Ecuación de Bessel

irlamn@uni.edu.pe

Ecuación de Bessel

Dada la Ecuación diferencial

$$u'' + \frac{u'}{x} + (k^2 - \frac{\nu^2}{x^2})u = 0$$

Entonces:

$$J_\nu(z) = (\frac{z}{2})^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} (\frac{z^2}{4})^n, \qquad Y_\nu(z) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \ \ (\nu \notin Z)$$

$$Y_\nu(z) = \frac{2}{\pi}[J_\nu(z)\ln\frac{z}{2} - (\frac{z}{2})^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n[\phi(n)+\phi(n+\nu)]}{2n!(n+\nu)!}(\frac{z^2}{4})^n - (\frac{z}{2})^{-\nu} \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-n-1)!}{2n!}(\frac{z^2}{4})^{2n}] \ \ \nu \in Z$$

con $\phi(m) = \Gamma'(m+1)/\Gamma(m)$ y la última suma presente si $\nu \neq 0$. $J_\nu(kx)$ y $Y_\nu(kx)$ son soluciones

Para z grande, se tiene las fórmulas asintóticas:

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos[z - (\nu + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}], \quad Y_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin[z - (\nu + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]$$

Funciones de Hankel (o funciones de Bessel de 3^a especie): $H_\nu^{1,2}(z) = J_\nu(z) \pm iY_\nu(z)$.

Funciones de Bessel modificadas:

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz), \quad K_\nu(z) = i^{\nu+1}\frac{\pi}{2}[J_\nu(iz) + iY_\nu(iz)]$$

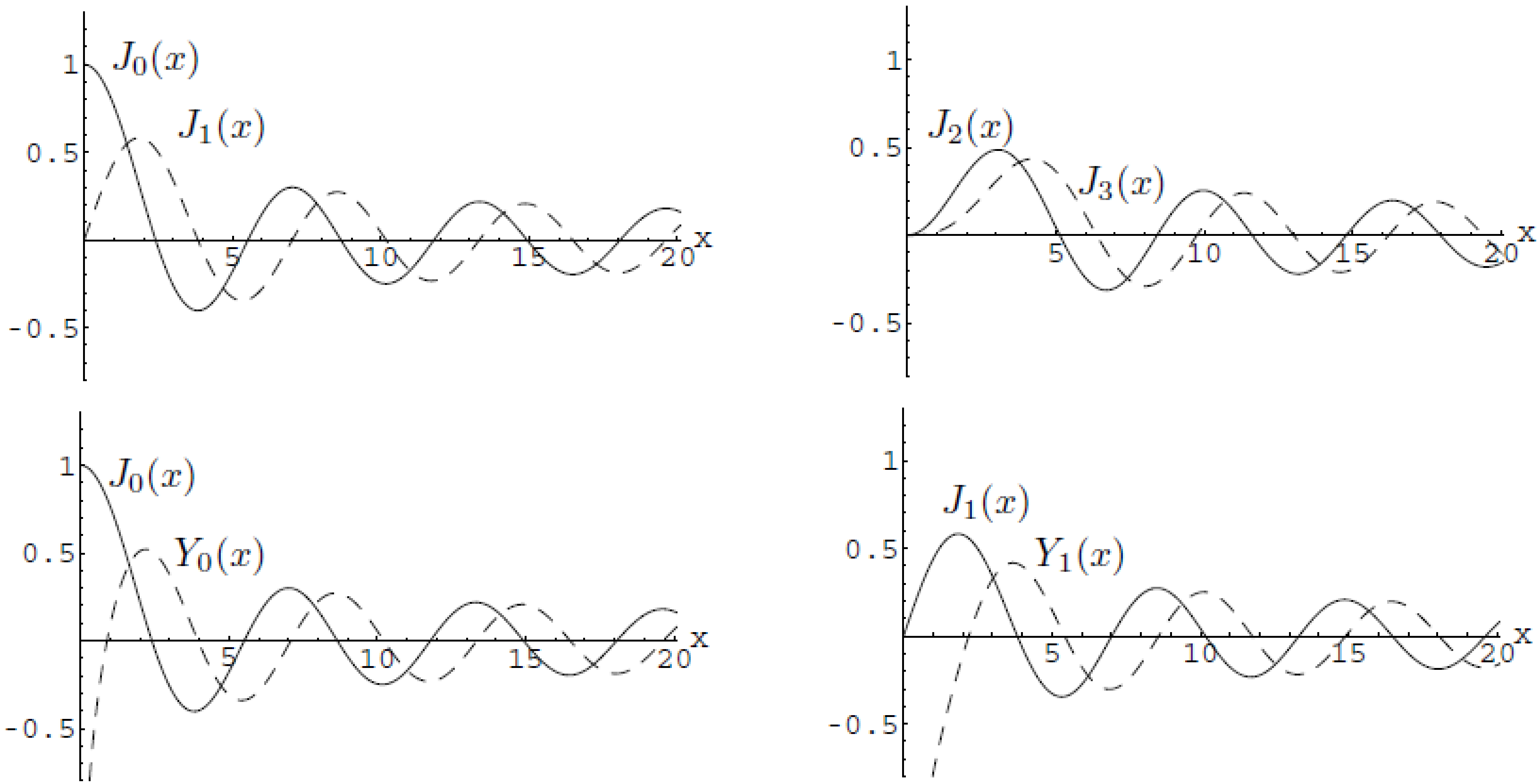
$I_\nu(kz)$ y $K_\nu(kz)$ son soluciones de la ec. diferencial

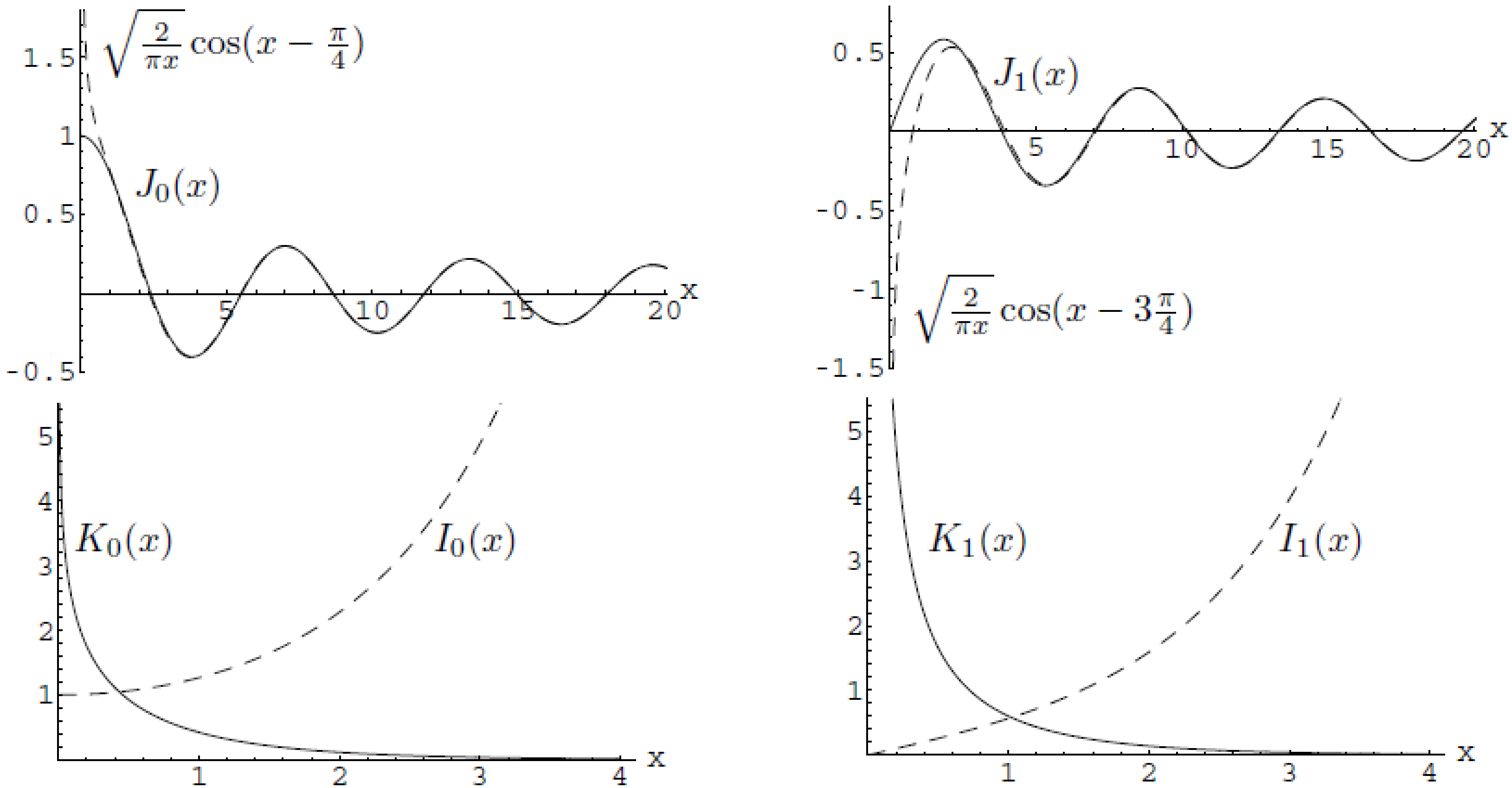
$$u'' + \frac{u'}{x} - (k^2 + \frac{\nu^2}{x^2})u = 0$$

Para z grande,

$$I_\nu(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \qquad K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$$

Gráficos para Ec. Bessel de orden 0,1, 2 y 3.





$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x-\frac{\pi}{4})$
$J_0(x)$
1.5
1
0.5
-0.5
5
10
15
20
x
$J_1(x)$
$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x-3\frac{\pi}{4})$
0.5
-0.5
-1
-1.5
$K_0(x)$
$I_0(x)$
$K_1(x)$
$I_1(x)$
1
2
3
4
5

Utilizando la función Gamma:

para $x > 0$ por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

que satisface, para $x > 1$, la relación

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

Por ejemplo $\Gamma(1) = 1, \ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{n!2^{2n}}$$

Para $x \to +\infty$, $\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x+1/2}[1+O(x^{-1})]$, lo cual determina el comportamiento de $n!$ para n grande.

La definición anterior es también válida para x complejo si $\mathrm{Re}[x] > 0$. Para x complejo arbitrario, $\Gamma(x)$ se define

siendo analítica en todo el campo de los números complejos excepto en los enteros negativos o en $x = 0$, donde posee polos simples ($\lim_{x \to -n} (x+n)\Gamma(x) = (-1)^n/n!$). Se verifica además que $\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)\sin(\nu\pi) = -\pi$.

La relación recursiva se satisface entonces si

$$a_{2n} = c\frac{(-1)^n}{2^{2n} n! \Gamma(n+\nu+1)}$$

Para $c = 2^{-\nu}$ se obtiene así la función de Bessel

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} (\frac{x}{2})^{\nu+2n}$$

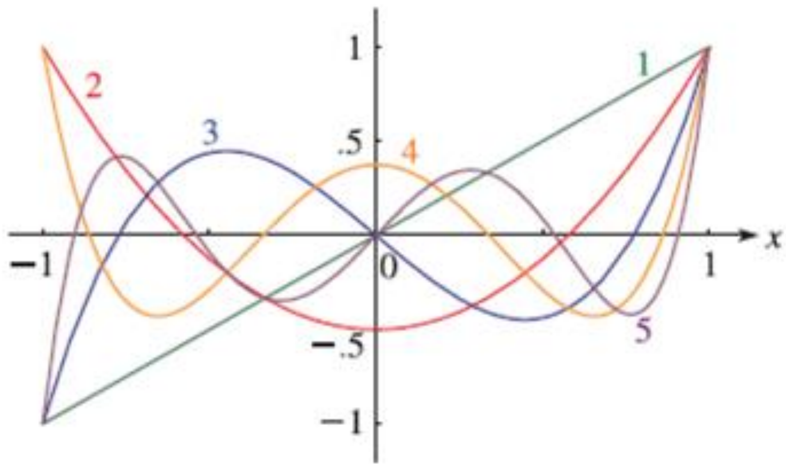
llamada también función de Bessel de primera especie.

EJERCICIOS

1 . La ecuación diferencial $(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda(\lambda+1)y(x) = 0$ donde λ es una constante, se conoce como ***ecuación de Legendre.***

(a) Hallar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Legendre válidas para $|x| < 1$.

(b) Mostrar que la ecuación de Legendre tiene una solución polinomial de grado n si $\lambda = n$ (*a estos polinomios, multiplicados por constantes adecuadas, se los denomina polinomios de Legendre*).



Polinomios de Legendre

2 . La ecuación diferencial de Legendre con $\lambda = 0$ tiene el polinomio solución $\Phi_1(x) = 1$ y una solución $\Phi_2(x)$ dada por una serie de potencias. Demostrar que la suma de la serie $\Phi_2(x)$ viene dada por la función

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right); \qquad |x| < 1.$$

Comprobar directamente que la función $\Phi_2(x)$ es una solución de la ecuación de Legendre cuando $\lambda = 0$.

3 . La ecuación de Legendre puede escribirse en la forma: $((x^2-1)y')' - l(l+1)y = 0$.

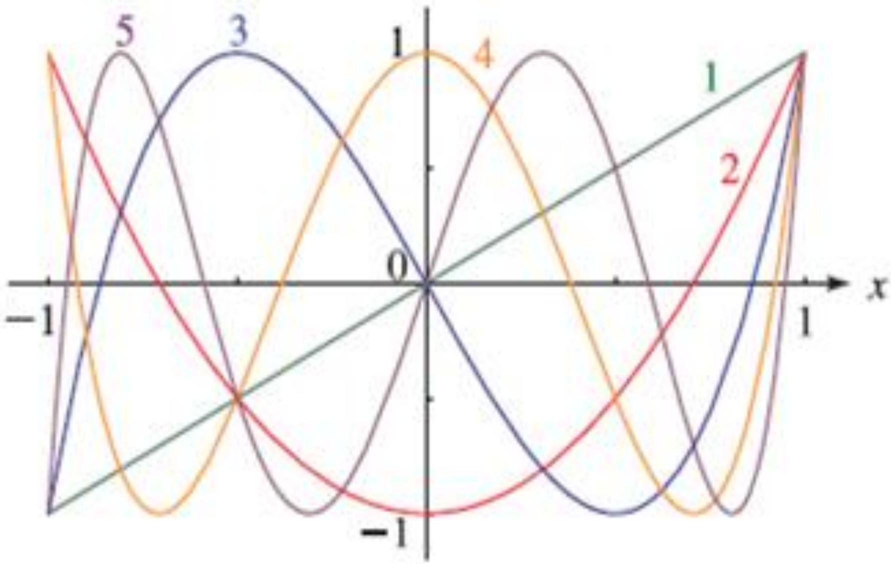
(a) Si a, b, c son constantes, siendo $a > b$ y $4c+1 > 0$, demostrar que una ecuación diferencial del tipo $((x-a)(x-b)y')' - cy = 0$ puede transformarse en una ecuación de Legendre por un cambio de variable de la forma $x = At + B$, siendo $A > 0$. Determinar A y B en función de a y b.

(b) Aplicar el método sugerido en el inciso anterior para transformar $(x^2-x)y'' + (2x-1)y' - 2y = 0$ en una ecuación de Legendre y resolver.

4 . La ecuación diferencial $(1-x^2)y''-xy'+\lambda^2 y=0$, donde λ es una constante, se conoce como la ***ecuación de Tchebycheff*** y se presenta en muchas áreas de la matemática y la física.

(a) Hallar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Tchebycheff válidas para $|x|<1$.

(b) Mostrar que la ecuación de Tchebycheff tiene una solución polinomial de grado n si $\lambda = n$ (*a estos polinomios, multiplicados por constantes adecuadas, se los denomina polinomios de Tchebycheff*).



Polinomios de Tchebycheff

5. Dada la siguiente ecuación:

$$r^2 f''(r) + r f'(r) + (\lambda r^2 - n^2) f(r) = 0, \quad 0 < r < R, \qquad |f(0)| < \infty, \quad f(R) = 0.$$

Para resolver este problema con las CC. hacemos el cambio de variables $z = \sqrt{\lambda}\, r$ y la identificación $F(z) = f(r)$, o sea $F(z) = F(\sqrt{\lambda} r)$ y $f(r) = f(a/\sqrt{\lambda})$, entonces verificar que se transforma en la siguiente ecuación de Bessel:

$$z^2 F''(z) + z F'(z) + (z^2 - n^2) F(z) = 0$$

6. Demostrar que la EDO Bessel de orden n, para $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - z \operatorname{sen} t)\, dt,$$

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(z \operatorname{sen} t - nt)\, dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [e^{nt} + (-1)^n e^{-nt}] e^{-z \operatorname{senh} t}\, dt.$$

7. Pruebe que $J_n(z)$ y $Y_n(z)$ satisfacen las siguientes propiedades:

- $\lim\limits_{z\to 0^+} J_n(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \\ 0, & \text{si } n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$

- $\lim\limits_{z\to 0^+} Y_n(z) = -\infty, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$

- $\lim\limits_{z\to +\infty} J_n(z) = \lim\limits_{z\to +\infty} Y_n(z) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$

- $J_n(z)$ y $Y_n(z)$ son funciones oscilatorias, y oscilan indefinidamente a medida que z crece .