PROBLEMAS DE CONTORNO STURM LIOUVILLE

irlamn@uni.edu.pe

INTRODUCCION

Una transformación lineal $L: C^n[a,b] \to C[a,b]$ es un operador diferencial lineal de orden *n* (en el intervalo [a,b]) si puede expresarse en la forma :

$$L = a_n(x)D^n + - - - - + a_1(x)D + a_0(x)$$

donde D=d/dx y los coeficientes $a_j(x)$, $j \in \{1, --, n\}$ son funciones continuas en [a,b], con $a_n(x)$ no idénticamente nula en [a,b]. En particular si $f \in C^n([a,b])$, entonces

$$L[f](x) = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}f(x) + - - + a_0(x)f(x)$$

DEFINICION 1.-Se dice que un operador diferencial lineal de segundo orden ***L*** definido en un intervalo [a,b] esta en forma **autoadjunta**, si:

$$L = D(p(x)D) + q(x)$$

donde p es cualquier función en $C^1[a,b]$ tal que $p(x) > 0$ (o bien $p(x) < 0$) para todo $x \in [a,b]$ y q es una función arbitraria en $C[a,b]$.

Consideremos la EDO lineal de 2º orden

$$(1) \qquad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x) = 0;\ a_2(x) \neq 0.;\ x \in I$$

y sea

$$p(x) = \exp\left(\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx\right).$$

Como

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) = p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}p(x)\frac{dy}{dx}$$

entonces la ecuación (1) se puede escribir

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+\frac{a_0(x)}{a_2(x)}p(x)y=0$$

o más simple

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=0 \tag{2}$$

donde

$$q(x)=\frac{a_0(x)}{a_2(x)}p(x)$$

La ecuación (2) se conoce como la **forma autoadjunta** de la ecuación (1)

EJEMPLO 1.- La forma autoadjunta de la **ecuación de Legendre**

$$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \qquad \text{es} \qquad \frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0$$

EJERCICIOS 1 : Expresar cada unas de las ecuaciones siguientes en forma autoadjunta

a) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$, $I = (-1,1)$

b) $x^2y'' - 2x^3y' - (4-x^2)y = 0$, $I = \Re^+$

c) $(x^3-2)y'' - x^2y' - 3y = 0$, $I =]\sqrt[3]{2}, \infty[$

DEFINICION 2.- Un **problema con valores en la frontera** (PVF o PVC) para ecuaciones diferenciales lineales de 2º orden consiste en :

1º .- Una ecuación del tipo

$$\text{(3)} \qquad \mathbf{Ly=h}$$

en que **L** es un operador diferencial lineal de 2º orden definido en [a,b] y $h \in C\,[a,b]$, y

2º Un par de condiciones de frontera de la forma :

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) &= \gamma_1 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) &= \gamma_2 \end{aligned}$$

donde $\alpha_i, \beta_i, \gamma_j$ son constantes. Al menos una de las α_i y una de las β_i debe ser no nula y (4) debe contener términos no nulos incluyendo a cada uno de los extremos.

NOTAS. 1º.- Se dirá que las condiciones de fronteras dadas son homogéneas si

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0.$$

2º.- Se puede probar que el conjunto ***S*** de las funciones dos veces diferenciables en [a,b] que satisfacen condiciones de frontera homogéneas (4) es un subespacio de $C^2[a,b]$.

Supongamos un PVF definido en la siguiente forma:

$$(5) \qquad \begin{cases} Ly = h \\ \alpha_1 y(a)\alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = 0 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0 \end{cases}$$

donde L es un operador diferencial lineal L: ***S***$\to$C[a,b].

Las soluciones del PVF (5) están íntimamente ligadas a las soluciones del sistema:

Si h **= 0**

$$(6) \qquad \begin{cases} Ly = \lambda y \\ \alpha_1 y(a)\alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = 0 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0 \end{cases}$$

Los valores de λ para los cuales la ecuación Ly=λy tiene soluciones no nulas en el subespacio ***S*** de C^2[a,b], son llamados **valores propios** (o valores característicos) de L, y para cada valor propio λ, las funciones no nulos en ***S*** que satisfacen Ly=λy se llaman **funciones propias** de L, correspondientes a ese λ.

PROBLEMA DE CONTORNO ASOCIADO A UNA EDO EN SU FORMA AUTOADJUNTA HOMOGÉNEO

Los problemas de contorno que nos aparecerán al utilizar el método de **separación de variables** en las **EDP** dependerán de un parámetro λ. Para analizar sus propiedades convendrá escribir la ecuación de la siguiente forma:

$$(P)\begin{cases}(py')' - qy + \lambda ry = 0\\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = 0\\ \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0\end{cases}$$

Ante un problema como (P) nuestro objetivo será **hallar los valores de λ para los que hay soluciones no triviales** (**autovalores** de (P)) y esas **soluciones no triviales** correspondientes a cada λ (**autofunciones** de (P) asociadas a λ).

Un ejemplo de ecuación asociada a (P) es la ecuación

$$y'' + \lambda y = 0$$

(la más sencilla y la que más veces aparece separando variables). En ellos existirá una sucesión infinita de autovalores y las autofunciones asociadas a λ distintos serán **ortogonales** entre sí. Después precisaremos para qué tipo de problemas de contorno (P) se mantienen esas propiedades. Serán los que se llaman **problemas de Sturm-Liouville separados**. Hablaremos también brevemente de los problemas **periódicos** y de los **singulares**.

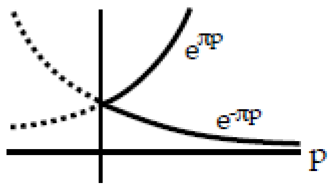
También veremos que cualquier función f continua y derivable a trozos se puede escribir como una **serie de autofunciones** de un problema de Sturm-Liouville, lo que será muy útil en la resolución de EDPs. Este resultado generaliza los desarrollos de Fourier en **series de senos y cosenos**, cuyas propiedades básicas también veremos. Aunque la convergencia natural de estas series sea la llamada 'convergencia en media', nosotros nos limitaremos a tratar la convergencia puntual y uniforme.

Algunos ejemplos

$$\boxed{(\mathrm{P}_1)\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=0,\ y(\pi)=0 \end{cases}}$$ Imponemos las condiciones de contorno en cada caso:

Si $\lambda<0$ la solución general es $y=c_1\,\mathrm{e}^{px}+c_2\,\mathrm{e}^{-px}$, con $p=\sqrt{-\lambda}>0$.

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=c_1+c_2=0 \\ y(\pi)=c_1\,\mathrm{e}^{\pi p}+c_2\,\mathrm{e}^{-\pi p}=0 \end{array}\right\} \to c_2=-c_1 \searrow \quad c_1[\mathrm{e}^{\pi p}-\mathrm{e}^{-\pi p}]=0$$



Por tanto $c_1=c_2=0$ (pues $\mathrm{e}^{\pi p}\neq\mathrm{e}^{-\pi p}$ si $p>0$).

Ningún $\lambda<0$ es autovalor.

Si $\lambda=0$ es $y=c_1+c_2x \to \left.\begin{array}{l} y(0)=c_1=0 \\ y(\pi)=c_1+c_2\pi=0 \end{array}\right\} \to y\equiv 0$. $\lambda=0$ tampoco es autovalor.

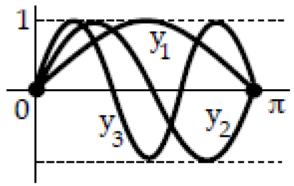
Y para $\lambda>0$ es $y=c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\,wx$, con $w=\sqrt{\lambda}>0 \to \left.\begin{array}{l} y(0)=c_1=0 \downarrow \\ y(\pi)=c_2\,\mathrm{sen}\,w\pi=0 \end{array}\right\}$

Para tener solución no trivial debe ser $c_2\neq 0$.

Para ello, $w\pi=\pi\sqrt{\lambda}=n\pi \to \lambda_n=n^2$, $n=1,2,\ldots$

Para cada uno de estos λ_n hay soluciones no triviales

$$y_n=c_2\,\mathrm{sen}\,nx\equiv\{\mathrm{sen}\,nx\}\ .$$



Observemos que se cumple si $m\neq n$: $\int_0^\pi \mathrm{sen}\,nx\,\mathrm{sen}\,mx\,dx=0$,

pues $\frac{1}{2}\int_0^\pi[\cos(n-m)x-\cos(n+m)x]\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{sen}(n-m)x}{n-m}-\frac{\mathrm{sen}(n+m)x}{n+m}\right]_0^\pi=0$.

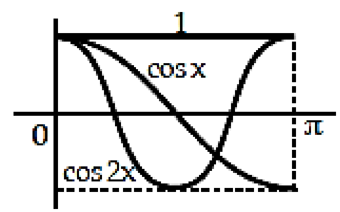
Observación: (P$_1$) **tiene una sucesión infinita de autovalores** $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$ **. Las autofunciones** $y_n = \{\operatorname{sen} nx\}$ **asociadas a cada** λ_n **forman un espacio vectorial de dimensión** 1 **. La** n**-sima autofunción posee** $n-1$ **ceros en** $(0,\pi)$**. Las autofunciones distintas son ortogonales en** $[0,\pi]$ [respecto del producto escalar $(u,v) = \int_0^\pi u\,v\,dx$].

$$\boxed{(\mathrm{P}_2)\ \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0,\ y'(\pi) = 0 \end{cases}}$$

$$\lambda < 0 \to \left.\begin{array}{l} y'(0) = p[c_1 - c_2] = 0 \\ y'(\pi) = p[c_1 e^{\pi p} - c_2 e^{-\pi p}] = 0 \end{array}\right\} \to c_2 = c_1 \to c_1[e^{\pi p} - e^{-\pi p}] = 0 \to y \equiv 0\,.$$

$$\lambda = 0 \to \left.\begin{array}{l} y'(0) = c_2 = 0 \\ y'(\pi) = c_2 = 0 \end{array}\right\} \to \lambda = 0 \text{ autovalor con autofunción } y_0 = c_1\,.$$

$$\lambda > 0 \to \left.\begin{array}{l} y'(0) = wc_2 = 0 \downarrow \\ y'(\pi) = -wc_1 \operatorname{sen} w\pi = 0 \end{array}\right\} \to \lambda_n = n^2\,,\ y_n = c_1 \cos nx\,.$$



Los $\lambda_n = n^2$ y las $y_n = \{\cos nx\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ tienen las mismas propiedades resaltadas para el problema anterior. Por ejemplo, la autofunción que ocupa el lugar n se anula $n-1$ veces y sigue habiendo ortogonalidad:

$$\int_0^\pi \cos nx \cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x]\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(n-m)x}{n-m} + \frac{\operatorname{sen}(n+m)x}{n+m}\right]_0^\pi = 0\,.$$

Ahora pasemos analizar el caso mas general:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y + \lambda c(x)y = 0\ ,\quad \text{con}\quad a, b, c \in C[a,b]\ ,\quad c(x) > 0 \ \text{ en } \ [a,b]\,.$$

La reescribimos de otra forma. Multiplicando por $e^{\int a\,dx}$, a la Ec. se tiene :

$$\left[\mathrm{e}^{\int a} y'\right]' + b\,\mathrm{e}^{\int a} y + \lambda\, c\,\mathrm{e}^{\int a} y \equiv [py']' - qy + \lambda r y = 0\,,\ \text{con}\ p \in C^1,\ q, r \in C\,,\ p, r > 0\,.$$

$$(\mathbf{P_{SL}})\ \begin{cases} [py']' - qy + \lambda r y = 0 \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = 0,\ \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \quad \text{(condiciones separadas)} \end{cases}$$

donde $p \in C^1[a,b]\,,\ q, r \in C[a,b]\,,\ p, r > 0$ en $[a,b]\,,\ \ |\alpha| + |\alpha'|,\ |\beta| + |\beta'| \neq 0\,.$

A la Ec. de $(\mathbf{P_{SL}})$ se suele denominar '**autoadjunta**' o '**Sturm- Liouville**'.

TEOREMA 1.-

Los autovalores de (P_{SL}) son una sucesión infinita $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ que tiende a ∞. Las autofunciones $\{y_n\}$ forman un espacio vectorial de dimensión 1 y cada y_n posee exactamente $n-1$ ceros en (a, b). Las autofunciones asociadas a autovalores distintos son ortogonales en $[a, b]$ respecto al peso r, es decir:

$$\langle y_n, y_m \rangle \equiv \int_a^b r\, y_n y_m \, dx = 0 \text{ , si } y_n, y_m \text{ están asociadas a } \lambda_n \neq \lambda_m .$$

Si $\alpha\alpha' \geq 0$, $\beta\beta' \geq 0$ y $q(x) \geq 0$ en $[a, b]$ entonces todos los $\lambda_n \geq 0$. En particular, para $y(a) = y(b) = 0$ [o sea, si $\alpha' = \beta' = 0$] todos los $\lambda_n > 0$.

Demostración

Aqui daremos una idea de la demostración:

la primera afirmación y la de los ceros (Ejercicio)

$$y'(a) = \frac{\alpha}{\alpha'} y(a) \text{ , } \alpha' \neq 0 \text{ ; } y'(b) = -\frac{\beta}{\beta'} y(b) \text{ , } \beta' \neq 0$$

[y es $y(a) = 0$, si $\alpha' = 0$; $y(b) = 0$, si $\beta' = 0$].

Si y, y^* están asociadas al mismo λ, se deduce que dependen linealmente, pues su wronskiano se anula en a (o también en b):

$$|W|(y,y^*)(a)=yy^{*\prime}-y'y^*\Big|_{x=a}=0\,,\ \text{si}\ \alpha'=0\ \text{o si}\ \alpha'\neq 0\,.$$

Sean ahora y_n, y_m asociadas, respectivamente, a λ_n y λ_m:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_n r y_n=-[py_n']'+qy_n\\ \lambda_m r y_m=-[py_m']'+qy_m\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{Multiplicando por } y_m \text{ e } y_n\,,\\ \text{restando e integrando:}\end{array}$$

$$[\lambda_n-\lambda_m]\int_a^b ry_ny_m\,dx=\int_a^b\left[y_n(py_m')'-y_m(py_n')'\right]dx\overset{\text{partes}}{=}\left[p(y_ny_m'-y_my_n')\right]_a^b=0$$

pues $|W|(y_n,y_m)=0$ en a y en b. Por tanto, si $\lambda_n\neq\lambda_m$ se tiene que $\langle y_n,y_m\rangle=0$.

Si y es la autofunción asociada a λ y $\alpha\alpha'\geq 0$, $\beta\beta'\geq 0$, $q\geq 0$ entonces

$$\lambda\int_a^b ry^2dx=\int_a^b\left[-y(py')'+qy^2\right]dx=\int_a^b\left[p(y')^2+qy^2\right]dx-\left[pyy'\right]_a^b\geq 0\ \Rightarrow\ \lambda\geq 0\,,$$

pues $\int_a^b ry^2dx>0$ ($r>0$) , $\int_a^b\left[p(y')^2+qy^2\right]dx\geq 0$ ($p>0$, $q\geq 0$) ,

$$-[pyy'](b)=\begin{cases}\frac{\beta}{\beta'}p(b)[y(b)]^2\geq 0 \text{ si } \beta'\neq 0\\ 0 \text{ si } \beta'=0\end{cases}\ ,\quad [pyy'](a)=\begin{cases}\frac{\alpha}{\alpha'}p(a)[y(a)]^2\geq 0 \text{ si } \alpha'\neq 0\\ 0 \text{ si } \alpha'=0\end{cases}\ .$$

Si $y(a)=y(b)=0$, $y=\{1\}$ no es autofunción $\Rightarrow y'\not\equiv 0\Rightarrow\int_a^b p(y')^2>0\Rightarrow\lambda>0$.

Ejemplo 1.-

$$\boxed{(\mathrm{P})\ \begin{cases} y''-2y'+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(1)=0 \end{cases}}$$

$$\begin{array}{l} \mu^2-2\mu+\lambda=0\,, \\ \mu=1\pm\sqrt{1-\lambda}\,. \end{array} \qquad [\mathrm{e}^{-2x}y']'+\lambda\mathrm{e}^{-2x}y=0$$

Sabemos que los $\lambda\geq 0$, pero esto no ahorra cálculos, pues y hay que mirar $\lambda<,=,>1$:

$\lambda<1$: $y=c_1\,\mathrm{e}^{(1+p)x}+c_2\,\mathrm{e}^{(1-p)x}$, $y'=c_1(1+p)\,\mathrm{e}^{(1+p)x}+c_2(1-p)\,\mathrm{e}^{(1-p)x}$, $p=\sqrt{1-\lambda}\ \to$

$$\left.\begin{array}{l} c_1[1+p]+c_2[1-p]=0 \\ c_1[1+p]\mathrm{e}^{1+p}+c_2[1-p]\mathrm{e}^{1-p}=0 \end{array}\right\} \to c_2(1-p)\mathrm{e}[\mathrm{e}^{-p}-\mathrm{e}^{p}]=0 \to p=1\ \ (\lambda=0),\ \ y_0=\{1\}\,.$$

$\lambda=1$: $y=[c_1+c_2x]\,\mathrm{e}^x$, $y'=[c_1+c_2+c_2x]\,\mathrm{e}^x \to \left.\begin{array}{l} c_1+c_2=0 \\ c_1+2c_2=0 \end{array}\right\} \to y\equiv 0$. $\lambda=1$ no autovalor.

$$\lambda>1:\ \begin{array}{l} y=[c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\,wx]\,\mathrm{e}^x,\ w=\sqrt{\lambda-1} \\ y'=[(c_1+c_2w)\cos wx+(c_2-c_1w)\,\mathrm{sen}\,wx]\mathrm{e}^x \end{array} \to y'(0)=c_1+c_2w=0 \to$$

$$y'(1)=c_2\,\mathrm{e}(1+w^2)\,\mathrm{sen}\,w=0\ \to$$

$$w=n\pi,\ n=1,2,\ldots\ \to\ \lambda_n=1+n^2\pi^2\,,\ y_n=\{\mathrm{e}^x[\mathrm{sen}\,n\pi x-n\pi\cos n\pi x]\}\,,\ n=1,2,\ldots$$

Las autofunciones serán ortogonales respecto al peso $r(x)=\mathrm{e}^{-2x}$:

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}[\mathrm{sen}\,n\pi x-n\pi\cos n\pi x]\,dx=0$$

$$\int_0^1[\mathrm{sen}\,n\pi x-n\pi\cos n\pi x][\mathrm{sen}\,m\pi x-m\pi\cos m\pi x]\,dx=0\ \ (m\neq n)$$

Ejemplo 2.-

$$\boxed{(\mathrm{P})\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \\ y(1)=y(\mathrm{e})=0 \end{cases}}$$

$p(x)=\mathrm{e}^{\int a}=\mathrm{e}^{\int\frac{dx}{x}}=x \to [xy']'+\lambda\frac{y}{x}=0$. Es $r(x)=\frac{1}{x}$, $(p,r>0$ en $[1,\mathrm{e}])$.

Ecuación de Euler: $r(r-1)+r+\lambda=0 \to r=\pm\sqrt{-\lambda}$. Basta mirar los $\lambda>0$:

$y=c_1\cos(w\ln x)+c_2\,\mathrm{sen}(w\ln x)$, $\left.\begin{matrix} c_1=0 \\ c_2\,\mathrm{sen}\,w=0 \end{matrix}\right\}$ $\lambda_n=n^2\pi^2$, $y_n=\{\mathrm{sen}(n\pi\ln x)\}$, $n=1,2,\ldots$

Como siempre, las autofunciones son ortogonales: $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{sen}(n\pi\ln x)\,\mathrm{sen}(m\pi\ln x)\,dx}{x}=0$, $m\neq n$.

Ejercicio

Determine las autofunciones en el siguiente problema

$$(\mathrm{P})\begin{cases} [py']'-qy+\lambda ry=0,\ \text{con } p(a)=p(b),\ p\in C^1[a,b],\ q,r\in C[a,b],\ p,r>0 \text{ en } [a,b] \\ y(a)=y(b),\ y'(a)=y'(b) \quad \text{(condiciones periódicas)} \end{cases}$$

y pruebe que:

$$[p|W|(y_n,y_m)](b)=[p|W|(y_n,y_m)](a).$$

NOTAS:

1. Los problemas de Sturm-Liouville pueden generalizarse. En la demostración del teorema se aprecia que lo esencial para la ortogonalidad es que $[p|W|(y_n, y_m)]_a^b = 0$; esto sucede para otros tipos de condiciones de contorno (y para otros muchos no).

2. Se llaman problemas **autoadjuntos** aquellos tales que $[p|W|(u, v)]_a^b = 0$

   para todo par de funciones u, v que cumplan sus condiciones de contorno.

3. El término 'autoadjunto' se debe a que llamando $L[y] = -[py']' + qy$ y $(u,v) = \int_a^b uv\,dx$, se tiene que $(L[u], v) = (u, L[v])$ para todo par de funciones u, v que cumplen las condiciones de contorno: el operador L es 'autoadjunto' en ese conjunto de funciones.

Consideremos el llamado problema de Sturm-Liouville separado regular:

$$\boxed{(\mathrm{P_s})\begin{cases}[py']' - qy + \lambda r y = 0\\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = 0,\ \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0\end{cases}}$$

y sean $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ sus autofunciones asociadas a los $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$

La importante propiedad que veremos en esta sección es que **cualquier función f suficientemente regular en $[a,b]$ puede ser desarrollada en serie de dichas autofunciones**, es decir:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)}$$

Supongamos que este desarrollo es válido y que la serie puede ser integrada término a término. Entonces, por ser las y_n ortogonales:

$$\int_a^b r f y_m \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b r\, y_n y_m \, dx = c_m \int_a^b r\, y_m y_m \, dx$$

Por tanto, si representamos el producto escalar respecto al peso $r(x)$:

$$\boxed{\langle u, v\rangle = \int_a^b r\, u\, v \, dx} \quad \text{debe ser} \quad \boxed{c_n = \frac{\langle f, y_n\rangle}{\langle y_n, y_n\rangle}}\ ,\quad n = 1, 2, \ldots$$

NOTA

El r es el de la ecuación en forma autoadjunta; en la mayoría de los problemas que aparecerán **al resolver** separando variables **a las EDP** peso será 1, pero no siempre.