TRANSFORMADA DE FOURIER y SUS PROPIEDADES

irlamn@uni.edu.pe

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(i\omega t)\, d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\, dt$$

TRANSFORMADA DE FOURIER

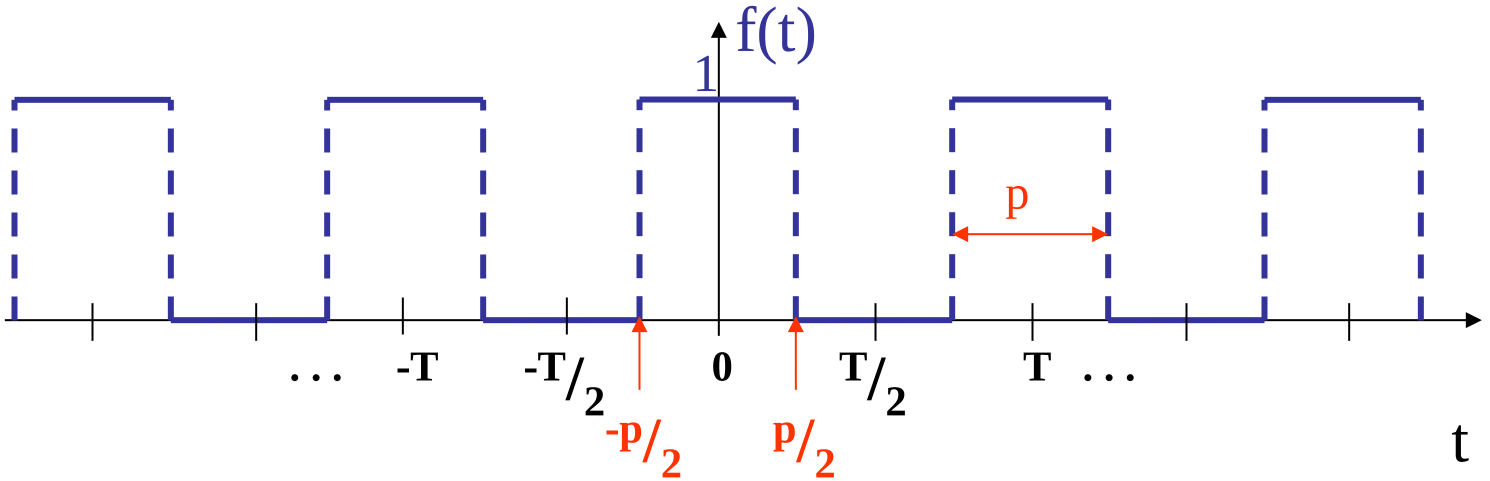
De la Serie de Fourier a la Transformada de Fourier

La serie de Fourier nos permite obtener una representación en el dominio de la frecuencia de *funciones periódicas* f(t).

¿Es posible extender de alguna manera las series de Fourier para obtener una representación en el dominio de la frecuencia de ***funciones no periódicas***?

Consideremos la siguiente función periódica de periodo T:

Tren de pulsos f(t) de amplitud 1, ancho p y periodo T:



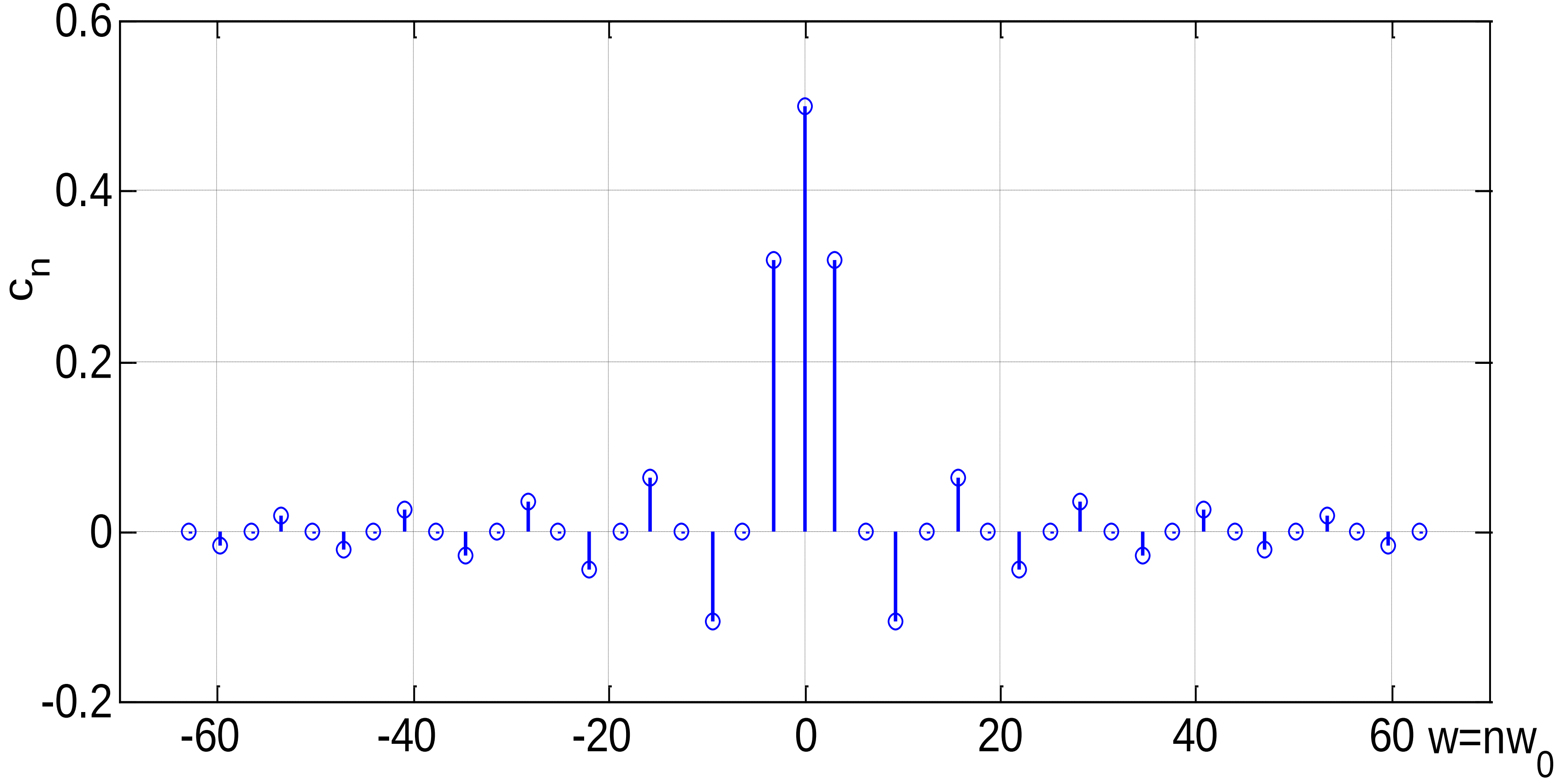
$$f(t)=\begin{cases} 0 & \frac{-T}{2}<t<\frac{-p}{2} \\ 1 & \frac{-p}{2}<t<\frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2}<t<\frac{T}{2} \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie compleja de Fourier en este caso resultan puramente reales:

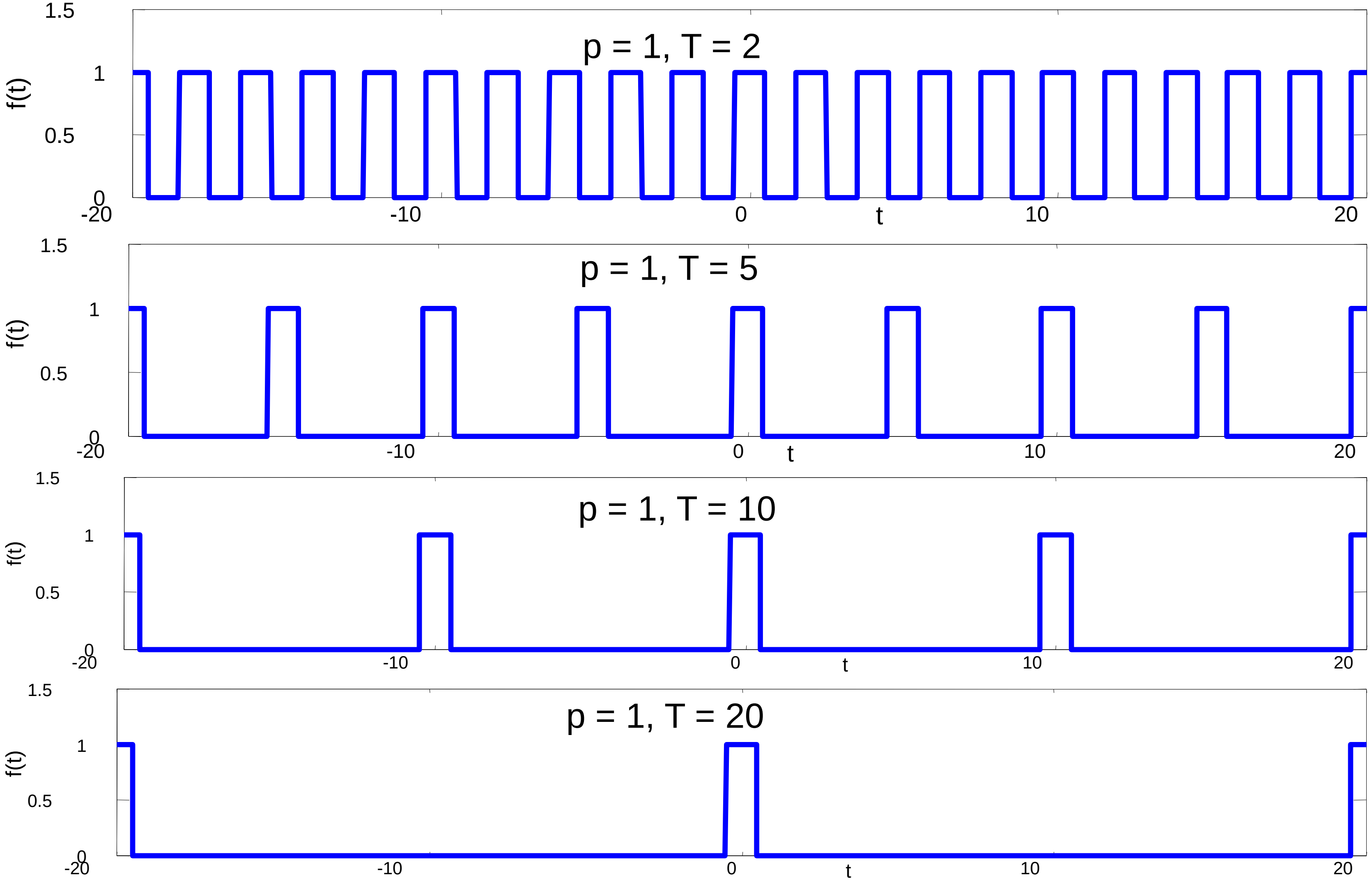
$$c_n = \left(\frac{p}{T}\right) \frac{sen(n\omega_0 \frac{p}{2})}{(n\omega_0 \frac{p}{2})}$$

El espectro de frecuencia correspondiente lo obtenemos (en este caso) graficando c_n contra $\omega = n\omega_0$.

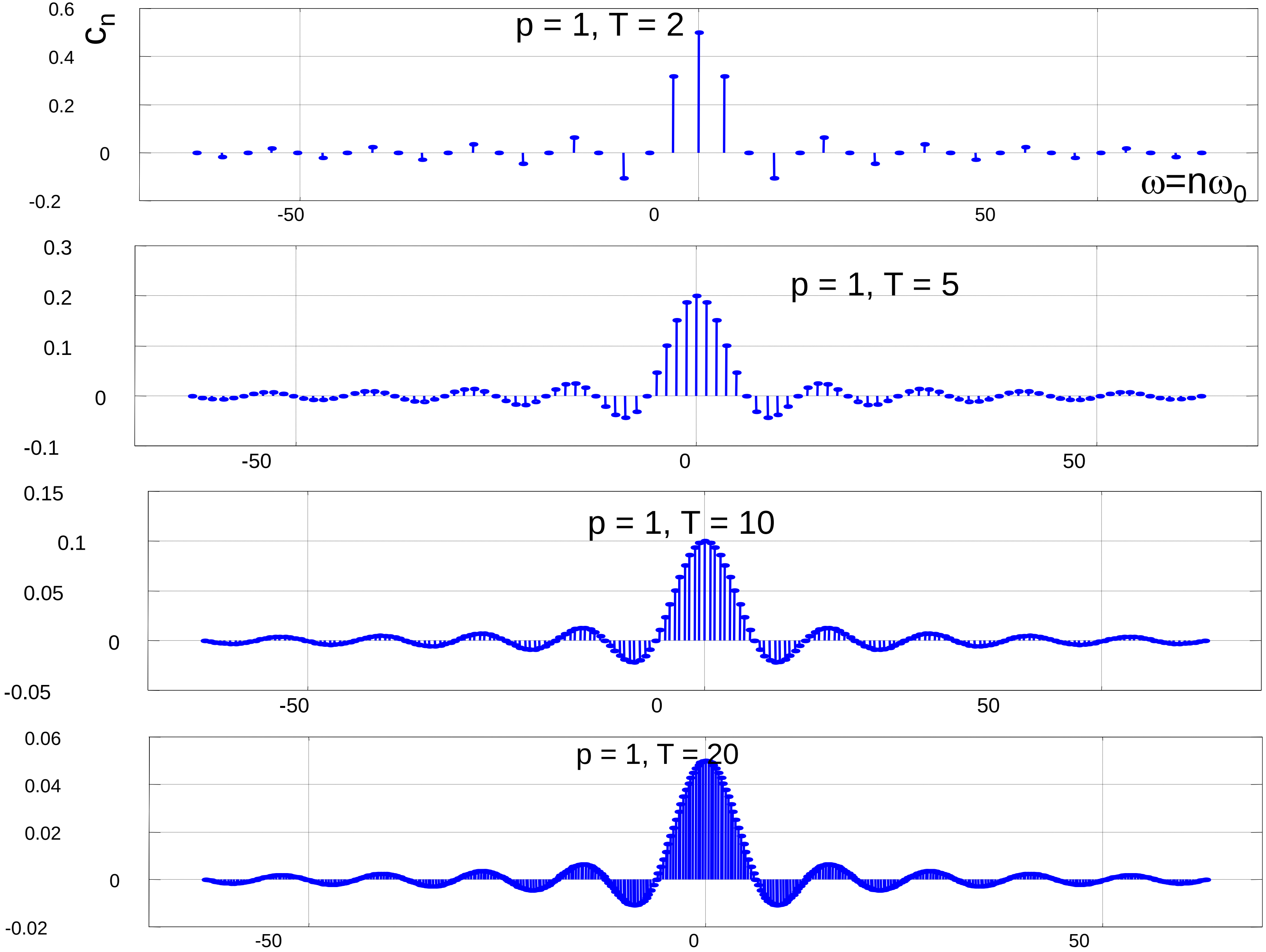
Espectro del tren de pulsos para p = 1, T = 2



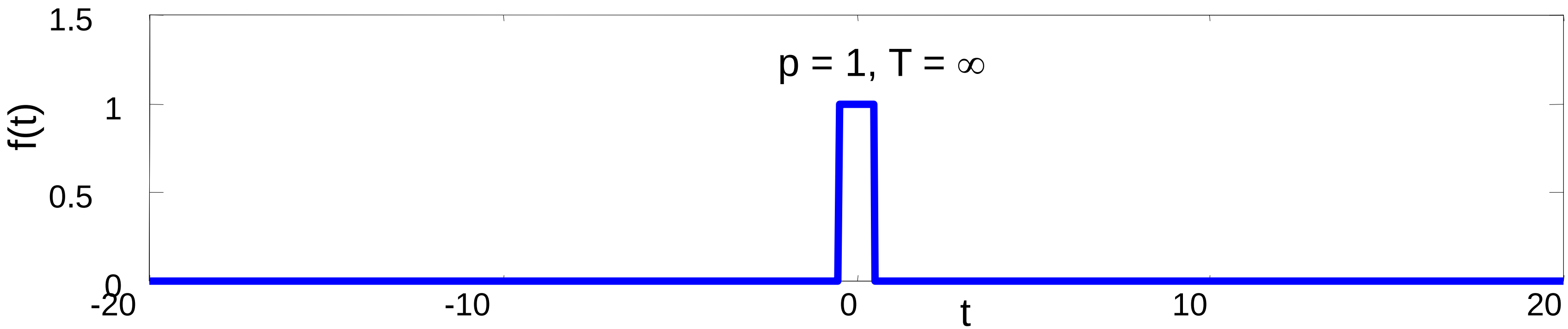
Si el periodo del tren de pulsos aumenta...



...el espectro se "densifica".

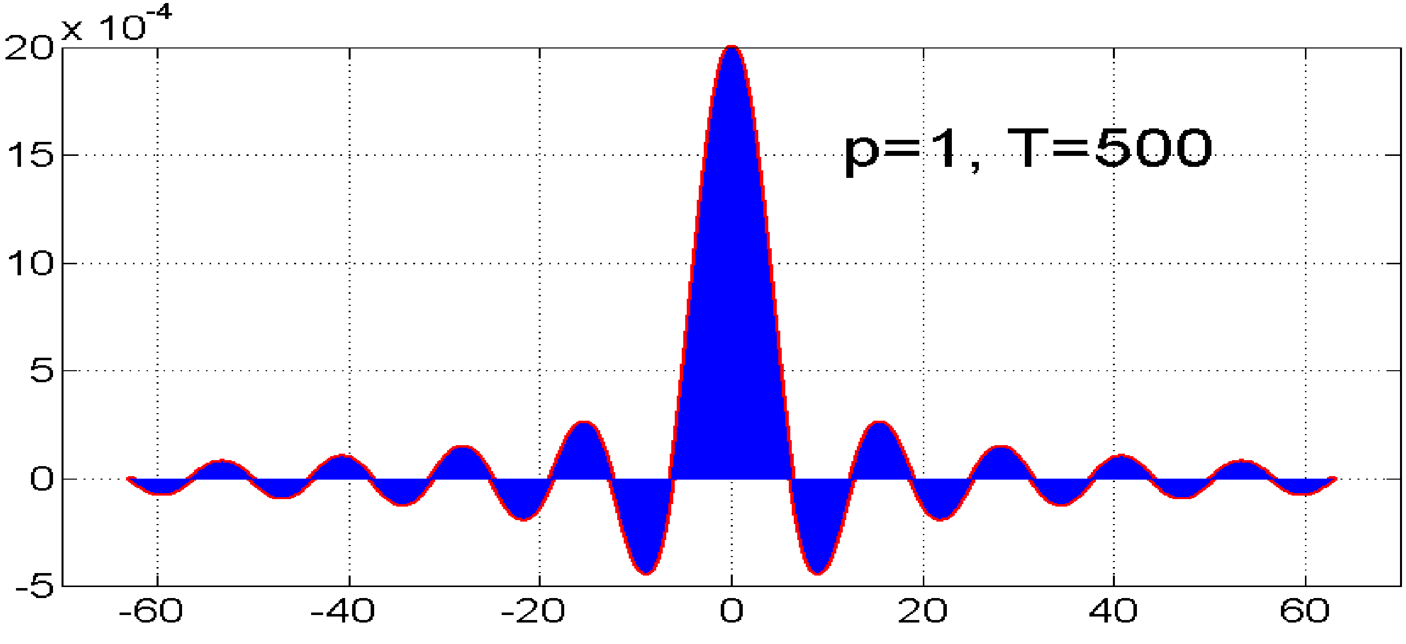


En el límite cuando $T \to \infty$, la función deja de ser periódica:



¿Qué pasa con los coeficientes de la serie de Fourier?

Si se hace T muy grande (T→∞), el espectro se vuelve "*continuo*":



El razonamiento anterior nos lleva a reconsiderar la expresión de una función f(t) ***no periódica*** en el dominio de la frecuencia, no como una suma de armónicos de frecuencia $n\omega_0$, sino como una función continua de la frecuencia ω.

Así, la serie:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

al cambiar la "variable discreta" $n\omega_0$ (cuando $T\to\infty$) por la variable continua ω, se transforma en una ***integral*** de la siguiente manera:

Recordemos: $$c_n = \tfrac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad \text{y} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

La serie de Fourier es:
-T/2< x < T/2

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\tfrac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right] e^{in\omega_0 t}$$

O bien:

$$T = 2\pi / \omega_0$$

$$\omega_0 = 2\pi / T$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\tfrac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right] \omega_0 e^{in\omega_0 t}$$

Cuando T$\to \infty$, n$\omega_0 \to \omega$ y $\omega_0 \to$ dω y el sumatorio se convierte en:

$$f(t) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right]}_{F(\omega)} e^{i\omega t} d\omega$$

La transformada de Fourier

Es decir,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

Identidad de Fourier o antitrans-formada de Fourier

donde:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

Transformada de Fourier

Estas expresiones nos permiten calcular la expresión *F(ω)* (dominio de la frecuencia) a partir de *f(t)* (dominio del tiempo) y viceversa.

La transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t)\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t)\, d\omega$$

En algunos textos, el factor $1/2\pi$ se "reparte" entre la transformada y la anti-transformada para obtener simetría en la expresión, como: $1/\sqrt{(2\pi)}$.

Notación: A la función *F(ω)* se le llama ***transformada de Fourier de f(t)*** y se denota por $\mathscr{F}$ o $\hat{f}$, es decir

$$F[f(t)] = F(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

En forma similar, a la expresión que nos permite obtener f(t) a partir de F(ω) se le llama ***transformada inversa de Fourier*** y se denota por $\mathscr{F}^{-1}$,es decir

$$F^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

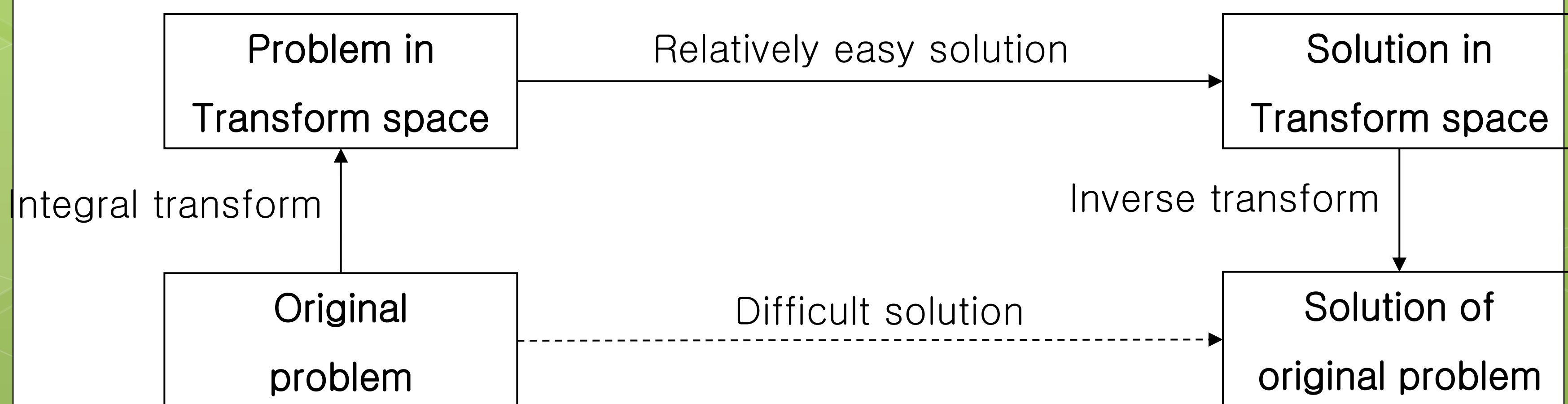
Transformadas integrales

$$\boxed{F(\tau) = \int_a^b K(\tau, t) f(t)\, dt}$$

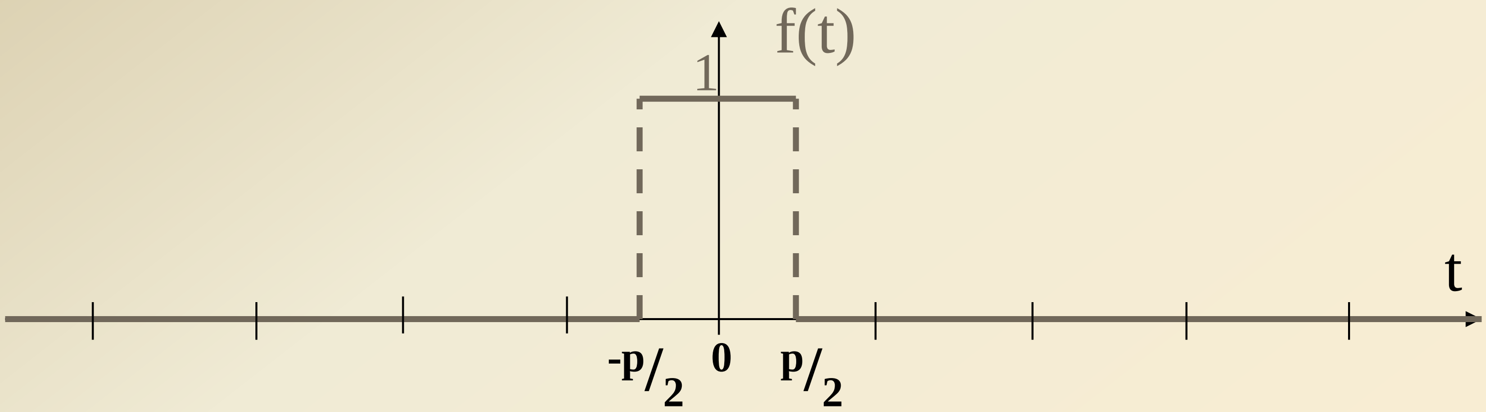
- *K*(τ,*t*): núcleo o kernel.
- Asocia a cada función *f(t)* en el espacio *t*, directo o real, otra función *F*(τ) en el espacio τ o recíproco.
- Ejemplos: de Fourier, Wavelet, transformada Z, de Laplace, de Hilbert, de Radon, etc

Un problema que es difícil de resolver en sus "coordenadas" (espacio t) originales, a menudo, es más sencillo de resolver al transformarlo a espacio τ.

Después, la transformada inversa nos devuelve la solución en el espacio original.



Ejemplo. Calcular $F(\omega)$ para el pulso rectangular $f(t)$ siguiente:



Solución. La expresión en el dominio del tiempo de la función es:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{-p}{2} \\ 1 & \frac{-p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t \end{cases}$$

Integrando:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-p/2}^{p/2} e^{-i\omega t} dt$$

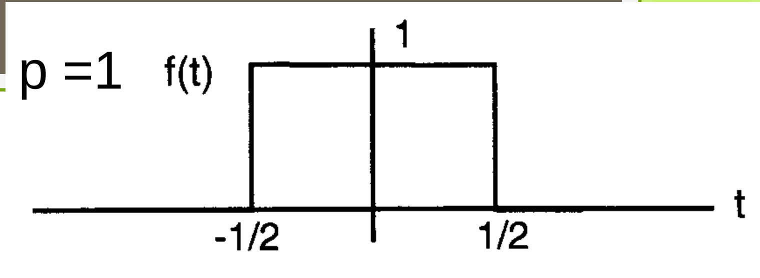
$$= \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-p/2}^{p/2} = \frac{1}{-i\omega} (e^{-i\omega p/2} - e^{i\omega p/2})$$

Usando la fórmula de Euler:

$$sen(\omega p/2) = \frac{e^{i\omega p/2} - e^{-i\omega p/2}}{2i}$$

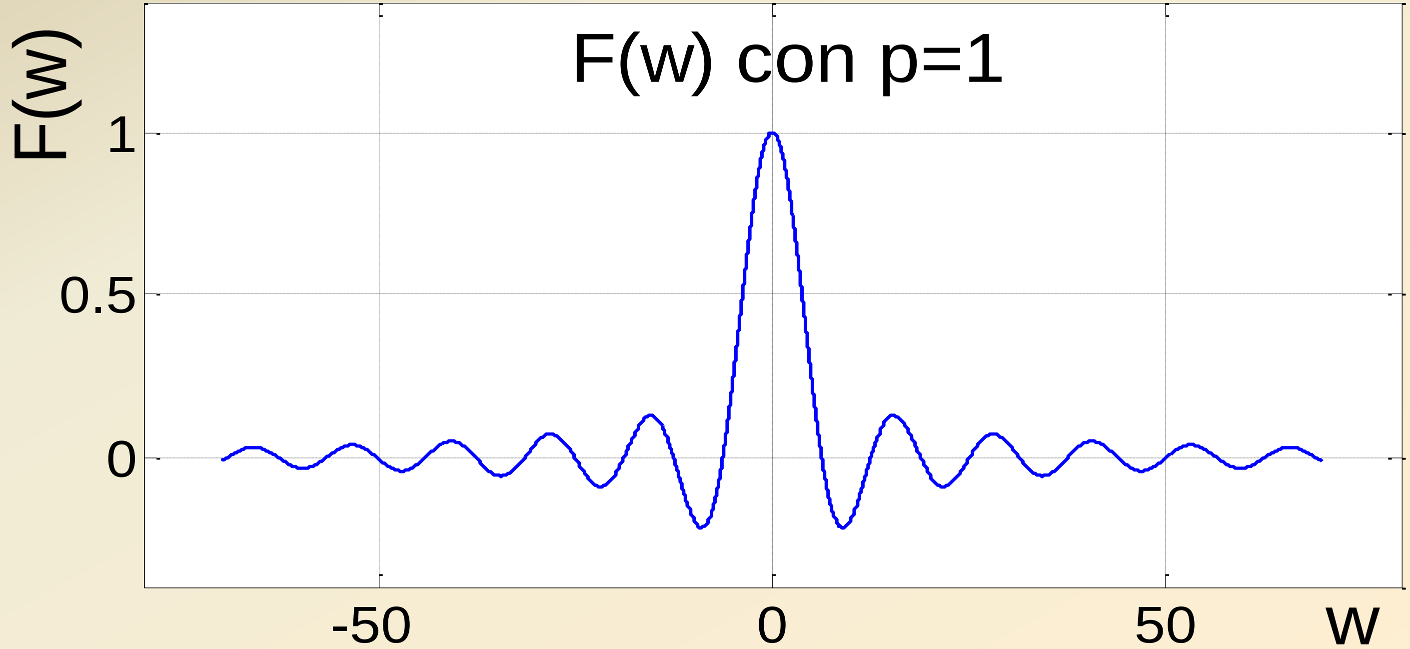
$$F(\omega) = p \frac{sen(\omega p/2)}{\omega p/2} = p \operatorname{sinc}(\omega p/2)$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{-p}{2} \\ 1 & \frac{-p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t \end{cases}$$

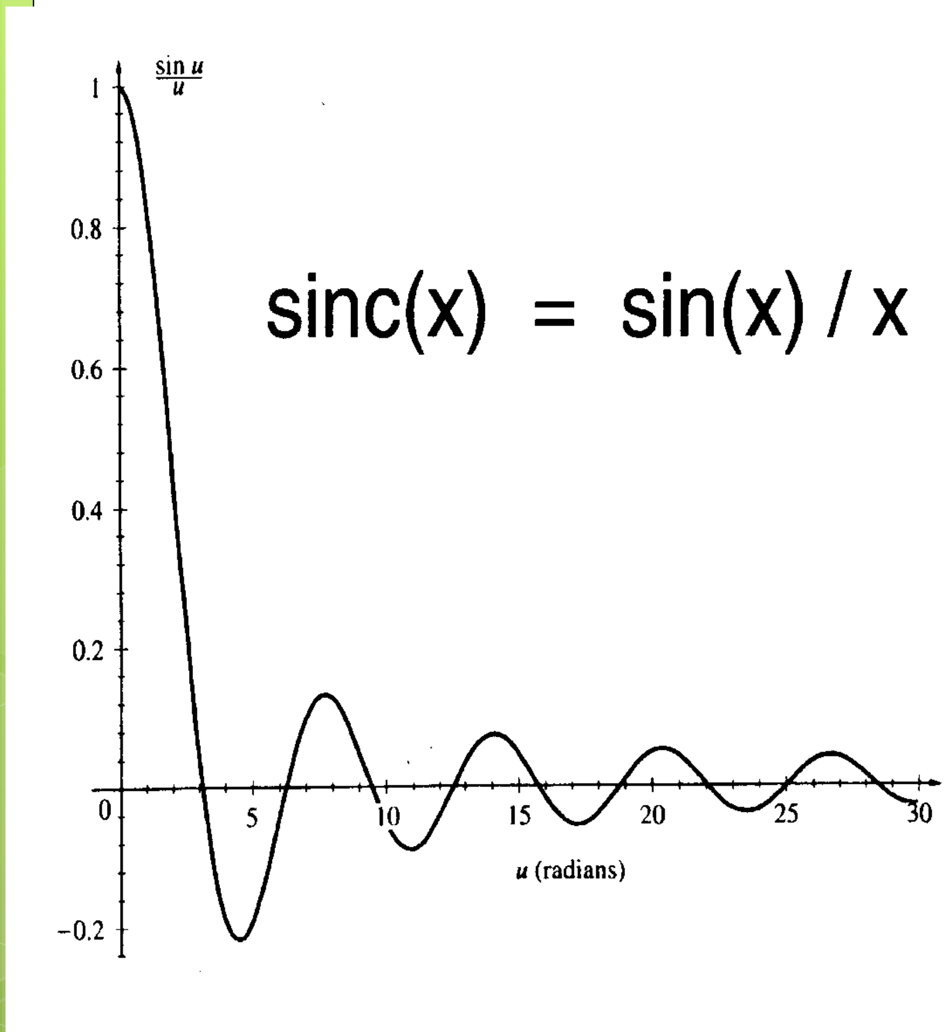


En forma gráfica,
la transformada es:

$$F(\omega) = p\,\mathrm{sinc}(\omega p/2)$$



La función sinc(x)

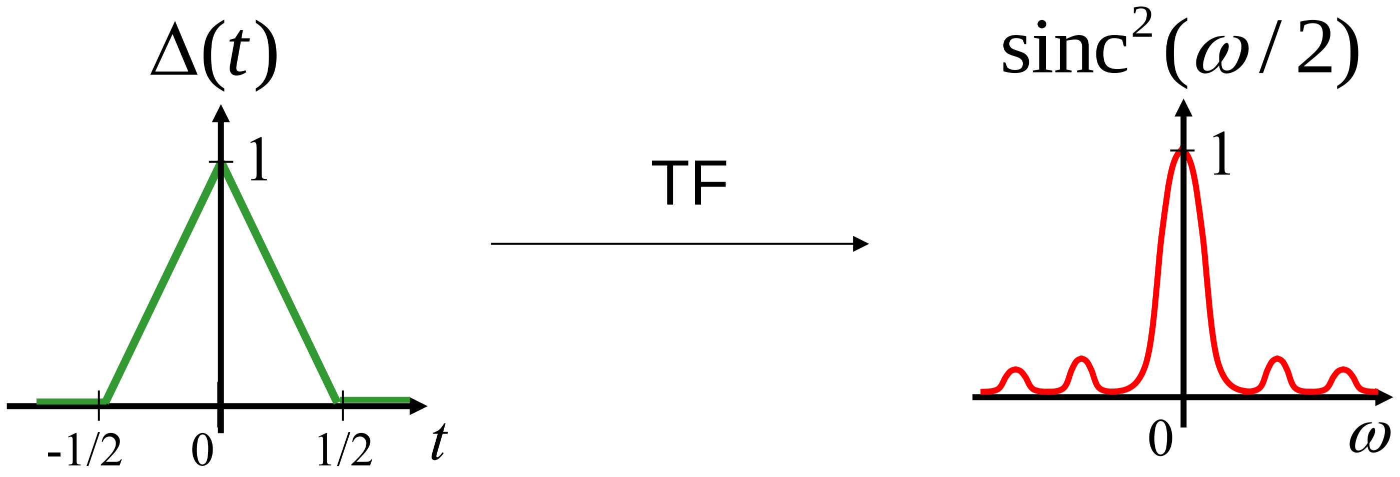


$Sinc(x/2)$ es la transformada de Fourier de una función rectángulo.

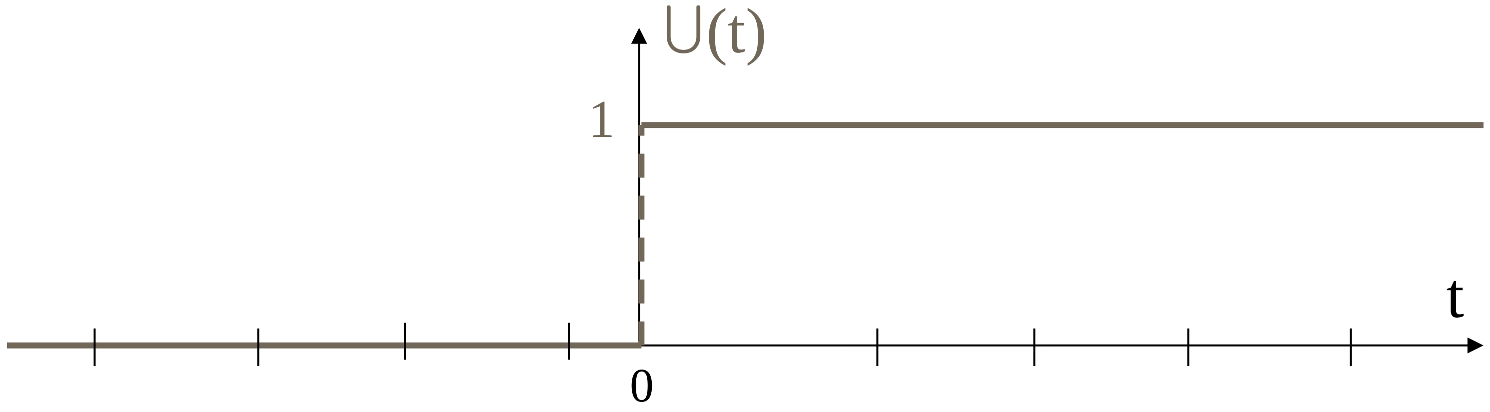
$Sinc^2(x/2)$ es la transformada de Fourier de una función triangulo.

$Sinc^2(ax)$ es el patrón de difracción de una ranura.

Demostrar que la transformada de Fourier de la función triángulo, $\Delta(t)$, es $sinc^2(\omega/2)$



Ejercicio: Calcular la Transformada de Fourier de la función escalón unitario o función de Heaviside, u(t):



Gráfica $U(\omega) = \mathscr{F}[u(t)]$.

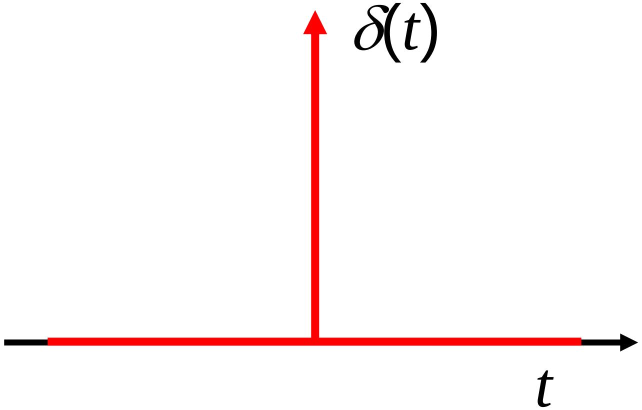
¿Qué rango de frecuencias contiene $U(\omega)$?

¿Cuál es la frecuencia predominante?

La función delta de Kronecker y delta de Dirac

$$\delta_{m,n} \equiv \begin{cases} 1 \text{ if } m = n \\ 0 \text{ if } m \neq n \end{cases}$$

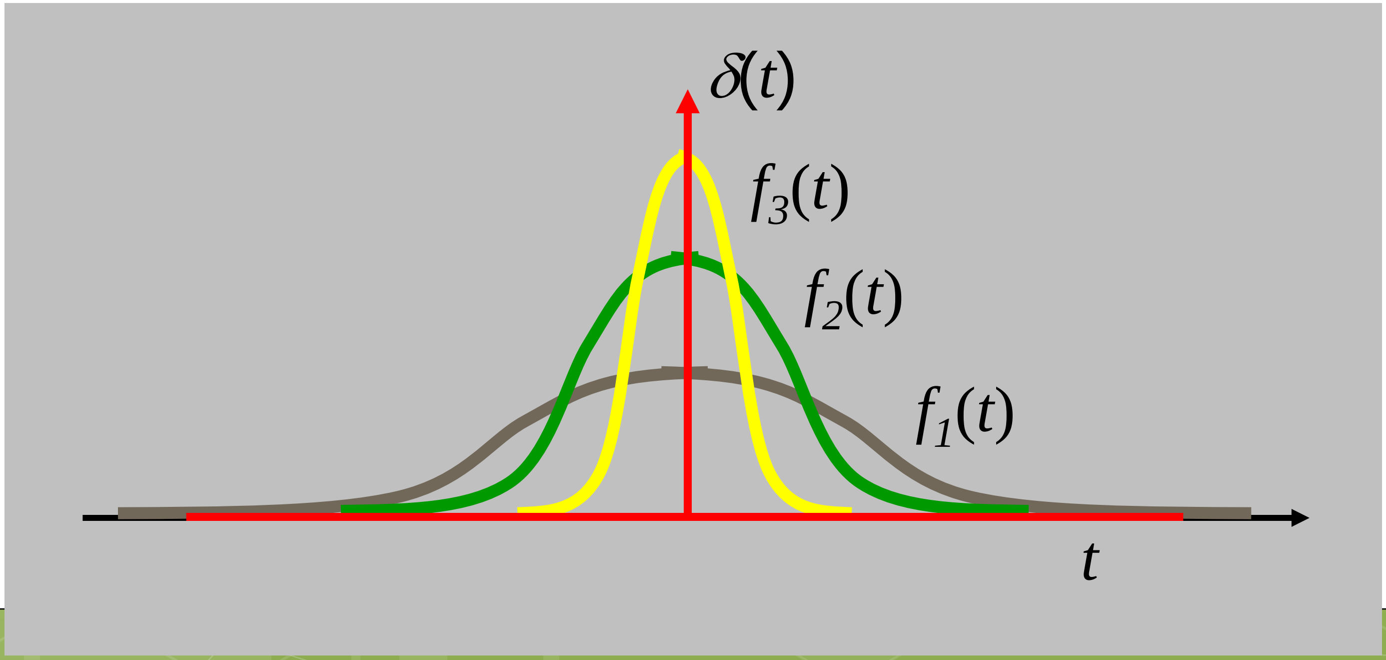
$$\boxed{\delta(t) \equiv \begin{cases} \infty \text{ if } t = 0 \\ 0 \text{ if } t \neq 0 \end{cases}}$$



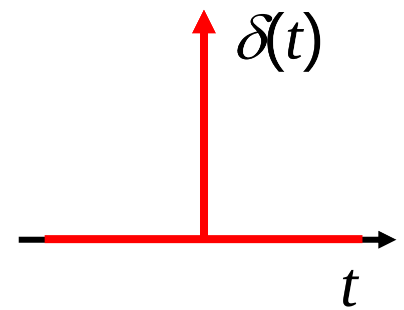
La función impulso o delta de Dirac

Recordemos que podemos pensar en la función delta como el límite de una serie de funciones como la siguiente:

$$f_m(t) = m \exp[-(mt)^2]/\sqrt{\pi}$$



Y recordemos algunas propiedades de la función



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

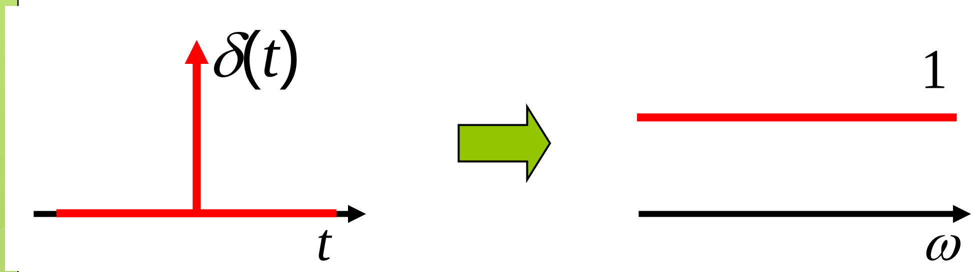
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, f(a)\, dt = f(a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\pm i\omega t)\, dt = 2\pi\, \delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[\pm i(\omega-\omega')t]\;\; dt = 2\pi\, \delta(\omega-\omega')$$

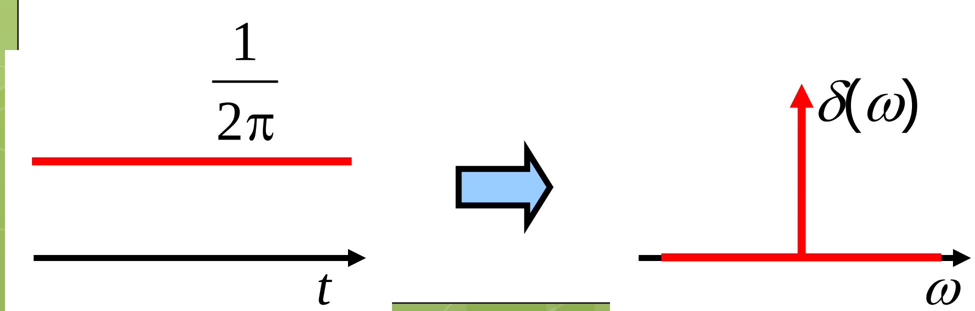
Transformada de Fourier de la δ(t):

$$f(t) = \delta(t) \quad \rightarrow \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t}\, dt = 1$$



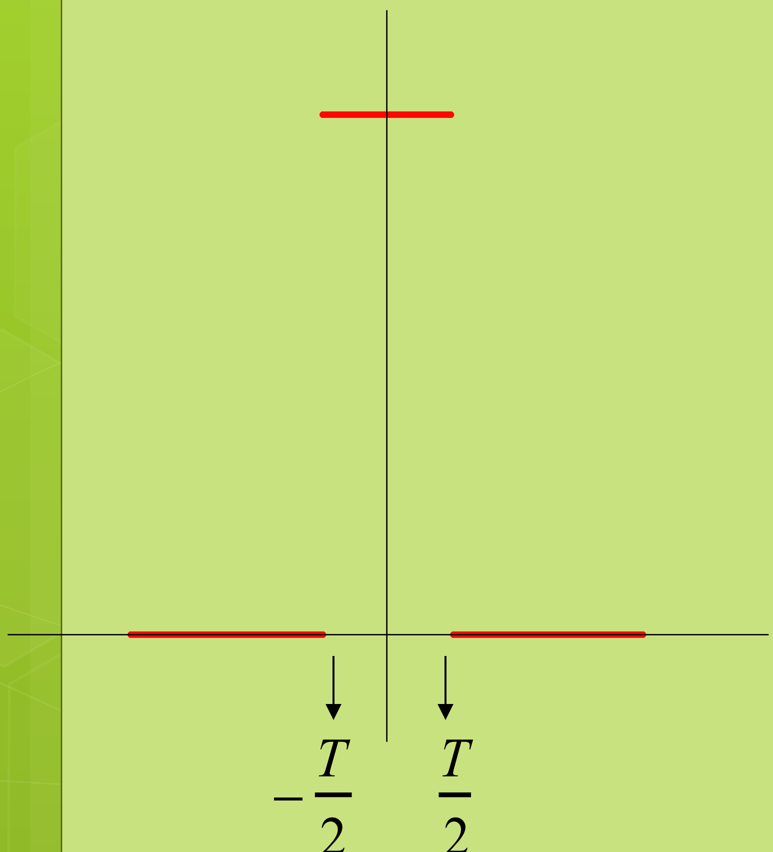
Observa que la transformada de Fourier de *f(t) = 1/(2π)* es:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{-i\omega t}\, dt = 2\pi\delta(\omega)$$

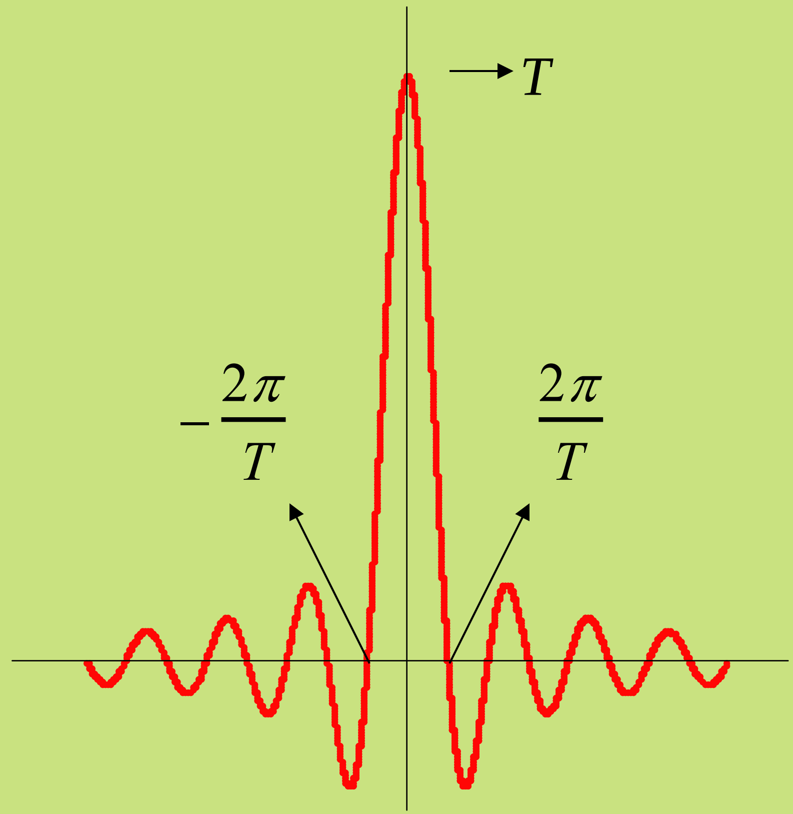


Recordemos →

$$f(t)=\begin{cases} 0\ , & t<-\dfrac{T}{2} \\ 1\ , & -\dfrac{T}{2}\le t\le \dfrac{T}{2} \\ 0\ , & \dfrac{T}{2}<t \end{cases}$$



$$\rightarrow\ \hat{f}(\omega)=T\,\frac{sen\left(\omega\dfrac{T}{2}\right)}{\omega\dfrac{T}{2}}$$



$$f(t)=\begin{cases}0\,,\, t<-\frac{T}{2}\\ 1,-\frac{T}{2}\leq t\leq\frac{T}{2}\\ 0\,,\,\frac{T}{2}<t\end{cases} \rightarrow \hat{f}(\omega)=T\,\frac{sen\left(\omega\frac{T}{2}\right)}{\omega\frac{T}{2}}$$

$\downarrow$ T $\rightarrow\infty$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$ T $\rightarrow\infty$

$$f(t)=1 \quad \rightarrow \hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}1e^{-i\omega t}\,dt \quad = 2\pi\,\delta(\omega)$$

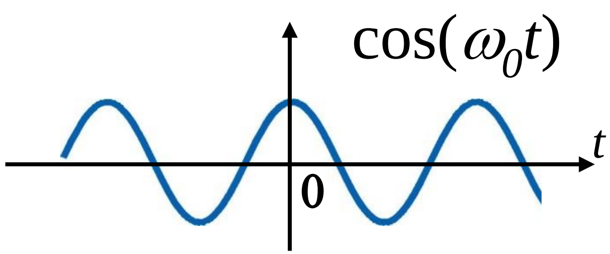
Transformada de Fourier de la función coseno

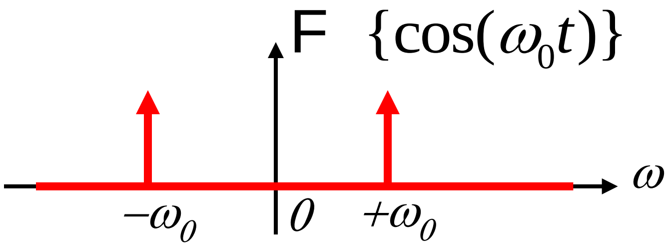
$$f(t) = \cos(\omega_0 t) \qquad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \right) e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t} \right) dt$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2\pi}{2} \left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right]$$

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \pi \left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right]}$$



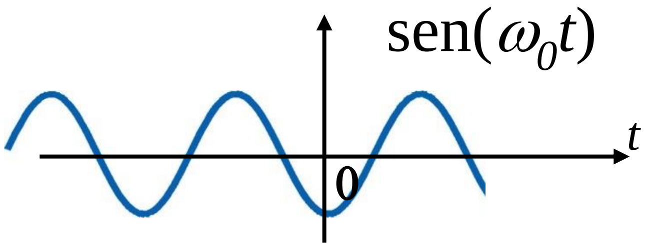


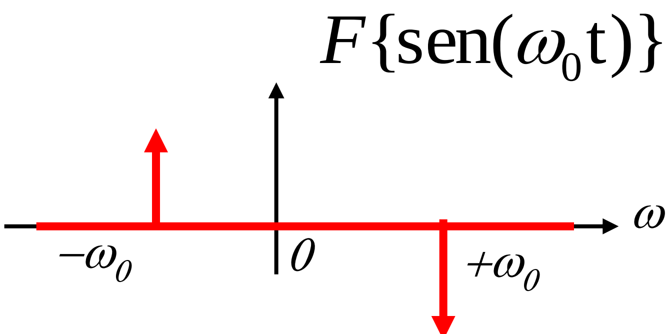
Transformada de Fourier de la función seno:

$$f(t) = sen(\omega_0 t) \qquad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} sen(\omega_0 t)\, e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} \right) e^{-i\omega t} dt \; = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-i(\omega-\omega_0)t} - e^{-i(\omega+\omega_0)t} \right) dt$$

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = i\pi\left[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\right]}$$

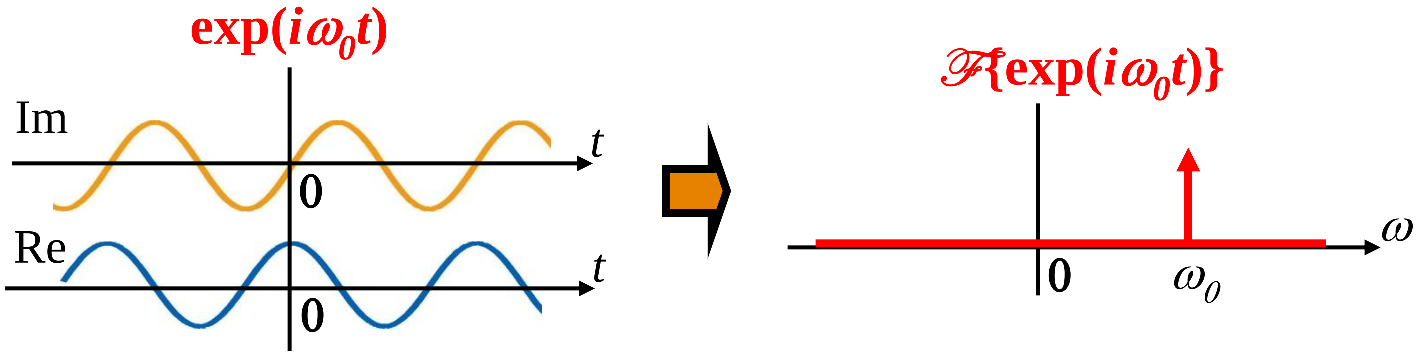




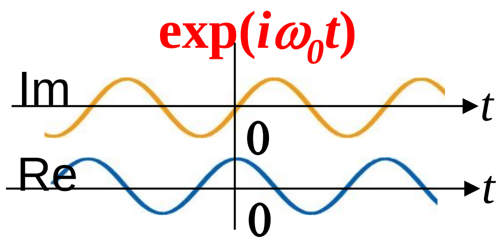
La transformada de Fourier de la onda plana *exp(iω₀ t)*

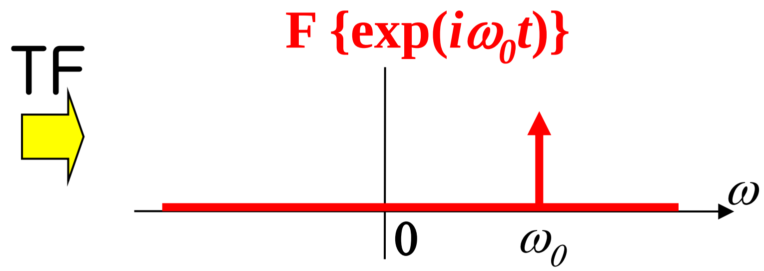
$$F\{e^{i\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t}\, e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)t}\, dt = 2\pi\, \delta(\omega-\omega_0)$$



La TF de $\exp(i\omega_0 t)$ es una frecuencia pura.





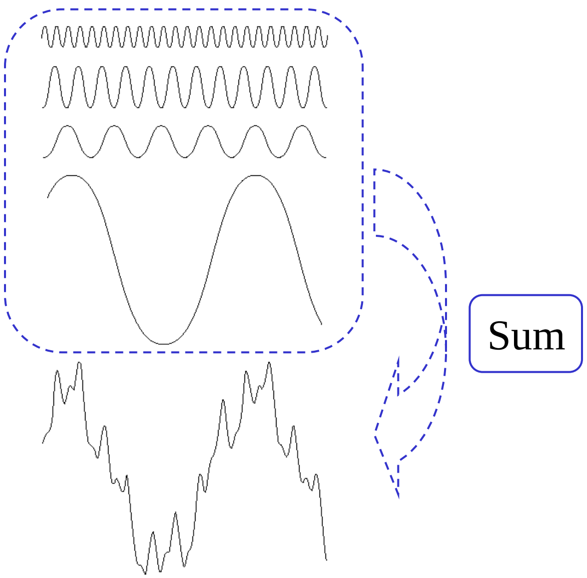
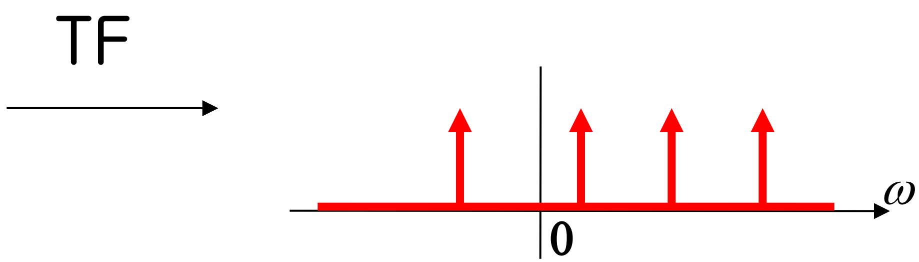
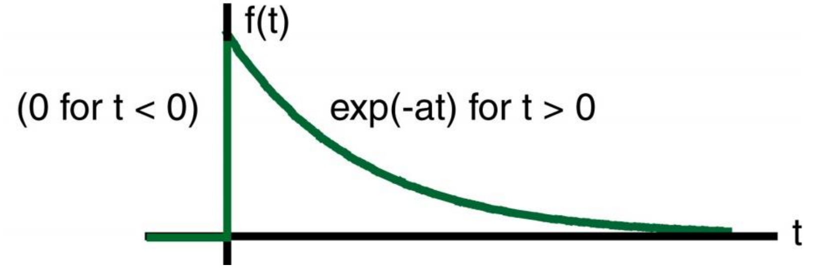


FIGURE 4.1 The function at the bottom is the sum of the four functions above it. Fourier's idea in 1807 that periodic functions could be represented as a weighted sum of sines and cosines was met with skepticism.



Encontrar la transformada de Fourier de la función:

$$f(t)=\begin{cases} e^{-at}, & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$



$$a>0$$

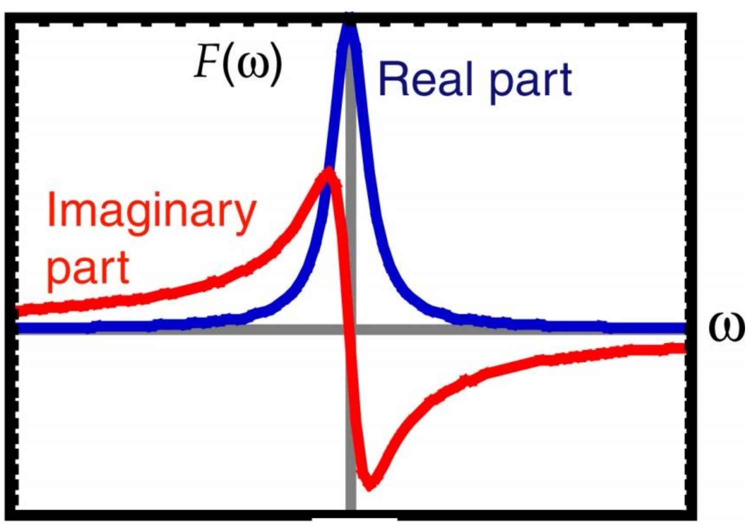
$$\hat{f}(\omega)=\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-i\omega t}\,dt=$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\,dt=-\left.\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega}\right|_0^{\infty}=$$

$$-\frac{1}{a+i\omega}(0-1)=\frac{1}{a+i\omega}=$$

$$\frac{1}{a+i\omega}\,\frac{a-i\omega}{a-i\omega}=$$

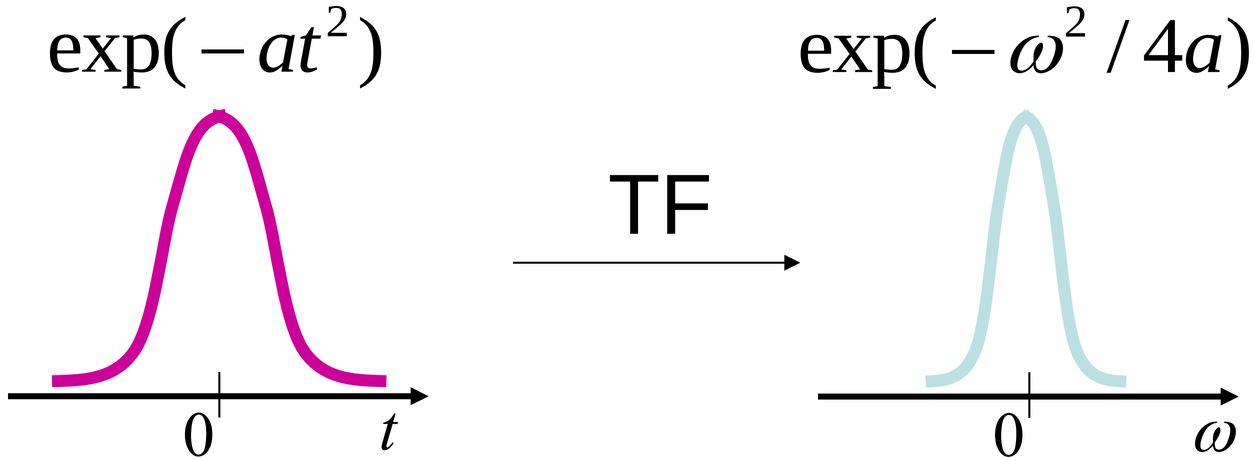
$$\frac{a}{a^2+\omega^2}-i\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$



La transformada de Fourier de una Gaussiana, *exp(-at²)*, es otra Gaussiana.

$$\mathrm{F}\ \{\exp(-at^2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-at^2)\exp(-i\omega t)\,dt$$

$$\boxed{\propto \exp(-\omega^2/4a)}$$



Más adelante lo demostraremos.

La transformada inversa de Fourier

Dada la función en el **espacio recíproco** G(k), podemos retornar al **espacio directo** mediante la inversa de la transformada de Fourier:

$$g(x) = F^{-1}\{G(k)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(k)e^{ikx}dk \qquad G(k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ikx}dx$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(k)e^{ikx'}dk = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ikx}dx\right)e^{ikx'}dk =$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x'-x)}dk\right)}_{\delta(x'-x)}dx}_{g(x')}$$

A partir de su definición, obtener la transformada inversa de Fourier de la función $g(\omega)=\dfrac{2}{(i\omega-3)^3}-\dfrac{5}{(i\omega+3)^3}$

$$F^{-1}(g)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

$$F^{-1}(g)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2}{(i\omega-3)^3}-\frac{5}{(i\omega+3)^3}\right]e^{i\omega x}d\omega=$$

$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{(i\omega-3)^3}e^{i\omega x}d\omega}_{I_1}-\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{5}{(i\omega+3)^3}e^{i\omega x}d\omega}_{I_2}$$

- Cálculo de I_1 (teoría de residuos) :

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{(i\omega-3)^3}e^{i\omega x}d\omega$$

$$f(z)=\frac{e^{izx}}{(iz-3)^3}\Rightarrow z=-3i \ \text{ polo de orden 3}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-3i}[f(z)] = \frac{-ix^2 e^{3x}}{2}$$

$$I_1 = 4\pi i \operatorname*{Res}_{z=-3i}[f(z)] = -2\pi x^2 e^{3x}; \quad x < 0$$

$$I_1 = 0; \quad x > 0$$

- Cálculo de I_2 (teoría de residuos):

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{5}{(i\omega + 3)^3} e^{i\omega\omega} d\omega$$

$$f(z) = \frac{e^{izx}}{(iz + 3)^3} \Rightarrow z = 3i \text{ polo de orden } 3$$

$$\operatorname*{Res}_{z=3i}[f(z)] = \frac{-ix^2 e^{-3x}}{2}$$

$$I_2 = 10\pi i \operatorname*{Res}_{z=3i}[f(z)] = 2\pi \frac{5}{2} x^2 e^{-3x}; \quad x > 0$$

$$I_2 = 0; \quad x < 0$$

Luego la transformada inversa de Fourier es :

$$F^{-1}(g) = \begin{cases} -2\pi x^2 e^{3x}; & x < 0 \\ -5\pi x^2 e^{-3x}; & x > 0 \end{cases}$$

A partir de la definición, obtener la transformada inversa de Fourier de la función:

$$g(\omega) = \frac{1}{6\omega^2 - 13i\omega - 6}$$

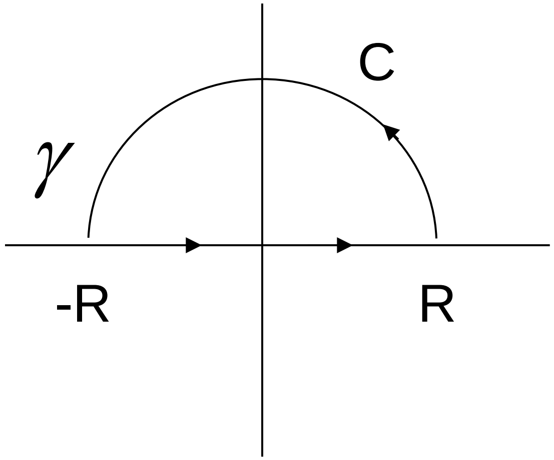
Respuesta.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Integrando en el plano complejo:

$$g(z) = \frac{1}{6(z - z_1)(z - z_2)}, \, z_1 = \frac{2}{3} i, \, z_2 = \frac{3}{2} i$$

Tomando $G(z) = g(z)e^{izx}$



- Si x > 0:

$$\int_{\Gamma} g(z)e^{izx}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{2}\operatorname{Res}(G(z), z_k) =$$

$$= \int_{\gamma(R)} G(z)dz + \int_{-R}^{R} G(w)dw$$

Haciendo lim R→∞ $\quad \text{Como} \lim_{|z|\to\infty} g(z) = \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{6z^2 - 13iz - 6} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma(R)} g(z)e^{izx}dx = 0 \text{ (Lema 3 de Jordan)}$$

Entonces:

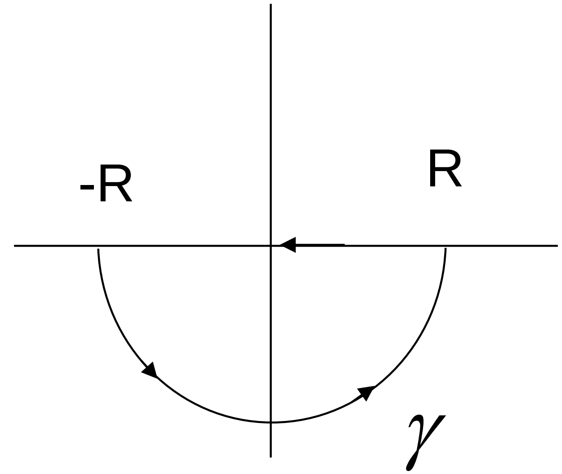
$$f(x) = 2\pi i \sum \text{Res}(G(z), z_k) = \frac{2\pi}{5}\left(e^{-\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{2}{3}x} \right)$$

- Si x < 0:

$$\int_{\Gamma} g(z)e^{izx}dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \text{Res}(G(z), z_k) =$$

$$= \int_{\gamma(R)} G(z)dz - \int_{-R}^{R} G(w)dw$$

Haciendo lim R→∞



$$\text{Como } \lim_{|z|\to\infty} g(z) =$$

$$= \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{6z^2 - 13iz - 6} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma(R)} g(z) e^{izx} dx = 0 \text{ (Lema 3 de Jordan)}$$

Entonces: $$f(x) = 2\pi i \sum \text{Res}(G(z), z_k) = 0$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{2\pi}{5}\left(e^{-\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{2}{3}x}\right), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}}$$

Algunas funciones no poseen transformada de Fourier

La condición de suficiencia para que la transformada de Fourier de f(x), $F(\omega)$ exista es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| g(x) \right|^2 dx < \infty$$

es decir, que f(x) sea de cuadrado sumable. Funciones que no vayan asintóticamente a cero cuando x tiende a $+\infty$ y $-\infty$ en general no tienen transformadas de Fourier.

La TF y su inversa son simétricas.

Si la TF de $f(t)$ es $F(\omega)$, entonces la TF de $F(t)$ es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\exp(-i\,\omega t)\,dt$$

Que podemos escribir: $$= \quad 2\pi\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\exp(i[-\omega]t)\,dt$$

Renombrando la variable de integración de t a ω', podemos ver que llegamos a la TF inversa:

$$= \quad 2\pi\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega')\exp(i[-\omega]\omega')\,d\omega'\right\}$$

$$= \quad 2\pi f(-\omega)$$

Este es el motivo por el que a menudo f y F se dice que son un "par transformado."

La transformada de Fourier es en general compleja?

La transformada de Fourier *F(k)* y la función original *f(x)* son ambas en general complejas.

$$F\left\{f(x)\right\} = F_r(k) + iF_i(k)$$

De modo que la transformada de Fourier puede escribirse como:

$$F\left\{f(x)\right\} = F(k) = A(k)e^{i\Theta(k)}$$

$$A = \left|F(k)\right| = \sqrt{F_r^{\,2} + F_i^{\,2}}$$

$$A \equiv \text{amplitud o magnitud espectral}$$

$$\Theta \equiv \text{fase espectral}$$

$$\mathrm{A}^2 = \left|F\right|^2 = F_r^{\,2} + F_i^{\,2} \equiv \text{espectro de potencia}$$

La transformada de Fourier cuando f(x) es real

La TF F(k) es particularmente simple cuando f(x) es real:

$$F\left\{f(x)\right\} = F_r(k) + iF_i(k)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(cos(kx) - isen(kx)\right)dx$$

$$F_r(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)cos(kx)dx$$

$$F_i(k) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)sin(kx)dx$$

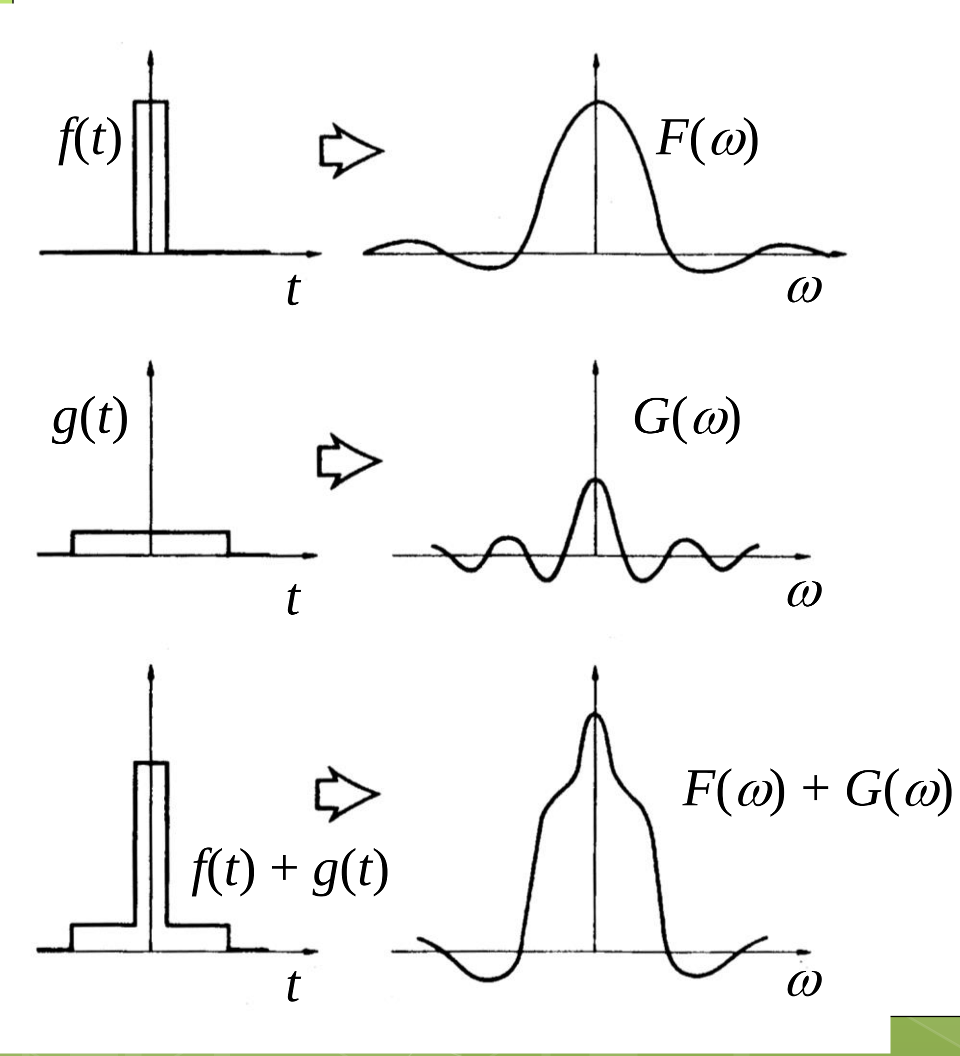
Propiedades de la Transformada de Fourier:

1. Linealidad:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(t) \xleftrightarrow{F.T.} \hat{f}(\omega) \\ g(t) \xleftrightarrow{F.T.} \hat{g}(\omega) \end{array}\right\} \Rightarrow f(t)+g(t) \xleftrightarrow{F.T.} \hat{f}(\omega)+\hat{g}(\omega)}$$

$$\boxed{f(t) \xleftrightarrow{F.T.} \hat{f}(\omega) \Rightarrow (a+ib)f(t) \xleftrightarrow{F.T.} (a+ib)\hat{f}(\omega)}$$

La transformada de Fourier de la combinación lineal de dos funciones.



$$F\{af(t)+bg(t)\}=$$
$$aF\{f(t)\}+bF\{g(t)\}$$

Calcular la transformada de Fourier de la siguiente función:

$$f(t)=\begin{cases} 0 \ , \ |t|>\dfrac{a}{2} \\ 1 \ , \ \dfrac{b}{2}<|t|<\dfrac{a}{2} \\ 2 \ , \ |t|<\dfrac{b}{2} \end{cases} \quad ; \ a>b>0$$

La función f(t) se puede escribir también del siguiente modo:

$$f(t)=g(t)+h(t)$$

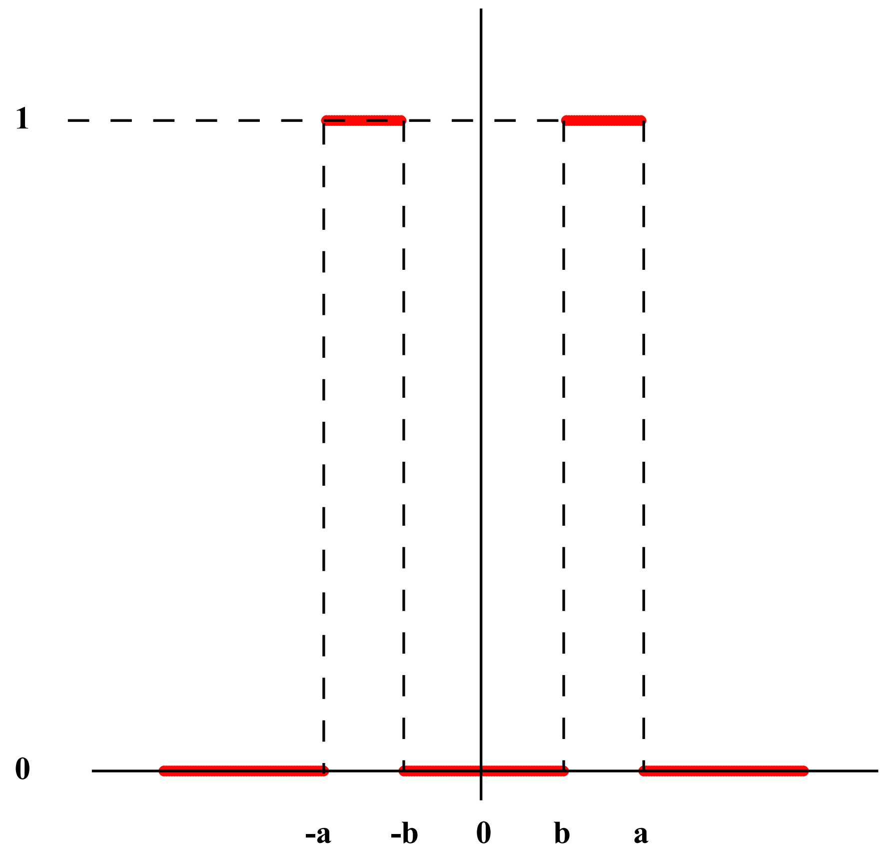
$$donde \quad g(t)=\begin{cases} 0 \ , \ |t|>\dfrac{a}{2} \\ 1 \ , \ |t|<\dfrac{a}{2} \end{cases} \quad ; \quad h(t)=\begin{cases} 0 \ , \ |t|>\dfrac{b}{2} \\ 1 \ , \ |t|<\dfrac{b}{2} \end{cases}$$

Luego:

$$\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega) + \hat{h}(\omega)$$

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega a}{2}\right)}{\frac{\omega a}{2}} + \frac{b}{\sqrt{2\pi}}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega b}{2}\right)}{\frac{\omega b}{2}}}$$

Calcular la transformada de Fourier de la siguiente función:



Tenemos que calcular la transformada de Fourier de la siguiente función:

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<-a \\ 1, & -a<t<-b \\ 0, & -b<t<b \\ 1, & b<t<a \\ 0, & t>a \end{cases}$$

$$f(t)=g(t)-h(t)$$

$$g(t)=\begin{cases} 0 & , \quad |t|>a \\ 1 & , \quad |t|<a \end{cases} \quad ; \quad h(t)=\begin{cases} 0 & , \quad |t|>b \\ 1 & , \quad |t|<b \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & , \ |t| > a \\ 1 & , \ |t| < a \end{cases} \xrightarrow{F.T.} \hat{g}(\omega) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen}(\omega a)}{\omega a}$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & , \ |t| > b \\ 1 & , \ |t| < b \end{cases} \xrightarrow{F.T.} \hat{h}(\omega) = \frac{2b}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen}(\omega b)}{\omega b}$$

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega) - \hat{h}(\omega) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen}(\omega a)}{\omega a} - \frac{2b}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen}(\omega b)}{\omega b}}$$

2. Escalado:

$$F\{f(t)\} = \hat{f}(\omega)$$

$$\boxed{F\{f(at)\} = \frac{1}{a}\,\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

$$F\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}dt =$$

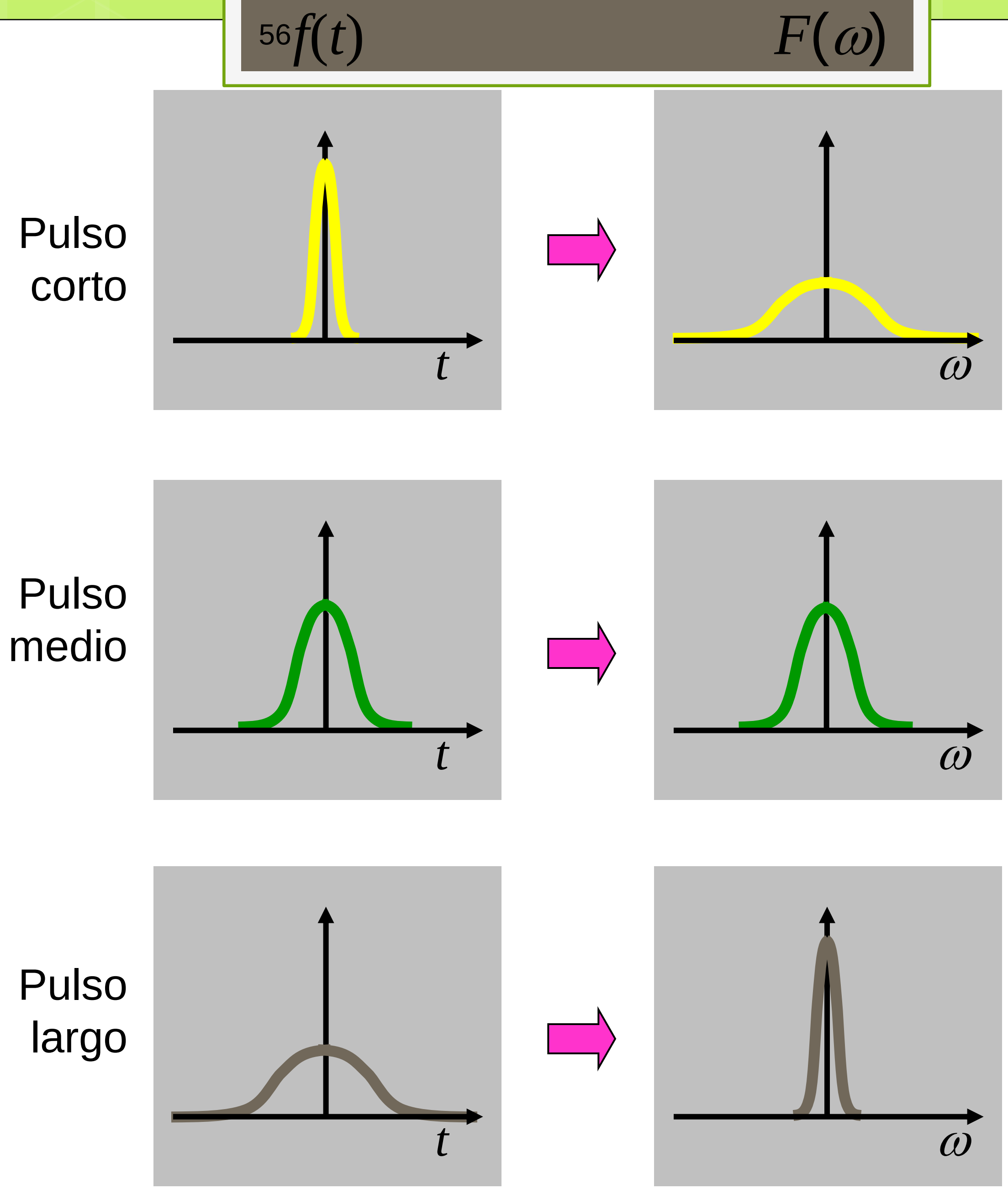
$$\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\frac{\omega}{a}(at)}d(at) =$$

$$\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-i\frac{\omega}{a}t'}dt' = \frac{1}{a}\,\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Efecto de la propiedad de escalado

Mientras más corto es el pulso, más ancho es el espectro.

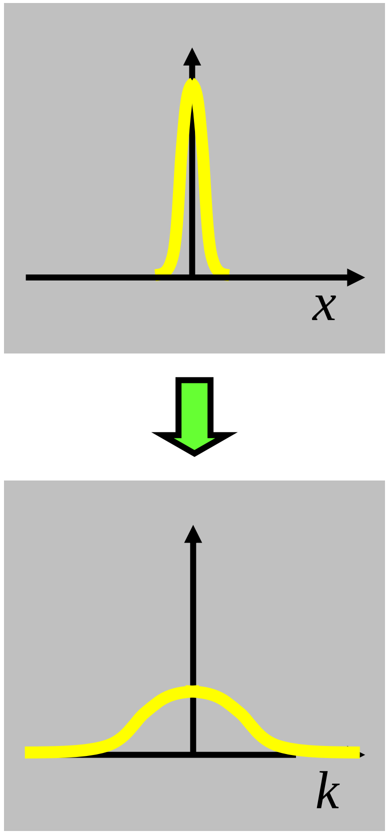
Esta es la esencia del principio de incertidumbre en mecánica cuántica.



La transformada de Fourier respecto al espacio

Si $f(x)$ está en función de la posición x,

$$F\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikt} dx = \hat{f}(k)$$



k se conoce como frecuencia espacial.

Todo lo expuesto sobre la transformada de Fourier entre los dominios t y ω se aplica los dominios x y k.

3. Traslación en el dominio de tiempos

$$\boxed{f(t) \xleftrightarrow{F.T.} \hat{f}(\omega) \Rightarrow f(t+a) \xleftrightarrow{F.T.} e^{i\omega a}\,\hat{f}(\omega)}$$

$$f(t+a) = g(t)$$

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \quad = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+a)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\omega(u-a)}\, du \qquad = e^{i\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\omega u}\, du$$

$$\hat{g}(\omega) = e^{i\omega a}\,\hat{f}(\omega)$$

4. : $$\boxed{f(t)=f^{*}(t)\Rightarrow \hat{f}(\omega)=\hat{f}^{*}(-\omega)}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left[\hat{f}(\omega)\right]=\mathrm{Re}\left[\hat{f}(-\omega)\right] \\ \mathrm{Im}\left[\hat{f}(\omega)\right]=-\mathrm{Im}\left[\hat{f}(-\omega)\right] \end{cases}$$

5. : $$\hat{f}(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)d\omega$$

5. Identidad de Parseval : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(\omega)\hat{g}(\omega)d\omega$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}^*(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\omega')e^{i\omega' t}d\omega'\right)dt =$$

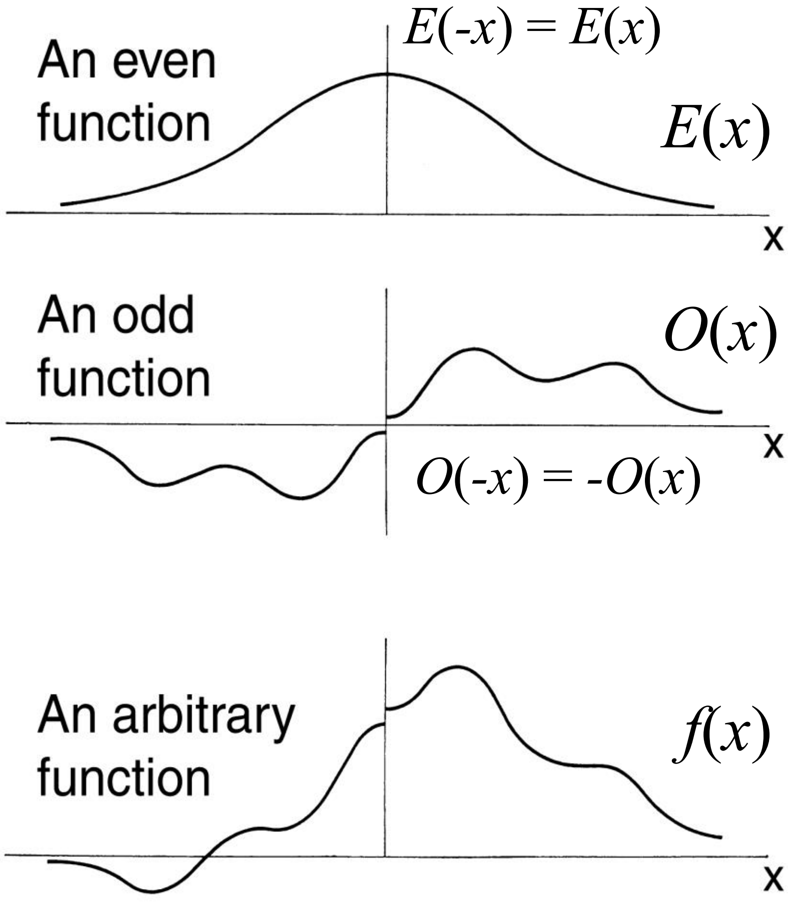
$$= \int_{-\infty}^{\infty}d\omega\ \hat{f}^*(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\,\hat{g}(\omega')\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty}dt\, e^{-i(\omega-\omega' t)}\right)}_{\delta(\omega'-\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}^*(\omega)\hat{g}(\omega)d\omega$$

En particular:

$$f(t) = g(t) \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega}$$

Teorema de Rayleigh

Toda función puede escribirse como la suma de una función par y una función impar



Sea $f(x)$ una función cualquiera.

$$E(x) \equiv [\, f(x) + f(-x)]/2$$

$$O(x) \equiv [\, f(x) - f(-x)]/2$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = E(x) + O(x)$$

Transformadas de Fourier de funciones pares, *f(t) = f(-t)*:

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt \quad =\left[\int_{-\infty}^{0} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt+\int_{0}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt\right]$$

$$\hat{f}(\omega)=\left[\int_{0}^{\infty} f(t)\,e^{i\omega t}\,dt+\int_{0}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt\right]=\int_{0}^{\infty} f(t)\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)dt$$

$$\boxed{\hat{f}(\omega)=2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt}$$

Transformadas de Fourier de funciones impares, *f(t) = -f(-t)*:

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \quad =\left[\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right]$$

$$\hat{f}(\omega)=\left[\int_{0}^{\infty}-f(t)e^{i\omega t}dt+\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right] \quad =\int_{0}^{\infty} f(t)\left(-e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)dt$$

$$\boxed{\hat{f}(\omega)=2i\int_{0}^{\infty} f(t)sen(\omega t)dt}$$

6. Transformada de la derivada:

$$F(f'(x)) = ikF(f(x)) = ikF(k)$$

Y en general:

$$\boxed{F(f^{(n)}(x)) = (ik)^n F(k)}$$

7. Transformada xf(x):

$$F\big(xf(x)\big) = iF'(f(x)) = iF'(k)$$

Y en general:

$$\boxed{F\big(x^n f(x)\big) = i^n F'(k)}$$

Ejercicios:

1. Demostrar las propiedades anteriores

2. Encontrar la transformada de Fourier de la función: $f(x) = \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)}$

3. A partir del resultado anterior y una conocida propiedad de la transformada de Fourier, determinar la transformada de Fourier de la derivada de la función:

$$g(x) = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Sol.2. Nos piden la integral $F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{-ikx}}{x^2+1}\,dx$

Pasamos la integral al plano complejo:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikz}}{z^2+1}\,dz \Rightarrow \text{integral "tipo 3" con } f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

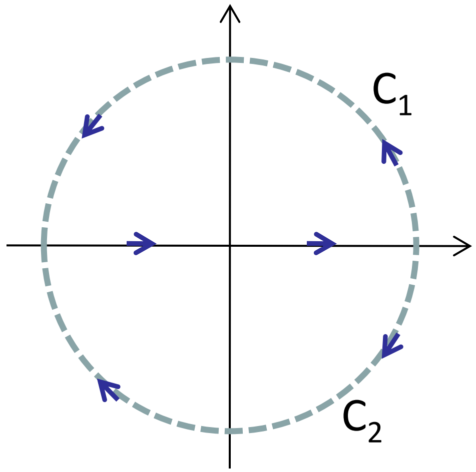
$f(z)$ es analítica $\forall z \in \mathbb{C}$, excepto $z_1 = -i$ y $z_2 = i$

- Para $k \geq 0$ integramos en el circuito C_2 :

$$F(k) = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-i}\left[\frac{e^{-ikz}}{z^2+1}\right] = -2\pi i \lim_{z\to -i}\left[\frac{e^{-ikz}}{z-i}\right] = \pi e^{-k}$$

- Para $k < 0$ integramos en el circuito C_1 :

$$F(k) = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i}\left[\frac{e^{-ikz}}{z^2+1}\right] = 2\pi i \lim_{z\to i}\left[\frac{e^{-ikz}}{z+i}\right] = \pi e^{k}$$



De modo que : $F(k) = \pi e^{-|k|}$

Sol.3 Puesto que $F\left[\frac{dg}{dx}\right] = ikF[g]$ y $\frac{dg}{dx} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$:

$$F\left[\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right] = -2F\left[\frac{x}{(1+x^2)^2}\right] = ik\pi e^{-|k|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(k) = F\left[\frac{x}{(1+x^2)^2}\right] = -\frac{ik\pi e^{-|k|}}{2}$$

Veamos otra aplicación de estas dos últimas propiedades:

Encontrar la transformada de Fourier de la función:

$$f(x) = \exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)$$ siendo a>0 constante.

Derivando tenemos:

$$\Rightarrow f'(x) = -ax\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right) = -axf(x)$$

Aplicando la transformada en ambos lados de la ecuación y usando las siguientes propiedades de la TF:

$$\left.\begin{aligned} F(f'(x)) &= ikF(f(x)) = ikF(k) \\ F\left[xf(x)\right] &= iF´(f(x)) = iF´(k) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$ikF(k) = -iaF´(k)$$

$$ikF(k) = -iaF'(k) \Rightarrow F(k) = Be^{-\frac{k^2}{2a}}$$

$$F(k) = Be^{-\frac{k^2}{2a}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}} e^{-ikx} dx$$

$u^2 = ax^2/2$

$$B = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = 2\sqrt{\frac{2}{a}} \int_{0}^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$= \sqrt{\frac{2}{a}} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

$u^2 = t$

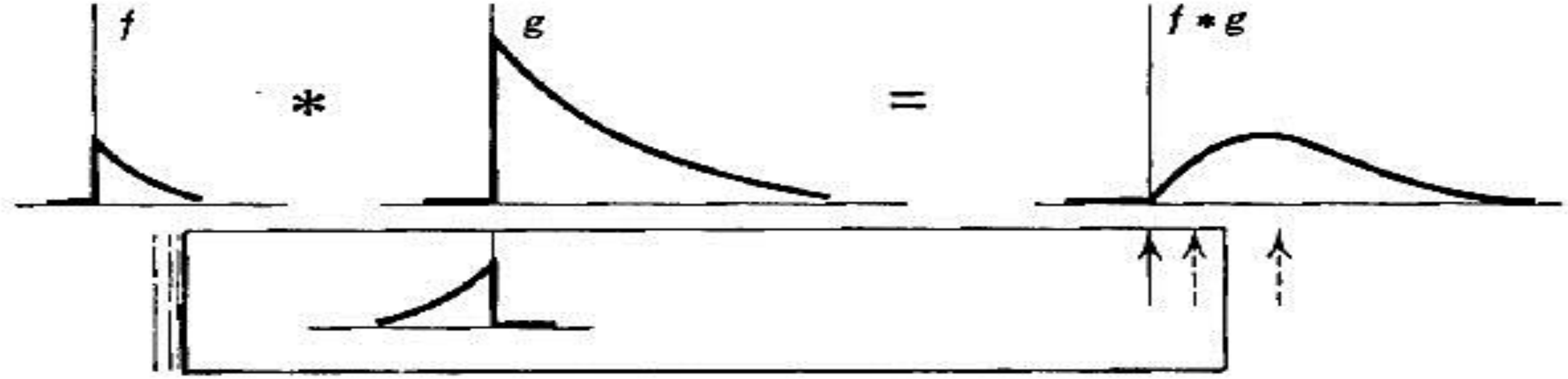
$$F(k) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{2a}}$$

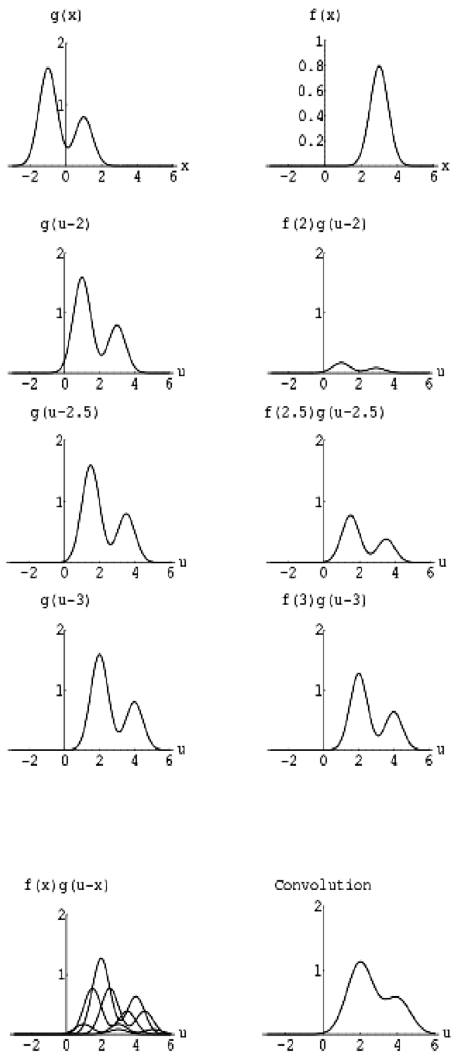
Convolución

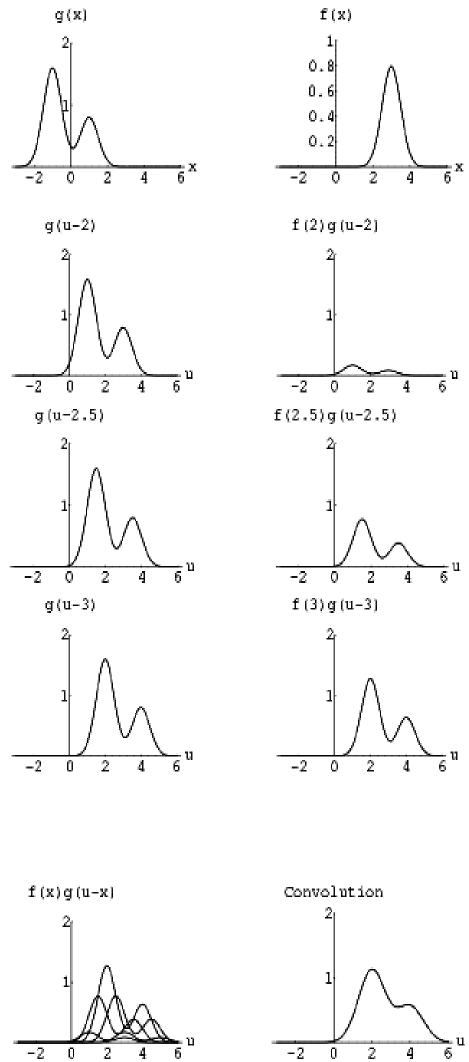
Se define la integral de convolución de dos funciones f(t) y g(t) del siguiente modo:

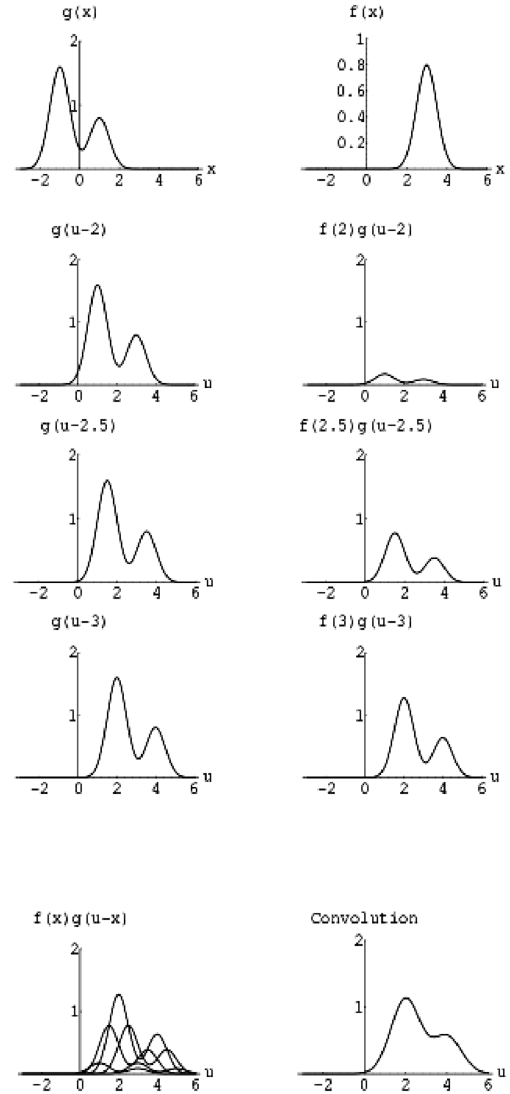
$$\boxed{(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(t)du$$




g(x)
f(x)
g(u-2)
f(2)g(u-2)
g(u-2.5)
f(2.5)g(u-2.5)
g(u-3)
f(3)g(u-3)
f(x)g(u-x)
Convolution


g(x)
f(x)
g(u-2)
f(2)g(u-2)
g(u-2.5)
f(2.5)g(u-2.5)
g(u-3)
f(3)g(u-3)
f(x)g(u-x)
Convolution


g(x)
f(x)
g(u-2)
f(2)g(u-2)
g(u-2.5)
f(2.5)g(u-2.5)
g(u-3)
f(3)g(u-3)
f(x)g(u-x)
Convolution

Convolución con la función delta

$$f(t) * \delta(t-a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\, \delta(u-a)\, du$$

$$= f(t-a)$$

Convolucionar una función con una delta, simplemente centra la función sobre la delta.

Propiedades de la convolución

Commutativa:

$$f * g = g * f$$

Asociativa:

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

Distributiva:

$$f * (g * h) = f * g + f * h$$

El teorema de convolución o teorema de Wiener-Khitchine

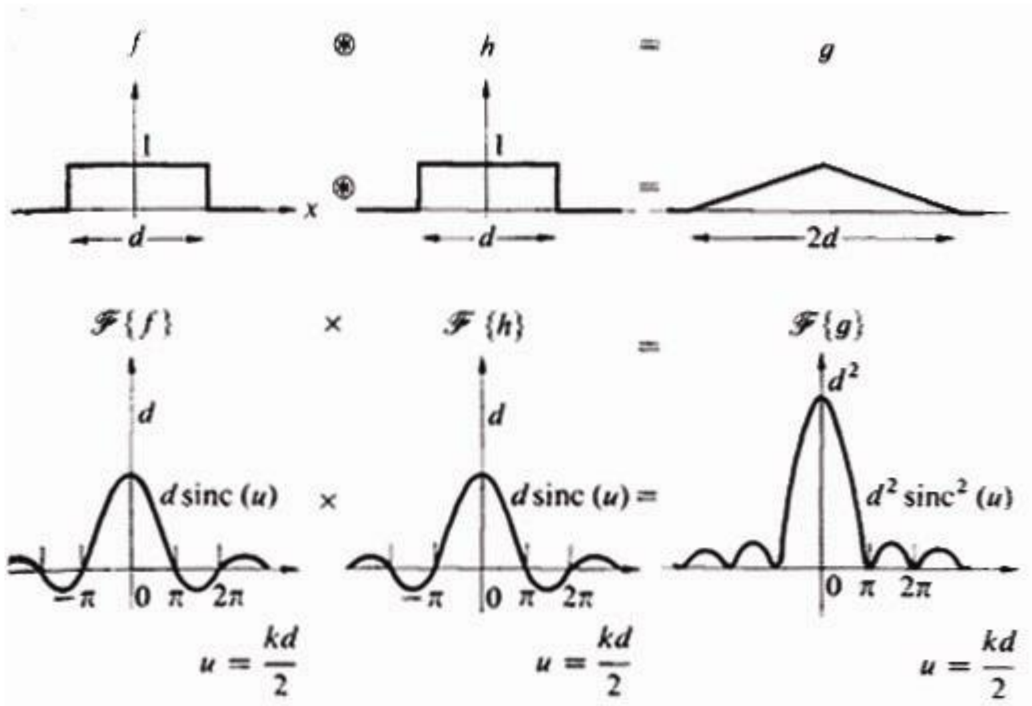
$$\boxed{F\left(f(t)*g(t)\right)=F(w)\cdot G(w)}$$

Convolución en el espacio real es equivalente a multiplicación en el espacio recíproco.

Ejemplo del teorema de convolución

$$\mathrm{rect}(x) * \mathrm{rect}(x) = \Delta(x)$$

$\mathscr{F}\{\mathrm{rect}(x)\} =$
$\mathrm{sinc}(k/2)$



$\mathscr{F}\{\Delta(x)\} =$
$\mathrm{sinc}^2(k/2)$

$$\mathrm{sinc}(k/2) \times \mathrm{sinc}(k/2) = \mathrm{sinc}^2(k/2)$$

Demostración del teorema de convolución.

$$\left(f*g\right)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega u}\,d\omega\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\omega')e^{i\omega'(t-u)}\,d\omega'\right]du=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\omega')\,e^{i\omega' t}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\omega-\omega')u}\,du\right)}_{\delta(\omega-\omega')}d\omega'\right]\hat{f}(\omega)d\omega=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\omega')\,e^{i\omega' t}\,\delta(\omega-\omega')\,d\omega'\right]\hat{f}(\omega)\,d\omega =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega = f(t)*g(t)$$

Aplicando la TF a ambos lados:

$$\boxed{F\big(f(t)*g(t)\big)=F(w)\cdot G(w)}$$

Ejemplo de aplicación del teorema de convolución:

Calcular la transformada de Fourier de la siguiente función:

$$f(t)=\begin{cases} 0 & , \ |t|>\dfrac{T}{2} \\ \cos(\omega_0 t) & , \ |t|<\dfrac{T}{2} \end{cases}$$

Podemos hacerlo aplicando la definición:

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega_0 t)\, e^{-i\omega t}\, dt \quad = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}\right) e^{-i\omega t}\, dt$$

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2}\left[\frac{ie^{-i(\omega-\omega_0)t}}{\omega-\omega_0}+\frac{ie^{-i(\omega+\omega_0)t}}{\omega+\omega_0}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2}\left\{ \frac{i(-2i)}{\omega - \omega_0} sen\left[(\omega - \omega_0)\frac{T}{2} \right] + \frac{i(-2i)}{\omega + \omega_0} sen\left[(\omega + \omega_0)\frac{T}{2} \right] \right\}$$

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \frac{T}{2}\left\{ \frac{sen\left[(\omega - \omega_0)\frac{T}{2} \right]}{(\omega - \omega_0)\frac{T}{2}} + \frac{sen\left[(\omega + \omega_0)\frac{T}{2} \right]}{(\omega + \omega_0)\frac{T}{2}} \right\}}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \ |t| > \dfrac{T}{2} \\ \cos(\omega_0 t) & , \ |t| < \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

Pero, también podemos usar:

$$\boxed{\hat{f} = \widehat{hg} = \hat{h} * \hat{g}}$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & , \ |t| > \dfrac{T}{2} \\ 1 & , \ |t| < \dfrac{T}{2} \end{cases} \quad ; \quad g(t) = \cos(\omega_0 t)$$

TF

TF

$$\boxed{\hat{h}(\omega) = T \frac{sen\left(\omega \dfrac{T}{2}\right)}{\omega \dfrac{T}{2}}}$$

$$\boxed{\hat{g}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right]}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \ |t| > \dfrac{T}{2} \\ \cos(\omega_0 t) & , \ |t| < \dfrac{T}{2} \end{cases} \quad \rightarrow f(t) = h(t) g(t)$$

$$\hat{f} = \widehat{hg} = \hat{h} * \hat{g}$$

$$\left(\hat{h} * \hat{g}\right)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$\left(\hat{h} * \hat{g}\right)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega')\hat{g}(\omega - \omega')\, d\omega' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T \frac{sen\left(\omega' \frac{T}{2}\right)}{\omega' \frac{T}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\delta(\omega - \omega' - \omega_0) + \delta(\omega - \omega' + \omega_0)\right] d\omega'$$

$$\hat{f}(\omega) = (\hat{h} * \hat{g})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{T}{2} \left\{ \frac{sen\left[(\omega - \omega_0)\frac{T}{2}\right]}{(\omega - \omega_0)\frac{T}{2}} + \frac{sen\left[(\omega + \omega_0)\frac{T}{2}\right]}{(\omega + \omega_0)\frac{T}{2}} \right\}$$

Calcular la transformada de Fourier del producto de convolución de las siguientes funciones:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad |t| > \dfrac{a-b}{2} \\ 1 & , \quad |t| < \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

$$g(t) = \sqrt{2\pi}\left[\delta\left(t - \frac{a+b}{2}\right) + \delta\left(t + \frac{a+b}{2}\right)\right]$$

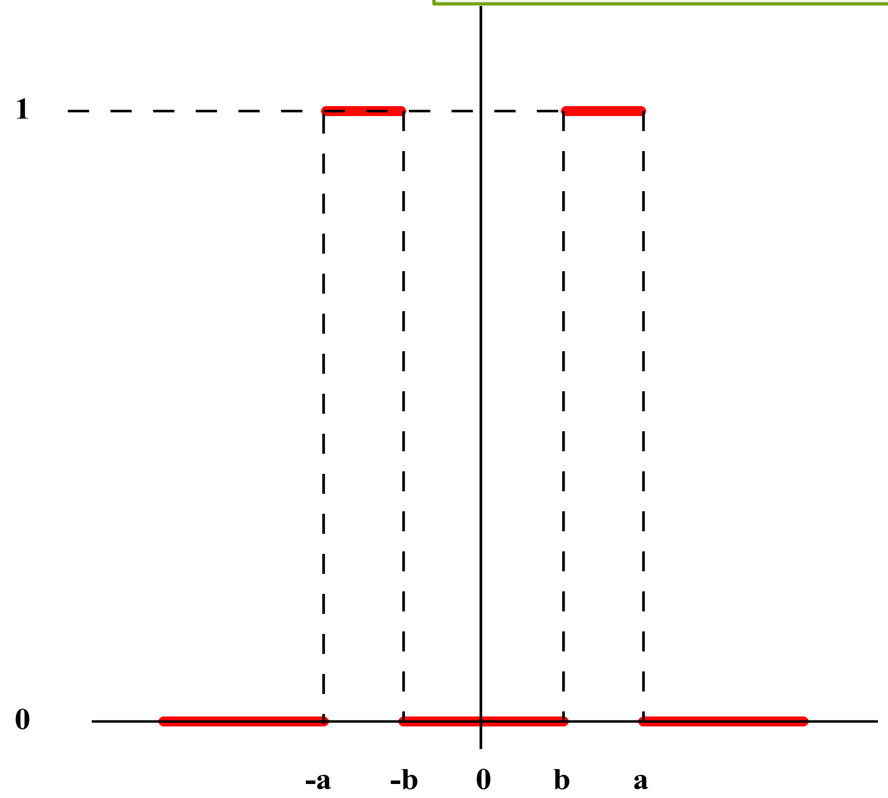
El producto de convolución de las funciones f(t) y g(t) es:

$$(f*g)(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du$$

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left[\delta(t-\frac{a+b}{2}-u)+\delta(t+\frac{a+b}{2}-u)\right]du$$

$$(f*g)(t)=f(t-\frac{a+b}{2})+f(t+\frac{a+b}{2})$$

es decir que el producto de convolución de f(t) y g(t) son dos funciones pulso de anchura a-b centradas en (a+b)/2 y -(a+b)/2 cuya gráfica es la siguiente:



y cuya transformada de Fourier calculamos en el ejercicio anterior:

$$\boxed{\frac{2a}{\sqrt{2\pi}}\frac{\operatorname{sen}(\omega a)}{\omega a}-\frac{2b}{\sqrt{2\pi}}\frac{\operatorname{sen}(\omega b)}{\omega b}}$$

Una forma alternativa para calcular la transformada de Fourier del producto de convolución de f(t) y g(t) es usar el teorema de convolución, según el cuál, la transformada de Fourier del producto de convolución de f(t) y g(t) es igual al producto de las transformadas de Fourier respectivas de f(t) y g(t):

$$(f * g)(t) = \xrightarrow{F.T.} \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad |t| > \dfrac{a-b}{2} \\ 1 & , \quad |t| < \dfrac{a-b}{2} \end{cases} \xrightarrow{F.T.} \hat{f}(\omega) = \frac{a-b}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen}(\omega \frac{a-b}{2})}{\omega \frac{a-b}{2}}$$

Calculamos la transformada de Fourier de g(t):

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi} \left[\delta\left(t - \frac{a+b}{2}\right) + \delta\left(t + \frac{a+b}{2}\right) \right] e^{-i\omega t} dt$$

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega\frac{a+b}{2}} + e^{i\omega\frac{a+b}{2}} = 2\cos\left(\omega\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \frac{a-b}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen}(\omega\frac{a-b}{2})}{\omega\frac{a-b}{2}} 2\cos\left(\omega\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \frac{a-b}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen}(\omega \frac{a-b}{2})}{\omega \frac{a-b}{2}} 2\cos\left(\omega \frac{a+b}{2}\right)$$

$$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega} 2\operatorname{sen}(\omega \frac{a-b}{2})\cos\left(\omega \frac{a+b}{2}\right)$$

$$\boxed{\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega} \left[\operatorname{sen}(\omega a) - \operatorname{sen}(\omega b)\right]}$$

que coincide con la transformada que habíamos calculado del otro modo.

Utilizar el teorema de convolución para calcular la antitransformada de Fourier de la siguiente función:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{T^2}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega^2 T^2}{4}}$$

Tenemos que calcular la antitransformada:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T^2}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega^2 T^2}{4}} e^{i\omega t} \, d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{T}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2 e^{i\omega t} \, d\omega$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{T}{\sqrt{2\pi}}\frac{\operatorname{sen}(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}}\right)\left(\frac{T}{\sqrt{2\pi}}\frac{\operatorname{sen}(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}}\right)e^{i\omega t}d\omega$$

y, llamando:

$$\hat{g}(\omega)=\frac{T}{\sqrt{2\pi}}\frac{\operatorname{sen}(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}} \xrightarrow[\text{de Fourier}]{\text{Antitransformada}} g(t)=\begin{cases}0 \;, & |t|>\frac{T}{2}\\ 1 \;, & |t|<\frac{T}{2}\end{cases}$$

nos queda que:

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\omega)\hat{g}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}(g*g)(t)$$

Teorema de convolución

Por tanto, la integral de convolución de g(t) consigo misma queda:

$$(g*g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)g(t-u)du$$

donde $$g(t) = \begin{cases} 0 \quad , \quad |t| > \dfrac{T}{2} \\ 1 \quad , \quad |t| < \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

$$Si \quad t < -T \Rightarrow (g*g)(t) = 0$$

$$Si \quad -T < t < 0 \Rightarrow (g*g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} 1 \times 1 \times du = \frac{t+T}{\sqrt{2\pi}}$$

$$Si \quad 0 < t < T \Rightarrow (g * g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \times 1 \times du = \frac{T-t}{\sqrt{2\pi}}$$

$$Si \quad t > T \Rightarrow (g * g)(t) = 0$$

Luego:

$$\boxed{f(t) = (g * g)(t) = \begin{cases} \dfrac{T-|t|}{\sqrt{2\pi}} & , \quad |t| < T \\ 0 & , \quad |t| > T \end{cases}}$$