Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-2

[**Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2**]
[**Los Profesores**] UNI, 28 de septiembre de 2021

Segunda Práctica Dirigida

1. Reduzca las siguientes ecuaciones diferenciales individuales a un sistema de ecuaciones de primer orden (x es la variable dependiente y t, la variable independiente):

$$a)\quad x''' + 3xx' = 6t^2 \qquad b)\quad x''' - 3x = e^{2t}$$

2. Reduzca el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales a un sistema de ecuaciones de primer orden (t es la variable independiente):

$$\begin{aligned} x^{'''} &= 3y^{'} + \cos t, \quad x(\pi) = 0, \quad x^{'}(\pi) = 4, \quad x^{''}(\pi) = -2 \\ y^{''} &= 2ty^{'} - x + e^t, \quad y(0) = 2, \quad y^{'}(0) = 1 \end{aligned}$$

3. Determine si el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales es $a)$ lineal o no lineal, $b)$ homogéneo o no homogéneo y $c)$ si tiene coeficientes constantes o variables:

$$\begin{aligned} x^{'''} &= 2xy - y^{'} + \cos t \\ y^{''} &= 2ty^{'} - x + e^t \end{aligned}$$

4. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   a) Dadas tres funciones linealmente dependientes en un intervalo, entonces necesariamente una de ellas es múltiplo constante de una de las otras dos en ese intervalo.

   b) Si el wronskiano de cinco funciones es cero para algunos valores de x y no cero para otros valores de x. Entonces estas cinco funciones son linealmente dependientes.

   c) Si y_1 y y_2 son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes continuos, entonces existen algunos valores de x para el cual el wronskiano de y_1 y y_2 es cero.

   d) Existe una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes que puede tener como solución a las siguiente funciones $x, x+1$ y x^2.

5. Considere el circuito eléctrico mostrado en la Figura 1, que consiste en dos lazos cerrados. Obtenga las ecuaciones diferenciales que rigen las corrientes I_1 e I_2 que fluyen por los inductores L_1 y L_2, respectivamente.

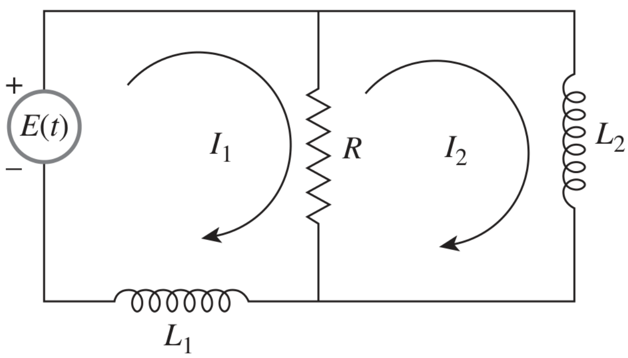


Figura 1: circuito eléctrico

6. Los tanques cilíndricos que se muestran en la Figura 2 tienen las áreas de fondo A_1 y A_2. El caudal másico de entrada $q_{mi}(t)$ de la fuente es una función dada del tiempo. La salida descarga a presión atmosférica. Los tubos se modelan como resistencias lineales. Esto significa que el caudal másico a través del tubo es proporcional a la diferencia de presión entre los extremos del tubo, e inversamente proporcional a la resistencia R. El valor de la resistencia R depende parcialmente de las propiedades del fluido y de la longitud y el diámetro del tubo. Es posible encontrar métodos para calcular R en textos sobre mecánica de fluidos.
   Desarrolle un modelo de segundo orden de la altura de líquido $h1$ para el caso en el que los tubos son idénticos de modo que $R_1 = R_2 = R$ y el segundo tanque tiene un área de fondo del triple de la del primero, de modo que $A_1 = A$ y $A_2 = 3A$. Si el flujo de entrada se cierra, ¿cuándo tardarán los tanques en vaciarse?¿Oscilarán las alturas?

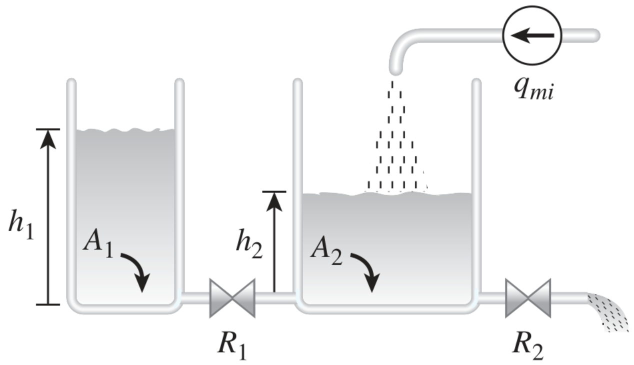


Figura 2: tanques cilíndricos

7. ¿Cuál es la principal limitación del método de eliminación?¿Es aplicable a sistemas no homogéneos?¿Es aplicable a sistemas no lineales?¿Es aplicable a sistemas con coeficientes variables?

8. Use el método de eliminación para determinar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$x' = -3x + 2y$$
$$y' = 2x - 6y$$

9. Use el método de eliminación para determinar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$x' = -3x + 2y + 5$$
$$y' = 2x - 6y$$

10. Use el método de eliminación para determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con las condiciones iniciales específicas:

$$x' = -3x + 2y + 5, \qquad x(0) = 3$$
$$y' = 2x - 6y, \quad y(0) = 0$$

11. Determine si los siguientes pares de funciones y_1 y y_2 son linealmente dependientes o independientes 1) por inspección y 2) determinando su wronskiano.

    a) $y_1 = x + 1,\ y_2 = x^2 - 1$
    b) $y_1 = \sin(\alpha + \beta),\ y_2 = \sin\alpha + \sin\beta$

12. Considere las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden y dos de sus soluciones, y_1 y y_2 para $x > 0$. Por inspección, identifique el par de soluciones cuyo wronskiano W(y 1, y 2) no es nunca cero para x . 0. Verifique sus hallazgos calculando $W(y_1, y_2)$ para cada caso.

    a) $y'' - 4y = 0,\ y_1 = e^{2x}$ y $y_2 = -3e^{2x}$
    b) $y'' - 4y = 0,\ y_1 = e^{2x}$ y $y_2 = e^{-2x}$
    c) $y'' - 4y = 0,\ y_1 = 3e^{-2x}$ y $y_2 = e^{3-2x}$

13. Usando la siguiente solución, determine la segunda solución linealmente independiente de la ecuación lineal homogénea de segundo orden dada mediante el método de reducción de orden:

$$y'' - y = 0, \quad y_1 = e^x$$

14. Determine la solución general de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes:

    a) $y'' + y = 0$
    b) $y'' + 2y' + y = 0$
    c) $y'' - y = 0$

15. Determine la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$y'' + 4y = 0, \quad y(\pi) = 0\ ,\ y'(\pi) = 1.$$

16. Determine la solución del siguiente problema de valor en la frontera:

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 100\ ,\ y(5) = 0.$$

17. Determine las soluciones generales de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes, usando la solución particular dada, y exprésela en la forma más simple:

    a) $y'' - y = 2, \quad y_p = -2$
    b) $y'' - y = 2, \quad y_p = -2 + 3e^x$

18. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de la forma

$$y^{'} = \mathbf{A} \cdot y$$

donde la matriz **A** es la siguiente:

$(a)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad(b)\ \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad(c)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$(d)\ \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad(e)\ \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad(f)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(g)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad(h)\ \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad(i)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

19. Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales:

$(a)\ \begin{cases} x^{'} = y \\ y^{'} = -x \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$ $\quad(b)\ \begin{cases} x^{'} = -4(x+y) \\ x^{'} + 4y^{'} = -4y \\ x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases}$ $\quad(c)\ \begin{cases} x^{'} = 3x + 8y \\ y^{'} = -3y - x \\ x(0) = 6, y(0) = -2 \end{cases}$

$(d)\ \begin{cases} x^{'} = x - z \\ y^{'} = 2y \\ z^{'} = x + z \\ x(0) = -2, y(0) = 2, z(0) = -1 \end{cases}$ $\quad(e)\ \begin{cases} x^{'} = y + z \\ y^{'} = -x + z \\ z^{'} = -x - y \\ x(0) = y(0) = z(0) = -1 \end{cases}$

20. Utilice el método de coeficientes indeterminados para hallar la solución general de la siguiente EDO:

$$y'' + 9y = xe^x \sin 2x - 5 \sin 2x + 3 \cos 2x.$$

21. Utilice el método de variación de parámetros para hallar la solución general de la siguiente EDO:

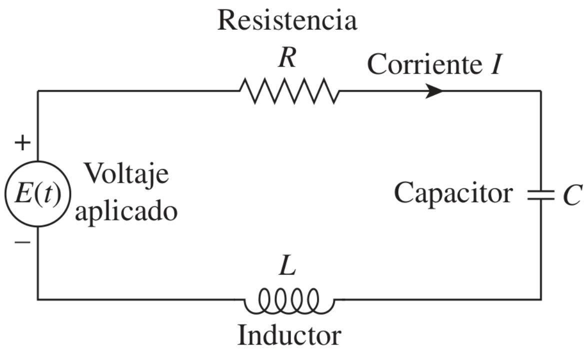
$$y'' - 2y' + y = \frac{6e^x}{x^a} \quad \text{con } a > 0.$$

22. Considere un circuito en serie RLC con resistencia $R = 2 \times 10^5\,\Omega$, inductancia $L = 0{,}1\,H$, capacitancia $C = 2 \times 10^{-5}\,F$ y un voltaje variable $E(t) = 5\cos 60t$. Este circuito es gobernado por la siguiente EDO:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE(t)}{dt}.$$

a) Determine la corriente de estado estacionario en el circuito, $I(t)$.

b) Determine el valor de la capacitancia C que maximizará esta corriente, manteniendo constantes R y L.



23. Resolver los siguientes sistemas y problemas de condiciones iniciales

$$(a)\begin{cases} x' = y + te^{2t} \\ y' = -2x + 3y + e^{2t} \\ x(0) = 1, y(0) = -1. \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} x' = 4x + 3y + 5z + e^t \operatorname{sen} t \\ y' = -y - 4z \\ z' = 2y + 3z \end{cases}$$

$$(c)\quad \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (d)\begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = -3x - y + z + t \\ z' = 9x + 3y - 4z \\ x(0) = z(0) = 0, y(0) = 3. \end{cases}$$

$$(e)\begin{cases} x' = -2x - 5y + t \\ y' = x + 2y + t^2 \\ x(0) = 1, y(0) = 0. \end{cases} \qquad (f)\begin{cases} \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \\ x(0) = -1, y(0) = 0. \end{cases}$$

24. Un edificio consta de dos zonas A y B (véase la siguiente figura). La zona A es calentada por un calefactor que genera $8000 Kcal/h$. La capacidad calorífica de la zona A es de $1/4°C$ por cada $1000 Kcal$. Las constantes de tiempo de transferencia de calor son entre la zona A y el exterior 4 horas, 2 horas entre las zonas A y B y 5 horas entre la zona B y el exterior. Si la temperatura exterior es de $0°C$, determinar la temperatura de cada zona.

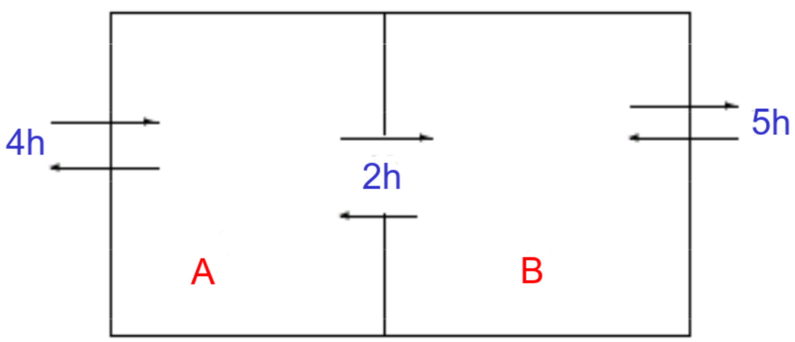


Figura 3: zonas A y B