Pregunta 01: Ronald Nicolas Saenz Chugui

a) $A+B$ es convexa $(A, B \subseteq \mathbb{R}^p)$ $\left[A+B := \{ a+b ;\ a \in A,\ b \in b \} \right]$

Dem.

Sea $\tau \in (0,1)$ y $\omega_1, \omega_2 \in A+B$

Entonces: $\omega_1 = x_1 + x_2$ $(x_1 \in A \wedge x_2 \in B)$

$\omega_2 = y_1 + y_2$ $(y_1 \in A \wedge y_2 \in B)$

Recordar:

Luego, sabemos si C es un conjunto convexo, entonces dos puntos a y b, $\tau \in (0,1)$, se cumple:

$$a + \tau(b-a) \in C \quad \vee \quad (1-\tau)a + \tau b \in C$$

Usando esto:

$$(1-\tau)\omega_1 + \tau\omega_2$$

Reemplazando

$$= (1-\tau)(x_1+x_2) + \tau(y_1+y_2)$$

$$= (1-\tau)x_1 + (1-\tau)x_2 + \tau y_1 + \tau y_2$$

$$= \underbrace{\left((1-\tau)x_1 + \tau y_1\right)}_{\in A} + \underbrace{\left((1-\tau)x_2 + \tau y_2\right)}_{\in B}$$

$$(1-\tau)\omega_1 + \omega_2 \in A+B$$

$\therefore$ $\omega_1 + \omega_2 \in A+B$, por ello $A+B$ es convexo //

Escaneado con CamScanner

b) αA es convexo $(A, B \subseteq \mathbb{R}^p)$ $[\alpha A := \{\alpha a;\ a \in A\}]$

Dem.

Sea $x \in A$ y $w \in \mathbb{R}^p$ tal que $w = \alpha x$ (α es una constante $\in \mathbb{R}$)

De esto:

$w_1, w_2 \in \alpha A$, por ello $x_1, x_2 \in A$ tal que

$$w_1 = \alpha x_1 \ \wedge \ w_2 = \alpha x_2$$

Recordar:

Si C es un conjunto convexo, entonces dos puntos a y b, $\tau \in (0,1)$ se cumple:

$$a + \tau(b-a) \in C \quad \vee \quad (1-\tau)a + \tau b \in C$$

Usando esto:

$$(1-\tau)a + \tau b$$

Ahora, $\tau \in (0,1)$, formemos una combinacion para w

$$w = (1-\tau)w_1 + \tau w_2$$

Sabemos: $w_1 = \alpha x_1 \ \wedge \ w_2 = \alpha x_2$

$$w = (1-\tau)(\alpha x_1) + \tau(\alpha x_2)$$

$$w = \alpha \underbrace{((1-\tau)x_1 + \tau x_2)}_{\in A}$$

Entonces: $w \in \alpha A$, siendo A convexo

$\therefore$ αA es convexo $\_\!|_{//}$

Escaneado con CamScanner

Pregunta 02:

Ronald Nicolas Saenz Chugui

a) $f_{(x)} = -\sqrt{x-1}$, tal que $f : [1, \infty \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$

Como f es una funcion racional, entonces es derivable en cualquier punto de su dominio; tambien es diferenciable.

$$f'_{(x)} = \frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$$

Esta funcion tambien es continua, entonces es derivable y es diferenciable en $\langle 1, +\infty \rangle$.

$$f''_{(x)} = \frac{1}{4(x-1)^{\frac{3}{2}}}$$

Entonces como es dos veces diferenciable, si demostramos que $f''_{(x)} > 0$ entonces es una funcion convexa.

Sabemos: $(x-1)^{\frac{3}{2}} > 0$

$$\frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

$$\frac{1}{4(x-1)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

$$f''_{(x)} > 0$$

$\therefore$ Entonces es dos veces diferenciable y $f''_{(x)} > 0$ en $\langle 1, +\infty \rangle$, por ello decimos que f es convexa //

b)

Como f es de clase C^2 y es dos veces diferenciable y

$f''_{(x)} > 0$ (del anterior item), pero deberíamos tener un

$x \in [1, \infty\rangle$ que cumpla

$$f'_{(x)} = 0$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{x-1}} = 0$$

Pero para esta ecuacion no hay solucion, no existe el valor de x.

$\therefore$ Entonces, de esto, $f(x)$ no tiene un minimo global

c) f es convexa, entonces hallamos sus intervalos monotonos:

$f'_{(x)} > 0$ (crece)

$$-\frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$$

$$\frac{\overset{\oplus}{1}}{\underbrace{\sqrt{x-1}}_{\oplus}} < 0$$

¡No existe solucion!

$f'_{(x)} < 0$ (decrece)

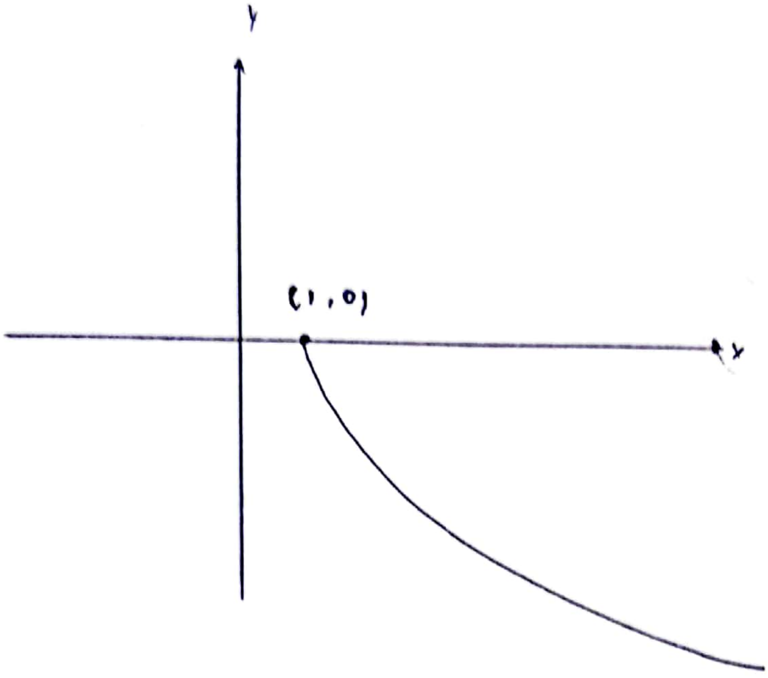
$$-\frac{1}{2\sqrt{x-1}} < 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$$

$$x > 1$$

Entonces, f es decreciente en $\langle 1, +\infty\rangle$

Escaneado con CamScanner



Grafica (f)

Escaneado con CamScanner

Pregunta 03:

Ronald Nicolas Saenz Chuqui

b) Nuestra funcion objetivo:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1 x_2 + x_2^2$$

Debemos expresarlo:

$$\frac{1}{2} x^T . Q . x$$ (Q es 2x2 matriz simetrica)

(X es 2x1)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\frac{1}{2} (x_1 \ x_2)_{1\times 2} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2\times 2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2$$

$$(ax_1 + cx_2 \quad bx_1 + dx_2)_{1\times 2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{2\times 1} = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$$

$$(ax_1 + cx_2)x_1 + (bx_1 + dx_2)x_2 = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$$

$$ax_1^2 + cx_2x_1 + bx_2x_1 + dx_2^2 = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$$

$a = 2 \quad d = 2 \quad b + c = 6$ (Pero es simetrica $b = c$)

$b = 3 \quad c = 3$

Tenemos:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Para los autovalores:

$$|Q - \lambda I| = 0$$

Escaneado con CamScanner

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda-5) = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 5$$

$$\therefore \lambda_{min} = \underline{-1} \; //$$

$$\therefore \lambda_{max} = \underline{5} \; //$$

Escaneado con CamScanner