

Tema 2

El Teorema de existencia y unicidad de Picard

1 Formulación integral del Problema de Cauchy

El objetivo del presente Tema, y del siguiente, es analizar el Problema de Cauchy para un SDO de primer orden en forma normal. En concreto, consideremos el problema

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

con $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$, una función dada, siendo $N \geq 1$ entero, y donde $(x_0, y_0) \in \Omega$ está fijado. Recordemos que cuando usamos la notación $(x, y) \in \mathbb{R}^{N+1}$, ello significa que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^N$. Recordemos también, que si $N = 1$, el SDO $y' = f(x, y)$ es en realidad una EDO de primer orden en forma normal, y si $N > 1$, entonces (PC) es una notación abreviada para el problema

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_N), \\ \dots\dots\dots, \\ y_N' = f_N(x, y_1, \dots, y_N), \\ y_1(x_0) = y_{1_0}, \dots, y_N(x_0) = y_{N_0}. \end{cases}$$

Como ya dijimos en el Tema 1, dado $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío tal que $x_0 \in I$, una solución del problema (PC) en el intervalo I , es cualquier función $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^N$, tal que :

- (i) Existe el vector derivada (componente a componente) $\varphi'(x)$ en todo punto $x \in I$, donde si x es un extremo de I , $\varphi'(x)$ denota a la correspondiente derivada lateral,

- (ii) $(x, \varphi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in I$,
- (iii) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, para todo $x \in I$,
- (iv) $\varphi(x_0) = y_0$.

A partir de ahora, vamos a suponer siempre que Ω es un subconjunto abierto no vacío de \mathbb{R}^{N+1} , y que f es continua de Ω en \mathbb{R}^N , lo que denotaremos

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

En tal caso, es inmediato comprobar que la condición (i) en la definición de solución de (PC) precedente, puede ser sustituida por pedir

$$(i') \quad \varphi \in C^1(I; \mathbb{R}^N).$$

A continuación, vamos a ver que (PC) puede ser formulado de otra manera equivalente que nos va a resultar de utilidad para analizar la existencia de solución al problema.

Lema 1.1 *Supongamos que Ω es un subconjunto abierto no vacío de \mathbb{R}^{N+1} , y que $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo de interior no vacío tal que $x_0 \in I$, y $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función dada. Bajo estas condiciones, φ es solución del problema (PC) en el intervalo I , si y sólo si satisface las tres condiciones siguientes, denominadas formulación integral del problema (PC):*

- (j) $\varphi \in C(I; \mathbb{R}^N)$,
- (jj) $(x, \varphi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in I$,
- (jjj) $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds, \quad \forall x \in I$, donde la integral está efectuada componente a componente.

Demostración.- Que (i'), (ii), (iii) y (iv) implican (j), (jj) y (jjj), es inmediato de comprobar, sin más que integrar en (iii) desde x_0 hasta x , y hacer uso de (iv).

Recíprocamente, si φ satisface (j), (jj) y (jjj), en particular, teniendo en cuenta que $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$, la función $f(s, \varphi(s))$ pertenece a $C(I; \mathbb{R}^N)$, ya que se obtiene de la composición de aplicaciones continuas

$$s \in I \mapsto (s, \varphi(s)) \in \Omega \mapsto f(s, \varphi(s)) \in \mathbb{R}^N.$$

En consecuencia, por (jjj), $\varphi(x_0) = y_0$, y derivando, φ satisface (iii) e (i'). ■

La formulación integral de (PC) permite plantearse este problema desde un punto de vista abstracto. En concreto, y por simplificar, supongamos por un

momento que $\Omega = \mathbb{R}^{N+1}$, y que $f \in C(\mathbb{R}^{N+1}; \mathbb{R}^N)$. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo de interior no vacío y tal que $x_0 \in I$. Consideremos la aplicación

$$T : \varphi \in C(I; \mathbb{R}^N) \mapsto T\varphi \in C(I; \mathbb{R}^N),$$

definida por

$$(T\varphi)(x) = x_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds, \quad \forall x \in I.$$

Por el Lema precedente, es evidente que φ es solución de (PC) en I si y sólo si es un punto fijo de la aplicación T , es decir,

$$T\varphi = \varphi.$$

Resulta por tanto de interés el estudiar condiciones bajo las que una aplicación como T posee puntos fijos. Este estudio, como veremos más adelante, pasa por dotar al espacio vectorial $C(I; \mathbb{R}^N)$ de una estructura topológica adecuada. Ello va a ser posible en el caso en que $I = [a, b]$ es un intervalo cerrado y acotado.

2 Espacios métricos. Espacios de Banach

Recordemos que un espacio métrico es cualquier par (X, d) , donde X es un conjunto no vacío, y d es una distancia sobre X , es decir, es una aplicación

$$d : (x, y) \in X \times X \mapsto d(x, y) \in [0, +\infty),$$

tal que para todo $x, y, z \in X$,

1. $d(x, y) = d(y, x)$,
2. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,
3. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

Si (X, d) es un espacio métrico, se dice que $A \subset X$ es un conjunto abierto si para cada punto $a \in A$ existe un $\varepsilon_a > 0$ tal que $B(a; \varepsilon_a) \subset A$, donde, por definición,

$$B(a; \varepsilon_a) = \{x \in X; d(x, a) < \varepsilon_a\}.$$

De esta forma, queda definida sobre X una estructura de espacio topológico. En particular, un subconjunto $C \subset X$ será cerrado si y sólo si su complementario $X \setminus C$ es abierto.

Una propiedad fundamental de la topología así definida sobre un espacio métrico, es que puede ser analizada mediante sucesiones. En concreto, dada una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$, se dice que converge a $x \in X$ en (X, d) si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Es bien conocido la unicidad del límite, es decir, que si $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$, converge a $x \in X$ y a $y \in X$, entonces $x = y$. Por otra parte, entre otras propiedades, se satisfacen:

- a) Un conjunto $C \subset X$ es cerrado, si y sólo si, dada cualquier sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset C$, si dicha sucesión converge a $x \in X$, entonces forzosamente x pertenece a C .
- b) Sean (Y, \tilde{d}) otro espacio métrico, y $T : X \rightarrow Y$ una aplicación. Entonces, T es continua, es decir la imagen inversa $T^{-1}(A)$ es abierto de X cualquiera que sea el abierto A de Y , si y sólo si dada cualquier sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$, si dicha sucesión converge a x en X , entonces forzosamente la sucesión $\{Tx_n\}_{n \geq 1}$ converge a Tx en Y .

Una clase muy importante de espacios métricos la constituyen los espacios normados (sobre \mathbb{R}). Recordemos que un espacio normado (sobre \mathbb{R}) es cualquier par $(X, \|\cdot\|)$, tal que X es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , y $\|\cdot\|$ es una norma sobre X , es decir, es una aplicación

$$\|\cdot\| : x \in X \mapsto \|x\| \in [0, +\infty),$$

tal que para todo $x, y \in X$, y todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
3. $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces es un espacio métrico con la distancia definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X,$$

que se denomina la distancia asociada a la norma $\|\cdot\|$.

Observación 2.1 *Evidentemente, todo subconjunto no vacío de un espacio métrico es un espacio métrico si sobre él consideramos la misma distancia. En particular, todo subconjunto no vacío de un espacio normado es un espacio métrico si sobre él consideramos la distancia asociada a la norma.*

También, es inmediato que todo subespacio vectorial de un espacio normado es un espacio normado si sobre él consideramos la misma norma.

Un primer ejemplo de espacio normado lo constituye \mathbb{R}^N dotado de la norma euclídea $\|\cdot\|_2$, definida por

$$\|y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^N y_i^2 \right)^{1/2}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Otras normas posibles sobre \mathbf{R}^N son

$$\|y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |y_i|, \quad \forall y \in \mathbf{R}^N,$$

y

$$\|y\|_1 = \sum_{i=1}^N |y_i|, \quad \forall y \in \mathbf{R}^N.$$

A partir de ahora, por razones de conveniencia notacional, denotaremos por $|y|$ a la norma euclídea de $y \in \mathbf{R}^N$.

Consideremos ahora el espacio vectorial $C([a, b], \mathbf{R}^N)$, donde $-\infty < a < b < +\infty$. Sobre dicho espacio podemos considerar también las tres normas siguientes:

$$\|\varphi\|_2 = \left(\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \forall \varphi \in C([a, b]; \mathbf{R}^N),$$

$$\|\varphi\|_1 = \int_a^b |\varphi(x)| dx, \quad \forall \varphi \in C([a, b]; \mathbf{R}^N),$$

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |\varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in C([a, b]; \mathbf{R}^N).$$

Sean X un espacio vectorial sobre \mathbf{R} , y $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas sobre X . Por definición, ambas normas son equivalentes si existen dos constantes $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \quad \forall x \in X.$$

En tal caso, las topologías inducidas en X por ambas normas coinciden.

Es bien conocido que en \mathbf{R}^N (de hecho en todo espacio vectorial sobre \mathbf{R} de dimensión finita) todas las normas son equivalentes. Sin embargo, en general, no es ésta la situación. Como veremos más adelante, las tres normas antes definidas en $C([a, b]; \mathbf{R}^N)$ no son equivalentes.

Definición 2.2 Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ se dice que es de Cauchy si

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0,$$

es decir, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0(\varepsilon)$ tal que

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0(\varepsilon).$$

Si una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ converge a $x \in X$, entonces es una sucesión de Cauchy. El recíproco no es cierto, así, por ejemplo, la sucesión de funciones

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [-1, 0), \\ nx, & \text{si } x \in [0, 1/n), \\ 1, & \text{si } x \in [1/n, 1], \end{cases}$$

es de Cauchy en $(C([-1, 1]), \|\cdot\|_2)$, pero no es convergente en dicho espacio.

Definición 2.3 *Un espacio métrico se dice completo si toda sucesión de Cauchy en dicho espacio es convergente en el mismo. Un espacio de Banach es cualquier espacio normado que sea completo para la métrica inducida por la norma.*

Observación 2.4 *Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas equivalentes sobre X . En tal caso, $(X, \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach si y sólo si $(X, \|\cdot\|_2)$ es también un espacio de Banach.*

El espacio \mathbb{R}^N , con cualquier norma, es un espacio de Banach. Sin embargo, según se desprende del contraejemplo antes expuesto, $(C([a, b]), \|\cdot\|_2)$ no es un espacio de Banach. De la misma forma, resulta fácil hallar contraejemplos que demuestran que $(C([a, b]), \|\cdot\|_1)$ tampoco es un espacio de Banach (ver los ejercicios). Más adelante vamos a demostrar que, en general, $(C([a, b]; \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach, con lo que, en particular, sobre $C([a, b])$, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ no son normas equivalentes a $\|\cdot\|_\infty$.

Observación 2.5 *En general, todo subconjunto cerrado no vacío de un espacio métrico completo es un espacio métrico completo si sobre él consideramos la misma distancia. En particular, todo subconjunto cerrado no vacío de un espacio de Banach es un espacio métrico completo si sobre él consideramos la distancia asociada a la norma.*

También, es inmediato que todo subespacio vectorial cerrado de un espacio de Banach es un espacio de Banach si sobre él consideramos la misma norma.

3 El espacio $(C([a, b]; \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$

Consideremos sobre el espacio vectorial $C([a, b]; \mathbb{R}^N)$ la norma

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |\varphi(x)|.$$

Dicha norma se denomina también la norma de la convergencia uniforme sobre $[a, b]$, ya que dada una sucesión $\{\varphi_n\}_{n \geq 1} \subset C([a, b]; \mathbb{R}^N)$, dicha sucesión converge a φ en $(C([a, b]; \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$ si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{x \in [a, b]} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \right) = 0,$$

es decir, si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe un $n_0(\varepsilon)$ tal que

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon), \quad \forall x \in [a, b],$$

que no es más que la expresión de que $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ converge a φ uniformemente en el intervalo $[a, b]$.

Se tiene el siguiente resultado

Teorema 3.1 *El espacio $(C([a, b]; \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.*

Demostración Sea $\{\varphi_n\}_{n \geq 1} \subset C([a, b]; \mathbb{R}^N)$, una sucesión de Cauchy en el espacio normado $(C([a, b]; \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$. En tal caso, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe un $n_0(\varepsilon)$ tal que

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0(\varepsilon),$$

es decir

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon), \quad \forall x \in [a, b]. \quad (3.1)$$

En consecuencia, para cada $x \in [a, b]$ fijado, la sucesión $\{\varphi_n(x)\}_{n \geq 1}$ es de Cauchy y por tanto convergente en \mathbb{R}^N . Así pues, tiene sentido definir la función $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, por

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x), \quad \forall x \in [a, b]. \quad (3.2)$$

De esta forma, pasando al límite para $m \rightarrow \infty$ en (3.1), obtenemos que para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe un $n_0(\varepsilon)$ tal que

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon), \quad \forall x \in [a, b]. \quad (3.3)$$

Queda claro de (3.3), que si $\varphi \in C([a, b]; \mathbb{R}^N)$, entonces la sucesión $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ converge a φ en $(C([a, b]; \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$, y por tanto, para terminar la demostración del teorema, tan sólo nos resta comprobar que φ es continua en $[a, b]$.

Sea $\varepsilon > 0$ dado, y fijemos un $n \geq n_0(\varepsilon)$, con $n_0(\varepsilon)$ satisfaciendo (3.3). Como φ_n es uniformemente continua, existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo par $x, \tilde{x} \in [a, b]$ que satisfaga $|x - \tilde{x}| \leq \delta$, se tiene

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(\tilde{x})| \leq \varepsilon. \quad (3.4)$$

De esta forma, teniendo en cuenta que

$$|\varphi(x) - \varphi(\tilde{x})| \leq |\varphi(x) - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - \varphi_n(\tilde{x})| + |\varphi_n(\tilde{x}) - \varphi(\tilde{x})|,$$

de (3.3) y (3.4) obtenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo par $x, \tilde{x} \in [a, b]$ que satisfaga $|x - \tilde{x}| \leq \delta$, se tiene

$$|\varphi(x) - \varphi(\tilde{x})| \leq 3\varepsilon,$$

y por consiguiente φ es uniformemente continua en $[a, b]$. ■

Como consecuencia del teorema precedente, se tiene

Corolario 3.2 *Todo subconjunto cerrado no vacío de $(C([a, b]; \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$, dotado de la métrica asociada a $\|\cdot\|_\infty$, es un espacio métrico completo.*

Todo subespacio vectorial cerrado de $(C([a, b]; \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$, dotado de la misma norma, es un espacio de Banach.

4 Aplicaciones contractivas. Teorema del punto fijo de Banach

Como ya hemos visto, resulta de interés el estudio de condiciones bajo las que una aplicación $T : X \rightarrow X$ posee un punto fijo. Por conveniencia notacional, usaremos Tx para designar al transformado de x por T .

Definición 4.1 *Sea (X, d) un espacio métrico, y consideremos una aplicación $T : X \rightarrow X$. Se dice que T es contractiva, si existe un número $\alpha \in [0, 1)$ tal que*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Observación 4.2 *Obsérvese que si T es contractiva, en particular es continua, de hecho es uniformemente continua, como aplicación de (X, d) en sí mismo.*

Obsérvese también que en la definición de aplicación contractiva, la constante α es estrictamente menor que 1. En el caso en que la aplicación T no es contractiva, pero satisface la desigualdad

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

se dice que T es no expansiva.

Ya veremos más adelante, y en los ejercicios, ejemplos de aplicaciones contractivas. Para este tipo de aplicaciones se tiene el siguiente importante resultado.

Teorema 4.3 (Teorema del punto fijo de Banach) *Sean (X, d) un espacio métrico completo, y $T : X \rightarrow X$ una aplicación contractiva. Bajo estas condiciones, existe un y sólo un punto fijo de T , es decir, existe un y sólo un $\hat{x} \in X$ tal que*

$$T\hat{x} = \hat{x}.$$

Demostración.- Como T es contractiva, sabemos que existe $\alpha \in [0, 1)$ tal que

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Fijemos un punto $x_0 \in X$, y de manera inductiva, definamos

$$x_n = Tx_{n-1}, \quad \forall n \geq 1,$$

o lo que es equivalente,

$$x_n = T^n x_0, \quad \forall n \geq 1,$$

donde por T^n denotamos a la composición de T consigo mismo n veces.

En primer lugar, vamos a demostrar que la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1}$ así definida es de Cauchy en X . En efecto, sean $m > n \geq 1$, es inmediato que si $n > 1$, entonces

$$d(x_m, x_n) = d(Tx_{m-1}, Tx_{n-1}) \leq \alpha d(x_{m-1}, x_{n-1}).$$

Por consiguiente, iterando esta desigualdad n veces, obtenemos

$$d(x_m, x_n) \leq \alpha^n d(x_{m-n}, x_0), \quad \forall m > n \geq 1. \quad (4.5)$$

Ahora bien, por las propiedades de la función distancia,

$$d(x_{m-n}, x_0) \leq \sum_{k=1}^{m-n} d(x_k, x_{k-1}),$$

y por (4.5) aplicada con $m = k$ y $n = k - 1$,

$$d(x_k, x_{k-1}) \leq \alpha^{k-1} d(x_1, x_0).$$

De estas dos últimas desigualdades, obtenemos

$$d(x_{m-n}, x_0) \leq \sum_{k=1}^{m-n} \alpha^{k-1} d(x_1, x_0),$$

con lo que, teniendo en cuenta que $\alpha \in [0, 1)$,

$$d(x_{m-n}, x_0) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j d(x_1, x_0) = \frac{1}{1-\alpha} d(x_1, x_0), \quad \forall m > n \geq 1.$$

Llevando esta última desigualdad a (4.5), obtenemos

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0), \quad \forall m > n \geq 1. \quad (4.6)$$

Como $0 \leq \alpha < 1$, es evidente que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$, y por tanto, de (4.6) se obtiene

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0,$$

es decir, la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1}$ es de Cauchy en (X, d) .

Como (X, d) es completo, existe un $\hat{x} \in X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x},$$

pero entonces, teniendo en cuenta que T es continua,

$$T\hat{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \hat{x},$$

y por consiguiente \hat{x} es un punto fijo de T .

Finalmente, para demostrar la unicidad, supongamos que \tilde{x} es otro punto fijo de T . En tal caso,

$$d(\hat{x}, \tilde{x}) = d(T\hat{x}, T\tilde{x}) \leq \alpha d(\hat{x}, \tilde{x}),$$

es decir,

$$(1 - \alpha)d(\hat{x}, \tilde{x}) \leq 0,$$

con lo que al ser $\alpha < 1$, obtenemos que $d(\hat{x}, \tilde{x}) = 0$, y por tanto $\hat{x} = \tilde{x}$. ■

Observación 4.4 Obsérvese que la demostración precedente es constructiva, de hecho obtenemos que, bajo las condiciones del Teorema, sea cual sea el punto inicial x_0 que tomemos en X , la sucesión $x_n = T^n x_0$ converge en (X, d) al único punto fijo \hat{x} de T .

Además, de hecho podemos obtener una estimación de la cota de error que se produce al tomar $x_n = T^n x_0$ como una aproximación de \hat{x} . En efecto, pasando al límite en (4.6) para $m \rightarrow \infty$, se tiene

$$d(\hat{x}, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0), \quad \forall n \geq 1. \quad (4.7)$$

Observación 4.5 El Teorema precedente no se satisface si T es no expansiva. Como un contraejemplo sencillo, consideremos $X = [1, +\infty) \subset \mathbb{R}$ con la distancia usual $d(x, y) = |x - y|$. Como X es un subconjunto cerrado de \mathbb{R} , resulta ser un espacio métrico completo. Sea T la aplicación

$$T : x \in [1, +\infty) \mapsto x + \frac{1}{x} \in [1, +\infty).$$

Teniendo en cuenta que T es una función creciente en $[1, +\infty)$, es inmediato comprobar que

$$d(Tx, Ty) < d(x, y), \quad \forall x \neq y \in [1, +\infty),$$

y sin embargo, no existe punto fijo de T , es decir, no existe solución en $[1, +\infty)$ de la ecuación $x = x + \frac{1}{x}$.

El Teorema del punto fijo de Banach se puede extender al caso en que alguna potencia de T es contractiva. En concreto, se tiene:

Teorema 4.6 Sean (X, d) un espacio métrico completo, y $T : X \rightarrow X$ una aplicación tal que para algún entero $k \geq 1$, la aplicación T^k es contractiva. Bajo estas condiciones, existe un y sólo un punto fijo de T , es decir, existe un y sólo un $\hat{x} \in X$ tal que

$$T\hat{x} = \hat{x}.$$

Además

$$\hat{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n x_0, \quad \forall x_0 \in X. \quad (4.8)$$

Demostración.- Si $k = 1$, nuestro enunciado no es sino el Teorema del punto fijo de Banach.

Supongamos $k > 1$. Es inmediato ver que si \tilde{x} es un punto fijo de T , entonces es un punto fijo de T^k , ya que

$$T^k \tilde{x} = T^{k-1}(T\tilde{x}) = T^{k-1}\tilde{x} = \dots = T\tilde{x} = \tilde{x}.$$

Recíprocamente, si \tilde{x} es un punto fijo de T^k , entonces

$$T^k(T\tilde{x}) = T(T^k\tilde{x}) = T\tilde{x},$$

y por tanto $T\tilde{x}$ es también un punto fijo de T^k . Como T^k es contractiva, posee un único punto fijo. Consiguientemente, $T\tilde{x} = \tilde{x}$, es decir, \tilde{x} es un punto fijo de T .

En resumen, vemos que bajo las condiciones del teorema, \tilde{x} es un punto fijo de T si y sólo si es un punto fijo de T^k .

Como T^k es contractiva, y (X, d) es completo, sabemos que existe un único punto fijo \hat{x} de T^k , que por tanto es el único punto fijo de T .

Además, de acuerdo con la Observación 4.4, se satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T^k)^n y_0 = \hat{x}, \quad \forall y_0 \in X. \quad (4.9)$$

Si x_0 es cualquier punto fijado de X , tomando $y_0 = x_0$, y más generalmente $y_0 = T^j x_0$, obtenemos de (4.9)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^{nk+j} x_0 = \hat{x}, \quad \forall j = 0, 1, \dots, k-1, \quad \forall x_0 \in X,$$

es decir, (4.8). ■

5 Funciones lipschitzianas

En esta sección estudiamos los conceptos de función globalmente lipschitziana y de función localmente lipschitziana, respecto de la variable y , en Ω .

Consideremos fijado un conjunto no vacío, $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$, cuyos puntos denotamos por (x, y) con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^N$.

Definición 5.1 *Se dice que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ es una función globalmente lipschitziana respecto de la variable y en Ω , si existe una constante $L > 0$ (dependiente de f), tal que*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega. \quad (5.10)$$

A L se le denomina una constante de Lipschitz respecto de la variable y para f en Ω .

Al conjunto de todas las funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ que sean globalmente lipshitzianas respecto de la variable y en Ω , lo denotaremos por $Lip(y, \Omega)$. Es inmediato comprobar que $Lip(y, \Omega)$, con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función, es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Obsérvese que, en particular, todas las funciones constantes pertenecen a $Lip(y, \Omega)$.

Observación 5.2 *En general, dada una función $h : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $n \geq 1$ y $m \geq 1$ enteros, se dice que h es globalmente lipshitziana en D , si existe una constante $L_h > 0$ tal que*

$$|h(z_1) - h(z_2)| \leq L_h |z_1 - z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in D.$$

La noción que nosotros hemos introducido en la Definición 5.1, aunque emparentada con la de función globalmente lipshitziana precedente, es diferente, y está motivada por su utilidad en el estudio del Problema de Cauchy para un SDO en forma normal que efectuaremos con posterioridad.

Definición 5.3 *Supongamos que Ω es abierto. Se dice que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ es una función localmente lipshitziana respecto de la variable y en Ω , si para cada punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ existe una bola abierta de centro dicho punto, contenida en Ω , y tal que la restricción de f a dicha bola es globalmente lipshitziana respecto de la variable y . Es decir, f es localmente lipshitziana respecto de la variable y en Ω , si para cada punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ existen un $\varepsilon(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, y una constante $L(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, tales que*

$$B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon(\bar{x}, \bar{y})) \subset \Omega,$$

y para todo $(x, y_1), (x, y_2) \in B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon(\bar{x}, \bar{y}))$,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L(\bar{x}, \bar{y}) |y_1 - y_2|. \quad (5.11)$$

Si Ω es abierto, al conjunto de todas las funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ que sean localmente lipshitzianas respecto de la variable y en Ω , lo denotaremos por $Lip_{loc}(y, \Omega)$. Es inmediato comprobar que $Lip_{loc}(y, \Omega)$, con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función, es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , y que

$$Lip(y, \Omega) \subset Lip_{loc}(y, \Omega),$$

con contenido estricto, como veremos más adelante.

Es también sencillo comprobar el resultado siguiente:

Proposición 5.4 (a) *Si $f \in Lip(y, \Omega)$, entonces f es uniformemente continua respecto de la variable y en Ω , es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, dependiente de ε , tal que*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \varepsilon, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega \text{ tales que } |y_1 - y_2| \leq \delta.$$

- (b) Si $f \in Lip_{loc}(y, \Omega)$, entonces f es continua respecto de la variable y en Ω , es decir, para todo $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ y todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, dependiente de (\bar{x}, \bar{y}) y ε , tal que si $|y - \bar{y}| \leq \delta$, entonces (\bar{x}, y) pertenece a Ω y

$$|f(\bar{x}, y) - f(\bar{x}, \bar{y})| \leq \varepsilon.$$

Observación 5.5 En general, $Lip(y, \Omega)$ no está contenido en $C(\Omega; \mathbb{R}^N)$, es decir, existen funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ que son globalmente lipschitzianas en Ω , pero no son continuas en dicho conjunto. Así, por ejemplo, la función

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0, \\ y & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

pertenece a $Lip(y, \mathbb{R}^{N+1})$, pero no es continua en los puntos de \mathbb{R}^{N+1} de la forma $(0, y)$.

Recíprocamente, una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ que sea continua, no necesariamente es, ni siquiera, localmente lipschitziana en Ω . Por ejemplo, la función

$$f(x, y) = \sqrt{|y|}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

es continua en \mathbb{R}^2 , pero no pertenece a $Lip_{loc}(y, \mathbb{R}^2)$, ya que en caso contrario, en particular existiría un $\varepsilon > 0$ tal que la restricción de f a $B((0, 0), \varepsilon)$ sería globalmente lipschitziana, y por tanto existiría una constante $L(0, 0) > 0$ tal que, teniendo en cuenta que $f(0, 0) = 0$,

$$|f(0, \varepsilon/n)| \leq L(0, 0)(\varepsilon/n), \quad \forall n \geq 2,$$

es decir,

$$\sqrt{\varepsilon/n} \leq L(0, 0)(\varepsilon/n), \quad \forall n \geq 2,$$

lo cual es un absurdo.

El resultado que sigue es de gran utilidad para decidir en un buen número de situaciones si una función es global o localmente lipschitziana.

Teorema 5.6 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un conjunto abierto, y

$$f = (f_1, \dots, f_N) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

una función tal que existen las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, para todo $i, j = 1, \dots, N$, y son continuas en Ω . En estas condiciones:

- (a) $f \in Lip_{loc}(y, \Omega)$.
- (b) Si además Ω es convexo, entonces $f \in Lip(y, \Omega)$ si y sólo si todas las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, están acotadas en Ω , es decir,

$$\sup_{(x, y) \in \Omega} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) \right| < +\infty, \quad \forall i, j = 1, \dots, N. \quad (5.12)$$

Demostración.- (a) Sea $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$. Como Ω es abierto, existe $\varepsilon(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, tal que la bola cerrada

$$\bar{B} = \bar{B}((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon(\bar{x}, \bar{y})),$$

está contenida en Ω . Teniendo en cuenta que \bar{B} es un compacto contenido en Ω , y que en particular las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, \dots, N$, son continuas en \bar{B} , podemos afirmar que existe una constante $M(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, tal que

$$\max_{(x,y) \in \bar{B}} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) \right| \leq M(\bar{x}, \bar{y}), \quad \forall i, j = 1, \dots, N. \quad (5.13)$$

Por otra parte, por el Teorema del valor medio para funciones reales de varias variables, si $(x, y_1), (x, y_2) \in \bar{B}$, entonces para cada $i = 1, \dots, N$, existe un punto \hat{y}_i en el segmento que une y_1 con y_2 , tal que

$$f_i(x, y_1) - f_i(x, y_2) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, \hat{y}_i)(y_{1j} - y_{2j}),$$

y por tanto, teniendo en cuenta (5.13),

$$|f_i(x, y_1) - f_i(x, y_2)| \leq M(\bar{x}, \bar{y}) \sum_{j=1}^N |y_{1j} - y_{2j}| \leq M(\bar{x}, \bar{y}) \sqrt{N} |y_1 - y_2|,$$

para todo $i = 1, \dots, N$, de donde es inmediato que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M(\bar{x}, \bar{y}) N |y_1 - y_2|,$$

para todo $(x, y_1), (x, y_2) \in \bar{B}$, y en consecuencia f es localmente lipschitziana respecto de y en Ω .

(b) Ahora, supongamos que Ω es convexo.

En primer lugar, si se satisface (5.12), entonces, razonando como en la demostración de (a), pero sustituyendo \bar{B} por Ω , es inmediato demostrar que f es globalmente lipschitziana respecto de y en Ω , con constante de Lipschitz $L = MN$, siendo

$$M = \max_{1 \leq i, j \leq N} \left(\sup_{(x,y) \in \Omega} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) \right| \right).$$

Recíprocamente, supongamos que no se satisface (5.12), es decir, que existen $i, j \in \{1, \dots, N\}$, tales que

$$\sup_{(x,y) \in \Omega} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) \right| = +\infty.$$

En tal caso, para todo entero $n \geq 1$ existe un punto $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \in \Omega$ tal que

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \right| \geq 2n,$$

con lo que, teniendo en cuenta la definición de derivada parcial, si denotamos e_j al vector unitario de \mathbb{R}^N de componentes todas nulas salvo la j -ésima igual a 1, obtenemos que para cada $n \geq 1$ existe un $\varepsilon_n > 0$, tal que

$$\left| \frac{f_i(\bar{x}_n, \bar{y}_n + \varepsilon_n e_j) - f_i(\bar{x}_n, \bar{y}_n)}{\varepsilon_n} \right| \geq n,$$

es decir,

$$|f_i(\bar{x}_n, \bar{y}_n + \varepsilon_n e_j) - f_i(\bar{x}_n, \bar{y}_n)| \geq n\varepsilon_n = n|(y_n + \varepsilon_n e_j) - y_n|,$$

con lo que f no es globalmente lipschitziana respecto de y en Ω . ■

Observación 5.7 Consideréanse las funciones f_1 , f_2 y f_3 , definidas todas en \mathbb{R}^2 con valores en \mathbb{R} , dadas por

$$f_1(x, y) = \frac{1}{1+y^2}, \quad f_2(x, y) = \frac{x}{1+y^2}, \quad f_3(x, y) = \begin{cases} xy, & \text{si } x > 0, \\ y, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Resulta sencillo comprobar, por aplicación del Teorema precedente, que $f_1 \in Lip(y, \mathbb{R}^2)$, que f_2 no es globalmente lipschitziana en \mathbb{R}^2 , pero $f_2 \in Lip_{loc}(y, \mathbb{R}^2)$, y $f_2 \in Lip(y, \Omega)$, para todo abierto conexo Ω de \mathbb{R}^2 que sea acotado en la dirección de x .

Finalmente, la función f_3 no satisface las condiciones del Teorema 5.6 en \mathbb{R}^2 , ya que su derivada parcial respecto de y no es continua en todo \mathbb{R}^2 , pero es inmediato comprobar que pertenece a $Lip_{loc}(y, \mathbb{R}^2)$, y de hecho es globalmente lipschitziana en todo abierto Ω de \mathbb{R}^2 que sea acotado en la dirección de x .

Finalizamos esta sección con el siguiente resultado:

Teorema 5.8 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un conjunto abierto. Si $f \in Lip_{loc}(y, \Omega)$, y $K \subset \Omega$ es un conjunto compacto no vacío tal que

$$\sup_{(x,y) \in K} |f(x, y)| < +\infty,$$

entonces

$$f \in Lip(y, K).$$

Demostración.- Fijemos, para cada punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$, un $\varepsilon(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, y una constante $L(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, tales que

$$B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon(\bar{x}, \bar{y})) \subset \Omega,$$

y para todo $(x, y_1), (x, y_2) \in B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon(\bar{x}, \bar{y}))$, se satisfaga

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L(\bar{x}, \bar{y})|y_1 - y_2|. \quad (5.14)$$

Evidentemente,

$$K \subset \bigcup_{(\bar{x}, \bar{y}) \in K} B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon(\bar{x}, \bar{y})/2),$$

y por tanto, al ser K compacto, existe una colección finita

$$\{(\bar{x}_1, \bar{y}_1), \dots, (\bar{x}_n, \bar{y}_n)\} \subset K,$$

tal que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n B((\bar{x}_k, \bar{y}_k), \varepsilon(\bar{x}_k, \bar{y}_k)/2).$$

Ahora, si (x, y_1) y (x, y_2) son dos puntos de K , fijemos un $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $(x, y_1) \in B((\bar{x}_k, \bar{y}_k), \varepsilon(\bar{x}_k, \bar{y}_k)/2)$. Para (x, y_2) se tiene forzosamente una de las dos situaciones siguientes:

(a) $(x, y_2) \in B((\bar{x}_k, \bar{y}_k), \varepsilon(\bar{x}_k, \bar{y}_k))$. En tal caso, por (5.14),

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L(\bar{x}_k, \bar{y}_k)|y_1 - y_2|.$$

(b) $(x, y_2) \notin B((\bar{x}_k, \bar{y}_k), \varepsilon(\bar{x}_k, \bar{y}_k))$. En tal caso,

$$|y_1 - y_2| = |(x, y_1) - (x, y_2)| \leq \varepsilon(\bar{x}_k, \bar{y}_k)/2,$$

con lo que, si definimos

$$\varepsilon = \min_{1 \leq k \leq n} (\varepsilon(\bar{x}_k, \bar{y}_k))/2, \quad M = \sup_{(x, y) \in K} |f(x, y)|, \quad (5.15)$$

tenemos

$$|y_1 - y_2| \geq \varepsilon,$$

y entonces

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq 2M \leq \frac{2M}{\varepsilon}|y_1 - y_2|.$$

En consecuencia, f es globalmente lipschitziana respecto de la variable y en K , pudiéndose tomar como constante de Lipschitz,

$$L = \max \left(\max_{1 \leq k \leq n} (L(\bar{x}_k, \bar{y}_k)), \frac{2M}{\varepsilon} \right),$$

con ε y M definidos por (5.15). ■

6 El Teorema de existencia y unicidad local de Picard

Vamos a demostrar en esta sección un resultado de existencia y unicidad de solución, en un intervalo suficientemente pequeño, para el Problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

En concreto, vamos a demostrar el siguiente resultado:

Teorema 6.1 (Teorema de Picard) Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un conjunto abierto no vacío, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega).$$

Con estas condiciones, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe un $\delta > 0$, tal que si denotamos

$$I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

existe una y sólo una solución del problema (PC) en I_δ .

Demostración.- Como Ω es abierto y $f \in Lip_{loc}(y, \Omega)$, existen $a_0 > 0$ y $b_0 > 0$, tales que si denotamos

$$R = [x_0 - a_0, x_0 + a_0] \times \overline{B}(y_0, b_0),$$

se satisfaga

$$R \subset \Omega, \quad y \quad f \in Lip(y, R).$$

Sea $L > 0$ una constante de Lipschitz para f en R , es decir, tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R,$$

y denotemos

$$M = \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)|,$$

máximo que se alcanza por ser f continua y R compacto.

Fijemos un número δ tal que

$$0 < \delta < \min(a_0, b_0/M, 1/L), \quad (6.16)$$

y consideremos el conjunto

$$X = \{\varphi \in C(I_\delta; \mathbb{R}^N); |\varphi(x) - y_0| \leq b_0, \forall x \in I_\delta\}. \quad (6.17)$$

Evidentemente, X no es más que la bola cerrada en $(C(I_\delta; \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$, de centro la función $\varphi_0 \equiv y_0$, y radio b_0 . En consecuencia, X es un subconjunto cerrado no vacío de $(C(I_\delta; \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$, y por tanto (X, d) , con d definida por

$$d(\varphi, \psi) = \max_{x \in I_\delta} |\varphi(x) - \psi(x)|, \quad \forall \varphi, \psi \in X,$$

es un espacio métrico completo.

Nosotros ya hemos visto en el Tema 2 que φ es solución del problema (PC) en I_δ si y sólo si satisface la formulación integral, es decir, es solución del problema

$$(j) \quad \varphi \in C(I_\delta; \mathbb{R}^N),$$

$$(jj) \quad (x, \varphi(x)) \in \Omega, \text{ para todo } x \in I_\delta,$$

$$(jjj) \quad \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds, \quad \forall x \in I_\delta, \text{ donde la integral está efectuada componente a componente.}$$

Ahora bien, por la elección de δ , si φ satisface (j), (jj) y (jjj), entonces φ satisface

$$|\varphi(x) - y_0| \leq b_0, \quad \forall x \in I_\delta,$$

ya que, en caso contrario, como $|\varphi(x_0) - y_0| = 0 < b_0$, por continuidad de la función $|\varphi(x) - y_0|$, existiría un punto $\hat{x} \in I_\delta$, con $\hat{x} \neq x_0$, tal que

$$|\varphi(\hat{x}) - y_0| = b_0, \quad \text{y} \quad |\varphi(x) - y_0| < b_0,$$

para todo x en el intervalo abierto de extremos x_0 y \hat{x} . Entonces, por (jjj), se tendría

$$b_0 = |\varphi(\hat{x}) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{\hat{x}} f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq M|\hat{x} - x_0| \leq M\delta < b_0,$$

lo cual es un absurdo.

En consecuencia, resulta ahora evidente que φ es solución del problema (PC) en el intervalo I_δ , si y sólo si φ pertenece a X y satisface (jjj).

Denotemos, para cada función $\varphi \in X$, por $T\varphi$ a la función definida por

$$(T\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds, \quad \forall x \in I_\delta.$$

Es inmediato que $T\varphi \in C(I_\delta; \mathbb{R}^N)$. Además, para todo $x \in I_\delta$, se tiene

$$|(T\varphi)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq M|x - x_0| \leq M\delta < b_0,$$

y en consecuencia, $T\varphi$ pertenece a X . Es decir, $T : X \rightarrow X$.

Está claro de todas las consideraciones precedentes, que φ es solución del problema (PC) en el intervalo I_δ , si y sólo si φ es un punto fijo de la aplicación T . En consecuencia, para terminar con la demostración del teorema, basta con comprobar que T es contractiva. Para ello, sean φ y ψ dos elementos de X , y $x \in I_\delta$. Entonces

$$\begin{aligned} |(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x |\varphi(s) - \psi(s)| ds \right| \leq L|x - x_0|d(\varphi, \psi), \end{aligned}$$

y por tanto,

$$d(T\varphi, T\psi) = \max_{x \in I_\delta} |(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)| \leq L\delta d(\varphi, \psi),$$

siendo $L\delta < 1$ por (6.16). ■

Observación 6.2 Consideremos dada una función $f : D \subset \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Se denomina *abierto de existencia y unicidad para la EDO* $y' = f(x, y)$, a cualquier abierto $\Omega \subset D$ no vacío, tal que $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega)$, y se denomina *abierto maximal de existencia y unicidad para la citada EDO* a la unión de todos los abiertos de existencia y unicidad de la misma. El abierto maximal de existencia y unicidad para $y' = f(x, y)$, es por tanto el mayor abierto de \mathbb{R}^{N+1} donde, para cualquier punto (x_0, y_0) de dicho abierto, se puede aplicar el Teorema de Picard al correspondiente Problema de Cauchy para la citada EDO.

De la misma manera, se denomina *dominio de existencia y unicidad para la EDO* $y' = f(x, y)$, a cualquier abierto conexo $\Omega \subset D$ no vacío, tal que $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega)$, y se denomina *dominio maximal de existencia y unicidad para la citada EDO* a cualquier dominio de existencia y unicidad de la citada ecuación tal que no exista otro dominio de existencia y unicidad de la misma que lo contenga estrictamente.

Así, por ejemplo, si consideramos la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} y, & \text{si } y \geq 1, \\ x^3, & \text{si } y < 1, y \geq x^2, \\ xy, & \text{si } y < 1, y < x^2, x \geq 0, \\ 0, & \text{si } y < 1, y < x^2, x < 0, \end{cases}$$

es sencillo comprobar que los conjuntos Ω_1 y Ω_2 dados por

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 1\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y < 1\} \setminus \{(x, x^2); x \in [-1, 0]\},$$

son los correspondientes dominios maximales de existencia y unicidad, siendo $\Omega_1 \cup \Omega_2$, el abierto maximal de existencia y unicidad para la EDO $y' = f(x, y)$.

Observación 6.3 Si $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un conjunto abierto, pero $f \notin \text{Lip}_{\text{loc}}(y, \Omega)$, es posible todavía demostrar, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$ dado, la existencia de un $\delta > 0$ tal que existe solución en I_δ del correspondiente Problema de Cauchy (esta afirmación, conocida como Teorema de existencia de Peano, será demostrada en la asignatura Ampliación de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, ver [2]). No obstante, si f no es localmente lipschitziana, en general no está garantizada la unicidad de solución del (PC) en I_δ .

Así, por ejemplo, si planteamos en $\Omega = \mathbb{R}^2$ el problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = 3y^{2/3}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

es sencillo comprobar que, fijado $\delta > 0$, si consideramos para cada par α, β satisfaciendo

$$-\delta \leq \alpha \leq 0 \leq \beta \leq \delta,$$

la función $\varphi_{\alpha\beta}$ definida por

$$\varphi_{\alpha\beta} = \begin{cases} (x - \alpha)^3, & \text{si } x \in [-\delta, \alpha), \\ 0, & \text{si } x \in [\alpha, \beta], \\ (x - \beta)^3, & \text{si } x \in (\beta, \delta], \end{cases}$$

todas las funciones $\varphi_{\alpha\beta}$ son soluciones de (PC) en $I_\delta = [-\delta, \delta]$.

7 El teorema de Picard para un Problema de Cauchy para una EDO de orden n en forma normal.

Supongamos dado un entero $n \geq 2$, un conjunto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, cuyos puntos denotaremos por $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, y una función $g : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$.

Consideremos la EDO de orden n en forma explícita o normal

$$y^{(n)} = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (7.18)$$

siendo g una función dada, definida en un conjunto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con valores en \mathbb{R} .

Recordemos que una solución de (7.18) es cualquier función $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío, satisfaciendo:

- (i) Existe la derivada n -ésima $\varphi^{(n)}(x)$ en todo punto $x \in I$, donde si x es un extremo de I , $\varphi^{(n)}(x)$ denota a la correspondiente derivada lateral,
- (ii) $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in \mathcal{O}$, para todo $x \in I$,
- (iii) $\varphi^{(n)}(x) = g(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$, para todo $x \in I$,

y se dice también en tal caso que la pareja (I, φ) es una solución local de (7.18), o que φ es una solución de (7.18) en el intervalo I .

Definición 7.1 *Denominaremos Problema de Cauchy o de valores iniciales para la EDO (7.18) al problema consistente en, fijado un punto $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ perteneciente a \mathcal{O} , hallar una solución local (I, φ) de (7.18) tal que $x_0 \in I$ y*

$$(\varphi(x_0), \varphi'(x_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0)) = (y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}).$$

En tal caso, se dice que (I, φ) es una solución local del Problema de Cauchy

$$(PC)_n \begin{cases} y^{(n)} = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Como vamos a ver a continuación, toda EDO de orden n en forma normal puede ser escrita como un SDO de primer orden y dimensión n en forma explícita, de tal manera que los resultados que hemos obtenido para los SDO, admiten una traducción inmediata al caso de las EDO de orden n .

En efecto, consideremos fijada la EDO (7.18), e introduzcamos las nuevas variables y_i , para $1 \leq i \leq n$, definidas por

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}. \quad (7.19)$$

Asociado a la EDO (7.18), consideremos el SDO

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = y_3, \\ \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots, \\ y'_{n-1} = y_n, \\ y'_n = g(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \quad (7.20)$$

Es inmediato comprobar que, con el cambio (7.19), la EDO (7.18) y el SDO (7.20) son equivalentes, y más concretamente que (I, φ) es solución local de (7.18) si y sólo si $(I, \varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(n-1)})$ es solución local de (7.20).

Resulta ahora sencillo extender el teorema de Picard al caso de un Problema de Cauchy para una EDO de orden n en forma normal.

Diremos que g es globalmente lipschitziana respecto de $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$, en \mathcal{O} , si existe una constante $L_g > 0$ tal que

$$|g(x, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)}) - g(x, y_2, y'_2, \dots, y_2^{(n-1)})| \leq L_g \sum_{k=0}^{n-1} |y_1^{(k)} - y_2^{(k)}|,$$

para todo $(x, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)}), (x, y_2, y'_2, \dots, y_2^{(n-1)}) \in \mathcal{O}$, donde en el sumatorio hemos usado la notación $y_j = y_j^{(0)}$, $y'_j = y_j^{(1)}$, $y''_j = y_j^{(2)}$.

Denotaremos $Lip(y, y', \dots, y^{(n-1)}, \mathcal{O}; \mathbb{R})$, al conjunto de todas las funciones $g : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, que sean globalmente lipschitzianas respecto de $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$, en \mathcal{O} . Es inmediato comprobar que, con la suma de funciones y producto de un número real por una función usuales, $Lip(y, y', \dots, y^{(n-1)}, \mathcal{O}; \mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

De manera análoga a la Definición 5.3, si \mathcal{O} es abierto, diremos que la función $g : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente lipschitziana respecto de $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$, en \mathcal{O} , si para cada punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}) \in \mathcal{O}$ existe una bola abierta de centro dicho punto, contenida en \mathcal{O} , y tal que g es globalmente lipschitziana respecto de la variable $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ en dicha bola.

Denotaremos $Lip_{loc}(y, y', \dots, y^{(n-1)}, \mathcal{O}; \mathbb{R})$, al conjunto de todas las funciones $g : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, que sean localmente lipschitzianas respecto de $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$, en \mathcal{O} . Es también sencillo comprobar que, con la suma de funciones y producto de un número real por una función usuales, $Lip_{loc}(y, y', \dots, y^{(n-1)}, \mathcal{O}; \mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

Teorema 7.2 (Teorema de Picard para una EDO de orden n) Sean $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto, y $g : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que

$$g \in C(\mathcal{O}) \cap Lip_{loc}(y, y', \dots, y^{(n-1)}, \mathcal{O}; \mathbb{R}).$$

Entonces, para cada punto $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in \mathcal{O}$ dado, existe un $\delta > 0$, tal que en el intervalo $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ existe una y sólo una solución del Problema de Cauchy $(PC)_n$.

Demostración.- Basta introducir las nuevas variables y_i , para $1 \leq i \leq n$, definidas por (7.19), y asociado al problema $(PC)_n$, considerar el Problema de Cauchy para un SDO de primer orden

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = y_3, \\ \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots, \\ y'_{n-1} = y_n, \\ y'_n = g(x, y_1, \dots, y_n), \\ y_1(x_0) = y_0, y_2(x_0) = y'_0, \dots, y_n(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \quad (7.21)$$

Es inmediato comprobar que, con el cambio (7.19), el problema $(PC)_n$ y el problema (7.21) son equivalentes, y más concretamente que φ es solución de $(PC)_n$ en I_δ si y sólo si $(\varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(n-1)})$ es solución de (7.21).

Basta ahora tener en cuenta que, como se comprueba fácilmente, el problema (7.21) satisface las condiciones del Teorema 6.1. ■

Referencias

- [1] H. Amann: *Ordinary Differential Equations: an introduction to Nonlinear Analysis*, Walter de Gruyter, New York, 1990.
- [2] S. Novo, R. Obaya & J. Rojo: *Ecuaciones y sistemas diferenciales*, MacGraw & Hill, Madrid, 1995.
- [3] N. Rouché & J. Mawhin: *Equations Différentielles Ordinaires*, Tomo 1, Masson, Paris, 1973.