Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Análisis Convexo - CM3E2]
[Prof: Jonathan Munguia] UNI, 02 de julio de 2021

Sétima Práctica Dirigida

1. Dé un ejemplo de una función f tal que $\overline{f} \neq f^{**}$.

2. Verifique si las siguientes funciones son Fréchet diferenciable y/o Gâteaux differenciable:

   a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y + 2xy^2}{x^2+y^2}$ para $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

   b) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ para $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

   c) $f(x,y) = \dfrac{x^4y}{x^6+y^3}$ para $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

3. Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa. Pruebe que

$$d \in \partial f(x) \Longleftrightarrow f'(x,y) \geq \langle y, d\rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

   Discuta esta propiedad para las funciones en la Pregunta 1

4. Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa. Demuestre que para cada $x \in \mathbb{R}^n$:

   a) $f'(x,y) = \max\limits_{d \in \partial f(x)} \langle y, d\rangle$, para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

   b) f es Fréchet diferenciable en x si y solo si $\partial f(x)$ es unitario (singleton).

5. Dadas $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, r$ funciones convexas. Demostrar que

   a) Para todo $x, d \in \mathbb{R}^n$, se cumple que $f'(x,d) = \max\{f_j'(x,d) \,:\, j \in A_x\}$,

   b) $\partial f(x) = \mathrm{co}(\bigcup_{j \in A_x} \partial f_j(x))$,

   donde $A_x = \{j \,:\, f_j(x) = f(x)\}$.

6. Suponga que $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ es una función convexa propia. Se sabe que si $x_0 \in \partial\, \mathrm{dom} f$, entonces $\partial f(x_0)$ es o vacío o no acotado. Dar un ejemplo por cada posible caso.

7. Mostrar que si $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ es una función convexa propia, entonces $\overline{f}$ es una función convexa propia también. Utilice el subdiferencial.

8. Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa y X un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$. Probar que $\bigcup_{x \in X} \partial f(x)$ es acotado.

9. Dadas $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, r$ funciones convexas y $f = f_1 + \cdots + f_r$. Demostrar que

$$\partial f(x) = \partial f_1(x) + \cdots + \partial f_r(x).$$

10. Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable. Probar que la función $F = g \circ f$:

    a) Posee todas sus derivadas direccionales en $\mathbb{R}^n$.

    b) Si g es convexa y monótonamente no decreciente, entonces F es convexa y

$$\partial F(x) = \nabla g(f(x))\, \partial f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

11. Hallar el subdiferencial en $\mathbb{R}^n$ de la función $f(x) = \|x\|$.