

SEMANA1: Sesión 1

CAP. 1. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales ordinarias (EDO): definición, terminología, clasificación. Modelos matemáticos importantes

irlamn@uni.edu.pe

INTRODUCCION A EDO

1. Definiciones y Notación

DEF. Una ecuación que establece una relación entre la variable independiente x , la función buscada $y = y(x)$ y sus derivadas $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ se llama **ecuación diferencial**.

Notación:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

DEF. Llamamos **integrar** la ecuación diferencial al proceso por el que se encuentra, a partir de la ecuación diferencial dada, la relación directa entre x e y .

2. Clasificación de las Ec. diferenciales

Las ecuaciones diferenciales se clasifican en función de:

- TIPO.
- ORDEN.
- GRADO.
- LINEALIDAD.

Clasificación por tipo

Si una ecuación diferencial contiene sólo derivadas ordinarias de **una o mas variables dependientes** con respecto a **una sola variable independiente** se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)**.

Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^x \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 3y = 0 \quad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

Si una ecuación diferencial contiene **derivadas parciales** de una o mas variables dependientes con respecto a dos o más variables independientes se dice que es una **ecuación diferencial parcial**.

Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

Clasificación según el orden

El **orden de una ecuación diferencial** (ya sea ordinaria o parcial) es el orden de la derivada mayor en la ecuación.

La ecuación:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 2y = e^x$$

Es una ecuación diferencial ordinaria de **segundo orden**.

Una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden se puede expresar mediante la **forma general**:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Donde F es una función de valores reales de n+2 variables $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Es posible despejar de una ecuación diferencial ordinaria en forma única la derivada superior $y^{(n)}$ en términos de las $n+1$ variables restantes.

La ecuación diferencial:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Donde f es una función continua de valores reales, se denomina **forma normal**.

Clasificación según el grado

El **grado de una ecuación diferencial** (ya sea ordinaria o parcial) es el exponente de la mayor derivada contenida en la ecuación.

La ecuación:
$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 2y = e^x$$

Es una ecuación diferencial ordinaria de **grado uno**.

Para la ecuación: $A \frac{dh(t)}{dt} = C_q a \sqrt{2gh}$

Para clasificarla es necesario que el exponente de la variable dependiente sea un **número entero**, por lo que la ecuación se debe reescribir como:

$$\left(A \frac{dh(t)}{dt} \right)^2 = C_q^2 a^2 (2gh)$$

Ecuación diferencial ordinaria de **grado dos**.

Clasificación según la linealidad

Se dice que una ecuación diferencial ordinaria de orden n es **lineal** si está formada por la suma de términos lineales, definidos estos como:

- La variable dependiente y todas sus derivadas son de grado 1 (e.g.: $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$)
- No hay productos de las variables dependientes
- No hay funciones trascendentes (e.g. \cos, \log, \dots) en relación con las variables dependientes

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x)$$

En las ecuaciones diferenciales lineales de primero y segundo orden ($n=1$ y $n=2$):

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad \text{y} \quad a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

se puede observar las características de una ecuación diferencial lineal:

- La variable dependiente y y todas sus derivadas y' , y'' , ..., $y^{(n)}$ son de primer grado, es decir, la potencia de cada término en que interviene y es 1.
- Los coeficientes a_0 , a_1 , ..., a_n de y' , y'' , ..., $y^{(n)}$ dependen sólo de la variable independiente x .
- No hay funciones trascendentes

Las siguientes ecuaciones diferenciales son **NO lineales**:

$(1-y)y' + 2y = e^x$	El coeficiente de y' depende de y
$\frac{d^2 y}{dx^2} + \ln y = 0$	Función Trascendente (no lineal) en y
$\frac{d^5 y}{dx^5} + 3y^3 = 2x$	Potencia de y diferente de grado 1

Clasificación según la homogeneidad

Una ecuación diferencial es homogénea si la variable dependiente y sus derivadas están en **todos** y cada uno de **los términos de la ecuación**; de lo contrario se dice que la ecuación diferencial es NO homogénea

Homogénea

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = 0$$

No Homogénea

$$M \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + b \cdot \frac{dx}{dt} = F(t)$$

Determine el orden, grado, linealidad y homogeneidad de las siguientes ecuaciones:

$$\left(A \frac{dh(t)}{dt} \right)^2 = C_q^2 a^2 (2gh)$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = v(t)$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Clasificación ecuaciones diferenciales

Determine el orden, grado, linealidad y homogeneidad de las siguientes ecuaciones:

$$\left(A \frac{dh(t)}{dt} \right)^2 = C_q^2 a^2 (2gh)$$

Orden=1, Grado=2, No lineal
(Grado>1) y Homogénea

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = v(t)$$

Orden=2, Grado=1, Lineal y
NO Homogénea

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Orden=2, Grado=1, Lineal y
Homogénea

Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial de **orden n** es de la forma:

$$a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_2(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t) y = b_0 x(t)$$

en la cual los coeficientes son variables.

Si los coeficientes $a_n(t)$, $a_{n-1}(t)$, ..., $a_1(t)$, $a_0(t)$ son constantes, la expresión resultante será una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x(t)$$

El término que hace no homogénea a una ecuación diferencial es de suma importancia en los sistemas de control ya que **$b_0x(t)$** representa la entrada que se le aplica al sistema y la interacción entrada-salida produce la salida **$y(t)$**

$$\left(a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \right) y = b_0 x(t)$$

$$L[y] = b_0 x(t)$$

L: es llamado operador diferencial lineal

$b_0 x(t)$: es llamado término fuente

El término que hace no homogénea a una ecuación diferencial es de suma importancia en los sistemas de control ya que **$b_0x(t)$** representa la entrada que se le aplica al sistema y la interacción entrada-salida produce la salida **$y(t)$**

$$\left(a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \right) y = b_0 x(t)$$

Sistema $g(t)$ Salida Entrada

3. Ecuaciones lineales

DEF. Se dice que una ecuación diferencial $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ es **lineal** cuando f es una función lineal de $y, y', \dots, y^{(n-1)}$.

- Se puede escribir: $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$
- Se trata de una ecuación diferencial de grado 1 en y y en todas sus derivadas.
- Cada coeficiente sólo depende de x .

4. Soluciones

DEF. Se llama **solución** (o **integral**) de la ecuación diferencial a cualquier función $y = y(x)$ que introducida en la ecuación diferencial la transforma en igualdad.

Tipos de soluciones:

- **Explícitas:** La variable dependiente y se expresa tan sólo en términos de la variable independiente x y constantes.
- **Implícitas:** Se trata de una relación $G(x, y) = 0$ en la que no se puede despejar y mediante funciones elementales. Son soluciones todas las $y(x)$ que cumplen $G(x, y) = 0$.

Una ecuación diferencial puede tener una cantidad infinita de soluciones que corresponden a las posibles elecciones de valores para los parámetros.

DEF. Se dice que la familia n-paramétrica

$$G(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

es la **solución general** de una ecuación diferencial de orden n si toda solución de esa ecuación se puede obtener partiendo de esa familia. Cada vez que se asignan valores a los parámetros se tiene una **solución particular**.

5. Problemas de valor inicial

DEF. Se llama problema de valor inicial al problema:

$$\begin{cases} \text{Resolver} & y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ \text{Sujeta a:} & y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

donde y_0, y_1, \dots, y_{n-1} son constantes reales llamadas **condiciones iniciales**.

Caso Particular: Problema de valor inicial de 1º orden $\begin{cases} \text{Resolver} & y' = f(x, y) \\ \text{Sujeta a:} & y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Interpretación geométrica: De todas las soluciones de la ecuación diferencial se busca la curva que pasa por (x_0, y_0)

Teorema de Picard (*Existencia y unicidad de solución de la ecuación diferencial de 1º orden en forma normal*)

Dada la ecuación $y' = f(x, y)$ si, $f, \frac{\partial f}{\partial y} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas en D , entonces para cada $(x_0, y_0) \in D$, existe una única solución $y = y(x)$ tal que $y(x_0) = y_0$.

6. Ejemplos de ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

Modelo matemático: descripción matemática de un sistema o fenómeno.

- Crecimiento demográfico: la tasa de crecimiento de la población de un país varía de forma proporcional a la población total

$$\frac{dP}{dt} = KP$$

- Ley de Newton del enfriamiento: la rapidez con que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$$

$$(T > T_m, K < 0)$$

- Caída libre (2ª ley de Newton): la aceleración viene dada por la gravedad

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -g \\ s(0) = s_0 \text{ (altura desde la que se lanza el objeto)} \\ \frac{ds}{dt}(0) = v_0 \text{ (velocidad inicial)} \end{cases}$$

Ejercicio

- EXPRESAR MATEMATICAMENTE DOS MODELOS EDO APLICADOS A LA ECONOMIA Y A LA EPIDEMIOLOGIA.