]

[1]Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

27 de mayo de 2021

# Outline

1. Funciones Asintóticas
   - Funciones Asintóticas

$\exists x_0 \quad f(x_0) < \infty$

$-\infty < f(x) \quad \forall x$

cerrado

convexa

no vacío

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa sci propia. Entonces $F = \operatorname{epi}(f)$ es convexo cerrado no vacío y por lo tanto $F_\infty$ es un cono convexo cerrado. Observe que

$\operatorname{rec}(F) = F_\infty(a) \quad \forall a$ cono convexo cerrado

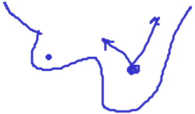
1) Para todo $(x, \lambda) \in \operatorname{epi}(f)$, y $t \geq 0$, $(x, \lambda) + t(0, 1) \in \operatorname{epi}(f)$, luego $(0, 1) \in F_\infty$ (Use el Teorema 2 de la Novena sesión).

prop 1.13 Eladio

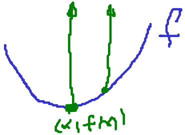
2) $(d, \lambda) \in F_\infty, \;\; \mu > \lambda \Rightarrow (d, \mu) \in F_\infty$.

3) Por (2), se deduce que $F_\infty$ es el epígrafo de cierta función, que denotaremos $f_\infty$ y llamaremos **función asintótica (o función de recesión) de $f$**. Como $F_\infty$ es convexo, entonces $f_\infty$ es convexa. Además se tiene

$\operatorname{epi}(f_\infty) = F_\infty$



$$f_\infty(d) = \inf \left\{ \lambda : (d, \lambda) \in F_\infty \right\}.$$





$(x,\lambda) \in \operatorname{epi} f \iff f(x) \leq \lambda < \lambda + t$

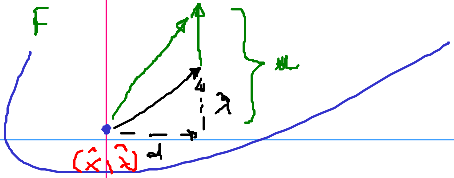
$(x, \lambda + t) \in \operatorname{epi} f$

$(d,\lambda) \in F_\infty \Rightarrow \exists\ (\hat{x},\hat{\lambda}) \in F$

s.t.

$\underbrace{(\hat{x},\hat{\lambda}) + t(d,\lambda)} \in \overset{\text{epi} f}{\overset{\|}{F}}$

$\forall\, t>0$




$(\hat{x}+td,\ \hat{\lambda}+t\lambda) \in \text{epi} f$

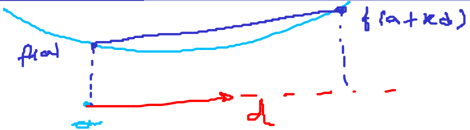
$\mu > \lambda$

$$f(\hat{x}+td) \le \hat{\lambda}+t\lambda \overset{\mu>\lambda}{<} \hat{\lambda}+t\mu$$

$$\Rightarrow \forall t>0\ \underbrace{(\hat{x}+td,\ \hat{\lambda}+t\mu)} \in \text{epi} f \quad \forall \mu>\lambda$$

$$\forall t>0 \quad (\hat{x},\hat{\lambda}) + t(d,\mu) \in \text{epi} f$$

$$\Rightarrow \quad (d,\mu) \in F_\infty$$




## Proposición 1

*Sean* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *convexa, sci, propia y* $a \in dom(f)$ *y* $d \in \mathbb{R}^n$*. Entonces:*

k → f(a+kd)

k>0

es convexa

y con pendientes crecientes

$$f_\infty(d) = \sup_{k>0} \frac{f(a+kd) - f(a)}{k}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{f(a+kd) - f(a)}{k}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{f(a+kd)}{k}$$

## Demostración

Ver Proposición 3.2.1 de [1] y Proposición 2.16 de [2].

cont...

$\alpha \geq x \Leftrightarrow x \geq y \Rightarrow x = y$

Para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, se cumple la siguiente cadena de equivalencias (incluso si $f_\infty(d) = +\infty$):

epi f es convexa

$$
\begin{aligned}
\alpha \geq \sup_{k>0} \frac{f(a+kd)-f(a)}{k} &\Leftrightarrow \forall k>0,\, f(a+kd) \leq f(a)+k\alpha \\
&\Leftrightarrow \forall k>0,\, (a+kd, f(a)+k\alpha) \in \operatorname{epi}(f) \\
&\Leftrightarrow \forall k>0,\, (a, f(a)) + k(d,\alpha) \in \operatorname{epi}(f) \\
&\Leftrightarrow (d,\alpha) \in [epi(f)]_\infty(a, f(a)) \\
&\Leftrightarrow \forall (x,\mu) \in \operatorname{epi}(f),\, (d,\alpha) \in [epi(f)]_\infty(x,\mu) \\
&\Leftrightarrow (d,\alpha) \in [epi(f)]_\infty = F_\infty = \operatorname{epi}(f_\infty) \\
&\Leftrightarrow f_\infty(d) \leq \alpha
\end{aligned}
$$

$f(x) \leq \mu$

epi f

era convexo

esto muestra que $f_\infty(d) = \sup_{k>0} \dfrac{f(a+kd)-f(a)}{k}$.

cont...

$a \xrightarrow{d} \cdots \; a+\lambda d$

Por otro lado, si $0 < k < \lambda$, entonces $a + kd = \left(1 - \frac{k}{\lambda}\right) a + \frac{k}{\lambda}(a + \lambda d)$.
Luego, por la convexidad de $f$ se tiene:

$$f(a + kd) \leq \left(1 - \frac{k}{\lambda}\right) f(a) + \frac{k}{\lambda} f(a + \lambda d),$$

lo cual, reordenando da lugar a

$$\frac{f(a + kd) - f(a)}{k} \leq \frac{f(a + \lambda d) - f(a)}{\lambda},$$

es decir, la función $k \to \dfrac{f(a + kd) - f(a)}{k}$ es creciente. Por lo tanto,

$$\sup_{k>0} \frac{f(a + kd) - f(a)}{k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{f(a + kd) - f(a)}{k}$$

$(0,1) \in F_\infty = epi(f_\infty) \Rightarrow f_\infty(0) \leq 1$

En las hipótesis de la Proposición 1 ($f$ convexa, sci, propia), $f_\infty(d) > -\infty$ para todo $d \in \mathbb{R}^n$ por lo tanto, $f_\infty$ también es propia.

### Proposición 2

*Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa, sci y propia. Se cumple:*

$$f_\infty(0) = 0 \text{ y } f_\infty(kd) = kf_\infty(d) \text{ para todo } d \in \mathbb{R}^n \text{ y } k > 0.$$

## Demostración

La primera igualdad es consecuencia directa de la Proposición 1, usando $d = 0$. Para la segunda igualdad se tiene:

$k > 0$

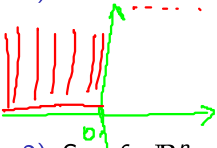
$$\begin{aligned} f_\infty(kd) &= \sup_{t>0} \frac{f(a + tkd) - f(a)}{t} \\ &= \sup_{t>0} k \frac{f(a + tkd) - f(a)}{tk} \\ &= k \sup_{s>0} \frac{f(a + sd) - f(a)}{s} \\ &= kf_\infty(d). \end{aligned}$$

 Funciones Asintóticas

$$f_\infty(d) = \lim_{k\to+\infty} \frac{f(\bar{x}+kd)}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{f(kd)}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{kd}}{k}$$

## Ejemplo 1

1) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$. Entonces

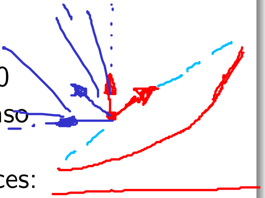



$$f_\infty(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } d \leq 0 \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases} \quad d>0$$

$\mathrm{epi}(f_\infty) = (\mathrm{epi}\, f)_\infty$

2) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle - \langle b, x\rangle$ con $A$ simétrica semidefinida positiva. Entonces:

$$f_\infty(d) = \begin{cases} -\langle b, d\rangle & \text{si } Ad = 0 \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

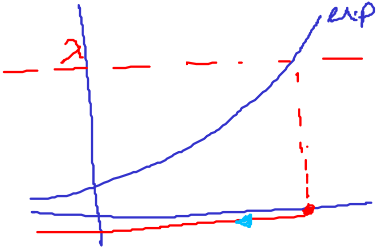


3) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|$. Entonces:

$$f_\infty(d) = \|d\| \quad \text{para todo } d \in \mathbb{R}^n.$$

$y = ax+b,\ a>b$

$y = e^x$




$$f_\infty = \begin{cases} 0 & \text{si } d \leq 0 \\ +\infty & d > 0 \end{cases}$$

### Teorema 1

*Sea f convexa sci y propia. Entonces* $S_0(f_\infty) = (S_\lambda(f))_\infty$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $S_\lambda(f) \neq \emptyset$.

$a \in$

eje $x$

$S_0(f_\infty) = (S_\lambda(f))_\infty$

Demostración.

Sea $a \in S_\lambda(f)$. Se cumple la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} d \in S_0(f_\infty) &\Leftrightarrow (d,0) \in \operatorname{epi}(f_\infty) \\ &\Leftrightarrow (d,0) \in \operatorname{epi}(f)_\infty \\ &\Leftrightarrow (d,0) \in \operatorname{epi}(f)_\infty(a,\lambda) \\ &\Leftrightarrow \forall k > 0, (a + kd, \lambda) \in \operatorname{epi}(f) \\ &\Leftrightarrow \forall k > 0, a + kd \in S_\lambda(f) \\ &\Leftrightarrow d \in (S_\lambda(f))_\infty. \end{aligned}$$

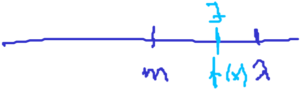
$S_\lambda(f)$ cerrado $\forall \lambda \Leftrightarrow$ Función coerción

**Definición 1**

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{R}$ es **ínfimo compacto** (inf-compacto) si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto $S_\lambda(f)$ es compacto.

Se deduce de la definición que inf-compacto implica semicontinuidad inferior. La propiedad fundamental de las funciones inf-compactos es la siguiente:

$f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$




$m \in \overline{\mathbb{R}}$

## Proposición 3

*Asuma $f$ inf-compacto y sean $m = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ y $S = \{x \in \mathbb{R}^n : m = f(x)\}$. Si $m < \infty$, entonces $S$ es compacto no vacío.*

$S = f^{-1}(m)$ $\qquad f^{-1}(]-\infty,\lambda]) \quad \forall \lambda > m$

$$\bigcap_{\lambda > m} \underbrace{f^{-1}(]-\infty,\lambda])}_{S_\lambda A} = f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda > m} ]-\infty,\lambda]\Big)$$

$$= f^{-1}(]-\infty, m])$$

$$= f^{-1}(\{m\}) = S$$

**Demostración.**

Note que

Compacto no vacíos

$$S = \bigcap_{\lambda > m} S_\lambda(f) = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_{\lambda_i}(f),$$

donde $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots$ , con $\lambda \to m$. Se deduce que $S$ es compacto no vacío por ser una intesección de compactos no vacíos encajados.

## Proposición 4

*Sea $f$ convexa sci propia. Entonces:*

a) *$f$ es inf-compacto si y solo si $S_0(f_\infty) = \{0\}$,*

b) *$f$ es inf-compacto si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $S_\lambda(f)$ es compacto no vacío.*

$S_0(f_\infty) = (S_\lambda(f))_\infty$ siempre q $S_\lambda(f) \neq \emptyset$

## Demostración.

Por el Teorema 1, $S_0(f_\infty) = (S_\lambda(f))_\infty$ para todos aquellos $\lambda$ tales que $S_\lambda(f)$ es no vacío (al menos uno de tales $\lambda$ existe porque $f$ es propia). Si $S_\lambda(f)$ es vacío, entonces es obviamente compacto, luego se dan las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
f \text{ es inf-compacto} &\Leftrightarrow \forall\lambda \in \mathbb{R}, S_\lambda(f) \text{ es compacto}\\
&\Leftrightarrow \forall\lambda \in \mathbb{R} \text{ con } S_\lambda(f) \neq \emptyset, S_\lambda(f) \text{ es compacto}\\
&\Leftrightarrow \forall\lambda \in \mathbb{R} \text{ con } S_\lambda(f) \neq \emptyset, (S_\lambda(f)) \text{ es acotado}\\
&\Leftrightarrow \forall\lambda \in \mathbb{R} \text{ con } S_\lambda(f) \neq \emptyset, (S_\lambda(f))_\infty = \{0\}\\
&\Leftrightarrow S_0(f_\infty) = \{0\}\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R} : S_\lambda(f) \neq \emptyset.
\end{aligned}$$

Las equivalencias de color rojo demuestran la proposición.

Prop 1.14 C convexo cerrado no vacío $\Rightarrow$ C acotado $\Leftrightarrow$ $C_\infty = \{0\}$

Obs: Como $f$ es propia,

$\exists \lambda \in \mathbb{R}, S_\lambda(f) \neq \emptyset$

y así $(S_\lambda(f))_\infty = S_0(f_\infty)$

- Si $S_0(f_\infty) = \{0\} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, S_\lambda(f) \neq \emptyset$

$(S_\lambda(f))_\infty = \{0\}$

- Si $\exists \lambda \in \mathbb{R}, S_\lambda(f) \neq \emptyset \wedge S_\lambda(f)$ es acotado

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, S_\lambda(f) \neq \emptyset \wedge (S_\lambda(f))_\infty = \{0\}$

$\Rightarrow S_0(f_\infty) = \{0\}$

La siguiente proposición es una caracterización de la inf-compacidad para funciones no necesariamente convexas.

### Proposición 5

*Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *sci. Entonces* $f$ *es inf-compacto si y solo si para toda sucesión* $(x_k)$ *en* $\mathbb{R}^n$*,con* $\underbrace{\|x_k\| \to +\infty, \textit{ implica } f(x_k) \to +\infty}_{0\text{-coerciva}}$.

### Demostración.

Como $f$ es sci, entonces $S_\lambda(f)$ es cerrado para todo $\lambda$.
Si $f$ no es inf-compacto entonces existe $\lambda$ tal que $S_\lambda(f)$ no es acotado, luego, existe una sucesión $(x_k)$ en $\mathbb{R}^n$ con $\|x_k\| \to +\infty$ tal que $f(x_k) \leq \lambda$ para todo $k$.
Recíprocamente, si existe una sucesión $(x_k)$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $\|x_k\| \to +\infty$ con $(f(x_k))$ acotada entonces $S_\lambda(f)$ no es acotado para cierto $\lambda$. Luego, $f$ no es inf-compacto.

 Funciones Asintóticas

sci

## Proposición 6

*Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, con $f$ inf-compacto y $g$ sci acotada inferiormente (es decir, existe $\beta > -\infty$ tal que $g(x) \geq \beta$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$). Entonces $f + g$ es inf-compacto.*

$f+g \leq \lambda \Rightarrow f \leq \lambda - g \leq \lambda - \beta$

## Demostración.

compacto

Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $S_\lambda(f+g) \subset S_{\lambda-\beta}(f)$, luego $S_\lambda(f+g)$ es acotado. Dicho conjunto también es cerrado pues $f+g$ es sci.

$\Rightarrow S_\lambda(f+g)$ es compacto $\Rightarrow f+g$ es inf-compacto

**Teorema 2**

*Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa sci propia. Si $f$ es fuertemente convexa entonces $f$ es inf-compacto.*

$f_\infty(d) = \sup_{t>0} \frac{f(\bar{x}+td) - f(\bar{x})}{t}$ , $f(x) = g(x) + \frac{\alpha}{2}\|x-\bar{x}\|^2$

**Demostración.**

Sea $\alpha$ el coeficiente de fuerte convexidad de $f$ y $\bar{x} \in \text{dom}(f)$. La función $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $g(x) = f(x) - \frac{\alpha}{2}\|x - \bar{x}\|^2$ es convexa, sci y propia. Para $0 \neq d \in \mathbb{R}^n$, se tiene:

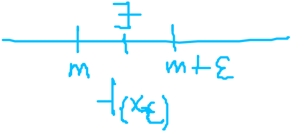
$$f_\infty(d) = \sup_{t>0} \left\{ \frac{g(\bar{x}+td) - g(\bar{x})}{t} + \underbrace{\frac{\alpha t}{2}\|d\|^2}_{\to +\infty} \right\}$$

y por la convexidad de $g$,

$$f_\infty(d) = \begin{cases} +\infty, & d \neq 0 \\ 0, & d = 0 \end{cases}$$

$$\frac{g(\bar{x}+td) - g(\bar{x})}{t} \geq \frac{g(\bar{x}+d) - g(\bar{x})}{1}$$

para todo $t \geq 1$. Se deduce que $f_\infty(d) = +\infty$. Así, como pues $f_\infty(0) = 0$, $S_0(f_\infty) = \{0\}$ y por lo tanto $f$ es inf-compacto.




## Teorema 3

*Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciable tal que* $-\infty < m = \inf f(x)$. *Para* $\epsilon > 0$, *sea* $x_\epsilon$ *tal que* $f(x_\epsilon) \leq m + \epsilon$. *Entonces existe* $\overline{x}$ *tal que* $\|\overline{x} - x_\epsilon\| \leq \sqrt{\epsilon}$, $\|\nabla f(\overline{x})\| \leq 2\sqrt{\epsilon}$ *y* $f(\overline{x}) \leq m + \epsilon$.

$\exists\, \overline{x}$

$x_\varepsilon \in B(x, \sqrt{\varepsilon})$

$f(x_\epsilon)$

$m \qquad m+\epsilon$

## Demostración.

Consideremos $g(x) = \overbrace{f(x)}^{\text{sci}} + \overbrace{\frac{\alpha}{2}\|x - x_\epsilon\|^2}^{\text{Scal}}$, con $\boxed{\alpha > 0.}$ Como $f$ es sci y la función $x \to \frac{\alpha}{2}\|x - x_\epsilon\|^2$ es inf-compacto, entonces $g$ es inf-compacto y por lo tanto existe $\overline{x}$ tal que $g(\overline{x}) \leq g(x)$ para todo $x$. Se sigue que $\nabla f(\overline{x}) + \alpha(\overline{x} - x_\epsilon) = \nabla g(\overline{x}) = 0$ y en consecuencia $\|\nabla f(\overline{x})\| = \alpha\|\overline{x} - x_\epsilon\|$. Por otro lado,

$$m + \frac{\alpha}{2}\|\overline{x} - x_\epsilon\|^2 \leq f(\overline{x}) + \frac{\alpha}{2}\|\overline{x} - x_\epsilon\|^2 = g(\overline{x}) \leq g(x_\epsilon) = f(x_\epsilon) \leq m + \epsilon.$$

Se deduce por lo tanto que

$$\|\overline{x} - x_\epsilon\|^2 \leq \frac{2\epsilon}{\alpha}, \qquad f(\overline{x}) \leq m + \epsilon.$$

Considerar $\alpha = 2$.

# FIN