Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-2

[**Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2**]
[**Prof: Los Profesores**] UNI, 07 de diciembre de 2021

Práctica Calificada 6

1. Dado que los polinomios de Legendre estan determinados por la fórmula de Rodriguez

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Demuestre que los polinomios de Legendre son mutuamente ortogonales en el espacio $PC[-1, 1]$ (espacio de funciones polinomiales a trozos sobre el intervalo $[-1, 1]$) (Sug. Considere que los P_n son soluciones de la ecuación diferencial de Legendre) [6ptos]

2. Demuestre que las únicas soluciones acotadas (salvo constantes) de la ecuación de Legendre $L[y] = 0$ alrededor de $x = \pm 1$ son los polinomios de Legendre de la ecuación de Legendre:

$$L[y] = (1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0.$$

   (Sug. Para el caso $x = 1$, considere el cambio de variables $t = x - 1$) [7ptos]

3. Demuestre la relación de recurrencia de los polinomios de Legendre

$$P_{n+1} = \frac{2n + 1}{n + 1} x P_n - \frac{n}{n + 1} P_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

   (Sug. Considere una base del subespacio $\mathcal{P}_{n+2}$ de polinomios de grado menor o igual a n de $PC[-1, 1]$ para la función $xP_n(x)$) [7ptos]