Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2]
[Prof: Los Profesores] UNI, 05 de octubre de 2021

Práctica Calificada 2

1. Resolver la siguiente ecuación diferencial por el método de coeficientes indeterminados

$$\frac{d^4x}{dt^4} - 16x = 4e^{-5t} + t^2$$

[7ptos]

Solución: La ecuación característica a resolver es:

$$m^4 - 16 = 0 \Longrightarrow (m^2+4)(m^2-4) = 0$$

Las raíces son $m = \pm 2$, $m = \pm 2i$, luego la solución de la EDO homogénea es

$$x_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + C_3 \sin(2t) + C_4 \cos(2t).$$

Dividimos el lado derecho en dos partes $R = R_1 + R_2$, con $R_1 = 4e^{-5t}$ y $R_2 = t^2$ y aplicamos el método de coeficientes indeterminados. Primero, para R_1, el candidato de solución particular es: $x_p = Ae^{-5t}$, luego reemplazando

$$\begin{aligned} x_p^{iv} - 16x_p &= 4e^{-5t} \\ 625Ae^{-5t} - 16Ae^{-5t} &= 4e^{-5t} \\ 609Ae^{-5t} &= 4e^{-5t}. \end{aligned}$$

Entonces, $A = 4/609$ y la solución particular es $x_p = \frac{4}{609}e^{-5t}$. De manera similar, para R_2, obtenemos la solución particular $x_p = -t^2/16$. Por tanto la solución general es

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + C_3 \sin(2t) + C_4 \cos(2t) + \frac{4}{609}e^{-5t} - \frac{t^2}{16}.$$

2. Resuelva la siguiente EDO, usando el método de variación de parámetros:

$$y'' - 2y' + y = e^{2x} + 8.$$

[6ptos]

Solución: Hallamos la solución de la EDO homogénea asociada $y'' - 2y' + y = 0$. El polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2$, por tanto el espacio de solución es $\{y_1 = e^x, y_2 = xe^x\}$. Así obtenemos $y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x$ para $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Usando el método de variación de parámetros, obtenemos

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

Hallamos el wronskiano

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(1+x) \end{vmatrix} = e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sea $R = e^{2x} + 8$. Calculamos los parámetros variables

$$u_1 = -\int \frac{y_2 R}{W(y_1, y_2)}\, dx = -\int \frac{xe^x(e^{2x}+8)}{e^{2x}}\, dx = e^x(1-x) + 8e^{-x}(x+1),$$

$$u_2 = -\int \frac{y_1 R}{W(y_1, y_2)}\, dx = -\int \frac{e^x(e^{2x}+8)}{e^{2x}}\, dx = e^x - 8e^{-x}.$$

Luego, la solución particular es $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = e^{2x} + 8$. Por tanto la solución general es

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^{2x} + 8.$$

3. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule el polinomio caracterítico de A. [2ptos]

b) Encontrar el valor de e^{tA} usando el Teorema de Cayley-Hamilton. [2.5ptos]

c) Resolver el sistema diferencial

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \end{aligned}$$

[2.5ptos]

Solución: Ver Sección 7.1.1 de Jose S. Cánovas - Apuntes de ecuaciones diferenciales Peña. `https://www.dmae.upct.es/~jose/ayedo/temas.pdf`

a) El polinomio característico es $p(\lambda) = det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^3$.

b) Sea $N = A - I$. Por el teorema de Cayley-Hamilton, obtenemos que $N^3 = 0$, luego N es nilpotente de índice 3. Esto facilita enormemente el cálculo de la exponencial de N. De hecho, se tiene

$$\exp(tN) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n N^n}{n!} = I + tN + \frac{t^2}{2} N^2.$$

Por otro lado, desde que $tA = tI + tN$ y además tI conmuta con tN, obtenemos que

$$\exp(tA) = e^t I \times (I + tN + \frac{t^2}{2} N^2)$$

Podemos deducir

$$\exp(tA) = e^t \begin{pmatrix} t+1 & t^2 & t^2+t \\ t & t^2-2t+1 & t^2-t \\ -t & -t^2+2t & -t^2+t+1 \end{pmatrix}$$

c) Sea $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. Entonces $X(t) = \exp(tA)X(0)$. Denotando $X(0) = (a, b, c)^t$, se obtiene

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a(t+1)e^t + bt^2e^t + c(t^2+t)e^t \\ x_2(t) &= ate^t + b(t^2-2t+1)e^t + c(t^2-t)e^t \\ x_3(t) &= -ate^t + b(-t^2+2t)e^t + c(-t^2+t+1)e^t. \end{aligned}$$

Ver también otros enfoques de Cayley-Hamilton
1) `https://web.mit.edu/2.151/www/Handouts/CayleyHamilton.pdf`
2) `http://msvlab.hre.ntou.edu.tw/grades/engmath_1/2000/matrix.pdf`
3) Ver el Método Putzer en el cap 7 de CALCULUS VOLUMEN 2 de Tom M. Apostol.
`http://www.untumbes.edu.pe/vcs/biblioteca/document/varioslibros/Calculus.%20Vol%20II.pdf`
O utilizar la técnica de vectores propios descrita en el cap 7 de Yunus A. Cengel - Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería y Ciencias (en esta pregunta no se pidió este enfoque).