UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

CURSO: INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

CM-2G2A

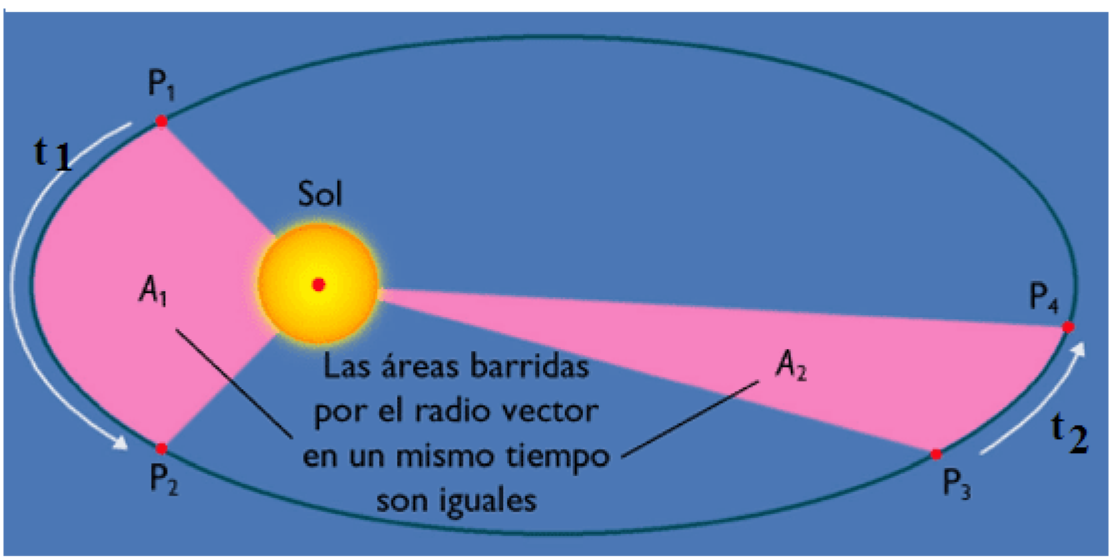
CICLO: 2021-2

SOLUCIONARIO DE LA PRUEBA DE ENTRADA

Fecha 06 de Setiembre 2021

Preguntas:

1. Exprese textualmente la segunda Ley de Kepler?. Cual es para usted la expresión Matemática equivalente en términos diferenciales?.
   RESPUESTA
   La segunda Ley de Kepler se refiere a las áreas generadas por un radio vector que se define entre la posición del sol y un planeta y dice lo siguiente**:**
   " Las áreas barridas con velocidad areolar Va, por un radio vector con origen el Sol y destino un planeta, las áreas serán iguales si el barrido es en tiempos iguales **"**
   Es decir Si el tiempo $\mathbf{t_1}$ que tarda un planeta en ir desde P_1 hasta P_2 es el mismo tiempo $\mathbf{t_2}$ que tarda en ir desde P_3 hasta P_4, el área A_1 será igual al área A_2. Como se percibe en la siguiente figura.



Johanes Kepler se basó en los datos astronómicos de **Tycho Brahe** antes de que **Isaac Newton** estableciera la Ley de la Gravitación Universal.
En términos Matemáticos, se dice que este resultado se debe a que l**a velocidad areolar** V_A es constante **(**velocidad que requiere para realizar el barrido**).** Por tanto: el área se determina mediante la siguiente ecuación**:** Para tiempos iguales

$t_1 = t_2 = \Delta t$

$A_1 = A_2 = A$ entonces**:**

$\frac{dA}{dt} = V_a = Cte.$

El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo forman es decir:

$$V_a = \frac{dA}{dt} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{r}\times d\vec{r}\right|}{dt} = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{r}\times\vec{v}\right| \underset{[2]}{=} \frac{1}{2}\cdot r\cdot v\cdot \sin(\theta) = \text{cte}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\left|\vec{r}\times\vec{v}\right| = r\cdot v\cdot\sin(\theta)$$

2. El determinante de una matriz triangular o diagonal, es el producto de los elementos de su diagonal principal (V) o (F) De un ejemplo en una matriz de 3x3..
   RESPUESTA
   Es (V)

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = -6$$

$$\det(B) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = -6$$

3. Si en un determinante a una fila (o a una columna) se le suma una combinación lineal de otras filas (o de otras columnas), su valor no varía (V) o (F). De un ejemplo o contraejemplo para una matriz cuadrada de orden 3.

RESPUESTA

$$\det(A)=\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 0\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}=-6$$

$$\det(c)=\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3+1 & -2+4 & 0+3\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}-6$$

4. – Dada la matriz simétrica A= $\begin{pmatrix}h & h\\ h & -h\end{pmatrix}$, encuentre el valor de *h*, de modo tal que A sea ortogonal.

RESPUESTA

Si A es simétrica entonces AA^t =I=

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h & h\\ h & -h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h & h\\ h & -h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2h^2 & 0\\ 0 & 2h^2\end{bmatrix}\Rightarrow h=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Halle el área total *A* definida por la suma de las áreas $A_1+A_2+A_3$ y generada por la curva en coordenadas polares, encerrada por *r=2sen3Θ*, como se muestra en la siguiente Figura

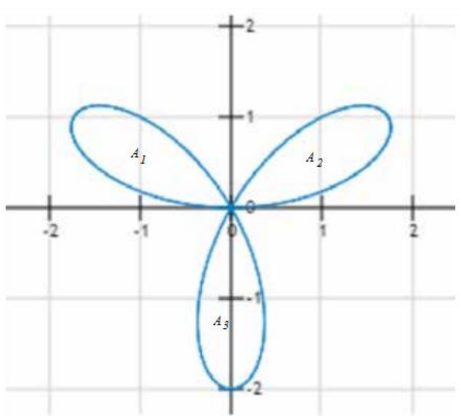


Figura: curva r=2sen3Θ.

RESPUESTA

Por definición de áreas en coordenadas polares, el área total es:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\propto}^{\beta} r^2 d\theta$$

Hay que determinar los limites

Para hallar los límites de integración se hace $r=0$ en la función

$$2sen3\theta = 0 \;\; \rightarrow \;\; sen3\theta = 0 \;\; \rightarrow \;\; 3\theta = 0, \pi, 2\pi, etc$$

$$\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \; \ldots\ldots$$

Las áreas son iguales, entonces en sentido antihorario elegimos determinar el área A_2, integrando:

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (2sen3\theta)^2 d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/3} sen^2 3\theta d\theta = 2\int_0^{\pi/3} \frac{1}{2}(1 - cos6\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{3}} cos6\theta d\theta = |\theta|\begin{matrix}\frac{\pi}{3}\\0\end{matrix} - \left|\frac{sen6\theta}{6}\right|\begin{matrix}\frac{\pi}{3}\\0\end{matrix} = \frac{\pi}{3} - \frac{sen\left(6\frac{\pi}{3}\right)}{6} = \frac{\pi}{3}\,u^2$$

El área total es

$$A = 3\left(\frac{\pi}{3}\,u^2\right) = \pi\,u^2$$