Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-2

[Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2]
[Prof: Los Profesores] UNI, 21 de septiembre de 2021

Práctica Calificada 1

1. Sea el problema de valor inicial (PVI) [5ptos]

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

sea $D = \{(t,x) : t \in [a,b],\ |x - x_0| \le M\}$ ó $D = \{(t,x) : t \in [a,b],\ |x| < \infty\}$, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua y $(t_0, x_0) \in D$. Si f satisface una condición Lipschitz sobre D, es decir

$$\exists L \ge 0 \text{ t.q. } |f(t,u) - f(t,v)| \le L|u - v| \quad \forall\, (t,u), (t,v) \in D. \tag{2}$$

Entonces (1) tiene una única solución $x = x(t)$ sobre algún intervalo que contenga a t_0. Probar

a) Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe, es continua sobre D y

$$\exists K \ge 0 \text{ t.q. } \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \le K \quad \forall (t,x) \in D,$$

entonces f satisface (2).

Solución: Para todo $(t,u), (t,v) \in D$ se tiene $f(t,u) - f(t,v) = \displaystyle\int_v^u \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dx$. Luego

$$\begin{aligned}
|f(t,u) - f(t,v)| &= \left|\int_v^u \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dx\right| \\
&\le \int_v^u \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| dx \\
&\le \int_v^u K\,dx \le K|u - v|.
\end{aligned}$$

2. Diga el valor de verdad de las siguientes proposiciones y justifique.

a) La EDO $xy''' + 2xy(y'')^2 + 3xy = 5x^3$ es no lineal, su orden es mayor que su grado y su término fuente es $5x^3$. Considere y variable dependiente. [1ptos]

b) No existe una EDO donde alguna isoclina sea solución de ella. [2ptos]

c) La función $f(t,x) = t + \arctan x$ satisface una condición de Lipschitz. [2ptos]

Solución:

a) (F) Expresamos la ecuación en su forma normal $y''' + 2y(y'')^2 + 3y = 5x^2$. El término no lineal es $2y(y'')^2$, su orden es 3 (derivada de mayor orden), su grado es 1 (potencia de y'''). Y su término fuente es $5x^2$.

b) (F) Sea la EDO $y' = y - x$, ésta tiene como conjunto de isoclinas a la familia $y = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. La isoclina $y = x$ es una solución de la EDO.

c) (V) Pues $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| = \left|\dfrac{1}{1+y^2}\right| \leq 1$ para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

3. Un tanque contiene 200 L de salmuera con 10 kg de sal. Ahora entra agua pura al tanque a razón de 5 L/min, y la mezcla bien agitada sale de éste a la misma velocidad. Determine la cantidad de la sal en el tanque después de 30 min. ¿Cuánto tardará la cantidad de sal en el tanque para ser 1 kg? [5ptos]

Solución: Suponiendo que la sal disuelta no cambia el volumen de agua. Sea $M(t)$ la masa de sal en el tanque en un determinado tiempo t. Por el principio de conservación de la masa para la sal en el tanque, se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dM(t)}{dt}\frac{kg}{min} = 5\frac{L}{min} \times 0\frac{kg}{L} - 5\frac{L}{min} \times \frac{M(t)}{200}\frac{kg}{L}, \quad M(0) = 10\,kg.$$

En el sumando del lado derecho hemos hallado (velocidad) $\times$ (concentración) de entrada menos salida. Resolviendo la EDO, obtenemos

$$M(t) = 10e^{-t/40}.$$

La cantidad de sal después de 30 min es $10e^{-3/4} \approx 4{,}72$ kg. Para que que reste 1 kg, despejamos t

$$M(t) = 1 = 10e^{-t/40} \Longrightarrow t = 40\ln 10 \approx 92{,}10\,\mathrm{min}.$$

4. Halle la solución general de la siguiente EDO no lineal de primer orden [5ptos]

$$y' = 3(x-y) - (x-y)^2 + 1,$$

con solución particular $y_1 = x$.

Solución: La EDO se puede expresar como una ecuación de Riccati, por tanto consideramos la solución general como $y = x + 1/z$. Reemplazando, obtenemos

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{3}{z} - \frac{1}{z^2} + 1 \\ 1 - \frac{1}{z^2}z' &= -\frac{3}{z} - \frac{1}{z^2} + 1, \end{aligned}$$

Asi se obtiene la EDO lineal con respecto a z

$$z' - 3z = 1,$$

Multiplicando por el factor de integración e^{-3x} e integrando, obtenemos

$$z = -\frac{1}{3} + Ce^{3x},$$

luego la solución general será

$$y = x + \frac{1}{-\frac{1}{3} + Ce^{3x}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Otra forma cambio posible es $u = x - y$, reemplazando en la EDO, obtenemos una nueva EDO no lineal pero separable

$$u' = u^2 - 3u,$$

cuya solución es

$$u = \frac{3}{1 - Ce^{3x}}\ ,\ C \in \mathbb{R}.$$

Reemplazando u en $y = x - u$, se obtiene la solución.