CONVERGENCIA DE SERIES DE FOURIER DERIVACIÓN-INTEGRACIÓN

irlamn@uni.edu.pe

- *Función continua a trozos*

  $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < +\infty$ tal que

  - es continua en $[a, b]$ salvo quizá en un número finito de puntos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
  - en cada punto de discontinuidad, el salto es finito.

- *Función regular a trozos*

  $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < +\infty$ tal que

  - f es continua a trozos en $[a, b]$
  - f' es continua a trozos en $[a, b]$

- *Función $\mathcal{L}_1$*
  - $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$
  - $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$
- *Función $\mathcal{L}_2$*
  - $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < +\infty$
  - $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < +\infty$
- $\mathcal{L}_2\big([a,b]\big) \subset \mathcal{L}_1\big([a,b]\big)$

Convergencia puntual

Sea f función 2π-periódica. Si cumple

- f es continua a trozos en $[-\pi, \pi]$
- Existe la derivada de f por la derecha y por la izquierda $\forall x \in [-\pi, \pi)$

La serie de Fourier de f **converge puntualmente** en $[-\pi, \pi]$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big] =$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\Big[f(x^+) + f(x^-) \Big] & \text{Si } x \in (-\pi, \pi) \\ \dfrac{1}{2}\Big[f(\pi) + f(-\pi) \Big] & \text{Si } x = -\pi \text{ ó } x = \pi \end{cases}$$

Convergencia Uniforme

- *Criterio de la mayorante*

  Dadas la serie funcional $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ y la serie numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$, que cumplen:

  $$|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in [a,b] \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}$$

  Si la serie numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ converge, entonces la serie $S(x)$ converge uniformemente en $[a,b]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right] = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \quad x \in [-\pi, \pi]$$

- Si las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ o $\sum c_n$ convergen absolutamente, entonces la serie de Fourier converge uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$

- Si f es 2π-periódica y continua, y f' es continua a trozos en $[-\pi, \pi]$, entonces la serie de Fourier converge uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$

Si $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ siendo la convergencia uniforme en $[a,b]$

- *Continuidad*

  Si $f_n(x)$ es una función continua $[a,b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es continua en $[a,b]$

- *Integrabilidad*

  Si $f_n(x)$ es una función continua $[a,b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces se puede integrar la serie término a término:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_1}^{x_2} f_n(x)\,dx \qquad a \le x_1 \le x_2 \le b$$

UNICIDAD

- Si f es $2L$-periódica y regular a trozos en $[-L, L]$, entonces la serie de Fourier de f es única.

  - *Ejemplo*

$$f(t) = |\sin t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t < 0 \\ \sin t & 0 < t < \pi \end{cases} = \frac{1}{2}(\sin t + f(t))$$

$$\boxed{g(t) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{4n^2-1} + \frac{1}{2}\sin t}$$

Derivación

- Si f es $2L$-periódica y continua, y f' es regular a trozos en $[-L, L]$, entonces la serie de Fourier (que converge uniformemente a f en $[-L, L]$)

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

se puede derivar término a término y converge puntualmente a $f'(x)$ en $[-L, L]$

$$f'(x) = \frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[nb_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) - na_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

Integración

- Si f es $2L$-periódica y continua a trozos, y f' es continua a trozos en $[-L, L]$, entonces la serie de Fourier (que converge puntualmente a f en $[-L, L]$)

$$f(x) = \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

se puede integrar término a término.

$$f(x) = \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\,A_0 + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{b_n}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{a_n}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

converge uniformente a $F(x) - \frac{a_0}{2}\,x$ en $[-L, L]$ con

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s \qquad -L \le x \le L$$

$$\frac{1}{2}\,A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} F(x)\,\mathrm{d}x$$

Ejercicio

A partir del desarrollo de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases}$$

obtener la serie de Fourier de $g(t) = |t|$ en $[-\pi, \pi]$

Convergencia en la media

Error cuadrático medio

Sea: $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \quad 2\pi-$ periódica

- Suma parcial N-ésima de su serie de Fourier:

$$S_N(x) = \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{n=1}^{N} \Big[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big]$$

- Error de la aproximación en cada punto:

$$\mathcal{E}_N(x) = \Big| f(x) - S_N(x) \Big|$$

- *Error cuadrático medio* de la aproximación

$$\mathsf{E}_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big[f(x) - S_N(x) \Big]^2 \,\mathrm{d}x$$

Desigualdad de Bessel

- Error cuadrático medio de la aproximación

$$\mathrm{E}_N = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\right)\right]$$

- Como $\mathrm{E}_N \geq 0$

$$\boxed{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

Convergencia en la media

- $$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, \mathrm{d}x$$
- Si $f \in \mathcal{L}_2([-\pi, \pi])$ entonces la serie

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

converge. Además, convergen por separado.

- Se cumple (*convergencia en la media*)

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{E}_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - S_N(x) \right]^2 \mathrm{d}x = 0$$

Identidad de Parseval

- Como $\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}_N = 0$,

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,a_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)}$$

- Ejemplo: a partir del desarrollo de Fourier de la función 2π-periódica

$$f(t) = t^2 \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

calcular la suma

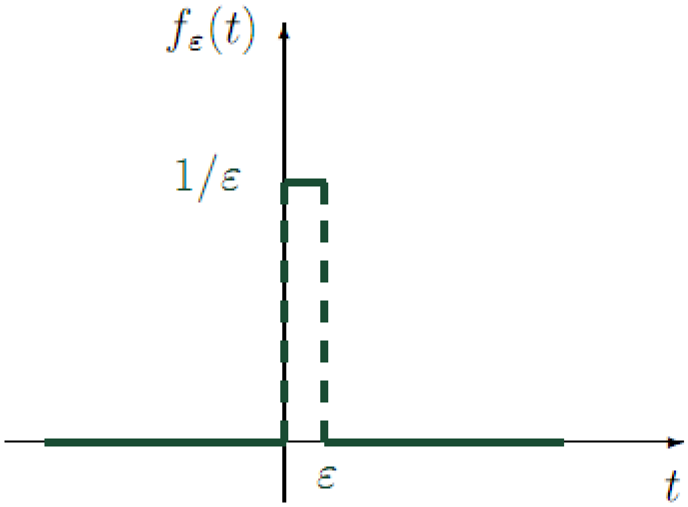
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Función Delta de Dirac

- Sea

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(t)\, dt = 1$$



$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

Propiedades

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

- Si $g(t)$ es una función continua en $\mathbb{R}$, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = g(0)$$

- Si $g(t)$ es una función continua en $\mathbb{R}$, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t = g(a)$$

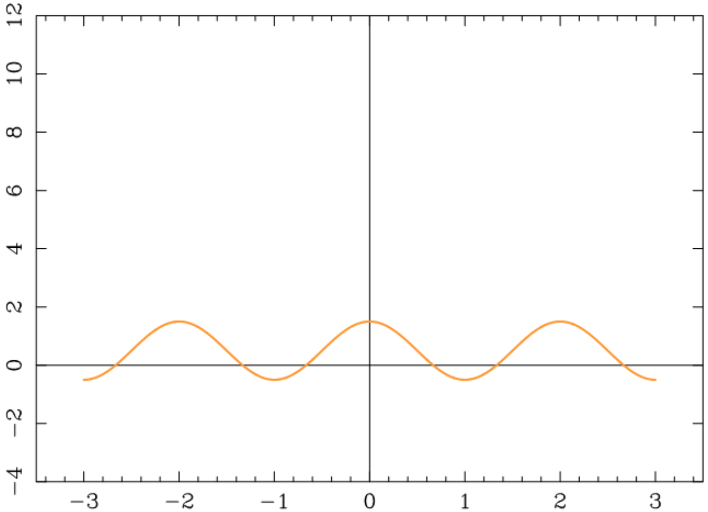
Serie de Fourier de la Función Delta

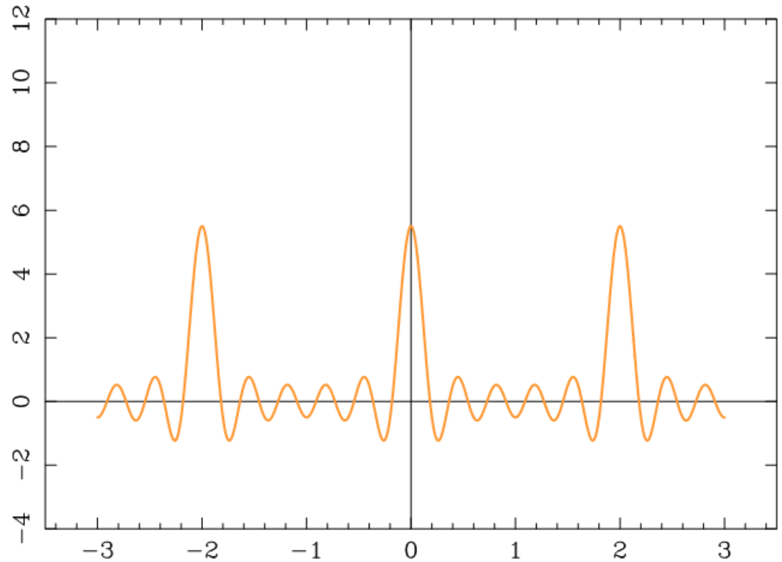
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \qquad -T < t < T \longrightarrow \delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{T}t}$$

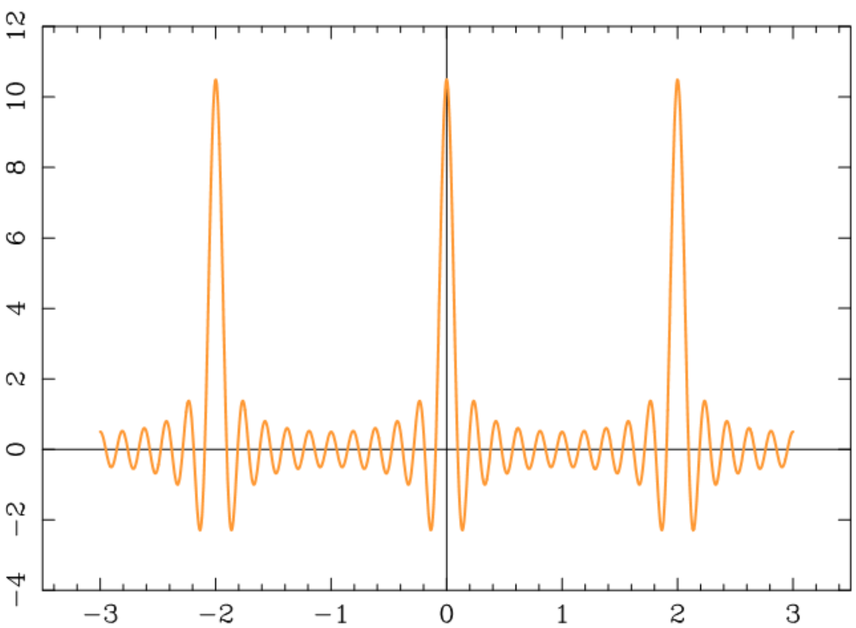
$$c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \delta(t)\, e^{-i\frac{n\pi}{T}\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2T}\, e^{-i\frac{n\pi}{T}\,0} = \frac{1}{2T}$$

$$\delta(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{T}t} = \frac{1}{2T} + \frac{1}{2T}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{i\frac{n\pi}{T}t} + e^{-i\frac{n\pi}{T}t}\right) \Longrightarrow$$

$$\boxed{\delta_n(t) = \frac{1}{2T} + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right)}$$







n=3,15,30

T=2p, p=1,2,..