Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2]
[Prof: Los Profesores] UNI, 11 de mayo de 2021

Práctica Calificada 2

1. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   a) Dadas tres funciones linealmente dependientes en un intervalo, entonces necesariamente una de ellas es múltiplo constante de una de las otras dos en ese intervalo. [1ptos]

   b) Si el wronskiano de cinco funciones es cero para algunos valores de x y no cero para otros valores de x. Entonces estas cinco funciones son linealmente dependientes. [1.5ptos]

   c) Si y_1 y y_2 son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes continuos, entonces existen algunos valores de x para el cual el wronskiano de y_1 y y_2 es cero. [1ptos]

   d) Existe una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes que puede tener como solución a las siguiente funciones $x, x+1$ y x^2. [1.5ptos]

Solución:

a) (F) En general es combinación lineal de las otras dos.

b) (F) Basta que el wronskiano sea no nulo en un punto del intervalo para que sean independientes.

c) (F) y_1 e y_2 podrían ser l.i. y por tanto no existir valores x donde el wronskiano se anule.

d) (F) No puede existir tal función porque su espacio de solución es generado por dos funciones l.i. por lo que las funciones x, $x+1$ y x^2 deberían ser l.d, lo cual sería absurdo.

2. Utilice el método de coeficientes indeterminados para hallar la solución general de la siguiente EDO:

$$y'' + 9y = xe^x \sin 2x - 5\sin 2x + 3\cos 2x.$$

[5ptos]

Solución:

a) La solución de la ecuación homogénea relacionada (polininomio característico) es:

$$y_h = \alpha \sin 3x + \beta \cos 3x \quad \text{para } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

b) El término del lado derecho $R(x) = xe^x \sin 2x - 5\sin 2x + 3\cos 2x$ lo dividimos en dos $R_1(x) = xe^x \sin 2x$ y $R_2(x) = -5\sin 2x + 3\cos 2x$, así que por la linealidad del operador diferencial con coeficientes constantes, el problema es equivalente a resolver:

$$y'' + 9y = xe^x \sin 2x \tag{1}$$
$$y'' + 9y = -5\sin 2x + 3\cos 2x. \tag{2}$$

c) Hallamos una solución particular de (1). Por coeficientes indeterminados a cada factor de R_1, se obtiene:

$$y_1 = (A_1 x + A_2)(B_1 \sin 2x + B_2 \cos 2x)(Ce^x).$$

Lo cual podemos expresar para ciertos coeficientes constantes D_i, como:

$$y_1 = D_1 e^x \sin 2x + D_2 e^x \cos 2x + D_3 x e^x \sin 2x + D_4 x e^x \cos 2x.$$

Hallamos sus segunda derivada, para lo cual necesitamos

$$\begin{aligned} y_1' = (D_1 - 2D_2 + D_3)e^x \sin 2x + (2D_1 + D_2 + D_4)e^x \cos 2x \\ +(D_3 - 2D_4)xe^x \sin 2x + (2D_3 + D_4)xe^x \cos 2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1'' = (D_1 - 2D_2 + D_3)[e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x] + (2D_1 + D_2 + D_4)[e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x] \\ (D_3 - 2D_4)e^x \sin 2x + (D_3 - 2D_4)x[e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x] \\ (2D_3 + D_4)e^x \cos 2x + (2D_3 + D_4)x[e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x]. \end{aligned}$$

Reemplazando en $y_1'' + 9y_1 = xe^x \sin 2x$ e igualando coeficiente, obtenemos el sitema

$$\begin{cases} 6D_1 - 4D_2 + 2D_3 - 4D_4 = 0 \\ 4D_1 + 6D_2 + 4D_3 + 2D_4 = 0 \\ 6D_3 - 4D_4 = 1 \\ 4D_3 + 6D_4 = 0. \end{cases}$$

El cual tiene como solución $D_1 = -\dfrac{87}{1014}$, $D_2 = \dfrac{1}{169}$, $D_3 = \dfrac{3}{26}$ y $D_4 = -\dfrac{1}{13}$. Por tanto

$$y_1 = -\frac{87}{1014}e^x \sin 2x + \frac{1}{169}e^x \cos 2x + \frac{3}{26}xe^x \sin(2x) - \frac{1}{13}xe^x \cos 2x.$$

d) De manera similar hallamos una solución particular de (2). Usando coeficientes indeterminados para R_2, se obtiene

$$y_2 = A \sin 2x + B \cos 2x.$$

Derivando, reemplazando en (2) e igualando coeficientes:

$$y_2 = -\sin 2x + \frac{3}{5}\cos 2x.$$

e) Así que nuestra solución particular es

$$y_p = -\frac{87}{1014}e^x \sin 2x + \frac{1}{169}e^x \cos 2x + \frac{3}{26}xe^x \sin(2x) - \frac{1}{13}xe^x \cos 2x - \sin 2x + \frac{3}{5}\cos 2x.$$

Y la solución general es $y = y_h + y_p$.

3. Utilice el método de variación de parámetros para hallar la solución general de la siguiente EDO:

$$y'' - 2y' + y = \frac{6e^x}{x^a} \quad \text{con } a > 0.$$

[5ptos]

Solución:

a) Del uso del polinomio característico se obtiene la solución general de la ecuación homogénea relacionada:

$$y_h = \alpha e^x + \beta x e^x \quad \text{para } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Luego, se considera las soluciones linealmente independientes $y_1 = e^x$ y $y_2 = xe^x$.

b) Hallamos el wronskiano de y_1, y_2:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (e^x + xe^x) \end{vmatrix} = e^{2x} > 0.$$

c) Hallamos una solución particular por el método de variación de parámetros para $R = \dfrac{6e^x}{x^a}$:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2.$$

Donde

$$u_1 = -\int \frac{Ry_2}{W(y_1, y_2)}\, dx = -\int 6x^{1-a}\, dx \quad \Longrightarrow \quad u_1 = \begin{cases} -6\ln x, & a = 2 \\ -\dfrac{6x^{2-a}}{2-a}, & a \neq 2. \end{cases}$$

$$u_2 = \int \frac{Ry_1}{W(y_1, y_2)}\, dx = \int 6x^{-a}\, dx \quad \Longrightarrow \quad u_2 = \begin{cases} 6\ln x, & a = 1 \\ \dfrac{6x^{1-a}}{1-a}, & a \neq 1. \end{cases}$$

Por casos, se obtiene

$$y_p = \begin{cases} \dfrac{12x^{2-a}e^x}{(1-a)(2-a)} & , \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \\ -6e^x \ln x + \dfrac{6x^{2-a}e^x}{1-a} & , \quad a = 2 \\ -\dfrac{6x^{2-a}e^x}{2-a} + 6xe^x \ln x & , \quad a = 1. \end{cases}$$

d) Por tanto, la solución general es

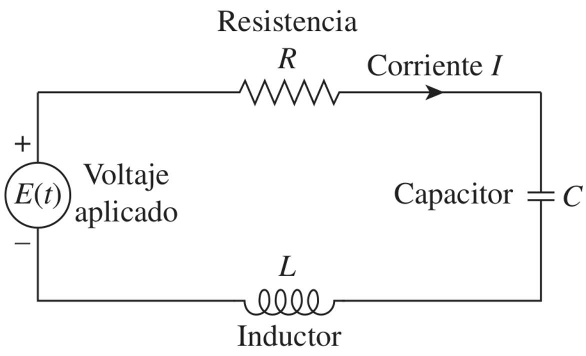
$$y = \alpha e^x + \beta x e^x + y_p \quad \text{para } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

4. Considere un circuito en serie RLC con resistencia $R = 2 \times 10^5\,\Omega$, inductancia $L = 0{,}1\,H$, capacitancia $C = 2 \times 10^{-5}\,F$ y un voltaje variable $E(t) = 5\cos 60t$. Este circuito es gobernado por la siguiente EDO:

$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE(t)}{dt}.$$

a) Determine la corriente de estado estacionario en el circuito, $I(t)$. [2.5ptos]

b) Determine el valor de la capacitancia C que maximizará esta corriente, manteniendo constantes R y L. [2.5ptos]



Solución:

a1) Sea $w = 60$, $E_0 = 5$, $F_0 = E_0 w = 300$ y $w_0^2 = \dfrac{1}{LC}$. Normalizando la EDO, obtenemos:

$$I'' + \frac{R}{L} I' + w_0^2 I = -\frac{F_0}{L} \sin wt.$$

a2) Hallamos la solución general de la ecuación homogénea:

$$I_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \text{para } C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

donde r_1 y r_2 son las soluciones del polinomio característico.

a3) Luego, por el método de coeficientes indeterminados, obtenemos la solución particular

$$I_p = A \cos wt + B \sin wt.$$

Para hallar las constantes, reemplazamos I_p en la EDO y comparamos los coeficientes, obteniendo

$$\begin{cases} -BL(w_0^2 - w^2) - ARw & = -F_0 \\ AL(w_0^2 - w^2) + BRw & = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema

$$B = -\frac{L(w_0^2 - w^2)F_0}{L^2(w_0^2 - w^2)^2 + R^2 w^2} \quad \wedge \quad A = \frac{Rw}{L(w_0^2 - w^2)} \times \frac{L(w_0^2 - w^2)F_0}{L^2(w_0^2 - w^2)^2 + R^2 w^2}.$$

a4) Reemplazando los valores de A y B:

$$I_p = \frac{F_0}{L^2(w_0^2 - w^2)^2 + R^2 w^2} \big[Rw \cos wt - L(w_0^2 - w^2) \sin wt \big].$$

Considerando $d^2 = L^2(w_0^2 - w^2)^2 + R^2 w^2$ y las razones trigonométricas:

$$\sin \phi = \frac{Rw}{d} \quad \wedge \quad \cos \phi = \frac{L(w_0^2 - w^2)}{d}.$$

La solución particular se puede escribir como

$$I_p = \frac{F_0 \sin(\phi - wt)}{\sqrt{L^2(w_0^2 - w^2)^2 + R^2 w^2}} \quad \text{con } \phi = \arctan\left(\frac{Rw}{L(w_0^2 - w^2)} \right),\ 0 \le \phi \le \pi.$$

a5) La solución general es $I = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + I_p$. Se observa que cuando $t \to \infty$ la solución homogénea se extingue, por tanto es lógico considerar a la solución particular como nuestra solución estacionaria, es decir

$$I(t) = \frac{E_0 \sin(\phi - wt)}{\sqrt{R^2 + \left(wL - \dfrac{1}{wC} \right)^2}} \quad \text{con } \phi = \arctan\left(\frac{wRC}{1 - LCw^2} \right),\ 0 \le \phi \le \pi.$$

b) El valor de C que maximizará la corriente (es decir minimizar el denominador) manteniendo constante $R = 2$ y $L = 0{,}1$ para la frecuencia $w = 60$ es

$$C = \frac{1}{Lw^2} = \frac{1}{0{,}1 \times 60^2} \approx 2{,}8 \times 10^{-3}\, F.$$