Tercera sesión

Análisis Convexos - CM3E2

Jonathan Munguia[1]

[1,2]Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería

20 de abril de 2021

Outline

Outline

Definición 1 (Cono)

$K \subset \mathbb{R}^n$ es un cono, si

$$\forall x \in K, \forall \lambda > 0 : \quad \lambda x \in K\,.$$

Proposición 1

i) *Si K es un cono, entonces este es convexo si y solo si $K + K \subset K$.*

ii) *La intersección de conos es un cono.*

Demostración

i) Sea $z \in K + K$, entonces $\exists x, y \in K$ t.q. $z = x + y$. Como K es un cono dado $t \in (0,1)$, se tiene que $\frac{x}{t}, \frac{y}{1-t} \in K$. Por lo tanto, por la convexidad de K :

$$z = t\left(\frac{x}{t}\right) + (1-t)\left(\frac{y}{1-t}\right) \in K\,.$$

Definición 2 (Cápsula cónica)

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. La cápsula cónica de S se define como

$$\text{cono}(S) := \bigcap \Big\{ C \, : \, C \, \text{es cono y} \, S \subset C \Big\}$$

Proposición 2

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Se cumple

i) $\mathit{cono}(S) = \{\lambda x \, : \, x \in S, \; \lambda > 0\}$.

ii *Si S es convexo, entonces $\mathit{cono}(S)$ es convexo.*

Demostración

i) Sea D el conjunto del lado derecho, luego este conjunto contiene a S y es un cono. Por tanto el $\text{cono}(S) \subset D$.

Demostración (cont...)

i) $\mathrm{cono}(S)$ es un cono, debido a la intersección de conos, por tanto contiene a λy para todo $y \in \mathrm{cono}(S)$ y para todo $\lambda > 0$, en particular contiene a D.

ii) Sea $K = \mathrm{cono}(S)$, es suficiente ver que $K + K \subset K$. Dado $z \in K + K$, existen $x, y \in K$ y luego $\exists \lambda_1, \lambda_2 > 0$ y $s_1, s_2 \in S$ t.q. $x = \lambda_1 s_1 \ \wedge \ y = \lambda_2 s_2$. Por tanto, de la convexidad de S y que K es cono:

$$\begin{aligned} z &= \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2) \underbrace{\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} s_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} s_2 \right]}_{\in S} \in K. \end{aligned}$$

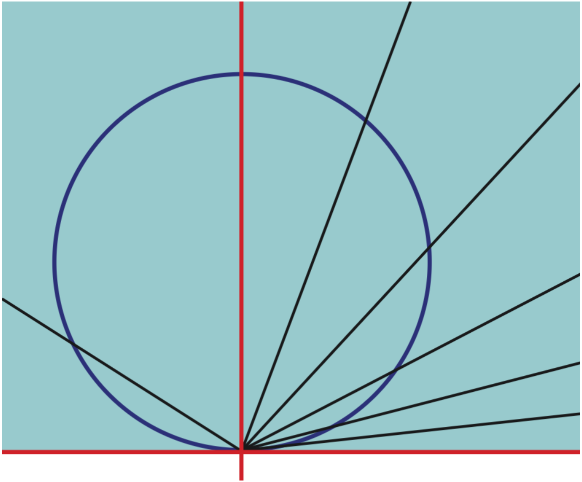


Figura: Cápsula cónica de una circunferencia

Definición 3 (Cono convexo)

$K \subset \mathbb{R}^n$ es un cono convexo, si es un cono y es convexo, i.e.

$$\forall x_1, x_2 \in K,\ \forall \lambda_1, \lambda_2 > 0 : \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in K\,.$$

Ejemplo 1

- Los subespacios de $\mathbb{R}^n$ son conos convexos.
- Los semiespacios (cerrado y abiertos) correspondientes a un hiperplano que pasa por el origen son conos convexos.
- Son conos convexos: El octante nonegativo de $\mathbb{R}^n$:

$$\left\{x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)\ :\ \xi_i \geq 0\,,\ i = 1, \cdots, n\right\}.$$

Definición 4 (combinación lineal positiva)

Dado $S \subset \mathbb{R}^n$. Se define una combinación lineal positiva de $x_1, x_2, \cdots, x_p \in S$ como:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_p x_p \quad \text{t.q.} \quad \lambda_i > 0 \; i = 1, \cdots, p\,.$$

A menudo se le llama combinación cónica de S.

Proposición 3

$S \subset \mathbb{R}^n$ es un cono convexo si y solo si contiene a todas sus combinaciones lineales positivas.

Definición 5 (Cápsula convexa cónica)

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. La cápsula convexa cónica de S se define como

$$\text{cono-convexo}(S) := \bigcap \Big\{ C \; : \; C \,\text{es cono convexo y}\, S \subset C \Big\}$$

Proposición 4

Para todo $S \subset \mathbb{R}^n$, su cápsula convexa cónica admite la representación:

$$\textit{cono-convexo}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \;\middle|\; x_i \in S,\ \lambda_i > 0,\ p \in \mathbb{N} \right\}.$$

Observación 1

Si S es convexo, entonces su cásula cónica y cásula cónica covexa coinciden. S no convexo no implica que su cásula cónica sea no convexa.

Outline

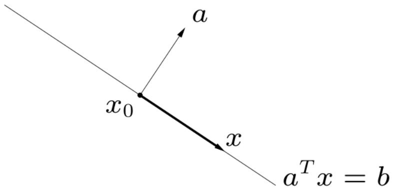
Outline

Definición 6 (Hiperplano)

$H \subset \mathbb{R}^n$ se dice hiperplano $\mathbb{R}^n$ si es la traslación de un subespacio de dimensión $n-1$. Es decir, $\{x \in \mathbb{R}^n : x \perp a\}$ con $a \neq 0$.

Proposición 5

$H \subset \mathbb{R}^n$ es un hiperplano si y solo si existen $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que $H := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a\rangle = b\}$. Al vector a llamaremos vector normal de H.



Observación 2

Analíticamente H es el conjunto solución de una ecuación lineal no trivial entre los componentes de x. Además H es un espacio afín.

Proposición 6

$M \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ si y solo si existen $b \in \mathbb{R}^n$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Bx = b\right\}.$$

Demostración

$\Leftarrow)$ M es afín gracias a la linealidad de B.
$\Rightarrow)$ Si $B = 0 \in \mathbb{R}^{1\times n}$ y $b \neq 0$ entonces $M = \emptyset$.
Si $B = 0 \in \mathbb{R}^{1\times n}$ y $b = 0$ entonces $M = \mathbb{R}^n$.

Demostración (cont...)

$\Rightarrow$) Si $M \neq \emptyset$ y $\mathbb{R}^n$, entonces existen $a \in \mathbb{R}^n$ y un subespacio L de $\mathbb{R}^n$ tal que $M = L + a$. Supongamos que $\dim L^\perp = m$. Sea $\{b_1, \cdots, b_m\}$ una base de $L^\perp$. Entonces,

$$\begin{aligned} L = (L^\perp)^\perp &= \{x : \langle x, y\rangle = 0 \ \forall y \in L^\perp\} \\ &= \{x : \langle x, b_i\rangle = 0\,,\ i = 1, \cdots, m\} \\ &= \{x : Bx = 0\}, \end{aligned}$$

donde B es la matriz cuyas filas son los b_i. Así, se tiene

$$\begin{aligned} M &= \{x + a : Bx = 0\} \\ &= \{y : B(y - a) = 0\} \\ &= \{y : By = b\} \quad \text{con} \quad b = Ba\,. \end{aligned}$$

Observación 3

- Si M es unitario entonces de la demostración anterior se toma $m = n$, obteniendo B una matriz cuadrada invertible. Además, L es el espacio vectorial de dimensión nula.
- Un subespacio afín se puede ver como el conjunto solución de un sistema lineal de ecuaciones.

Definición 7

Dos hiperplanos son paralelos si sus respectivos vectores normales son paralelos.

Corolario 1

Cada subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ es una intersección de una colección finita de hiperplanos.

Demostración

Sea $M = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Bx = b\right\}$ un subespacio afín. Si $b = (\beta_1, \cdots, \beta_m)$ y b_i es la i-ésima fila de B, entonces

$$M = \bigcap_{i=1}^{m} H_i \quad \wedge \quad H_i = \{x \,:\, \langle x, b_i \rangle = \beta_i\}.$$

Demostración (cont...)

Se tiene los sgtes casos:

i) Si $b_i \neq 0$, entonces H_i es un hiperplano.

ii) Si $b_i = 0$ y $\beta_i \neq 0$, entonces $H_i = \emptyset$.

iii) Si $b_i = 0$ y $\beta_i = 0$, entonces $H_i = \mathbb{R}^n$.

El vacío se puede ver como la intersección de 2 hiperplanos paralelos diferentes. Y $\mathbb{R}^n$ como la intersección de la colección vacía de hiperplanos de $\mathbb{R}^n$.

 Hiperplanos

FIN