Primera sesión

Análisis Convexo - CM3E2

Jonathan Munguia[1]

[1,2]Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

13 de abril de 2021

Outline

Motivación

Si x^* es un punto crítico de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y la matriz hesiana de f es semidefinida positiva en $\mathbb{R}^n$, es decir:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall z \in \mathbb{R}^n : \langle Hf(x)z, z\rangle \geq 0.$$

Entonces x^* es un minimizador global.

Observación 1

La idea de la prueba se sigue evaluando la segunda derivada unidimensional a lo largo del segmento $[x, x^*]$, lo cual funciona bien en $\mathbb{R}^n$, caso contrario en conjuntos donde el segmento se escapa.

Definición 1 (Conjunto convexo)

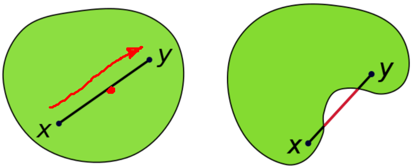
Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si

$$\forall x, y \in U, \forall t \in (0,1) : \quad tx + (1-t)y \in U.$$

Es decir el el segmento de recta

$$[x, y] := \{z \in \mathbb{R}^n : z = (1-t)x + ty, 0 \leq t \leq 1\}$$

queda contenido en U. $\quad x + t(y-x) =$



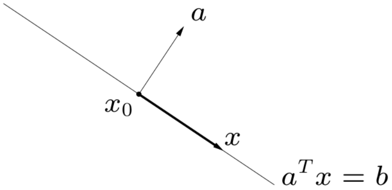
(a) Convexo (b) No convexo

Ejemplos

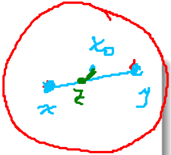
- Esfera: $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\|_2 < r\}$.
  En efecto, basta observar que: Dados $x, y \in B(x_0, r)$

$$\|tx + (1-t)y - x_0\|_2 = \|t(x - x_0) + (1-t)(y - x_0)\|_2$$

- el vacío y $\mathbb{R}^n$
- Hiperplano: $H := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle = b\}$ $(a \neq 0)$



Ejemplos

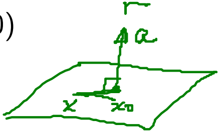


- ~~Esfera~~ Bola: $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\|_2 < r\}$.
  En efecto, basta observar que: Dados $x, y \in B(x_0, r)$

$$r > \|\underbrace{tx + (1-t)y}_{z} - x_0\|_2 = \|t(x - x_0) + (1-t)(y - x_0)\|_2 \leq tr + (1-t)r$$

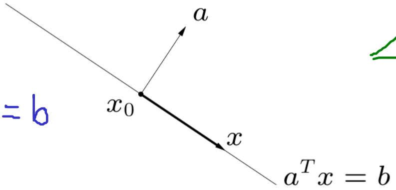
$tx_0 + (1-t)x_0$

- el vacío y $\mathbb{R}^n$
- Hiperplano: $H := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a\rangle = b\}$ $(a \neq 0)$



$\langle tx + (1-t)y, a\rangle$

$= t\underbrace{\langle x, a\rangle}_{b} + (1-t)\underbrace{\langle y, a\rangle}_{b} = b$

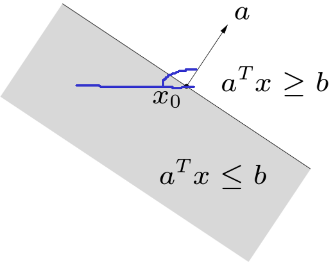


$\langle x - x_0, a\rangle = 0$

$\langle x, a\rangle = \underbrace{\langle x_0, a\rangle}_{b}$

Ejemplos (cont...)

- Semiespacio: $\mathcal{H} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle \leq b\}$ $(a \neq 0)$



$\mathbb{R}^2$

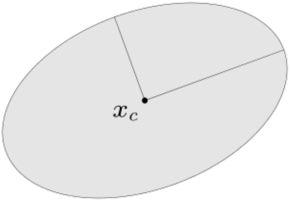
$$B(x_c, 1) = \{ x_c + u : \|u\| \leq 1 \}$$

$$B(x_c, r) = \{ x_c + rIu \; \dots \}$$

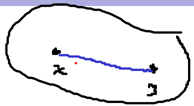
Ejemplos (cont...)

$$= \{ x_c + Au : \|u\| \leq 1 \}$$

- Elipsoide: $E(x_c, A) := \{x_c + Au \in \mathbb{R}^n : \|u\|_2 \leq 1\}$ (A matriz cuadrada no singular)



$x_c + u$, $\|u\| \leq 1$



$tx + (1-t)y$

$t + (1-t) = 1$

Definición 2 (Combinación convexa)

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$. Un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ es una combinación convexa de U, si existen $p \in \mathbb{N}$, $\{t_i\}_{i=1}^p \subset [0,1]$ y $\{x_i\}_{i=1}^p \subset U$ tales que

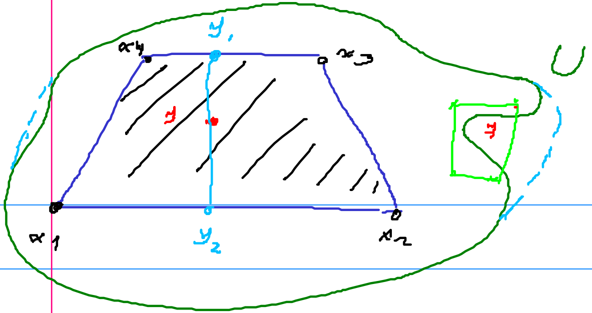
$$\sum_{i=1}^p t_i = 1 \quad \text{y} \quad x = \sum_{i=1}^p t_i x_i \, .$$

Lema 1

El conjunto de todas las combinaciones convexas de un conjunto, es convexo.

Proposición 1

Un conjunto es convexo si y solo si contiene a todas sus combinaciones convexas.



$$y_1 = t\,x_4 + (1-t)\,x_3 \qquad t \in [0,1]$$

$$y_2 = s\,x_1 + (1-s)\,x_2 \qquad s \in [0,1]$$

$$y = r\,y_1 + (1-r)\,y_2 \qquad r \in [0,1]$$

$$= rt\,x_4 + r(1-t)\,x_3 + (1-r)s\,x_1 + (1-r)(1-s)\,x_2$$

$U \subset \mathbb{R}^n$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists p \in \mathbb{N},\ \exists \{t_i\}_{i=1}^{p} \subset [0,1],\ \exists \{x_i\}_{i=1}^{p} \subset U \text{ tq } \sum_{1}^{p} t_i = 1 \quad x = \sum_{1}^{p} t_i x_i \right\}$$

Combinaciones convexas de U

A es convexo

$$x = \sum_{1}^{p} \lambda_i x_i \qquad z = \sum_{1}^{q} \mu_j z_j$$

$$\sum \lambda_i = 1 \qquad \sum \mu_j = 1$$

$$t x + (1-t) z = \sum (t\lambda_i) x_i + \sum (1-t)\mu_j z_j$$

p+q puntos

$$t \underbrace{\sum_{1}^{p} \lambda_i}_{1} + (1-t) \underbrace{\sum_{1}^{q} \mu_j}_{1} = 1$$

$U \subset \mathbb{R}^n$ Sup: Convexo

Por inducción:

Todas las comb. convexas hasta el orden p están en U

¿$p+1$ puntos?

$$\sum_{1}^{p+1} t_i = 1$$

$$x = \sum_{1}^{p+1} t_i x_i = \underbrace{\sum_{1}^{p} t_i x_i}_{t\left(\underbrace{\sum_{1}^{p} \left(\frac{t_i}{t}\right) x_i}_{\in U}\right)} + \underbrace{t_{p+1}}_{1-\sum_{1}^{p} t_i \,=\, t}\overbrace{x_{p+1}}^{\in U}$$

$\in \underline{U}$

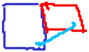
$\{C_i\}_{i\in I}$ familia de convexos $\quad x, y \in \bigcap_{i\in I} C_i$

$z = tx + (1-t)y \in C_i \ \forall i \Rightarrow z \in \bigcap C_i$.

Proposición 2

La intersección de conjuntos convexos es convexo. La unión no es convexa en general.

Proposición 3



Sean $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $U_2 \subset \mathbb{R}^p$ subconjuntos convexos. Entoncess el producto cartesiano $U_1 \times U_2$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

Definición 3 (Transformación afín)

Una función $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es afín si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} : B\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) = \lambda B(x) + (1-\lambda) B(y).$$

$T(x) = a^T x$

$T(x+y) = Tx + Ty$

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $T(\lambda x + \mu y) = \lambda Tx + \mu Ty$.

$U_1 \subset \mathbb{R}^n \quad U_2 \subset \mathbb{R}^p$

$a = (a_1, a_2) \quad , t \in [0,1]$

$b = (b_1, b_2)$

$$ta + (1-t)b = (\underbrace{ta_1 + (1-t)b_1}_{\in U_1}, \underbrace{ta_2 + (1-t)b_2}_{\in U_2})$$

$\in U_1 \times U_2$

$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ $\quad \underline{A(0)=0}$

$A(\lambda x) = A(\lambda x + (1-\lambda)0) = \lambda A(x) + (1-\lambda)A(0) \overset{0}{=} \lambda A x$

Proposición 4 $\quad A(x+y) = 2A\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) = 2\cdot\frac{1}{2}Ax + 2\cdot\frac{1}{2}Ay = Ax + Ay.$

Una transformación afín que lleve el cero en el cero es una transformación lineal.

Proposición 5 $\quad B$ afín y $a \in \mathbb{R} \Rightarrow C(\cdot) = B(\cdot) + a$ es afín

Las traslaciones de transformaciones afines son afines. (TAREA)

Teorema 1

Una función $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es una transformación afín si y solo si existe una transformación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y un elemento $b \in \mathbb{R}^p$ tal que $B(x) = A(x) + b$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

$A(0) = B(0) - b = 0$

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $b = B(0)$, luego $A \overset{(\cdot)}{=} B \overset{(\cdot)}{-} b$ es una transformación afín que lleva el cero en el cero y por tanto lineal. Así, se concluye que $B = A + b$.

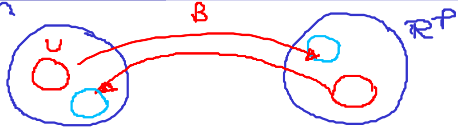
$\Leftarrow$) Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene de la linealidad de A:

$$
\begin{aligned}
B\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) &= A\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) + b \qquad \lambda b + (1-\lambda)b \\
&= \lambda A(x) + (1-\lambda)A(y) + b \\
&= \lambda\Big(A(x) + b\Big) + (1-\lambda)\Big(A(y) + b\Big).
\end{aligned}
$$

$= \lambda B(x) + (1-\lambda) B(y)$

$B : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

convexo



Proposición 6

Sea $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ una transformación afín. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^p$ subconjuntos convexos. Entonces $B(U)$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^p$ y $B^{-1}(V)$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.

Demostración

- Sean $a, b \in B(U)$ y $\lambda \in (0,1)$. Entonces, existen $x, y \in U$ tal que $a = B(x)$ y $b = B(y)$. Desde que U es convexo, se tiene que $\lambda x + (1-\lambda)y \in U$. Entonces, la convexidad de $B(U)$ se sigue de

$$\begin{aligned} \lambda a + (1-\lambda)b &= \lambda B(x) + (1-\lambda)B(y) \\ &= B\big(\underbrace{\lambda x + (1-\lambda)y}_{\in U}\big) \in B(U). \end{aligned}$$

Demostración(cont...)

- Sean $x, y \in B^{-1}(V)$, y $\lambda \in (0,1)$, entonces $B(x), B(y) \in V$. Por la convexidad de V y por ser B afín, se tiene que

$$V \ni \lambda B(x) + (1-\lambda)B(y) = B(\lambda x + (1-\lambda)y),$$

por tanto $\lambda x + (1-\lambda)y \in B^{-1}(V)$.

Ejemplos

Las siguientes operaciones preservan la covexidad de U:

- Traslación: $U + b$ para todo $b \in \mathbb{R}^n$.
- Escalación: λU para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Proyección ortogonal:
  $T = \{x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \,:\, (x_1, x_2) \in U \text{ para algun } x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}\}$, con $n = n_1 + n_2$.

Ejemplos (cont...)

- Conjunto suma: $U_1 + U_2 = \{x_1 + x_2 \,:\, x_1 \in U_1\,,\; x_2 \in U_2\}$.
  En efecto: este conjunto es la imagen de $U_1 \times U_2$ a través de la transformación afín $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = \langle (1,1), (x_1, x_2) \rangle$.

FIN