Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-2

[Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2]
[Prof: Los Profesores] UNI, 07 de diciembre de 2021

Práctica Calificada 6

1. Dado que los polinomios de Legendre estan determinados por la fórmula de Rodriguez

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demuestre que los polinomios de Legendre son mutuamente ortogonales en el espacio $PC[-1,1]$ (espacio de funciones polinomiales a trozos sobre el intervalo $[-1,1]$) (Sug. Considere que los P_n son soluciones de la ecuación diferencial de Legendre) [6ptos]

Solución: Sean P_n y P_m polinomios de Legendre, los cuales son soluciones de la ecuación de Legendre, es decir

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)y = 0,$$
$$(1-x^2)P_m'' - 2xP_m' + m(m+1)y = 0,$$

luego, multiplicamos la primera ecuación por P_m, la segunda por P_n y restamos, obteniendo así

$$(1-x^2)[P_mP_n'' - P_m''P_n] - 2x[P_mP_n' - P_m'P_n] = P_mP_n[m(m+1) - n(n+1)]. \tag{1}$$

Observamos que el lado izquierdo de esta ecuación es la derivada de

$$(1-x^2)[P_mP_n' - P_m'P_n],$$

y que se anula en -1 y 1. Por tanto, integramos (1) de -1 a 1, obteniendo que

$$[m(m+1) - n(n+1)]\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0.$$

Y así, si $m \neq n$, se concluye que

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0.$$

2. Demuestre que las únicas soluciones acotadas (salvo constantes) de la ecuación de Legendre $L[y] = 0$ alrededor de $x = \pm 1$ son los polinomios de Legendre de la ecuación de Legendre:

$$L[y] = (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

(Sug. Para el caso $x = 1$, considere el cambio de variables $t = x - 1$) [7ptos]

Solución: Haciendo uso del cambio $t = x - 1$, se tiene que

$$y(x) = y(t+1) = \hat{y}(t), \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d\hat{y}}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2\hat{y}}{dt^2}.$$

Reescribimos la EDO, manteniendo por abuso de notación y, como

$$t(t+2)y'' + 2(t+1)y' - n(n+1)y = 0.$$

Como el coeficiente principal se anula en $t_0 = 0$, entonces es un punto singular, además

$$t\frac{2(t+1)}{t(t+2)} = \frac{2(t+1)}{t+2} \quad \wedge \quad t^2\frac{n(n+1)}{t(t+2)} = \frac{tn(n+1)}{t+2}$$

son analíticas alrededor de $t = 0$. Por tanto, $t_0 = 0$ es un punto singular regular. Ahora, consideramos una solución de tipo Frobenius

$$y(t) = \sum_{k\geq 0} c_k t^{k+r},$$

reemplando en la EDO, obtenemos

$$t(t+2)\sum_{k\geq 0} c_k(k+r)(k+r-1)t^{k+r-2} + 2(t+1)\sum_{k\geq 0} c_k(k+r)t^{k+r-1} - n(n+1)\sum_{k\geq 0} c_k t^{k+r} = 0.$$

Agrupando convenientemente, obtenemos

$$\sum_{k\geq 0} c_k t^{k+r}\big[(k+r)(k+r-1) + 2(k+r) - n(n+1)\big] + \sum_{k\geq 0} 2c_k t^{k+r-1}(k+r)^2 = 0,$$

el último sumando, se puede escribir como

$$2c_0 r^2 t^{r-1} + \sum_{k\geq 0} 2c_{k+1}t^{k+r}(k+r+1)^2.$$

Por tanto,

$$t^r\left[2c_0r^2t^{-1} + \sum_{k\geq 0} t^k\left\{c_k\big[(k+r)(k+r-1) + 2(k+r) - n(n+1)\big] + 2c_{k+1}(k+r+1)^2\right\}\right] = 0.$$

Igualando el coeficiente de la potencia negativa, obtenemos la ecuación indicial

$$r^2 = 0,$$

por tanto por el Teorema de Frobenius (Ver Teorema 15-1 de Donald L. Kreider - An Introduction to Linear Analysis pag 594), obtenemos las soluciones linealmente independientes

$$y_1(t) = \sum_{k\geq 0} c_k t^k \quad \wedge \quad y_2(t) = \sum_{k\geq 1} b_k t^k + y_1(t)\ln|t|.$$

Además, igualando a cero los coeficientes correspondientes a t^k para $k \geq 0$, obtenemos la regla de recurrencia

$$c_k = \left[\frac{n(n+1) - (k-1)k}{2k^2}\right]c_{k-1}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

Considerando $c_0 = 1$, y la regla de recurrencia, se obtiene los coeficiente para $k \leq n$:

$$c_k = \frac{[n(n+1) - (k-1)k]\cdots[n(n+1) - 1\times 2]n(n+1)}{2^k(k!)^2},$$

Solución: para $k > n$ los coeficientes son nulos. Dependiendo del valor p en la ecuacion de Legendre, se obtiene un polinomio de Legrendre (salvo constantes) para y_1. Es decir

$$\begin{aligned} p = 0 &\to y_1(t) = P_0(t) = 1, \\ p = 1 &\to y_1(t) = P_1(t) = t \\ p = 2 &\to y_1(t) = P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Además, los polinomios de Legedre son acotados alrededor de $t = 0$. Mientras que la solución y_2 no es acotada alrededor de $t = 0$, pues $\ln |t| \to -\infty$ cuando $t \to 0$. De manera similar para $x = -1$, tomamos el cambio $t = x + 1$. Por tanto, las únicas soluciones (salvo constantes) de L que están acotadas al mismo tiempo en $t = 1$ y $t = -1$ son los polinomios de Legendre.

3. Demuestre la relación de recurrencia de los polinomios de Legendre

$$P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} x P_n - \frac{n}{n+1} P_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(Sug. Considere una base del subespacio $\mathcal{P}_{n+2}$ de polinomios de grado menor o igual a $n+1$ de $PC[-1, 1]$ para la función $xP_n(x)$) [7ptos]

Solución: Considere la base ortogonal $P_0, P_1, \cdots, P_{n+1}$ del espacio $\mathcal{P}_{n+2}$ de dimensión $n+1$. Como $xP_n(x) \in \mathcal{P}_{n+2}$, se tiene que

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\langle xP_n, P_k \rangle}{\|P_k\|^2} P_k(x)$$

Además, se sabe que P_n es ortogonal a los polinomios de grado $< n$, en particular a xP_k para $k < n - 1$. Por tanto

$$\langle P_n, xP_k \rangle = \langle xP_n, P_k \rangle = 0.$$

Entonces, se tiene que

$$xP_n(x) = \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle}{\|P_{n-1}\|^2} P_{n-1}(x) + \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\|P_n\|^2} P_n(x) + \frac{\langle xP_n, P_{n+1} \rangle}{\|P_{n+1}\|^2} P_{n+1}(x).$$

Se observa que $xP_n^2(x)$ es una función impar, por lo que

$$\langle xP_n, P_n \rangle = \int_{-1}^{1} xP_n^2(x)\, dx = 0.$$

Por tanto, se puede escribir

$$xP_n = \alpha P_{n+1} + \beta P_{n-1}.$$

Dado un polinomio de Legendre P_k, los coeficientes de los grados k y $k-2$ son respectivamente

$$\frac{(2k)!}{2^k (k!)^2} \quad \wedge \quad -\frac{(2k-2)!}{2^k (k-1)!(k-2)!}.$$

Para calcular α, igualamos los coeficientes de orden $n+1$ del polinomio xP_n y αP_{n+1}, así obtenemos

$$\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \alpha \frac{[2(n+1)]!}{2^{n+1}[(n+1)!]^2} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Similarmente, igualamos los coeficientes de orden $n-1$. Es decir, hallamos los coeficientes de orden $n-2$ de P_n, $n-1$ de P_{n+1} y $n-1$ de P_{n-1}, obteniendo

$$
\begin{aligned}
-\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!} = -\frac{n+1}{2n+1}\frac{[2(n+1)-2]!}{2^{n+1}n!(n-1)!} + \beta\frac{[2(n-1)]!}{2^{n-1}[(n-1)!]^2} \\
\implies \beta = \frac{n}{2n+1}.
\end{aligned}
$$

Reemmplazando, y depejando P_{n+1}, se concluye.