

**LAS ECUACIONES DIFERENCIALES
Y SUS APLICACIONES EN LA
INGENIERÍA**

INDICE:

-Generalidades. Pg (1-4)

-Etapas de resolución del problema científico. Pg (5)

· *Formulación matemática del problema científico.*

· *Solución de las ecuaciones.*

· *Interpretación científica de la solución.*

-Aplicaciones de ecuaciones diferenciales de primer orden y simples de orden superior. Pg (7-30)

1. *Aplicaciones a la mecánica:*

1.1 *Introducción.*

1.2 *Las leyes del movimiento de Newton.*

2. *Aplicaciones a los circuitos eléctricos:*

2.1 *Introducción.*

2.2 *La ley de Kirchhoff.*

3. *Aplicaciones a flujo de calor en estado estacionario.*

4. *Aplicaciones a problemas combinados de crecimiento y decrecimiento.*

5. *El cable colgante.*

6. *La deflexión de vigas.*

-Aplicaciones de ecuaciones diferenciales lineales. Pg (31-50)

1. *Movimiento vibratorio de sistemas mecánicos:*

1.1 *El resorte vibrante (movimiento armónico simple).*

1.2 *El resorte vibrante con amortiguamiento (movimiento amortiguado).*

1.3 *El resorte con fuerzas externas.*

1.4 *La resonancia mecánica.*

LAS ECUACIONES DIFERENCIALES Y SU APLICACIÓN A LA INGENIERÍA

GENERALIDADES:

El descubrimiento de Newton y Leibniz en el siglo diecisiete sobre las ideas básicas del cálculo integral fue crucial para el avance que sufrieron las matemáticas, y más importante fue, si cabe, la relación que encontraron entre el cálculo integral y el diferencial, ya que consiguieron fundirlos en uno solo. Una de las aplicaciones de este descubrimiento fue la física aplicada, dicese, la Ingeniería.

El maestro de Newton, Isaac Barrow, conocía ya la existencia de la relación entre la tangente en un punto a una curva (derivada) y el área de una región limitada de una curva (Integral Definida), pero fueron Newton y Leibniz los que comprendieron la importancia de esa relación.

La derivada se utilizó, en principio, para el cálculo de la tangente en un punto, y pronto se vió que también servía para el cálculo de velocidades, y en consecuencia para el estudio de la variación de una función.

Desde los primeros pasos en el cálculo diferencial, de todos es conocido que dada una función $y = f(x)$, su derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, en forma de diferencial de una función de una

sola variable, es también una función que se puede encontrar mediante ciertas reglas como el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, que nos muestra la vinculación entre la derivada de una función y la integral de dicha función ; si $F(x)$ es la función integral que debe ser integrable en el intervalo $[a,x]$ para cada x de $[a,b]$, siendo c tal que $a \leq c \leq b$

tenemos que $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ si $a \leq x \leq b$, existe entonces $F'(x)$ en cada punto x del

intervalo abierto (a,b) , en el que f es continua, y para tal x tenemos $F'(x) = f(x)$ quedando demostrado la relación entre Integral y Derivada.

-La Derivada de la Integral de una función es la propia función:

$$F'(x) = f(x)$$

-La Integral de la Derivada de una función es la propia función:

$$f(x) = \int_a^x f'(x)dx$$

Con lo antes mencionado, a lo que se une La Regla de Barrow (que no es más que la aplicación del teorema fundamental), es posible conseguir la función primitiva de la función derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ mediante la integración de dicha función, que es lo que necesitamos para poder resolver las ecuaciones diferenciales, pero antes debemos definirlas.

Hay una gran variedad de problemas en los cuales se desea conocer un elemento variable a partir de su coeficiente de variación, o dicho de otra forma, queremos conocer cómo varía dicho elemento en función de una o varias variables.

En definitiva, lo que se pretende es determinar una función desconocida mediante datos relacionados por una ecuación que contiene, por lo menos, una de las derivadas de la función desconocida.

Estas ecuaciones se denominan ecuaciones diferenciales y su estudio por parte de Newton, Leibniz y los Bernouilli para resolver algunas de las ecuaciones diferenciales sencillas que se presentaron en geometría y mecánica, llevaron al conocimiento sobre la resolución de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales; se conoce mediante la práctica que es difícil obtener teorías matemáticas de gran generalidad para la resolución de estas ecuaciones diferenciales, salvo para algunos tipos, como las ecuaciones lineales, muy extendidas para problemas de tipo científico.

Definimos:

-Ecuación diferencial (E.D.) a una ecuación que relaciona una función (o variable dependiente), su variable o variables (variables independientes), y sus derivadas.

Si la ecuación contiene derivadas respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria (E.D.O)**; y si contiene las derivadas parciales respecto a dos o más variables independientes, se llama **ecuación en derivadas**

parciales (E.D.P.).

Otro tipo de ecuaciones son las **ecuaciones diferenciales de retraso (o retardo)** que están caracterizadas por la presencia de un desplazamiento en el argumento o variable ($x-x_0$).

-Se llama **orden** de la ecuación diferencial al orden de la derivada o derivada parcial más alta que aparece en la ecuación.

Se dice que una ecuación diferencial (de orden n) está expresada en forma **implícita** cuando tiene la forma $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, siendo F una función $F: \Omega \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ siendo Ω un subconjunto (generalmente abierto) de \mathbb{R}^{n+2} .

Se dice que una ecuación diferencial (de orden n) está expresada en forma **explícita** cuando tenemos $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ con $f: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ siendo la función definida en el subconjunto D (generalmente abierto) de \mathbb{R}^{n+1} .

-Se dice que una ecuación diferencial es **lineal** si tiene la forma $a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$ y se llama **lineal homogénea** si además $g(x) = 0$.

-Se dice que una función $y = \varphi(x)$ definida en un intervalo I es **solución** de una diferencial en el intervalo si, sustituida en dicha ecuación, la reduce a una identidad.

Una E. D. se dice resoluble (o integrable) por cuadraturas si su solución **es expresable mediante integrales**.

En general, la solución de la ecuación diferencial de orden n dependerá de n parámetros. Pero incluso de esta forma pueden no obtenerse todas las soluciones de una E. D. Por ejemplo, cuando tenemos una familia uniparamétrica de soluciones de una E. D., una sencilla interpretación geométrica nos muestra que también la envolvente de la familia de curvas (si existe) es solución de la E. D.

-Se define como **problema de valor inicial** y **problemas de valor frontera** a aquellos en que la ecuación diferencial se resuelve sujeta a unas condiciones dadas que la función desconocida debe satisfacer.

Problema de valor inicial:

Es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas especificadas en *un valor* de la variable independiente. Tales condiciones se llaman ***condiciones iniciales***.

Problemas de valor frontera:

Es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida, especificadas en ***dos o más valores*** de la variable independiente. Tales condiciones se llaman ***condiciones de frontera***.

-La función primitiva resultante, o función solución de una ecuación diferencial, puede tener por las condiciones iniciales o de frontera diversos valores, diferenciándose una solución de otra en el parámetro, definiéndose este conjunto de soluciones *familia de soluciones de un parámetro* (en el caso de existir sólo un parámetro) o *familia de soluciones de dos o más parámetros* (en el caso de existir más de un parámetro)

ETAPAS DE RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA CIENTÍFICO:

1) FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA CIENTÍFICO:

Las leyes científicas, que por supuesto están basadas en experimentos u observaciones, se traducen en ecuaciones matemáticas. En cada caso las ecuaciones diferenciales representan una simplificación idealizada del problema físico con el que nos encontramos, llamándose esta idealización *Modelo Matemático*.

Cada modelo es una aproximación a la realidad del problema físico, su aproximación y uso del modelo sólo depende de los criterios impuestos a cada problema para su resolución.

Si la intuición o la evidencia del experimento coinciden con los resultados obtenidos por medio del modelo podremos determinar cuan útil es ese modelo.

2) SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES:

Las ecuaciones formuladas en la etapa anterior necesitan ser resueltas, sujetas a condiciones obtenidas del problema para determinar la incógnita o incógnitas involucradas. Los procedimientos usados pueden producir una solución exacta o, en casos donde soluciones exactas no se pueden obtener, soluciones aproximadas. Frecuentemente para elaborar los cálculos numéricos se recurre al uso de la informática. El proceso de obtener soluciones a menudo conduce a preguntas de naturaleza puramente matemática que propician y propiciaron el avance de las susodichas matemáticas.

3) INTERPRETACIÓN CIENTÍFICA DE LA SOLUCIÓN:

Con el uso de las soluciones conocidas, el matemático o físico puede ser capaz de interpretar lo que está sucediendo desde el punto de vista aplicado. Puede hacer interpretaciones gráficas y tablas para poder comparar la teoría con lo obtenido de los experimentos. Puede, incluso, basar una investigación posterior en las interpretaciones de experimentos previos. Por supuesto que, si encuentra que los experimentos u observaciones no están de acuerdo con la teoría, debe revisar el modelo matemático y su formulación matemática hasta que se consiga un resultado cuyo margen de error lo marque la persona o personas encargadas de los experimentos. Cada una de estas etapas es importante en la solución final de un problema aplicado.

APLICACIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN Y SIMPLES DE ORDEN SUPERIOR:

Tipos de aplicaciones:

1. Aplicaciones a la mecánica:
 - 1.1 Introducción.
 - 1.2 Las leyes del movimiento de Newton.
2. Aplicaciones a los circuitos eléctricos:
 - 2.1 Introducción.
 - 2.2 La ley de Kirchhoff.
3. Aplicaciones a flujo de calor en estado estacionario.
4. Aplicaciones a problemas combinados de crecimiento y decrecimiento.
5. El cable colgante.
6. La deflexión de vigas.

1. Aplicaciones a la mecánica:

1.1 Introducción:

La física trata de la investigación de las leyes que gobiernan el comportamiento del universo físico. Por universo físico entendemos la totalidad de objetos a nuestro alrededor, no sólo las cosas que observamos sino también las que no observamos, tales como los átomos y moléculas. El estudio del movimiento de los objetos en nuestro universo es una rama de la mecánica llamada *dinámica* formulada mediante las leyes del movimiento de Newton. Para los objetos que se mueven muy rápido, cerca de la velocidad de la luz, no podemos usar las leyes de Newton. En su lugar debemos usar una versión revisada de estas leyes, desarrolladas por Einstein y conocidas como *mecánica relativista*, o *mecánica de la relatividad*. Para objetos de dimensiones atómicas las leyes de Newton tampoco son válidas. De hecho, para obtener descripciones precisas del movimiento de objetos de dimensiones atómicas, necesitamos establecer un conjunto de leyes denominadas *mecánica cuántica*. La mecánica cuántica y la relativista son muy complicadas, no siendo objeto de estudio en este trabajo.

1.2 Las leyes del movimiento de Newton.

Las tres leyes del movimiento primero desarrolladas por Newton son:

1. *Un cuerpo en reposo tiende a permanecer en reposo, mientras que un cuerpo en movimiento tiende a persistir en movimiento en una línea recta con velocidad constante a menos que fuerzas externas actúen sobre él.*
2. *La tasa de variación del momentum de un cuerpo en función del tiempo es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo teniendo la misma dirección de la fuerza, (entendiéndose por momentum de un objeto al producto de su masa m multiplicado por su velocidad v).*
3. *A cada acción existe una reacción igual y opuesta.*

La segunda ley nos proporciona una relación importante, conociéndose como la *ley de Newton*.

La tasa de cambio o variación en el momentum en el tiempo es así $d(mv)/dt$.

Si por F entendemos a la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo, por la segunda ley tenemos:

$\frac{d}{dt}(mv) \propto F$ siendo \propto el símbolo que indica proporcionalidad. Introduciendo la constante de proporcionalidad k , obtenemos:

$$\frac{d}{dt}(mv) = kF$$

Si m es una constante, $m \frac{dv}{dt} = kF$ o $ma = kF$, dónde $a = dv/dt$ es la aceleración.

Así vemos que $F = \frac{ma}{k}$ donde el valor de k depende de las unidades que deseemos usar.

Para el sistema CGS (o sistema Centímetro, Gramo, Segundo), $k = 1$ siendo la ley $F = ma$.

En la simbología del cálculo podemos escribir las leyes de Newton en formas diferentes, al notar que la aceleración a puede expresarse como la primera derivada de la velocidad v (esto es, dv/dt), o como la segunda derivada de v de un desplazamiento s (esto es, d^2s/dt^2).

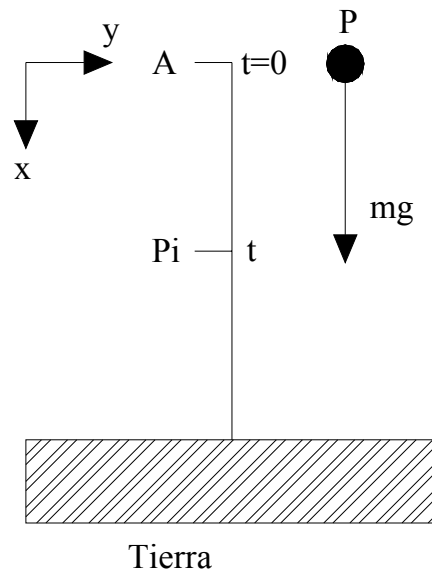
$$F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2s}{dt^2}$$

Una vez conocido el problema físico podemos aplicar estos conocimientos para obtener las formulaciones matemáticas de varios problemas de la mecánica clásica que involucren los conceptos anteriores, y la solución e interpretación de tales problemas.

Ejemplo aclaratorio:

Una masa de m gramos cae verticalmente hacia abajo, bajo la influencia de la gravedad, partiendo del reposo, siendo despreciable la resistencia del aire. Vamos a establecer la ecuación diferencial y las condiciones asociadas que describen el movimiento y a solventarla.

Diagrama de fuerzas:



Formulación matemática:

Sea A en la figura la posición de la masa m en el tiempo $t = 0$, y sea P_i la posición de m en cualquier tiempo posterior t . En cualquier problema de física que involucre cantidades vectoriales tales como fuerza, desplazamiento, velocidad y aceleración, las cuales necesariamente requieren un conocimiento de dirección, es conveniente establecer un sistema de coordenadas, junto con la asignación de direcciones positivas y negativas. En este ejemplo observamos que la variación se realiza respecto del eje x .

La velocidad instantánea en P es $v = dx/dt$. La aceleración instantánea en P es $a = dv/dt$ o $a = d^2x/dt^2$. La fuerza que actúa es el peso, siendo su magnitud $P = mg$. Por la ley de Newton tenemos:

$$m \frac{dv}{dt} = mg \quad \text{o} \quad \frac{dv}{dt} = g$$

Puesto que la masa cae desde el reposo, vemos que $v = 0$ cuando $t = 0$, o en otras palabras $v_{(0)} = 0$.

Nuestra formulación matemática es el problema de valor inicial $v_{(0)}$

$$\frac{dv_{(t)}}{dt} = g \quad v_{(0)} = 0$$

Aquí tenemos una ecuación de primer orden y su condición requerida.

Otra manera de formular el problema es escribir:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = g$$

En tal caso tenemos una ecuación de segundo orden en las variables x y t , y necesitamos dos condiciones para determinar x . Una de ellas es $v = 0$ o $dx/dt = 0$ en $t = 0$. La segunda puede obtenerse al notar que $x = 0$ en $t = 0$ (puesto que escogimos el origen de nuestro sistema de coordenadas en A).

La formulación matemática es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \quad x=0 \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{en} \quad t = 0$$

Cuando establezcamos ecuaciones diferenciales para describir algún fenómeno o ley, siempre las acompañaremos de suficientes condiciones necesarias para la determinación de las constantes arbitrarias en la solución general.

Solución:

Empezando con $\frac{dv}{dt} = g$ (separación de variables) obtenemos por integración $v = gt + c_1$.

Puesto que $v=0$ cuando $t = 0$, $c_1 = 0$, ó $v = gt$, esto es, $\frac{dx}{dt} = gt$.

Otra integración produce de la anterior ecuación $x = \frac{1}{2}gt^2 + c_2$. Puesto que $x = 0$ en $t = 0$,

$c_2 = 0$. Por tanto $x = \frac{1}{2}gt^2$. Podríamos haber llegado al mismo resultado al empezar con

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = g.$$

El signo más indica que el objeto se está moviendo en la dirección positiva, esto es, hacia abajo. Se debería tener en cuenta que si hubiéramos tomado la dirección positiva hacia

arriba la ecuación diferencial hubiera sido $m(dv/dt) = -mg$, esto es, $\frac{dv}{dt} = -g$ o $\frac{d^2x}{dt^2} = -g$

Esto conduciría a resultados equivalentes a los obtenidos.

Para otros problemas similares la forma de actuar es la misma.

2. Aplicaciones a los circuitos eléctricos:

2.1 Introducción.

Así como la mecánica tiene como base fundamental las leyes de Newton, la electricidad también tiene una ley que describe el comportamiento de los circuitos eléctricos, conocida como la ley de *Kirchhoff*. Realmente, la teoría de la electricidad está gobernada por un cierto conjunto de ecuaciones conocidas en la teoría electromagnética como las ecuaciones de *Maxwell*. La ley de *Kirchhoff* es adecuada para estudiar las propiedades simples de los circuitos eléctricos. El circuito eléctrico más simple es un circuito en serie, en el cual tenemos una *fem* (*fuerza electromotriz*), la cual actúa como una fuente de energía tal como una batería o generador, y una *resistencia*, la cual consume o usa energía, tal como una bombilla eléctrica, tostador, u otro electrodoméstico.

En física elemental encontramos que la *fem* está relacionada con el flujo de corriente en el circuito. En forma simple, la ley dice que la corriente instantánea I (en un circuito que contiene sólo una *fem* E y una *resistencia* R) es directamente proporcional a la *fem*. Simbólicamente: $I \propto E$ o $I \propto E$ de donde, $E = IR$ donde R es una constante de proporcionalidad llamada el *coeficiente de resistencia* o simplemente, *resistencia*. La ecuación anterior es conocida bajo el nombre de la ley de *Ohm*.

Circuitos más complicados, pero para muchos casos más prácticos, son circuitos que contienen otros elementos distintos a resistencias. Dos elementos importantes son *inductores* y *condensadores*. Un inductor se opone a cambios en corriente. Tiene un efecto de inercia en electricidad de la misma manera que una masa tiene un efecto de inercia en mecánica. Un condensador es un elemento que almacena energía.

En física hablamos de una caída de voltaje a través de un elemento.

En la práctica podemos determinar esta caída de voltaje, o como se llama comúnmente, *caída de potencial* o *diferencia de potencial*, por medio de un instrumento llamado voltímetro.

Experimentalmente las siguientes leyes se cumplen:

1. *La caída de voltaje a través de una resistencia es proporcional a la corriente que pasa a través de la resistencia.*

Si E_R es la caída de voltaje a través de una resistencia e I es la corriente, entonces $E_R \propto I$ o $E_R = IR$ donde R es la constante de proporcionalidad llamada el *coeficiente de resistencia* o simplemente *resistencia*.

2. *La caída de voltaje a través de un inductor es proporcional a la tasa de tiempo instantánea de cambio de la corriente.*

Si E_L es la caída de voltaje a través del inductor, entonces $E_L \propto \frac{dI}{dt}$ o $E_L = L \frac{dI}{dt}$ donde L es la constante de proporcionalidad llamada el coeficiente de inductancia o simplemente inductancia.

3. *La caída de voltaje a través de un condensador es proporcional a la carga eléctrica instantánea en el condensador.*

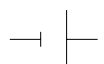
Si E_c es la caída de voltaje a través del condensador y Q la carga instantánea, entonces $E_c \propto Q$ ó $E_c = \frac{Q}{C}$ donde hemos tomado $1/C$ como la constante de proporcionalidad, C se conoce como el *coeficiente de capacitancia* o simplemente *capacitancia*.

2.2 La ley de Kirchhoff.

El enunciado es uno de los de la ley de *Kirchhoff*:

La suma algebraica de todas las caídas de voltaje alrededor de un circuito eléctrico es cero. [Otra manera de enunciar esto es decir que el voltaje suministrado (*fem*) es igual a la suma de las caídas de voltaje.]

Se acostumbra indicar los diferentes elementos de un circuito como se ilustra:

 Generador o batería

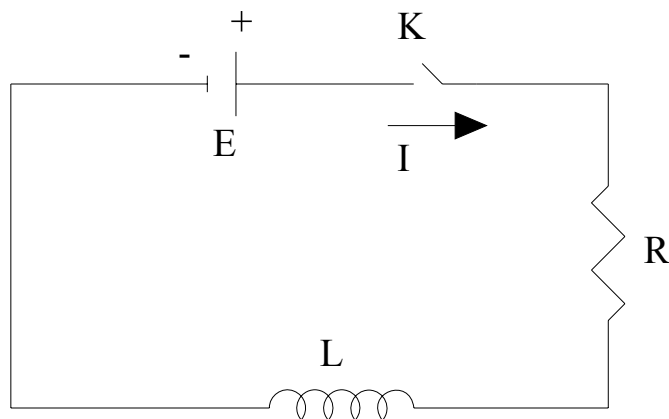
 Resistencia

 Inductor

 Condensador

 Interruptor

Como un ejemplo, considere un circuito eléctrico consistente en una fuente de voltaje E (batería o generador), una resistencia R , y un inductor L , conectados en serie como se muestra en la figura:

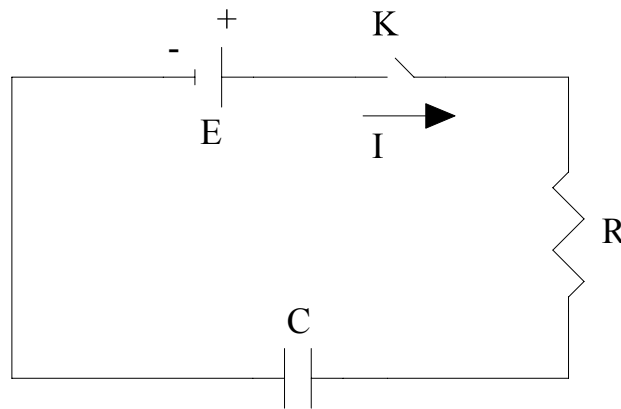


Adoptamos la siguiente convención: la corriente fluye del lado positivo (+) de la batería o generador a través del circuito hacia el lado negativo (-).

Puesto que, por la ley de *Kirchhoff*, la *fem* suministrada (E) es igual a la caída de voltaje a través del inductor ($L \frac{dI}{dt}$) más la caída de voltaje a través de la resistencia (RI), tenemos como la ecuación diferencial requerida para el circuito:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E$$

Como otro ejemplo, suponga que nos dan un circuito eléctrico consistente en una batería o generador de E en serie con una resistencia de R y un condensador de C .



Aquí la caída de voltaje a través de la resistencia es RI y la caída de voltaje a través del condensador es Q/C , de modo que por la ley de Kirchhoff $RI + \frac{Q}{C} = E$ tal como aparece esto no es una ecuación diferencial. Sin embargo al notar que la corriente es la variación de la carga con el tiempo, esto es, $I = dQ/dt$, $RI + \frac{Q}{C} = E$ se convierte en $R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E$, la cual es una ecuación diferencial para la carga instantánea. Acompañando a las ecuaciones diferenciales obtenidas están las condiciones que se derivan, por supuesto, del problema específico considerado.

Ejemplo aclaratorio:

Un generador con una *fem* se conecta en serie con una resistencia y un inductor. Si el interruptor K se cierra en tiempo $t = 0$, establezca una ecuación diferencial para la corriente y determine la corriente en tiempo t .

Formulación matemática:

Llamando a I la corriente o intensidad de corriente que fluye según el primer circuito descrito, tenemos, por la ley de Kirchhoff, $E = RI + L \frac{dI}{dt}$

Puesto que el interruptor se cierra en $t = 0$, debemos tener $I = 0$ en $t = 0$.

Solución:

La ecuación diferencial anterior $E = RI + L \frac{dI}{dt}$ es una ecuación de primer orden lineal

exacta; buscando un factor integrante obtenemos $\mu(t) = e^{\frac{R}{L}t}$. Multiplicado por este factor

la ecuación, da $Ee^{\frac{R}{L}t} = RIe^{\frac{R}{L}t} + Le^{\frac{R}{L}t} \frac{dI}{dt}$, es decir $Ee^{\frac{R}{L}t} = \frac{d(Ie^{\frac{R}{L}t})}{dt}$ integrando

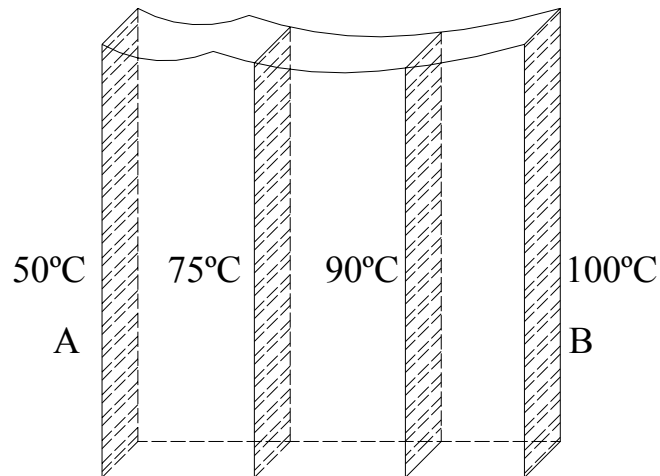
$$Ie^{\frac{R}{L}t} = \frac{Ee^{\frac{R}{L}t}}{R} + c$$

Puesto que $I = 0$ en $t = 0$, podemos con estas condiciones obtener la constante c .

Otro método. La ecuación $E = RI + L \frac{dI}{dt}$ puede también resolverse por separación de variables. Los problemas de este tipo se resuelven todos de la misma forma.

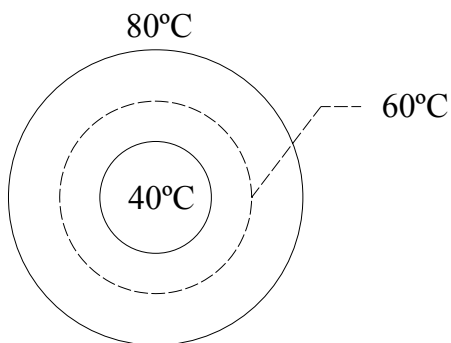
3. Aplicaciones a flujo de calor en estado estacionario.

Considere una pieza de material de longitud indefinida acotada por dos planos paralelos A y B , según la figura, suponiendo que el material es uniforme en todas sus propiedades, por ejemplo, calor específico, densidad, etc.



Considerando que los planos A y B se mantienen a 50°C y 100°C , respectivamente, todo punto en la región entre A y B alcanza cierta temperatura que no cambia posteriormente. Así todos los puntos en el plano C entre A y B estarán a 75°C , y en el plano E a 90°C . Cuando la temperatura en cada punto de un cuerpo no varía con el tiempo decimos que prevalecen las *condiciones de estado estacionario* o que tenemos un *flujo de calor en estado estacionario*.

Como otro ejemplo se considera un tubo de material uniforme, cuyo corte transversal aparece en la figura.



Se supone que la parte exterior se mantiene a 80°C y la interna a 40°C .

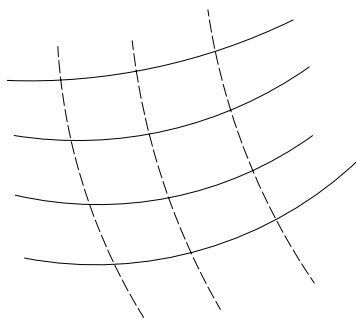
Habrà una superficie (línea punteada) en la cual cada punto estará a 60°C . Sin embargo, ésta no está en la mitad entre las superficies interna y externa.

Líneas paralelas a A y en un plano perpendicular a A (figura de la pared) se llaman *líneas isotérmicas*.

La curva punteada del tubo es una curva *isotérmica*.

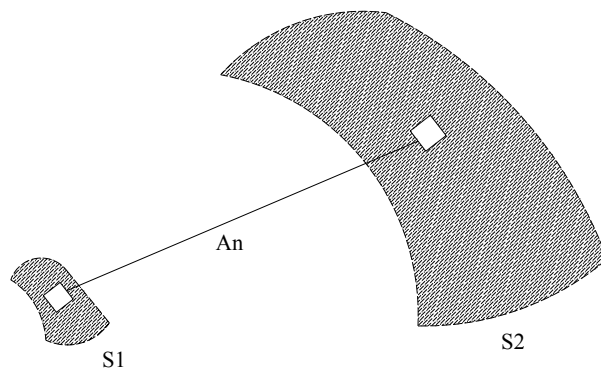
Los planos correspondientes de la pared y los cilindros se llaman *superficies isotérmicas*.

En el caso general, las curvas isotérmicas no serán líneas o círculos, como en los ejemplos, pero pueden ser una familia de curvas como se muestra en la siguiente figura (curvas punteadas).



Las trayectorias ortogonales de la familia se llaman *líneas de flujo*.

Considere pequeñas porciones de dos superficies isotérmicas contiguas separadas por una distancia Δn .



Considerando que la temperatura correspondiente a la superficie S_1 es T_1 y la correspondiente a S_2 es T_2 . Llamando a la diferencia de temperatura $T_1 - T_2 = \Delta T$. Experimentalmente se encuentra que la cantidad de calor que fluye de S_1 a S_2 por unidad de área y por unidad de tiempo es aproximadamente proporcional a $\Delta T / \Delta n$. La aproximación llega a ser más precisa a medida que Δn (y desde luego ΔT) se hace más pequeño. En el

caso límite, a medida que $\Delta n \rightarrow 0$, $\Delta T/\Delta n \rightarrow dT/dn$ lo cual se llama el *gradiente* de T (variación de T en la dirección normal a la superficie o curva isotérmica). Si q es la cantidad de flujo de calor por unidad de área y unidad de tiempo, tomamos como nuestra ley física:

$$q \propto \frac{dT}{dn} \quad \text{ó} \quad q = k \frac{dT}{dn}$$

Si deseamos considerar a T como una cantidad vectorial (teniendo dirección y magnitud), el razonamiento es el siguiente. Considere como positiva la dirección de S_1 a S_2 . Si dT/dn es positiva, entonces T aumenta y, por tanto, debemos tener $T_2 < T_1$. Así, el calor realmente fluye de S_1 a S_2 (de mayor a menor temperatura); esto es, el flujo de calor está en la dirección negativa.

De modo similar, si dT/dn es negativa, T disminuye, $T_2 > T_1$, y el flujo es de S_2 a S_1 ; esto es, el flujo de calor está en la dirección positiva.

La dirección del flujo de calor puede tenerse en cuenta mediante un signo menos en $q = k \frac{dT}{dn}$ esto es, cantidad de calor por unidad de tiempo que fluye a través de un área A ,

está dada por q (cantidad vectorial) $= -kA \frac{dT}{dn}$ (proviene de la teoría de campos).

La anterior constante de proporcionalidad k depende del material usado y se llama *conductividad térmica*.

Ejemplo aclaratorio:

Un tubo largo de acero, de conductividad térmica k , tiene un radio interior r_i y un radio exterior r_e . La superficie interna se mantiene a T_i y la superficie exterior se mantiene a T_e .

(a) Definir la temperatura como una función de la distancia r del eje común de los cilindros concéntricos.

(b) Encuentre la temperatura en r .

(c) ¿Cuánto calor se pierde por minuto en una parte del tubo de L de largo?

Formulación matemática:

Es claro que las superficies isotérmicas son cilindros concéntricos con los cilindros dados. El área de tal superficie con radio $r_i < r < r_e$ y longitud L es $2\pi rL$. La distancia dn en este

caso es dr . Así, la ecuación puede escribirse $q = -k(2\pi rL) \frac{dT}{dr}$. En esta ecuación, q es una constante. Las condiciones iniciales son: k , L , T_e en r_e y T_i en r_i .

Solución:

Ecuación diferencial de variables separadas, integrando se obtiene:

$$-k2\pi LT = qLnr + c$$

Usando las condiciones iniciales obtendremos el valor de c .

Otras ideas sobre transmisión de calor:

En el caso de conducción de calor, el calor fluye de lugares de más alta temperatura a lugares de más baja temperatura. Físicamente, cuando un extremo de una barra aumenta de temperatura, el movimiento aleatorio de las moléculas en este extremo se aumenta con un incremento resultante en velocidad y número de colisiones entre moléculas. Las moléculas con más alta velocidad tienden a moverse hacia el otro extremo de la barra, dando lugar a colisiones adicionales y a un consecuente incremento gradual en temperatura en el resto de la barra.

Podemos considerar una conducción de calor como una *difusión* de moléculas. Tal *difusión*, sin embargo, no está limitada a la conducción de calor.

4. Aplicaciones a problemas combinados de crecimiento y decrecimiento.

La ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = ay$ nos dice que la variación con el tiempo de una cantidad y es proporcional a y . Si la constante de proporcionalidad a es positiva siendo y positivo, entonces dy/dt es positivo e y aumenta. En este caso hablamos de que y crece, y el problema es de crecimiento. Por otro lado, si a es negativo siendo y positivo, entonces dy/dt es negativo e y decrece. Aquí el problema es uno que involucra decrecimiento.

Puesto que la solución de $\frac{dy}{dt} = ay$ identificada como una ecuación de variables separadas está dada por la función exponencial $y = ce^{at}$, resolviendo mediante integración,

definiéndose la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = ay$ como la ley de crecimiento exponencial si $a > 0$ y la ley de decrecimiento exponencial si $a < 0$.

Ejemplo aclaratorio:

Se calienta agua a la temperatura del punto de ebullición de T_e . El agua se agita y se guarda en un cuarto el cual está a una temperatura constante de T_c . Después de t_i la temperatura del agua es T_f .

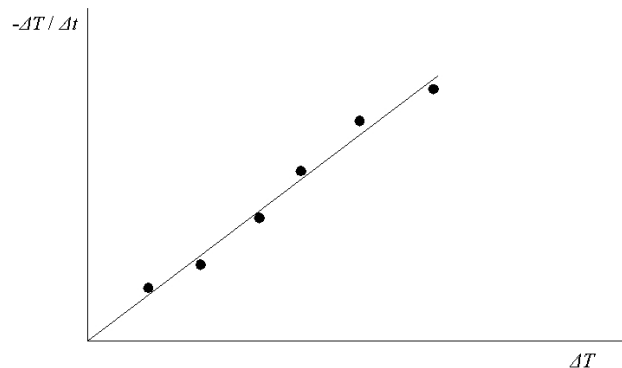
- (a) Encuentre la temperatura del agua después de t_f siendo $t_f > t_i$.
- (b) ¿Cuándo la temperatura del agua será de T_i ? Siendo $T_e > T_f > T_i > T_c$

Formulación matemática:

La diferencia de temperatura entre el agua y el cuarto es $T_e - T_c = \Delta T$. La variación en T es dT/dt . Tomando como base en la experiencia, uno espera que la temperatura cambie más rápidamente cuando (ΔT) es grande y más lentamente cuando (ΔT) es pequeño.

Desarrollemos un experimento en el cual tomamos temperaturas en varios intervalos de tiempo, siendo ΔT el cambio en temperatura y Δt el tiempo para producir este cambio. Tomando a Δt pequeño esperamos que $\Delta T / \Delta t$ será muy cercano a dT/dt .

Si hacemos una gráfica representando $\Delta T / \Delta t$ y ΔT , podríamos producir un gráfico similar al de esta figura.



Los puntos marcados están determinados por el experimento. Puesto que el gráfico es, aproximadamente, una línea recta, asumimos que dT/dt es proporcional a ΔT , esto es:

$\frac{dT}{dt} = a(\Delta T)$ donde a es una constante de proporcionalidad. Ahora dT/dt es negativo cuando (ΔT) es positivo, y así escribiremos $a = -h$ donde $h > 0$. La ecuación es $\frac{dT}{dt} = -h(\Delta T)$. Esta ecuación se conoce en física como la ley de enfriamiento de Newton y es de importancia en muchos problemas de temperatura. Realmente, es sólo una aproximación a la situación física. Las condiciones que acompañan esta ecuación se obtienen de las condiciones iniciales dispuestas en el enunciado del ejemplo.

Solución:

Resolviendo la ecuación por separación de variables tenemos:

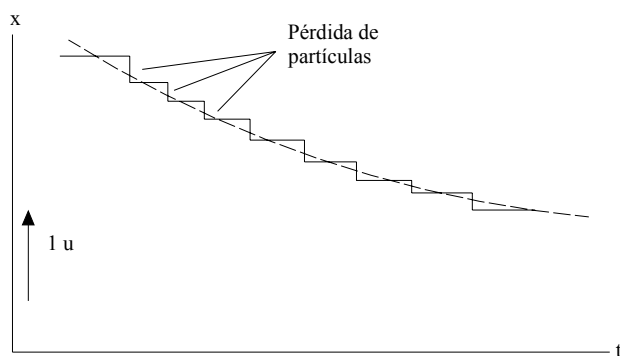
$\int \frac{dT}{\Delta T} = -\int h dt \rightarrow \ln(\Delta T) = -ht + c_1 \rightarrow \Delta T = ce^{-ht}$ de la cual teniendo las condiciones iniciales podemos calcular las constantes h y c , pudiendo dar contestación al problema planteado.

Ejemplo aclaratorio:

Por métodos experimentales similares a los indicados en el problema anterior de temperatura obtenemos la siguiente ley:

Ley de desintegración radioactiva: *La velocidad de desintegración de una sustancia radioactiva es proporcional, en cualquier instante, a la cantidad de sustancia que está presente.*

Antes de formular matemáticamente esta ley, consideremos el fenómeno de radioactividad con algún detalle. Cuando un elemento radioactivo como el radio o el uranio se desintegran, emiten partículas de una manera aleatoria. Cada una de estas partículas tiene una masa definida, la cual es pequeña. Si empezamos con una masa de 1 g del material radioactivo y consideramos lo que sucede cuando se emiten las partículas, encontramos una situación similar a la que muestra en la figura.



Aquí, x es la cantidad de sustancia que queda después de tiempo t , asumiendo que empezamos con $1u$ (unidad) en $t = 0$. Cada vez que hay una baja en el valor de x significa que se han emitido partículas; cuanto más grande sea la baja, mayor será el número de partículas emitidas. Así, la cantidad de la sustancia radioactiva es, en realidad, una función discontinua en t . Entonces, ¿qué se quiere decir con dx/dt ?

Para obviar esta dificultad matemática, aproximamos la curva verdadera por una curva continua (punteada en la figura de arriba). Así, no cometemos mucho error, y al mismo tiempo aseguramos tener un gráfico para el cual dx/dt existirá en todo el dominio. Aquí estamos construyendo una abstracción matemática de una situación física. Las ideas presentadas aquí ocurren frecuentemente en física debido al tamaño finito, aun de la partícula más pequeña, en otras palabras, debido a la teoría atómica. Aun en los problemas de circuitos eléctricos ocurre la abstracción matemática.

Formulación matemática:

Sea A la cantidad de elemento radiactivo presente después de t años. Entonces dA/dt (la cual existe según la abstracción matemática anterior) representa la tasa o velocidad de desintegración del compuesto. De acuerdo con la ley $\frac{dA}{dt} \propto A$ ó $\frac{dA}{dt} = \alpha A$, donde α es una constante de proporcionalidad. Puesto que $A > 0$ y decreciente, entonces $dA/dt < 0$ y vemos que α debe ser positiva. Escribiendo $\alpha = -k$, $\frac{dA}{dt} = -kA$. Sea A_0 la cantidad del compuesto presente inicialmente.

Condiciones iniciales $A = A_0$ en $t = 0$, $A = A_1$ en $t = t_1$

Solución:

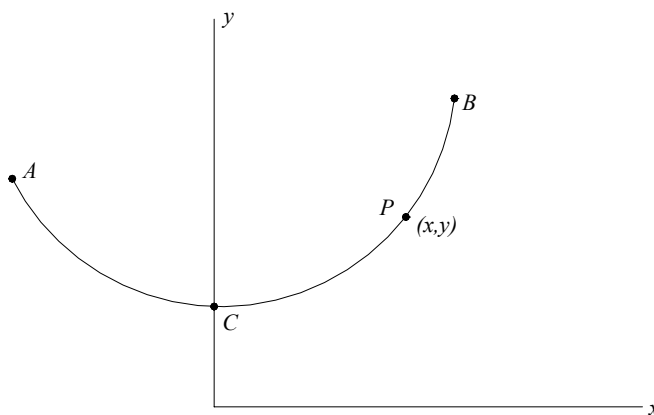
Separando las variables, tenemos al integrar:

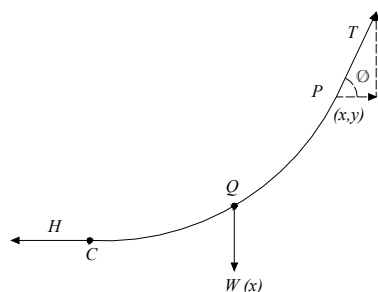
$$\frac{dA}{dt} = -kA \quad \rightarrow \quad \int \rightarrow \ln A = -kt + c_1 \quad \rightarrow \text{antiln} \rightarrow \quad A = e^{-kt+c_1}$$

Introduciendo las condiciones iniciales en la función solución de la ecuación diferencial podremos calcular las constantes k y c_1 .

5. El cable colgante.

Considere un cable o una cuerda que cuelga de dos puntos A y B (según la figura), no necesariamente al mismo nivel. Suponiendo que el cable es flexible de modo que debido a su carga (la cual puede ser debida a su propio peso, o a fuerzas externas actuantes, o a una combinación de éstas) toma la forma como en la figura. Siendo C la posición más baja del cable, escogiendo los ejes x e y como en la figura, donde el eje y pasa por C .





Considere aquella parte del cable entre el punto más bajo y cualquier punto P en el cable con coordenadas (x, y) . Esta parte estará en equilibrio debido a la tensión T en P (según la figura siguiente), la fuerza horizontal H en C , y la carga vertical total en el segmento CP del cable denotada por $W(x)$, la cual asumimos que actúa en algún punto Q , no necesariamente en el centro del arco CP . Para el equilibrio, la suma algebraica de las fuerzas en la dirección x (u horizontal) debe ser igual a cero, y la suma algebraica de fuerzas en el eje y (o vertical) debe ser igual a cero. Otra forma de indicar lo mismo es que la suma de fuerzas hacia la derecha debe ser igual a la suma de las fuerzas hacia la izquierda, y la suma de fuerzas hacia arriba debe ser igual a la suma de fuerzas hacia abajo.

Descomponemos la tensión T en dos componentes (líneas punteadas en la figura), la componente horizontal con magnitud $T\cos\theta$, y la componente vertical con magnitud $T\sin\theta$.

Las fuerzas en la dirección x son H hacia la izquierda y $T\cos\theta$ hacia la derecha, mientras que las fuerzas en la dirección y son W hacia abajo y $T\sin\theta$ hacia arriba. De donde, haciendo equilibrio de acciones o fuerzas en las direcciones de los ejes tenemos:

$$T\sin\theta = W, \quad T\cos\theta = H$$

Dividiendo, y usando el hecho de que la tangente $= dy/dx =$ pendiente en P , tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{H}$$

En esta ecuación, H es una constante, puesto que es la tensión en el punto más bajo, pero W puede depender de x . Derivando esta última ecuación con respecto a x , tenemos:

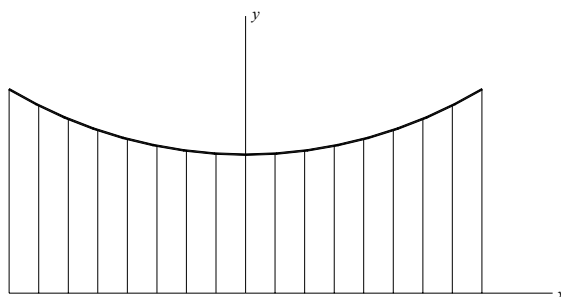
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H} \frac{dW}{dx}$$

Ahora dW/dx representa el incremento en W por unidad de incremento en x ; esto es, la carga por unidad de distancia en la dirección horizontal. La ecuación diferencial anterior es fundamental.

Ejemplo aclaratorio:

Un cable flexible de poco peso (despreciable) soporta un puente uniforme.

Determine la forma del cable. (Este es el problema de determinar la forma del cable en un *puente colgante*, el cual es de gran uso en la construcción de puentes).



Formulación matemática:

La ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H} \frac{dW}{dx}$ se cumple aquí y nos resta determinar dW/dx , la carga por unidad de incremento en la dirección horizontal. En este caso dW/dx es una constante, llamada el peso por unidad de longitud del puente. Llamando a esta constante W , tenemos

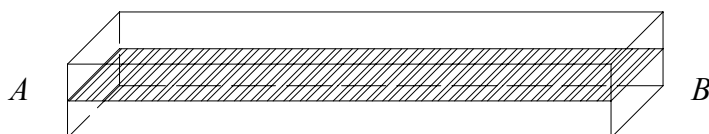
que $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W}{H}$

Denotando por b la distancia del punto más bajo del cable desde el puente, tenemos $y = b$ donde $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ donde $x = 0$, la segunda condición debido a que el punto donde $x = 0$ es un punto mínimo.

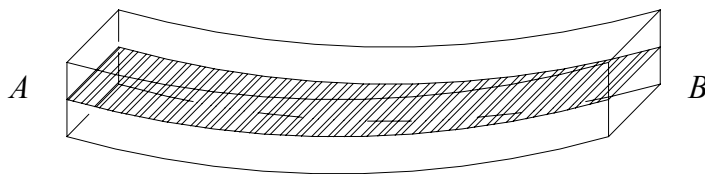
Integrando dos veces la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W}{H}$ y haciendo uso de las condiciones dadas, encontramos que $y = \frac{Wx^2}{2H} + b$, siendo esta la ecuación de una parábola.

6. La deflexión de vigas.

Considere una viga horizontal AB según la figura. Se supone que la viga es uniforme en su sección transversal y de material homogéneo. El eje de simetría se encuentra en el plano medio indica por la zona sombreada.



Cuando está sometida a fuerzas, las cuales suponemos que están en un plano que contiene el eje de simetría, la viga, debido a su elasticidad, puede distorsionarse en su forma como se muestra en la siguiente figura.



Estas fuerzas pueden ser debidas al peso de la viga, a cargas aplicadas externamente, o a una combinación de ambas. El eje de simetría distorsionado resultante, situado en el plano medio distorsionado de la segunda figura, se llama la *curva elástica*. La determinación de esta curva es de importancia en la teoría de elasticidad.

Hay muchas maneras de apoyar vigas.

Vigas en voladizo: una viga en la cual el extremo A está rígidamente fijo, mientras que el extremo B está libre, para moverse.

Viga simplemente apoyada: la viga está apoyada en los dos extremos A y B .

Hay más formas y más condiciones para la deflexión que serán aplicadas a cada tipo de problema.

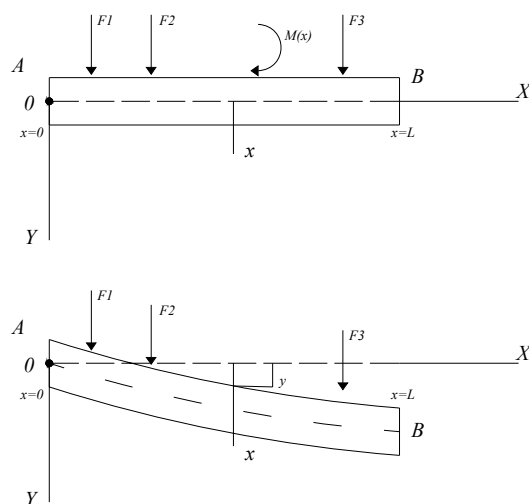
Así como hay diferentes maneras de apoyar vigas, también hay diferentes maneras de aplicar fuerzas de carga externa.

Carga uniformemente distribuida sobre toda la viga.

Carga variable sobre toda la viga o sólo en una parte de ella.

Carga puntual o concentrada.

Considere la viga horizontal OB de la figura siguiente. Colocando el eje de simetría (línea punteada) en el eje X tomado como positivo a la derecha y con origen en O . Escoja el eje Y como positivo hacia abajo.



Debido a la acción de las fuerzas externas F_1 y F_2 (y si es apreciable el peso de la viga) el eje de simetría se distorsiona en la curva elástica que se muestra punteada en la figura de abajo donde hemos tomado la viga como fija en O . El desplazamiento y de la curva elástica desde el eje X se llama la *deflexión o flecha* de la viga en la posición x . Así, si determinamos la ecuación de la curva elástica, se conocerá la deflexión de la viga.

Para poder formular la ecuación debemos saber:

Sea $M(x)$ el *momento flector* en una sección transversal vertical de la viga en x . Este momento flector se define como la suma algebraica de los momentos de esas fuerzas que actúan *sobre un lado de x* , los momentos se toman sobre una línea horizontal en la sección transversal en x . Al calcular los momentos adoptaremos la convención de que fuerzas *hacia arriba* producen momentos *negativos* y fuerzas *hacia abajo* producen momentos *positivos*, asumiendo por supuesto que el eje y se toma hacia abajo como se mencionó antes. No importa cuál lado de x se tome puesto que los momentos flectores calculados desde cualquier lado son iguales. El momento flector en x está simplemente relacionado con el radio de curvatura de la curva elástica en x , siendo la relación:

$$EI \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = M(x)$$

Donde E es el módulo de elasticidad de Young y depende del material usado en el diseño de la viga, e I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga en x con respecto a una línea horizontal que pasa por el centro de gravedad de esta sección transversal. El producto EI se llama la *rigidez* y se considerará como una constante.

Si asumimos que la viga se dobla sólo levemente, lo cual es válido para muchos propósitos prácticos, la pendiente y' de la curva elástica es tan pequeña que su cuadrado es despreciable comparado con 1, y la ecuación se puede remplazar por la buena aproximación:

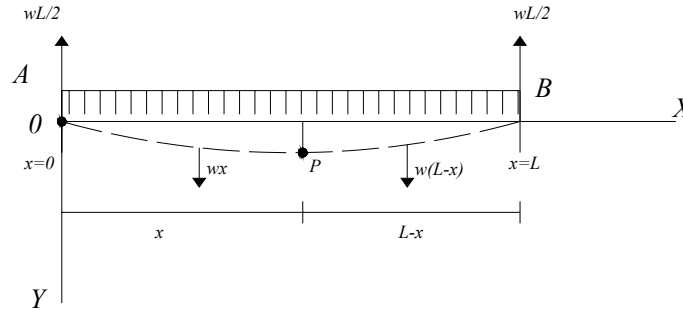
$$EIy'' = M(x)$$

Ejemplo aclaratorio:

Una viga horizontal, simplemente apoyada, de longitud L se dobla bajo su propio peso, el cual es w por unidad de longitud. Encuentre la ecuación de su curva elástica.

Formulación matemática:

En la figura se muestra la curva elástica de la viga (línea punteada) relativa a un conjunto de ejes coordenados con origen en O y direcciones positivas indicadas; puesto que la viga está simplemente soportada en O y en B , cada uno de estos soportes lleva la mitad del peso de la viga, o sea $wL/2$.



El momento flector $M(x)$ es la suma algebraica de los momentos de estas fuerzas actuando a un lado del punto P .

Escogiendo el lado derecho de P , actuarían dos fuerzas:

1. La fuerza hacia abajo $w(L-x)$, a una distancia $(L-x)/2$ de P , produciendo un momento positivo.
2. La fuerza hacia arriba $wL/2$, a una distancia $L-x$ de P , produciendo un momento negativo.

En este caso el momento flector es:

$$M(x) = w(L-x)\left(\frac{L-x}{2}\right) - (L-x)\frac{wL}{2} = \frac{wx^2}{2} - \frac{wLx}{2}$$

Con el valor de $M(x)$, la ecuación fundamental es:

$$EIy'' = \frac{wx^2}{2} - \frac{wLx}{2}$$

Dos condiciones son necesarias para determinar y . Estas son, $y = 0$ en $x = 0$, y en $x = L$, puesto que la viga no tiene deformación en los extremos o apoyos.

Solución:

Integrando dos veces $EIy'' = \frac{wx^2}{2} - \frac{wLx}{2}$ se obtiene $EIy = \frac{wx^4}{24} - \frac{wLx^3}{12} + c_1x + c_2$

Puesto que $y = 0$ cuando $x = 0$, tenemos $c_2 = 0$. De donde $EIy = \frac{wx^4}{24} - \frac{wLx^3}{12} + c_1x$

Puesto que $y = 0$ cuando $x = L$, $c_1 = wL^3/24$ y tenemos, finalmente:

$$y = \frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$$

Como la ecuación requerida de la curva elástica. Es de interés práctico usar la solución final $y = \frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$ para hallar la máxima deflexión. De la simetría o por el cálculo, el máximo ocurre en $x = L/2$, de donde la flecha máxima será:

$$y_{\max} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

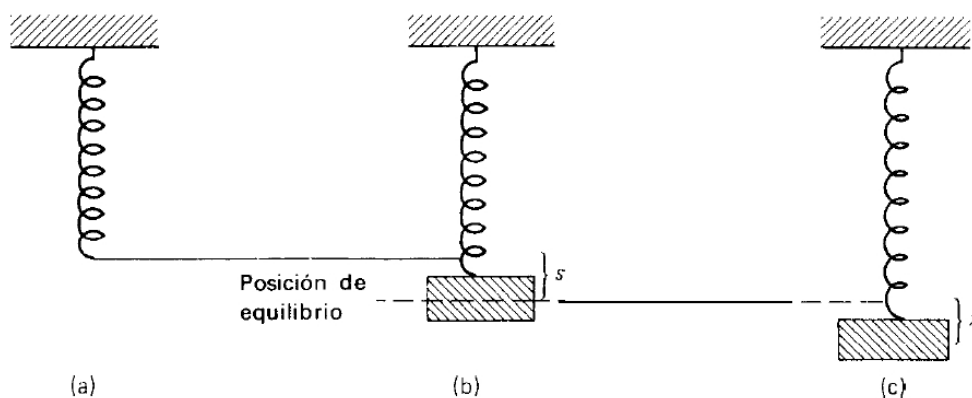
APLICACIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES:

Tipos de aplicaciones:

1. Movimiento vibratorio de sistemas mecánicos:
 - 1.1 El resorte vibrante (movimiento armónico simple).
 - 1.2 El resorte vibrante con amortiguamiento (movimiento amortiguado).
 - 1.3 El resorte con fuerzas externas.
 - 1.4 La resonancia mecánica.

1. Movimiento vibratorio de sistemas mecánicos:

El sistema más simple disponible para estudiar el movimiento vibratorio consiste en un resorte de peso despreciable [figura(a)] suspendido verticalmente de un soporte fijo. Suponga que un peso W se cuelga del resorte [figura(b)].



Cuando el peso está en reposo describimos su posición como la *posición de equilibrio*. Si el peso se desplaza ejerciendo una fuerza vertical y hacia abajo y se deja de ejercer cuando tiene una cierta distancia respecto de la posición de equilibrio, estará bajo un movimiento vibratorio alrededor de la posición de equilibrio [figura(c)]. Queremos averiguar el movimiento que realiza el cuerpo en su desplazamiento respecto de la posición de equilibrio. Para conseguir este propósito, tendremos que conocer las fuerzas que actúan sobre el peso durante su movimiento. Por la experiencia vemos que hay una fuerza que

hace regresar o restaurar un peso desplazado a su posición de equilibrio. Esta fuerza se llama la *fuerza restauradora*.

La ley que gobierna esta fuerza es un caso especial de la ley generalizada de Hooke. Nos referiremos a este caso especial como la ley *de Hooke*, la cual se enuncia como sigue:

La fuerza ejercida por un resorte, tendiente a restaurar el peso W a la posición de equilibrio, es proporcional a la distancia de W a la posición de equilibrio. (“la fuerza es proporcional al alargamiento”).

Denotamos la magnitud de la fuerza restauradora por $|f|$, y sea x la posición de W medida desde la posición de equilibrio. Se supone la dirección positiva hacia abajo, de modo que x es positivo cuando W está por debajo de la posición de equilibrio y negativo cuando W esté por encima de esta posición.

De acuerdo a la ley de Hooke,

$|f| \propto |x|$ o $|f| = k|x|$ donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad, que depende de la dureza del resorte y se llama *constante del resorte o módulo de elasticidad del resorte*. Para determinar la dirección de la fuerza, observamos que cuando $x > 0$ la fuerza está dirigida hacia arriba y por tanto es negativa. Cuando $x < 0$ la fuerza está dirigida hacia abajo y es por tanto positiva. Esto se puede satisfacer, sólo si la fuerza está dada tanto en magnitud como dirección por $-kx$, de modo que la ley de Hooke es:

$$f = -kx$$

Cuando el peso W se coloca en el resorte, se estira una distancia s como se ve en la anterior figura en la posición (b), según la ley de Hooke, la tensión T en el resorte es proporcional al elongamiento, y así $T_1 = ks$; puesto que el resorte y el peso están en equilibrio se tiene que $T_1 = ks = W$

Cuando el peso se baja más y se suelta, su posición en cualquier tiempo se muestra en la figura (c). La tensión T , en el resorte en este tiempo es, de acuerdo a la ley de Hooke, $T_2 = k(s + x)$

Sigue que la fuerza neta en la dirección positiva está dada por:

$$W - T_2 = W - k s - k x = -k x$$

Por la ley de Newton, la ecuación diferencial que describe el movimiento es:

$$\frac{W}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

Así, la fuerza neta es simplemente la fuerza restauradora y no depende del peso W .

Ejemplo aclaratorio:

Un peso P estira un resorte x_1 unidades de longitud. Si el peso se halla x_2 unidades de longitud por debajo de la posición de equilibrio y se suelta:

- (a) Establecer la ecuación diferencial y condiciones asociadas que describan el movimiento.
- (b) Encontrar la posición del peso como una función del tiempo.
- (c) Determinar la posición, velocidad y aceleración del peso t tiempo después de haberse soltado.

Formulación matemática:

Por la ley de Hooke:

$$|f| = k|x_1| \quad \text{y} \quad |f| = P \quad k = \frac{P}{x_1} \quad \text{La ecuación diferencial que describe el movimiento}$$

$$\text{es por tanto} \quad \frac{P}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

Puesto que inicialmente ($t = 0$) el peso está x_2 por debajo de la posición de equilibrio, tenemos $x = x_2$ en $t = 0$.

También, puesto que el peso se suelta (esto es, tiene velocidad cero) en $t = 0$,

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{en} \quad t = 0.$$

La respuesta a la cuestión (a) está dada por la ecuación $\frac{P}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ con las condiciones

$$x = x_2 \text{ en } t = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \text{ en } t = 0$$

Solución:

Por el teorema de existencia y unicidad, para ecuaciones lineales, sacamos la función auxiliar que nos permite llegar a la general.

La ecuación auxiliar sale de $\frac{P}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ llamando a $D = \frac{d}{dt}$, $x = e^{mt}$ y a $E = \frac{kg}{P}$

tenemos $\frac{d^2x}{dt^2} + Ex = 0$ y $D^2 = m^2 e^{mt}$.

Sustituyendo en $\frac{d^2x}{dt^2} + Ex = 0$ la anterior tendremos: $(D^2 + E)e^{mt} = 0$ de donde sacamos

que $(m^2 + E)e^{mt} = 0$ para la cual $m^2 + E = 0$ y tiene raíces $m = \pm Ei$. De donde la ecuación diferencial tiene la solución de la forma: $x = c_1 e^{Eit} + c_2 e^{-Eit}$

De otra forma podemos calcular la solución general de esta ecuación haciendo a $x' = v$ en

la ecuación $x'' + Ex = 0$ tendremos que para $\frac{d^2x}{dt^2} + Ex = 0$, $\frac{dv}{dt} + Ex = 0$, $\frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} + Ex = 0$,

$v \frac{dv}{dx} + Ex = 0$ separado variables e integrando tendremos $\int v dv + E \int x dx = 0$ entonces

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} Ex^2 = c \text{ de donde } c_2 = 2c \text{ despejando } v = \pm \sqrt{c^2 - Ex^2} \text{ como } x' = v$$

integrando en la anterior $\int \frac{dx}{\sqrt{c^2 - Ex^2}} = \pm \int dt$ con lo cual $\text{arcsen}\left(\frac{x}{c_1}\right) = \pm Et + c_2$

$x = c_1(\pm Et + c_2) = c_1 \text{sen} c_2 \cos Et \pm c_1 \cos c_2 \text{sen} Et$ que se puede escribir como :

$x = A \text{ sen } Et + B \text{ cos } Et$ siendo A y B constantes.

Como la ecuación $x = A \text{ sen } Et + B \text{ cos } Et$, y la ecuación $x = c_1 e^{Eit} + c_2 e^{-Eit}$, son las dos ecuaciones generales, debe haber una correlación entre ambas de tal forma que:

$A \text{ sen } Et + B \text{ cos } Et \equiv c_1 e^{Eit} + c_2 e^{-Eit}$ si consideramos que en $t = 0$ $e^{\pm Eit} = 1$ tendremos
 $B = c_1 + c_2$ diferenciando en ambos lados de la ecuación
 $A \text{ sen } Et + B \text{ cos } Et \equiv c_1 e^{Eit} + c_2 e^{-Eit} \rightarrow E(A \text{ cos } Et - B \text{ sen } Et) \equiv E[c_1 e^{Eit} - c_2 e^{-Eit}]$ para
 $t = 0$ $E(A) \equiv E[c_1 - c_2]$ con lo que $A = i[c_1 - c_2]$ con los valores obtenidos antes de A
 y, $B = c_1 + c_2$, $A = i[c_1 - c_2]$, tendremos:

$$c_1(\text{cos} Et + i \text{sen } Et) + c_2(\text{cos} Et - i \text{sen } Et) \equiv c_1 e^{Eit} + c_2 e^{-Eit} \text{ con lo cual } e^{Eit} = \text{cos} Et + i \text{sen } Et.$$

De la condición $x = x_2$ en $t = 0$, encontramos A , así que sustituyendo en
 $x = A \text{ cos } Et + B \text{ sen } Et$ y derivando respecto de t e introduciendo la condición $\frac{dx}{dt} = 0$
 en $t = 0$ podemos encontrar el valor de B y con lo cual la x para las condiciones dadas.

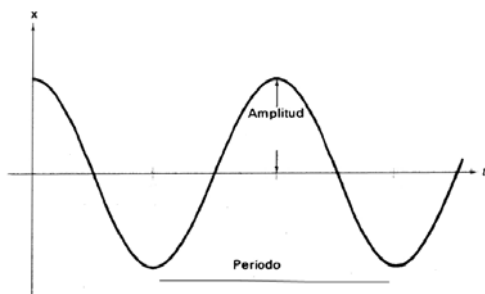
Para calcular la velocidad y aceleración solo habrá que derivar una vez para la velocidad y dos para la aceleración, respecto del tiempo, en la ecuación de la posición:

$$x = A \text{ sen } Et + B \text{ cos } Et$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = a(t)$$

En el gráfico de la figura siguiente se obtiene dando valores a la función posición,
 $x = A \text{ sen } Et + B \text{ cos } Et$, se ve que el peso empieza en $x = A$ donde $t = 0$, luego pasa por la
 posición de equilibrio en $x = 0$ a la posición $x = -A$ y luego regresa de nuevo a la posición
 de equilibrio, la pasa y vuelve a $x = A$. Este ciclo se repite una y otra vez. Físicamente el
 gráfico describe el movimiento periódico hacia arriba y abajo del resorte, el cual se llama
movimiento armónico simple.

En general, cualquier movimiento descrito por la ecuación $\frac{d^2x}{dt^2} = -ax$,



donde $a > 0$ es una constante, será movimiento armónico simple. Físicamente esta ecuación nos dice que la aceleración es directamente proporcional al desplazamiento pero en dirección opuesta (indicado por el signo menos).

Llamamos al desplazamiento máximo del peso de su posición de equilibrio (esto es, $x = 0$) *amplitud*.

El tiempo para un ciclo completo se llama *período*. Del gráfico vemos que el período es $\frac{\pi}{4} = T$; otra forma de ver que el período es $\frac{\pi}{4}$, sin el gráfico, es determinando cuándo el peso está en un extremo de su trayectoria (esto es, ya sea el punto más alto, o más bajo). Cuando tomamos el punto más bajo dado por $x = A \cos Et$, esto ocurrirá cuando $\cos Et = 1$, esto es, $Et = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ o $t = 0; \pi/4, 2\pi/4, 3\pi/4, \dots$. la primera vez que $x = \max$ es cuando $t = 0$, la segunda cuando $t = \pi/4$, la tercera cuando $t = 2\pi/4$, etc. La diferencia entre tiempos sucesivos es $\pi/4$, la cual es el período. El número de ciclos por segundos se llama *frecuencia*.

Período (T) = Número unidades de tiempo por ciclo = $\pi/4$

Frecuencia (f) = Número de ciclos por unidad de tiempo = $\frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$

En general si T es el período, la frecuencia f está dada por $f = \frac{1}{T}$

Si ahora de la solución general $x = A \cos Et + B \sin Et$ damos las condiciones iniciales:

$$\frac{dx}{dt} \neq 0 \quad x \neq 0 \quad \text{en} \quad t = 0.$$

Despejando las constantes A y B obtenemos una ecuación de la forma:

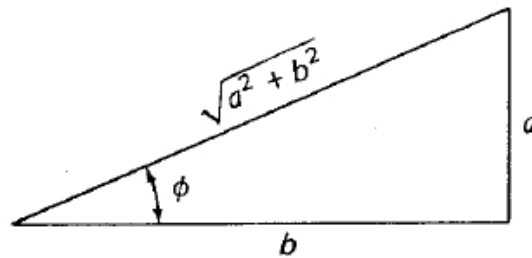
$x = a \cos Et + b \sin Et$ llamando a $E = \omega$ tendremos $x = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ esta ecuación la podemos poner de la forma:

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \phi)$$

obtenida de $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \phi) = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi) =$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \left[(\sin \omega t) \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) + (\cos \omega t) \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \right] = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

El ángulo ϕ a menudo se llama el *ángulo de fase*.



Si un movimiento se puede describir de la forma:

$$x = A \sin(\omega t + \phi) \quad \text{entonces} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

obteniendo la relación $\omega = 2\pi f$ la cual a menudo es útil.

El movimiento armónico simple se da en muchos otros casos además de las vibraciones de resortes, como en el movimiento del péndulo de un reloj, el balanceo de un barco o un avión, etc.

1.2 El resorte vibrante con amortiguamiento (movimiento amortiguado).

Los resortes considerados en el apartado anterior son modelos idealizados fuera de los casos reales, puesto que las oscilaciones no disminuían, como uno esperaría por experiencia, sino por el contrario, se mantenían constantes en el tiempo. En la práctica, fuerzas de fricción y otras (tales como la resistencia del aire) actúan para decrecer la amplitud de las oscilaciones y finalmente traer el sistema al reposo. Una manera para obtener una mejor aproximación a la realidad, es suponiendo una fuerza *amortiguadora*. La ley exacta para esta fuerza no se conoce, puesto que depende de muchas variables, pero se ha encontrado mediante la experimentación, que para velocidades pequeñas, la magnitud de la fuerza amortiguadora es aproximadamente proporcional a la velocidad instantánea del peso en el resorte.

La magnitud por tanto está dada por:

$$\beta \left| \frac{dx}{dt} \right|$$

donde β es la constante de proporcionalidad llamada la *constante de amortiguamiento*.

La fuerza amortiguadora se opone al movimiento, de modo, que cuando el peso va bajando la fuerza amortiguadora actúa hacia arriba, mientras que actúa hacia abajo cuando el peso va subiendo. Asumiendo hacia abajo como la dirección positiva, vemos que la fuerza amortiguadora debe ser negativa cuando dx/dt sea positiva, y debe ser positiva cuando dx/dt sea negativa. Así, con $\beta > 0$, es claro que la fuerza amortiguadora debe estar dada tanto en magnitud como en dirección por $-\beta dx/dt$.

Cuando se tienen en cuenta las fuerzas restauradoras ya consideradas, según la ley de Newton, la ecuación diferencial del movimiento es:

$$\frac{W}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = -\beta \frac{dx}{dt} - kx \quad \text{o} \quad \frac{W}{g} \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Ejemplo aclaratorio:

Un peso W estira un resorte x_1 unidades de longitud. Si el peso se halla x_2 unidades de longitud por debajo de la posición de equilibrio y se suelta:

- (a) Establecer la ecuación diferencial y condiciones asociadas que describan el movimiento.
- (b) Encontrar la posición del peso como una función del tiempo.

Formulación matemática:

Teniendo en cuenta la fuerza amortiguadora

La ecuación del movimiento será
$$\frac{W}{g} \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Las condiciones iniciales son: $x = x_2$ en $t = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$ en $t = 0$

Solución:

Por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones lineales sacamos la función auxiliar que nos permite llegar a la general.

La ecuación auxiliar sale de $\frac{W}{g} \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0$ llamando a $D = \frac{d}{dt}$, $x = e^{mt}$ y a

$E = \frac{kg}{W}$ $F = \frac{\beta g}{W}$ tenemos $\frac{d^2x}{dt^2} + F \frac{dx}{dt} + Ex = 0$ y $D = me^{mt}$ $D^2 = m^2 e^{mt}$.

Sustituyendo en $\frac{d^2x}{dt^2} + F \frac{dx}{dt} + Ex = 0$ la anterior tendremos: $(D^2 + DF + E)e^{mt} = 0$ de

donde sacamos que $(m^2 + mF + E)e^{mt} = 0$ para la cual $(m^2 + mF + E) = 0$ y tiene raíces

$$m = \frac{-F \pm \sqrt{F^2 - 4E}}{2} \quad \text{De donde la ecuación diferencial tiene la solución de la forma:}$$

$$x = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{-m_2 t} \quad \text{donde} \quad m_1 = \frac{-F + \sqrt{F^2 - 4E}}{2} \quad m_2 = \frac{-F - \sqrt{F^2 - 4E}}{2}$$

De otra forma $m = -a \pm bi$ si $F^2 - 4E < 0$ $x = c_1 e^{t(-a+bi)} + c_2 e^{t(-a-bi)} = e^{-ta} [c_1 e^{tbi} + c_2 e^{-tbi}]$ siendo la expresión $x = [c_1 e^{tbi} + c_2 e^{-tbi}]$ cuya solución general debe ser como la ecuación $x = A \sin bt + B \cos bt$, son las dos ecuaciones generales. Debe haber una correlación entre ambas, de tal forma que:

$A \sin bt + B \cos bt \equiv c_1 e^{tbi} + c_2 e^{-tbi}$ si consideramos que en $t = 0$ $e^{\pm tbi} = 1$ tendremos $B = c_1 + c_2$ diferenciando en ambos lados de la ecuación $A \sin bt + B \cos bt \equiv c_1 e^{tbi} + c_2 e^{-tbi}$ $\rightarrow b(A \cos bt - B \sin bt) \equiv bi[c_1 e^{bit} - c_2 e^{-bit}]$ para $t = 0$ $b(A) \equiv bi[c_1 - c_2]$ con lo que $A = i[c_1 - c_2]$ con los valores obtenidos antes de A y B , $B = c_1 + c_2$, $A = i[c_1 - c_2]$, tendremos $c_1(\cos bt + i \sin bt) + c_2(\cos bt - i \sin bt) \equiv c_1 e^{bit} - c_2 e^{-bit}$ con lo cual $e^{bit} = \cos bt + i \sin bt$.

De la condición $x = x_2$ en $t = 0$, encontramos A , así que sustituyendo en $x = A \sin bt + B \cos bt$ y derivando respecto de t e introduciendo la condición $\frac{dx}{dt} = 0$ en $t = 0$ podemos encontrar el valor de B y con lo cual la x para las condiciones dadas.

Por analogía de las ecuaciones:

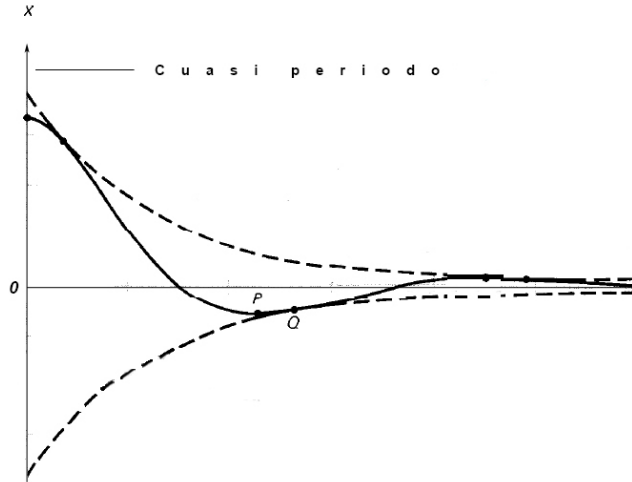
$$A \sin bt + B \cos bt \equiv c_1 e^{tbi} + c_2 e^{-tbi}$$

$$A \sin bt + B \cos bt \equiv e^{-ta} [c_1 e^{tbi} + c_2 e^{-tbi}]$$

tendremos que la segunda ecuación se convierte en $x = e^{-ta} [c_1 e^{tbi} + c_2 e^{-tbi}]$ donde su ecuación solución será:

$$x = e^{-ta} [A \cos bt + B \sin bt]$$

Determinando las constantes A y B sujetas a las condiciones citadas anteriormente, encontramos la ecuación de la posición en función del tiempo, que determina una gráfica de este tipo:



Si hacemos uso de la identidad $a \cos \omega t + b \sin \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \phi)$

y de la ecuación $x = e^{-ta} [A \cos bt + B \sin bt]$ se puede escribir:

$$x = e^{-ta} \sqrt{c^2 + d^2} [\sin(\omega t + \phi)]$$

El gráfico de la figura está entre los gráficos de líneas punteadas puesto que el seno varía entre -1 y +1. El punto P representa un mínimo relativo, mientras que el punto Q está sobre la curva punteada. La diferencia constante en tiempos entre máximos (o mínimos) sucesivos se llama cuasi período, aunque se puede referenciar éste como el período. El adjetivo cuasi se usa, puesto que los valores funcionales no se repiten como lo harían si realmente hubiera periodicidad.

El movimiento descrito en este ejemplo se llama *movimiento oscilatorio amortiguado* o *movimiento amortiguado*.

Se debería notar que $x = e^{-ta} \sqrt{c^2 + d^2} [\sin(\omega t + \phi)]$ tiene la forma

$$x = \alpha(t) [\sin(\omega t + \phi)]$$

El cuasi período está dado por: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Por analogía con el caso no amortiguado, $\alpha(t)$ se llama la *amplitud*, o más exactamente la *amplitud tiempo variante*. Se ve que la amplitud decrece con el tiempo, estando así de acuerdo con lo experimentado. Un hecho destacado es que la frecuencia con amortiguamiento es menor que aquella sin amortiguamiento, esto es posible ya que se esperaría oposición al movimiento para incrementar el tiempo para un ciclo completo. La frecuencia sin amortiguamiento, esto es, con $\beta = 0$, a menudo se llama la *frecuencia natural*. Esta es de gran importancia en conexión con el fenómeno de resonancia a ser discutido posteriormente.

La fuerza amortiguadora puede ser demasiado grande comparada con la fuerza restauradora para permitir el movimiento oscilatorio.

1.3 El resorte con fuerzas externas.

En los casos anteriores vimos el problema de un resorte donde solo se consideraron las fuerzas restauradora y amortiguadora. Consideramos ahora casos donde pueden actuar otras fuerzas externas que varían con el tiempo. Tales fuerzas pueden ocurrir, por ejemplo, cuando el soporte que sostiene el resorte se mueve arriba y abajo en una manera especificada tal como en movimiento periódico, o cuando al peso se le da un pequeño empuje cada vez que alcanza la posición más baja. Si denotamos la fuerza externa por $F(t)$, la ecuación diferencial para el movimiento es:

$$\frac{W}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = -\beta \frac{dx}{dt} - kx + F(t) \quad \text{o} \quad \frac{W}{g} \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

donde la última ecuación puede escribirse: $a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = F(t)$

(donde $a = W/g$, $b = \beta$, $c = k$), a menudo llamada la ecuación de *vibraciones forzadas*.

Ejemplo aclaratorio:

Un peso W estira un resorte x_1 unidades de longitud. Si el peso se halla x_2 unidades de longitud por debajo de la posición de equilibrio y se suelta actuando sobre él una fuerza externa periódica, dada por la ecuación $F(t) = A \cos Bt$:

- (a) Establecer la ecuación diferencial y condiciones asociadas que describan el movimiento.
- (b) Encontrar la posición del peso como una función del tiempo.

Formulación matemática:

La ecuación diferencial es:

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = A \cos Bt$$

las condiciones iniciales son: $x = x_2$ en $t = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$ en $t = 0$

Solución:

Estudiando la primera parte de la ecuación diferencial

$$0 = a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx$$

escribiéndola en función de $D = \frac{d}{dt}$, $x = e^{mt}$, $D^2 = m^2 e^{mt}$ se vería como

$(aD^2 + bD + c)e^{mt} = 0$ o $(aD^2 + bD + c)x = 0$ donde en esta última ecuación a, b, c , serían constantes no todas iguales a cero de tal forma que usando la definición de dependencia lineal:

Un conjunto de funciones $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ denotadas como y_1, y_2, \dots, y_n , se dice que son *linealmente dependientes* en un intervalo si existe un conjunto de n constantes, no todas cero, tales que en el intervalo $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n \equiv 0$ en caso contrario se dice que el conjunto es *linealmente independiente*.

La dependencia o independencia se averigua mediante el Wronskiano.

Teorema: Si y_1, y_2 son linealmente dependientes en un intervalo, y si sus derivadas y'_1, y'_2 existen en el intervalo, entonces el Wronskiano de y_1, y_2 dado por

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y_2 y'_1$$

es idénticamente cero (esto es, $W = 0$) en el intervalo.

Este teorema puede enunciarse en términos de independencia lineal como sigue:

Si el Wronskiano de y_1, y_2 no es idénticamente cero (esto es, $W \neq 0$) en un intervalo, entonces y_1, y_2 son linealmente independientes en el intervalo.

Esto es cierto puesto que si y_1, y_2 fueran linealmente dependientes en el intervalo su Wronskiano sería idénticamente cero en el intervalo según el teorema anterior. Esta contradicción muestra que las funciones no son linealmente independientes, esto es, son linealmente dependientes en el intervalo. Con lo cual, si $W = y_1 y'_2 - y_2 y'_1 \neq 0$ tenemos $\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 0$.

Retomando la ecuación $(aD^2 + bD + c)x = 0$ y por el teorema de existencia-unicidad para $n = 2$, tomando como soluciones de la ecuación a

$$(ax_1'' + bx_1' + cx_1) = 0 \quad \text{y} \quad (ax_2'' + bx_2' + cx_2) = 0$$

multiplicando a la primera ecuación por x_2 , a la segunda por x_1 , restando las dos tendremos

$$a(x_1 x_2'' - x_2 x_1'') + b(x_1 x_2' - x_2 x_1') = 0$$

Puesto que el Wronskiano está dado por $W = x_1 x_2' - x_2 x_1'$ y ya que

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(x_1 x_2' - x_2 x_1') = x_1 x_2'' - x_2 x_1'' \quad \text{se convierte en} \quad a \frac{dW}{dt} + bW = 0$$

Resolviendo, esta ecuación diferencial de variables separadas

$$\frac{dW}{W} = \frac{-b}{a} dt \rightarrow \text{integrando} \rightarrow \ln W = \frac{-b}{a} t + c_1 \rightarrow W = e^{-\int \frac{b}{a} dt + c_1} = e^{-\int \frac{b}{a} dt} e^{c_1} = ce^{-\int \frac{b}{a} dt}$$

relación importante conocida como la *identidad de Abel*, dada por $W = ce^{-\int \frac{b}{a} dt}$

Puesto que la función exponencial en $W = ce^{-\int \frac{b}{a} dt}$ nunca es cero, vemos que el Wronskiano W debe ser *idénticamente* cero en el intervalo dado, en cuyo caso $c = 0$, o nunca cero en el intervalo, en cuyo caso $c \neq 0$. No puede haber nada intermedio.

Con todo lo anteriormente dicho, tendremos el siguiente teorema:

Teorema: Sea x_1, x_2 dos soluciones de la ecuación diferencial $(aD^2 + bD + c)x = 0$

donde $a \neq 0$, b, c son funciones continuas de x en algún intervalo. Entonces el Wronskiano de x_1, x_2 está dado por la *identidad de Abel*.

$W = \det \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = ce^{-\int \frac{b}{a} dt}$ y W es ya sea idénticamente cero en el intervalo o nunca cero en el intervalo.

Usando este teorema, podemos probar ahora el siguiente teorema para el caso de que x_1, x_2 sean soluciones de la ecuación $(aD^2 + bD + c)x = 0$

Teorema: Sean x_1, x_2 soluciones de la ecuación diferencial $(aD^2 + bD + c)x = 0$ en algún intervalo. Entonces

- (a) x_1, x_2 son linealmente dependientes si y sólo si $W = 0$ en el intervalo.
- (b) x_1, x_2 son linealmente independientes si y sólo si $W \neq 0$ en el intervalo.

De los dos Teoremas anteriores podemos obtener el siguiente teorema útil:

Teorema: Sea x_1 una solución a la ecuación diferencial $(aD^2 + bD + c)x = 0$. Entonces

una solución linealmente independiente está dada por $W = \det|x_1, x_2, x'_1, x'_2| = ce^{-tdt} \rightarrow$

dividendo en los dos termino por $x_1^2 \rightarrow \frac{d}{dt}(\frac{x_2}{x_1}) = \frac{ce^{-\int \frac{b}{a} dt}}{x_1^2} \rightarrow (\frac{x_2}{x_1}) + k = \int \frac{ce^{-\int \frac{b}{a} dt}}{x_1^2} dt \rightarrow$

integrando y tomando la constante de integración $c = 1, k = 0 \rightarrow x_2 = x_1 \int \frac{e^{-\int \frac{b}{a} dt}}{x_1^2} dt$

Otros teoremas importante nos dicen:

-Si x_1, x_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación $(aD^2 + bD + c)x = 0$, entonces $x = c_1x_1 + c_2x_2$ es una solución de la ecuación para cualesquiera constantes c_1, c_2 .

-Si x_1, x_2 son soluciones linealmente independientes de $(aD^2 + bD + c)x = 0$ y x_p es una solución particular de $(aD^2 + bD + c)x = F(t)$ entonces $x = c_1x_1 + c_2x_2 + x_p$ es una solución de la ecuación diferencial $(aD^2 + bD + c)x = F(t)$ para cualesquiera constantes c_1, c_2 .

De estos dos últimos teoremas se puede desprender:

Se ha definido la *solución general* de una ecuación diferencial de orden n como aquella solución que involucra n constantes arbitrarias. Todas las soluciones que no se podían obtener de esta solución general por *ninguna* selección de estas constantes se denominan *soluciones singulares*. En la mayoría de los problemas de naturaleza práctica la solución general es la que proporciona la solución significativa después de determinar las constantes de las condiciones dadas. Si surgen soluciones singulares, estas tienen “generalmente” poco o ningún significado práctico. De estos teoremas vemos que no hemos encontrado la solución que involucra dos constantes arbitrarias (el mismo número como el orden de la ecuación diferencial), la cual hemos llamado la *solución general*, sino en realidad *todas las otras soluciones* que de existir son soluciones particulares, esto es, casos especiales de la solución general obtenidos por la selección apropiada de las constantes. Así, estos Teoremas garantizan que no haya soluciones singulares.

Esta propiedad de no tener soluciones singulares es peculiar de las ecuaciones diferenciales *lineales*, pero no de todas las ecuaciones diferenciales *no lineales*.

Como $F(t) = A \cos Bt$ contiene una función de los términos $\cos Bt$ con lo que podemos utilizar el método de los coeficientes indeterminados para determinar la solución particular.

Ensayando como solución particular $x_p = c_1 \sin Bt + c_2 \cos Bt$ de
 $(aD^2 + bD + c)x = F(t)$

$$x_p = c_1 \sin Bt + c_2 \cos Bt \quad x'_p = Bc_1 \cos Bt - Bc_2 \sin Bt \quad x''_p = -B^2 c_1 \sin Bt - B^2 c_2 \cos Bt$$

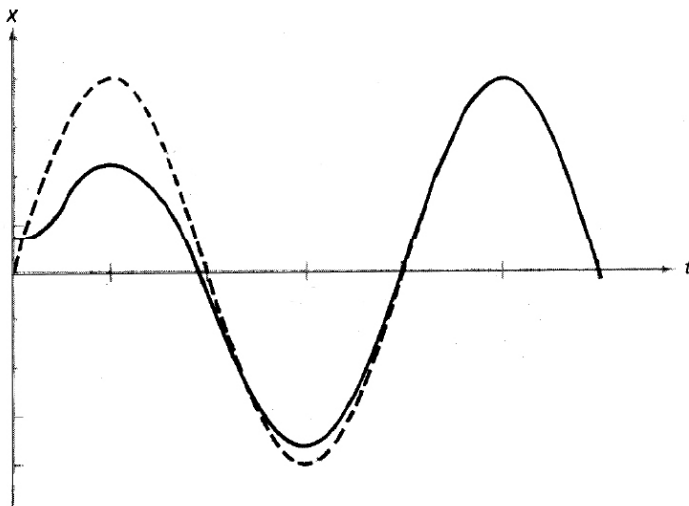
Sustituyendo en la ecuación $ax'' + bx' + cx = F(t)$ calculamos el valor de las constantes c_1, c_2 y por tanto la solución particular.

La solución complementaria se obtiene de la misma forma que en el apartado anterior 1.2 con lo que sería

$$x_c = e^{-ta} [A \cos Bt + B \sin Bt] \text{ con lo que la solución general será de la forma:}$$

$$x = x_c + x_p = e^{-ta} [A \cos Bt + B \sin Bt] + c_1 \sin Bt + c_2 \cos Bt$$

Usando las condiciones iniciales podríamos determinar el gráfico siguiente:



1.4 La resonancia mecánica.

Cuando la frecuencia de una fuerza externa periódica aplicada a un sistema mecánico está relacionada de una manera sencilla con la frecuencia natural del sistema, puede ocurrir el fenómeno de la resonancia mecánica, la cual eleva las oscilaciones tales que el sistema puede desplomarse o colapsarse. Una compañía de soldados marchando en fila a través de un puente puede de esta manera hacer que el puente colapse. En una manera análoga, puede ser posible que una nota musical de una frecuencia característica propia estalle un cristal.

Debido a los grandes daños que pueden ocurrir, la resonancia mecánica es en general algo que necesita ser evitado, especialmente por el ingeniero al diseñar estructuras o mecanismos vibrantes.

La resonancia mecánica puede también servir para propósitos útiles. Por ejemplo, si un automóvil se quedara atascado en la nieve (o barro), puede, al “mecerlo”, ser puesto a vibrar con su frecuencia natural. Entonces, al aplicarle una fuerza con esta misma frecuencia, la resonancia mecánica resultante puede ser algunas veces suficiente para liberarlo.

Ejemplo aclaratorio:

Un peso P estira un resorte x_1 unidades de longitud. Si el peso se halla x_2 unidades de longitud por debajo de la posición de equilibrio y se suelta aplicándole una fuerza externa dada por $F(t) = A \cos Bt$.

Describir el movimiento que resulta si se supone que inicialmente el peso está en la posición de equilibrio ($x = 0$) y que su velocidad inicial es cero.

Formulación matemática:

La ecuación diferencial que describe el movimiento es por tanto

$$\frac{P}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F(t)$$

Puesto que inicialmente ($t = 0$) el peso está x_2 por debajo de la posición de equilibrio, tenemos $x = x_2$ en $t = 0$.

También, puesto que el peso se suelta (esto es, tiene velocidad cero) en $t = 0$,

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{en} \quad t = 0.$$

Solución:

Como $F(t) = A \cos Bt$ contiene una función de los términos $\cos Bt$, con lo que podemos utilizar el método de los coeficientes indeterminados para determinar la solución particular.

Ensayando como solución particular $x_p = c_1 \sin Bt + c_2 \cos Bt$ de

$$\left(\frac{P}{g} D^2 + k\right)x = F(t)$$

$$x_p = c_1 \sin Bt + c_2 \cos Bt \quad x'_p = Bc_1 \cos Bt - Bc_2 \sin Bt \quad x''_p = -B^2 c_1 \sin Bt - B^2 c_2 \cos Bt$$

Sustituyendo en la ecuación $\frac{P}{g} x'' + Kx = F(t)$ calculamos el valor de las constantes c_1, c_2 y por tanto la solución particular.

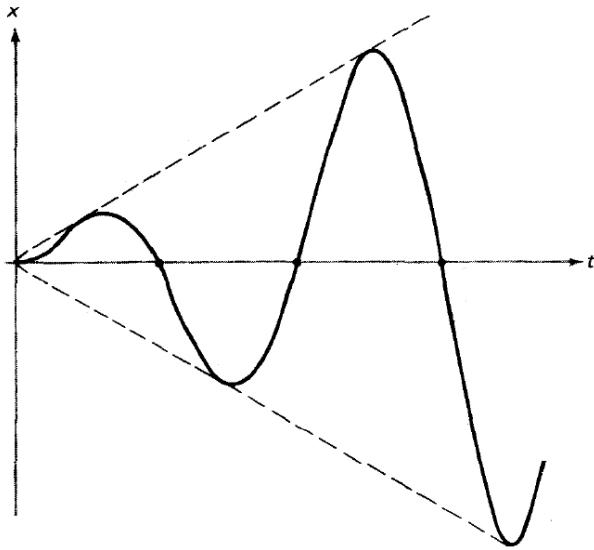
La solución complementaria de $\frac{P}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F(t)$ se obtiene de la misma forma que en el apartado anterior 1.1 con lo que sería $x_c = A \cos Bt + B \sin Bt$ con lo que la solución general será de la forma:

$$x = x_c + x_p = A \cos Bt + B \sin Bt + c_1 \sin Bt + c_2 \cos Bt$$

Usando las condiciones iniciales, podemos observar una solución será cuando $A = B = 0$ de donde podemos sacar que:

$$x = c_1 \sin Bt + c_2 \cos Bt$$

podríamos determinar el gráfico siguiente:



El gráfico de la ecuación $x = c_1 \sin Bt + c_2 \cos Bt$ está entre los gráficos de $x = t$ y $x = -t$ como se muestra en la figura. Se puede ver en el gráfico que las oscilaciones van creciendo sin límite. Naturalmente, el resorte está limitado a romperse dentro de un corto tiempo.

En este ejemplo, el amortiguamiento fue ignorado, ocurriendo la resonancia porque la *frecuencia de la fuerza externa aplicada fue igual a la frecuencia natural del sistema no amortiguado*. Esto es un principio general.

En el caso donde ocurre amortiguamiento las oscilaciones no crecen sin límite, pero sin embargo pueden llegar a ser muy grandes, la resonancia en este caso ocurre cuando la frecuencia de la fuerza externa aplicada es ligeramente menor que la frecuencia natural del sistema.