Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Análisis Convexo - CM3E2]
[Prof: Jonathan Munguia] UNI, 30 de julio de 2021

Examen Final

1. Dado $M = \{(u, w) : u \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ no vacío y que no contenga rectas verticales con respecto al eje $(n + 1)$. Se considera los siguientes problemas (Ver Figura 1):

   P1) Encontrar la $(n + 1)$-ésima componente mínima del conjunto de puntos de M que estén sobre el eje $(n + 1)$, es decir

   $$w^* = \inf_{(0,w)\in M} w. \tag{1}$$

   P2) Encontrar el punto de cruce máximo con el eje $(n + 1)$ de los hiperplanos cuyos semiespacios cerrados contienen a M y cuyo cono de recesión contiene al eje positivo $(n + 1)$, inclusive el origen, es decir

   $$q^* = \sup_{\mu\in\mathbb{R}^n} \inf_{(u,w)\in M} \{w + \langle\mu, u\rangle\}. \tag{2}$$

   Demuestre

   a) La función $q(\mu) = \inf_{(u,w)\in M}\{w + \langle\mu, u\rangle\}$ es cónvava y scs sobre $\mathbb{R}^n$. [2.5ptos]

   b) La relación de dualidad débil entre las soluciones de P1 y P2: [2.5ptos]

   $$q^* \leq w^*. \tag{3}$$

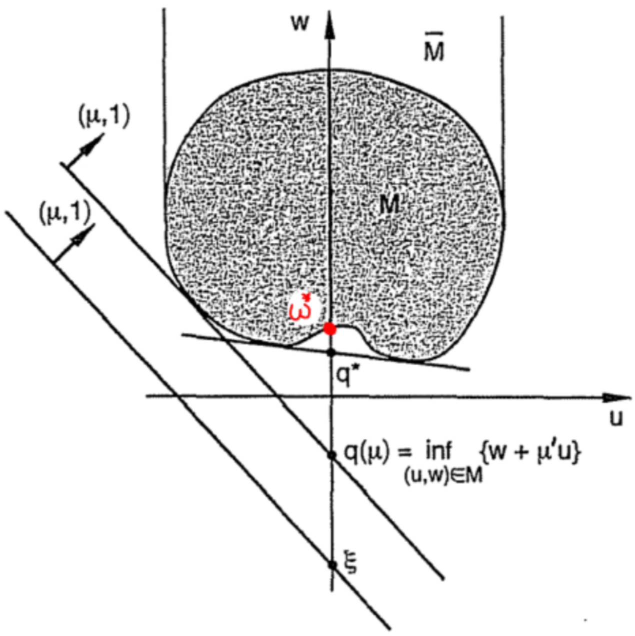

Figura 1: Problemas de optimización sobre M

Solución:

a) Como $-q(\mu) = \sup\{-w + \langle \mu. - u\rangle\}$. Entonces $-q$ es el supremo de una familia de funciones afines por tanto es convexa y sci, lo cual implica que q sea cóncova y scs.

b) Dado $(u, w) \in M$ y $\mu \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$q(\mu) = \inf_{(u,w)\in M} \{w + \langle \mu, u\rangle\} \leq \inf_{(0,w)\in M} w = w^*,$$

luego tomando supremo sobre μ, se obtiene $q^* \leq w^*$.

2. Considere los problemas P1 y P2 definidos sobre el conjunto M de la Pregunta 1 y asuma i,ii y iii:

i) $-\infty < w^*$

ii) El conjunto

$$\overline{M} = \{(u, w) \,:\, \exists\, \overline{w} \text{ con } \overline{w} \leq w \wedge (u, \overline{w}) \in M\}$$

es convexo.

iii) El conjunto

$$D = \{u \,:\, \exists\, w \in \mathbb{R} \text{ con } (u, w) \in \overline{M}\}$$

contiene el origen en su interior relativo.

Entonces $q^* = w^*$, el conjunto de soluciones optimales de P2, $Q^* = \{\mu \,:\, q(\mu) = q^*\}$, tiene la forma

$$Q^* = (\operatorname{aff} D)^{\perp} + \tilde{Q},$$

donde $\tilde{Q}$ es un conjunto compacto, convexo no vacío. Además, Q^* es compacto y no vacío si y solo si el origen pertenece a su interior. [8ptos]

Solución:

a) La condición (iii) implica que $w^* < \infty$ y por la condición (i), $w^* \in \mathbb{R}$.

b) Desde que w^* es el valor optimal de P1 y la recta $\{(0, w) \,:\, w \in \mathbb{R}\}$ está contenida en la cápsula afín de $\overline{M}$, se sigue que $(0, w^*) \notin \operatorname{ri} \overline{M}$. Por lo tanto, por un teorema de separación, existe $(\mu, \beta) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que

$$\beta w^* \leq \langle \mu, u\rangle + \beta w, \quad \forall (u, w) \in \overline{M}, \tag{4}$$

$$\beta w^* < \sup_{(u,w)\in\overline{M}} \{\langle \mu, u\rangle + \beta w\}. \tag{5}$$

c) Desde que

$$\{(\overline{u}, w) \,:\, \overline{w} \leq w\} \subset \overline{M} \quad \forall (\overline{u}, \overline{w}) \in M,$$

se sigue de (4) que $\beta \geq 0$.

d) Si $\beta = 0$, entonces de (4), se tiene

$$0 \leq \langle \mu, u\rangle \quad \forall u \in D,$$

así, la función lineal $\langle \mu, u\rangle$ alcanza su mínimo sobre D en $0 \in \operatorname{ri} D$ por (iii).

e) D es convexo por ser la proyección del espacio de u del conjunto $\overline{M}$, el cual es convexo por (ii).

f) Por la parte (d), (e) y la Proposición 1, se deduce que $\langle \mu, u \rangle$ es constante sobre D, es decir

$$\langle \mu, u \rangle = 0 \quad \forall u \in D,$$

lo cual contradice (5). Por tanto $\beta > 0$ y por normalización, tomamos $\beta = 1$. De (4), obtenemos

$$w^* \leq \inf_{(u,w)\in\overline{M}} \{\langle \mu, u \rangle + w\} \leq \inf_{(u,w)\in M} \{\langle \mu, u \rangle + w\} = q(\mu) \leq q^*.$$

Luego, por Pregunta 1.b, se obtiene $q(\mu) = q^* = w^*$ y así Q^* es no vacío.

g) En particular $Q^* = \{\mu \,:\, q(\mu) \geq q^*\}$ y por Pregunta 1.a, se sigue que Q^* es convexo y cerrado.

Proposición 1 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ convexo no vacío y $f : X \to \mathbb{R}$ una función cóncava y sea*

$$X^* := \{x \in X \,:\, f(x^*) = \inf_{x\in X} f(x)\}.$$

Si $X^* \cap \operatorname{ri} X \neq \emptyset$ entonces f es constante, es decir $X^* = X$.

Demostración: Ver Proposición 1.4.2 de Bertsekas - Convex Analysis and Optimization.

3. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo no vacío, y sea $f : C \to \mathbb{R}^n$ y $g_j : C \to \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, r$ funciones convexas. Considere el conjunto

$$F = \{x \in C \,:\, g(x) \leq 0\},$$

donde $g(x) = (g_1(x), \cdots, g_r(x))$ y asuma que

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in F.$$

Considere el conjunto $Q^* \subset \mathbb{R}^r$ dado por

$$Q^* = \{\mu \geq 0 \,:\, f(x) + \langle \mu, g(x) \rangle \geq 0 \; \forall x \in C\}.$$

Entonces

a) Q^* es compacto no vacío si y solo si existe $\overline{x} \in C$ tal que [3.5ptos]

$$g_j(\overline{x}) < 0 \quad \forall j = 1, \cdots, r.$$

b) Si las funciones g_j $j = 1, \cdots, r$ son afines y $F \cap \operatorname{ri} C \neq \emptyset$ entonces Q^* es no vacío. [3.5ptos]

(Sug. Utilice el Problema 2)

Solución:

a) Supongamos que existe $\overline{x} \in C$ tal que $g(\overline{x}) < 0$. Ahora verificamos las hipótesis del Problema 2 al conjunto (vea Figura 2):

$$M = \{(u, w) \,:\, \exists x \in C \text{ tal que } g(x) \leq u,\; f(x) \leq w\}.$$

Así se obtiene $w^* = \sup_\mu q(\mu)$, donde

$$\inf_{(u,w)\in M} \{w + \langle \mu, u\rangle\}.$$

Además, el conjunto de soluciones óptimas $P = \{\mu \,:\, q(\mu) \geq w^*\}$ es no vacío y compacto. Usando la definición de M, obtenemos

$$q(\mu) = \begin{cases} \inf_{x\in C}\{f(x) + \langle \mu, g(x)\rangle\} & \mu \geq 0, \\ -\infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De la definición de Q^*, tenemos

$$Q^* = \{\mu \,:\, q(\mu) \geq 0\},$$

luego, Q^* y P son conjuntos de nivel de la función convexa, cerrada propia $-q$. Desde que P es no vacío y compacto, se tiene que Q^* es compacto. Además, Q^* es no vacío desde que $Q^* \supset P$.

La otra implicación, supongamos que Q^* es no vacío y compacto. Procediendo por contradicción, supongamos que $0 \notin \operatorname{int} D$. Desde que D es convexo, existe un vector no nulo $\nu \in \mathbb{R}^r$ tal que

$$\langle \nu, u\rangle \geq 0 \quad \forall u \in D.$$

De la definición de D, se sigue que $\nu \geq 0$ Desde que $g(x) \in D$ para todo $x \in C$, se obtiene que

$$\langle \nu, g(x)\rangle \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Así, para cada $\mu \in Q^*$, se deduce

$$f(x) + \langle \mu + \gamma\nu, g(x)\rangle \geq 0 \quad \forall x \in C, \forall \gamma \geq 0.$$

Desde que se tiene $\nu \geq 0$, se sigue que $(\mu + \gamma\nu) \in Q^*$ para todo $\gamma \geq 0$, lo cual contradice que Q^* es acotado.

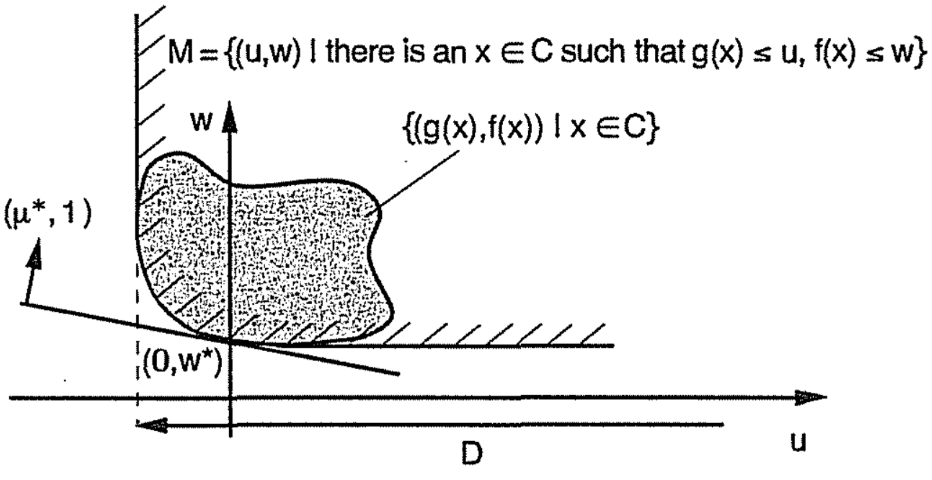

Figura 2: Conjunto M sobre el cual aplicamos el Problema 2