Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-2

[Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2]
[Los Profesores] UNI, 12 de octubre de 2021

Tercera Práctica Dirigida

1. Determine la transformada de Laplace de las siguientes funciones que están definidas para toda $t \geq 0$.

$$a)\quad f(t) = 5 \qquad b)\quad f(t) = e^{3t} \qquad c)\quad f(t) = \operatorname{senh} at$$

2. Determine si las siguientes funciones tienen una transformada de Laplace:

$a)\quad f(t) = \dfrac{1}{t}$ $\qquad$ $b)\quad f(t) = e^{-2t^3}$

$c)\quad \operatorname{senh} 5t$ $\qquad$ $d)\quad f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \leq 3 \\ t^2 & , \quad t > 3 \end{cases}$

3. Determine la transformada de Laplace de las siguientes funciones usando las propiedades básicas de la transformada:

$$a)\quad f(t) = t^2 \operatorname{sen} 2t \qquad b)\quad f(t) = 3t^2 - \operatorname{sen} 3t$$

4. Determine la transformada de Laplace de las siguientes ecuaciones diferenciales y obtenga una relación para la transformada de la función incógnita, $Y(s)$.

$$a)\quad y''' - 2y' + 5y = 0 \qquad b)\quad y'' = 3te^{2t}$$

5. Determine la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones usando las propiedades básicas de la transformada inversa de Laplace.

$$a)\quad F(s) = 5 + \frac{1}{s-2} \qquad b)\quad F(s) = \frac{s}{s^2-4} \qquad c)\quad F(s) = \frac{3}{s(s^2+1)}$$

6. Determine la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones usando el método de fracciones parciales siempre que sea necesario.

$$a)\quad F(s) = \frac{3s-1}{s(s+1)(s-3)} \qquad b)\quad F(s) = \frac{s+1}{s^3-1}$$

7. Determine la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones usando el teorema de convolución:

$$a)\quad F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \qquad b)\quad F(s) = \frac{5}{s^2(s-1)^2}$$

8. Use la definición para determinar la transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} 2 & , \quad 0 < t \leq 5, \\ 0 & , \quad 5 < t \leq 10, \\ e^{4t} & , \quad 10 < t. \end{cases}$$

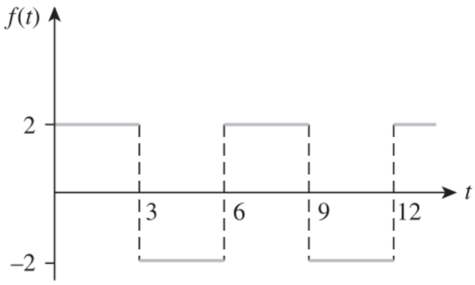
9. Hallar la transformada de Laplace inversa de la siguiente función:

$$\frac{2s-3}{s^2+2s+10}.$$

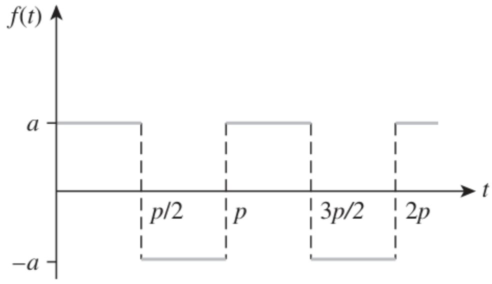
10. Esprese f usando funciones escalón unitario y determine su transformada de Laplace

$$a)\quad f(t)=\begin{cases}0, & t<3\\ 1, & 3\le t\le 5\\ 0, & t>5.\end{cases}\qquad b)\quad f(t)=\begin{cases}0, & t<2\pi\\ \sin t, & 2\pi\le t\le 3\pi\\ 0, & t>3\pi.\end{cases}$$

11. Halle la transformada de Laplace de las funciones periódicas descrita en las siguientes funciones



(a)



(b)

12. Un circuito eléctrico experimenta dos sobrevoltajes, uno de 20 V en el tiempo $t = 5$ s y otro de 50 V en el tiempo $t = 30$ s. Obtenga una ecuación matemática para el voltaje de impulso $v(t)$ y determine su transformada de Laplace.

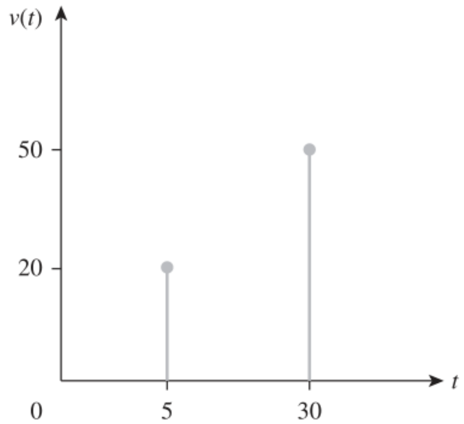


Figura 1: Función de voltaje

13. Se golpea con un martillo una masa estacionaria m que reposa encima de un resorte lineal (cuya constante de resorte es k) en el tiempo $t = 0$, con un impulso I, como se muestra en la Figura 2. Como resultado de este impulso, la masa comienza a vibrar hacia arriba y hacia abajo. Escogiendo el eje x hacia abajo con su origen ubicado en el centro de gravedad de la masa cuando la masa está en equilibrio estático, la formulación matemática de este problema puede expresarse como

$$mx'' + kx = I\delta(t-0) \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

donde δ es la función de impulso unitario o función delta de Dirac. Determine el movimiento de la masa $x(t)$ resolviendo este problema de valor inicial usando la transformada de Laplace.

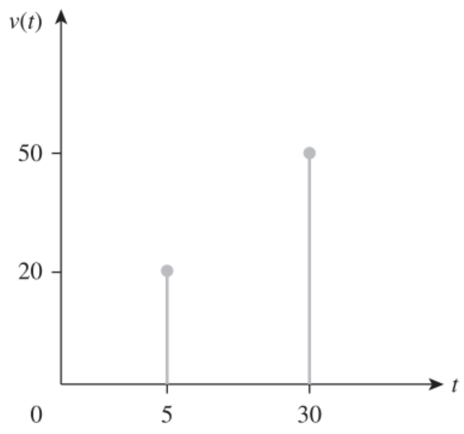


Figura 2: Función de voltaje

14. Use la transformada de Laplace para resolver el problema:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = t^2 + 1; \quad y(\pi) = \pi^2\,,\ \frac{dy}{dt}(\pi) = 2\pi.$$

[Sugerencia: hacer primero la sustitución de $x = t - \pi$.]

15. Use la transformada de Laplace para resolver el problema:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = -10\sin 2t; \quad y(\pi) = -1\,,\ \frac{dy}{dt}(\pi) = 0.$$

16. Resuelva los siguientes problemas de valor inicial usando el método de la transformada de Laplace:

a) $y' + 3y = \cos t$, $y(0) = -1$

b) $y'' + 3y' - 2y = 0$, $y(2) = 1$, $y'(0) = 0$

c) $y'' - y = 5\delta(t - 0)$, $y(0) = y'(0) = 0$.