Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-1

[Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - CM2G2]
[Los Profesores] UNI, 06 de julio de 2021

Práctica Calificada 5

1. Utilice el método de expansión de autofunciones para resolver el siguiente PVF:

$$y'' = x(x - 2\pi)\,, \quad y(0) = y'(\pi) = 0.$$

(Sug. Utilice el operador de Sturm-Liouville $L = -\dfrac{d^2}{dx^2}$) [5ptos]

Solución: Sea el término fuente $f(x) = x(x - 2\pi)$ y el operador $L = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ autoadjunto en el espacio $V = \{v \in C^2[0, \pi] \,:\, v(0) = v'(\pi) = 0\}$.

a) Consideramos las soluciones del problema de autovalores $Ly = \lambda y$, cuyos valores propios son estrictamente positivos

$$\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

y sus respectivas autofunciones

$$\phi_n(x) = \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right).$$

b) Las autofunciones son ortogonales y forman una base respecto al espacio $C[0, \pi]$, dotado del producto interno usual, así se obtiene que

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) \sin\left(\frac{2m-1}{2}x\right) dx = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & n = m \end{array} \right. \tag{1}$$

c) Por la parte (b), f se puede expresar como una expansión en series de Fourier de las autofunciones, es decir

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \gamma_n \phi_n\,, \quad \gamma_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle}.$$

d) De manera similar, se expresa la solución en series de Fourier $y(x) = \sum_{n \geq 1} c_n \phi_n$, donde los coeficientes se obtienen de las propiedades de ortogonalidad con las autofunciones:

$$\begin{aligned} \langle Ly, \phi_m \rangle &= -\langle f, \phi_m \rangle \\ \langle \sum_{n \geq 1} c_n L\phi_n, \phi_m \rangle &= -\langle f, \phi_m \rangle \\ \sum_{n \geq 1} c_n \lambda_n \langle \phi_n, \phi_m \rangle &= -\langle f, \phi_m \rangle \\ c_m \lambda_m \langle \phi_m, \phi_m \rangle &= -\langle f, \phi_m \rangle, \end{aligned}$$

luego

$$c_m = -\frac{1}{\lambda_m} \frac{\langle f, \phi_m \rangle}{\langle \phi_m, \phi_m \rangle} = -\frac{\gamma_m}{\lambda_m}.$$

2. Encontrar el operador autoadjunto de $Lu = u'' + 4u' - 3u$, y su correspondiente dominio, bajo las siguientes condiciones de frontera $u'(0) + 4u(0) = 0$, $u'(1) + 4u(1) = 0$, sobre el intervalo $[0, 1]$. [5ptos]

Solución: Consideremos los siguientes espacios

$$V = \{w \in C^2[0,1] \, : \, w'(0) + 4w(0) = w'(1) + 4w(1) = 0\},$$
$$U = \{w \in C^2[0,1] \, : \, w(0) = w(1) = 0\}.$$

Por integración por partes se tiene

$$\int_0^1 uv'' = \{u(v' + 4v) - v(u' + 4u)\}\Big|_0^1 + \int_0^1 vu'',$$
$$\int_0^1 uv' = uv\Big|_0^1 - \int_0^1 vu'.$$

De las identidades anteriores, se tiene que

$$\forall u \in \operatorname{dom} L := V : \quad \langle u, Lv \rangle = \langle L^* u, v \rangle \quad \forall v \in \operatorname{dom} L^* := U \cap V,$$

donde $L^* u = u'' - 4u' - 3u$.

3. Determinar la solución general por series de potencias en torno al punto ordinario $x = 0$ de la siguiente ecuación diferencial

$$xy'' + (\sin x)y = 0.$$

[5ptos]

Solución: Se tiene un punto ordinario en $x = 0$ porque $\sin x/x$ puede desarrollarse en series de potencias en $\mathbb{R}$, es decir

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Expresamos la solución en series de potencias

$$y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Reemplzando en la EDO

$$y'' + \frac{\sin x}{x} y = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \right) \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n \right)$$
$$= \sum_{n\geq 0} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n \right) \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n \right),$$

donde $b_n = \dfrac{(-1)^{n/2}}{(n+1)!}$ cuando n es par y cero en otro caso. Luego por el teorema de Cauchy de producto de series, se tiene que

$$\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n \right) \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n \right) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Ahora igualando los coeficientes correspondientes a una misma potencia de x: $(n+1)(n+2)a_{n+2}+c_n = 0$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{1\times 2},\\
a_3 &= -\frac{a_1}{2\times 3},\\
a_4 &= \frac{1}{3\times 4}\left[\frac{a_0}{3!} - a_2\right],\\
a_5 &= \frac{1}{4\times 5}\left[\frac{a_1}{3!} - a_3\right],\\
a_6 &= \frac{1}{5\times 6}\left[-\frac{a_0}{5!} + \frac{a_2}{3!} - a_4\right],\\
a_7 &= \frac{1}{6\times 7}\left[-\frac{a_1}{5!} + \frac{a_3}{3!} - a_5\right],\\
a_8 &= \frac{1}{7\times 8}\left[\frac{a_0}{7!} - \frac{a_2}{5!} + \frac{a_4}{3!} - a_6\right],\\
a_9 &= \frac{1}{8\times 9}\left[\frac{a_1}{7!} - \frac{a_3}{5!} + \frac{a_5}{3!} - a_7\right],\\
a_{10} &= \frac{1}{9\times 10}\left[-\frac{a_0}{9!} + \frac{a_2}{7!} - \frac{a_4}{5!} + \frac{a_6}{3!} - a_8\right],\\
a_{11} &= \frac{1}{10\times 11}\left[-\frac{a_1}{9!} + \frac{a_3}{7!} - \frac{a_5}{5!} + \frac{a_7}{3!} - a_9\right].
\end{aligned}
$$

Así que tomando a_0 y a_1 como parámetros se puede despejar los coeficientes como $a_{2n} = \alpha_n \times a_0$ y $a_{2n+1} = \beta_n \times a_1$, $n \geq 0$. Por ejemplo

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= 1,\\
\alpha_1 &= -\frac{1}{2!},\\
\alpha_2 &= \left(1 + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{4!}\\
\alpha_3 &= -\left(3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{6!}\\
\alpha_4 &= \left(13 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)\frac{1}{8!}\\
\alpha_5 &= \left(69 + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{15}\right)\frac{1}{10!}.
\end{aligned}
$$

Por tanto la solucion general será

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_1(x),$$

donde $y_1(x) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n x^n$, $y_2(x) = \sum_{n\geq 0} \beta_n x^n$.

4. Halle la solución general por serie de potencias de la siguiente EDO en el intervalo $(0, +\infty)$

$$2xy'' + 5y' + xy = 0\,,$$

demuestre que las raíces del polinomio indicial no defieren en un entero. (Sug. Halle dos soluciones en serie linealmente independientes por el método de Frobenius alrededor del punto singular regular $x_0 = 0$) [5ptos]

Solución:

a) Llevamos la ecuación a su forma reducida:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad P(x) = \frac{5}{2x},\ Q(x) = \frac{1}{2}.$$

Claramente $x_0 = 0$ es singular y como las siguientes funciones

$$p(x) = xP(x) = \frac{5}{2}, \quad q(x) = x^2 Q(x) = \frac{x^2}{2},$$

son analíticas alrededor de $x_0 = 0$, entonces $x_0 = 0$ es un punto singular regular, se sabe que el desarrollo en series tendrá potencias fraccionarias o negativas de x, por lo que es natural considerar las soluciones de Frobenius de la forma

$$y(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^{n+r},$$

donde r se determina al igualar a cero el coeficiente total de la potencia mínima de x, esta ecuación se conoce como **ecuación indicial**

$$r(r-1) + p(0)r + q(0) = 0.$$

De aquí obtenemos dos raíces que si son reales tal que $r_1 \geq r_2$ y $r_1 - r_2$ no es entero, entonces por el **Teorema de Frobenius** existen dos soluciones linealmente independientes de la EDO, de la forma

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n\geq 0} a_n x^n \quad , \quad y_2 = x^{r_2} \sum_{n\geq 0} b_n x^n.$$

b) Reemplazando la solución de Frobenius en la EDO, se obtiene

$$\begin{aligned}
2xy'' + 5y' + xy &= 2x \sum_{n\geq 0}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + 5\sum_{n\geq 0}(n+r)c_n x^{n+r-1} + x\sum_{n\geq 0} c_n x^{n+r} \\
&= x^r \left[\sum_{n\geq 0}(n+r)(2n+2r+3)c_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0} c_n x^{n+1} \right] \\
&= x^r \left[r(2r+3)c_0 x^{-1} + (r+1)(2r+5)c_1 x^0 + \sum_{n\geq 2}(n+r)(2n+2r+3)c_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0} c_n x^{n+1} \right] \\
&= x^r \left[r(2r+3)c_0 x^{-1} + (r+1)(2r+5)c_1 x^0 + \sum_{n\geq 0}[(n+r+2)(2n+2r+7)c_{n+2} + c_n]x^{n-1} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Como $c_0 \neq 0$, se obtiene la ecuación indicial $r(2r+3) = 0$ y las raíces son

$$r_1 = 0\ , \quad r_2 = -\frac{3}{2},$$

cuya diferencia no es entera. Claramente del segundo sumando, se obtiene que $c_1 = 0$ y de la sumatoria

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+r+2)(2n+2r+7)}\ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

De lo cual se deduce que los coeficientes impares son nulos ya que $c_1 = 0$.
Analizamos el caso $r_1 = 0$

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(2n+7)}\ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Multiplicando los coeficientes pares y simplificando, se obtiene

$$c_2 \times c_4 \times c_6 \times \cdots \times c_{2n} = \frac{-a_0}{2 \cdot 7} \times \frac{-a_2}{4 \cdot 11} \times \frac{-a_4}{6 \cdot 15} \times \frac{-a_{2n-2}}{(2n)(4n+3)}$$

$$c_{2n} = \frac{a_0(-1)^n}{2^n n! \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdots (4n+3)},$$

Así, se obtiene la solución para $a_0 = 1$

$$y_1(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n! \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdots (4n+3)},$$

de manera similar se obtiene la otra solución para $r_2 = -3/2$

$$y_2(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n! \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}.$$

Luego, por el Teorema de Frobenius, se obtiene la solución general

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$