RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE COEFICIENTES VARIABLES ANALÍTICOS Y NO ANALÍTICOS . MÉTODO SERIES DE POTENCIA

irlamn@uni.edu.pe

1. Series de Potencias y puntos ordinarios, puntos singulares, funciones analíticas.
2. Soluciones analíticas de EC. diferenciales lineales, con coeficientes variables y puntos ordinarios . Método serie de potencias..
3. Ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes variables con puntos singulares regulares .
4. Método de Frobenius. Aplicaciones.

La ED lineal de segundo orden homogénea

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{1}$$

se encuentra entre las más importantes desde el punto de vista de las aplicaciones.

La característica central de este tipo de ED es que el comportamiento de las soluciones en un entorno del punto x_0 dependerá del comportamiento de los coeficientes $p(x)$ y $q(x)$ en un entorno de x_0.

► Definición. El punto x_0 es un ***punto ordinario*** de la ecuación (1) si $p(x)$ y $q(x)$ son analíticas en x_0. Si al menos una de estas funciones no es analítica en x_0, entonces x_0 es un ***punto singular*** de (1).

► Teorema. Sea x_0 un punto ordinario de la ecuación diferencial (1). Entonces, existe una única solución $y(x)$, que también es analítica en x_0, y satisface las condiciones iniciales

$$y(x_0) = a \qquad y'(x_0) = b.$$

Más aún, si los desarrollos en series de Taylor de $p(x)$ y $q(x)$ son válidos en $|x - x_0| < r$, entonces, el desarrollo en series de Taylor de $y(x)$ también será válido en el mismo intervalo.

Ejemplos.

▶ Encontrar la solución general de la ecuación $y'' - xy' + 2y = 0$ en una vecindad del punto $x_0 = 0$.

En este caso, $p(x) = -x$ y $q(x) = 2$. Ambas funciones son polinomiales y, por lo tanto, analíticas en todo punto. Consecuentemente, todo punto x (en particular, $x_0 = 0$) es un punto ordinario para esta ecuación. Luego, existirá una solución de la forma $y(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ que converge en $|x| < \infty$.

Para encontrar la solución $y(x)$ es necesario determinar los coeficientes a_k para todo k. Para ello, seguiremos el siguiente procedimiento conocido como ***método de series de potencias o método de los coeficientes indeterminados***. Consta de cinco pasos.

Primer paso: se sustituyen

$$y(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k, \qquad y'(x) = \sum_{k\geq 1} k\, a_k x^{k-1}, \qquad y''(x) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)\, a_k x^{k-2}$$

en la ecuación diferencial

$$y''(x) - xy'(x) + 2y(x) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)\, a_k x^{k-2} - x \sum_{k\geq 1} k\, a_k x^{k-1} + 2 \sum_{k\geq 0} a_k x^k = 0.$$

Segundo paso: se suman las series; para ello, primero se agrupan los términos con iguales potencias de x

$$\underbrace{2\,a_0 + 2\,a_1 x + 2\sum_{k\geq 2} a_k x^k}_{2\sum_{k\geq 0} a_k x^k} \underbrace{- a_1 x - \sum_{k\geq 2} k\,a_k x^k}_{-x\sum_{k\geq 1} k\,a_k x^{k-1}} + \underbrace{\sum_{k\geq 0}(k+2)(k+1)\,a_{k+2} x^k}_{\sum_{k\geq 2} k(k-1)\,a_k x^{k-2}} = 0$$

$$2\,a_0 + 2\,a_1 x + 2\sum_{k\geq 2} a_k x^k - a_1 x - \sum_{k\geq 2} k\,a_k x^k + \underbrace{2\cdot 1\,a_2 + 3\cdot 2\,a_3 x + \sum_{k\geq 2}(k+2)(k+1)\,a_{k+2} x^k}_{\sum_{k\geq 0}(k+2)(k+1)\,a_{k+2} x^k} = 0$$

$$(2a_0 + 2\cdot 1\,a_2) + (2\,a_1 - a_1 + 3\cdot 2\,a_3)x + \sum_{k\geq 2}(2\,a_k - k\,a_k + (k+2)(k+1)\,a_{k+2})x^k = 0$$

Tercer paso: la expresión anterior debe ser idénticamente cero para todo x; esto implica que el coeficiente de cada potencia de x debe ser igual a cero; es decir,

$$a_0 + a_2 = 0; \qquad a_1 + 6a_3 = 0; \qquad (2-k)\,a_k + (k+2)(k+1)\,a_{k+2} = 0; \;\; k = 2, 3, 4, \cdots$$

El resultdo anterior puede escribirse de la siguiente manera

$$a_2 = -a_0; \qquad a_3 = -\frac{a_1}{6}; \qquad \underbrace{a_{k+2} = \frac{k-2}{(k+1)(k+2)}\,a_k; \;\; k = 2, 3, 4, \cdots}_{\text{relación de recurrencia}}$$

Cuarto paso: se usa la fórmula de recurrencia para determinar los corficientes a_k para $k \geq 2$; es decir,

$$k = 2 \quad \rightarrow \quad a_4 = 0,$$

$$k = 3 \quad \rightarrow \quad a_5 = \frac{1}{4 \cdot 5}\, a_3,$$

$$k = 4 \quad \rightarrow \quad a_6 = \frac{2}{5 \cdot 6}\, a_4 = 0,$$

$$k = 5 \quad \rightarrow \quad a_7 = \frac{3}{6 \cdot 7}\, a_5,$$

$$k = 6 \quad \rightarrow \quad a_8 = \frac{4}{7 \cdot 8}\, a_6 = 0,$$

.

.

.

$$k = 2n - 2 \quad \rightarrow \quad a_{2n} = 0, \;\; n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$k = 2n - 1 \quad \rightarrow \quad a_{2n+1} = \frac{2n-3}{2n(2n+1)}\, a_{2n-1}, \;\; n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Claramente, todos los coeficientes impares dependen (por recurrencia) del coeficiente a_1. Para establecer esta dependencia explícitamente, hagamos

$$a_3 \cdot a_5 \cdot a_7 \cdots a_{2n-1} \cdot a_{2n+1} = -\frac{1}{2 \cdot 3}\, a_1 \frac{1}{4 \cdot 5}\, a_3 \frac{3}{6 \cdot 7}\, a_5 \cdots \frac{2n-3}{2n(2n+1)}\, a_{2n-1} \quad \rightarrow \quad a_{2n+1} = -\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{(2n+1)!} a_1.$$

Entonces, los coeficientes serán

$$a_2 = -a_0; \qquad a_{2n} = 0;\ n \geq 2, \qquad a_{2n+1} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{(2n+1)!} a_1;\ n \geq 1.$$

Quinto paso: se sustituyen los coeficientes hallados en la serie que define a $y(x)$; es decir,

$$y(x) = a_0 + a_1 x - a_0 x^2 - \frac{1}{3!}\, a_1 x^3 + 0x^4 - \frac{1}{5!}\, a_1\, x^5 + \cdots = a_0(1 - x^2) + a_1\Big(x - \sum_{k\geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{(2n+1)!}\, x^{2k+1}\Big).$$

Entonces, haciendo

$$y_0(x) = 1 - x^2; \qquad y_1(x) = x - \sum_{k\geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{(2n+1)!}\, x^{2k+1} \qquad \rightarrow \qquad y(x) = a_0\, y_0(x) + a_1\, y_1(x);$$

se concluye que $y(x)$ es solución de la ED para cualquier elección de los coeficientes a_0 y a_1. En particular, eligiendo $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$, se tiene que $y_0(x)$ satisface la ED. De la misma manera, eligiendo $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$, se tiene que $y_1(x)$ también satisface la ED. Además,

$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} y_0(0) & y_1(0) \\ y_0'(0) & y_1'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \rightarrow \quad \{y_0(x), y_1(x)\} \text{ es linealmente independiente.}$$

EJERCICIOS

1. Considere el PVI $\begin{cases} y'' - x^2y' - 2xy = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$. Probar primero que este problema posee una única solución analítica en $x = 0$. Luego, mostrar que la solución está dada por $y(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{3k}}{3^k k!}$. Dónde converge?

2. Utilizar el método de los coeficientes indeterminados para expresar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones como una serie de potencias alrededor del punto $x_0 = 0$ y especificar un intervalo en el que la solución es válida.

   (a) $(2x^2 + 1)y'' + 2xy' - 18y = 0$

   (b) $y'' + x^2y' + 2xy = 0$

3. Las soluciones de la ecuación $y'' - xy = 0$ se denominan funciones de ***Airy*** (se encuentra en el estudio de la difracción de la luz, la difracción de ondas de radio alrededor de la superficie de la Tierra, problemas de la aerodinámica y la deflexión de vigas bajo su propio peso).

   (a) Probar que toda función de Airy no trivial tiene infinitos ceros negativos.

   (b) Encontrar las funciones de Airy, en forma de series de potencias de x, y verificar directamente que convergen para todo x.

   (c) Otra forma de la ecuación de Airy es $y'' + xy = 0$. Usar los resultados del inciso anterior para encontrar la solución general de esta ecuación.