Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Análisis Convexo - CM3E2]
[Prof: Jonathan Munguia] UNI, 1 de mayo de 2021

Práctica Calificada 1

1. Dado A un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^d$ y $x \in \mathbb{R}^d$. Probar que si $x \in A$ se tiene que $A = \bigcup_{a\in A}[x,a]$. Y en general que $\mathbf{co}\big(A \cup \{x\}\big) = \bigcup_{a\in A}[x,a]$. [5ptos]

Solución:

i) Si $x \in A$ entonces

$$\mathbf{co}(A \cup \{x\}) = \mathbf{co}(A) = A \subset \bigcup_{a\in A}[x,a].$$

ii) Si $x \notin A$. Sea $y \in \mathbf{co}(A \cup \{x\})$:

$$\begin{cases} y \in A & \Rightarrow \quad y \in \bigcup_{a\in A}[x,a] \\ y \notin A & \Leftrightarrow \quad y \notin \mathbf{co}(A) \end{cases}$$

iii) Veamos el caso en que $y \notin A$,

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \exists\{a_i\}_{i=0}^n \subset A \cup \{x\} \ \text{ t.q } \ y = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \text{ con } \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1,$$

luego $\exists i \in \{0,1,\cdots,n\}$ t.q $a_i = x$ porque sino $y \in \mathbf{co}(A)$ lo cual es contradictorio.

iv) Suponiendo sin pérdida de generalidad que $a_0 = x$, se tiene que

$$\begin{aligned} y &= \lambda_0 x + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \quad \text{con } \ \lambda_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \\ &= \lambda_0 x + (1-\lambda_0)\underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_0} a_i}_{\overline{a}} \in [x, \overline{a}]. \end{aligned}$$

Donde $\overline{a} \in A$ ya que $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_0} = 1$ y por la convexidad.
Por tanto $\mathbf{co}\big(A \cup \{x\}\big) \subset \bigcup_{a\in A}[x,a]$. Y finalmente $\mathbf{co}\big(A \cup \{x\}\big) = \bigcup_{a\in A}[x,a]$.

2. Probar que $y \in \mathbf{aff}\{b_0, b_1, \cdots, b_p\}$ si y solo si $y - b_0 = \sum_{i=0}^p \lambda_i b_i$ con $\sum_{i=0}^p \lambda_i = 0$. [5ptos]

Solución: Existe $n \leq p$ tal que

$$y = \sum_{i=0}^{n} \mu_i b_i \quad con \ \sum_{i=0}^{n} \mu_i = 1,$$

$$y - b_0 = (\mu_0 - 1)b_0 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i,$$

se concluye tomando $\lambda_0 = \mu_0 - 1$ y $\lambda_i = \mu_i$ para $i \in \{1, \cdots, n\}$ y tomado valores nulos para los restantes coeficientes.

3. Si $\{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$ es un conjunto afinamente independiente y $x \in \mathbf{aff}\{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$ no nulo, entonces x puede reemplazar a algunos de los puntos y mantener la propiedad de afinamente independiente. Es decir (sin pérdida de generalidad) $\{x, v_1, \cdots, v_n\}$ es un conjunto afinamente independiente. [5ptos]
Sugerencia: Un subconjunto $\{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^d$ es afinamente independiente si y solo si

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i = 0 \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i \in \{0, 1, \cdots, n\}.$$

Solución:

i) Dado $x \in \mathbf{aff}\{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$, se tiene

$$x = \sum_{i=0}^{n} \mu_i v_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^{n} \mu_i = 1 \tag{1}$$

como $x \neq 0$, existe $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$ tal que $\mu_i \neq 0$ por ejemplo $i = 0$.

ii) Veamos que $\{x, v_1, \cdots, v_n\}$ es un conjunto afinamente independiente, tomando una combinación lineal nula,

$$\lambda_0 x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \quad \text{con } \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0. \tag{2}$$

iii) Reemplazando (1) en (2) obtenemos

$$\lambda_0 \mu_0 v_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_0 \mu_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$$

$$(\lambda_0 \mu_0) v_0 + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_0 \mu_i + \lambda_i) v_i = 0.$$

Como $\lambda_0 \mu_0 + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_0 \mu_i + \lambda_i) = 0$, se tiene que $\lambda_0 \mu_0 = 0$ lo cual implica que $\lambda_0 = 0$ pues $\mu_0 \neq 0$.
De manera similar, considerando $\lambda_0 = 0$, se deduce

$$\lambda_0 \mu_i + \lambda_i = 0 \ \forall i \in \{1, \cdots, n\} \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Por tanto, por la sugerencia se concluye.

4. Sea B un conjunto convexo y $x \in \mathbf{aff}(B)$. Probar que $\mathbf{aff}(B \cup \{x\}) = \mathbf{aff}(B)$. [5ptos]

Solución: Procediendo de manera similar a la pregunta 1.

i) Claramente $\mathbf{aff}(B) \subset \mathbf{aff}(B \cup \{x\})$.

ii) Veamos que $\mathbf{aff}(B \cup \{x\}) \subset \mathbf{aff}(B)$, procediendo por contradicción:
Existe $y \in \mathbf{aff}(B \cup \{x\}) \wedge y \notin \mathbf{aff}(B)$, luego

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \exists \{a_i\}_{i=0}^{n} \subset B \cup \{x\} \ \text{ t.q } \ y = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i \ \text{con} \ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1,$$

luego $\exists i \in \{0, 1, \cdots, n\}$ t.q $b_i = x$ porque sino $y \in \mathbf{co}(B)$ lo cual es contradictorio.

iii) Así,

$$y = \lambda_0 x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \quad \text{con } \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1. \tag{3}$$

Además del hecho que $x \in \mathbf{aff}(B)$, se tiene

$$\exists m \in \mathbb{N},\ \exists \{\tilde{b}_i\}_{i=0}^{m} \subset B \ \text{ t.q } \ x = \sum_{i=0}^{m} \mu_i \tilde{b}_i \ \text{con} \ \sum_{i=0}^{m} \mu_i = 1. \tag{4}$$

iv) Reemplazando (4) en (3), se deduce

$$y = \sum_{i=0}^{m} (\lambda_0 \mu_i) \tilde{b}_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \quad \text{con } \lambda_0 \left(\sum_{i=0}^{m} \mu_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Por tanto, $y \in \mathbf{aff}(B)$ lo cual es una contradicción. Y así se concluye.