Doceava sesión

Análisis Convexos - CM3E2

Jonathan Munguia[1]

[1]Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

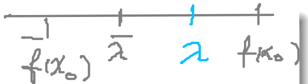
Outline

Proposición 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa propia. Entonces f es sci en ri(dom(f)) y continua en int(dom(f)).

1) f sci ri(dom f)
2) f es continua int(dom f)

 Funciones Convexas de Varias Variables



Demostración

a) Semicontinuidad:

i) Si f no fuera sci en algún $x_0 \in ri(dom(\mathrm{f}))$, entonces tome $\overline{\lambda}$ tal que $\overline{f}(x_0) < \overline{\lambda} < f(x_0)$ y así $x_0 \in S_{\overline{\lambda}}(\overline{f}) = \cap_{\lambda > \overline{\lambda}} \overline{S_\lambda(f)} \neq \emptyset$. $\subset S_\lambda f \; \forall \lambda > \bar{\lambda}$

ii) Tome $\lambda \in]\overline{\lambda}, f(x_0)[$. Como f es convexa, entonces $S_\lambda(f)$ es convexo y además no vacío, ya que , por (i), $\overline{S_\lambda(f)}$ es no vacío. Se deduce que $\mathrm{ri}(S_\lambda(f))$ es no vacío y se puede tomar $x \in \mathrm{ri}(S_\lambda(f))$.

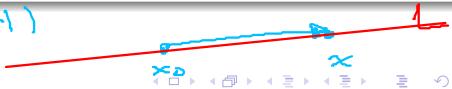
iii) Sea la función convexa $\theta : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $\theta(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$. Como $x_0 \in ri(dom(\mathrm{f}))$ y $x \in dom(f)$ entonces la recta L que une x_0 y x está contenida en $\mathrm{aff}(\mathrm{dom}(f))$ y por definición de interior relativo, existe $r > 0$ tal que

C es convexo $\Rightarrow ri(C) \neq \emptyset$

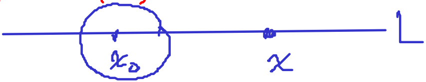
$$B_r(x_0) \cap L \subset B_r(x_0) \cap \mathrm{aff}(\mathrm{dom}(f)) \subset \mathrm{dom}(f).$$

Se deduce que $0 \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(\theta))$ y así θ es continua en 0.

$ri(S_{\bar\lambda} \bar{f}) \neq \emptyset$ $\quad ri(S_{\bar\lambda}(f))$



$L_{x_0 x} \subset \mathrm{aff}(\mathrm{dom}\, f)$



$x_0 \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}\, f)$

$\Rightarrow$ x_0 es pto interior relativo a $\mathrm{aff}(\mathrm{dom}\, f)$

$\exists\, B_r(x_0)$ tq $B_r(x_0) \cap \mathrm{aff}(\mathrm{dom}\, f) \subset \mathrm{dom}\, f$

$\theta(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$

$B_r(x_0) \cap L$

$t \in \underline{\mathrm{dom}\,\theta}$

$x_0 + t(x - x_0) \in \mathrm{dom}\, f$

$0 \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\,\theta)$

$\theta(0) = f(x_0)$

$\Rightarrow$ θ continua en 0

cont...

iv) Por (ii), $x \in \mathrm{ri}(S_\lambda(f))$ y por (i), $x_0 \in \overline{S_\lambda(f)}$. Luego, para todo $t \in]0,1[$, $x_0 + t(x - x_0) \in S_\lambda(f)$ y por lo tanto

$$f(x_0 + t(x - x_0)) = \theta(t) \leq \lambda.$$

Tomando límite a la desigualdad anterior y considerando la continuidad de θ en 0, se tiene $f(x_0) = \theta(0) \leq \lambda$, $< f(x_0)$ lo cual contradice (i).

$\lim_{t \to 0} \theta(t) \leq \lambda$

Se concluye que f es sci en $ri(dom(\mathrm{f}))$.

 Funciones Convexas de Varias Variables

$x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f) \Rightarrow \exists B_r(x) \subset \operatorname{dom} f$

$B_r(x) \cap \operatorname{aff}(\operatorname{dom} f) \subset \operatorname{dom} f \Rightarrow x \in \operatorname{ri}(\operatorname{dom} f)$

cont... f sci, f scs $\Rightarrow f$ continua.

b) Continuidad:

i) Como int(dom(f))$\subset$ $ri(dom$(f)), entonces basta probar que f es scs en int(dom(f)).

ii) Tome $x_0 \in$int(dom(f)) y $\lambda > f(x_0)$. Para cada $i = 1, \cdots, n$ defina $\theta_i : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ como $\theta_i(t) = f(x_0 + te_i)$. Cada una de esas funciones es convexa con $0 \in$int(dom(θ_i)), luego continua en 0.

iii) Como $\theta_i(0) = f(x_0) < \lambda$ entonces existe $\delta_i > 0$ tal que $f(x_0 + te_i) = \theta_i(t) < \lambda$ para todo $t \in [-\delta_i, \delta_i]$. $x_0 + te_i \in \tilde{S}_\lambda(f)$

iv) Por la convexidad de $\tilde{S}_\lambda(f)$ se deduce que co($\{x_0 \pm \delta_i e_i\}$)$\subset \tilde{S}_\lambda(f)$.

v) Hay una bola abierta V centrada en x_0 cumpliendo $V \subset$co($\{x_0 \pm \delta_i e_i\}$). Así, $V \subset f^{-1}(]-\infty, \lambda[)$. $x \in V: f(x) < \lambda$

Se concluye que f es scs en int(dom(f)).

Proposición 2

Si f es convexa propia entonces $\overline{f}$ es convexa propia.

Demostración

$\exists x_0$ tq $f(x_0) < \infty$ $\wedge$ $f(x) > -\infty$

Como f es convexa entonces epi(f) es convexo, luego epi($\overline{f}$)=$\overline{\text{epi}(f)}$ es convexo y por lo tanto $\overline{f}$ es convexa. Para probar que $\overline{f}$ es propia:

i) Se sabe que para una función continua $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y un subonjunto cualquiera C de $\mathbb{R}^n$ se cumple $A(\overline{C}) \subset \overline{A(C)}$. Aplicando esta propiedad con C =epi(f) y $A = \text{proj}_{\mathbb{R}^n}$, se tendrá dom($f$) $\subset$ dom($\overline{f}$) $\subset$ $\overline{\text{dom}(f)}$.

dom f = $\text{proj}_{\mathbb{R}^n}$ epi f

f es convexa

ii) Tenga en cuenta la propiedad siguiente: $A \subset B \subset \overline{A}$ implica ri(A)=ri(B). La demostración es sencilla y está basada en el hecho que ri(A)=ri($\overline{A}$) y que aff(A)=aff($\overline{A}$) (y por lo tanto también igual a aff(B)).

iii) Aplicando la propiedad (ii) se tiene ri(dom(f))=ri(dom($\overline{f}$)).

iv) Si hubiera algún x_0 con $\overline{f}(x_0) = -\infty$ entonces, para todo $x \in$ ri(dom($\overline{f}$)), $\overline{f}(x) = -\infty$. Por la Proposición 1 se tendría entonces que para todo $x \in$ ri(dom(f)) = ri(dom($\overline{f}$)), f es sci ri(dom f) $f(x) = \overline{f}(x) = -\infty$, lo cual contradice el hecho que f es propia.

$$\mathcal{A}(\overline{\text{epi}\, f}) \subset \overline{\mathcal{A}(\text{epi}\, f)}$$

$$\mathcal{A}(\text{epi}\, \bar{f}) = \mathcal{A}(\overline{\text{epi}\, f}), \qquad \overline{\mathcal{A}(\text{epi}\, f)} = \overline{\text{dom}\, f}$$

$$\bar{f} \leq f \Rightarrow \text{dom}\, \bar{f} \supset \text{dom}\, f$$

$$\text{dom}\, f \subset \text{dom}\, \bar{f} = \mathcal{A}(\text{epi}\, \bar{f}) \subset \overline{\text{dom}\, f}$$

Prop Si A es convexo

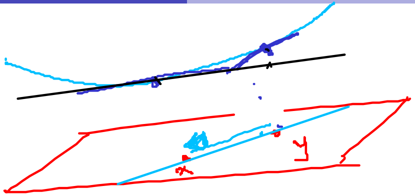
$A \subset B \subset \bar{A} \Rightarrow \text{ri}(A) \subset \text{ri}(B)$

Si A es convexo $\Rightarrow \text{ri}(A) = \text{ri}(\bar{A})$

En general $\quad \text{aff}(A) = \text{aff}(\bar{A}) = \text{aff}(B)$

- Como $A \subset B$ y $\text{aff}(A) = \text{aff}(B) \Rightarrow \text{ri}(A) \subset \text{ri}(B)$
- $B \subset \bar{A}$ y $\text{aff}(B) = \text{aff}(\bar{A}) \Rightarrow \text{ri}(B) \subset \text{ri}(\bar{A}) = \text{ri}(A)$

$\Rightarrow \text{ri}(B) = \text{ri}(A)$



Proposición 3

Sean $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo abierto no vacío y $f : C \to \mathbb{R}$ diferenciable. Las tres propiedades siguientes son equivalentes:

a) f *es convexa en* C.

b) $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$ *para todo* $x, y \in C$.

c) $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$ *para todo* $x, y \in C$.

$$\langle \nabla f(x), x-y \rangle \geq \langle \nabla f(y), x-y \rangle$$

$$\frac{\partial f}{\partial (x-y)}(x) \geq \frac{\partial f}{\partial (x-y)}(y)$$

Antes de empezar con la demostración de las implicaciones involucradas; para cualesquiera $x, z \in C$, defina la función θ_{xz} con regla de correspondencia $\theta_{xz}(t) = f(x + t(z - x))$ la cual tiene como dominio un intervalo abierto I que contiene al $[0, 1]$ pues C es un convexo abierto. Siendo f diferenciable, θ_{xz} también lo es y $\theta'_{xz}(t) = \langle \nabla f(x + t(z - x)), z - x \rangle$.

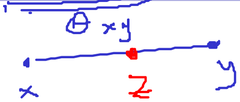
Demostración de a) $\Rightarrow$ b).

Para cualesquiera $x, y \in C$, $\theta_{xy} : I \to \mathbb{R}$ es convexa. Por propiedad de las funciones convexas en un intervalo se tiene entonces que θ'_{xy} es creciente y así $\theta'_{xy}(0) \leq \theta'_{xy}(1)$, lo cual significa que $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$.

$\theta_{xy}(t) = f(x + t(y - x))$

$\theta'_{xy}(t) = \langle \nabla f(x + t(y - x)), y - x \rangle$

$\theta'_{xy}(0) = \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq \langle \nabla f(y), y - x \rangle = \theta'_{xy}(1)$



Demostración de b) $\Rightarrow$ c).

i) Observe que para cualesquiera $x, z \in C$,
$\theta'_{xz}(1) - \theta'_{xz}(0) = \langle \nabla f(z) - \nabla f(x), z - x \rangle \geq 0$, por hipótesis.

ii) Para cualesquiera $x, y \in C$, por el teorema del valor medio, existe $\alpha \in]0,1[$ tal que

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) = \theta_{xy}(1) - \theta_{xy}(0) &= \theta'_{xy}(\alpha) \\ &= \langle \nabla f(x + \alpha(y - x)), y - x \rangle \end{aligned}$$

$\geq \theta'_{xy}(0)$

iii) Observe que para probar la desigualdad dada en c), bastaría demostrar que $\theta'_{xy}(\alpha) \geq \theta'_{xy}(0)$, algo que sería obvio si α fuera igual a uno, pero como ese no es el caso, la estrategia será escoger z adecuadamente de modo que la desigualdad $\theta'_{xz}(1) \geq \theta'_{xz}(0)$ (la cual ya se cumple, por i)) sea equivalente a $\theta'_{xy}(\alpha) \geq \theta'_{xy}(0)$.

 Funciones Convexas de Varias Variables

$0 < \alpha < 1$

cont...

iv) Escoja $z = x + \alpha(y - x)$. Reemplazando y usando i) se tiene:

$z - x = \alpha(y - x)$

$$
\begin{aligned}
\theta'_{xz}(1) &\geq \theta'_{xz}(0) \\
\langle \nabla f(z), z - x \rangle &\geq \langle \nabla f(x), z - x \rangle \\
\langle \nabla f(z), \alpha(y - x) \rangle &\geq \langle \nabla f(x), \alpha(y - x) \rangle \\
\langle \nabla f(x + \alpha(y - x)), y - x \rangle &\geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle \\
f(y) - f(x) = \langle \nabla f(x + \alpha(y - x)), y - x \rangle &\geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle .
\end{aligned}
$$

$\theta'_{xy}(\alpha) \geq \theta'_{xy}(0)$

Demostración de c) $\Rightarrow$ a).

Sean $x, y \in C$ y $z = \alpha x + (1-\alpha)y$, donde $\alpha \in [0,1]$. Se tiene:

$$f(y) - f(z) \geq \langle \nabla f(z), y - z \rangle$$
$$f(x) - f(z) \geq \langle \nabla f(z), x - z \rangle$$

multiplicando la primera desigualdad por $1-\alpha$, la segunda por α y sumando se tiene:

$$\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) - f(z) \geq \langle \nabla f(z), \underbrace{\alpha x + (1-\alpha)y}_{z} - z \rangle = 0.$$

Por lo tanto

$$\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \geq f(z).$$

Proposición 4

Sean C un convexo abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $f : C \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable. Entonces f es convexa si y solo si la matriz hessiana $\nabla^2 f(x)$ es semidefinida positiva en todo $x \in C$.

$\theta'(t) = \langle \nabla f(x+tu), u \rangle$

$\theta''(t) = \langle \nabla^2 f(x+tu)u, u \rangle$

Demostración de ($\Rightarrow$)

Suponga que f es convexa y sea $x \in C$ y $u \in \mathbb{R}^n$. Como C es abierto y convexo, la función θ con regla de correspondencia $\theta(t) = f(x+tu)$ está definida en un intervalo abierto alrededor del 0, es convexa y dos veces diferenciable. Entonces, como se ha visto anteriormente, θ' es creciente y por lo tanto $\theta''(t) \geq 0$ para todo $t \in I$. En particular

$$0 \leq \theta''(0) = \langle \nabla^2 f(x)u, u \rangle . = H(u,u)$$

Así, $\nabla^2 f(x)$ es semidefinida positiva.

Demostración de $(\Leftarrow)$

Suponga que $\nabla^2 f(x)$ es semidefinida positiva en cada punto de C. Para cualquier par de puntos $x, y \in C$, la función $\theta_{xy} : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto que contiene a $[0,1]$ es dos veces derivable y cumple:

$$\theta''_{xy}(t) = \left\langle \nabla^2 f(x + t(y-x))(y-x), y-x \right\rangle \geq 0.$$

Así, θ_{xy} es convexa y entonces

$$\theta'_{xy}(0) \leq \theta'_{xy}(1).$$

Esto significa que $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$. Por lo tanto, por la Proposición 3, f es convexa.

Definición 1

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es estrictamente convexa si para todo $t \in]0,1[$ y para todo $a, b \in \mathbb{R}^n$, con $a \neq b$ se cumple:

$$f(ta + (1-t)b) < tf(a) + (1-t)f(b).$$

Cuando f es diferenciable tenemos las siguientes caracterizaciones de la convexidad estricta:

Proposición 5

Sean $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo abierto no vacío y $f : C \to \mathbb{R}$ diferenciable. Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:

a) *f es estrictamente convexa.*
b) $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle > 0$ *para todo* $x, y \in C$, $x \neq y$.
c) $f(y) > f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$ *para todo* $x, y \in C$, $x \neq y$.

Proposición 6

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo abierto no vacío y $f : C \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable. Si para todo $x \in C$ la matriz $\nabla^2 f(x)$ es definida positiva entonces f es estrictamente convexa.

La condición de positividad de $\nabla^2 f$ es solo una condición suficiente, más no necesaria, pues se puede tomar por ejemplo la función $\theta(t) = t^4$, la cual es estrictamente convexa, pero $\theta''(0) = 0$.

Observación 1

Por la Proposición 1, una función convexa es continua en el interior de su dominio. El siguiente ejemplo muestra que una función convexa aún siendo semicontinua inferior, puede no ser continua en la frontera de su dominio. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \overline{R}$ definida por

f es convexa → f es sci ri(dom f)
→ f es continua int(dom f)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} & \text{si } y > 0, \\ +\infty & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

Para todo $(x, y) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$,

traza = x^2+y^2?
det = 0

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{2}{y^3} \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$$

es semidefinida positiva (valores propios 0 y $\dfrac{2(x^2+y^2)}{y^3}$), de ahí la convexidad de f en todo $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$.

$\frac{x^2}{y} \leq \mu$

(cont...)

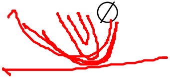
Observe que: $f(\bar{x}) \leq \mu$

i) Si $\mu \geq 0$ entonces $f(x,y) \leq \mu$ si y solo si $y > 0$ y $x^2 - y\mu \leq 0$.

ii) Si $\mu < 0$ entonces ningún punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ satisface $f(x,y) \leq \mu$. <0

Por lo tanto: $\mu > \lambda$

$$S_\mu(f) = \begin{cases} \{(x,y) : y > 0, x^2 - \mu y \leq 0\} & \text{si } \mu \geq 0 \\ \emptyset & \text{si } \mu < 0 \end{cases}$$



$\frac{x^2}{y} \leq \lambda$

y para cada $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$S_\lambda(\bar{f}) = \bigcap_{\mu > \lambda} \overline{S_\mu(f)} = \begin{cases} \{(x,y) : y \geq 0, x^2 - \lambda y \leq 0\} & \text{si } \lambda \geq 0 \\ \emptyset & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

cont...

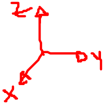
Se deduce que

$$\boxed{\overline{f}(x,y)=\text{ínf}[\lambda:(x,y)\in S_\lambda(\overline{f})]}=\begin{cases}\frac{x^2}{y} & \text{si } y>0,\\ 0 & \text{si } x=y=0,\\ +\infty & \text{en otro caso}.\end{cases}$$

f sci en $(0,0)$

$\overline{f}$ no es continua en $(0,0)$ pues $\overline{f}\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k^2}\right)=1\neq\overline{f}(0,0)$ $=0$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Como $f=\overline{f}$ pues f es sci, entonces f no es continua en $(0,0)$.

$f(0,0)=\overline{f}(0,0)$



aff(dom f)

Proposición 7

Sea f convexa propia. Entonces:

aff$(S_\lambda f)$ ⊃ aff(dom f)

$$aff(S_\lambda(f)) = aff(dom(f)) \qquad para\ todo\ \lambda > \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

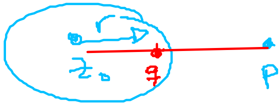
Demostración

$f(x) \leq \lambda < \infty$

i) Como $S_\lambda(f) \subset \mathrm{dom}(f)$ entonces $\mathrm{aff}(S_\lambda(f)) \subset \mathrm{aff}(\mathrm{dom}(f))$.

ii) Se demostrará primero que si $S_\lambda(f)$ contiene un abierto de $\mathrm{aff}(\mathrm{dom}(f))$ entonces se cumplirá que $\mathrm{aff}(S_\lambda(f)) \supset \mathrm{aff}(\mathrm{dom}(f))$.

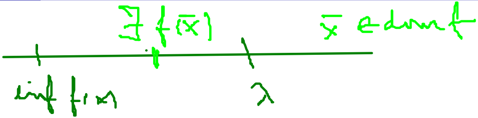
 Funciones Convexas de Varias Variables



cont...

iii) De existir dicho abierto, se puede suponer que es de la forma $\boxed{B_r(z_0)} \cap \text{aff}(\text{dom}(f))$(con $z_0 \in S_\lambda(f)$). Entonces para cualquier $p \in \text{aff}(\text{dom}(f))$ se puede tomar R suficientemente grande de modo que $q = z_0 + \frac{1}{R}(p - z_0) \in B_r(z_0)$. Observe que como también se puede escribir $q = \frac{1}{R}p + (1 - \frac{1}{R})z_0 \in \text{aff}(\text{dom}(f))$ entonces $q \in B_r(z_0) \cap \text{aff}(\text{dom}(f)) \subset S_\lambda(f)$ (esta inclusión es por la hipótesis de partida de la afirmación hecha en (ii)). Como además $z_o \in S_\lambda(f)$ y $p = Rq + (1 - R)z_0$, entonces $p \in \text{aff}(S_\lambda)$. Esto muestra que $\text{aff}(S_\lambda(f)) \supset \text{aff}(\text{dom}(f))$. y demuestra lo anunciado en (ii).

$\lambda > \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$



f es propia

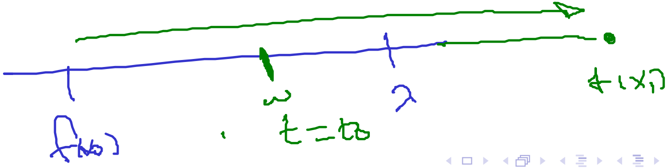
cont...

iv) Por definición de ínfimo, se sabe que existe $\boxed{x_0 \in \mathrm{dom}(f)}$ tal que $\inf \leq f(x_0) < \lambda$. Sea $x_1 \in ri(dom(\mathrm{f}))$; entonces para todo $t \in]0, 1]$, $x_0 + t(x_1 - x_0) \in ri(dom(\mathrm{f}))$, además $\subset \mathrm{dom} f$

f es convexa

$$f(x_0 + t(x_1 - x_0)) \leq \underbrace{f(x_0) + t(f(x_1) - f(x_0))}_{\omega},\quad < \lambda$$

luego se puede tomar $t = t_0$ suficientemente pequeño de modo que $f(x_0 + t_0(x_1 - x_0)) < \lambda$.



cont...

v) Denote $z_0 = x_0 + t_0(x_1 - x_0) \in ri(dom(\mathrm{f}))$, entonces $f(z_0) < \lambda$. Por la Proposición 1, f es sci en z_o, además siguiendo el mismo camino que en la demostración (de la parte de continuidad) de dicha proposición (tomando una base de $\mathrm{aff}(\mathrm{dom}(f)) - z_0$ en lugar de la base canónica) se puede probar que la restricción de f a $\mathrm{aff}(\mathrm{dom}(f))$ es scs en z_0, luego, dicha restricción es continua en z_0. Por lo tanto existe una bola abierta $B_r(z_0)$ tal que $B_r(z_0) \cap \mathrm{aff}(\mathrm{dom}(f)) \subset S_\lambda(f)$.

vi) Aplicando la afirmación (ii) demostrada en (iii), se concluye lo deseado.

FIN