UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICAS

Primera Práctica Dirigida
ANÁLISIS CONVEXO
Ciclo 2021-1

---

1. Sea $A \subset V$, V espacio lineal. Si A es convexo y $x \in V \setminus A$. Mostrar que
$$\bigcup_{a \in A} [x, a]$$
es convexo.

2. Sea d una métrica euclideana sobre $\mathbb{R}^n$, y sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Mostrar que
$$\{x \in \mathbb{R}^n / d(x, C) \leq \varepsilon\}$$
es convexo si $\varepsilon > 0$.

3. Mostrar que los siguientes conjuntos son convexos
   (a) $S_1 = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 3x_4 \leq 5, -2x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4 \leq 3, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, x_i \geq 0\}$
   (b) $S_2 = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \sum a_i x_i^2 \leq c, \ \ a_i > 0, c > 0\}$

4. Mostrar que un cono convexo K es un subespacio si y sólo si $K = -K$.

5. Mostrar que
$$C = \{(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) / \xi_i \geq 0 \ \ (1 \leq i \leq n) \ \ y \ \ \sum_{i=1}^{n} \xi = 1\}.$$
es un politopo en $\mathbb{R}^n$. Determine los vértices de C.

6. Demostrar que si A es convexo, se puede decir lo mismo de $\overline{A}$ y $\mathring{A}$.

7. Sea $S = C_1 \cap .... \cap C_m$ donde $C_i \subset \mathbb{R}^n$ son convexos, $i = 1, ..., m$. Mostrar que la capsula convexa de S ($co\ S$)
$$co\ S = \{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i : \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1, x_i \in C_i\}.$$

8. Sea $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle s_j, x \rangle \geq 0, j = 1, ..., m, \ \ \langle s_{m+j}, x \rangle \leq 0, j = 1, ..., p\}$, con $s_j \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo.

9. Sea una familia de conjuntos convexos, entonces la intersección es convexa. ¿La unión será tambien convexa?

10. Sean $C_1, ..., C_k$ conjuntos convexos en $\mathbb{R}^{n_i}$ cada C_i, si y sólo si $C_1 \times C_2 \times ... \times C_k$ es convexo en $\mathbb{R}^{n_i} \times ....\mathbb{R}^{n_k}$.

11. Probar que si $S \subset \mathbb{R}^n$ es abierto entonces $co\ S$ es abierto.

12. Probar: Si $dim(C) = n \Longleftrightarrow int(C) \neq \emptyset$, donde C es un conjunto convexo.

13. Sea $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación afín, es decir
$$A(\alpha x + (1 - \alpha)x') = \alpha A(x) + (1 - \alpha)A(x') \ \ x, x' \in \mathbb{R}^n, \ \ \alpha \in \mathbb{R}$$
y $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Entonces $A(C) \subset \mathbb{R}^m$ es convexo. Si $D \subset \mathbb{R}^m$ es convexo entonces $A^{-1}(D) = \{x \in \mathbb{R}^n; A(x) \in D\}$ es comnvexo en $\mathbb{R}^n$.