Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

SEMANA 5- SESIÓN 2: (Resúmen_TL-DEF._PROPIEDADES) RESOLUCIÓN DE PVI CON EDOS

irlamn@uni.edu.pe

1. Definición
2. Propiedades de la Transformada de Laplace
3. La función Delta de Dirac
4. Aplicación a las Ecuaciones Diferenciales

Definición

Se llama **Transformada de Laplace** de la función $f(t)$, $t \geq 0$, a la función

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \,,$$

siempre y cuando la función esté definida.

Ejemplo. Sea $f(t) = e^{at}$, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^\infty$$

Por tanto,

Por tanto,

$$\text{si } a > s \;\Rightarrow\; \frac{1}{a-s}\left(e^{\infty} - e^{0}\right) = \infty \;\;\Rightarrow\;\; \nexists\, \mathscr{L}\{e^{at}\}$$

$$\text{si } a < s \Rightarrow \frac{1}{a-s}\left(e^{-\infty} - e^{0}\right) = \frac{-1}{a-s} = \frac{1}{s-a}\,.$$

Es decir,

$$\mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad / \quad s > a\,.$$

Definición

Sea $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$, llamaremos **Transformada Inversa de Laplace**, $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.

Observación

La transformada de Laplace es una herramienta que permite resolver problemas de valor inicial de manera más sencilla. La idea es reemplazar un problema de valor inicial en el dominio del tiempo t por una ecuación algebraica en el dominio de s (la frecuencia en análisis de circuitos).

Algunas transformadas:

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$	$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	k	$\frac{k}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$		

PROPIEDADES

Sean $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces,

Linealidad

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathscr{L}\{f(t)\} + \beta \mathscr{L}\{g(t)\}$$
$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Primera Traslación

$$\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$
$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$$

Segunda Traslación

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases} \Rightarrow \mathscr{L}\{g(t)\} = e^{-as}F(s)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

Cambio de escala

$$\mathscr{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)$$

Transformada de las derivadas

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\vdots$$

$$\mathscr{L}\{f^{(n}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \ldots - sf^{(n-2}(0) - f^{(n-1}(0)$$

$$\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n}(s)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F^{(n}(s)\} = (-1)^n t^n f(t)$$

Transformada de las integrales

$\mathscr{L}\{\int_0^t f(x)\,dx\} = \frac{F(s)}{s}$

$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{F(s)}{s}\} = \int_0^t f(x)\,dx$

$\mathscr{L}\{\frac{f(t)}{t}\} = \int_s^\infty F(x)\,dx,$ siempre que $\exists\, \lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$

$\mathscr{L}^{-1}\{\int_s^\infty F(x)\,dx\} = \frac{f(t)}{t}$

CONVOLUCION

Sean $f, g \in \mathcal{E}$ y definamos $f(t) = g(t) = 0$ para todo $t < 0$. Se define la convolución de f y g como la función

$$(f * g)(t) = \int_0^{+\infty} f(t-s)g(s)ds = \int_0^t f(t-s)g(s)ds.$$

Puede verse con el cambio de variable $y = t - s$ que $f * g = g * f$. El principal interés de la TL

Teorema de Convolución

$$\mathscr{L}\{\int_0^t f(x)g(t-x)\,dx\} = F(s)G(s)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(x)g(t-x)\,dx$$

EJEMPLOS

Ejemplo. Calcular $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\}$

En primer lugar, se hace la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3} \quad \Rightarrow \begin{array}{l} A+B=3 \\ -3A+B=7 \end{array} \Rightarrow A=-1, \quad B=4,$$

Aplicando las propiedades de linealidad:

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\} = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s-3}\} =$$

$$= -\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} + 4\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s-3}\} = -e^{-t} + 4e^{3t}$$

Ejemplo. Calcular $\mathscr{L}\{e^{3t}t^2\}$

Puede plantearse de dos formas:

- Partiendo de que $\mathscr{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3} = F(s)$, utilizando la primera traslación se obtiene
$$\mathscr{L}\{e^{3t}t^2\} = F(s-3) \;=\; \frac{2}{(s-3)^3}\,.$$
- Por otra parte, partiendo de $\mathscr{L}\{e^{3t}\} = \frac{1}{s-3} = F(s)$, y teniendo en cuenta que
$$F'(s) = \frac{-1}{(s-3)^2} \quad \text{y} \quad F''(s) = \frac{2}{(s-3)^3}\,,$$

se concluye que

$$\mathscr{L}\{e^{3t}t^2\} = (-1)^2 F''(s) = \frac{2}{(s-3)^3}\ .$$

Ejemplo. Calcular $\mathscr{L}\{\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\}$

Como $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t)}{1} = 1$, se tiene que

$$\mathscr{L}\{\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\} = \int_s^\infty F(x)\,dx, \quad \text{con } F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{\operatorname{sen}(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$$

Entonces,

$$\mathscr{L}\{\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\} = \int_s^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \arctan(x)\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan(s) = \arctan\left(\frac{1}{s}\right)$$

Ejemplo. Hallar $\mathscr{L}\{h(t)\}$, siendo $h(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(2x)\,\cos(t-x)\,dx$

$$\mathscr{L}\{h(t)\} = \mathscr{L}\{\operatorname{sen}(2t)\}\mathscr{L}\{\cos(t)\} = \frac{2}{s^2+4}\,\frac{s}{s^2+1} = \frac{2s}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

Delta de Dirac

Se llama **Delta de Dirac**, $\delta(t)$, al límite $\lim\limits_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(t)$, donde

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\epsilon}, & \text{si } 0 \leq t \leq \epsilon \\ \\ 0 & \text{si } t > \epsilon \end{cases}$$

En algunos textos se conoce como "función" **impulso** (señal de amplitud infinita y duración cero), pero no es una función sino una distribución que verifica:

$$\int_0^\infty \delta(t-a)f(t)dt = f(a) \quad \text{si } f \text{ es continua y } a \geq 0$$

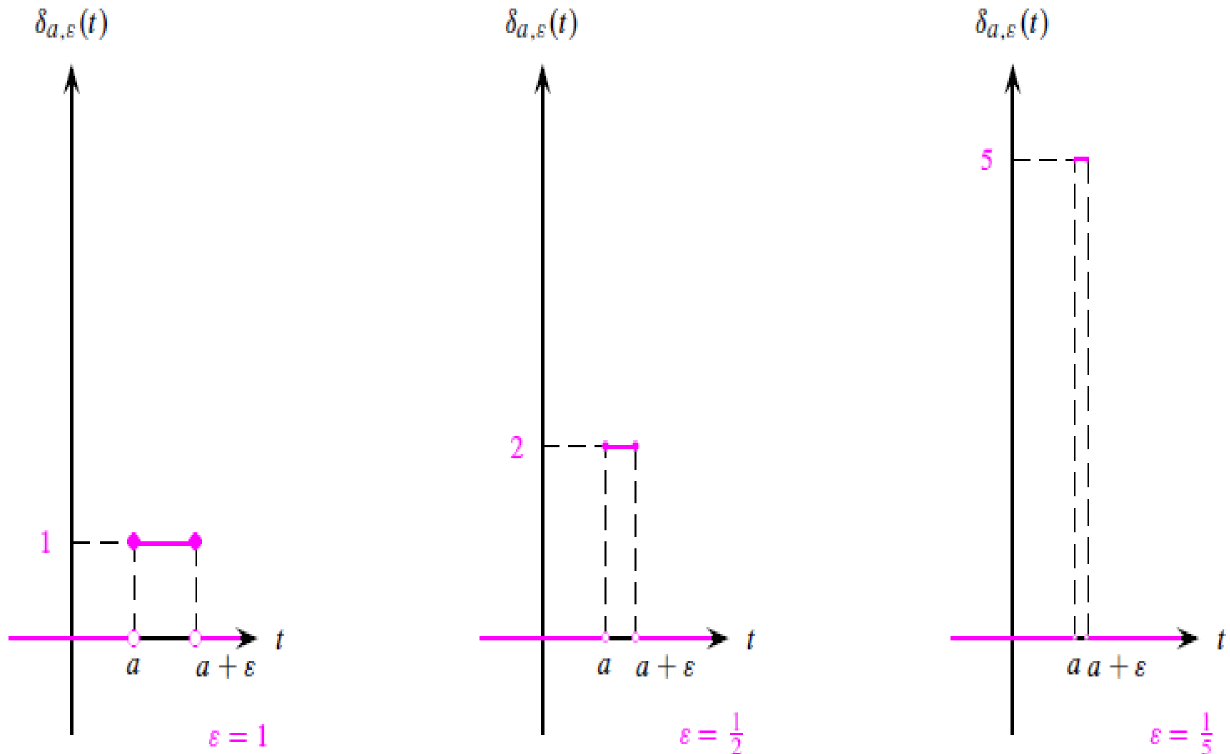
Utilizando esa propiedad, se prueba que la transformada de Laplace de $\delta(t)$ es:

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$$

Además, la "primitiva" de la Delta de Dirac es la función escalón.

DELTA DE DIRAC EN a

Así, $f(t) = \delta_{a,\varepsilon}(t)$ tiene un impulso unitario, cualquiera que sea el número $\varepsilon > 0$.
Observemos el comportamiento de $\delta_{a,\varepsilon}(t)$ cuando $\varepsilon \to 0$, por medio de las siguientes gráficas:



$$\delta(t-a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_{a,\varepsilon}(t).$$

$$\int_0^{\infty} \delta(t-a)dt = \int_0^{\infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_{a,\varepsilon}(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{a+\varepsilon} \delta_{a,\varepsilon}(t)dt = 1.$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } t = a; \\ 0, & \text{si } t \neq a\,. \end{cases}$$

Como $\delta(t-a)$ no es una función, soslayaremos el problema de su definición yendo en todo caso a la consideración de su efecto operativo. El siguiente cálculo motiva el significado que le asignaremos. Si $h(t)$ es una función continua en un intervalo que contenga a $[a, a+\varepsilon]$, entonces el teorema del Valor Medio para integrales implica que

$$\int_a^{a+\varepsilon} h(t)dt = \varepsilon h(t_0),$$

para algún punto t_0 en el intervalo $[a, a+\varepsilon]$. De esta manera:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\infty} h(t)\delta_{a,\varepsilon}(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{a+\varepsilon} h(t)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)dt = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\varepsilon h(t_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} h(t_0) = h(a).$$

En la última igualdad hemos utilizado la continuidad de h.

$$\int_0^\infty h(t)\delta(t-a)\,dt = h(a).$$

con $h(t) = e^{-st}$:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t-a)\,dt = e^{-as}.$$

Aplicación a la resolución de EDOs

Sea una EDO de segundo orden lineal con coeficientes constantes

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(t), \quad a_0 \neq 0$$

Aplicando la Transformada de Laplace a ambos lados, se convierte la EDO en una ecuación algebraica, cuya solución viene dada por $\mathscr{L}\{y(t)\} = y_s$, de forma que la solución de la ecuación diferencial será $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{y_s\}$

Ejemplo. Halla la solución del problema de valor inicial:

$$y'' + y = t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$$

$$\mathscr{L}\{y''+y\} = \mathscr{L}\{t\} \Rightarrow \mathscr{L}\{y''\}+\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{t\} \Rightarrow s^2 y_s - sy(0) - y'(0) + y_s = \frac{1}{s^2}$$

$$s^2 y_s - s + 2 + y_s = \frac{1}{s^2} \Rightarrow y_s(s^2+1) = \frac{1}{s^2} + (s-2) = \frac{1+s^2(s-2)}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$\text{con } A = 1,\ B = 1,\ C = -3 \ \Rightarrow \ y_s = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1} \ \Rightarrow$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2}\} + \mathscr{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} - 3\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} = t + \cos(t) - 3\,\mathrm{sen}(t)$$

Ejemplo. Halla la solución del problema de valor inicial:

$$y'' + y = \cos(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$\mathscr{L}\{y''\} + \mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{\cos(t)\} \Rightarrow \; s^2 y_s - sy(0) - y'(0) + y_s = \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow$$

$$y_s(s^2+1) - 1 = \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow y_s = \frac{s^2+s+1}{(s^2+1)^2} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{(s^2+1)^2}$$

con $A = 0,\ B = 1,\ C = 1,\ D = 0 \Rightarrow y_s = \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{s}{(s^2+1)^2} \Rightarrow$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} + \mathscr{L}^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\} = \operatorname{sen}(t) + \frac{t}{2}\operatorname{sen}(t)$$

Ejemplo. Halla la solución del problema de valor inicial:

$$y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$\mathscr{L}\{y''\} - 4\mathscr{L}\{y'\} + 4\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{t^3 e^{2t}\} \Rightarrow$$

$$s^2 y_s - sy(0) - y'(0) - 4sy_s + 4y(0) + 4y_s = \frac{3!}{(s-2)^4} \Rightarrow$$

$$y_s = \frac{6}{(s-2)^4(s^2-4s+4)} = \frac{6}{(s-2)^6} \Rightarrow$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{6}{(s-2)^6}\} = \frac{1}{20} t^5 e^{2t}$$

Observaciones:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

En nuestra notación, como nos restringimos a funciones definidas en el intervalo $[0, \infty)$, se corresponde con la función constante 1 y, por tanto, no aparece escrita explicitamente. Por ejemplo, para $t \geq 0$, $\; k\,u(t) \equiv k{,}1 \equiv k$.

Puede probarse que la “derivada” de la función escalón $u(t)$ es la Delta de Dirac $\delta(t)$.

En cuanto al estudio de las fracciones simples cuando intervienen raíces complejas conjugadas, es decir, de la forma:

$$F(s) = \frac{As+B}{(s-a)^2+b^2} = \frac{As+B}{(s-(a+bj))(s-(a-bj))}$$

$$= \frac{\alpha}{s-(a+bj)} + \frac{\beta}{s-(a-bj)}$$

$$\alpha = \frac{A}{2} - \frac{Aa+B}{2b}j, \qquad \beta = \frac{A}{2} + \frac{Aa+B}{2b}j = \bar{\alpha}$$

Si denotamos $\gamma = \dfrac{A}{2}$ y $\eta = -\dfrac{Aa+B}{2b}$, es decir, $\alpha = \gamma + \eta j$, se tiene que la transformada inversa de Laplace del término es:

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = Ae^{at}\cos(bt) + \frac{Aa+B}{b}e^{at}\operatorname{sen}(bt) = 2e^{at}(\gamma\cos(bt) - \eta\operatorname{sen}(bt))$$

Si tenemos en cuenta que $|\alpha| = \sqrt{\gamma^2 + \eta^2}$, y elegimos θ tal que:

$$\cos(\theta) = \frac{\gamma}{|\alpha|}, \qquad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{\eta}{|\alpha|}$$

la transformada inversa anterior puede escribirse también como:

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = 2|\alpha|e^{at}\cos(bt + \theta)$$

EJEMPLO :

Una masa unida a un resorte se libera desde el reposo a 2 m por debajo de la posición de equilibrio y comienza a vibrar. Después de 5 s, la masa recibe un golpe que suministra un impulso (momento lineal) sobre la masa de 8 N dirigido hacia abajo. Hallar la posición de la masa en cualquier instante.

▼ El sistema queda descrito por el siguiente PVI:

$$mx''(t) + kx(t) = 8\delta(t-5), \quad \text{con} \quad x(0) = 2 \;\&\; x'(0) = 0.$$

Dividiendo entre m:

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{8}{m}\delta(t-5), \quad \text{con} \quad x(0) = 2 \;\&\; x'(0) = 0.$$

consideramos $w^2 = \dfrac{k}{m}$. Si aplicamos TL en ambos

$$x''(t) + w^2 x(t) = \frac{8}{m}\delta(t-5),$$

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + w^2X(s) = \frac{8}{m}e^{-5s}.$$

al tener en cuenta las condiciones iniciales, encontramos:

$$(s^2 + w^2)X(s) = 2s + \frac{8}{m}e^{-5s};$$

Se tiene: $$X(s) = \frac{2s + \frac{8}{m}e^{-5s}}{s^2 + w^2} = \frac{2s}{s^2 + w^2} + \frac{8}{m}\frac{e^{-5s}}{s^2 + w^2}.$$

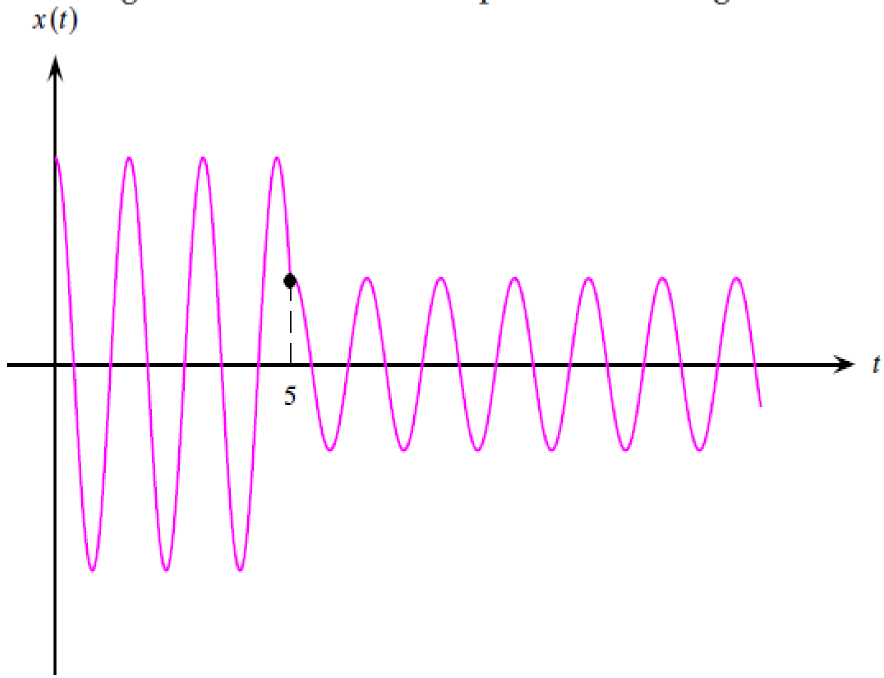
Para obtener $x(t)$ mediante el cálculo de la TL inversa.

Hacemos lo siguiente: $$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2 + w^2}\right\} + \frac{8}{m}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{s^2 + w^2}\right\} =$$

$$= 2\cos wt + \frac{8}{mw}u(t-5)\operatorname{sen}[w(t-5)] =$$

$$= 2\cos wt + \frac{8}{\sqrt{mk}}u(t-5)\operatorname{sen}[w(t-5)].$$

Observemos que, dada la presencia de la función $u(t-5)$, el efecto que tiene el impulso sobre el sistema sólo es detectable para $t \geq 5$. La gráfica de la función de posición es la siguiente:



En la gráfica resulta notoria la perturbación que se imprime al sistema en el tiempo $t = 5$ s por efecto del impulso aplicado. Obsérve que, en ese momento, la masa está debajo de la posición de equilibrio y se va dirigiendo hacia esta posición cuando recibe un golpe justo en la dirección contraria, lo que explica por qué la oscilación se aminora y además por qué se aprecia en ese instante un cambio abrupto en la dirección tangencial sobre la gráfica.

$\square$

EJERCICIOS

1. Halla las Transformadas de Laplace de las siguientes funciones:

$$f(t) = t^2 + 6t - 3$$

$$f(t) = 3e^{-4t} + \frac{1}{2}\cos(5t) + \frac{3}{4}t^3 + 8$$

$$f(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}$$

2. Halla las siguientes Transformadas Inversas de Laplace:

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2 + 6s + 13}\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{6s - 4}{s^2 - 4s + 20}\}$$

3. Usando la Transformada de Laplace, resuelve

$$y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t}\,,\;\; y(0) = 2\,,\;\; y'(0) = 12$$
$$y'' - 6y' + 13y = 2e^{3t}\cos(2t)\,,\;\; y(0) = 1\,,\;\; y'(0) = 1$$
$$y'' - y = 4e^{t} - 2e^{-t}\,,\;\; y(0) = 1\,,\;\; y'(0) = 4$$
$$y'' - 2y' = 1\,,\;\; y(0) = 2\,,\;\; y'(0) = 1$$

4. Sea $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)^4}$. Calcula $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ y deduce $\mathscr{L}^{-1}\{F^{(5}(s)\}$ utilizando propiedades de la transformada de Laplace.