Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2]
[Los profesores] UNI, 22 de junio de 2021

Quinta Práctica Dirigida

1. Resolver el problema de autovalores

$$\begin{cases} y''(x) = \lambda y(x) = 0, \\ y(0) = 0, \\ y(l) + y'(l) = 0. \end{cases}$$

2. Considere el problema de autovalores $y'' + 2y' + \lambda y = 0$ con las condiciones de contorno $y(0) = y(1) = 0$.
   a) Mostrar que $\lambda = 1$ no es un autovalor.
   b) Mostrar que no hay ningún autovalor λ tal que $\lambda < 1$.
   c) Mostrar que el n-ésimo autovalor positivo es $\lambda_n = 1 + n^2\pi^2$, con autofunción $y_n(x) = e^{-x}\sin(n\pi x)$.

3. Sea $a > 0$, se define el operador diferencial $D[y(x)] = xy''(x) + y'(x)$ con dominio en $V = \{v \in C^2[a,b] : v(a) = v(b) = 0\}$. Comprobar que D es autoadjunto en V.

4. Escribir la ecuación diferencial $(1+x)y''(x) - y'(x) + 2xy(x) = 0$ en forma autoadjunta.

5. Probar que si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones de la ecuación autoadjunta

$$L[y(x)] = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right) + q(x)y(x) = 0,$$

para $x \in (a,b)$, entonces $p(x)W(y_1,y_2)(x)$ es una constante.

6. Encontrar la solución del siguiente PVF en términos de desarrollos de series de autofunciones:

$$\begin{cases} y''(x) = x^2 - a^2\,, \quad x \in (0,a) \\ y(0) = y(a) = 0 \end{cases}$$

7. Encontrar la solución del siguiente PVF en términos de desarrollos de series de autofunciones del operador de Sturm-Liouville $L = -\dfrac{d^2}{dx^2}$:

$$y'' = x(x - 2\pi)\,, \quad y(0) = y'(\pi) = 0.$$

8. Determine el operador adjunto L^* y su dominio para el operador $Lu = \dfrac{du}{dx}$ donde u satisface las condiciones de frontera $u(0) = 2u(1)$ sobre $[0,1]$.

9. Utilice el método de expansión de autofunciones para resolver el siguiente PVF:

$$\begin{cases} (xy')' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x}\,, \quad x \in [1,e] \\ y(1) = y(e) = 0. \end{cases}$$

10. Analice si el punto $x = 0$ es un punto ordinario de las siguientes ecuaciones:
    a) $xy'' + (\sin x)y' + x^2 y = 0$.
    b) $y'' + x^2 y' + \sqrt{x}y = 0$.

11. Encontrar la solución de

$$2y'' + x^2y' + \sqrt{x}y = 0,$$

en forma de serie de potencias en torno al punto ordinario $x = 0$.

12. Encontrar la solución de

$$2y'' + xy' + y = 0,$$

en forma de serie de potencias en torno al punto ordinario $x = 0$.

13. Analice la singularidad en los puntos $x = 0$ y $x = -1$ de la ecuación diferencial

$$x^2(x+1)^2y'' + (x^2 - 1)y' + 2y = 0.$$

14. Encontrar la solución de

$$3xy'' + y' - y = 0,$$

en forma de serie de potencias en torno al punto singular regular $x = 0$.

15. Resuelva la EDO $2xy'' + (1 + x)y' + y = 0$ por el método de Frobenius.

16. Resuelva la EDO $xy'' + (x - 6)y' - 3y = 0$ por el método de Frobenius.