MATEMATIKA APLIKASI

Untuk SMA dan MA Kelas XII
Program Studi Ilmu Alam

Pesta E. S.
Cecep Anwar H. F. S.

JILID 3

MATEMATIKA APLIKASI Untuk SMA dan MA Kelas XII Program Studi Ilmu Alam JILID 3 Pesta E. S., Cecep Anwar H. F. S.

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Matematika Aplikasi

Jilid 3

untuk

SMA dan MA Kelas XII

Program Studi Ilmu Alam

Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional

Matematika Aplikasi

Jilid 3

Untuk SMA dan MA Kelas XII
Program Studi Ilmu Alam

Penulis : Pesta E. S.
Cecep Anwar H. F. S.
Penelaah : Drs. Suwarkono, M.Sc
Editor : Adi Setiyawan
Agus Tri Antoro
Perancang Kulit : Henry Nur Patria
Tata Letak : Riefmanto
Sri Sugiyarni
Ilustrasi : Andie Anakota
Ukuran Buku : 20,5 x 28 cm

510.07
PES PESTA E.S
m Matematika aplikasi : untuk SMA dan MA kelas XII program studi ilmu alam/Pesta E>S, Cecep Anwar H. F .S ; editor Adi Setiyawan, Agus Tri Antoro. — Jakarta : Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2008.
x, 194 hlm. : ilus. ; 28 Cm.

Bibliografi : hlm.190
Indeks
ISBN 979-462-948-0

1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Cecep Anwar H. F. S

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2008

Diperbanyak oleh ...

KATA SAMBUTAN

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2008, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (*website*) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 34 Tahun 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*down load*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juli 2008
Kepala Pusat Perbukuan

KATA PENGANTAR

Upaya menyeluruh dari pemerintah untuk meningkatkan mutu pendidikan meliputi aspek-aspek pengetahuan, keterampilan, sikap, dan nilai-nilai. Pengembangan aspek-aspek tersebut dilakukan untuk meningkatkan dan mengembangkan kecakapan hidup (*life-skills*) melalui seperangkat kompetensi agar siswa dapat bertahan hidup, menyesuaikan diri, dan berhasil di masa datang.

Kebijakan pemerintah ini telah menyulut pemikiran penulis untuk ikut meningkatkan mutu pendidikan. Upaya yang penulis lakukan adalah dengan menyusun perangkat buku pelajaran Matematika Aplikasi untuk siswa Sekolah Menengah Atas (SMA) dan Madrasah Aliyah (MA). Buku ini berbalur ungkapan santun dengan bahasa yang komunikatif sehingga mudah dipahami oleh siswa. Selain itu, buku ini juga didukung dengan tampilan tata letak yang baik, disain dan ilustrasi yang menarik dengan memperhatikan tingkat pemahaman siswa.

Dengan mengusung pendekatan induktif-dedukatif konstruktif, konsep dalam buku ini mengakar ke dalam pemikiran siswa karena pengenalan konsep-konsep ini disajikan dengan memberikan masalah yang memiliki makna dalam kehidupan sehari-hari. Kebermaknaan ini dapat dirasakan dari awal mempelajari setiap pelajaran dalam buku ini.

Sebagai buku siswa, buku ini dilengkapi dengan bagian pelatihan yang terdiri atas dua kelompok soal. Masing-masing diberi nama Asah Kompetensi dan Asah Kemampuan. Bagian pelatihan ini dimaksudkan untuk mengukur penguasaan siswa terhadap konsep yang diberikan.

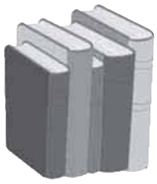
Dalam buku ini, siswa juga dapat menemukan bagian pengayaan seperti Aktivitas di Kelas yang berisi kegiatan untuk dilakukan oleh siswa, Sahabat Kita yang berisi informasi tentang tokoh matematika, GameMath yang berisi pemainan matematika, dan Siapa Berani yang berisi soal-soal menantang khusus diberikan bagi siswa penggemar matematika.

Terbitnya buku ini diharapkan seperti matahari yang mampu menjadi energi dan penerang dalam pendidikan bangsa kita.

Buku ini masih jauh dari sempurna, kritik dan saran yang ada hubungannya dengan penyempurnaan buku ini sangat penulis harapkan untuk perbaikan pada edisi berikutnya.

Jakarta, Juli 2008

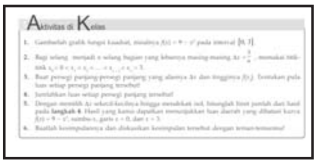
Penulis



APAKAH KEUNGGULAN BUKU INI?

Pada setiap awal bab terdapat tujuan pembelajaran untuk mengetahui isi dan manfaat setelah mempelajari bab tersebut dan diberikan juga pengantar bab berupa uraian singkat dan gambar yang berhubungan dengan kehidupan sehari-hari.

Daftar simbol merupakan kumpulan simbol atau rotasi beserta penjelasannya yang dilengkapi nomor halaman kemunculannya.

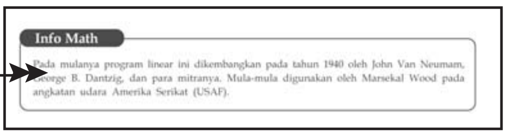


Ada Aktivitas di Kelas yang merupakan kegiatan di mana kamu dapat mengembangkan keterampilan dalam merencanakan melaksanakan dan menyimpulkan aktivitas.

Catatan disajikan berupa informasi yang berguna untuk memperjelas konsep Matematika.


Catatan

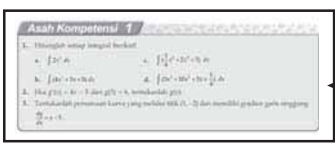
- Barisan dituliskan sebagai berikut
  $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$
- Deret dituliskan sebagai berikut.
  $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n$


Info Math

Pada mulanya program linear ini dikembangkan pada tahun 1940 oleh John Von Neumam, George B. Dantzig, dan para mitranya. Mula-mula digunakan oleh Marsekal Wood pada angkatan udara Amerika Serikat (USAF).

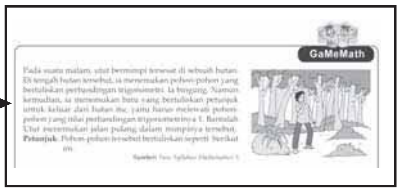
Info Math disisipkan sebagai informasi untuk membuka wawasan sehingga tidak buta terhadap informasi Matematika dan perkembangan teknologi.

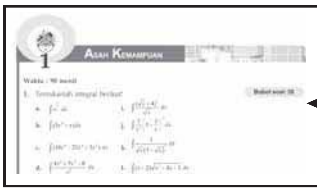
Sahabat Kita merupakan informasi latar belakang matematikawan yang telah berjasa dengan menemukan berbagai macam teori yang sekarang ini digunakan dan dirasakan manfaatnya.



Asah Kompetensi digunakan untuk mengukur kemampuan dalam menguasai materi yang telah dibahas.

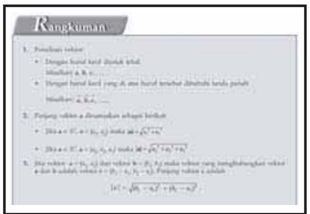
Siapa Berani merupakan soal-soal yang menantang. Soal-soal ini khusus diberikan buat kamu yang gemar Matematika dan telah memahami materi.





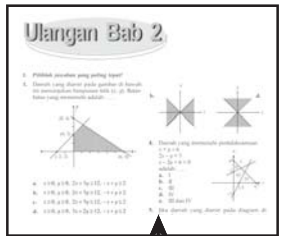
GameMath berisi soal berupa permainan matematika. Jawabannya dapat dicari dengan menggunakan logika sehingga dapat mengasah logika dan cara berpikir kritis.

Asah Kemampuan digunakan untuk menguji kamu dalam menyelesaikan soal-soal relatif lebih sulit yang berkaitan dengan materi yang telah dibahas.

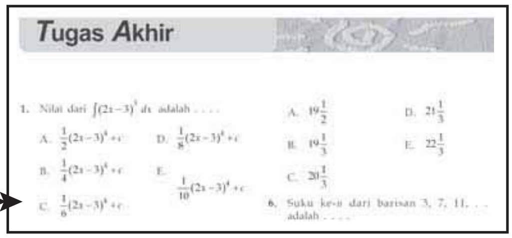


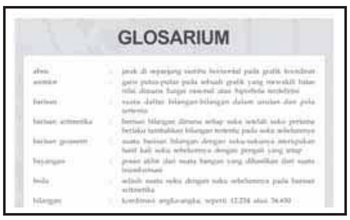
Rangkuman disajikan di akhir materi bab supaya kamu dapat dengan cepat mengingat kembali materi-materi yang telah dipelajari pada bab tersebut.

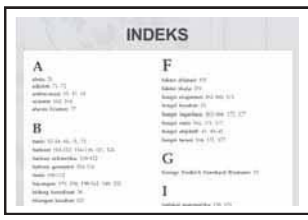
Ulangan Bab disajikan untuk mengukur kemampuan kamu dalam menguasai semua materi yang telah dibahas dalam bab tersebut.



Tugas Akhir digunakan untuk mengukur kemampuan kamu mengingat dan menguasai semua materi yang telah dipelajari selama dua semester.







Glosarium disajikan untuk memahami istilah-istilah penting yang disusun secara alfabetis beserta penjelasannya.

Indeks merupakan kumpulan istilah penting yang dilengkapi dengan nomor halaman kemunculan istilah dan disajikan secara alfabetis.

DAFTAR ISI

Kata Sambutan iii
Kata Pengantar iv
Apakah Keunggulan Buku Ini? v
Daftar Simbol ix

BAB 1 INTEGRAL 1
A. Pengertian Integral 2
B. Integral Tak Tentu 4
C. Integral Tertentu 13
D. Menentukan Luas Daerah 21
E. Menentukan Volume Benda Putar 26
Rangkuman 31
Ulangan Bab 1 33

BAB 2 PROGRAM LINEAR 35
A. Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel 36
B. Model Matematika 39
C. Nilai Optimum Suatu Fungsi Objektif 41
Rangkuman 47
Ulangan Bab 2 48

BAB 3 MATRIKS 51
A. Pengertian Matriks 52
B. Operasi Hitung pada Matriks 57
C. Determinan dan Invers Matriks 69
D. Penerapan Matriks dalam Sistem Persamaan Linear 76
Rangkuman 79
Ulangan Bab 3 80

BAB 4 VEKTOR 83
A. Pengertian Vektor 84
B. Operasi pada Vektor 89

C. Perbandingan Vektor 98
D. Perkalian Skalar Dua Vektor dan Proyeksi Vektor 100
Rangkuman **104**
Ulangan Bab 4 .... **107**

BAB 5 BARISAN, DERET, DAN NOTASI SIGMA **109**
A. Barisan dan Deret Aritmetika 110
B. Barisan dan Deret Geometri 114
C. Notasi Sigma dan Induksi Matematika 120
D Aplikasi Barisan dan Deret 124
Rangkuman **127**
Ulangan Bab 5 .... **129**

BAB 6 TRANSFORMASI GEOMETRI **131**
A. Translasi 132
B. Refleksi 138
C. Rotasi 146
D. Dilatasi 151
E. Komposisi Transformasi dengan Matriks 153
Rangkuman **156**
Ulangan Bab 6 .... **158**

BAB 7 FUNGSI, PERSAMAAN, DAN PERTIDAKSAMAAN EKSPONEN DAN LOGARITMA **161**
A. Grafik Fungsi Eksponen dan Fungsi Logaritma 162
B. Persamaan dan Pertidaksamaan Eksponen 165
C. Persamaan dan Pertidaksamaan Logaritma 173
Rangkuman **179**
Ulangan Bab 7 .... **181**
Tugas Akhir **184**
Glosarium **187**
Pustaka Acuan **190**
Kunci Jawaban **191**
Indeks **193**

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Arti	Halaman
$+$	Tanda penjumlahan, ditambah, plus	2, 36, 57, 90, 110, 133
$-$	Tanda pengurangan, dikurang, diambil, minus	2, 36, 67, 85, 110, 133, 162
$=$	Sama dengan	2, 36, 67, 89, 110, 133, 162
$\times, \cdot$	Tanda perkalian, dikali dengan	52, 137
$:, \div$	Tanda pembagian, dibagi dengan	98
$>$	Lebih besar dari	36, 116, 151, 162
$<$	Lebih kecil dari	36, 116, 151, 162
$\geq$	Lebih besar atau sama dengan	21, 37
$\leq$	Lebih kecil atau sama dengan	22, 36
$\neq$	Tidak sama dengan	71, 167
$\pm$	Kurang lebih, plus minus	6, 116
$\frac{a}{b}$	a dibagi b, a per b	2, 111, 162
( )	Tanda kurung	4, 55, 85, 110, 132, 162
	Akar kuadrat dari n	9, 85, 162
$f(x)$	Fungsi x	2, 162
$f'(x)$	Turunan pertama dari fungsi $f(x)$	2
$f(x, y)$	Fungsi objektif dari x dan y	40
	Nilai mutlak x	28, 69, 89, 117
	Turunan fungsi y terhadap x	4
	Integral fungsi $f(x)$ terhadap dx	4
c	Konstanta	4
$[a, b]$	Interval, selang tertutup a sampai b	4
$\overline{x}$	Rata-rata, mean	26
Σ	Notasi sigma	14, 120

Simbol	Arti	Halaman
U_n	Suku ke-n	110
S_n	Jumlah n suku yang pertama	111
S_∞	Jumlah suku tak terhingga	116
$\sin x$	Sinus x	5, 146
$\cos x$	Cosinus x	5, 146
$\tan x$	Tangen x	5, 150
$\sec x$	Secan x	9
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	Limit x mendekati dari $f(x)$	14
$A_{i \times j}$	Matriks dengan i baris dan j kolom	53
A^t	Transpos dari A	54
A'	Bayangan pertama dari A	133
A''	Bayangan kedua dari A	142
A'''	Bayangan ketiga dari A	142
$\lvert A \rvert$	Determinan A	71
A^{-1}	Invers dari A	71
	Vektor bawah dari A ke B	84
$T_2 \circ T_1$	Komposisi transformasi T_1 dilanjutkan dengan T_2	133
$\log x$	Logaritma dari x	162

Integral

BAB 1

A. Pengertian Integral
B. Integral Tak Tentu
C. Integral Tertentu
D. Menentukan Luas Daerah
E. Menentukan Volume Benda Putar

Sumber: www.wallpaperbase.com

Pernahkah kalian melihat baling-baling pesawat? Bagaimanakah bentuknya? Ketika pesawat hendak mengudara, baling-baling pesawat akan berputar dengan kecepatan tinggi. Bagaimanakah bentuk baling-baling itu saat berputar? Saat baling-baling berputar, kalian akan mengamati sebuah bentuk seperti lingkaran. Dapatkah kalian mengetahui luas lingkaran yang terbentuk dari perputaran baling-baling itu? Dengan menggunakan integral, kalian akan dapat mengetahuinya.

A. Pengertian Integral

Di Kelas XI, kalian telah mempelajari konsep turunan. Pemahaman tentang konsep turunan ini dapat kalian gunakan untuk memahami konsep integral. Untuk itu, coba tentukan turunan fungsi-fungsi berikut.

- $f_1(x) = 3x^3 + 3$
- $f_2(x) = 3x^3 + 7$
- $f_3(x) = 3x^3 - 1$
- $f_4(x) = 3x^3 - 10$
- $f_5(x) = 3x^3 - 99$

Perhatikan bahwa fungsi-fungsi tersebut memiliki bentuk umum $f(x)= 3x^3 + c$, dengan c suatu konstanta. Setiap fungsi ini memiliki turunan $f'(x) = 9x^2$.

Jadi, turunan fungsi $f(x) = 3x^3 + c$ adalah $f'(x) = 9x^2$.

Sekarang, bagaimana jika kalian harus menentukan fungsi $f(x)$ dari $f'(x)$ yang diketahui? Menentukan fungsi $f(x)$ dari $f'(x)$, berarti menentukan antiturunan dari $f'(x)$. Sehingga, integral merupakan antiturunan (antidiferensial) atau operasi invers terhadap diferensial.

Jika $F(x)$ adalah fungsi umum yang bersifat $F'(x) = f(x)$, maka $F(x)$ merupakan antiturunan atau integral dari $f(x)$.

Pengintegralan fungsi $f(x)$ terhadap x dinotasikan sebagai berikut.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

dengan:

$\int$ = notasi integral (yang diperkenalkan oleh Leibniz, seorang matematikawan Jerman)

$f(x)$ = fungsi integran

$F(x)$ = fungsi integral umum yang bersifat $F'(x) = f(x)$

c = konstanta pengintegralan

Sekarang, perhatikan turunan fungsi-fungsi berikut.

- $g_1(x) = x$, didapat $g_1'(x) = 1$.

  Jadi, jika $g_1'(x) = 1$ maka $g_1(x) = \int g_1'(x)\,dx = x + c_1$.

- $g_2(x) = \frac{1}{2}x^2$, didapat $g_2'(x) = x$.

  Jadi, jika $g_2'(x) = x$ maka $g_2(x) = \int g_2'(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c_2$.

- $g_3(x) = \frac{1}{3}x^3$, didapat $g_3'(x) = x^2$.

  Jadi, jika $g_3'(x) = x^2$ maka $g_3(x) = \int g_3'(x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c_3$.

- $g_4(x) = \frac{1}{6}x^6$, didapat $g_4'(x) = x^5$.

  Jadi, jika $g_4'(x) = x^5$ maka $g_4(x) = \int g_4'(x)\,dx = \frac{1}{6}x^6 + c_4$.

Dari uraian ini, tampak bahwa jika $g'(x) = x^n$, maka $g(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ atau dapat dituliskan $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c,\ n \neq 1$.

Sebagai contoh, turunan fungsi $f(x) = 3x^3 + c$ adalah $f'(x) = 9x^2$.
Ini berarti, antiturunan dari $f'(x) = 9x^2$ adalah $f(x) = 3x^3 + c$ atau dituliskan $\int f'(x)\ dx = 3x^2 + c$.
Uraian ini menggambarkan hubungan berikut.

> Jika $f'(x) = x^n$, maka $f(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c,\ n \neq -1$ dengan c suatu konstanta

Contoh

1. Tentukanlah turunan dari setiap fungsi berikut!

a. $f(x) = 5x^2 + 10$

b. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$

c. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x$

d. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$

Jawab:

a. $f'(x) = (2 \cdot 5)x^{2-1} + 0 = 10x$

b. $f'(x) = (3 \cdot 2)x^{3-1} + (2 \cdot 3)x^{2-1} - (1 \cdot 4)x^{1-1} + 0$
$= 6x^2 + 6x - 4$

c. $f'(x) = \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right)x^{3-1} + (1 \cdot 2)x^{1-1}$
$= \frac{3}{2}x^2 + 2$

d. $f'(x) = \left(4 \cdot \frac{1}{4}\right)x^{4-1} + \left(3 \cdot \frac{1}{3}\right)x^{3-1} + \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)x^{2-1} + 0$
$= x^3 + x^2 + x$

2. Tentukanlah antiturunan x jika diketahui:

a. $g_1'(x) = x^3$

b. $g_2'(x) = 2x^6 + 3$

c. $g_3'(x) = 3x^4 - 2x$

d. $g_4'(x) = x^2 + 4x - \frac{1}{2}$

Jawab:

a. $g_1(x) = \frac{1}{3+1}x^{3+1} = \frac{1}{4}x^4 + c$

b. $g_2(x) = \frac{2}{6+1}x^{6+1} + \frac{3}{0+1}x^{0+1} = \frac{2}{7}x^7 + 3x + c$

c. $g_3(x) = \frac{3}{4+1}x^{4+1} - \frac{2}{1+1}x^{1+1} + c = \frac{3}{5}x^5 - \frac{2}{2}x^2 = \frac{3}{5}x^5 - x^2 + c$

d. $g_4(x) = \dfrac{1}{2+1}x^{2+1} + \dfrac{4}{1+1}x^{1+1} - \dfrac{-\frac{1}{2}}{0+1x^0+1} + c$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^1 + c$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x + c$$

B. Integral Tak Tentu

Pada bagian sebelumnya, kalian telah mengetahui bahwa integral merupakan antiturunan. Jadi, apabila terdapat fungsi $F(x)$ yang dapat didiferensialkan pada interval $[a, b]$ sedemikian hingga $\dfrac{d(F(x))}{dx} = f(x)$, maka antiturunan dari $f(x)$ adalah $F(x) + c$.

Secara matematis, ditulis

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

di mana $\int dx$ = Lambang integral yang menyatakan operasi antiturunan

$f(x)$ = Fungsi integran, yaitu fungsi yang dicari antiturunannya

c = Konstanta

Sebagai contoh, dapat kalian tuliskan

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$$

karena

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + c\right) = x^2$$

Sehingga kalian dapat memandang integral tak tentu sebagai wakil keseluruhan keluarga fungsi (satu antiturunan untuk setiap nilai konstanta c). Pengertian tersebut dapat digunakan untuk membuktikan teorema- teorema berikut yang akan membantu dalam pengerjaan hitung integral.

Teorema 1

Jika n bilangan rasional dan $n \neq 1$, maka $\int x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ di mana c adalah konstanta.

Teorema 2

Jika f fungsi yang terintegralkan dan k suatu konstanta, maka $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

Teorema 3

Jika f dan g fungsi-fungsi yang terintegralkan, maka

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)\,dx$$

Teorema 4

Jika f dan g fungsi-fungsi yang terintegralkan, maka

$$\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

Teorema 5

Aturan integral substitusi
Jika u suatu fungsi yang dapat didiferensialkan dan r suatu bilangan rasional tak nol, maka $\int (u(x))^r u'(x)\,dx = \frac{1}{r+1}(u(x))^{r+1} + c$, di mana c adalah konstanta dan $r \neq -1$.

Teorema 6

Aturan integral parsial
Jika u dan v fungsi-fungsi yang dapat didiferensialkan, maka

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Teorema 7

Aturan integral trigonometri

- $\int \cos x \; dx = \sin x + c$
- $\int \sin x \; dx = -\cos x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} \; dx = \tan x + c$

di mana c adalah konstanta

Pembuktian Teorema 1

Untuk membuktikan **Teorema 1**, kalian dapat mendiferensialkan $x^{n+1} + c$ yang terdapat pada ruas kanan seperti berikut.

$$\frac{d}{dx}(x^{n+1} + c) = (n+1)x^n \quad \textit{. . . kalikan kedua ruas dengan } \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{d}{dx}\left[x^{n+1} + c\right] = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)x^n$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right] = x^n$$

Sehingga $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$

Pembuktian Teorema 3 dan 4

Untuk membuktikan **Teorema 4**, kalian dapat mendiferensialkan $\int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$ yang terdapat pada ruas kanan seperti berikut.

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx\right] = \frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx\right] \pm \frac{d}{dx}\left[\int g(x)\, dx\right] = f(x) \pm g(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx\right] = f(x) \pm g(x)$$

Sehingga didapat:

$$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

Contoh

Hitunglah integral dari $\int (3x^2 - 3x + 7)\, dx$!

Jawab:

$$\int (3x^2 - 3x + 7)\, dx = 3\int x^2\, dx - 3\int x\, dx + \int 7\, dx \qquad \text{(Teorema 2, 3, dan 4)}$$

$$= \frac{3}{2+1}x^{2+1} - \frac{3}{1+1}x^{1+1} + 7x + c \qquad \text{(Teorema 1)}$$

$$= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7x + c$$

Jadi, $\int (3x^2 - 3x + 7)\, dx = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7x + c$.

Pembuktian **Teorema 6**

Di kelas XI, kalian telah mengetahui turunan hasil kali dua fungsi $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ adalah $\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$.

Akan dibuktikan aturan integral parsial dengan rumus tersebut. Caranya adalah dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan seperti berikut.

$$\int \frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] = \int u(x) \cdot v'(x)dx + \int v(x) \cdot u'(x)dx$$

$$u(x) \cdot v(x) = \int u(x) \cdot v'(x)dx + \int v(x) \cdot u'(x)dx$$

$$\int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)dx$$

Karena

$v'(x)\ dx = dv$ dan $u'(x)\ dx = du$

Maka persamaan dapat ditulis

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

B. 1. Aturan Integral Substitusi

Aturan integral substitusi seperti yang tertulis di Teorema 5. Aturan ini digunakan untuk memecahkan masalah pengintegralan yang tidak dapat diselesaikan dengan rumus-rumus dasar yang sudah dipelajari. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh

Hitunglah integral dari:

a. $\int x\sqrt{9-x^2}\ dx$ **b.** $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ **c.** $\int \frac{x}{\left(1-2x^2\right)} 4dx$

Jawab:

a. Misalkan $u = 9 - x^2$, maka $du = -2x\ dx$

$$x\ dx = \frac{du}{-2}$$

$$\int x\sqrt{9-x^2}dx = \int \left(9-x^2\right)^{\frac{1}{2}} x\ dx = \int u^{\frac{1}{2}}\left(\frac{du}{-2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\ du = -\frac{1}{2} \times \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

$$= -\frac{1}{2} \times \sqrt[2]{u^3} \times \frac{2}{3} + c = -\frac{1}{3}u\sqrt{u} + c$$

$$= \frac{1}{3}\left(9-x^2\right)\sqrt{9-x^2} + c$$

Jadi, $\int x\sqrt{9-x^2}\ dx = -\frac{1}{3}\left(9-x^2\right)\sqrt{9-x^2} + c$.

b. Misalkan $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$dx = 2\sqrt{x}\ du$, sehingga

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\sin u}{\cancel{\sqrt{x}}}\cdot 2\cancel{\sqrt{x}}\ du$$
$$= 2\int \sin u\ du$$
$$= -2\cos u + c$$
$$= -2\cos\sqrt{x} + c$$

c. Misalkan $u = 1 - 2x^2$, maka $du = -4x\ dx$

$$dx = \frac{du}{-4x}$$

sehingga integral tersebut dapat ditulis sebagai berikut.

$$\int \frac{x}{\left(1-2x^2\right)^4}\,dx = \int \frac{x}{u^4}\cdot\frac{du}{(-4x)} \qquad \text{(Teorema 5)}$$
$$= -\frac{1}{4}\int u^{-4}\ du$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)u^{-3} + c$$
$$= \frac{1}{12}u^{-3} + c$$

Substitusi $u = 1 - 2x^2$ ke persamaan $12u^{-3} + c$

$$\int \frac{x}{\left(1-2x^2\right)^4}\,dx = \frac{1}{12}u^{-3} + c$$
$$= \frac{1}{12}(1 - 2x^2)^{-3} + c$$

Jadi, $\int \frac{x}{(1-2x^2)^4}\,dx = \frac{1}{12}(1 - 2x^2)^{-3} + c = \frac{1}{12(1 - 2x^2)^3} + c.$

Pembuktian Teorema 7

Di Kelas XI, kalian telah mempelajari turunan fungsi trigonometri, yaitu $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$, dan $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$.

Berikut ini akan dibuktikan **aturan integral trigonometri** menggunakan rumus tersebut. Caranya adalah dengan mengintegralkan kedua ruas seperti berikut.

- Dari $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ diperoleh $\int \cos x\ dx = \sin x + c$
- Dari $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ diperoleh $\int \sin x\ dx = -\cos x + c$
- Dari $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ diperoleh $\int \sec^2 x = \tan x + c$

B. 2. Integral dengan Bentuk $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, dan $\sqrt{x^2-a^2}$

Pengintegralan bentuk-bentuk $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, dan $\sqrt{x^2-a^2}$ dapat dilakukan dengan menggunakan subtisusi dengan $x = a \sin t$, $x = a \tan t$, $x = a \sec t$. Sehingga diperoleh bentuk-bentuk seperti ini.

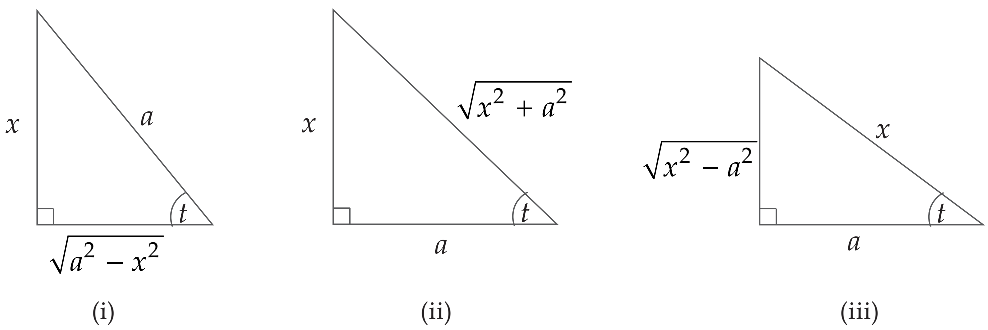
- $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2\left(1 - \sin^2 t\right)}$
  $= \sqrt{a^2 \cos^2 t} = a \cos t$
- $\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 t} = \sqrt{a^2\left(1 + \tan^2 t\right)}$
  $= \sqrt{a^2 \sec^2 t} = a \sec t$
- $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2} = \sqrt{a^2\left(\sec^2 t - 1\right)}$
  $= \sqrt{a^2 \tan^2 t} = a \tan t$

Ingat

$\int \cos(ax + b)\, dx$
$= \frac{1}{a}\sin(ax + b) + c$

$\int \sin(ax + b)\, dx$
$= -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + c$

$\int \sec^2(ax + b)\, dx$
$= \frac{1}{a}\tan(ax + b) + c$



Gambar 1.1
Segitiga siku-siku untuk integral substitusi trigonometri:
(i) $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$, (ii) $\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec t$, (iii) $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t$

Contoh

1. Hitunglah setiap integral berikut!

a. $\int \sin(3x+1)\cos(3x+1)\, dx$

b. $\dfrac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$

Jawab:

a. Untuk mengerjakan integral ini, terlebih dahulu kalian harus mengubah $\sin(3x+1)\cos(3x+1)$ ke dalam rumus trigonometri sudut rangkap, yaitu

$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$

Dengan rumus ini, kalian mendapatkan:

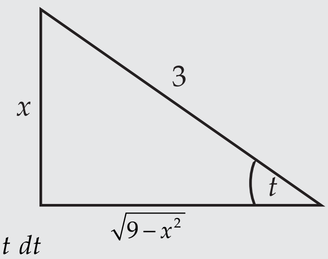
$$\int \sin(3x+1)\cos(3x+1)\,dx = \int \frac{1}{2}\sin(6x+2)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin(6x+2)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-6}\right)\cos(6x+2) + c$$
$$= -\frac{1}{12}\cos(6x+2) + c$$

Jadi, $\int \sin(3x+1)\cos(3x+1)\,dx = -\frac{1}{12}\cos(6x+2) + c$

b. Misalkan, $x = 3\sin t$, maka $\sin t = \frac{x}{3}$ dan $dx = 3\cos t\,dt$.

Sekarang, perhatikan segitiga berikut ini!

Dari segitiga di samping,



$$\cos t = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

$$\sqrt{9-x^2} = 3\cos t$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{(3\sin t)^2}{3\cos t}\cdot 3\cos t\,dt$$
$$= 9\int \sin^2 t$$
$$= 9\int \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt$$

Ingat, rumus kosinus sudut rangkap
$\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \frac{9}{2}\int (1-\cos 2t)\,dt$$
$$= \frac{9}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + c$$
$$= \frac{9}{2}t - \frac{9}{4}\sin 2t + c$$
$$= \frac{9}{2}t - \frac{9}{2}\sin t\cos t + c$$
$$= \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{9}{2}\left(\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + c$$
$$= \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + c$$

Jadi, $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + c$

Ingat

Integral bentuk:

- $\sqrt{a^2 - x^2}$ diubah menjadi $x = a\sin t$
- $\sqrt{a^2 + x^2}$ diubah menjadi $x = a\tan t$
- $\sqrt{x^2 - a^2}$ diubah menjadi $x = a\sec t$

2. Jika $g'(x) = 2x - 3$ dan $g(2) = 1$, tentukanlah $g(x)$.

Jawab:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int g'(x)\ dx \\ &= \int (2x-3)\ dx \\ &= x^2 - 3x + c \end{aligned}$$

Karena $g(2) = 1$, maka c dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 - 3x + c \\ g(2) &= 2^2 - 3\cdot 2 + c \\ 1 &= 4 - 6 + c \\ 1 &= -2 + c \\ c &= 1 + 2 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

Jadi, $g(x) = x^2 - 3x + 3$

3. Tentukan persamaan kurva yang melalui titik (–2, 12) dan memiliki persamaan gradien garis singgung $\frac{dy}{dx} = 6x - 15$.

Jawab:

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 15$$

$$y = \int (6x - 15)\ dx = 3x^2 - 15x + c$$

$$f(x) = 3x^2 - 15x + c$$

Karena kurva melalui titik (–2, 12), maka:

$$\begin{aligned} f(-2) &= 3(-2)^2 - 15(-2) + c \\ 12 &= 3 \cdot 4 + 30 + c \\ 12 &= 12 + 30 + c \\ 12 &= 42 + c \\ c &= 12 - 42 \\ c &= -30 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan kurva tersebut adalah $f(x) = 3x^2 - 15x - 30$.

Asah Kompetensi 1

1. Hitunglah setiap integral berikut!

   a. $\int 2x^3\ dx$

   b. $\int (4x^2 + 3x + 5)\ dx$

   c. $\int (\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 3)\ dx$

   d. $\int (5x^3 + 10x^2 + 3x + \frac{1}{4})\ dx$

2. Jika $g'(x) = 4x - 5$ dan $g(3) = 6$, tentukanlah $g(x)$.

3. Tentukanlah persamaan kurva yang melalui titik (1, –2) dan memiliki gradien garis singgung $\frac{dy}{dx} = x - 3$.

1 Asah Kemampuan

Waktu : 90 menit

1. Tentukanlah integral berikut!

Bobot soal: 30

a. $\int x^{\frac{2}{3}}\ dx$

b. $\int (5x^4 + \pi)\, dx$

c. $\int (18x^8 - 25x^4 + 3x^2)\ dx$

d. $\int \frac{4x^6 + 3x^5 - 8}{x^5}\ dx$

e. $\int (\frac{4}{x^5} - \frac{3}{x^4})\ dx$

f. $\int (x^3 + \sqrt{x})\ dx$

g. $\int \sqrt{3x+2}\ dx$

h. $\int x^2(x^3 + 5)^9\ dx$

i. $\int \frac{(\sqrt{x}+4)^3}{\sqrt{x}}\, dx$

j. $\int \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-2} dx$

k. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^3}\, dx$

l. $\int (x+2)\sqrt{x^2 + 4x + 1}\ dx$

m. $\int x\sqrt{4x+1}\ dx$

n. $\int x^2\sqrt{1-x}\ dx$

o. $\int (\sqrt{2} - x + 4)dx$

2. Tentukanlah setiap integral berikut!

Bobot soal: 30

a. $\int (\sin x + \cos x)\ dx$

b. $\int (x^2 - 2\sin x)\ dx$

c. $\int \sin x \cos^2 x\ dx$

d. $\int (3\sin x - 4\cos x)\ dx$

e. $\int \sin 5x \sin 4x\ dx$

f. $\int \left(\frac{\sin x}{\cos^6 x} + \frac{\cos 8x}{\sqrt[4]{\sin 8x}}\right) dx$

g. $\int (8\sin 9x \cos 3x - 6\sin 9x \sin 3x)\ dx$

h. $\int (\sin^5 x^2)(x\cos x^2)\ dx$

i. $\int (x^2+1)^3 x \cdot \sin^3(x^2+1)^4 \cos(x^2+1)^4\ dx$

j. $\int (2x+1)\sin 3x\ dx$

3. Tentukanlah fungsi $g(t)$, jika diketahui:

Bobot soal: 20

a. $g'(t) = 7$ dan $g(0) = 0$

b. $g'(t) = 3t^2 + 8t - 1$ dan $g(2) = 5$

c. $g'(t) = 6t^2 + 4t + 1$ dan $g(1) = 5$

d. $g'(t) = t - \frac{1}{t^2}$ dan $g(2) = 4\frac{1}{2}$

e. $g'(t) = \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$ dan $g(4) = 3\frac{1}{3}$

f. $g'(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$ dan $g(3) = 18$

g. $g'(t) = \sqrt{2t-1}$ dan $g(\frac{1}{2}) = -1$

h. $g'(t) = 3\sqrt{t}$ dan $g(4) = 19$ UMPTN 1994

4. Tentukanlah persamaan kurva yang melalui titik (2, 8) dan memiliki persamaan gradien garis singgung $\frac{dy}{dx} = 2\left(x - \frac{1}{x^2}\right)$.

Bobot soal: 10

5. Tentukanlah persamaan kurva yang melalui titik (1, 2) dan gradien garis singgung pada sebarang titiknya adalah setengah koordinat-y.

Bobot soal: 10

C. Integral Tertentu

C. 1. Memahami Luas Sebagai Limit Suatu Jumlah

Sebelumnya kalian telah mempelajari grafik fungsi kuadrat. Daerah grafik fungsi kuadrat berupa garis lengkung. Berapakah luas daerah yang batas-batasnya berupa garis lengkung ini? Untuk mengetahui, lakukanlah aktivitas berikut.

Aktivitas di Kelas

1. Gambarlah grafik fungsi kuadrat, misalnya $f(x) = 9 - x^2$ pada interval $[0, 3]$.
2. Bagi selang menjadi n selang bagian yang lebarnya masing-masing $\Delta x = \frac{3}{n}$, memakai titik-titik $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 3$.
3. Buat persegi panjang-persegi panjang yang alasnya Δx dan tingginya $f(x_i)$. Tentukan pula luas setiap persegi panjang tersebut!
4. Jumlahkan luas setiap persegi panjang tersebut!
5. Dengan memilih Δx sekecil-kecilnya hingga mendekati nol, hitunglah limit jumlah dari hasil pada **langkah 4**. Hasil yang kalian dapatkan menunjukkan luas daerah yang dibatasi kurva $f(x) = 9 - x^2$, sumbu-x, garis $x = 0$, dan $x = 3$.
6. Buatlah kesimpulannya dan diskusikan kesimpulan tersebut dengan teman-temanmu!

Dari **Aktivitas** ini, kalian memperoleh daerah yang akan ditentukan luasnya.

Setelah membagi interval $[0, 3]$ menjadi n selang bagian yang lebarnya masing-masing $\Delta x = \frac{3}{n}$, kalian memperoleh:

$x_0 = 0$

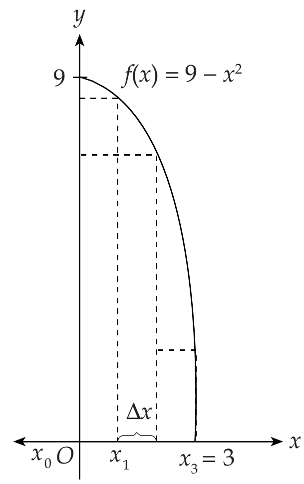
$x_1 = \Delta x = \frac{3}{n}$

$x_2 = 2\Delta x = \frac{6}{n}$

$x_3 = 3\Delta x = \frac{9}{n}$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$x_i = i\Delta x = \frac{3i}{n}$



Gambar 1.2
Daerah yang dibagi menjadi n selang bagian

Luas setiap persegi panjang pada gambar tersebut adalah:

$$f(x_i)\,\Delta x = f\left(\frac{3i}{n}\right) \times \frac{3}{n} = \left(9 - \left(\frac{3i}{n}\right)^2\right) \times \frac{3}{n} = \left(\frac{27}{n} - \frac{27}{n^3} i^2\right)$$

Luas seluruh persegi panjang adalah sebagai berikut.

$$L = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x \qquad \ldots\ldots(*)$$

$$= \left(\frac{27}{n} - \frac{27}{n^3} 1^2\right) + \left(\frac{27}{n} - \frac{27}{n^3} 2^2\right) + \cdots + \left(\frac{27}{n} - \frac{27}{n^3} n^2\right)$$

$$= n.\frac{27}{n} - \frac{27}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)$$

$$= 27 - \frac{27}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = 27 - \frac{9}{2}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 18 - \frac{9}{2}\left(\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

Dengan memilih $\Delta x \to 0$ maka $n \to \infty$, sehingga akan diperoleh luas daerah yang dibatasi kurva $f(x) = 9 - x^2$, sumbu-x, garis $x = 0$, dan $x = 3$ sebagai berikut.

$$L(R) = \lim_{n\to\infty} \left(18 - \frac{9}{2}\left(\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right) = 18$$

Sekarang, perhatikan kembali persamaan berikut.

$L(R_n) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x$

Dengan menggunakan notasi sigma, kalian dapat menuliskan persamaan tersebut sebagai berikut.

$$L(R_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Jika $\Delta x \to 0$, maka akan diperoleh

$$L(R_n) = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Dengan mengambil batas daerah $x_1 = a$ dan $x_2 = b$, maka bentuk di atas merupakan suatu bentuk integral tertentu yang dituliskan sebagai

$$L = \int_a^b f(x)\, dx$$

Sehingga diperoleh $\int_0^3 (9 - x^2)\, dx = 9x - \frac{1}{3}x^3 \Big]_0^3 = 27 - 9 = 18.$

Jika fungsi f terdefinisi pada interval $[a, b]$, maka $\int_a^b f(x)\, dx$ adalah integral tertentu terhadap fungsi f dari a ke b. Pengintegralannya dituliskan sebagai berikut.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \left[f(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

dengan:

$f(x)$ = fungsi integran

a = batas bawah

b = batas atas

Sehingga kalian harus dapat membedakan bahwa integral tertentu $\int_a^b f(x)\, dx$ adalah bilangan, sedangkan integral tak tentu yang dibahas sebelumnya adalah fungsi.

Asah Kompetensi 2

Gambarlah daerah dari integral tertentu berikut. Kemudian, hitunglah integral tersebut!

1. $\int_0^1 5x\, dx$
2. $\int_{-2}^1 (x-1)\, dx$
3. $\int_0^3 x^2\, dx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$
5. $\int_{-3}^3 |x|\, dx$
6. $\int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx$

Sahabat Kita

Siapakah orang yang pertama kali menemukan integral tertentu? Dia adalah George Friedrich Bernhard Riemann, seorang Matematikawan asal Jerman yang lahir pada tahun 1826. Riemann menjelaskan integral tertentu dengan menggunakan luas daerah yang dihitungnya menggunakan poligon dalam dan poligon luar. Untuk mengenang jasanya, integral tertentu tersebut dinamakan integral Riemann. Riemann meninggal pada tahun 1866.

Sumber: *Calculus and Geometry Analitic*

Sumber: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk

Gambar 1.3 Riemann

C. 2. Teorema Dasar Kalkulus

Berdasarkan definisi integral tertentu, maka dapat diturunkan suatu teorema yang disebut dengan Teorema Dasar Kalkulus.

Jika f kontinu pada interval $[a, b]$ dan andaikan F sembarang antiturunan dari f pada interval tersebut, maka $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$.

Dalam pengerjaan hitung integral tertentu ini akan lebih mudah jika kalian menggunakan teorema-teorema berikut.

Teorema 1

Kelinearan

Jika f dan g terintegralkan pada interval $[a, b]$ dan k suatu konstanta, maka

a. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

b. $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

c. $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Teorema 2

Perubahan batas

Jika f terintegralkan pada interval $[a, b]$ maka:

a. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ **b.** $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Teorema 3

Teorema penambahan interval

Jika f terintegralkan pada suatu interval yang memuat tiga titik a, b, dan c, maka

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Teorema 4

Kesimetrian

a. Jika f fungsi genap, maka $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

b. Jika f fungsi ganjil, maka $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

Akan dibuktikan teorema 1a dan 1c, teorema 2b, dan teorema 3.

Pembuktian **Teorema 1a**

1a. Jika $F(x)$ sembarang antiturunan dari $f(x)$, maka

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \left[kF(x)\right]_a^b$$

$$= kF(b) - kF(a)$$

$$= k(F(b) - F(a))$$

$$= k\int_a^b f(x)\,dx$$

Jadi, $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

Pembuktian **Teorema 1b dan 1c**

1b. Jika $F(x)$ dan $G(x)$ masing-masing sembarang antiturunan dari $f(x)$ dan $g(x)$, maka

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \left[F(x) \pm G(x)\right]_a^b$$

$$= (F(b) \pm G(b)) - (F(a) \pm G(a))$$

$$= (F(b) \pm F(a)) - (G(b) \pm G(a))$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

Jadi, $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$.

Pembuktian **Teorema 2b**

2b. Jika $F(x)$ sembarang antiturunan dari $f(x)$, maka

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$$

$$= F(b) - F(a)$$

$$= -(F(a) - F(b))$$

$$= -\int_b^a f(x)\,dx$$

Jadi, $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

Pembuktian Teorema 3

Jika $F(x)$ sembarang antiturunan dari $f(x)$, maka

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx &= [F(x)]_a^c \\ &= F(c) - F(a) \\ &= (F(c) - F(b)) + (F(b) - F(a)) \\ &= \int_b^c f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

Jadi, $\int_a^c f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$.

Contoh

1. Hitunglah $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 3x + \cos x)\,dx$.

Jawab:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 3x + \cos x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx \quad \text{(Teorema 1b)} \\ &= \left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= -\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) + \left(\sin\frac{\pi}{6} - \sin 0\right) \\ &= -\frac{1}{3}\cdot(-1) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

Jadi, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 3x + \cos x)\,dx = \frac{5}{6}$.

2. Tentukan $\int_{-1}^{1} x^2\,dx$.

Jawab:

Oleh karena untuk $f(x) = x^2$, berlaku $f(-x) = f(x)$, maka $f(x) = x^2$ merupakan fungsi genap.

Dengan menggunakan Teorema 4, akan diperoleh:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^2\,dx &= 2\int_0^1 x^2\,dx \\ &= 2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3}(1^3 - 0^3)$$

$$= \frac{2}{3}$$

Jadi, $\int_{-1}^{1} x^2\ dx = \frac{2}{3}$.

3. Tentukanlah $\int_0^4 f(x)\ dx$ jika fungsi f didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ jika } 0 \le x < 2 \\ 1 \quad , \text{ jika } x \ge 2 \end{cases}$$

Jawab:

$$\int_0^4 f(x)\ dx = \int_0^2 f(x)\ dx + \int_2^4 f(x)\ dx \qquad \text{(Teorema 3)}$$

$$= \int_0^2 (x+2)\ dx + \int_2^4 1\ dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x\Big|_0^2 + x\Big|_2^4$$

$$= \left[(\frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2) - (\frac{1}{2}\cdot 0^2 - 2\cdot 0)\right] + [4-2]$$

$$= 2 + 4 + 2$$

$$= 8$$

Jadi, $\int_0^4 f(x)\ dx = 8$.

Asah Kompetensi 3

1. Tentukanlah integral tertentu berikut ini!

a. $\int_1^5 2x\ dx$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x + 3 + \cos x)\ dx$

c. $\int_{-100}^{100} x^5\ dx$

d. $\int_0^2 (2x - 1)^3\ dx$

e. $\int_0^1 \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 1}$

f. $\int_0^5 \left(3x^2 - 5x\right)$

g. $\int_{-\pi}^{2\pi} (\cos x - \sin x)\ dx$

h. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x + \frac{3}{4}\pi)\ dx$

2. Dari fungsi $f(x)$ berikut, hitunglah $\int_0^5 f(x)\,dx$

a. $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ jika } 0 \le x < 2 \\ 6 - x, \text{ jika } 2 \le x \le 5 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2}\ , \text{ jika } -3 \le x < 4 \\ 2\ , \text{ jika } 4 \le x \le 10 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{9 - x^2}\ , \text{ jika } 0 \le x \le 3 \\ -5x\ , \text{ jika } x \ge 3 \end{cases}$

Asah Kemampuan 2

Waktu : 60 menit

1. Tentukanlah integral tertentu berikut! **Bobot soal: 80**

a. $\int_{-1}^{-2} \left(4t - 6t^2\right) dt$

b. $\int_1^8 (x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}})\, dx$

c. $\int_0^4 (2x+1)\sqrt{x+x^2}\, dx$

d. $\int_{-1}^3 \frac{1}{(t+2)^2}\, dt$

e. $\int_{-1}^0 3x^2\sqrt{x^3+1}\, dx$

f. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^3 2x \cos 2x)\, dx$

g. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1-\cos x}\, dx$

h. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \; dx$

2. Jika $\int_0^1 f(x)\, dx = 4$ dan $\int_0^1 g(x)\, dx = -2$, hitunglah integral-integral berikut! **Bobot soal: 10**

a. $\int_0^1 3f(x)\, dx$

b. $\int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx$

c. $\int_0^1 (3f(x) + 2g(x) + 2)\, dx$

d. $\int_0^1 (2g(x) - 3f(x))\, dx$

e. $\int_1^0 (2f(x) - 3x^2)\, dx$

3. Diketahui f merupakan fungsi ganjil dan g merupakan fungsi genap dengan $\int_0^1 |f(x)|\, dx = \int_0^1 g(x)\, dx = 3$. Tentukanlah integral-integral berikut!

Bobot soal: 10

a. $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

b. $\int_{-1}^{1} g(x)\, dx$

c. $\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx$

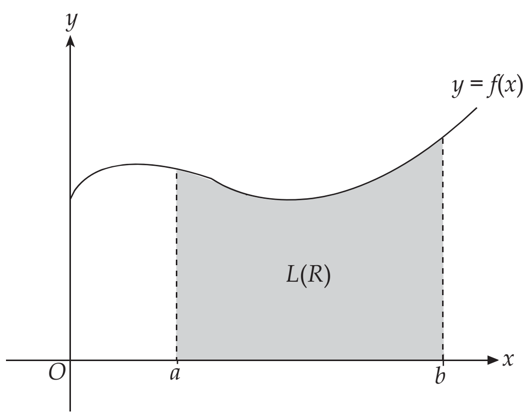
D. Menentukan Luas Daerah

D. 1. Menentukan Luas Daerah di Atas Sumbu-x

Pada subbab c kalian telah mengetahui bahwa luas merupakan limit suatu jumlah, yang kemudian dapat dinyatakan sebagai integral tertentu. Pada subbab ini, akan dikembangkan pemahaman untuk menentukan luas daerah yang dibatasi oleh beberapa kurva.

Misalkan R daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu-x, garis $x = a$, dan garis $x = b$, dengan $f(x) \geq 0$ pada $[a, b]$, maka luas daerah R adalah sebagai berikut.

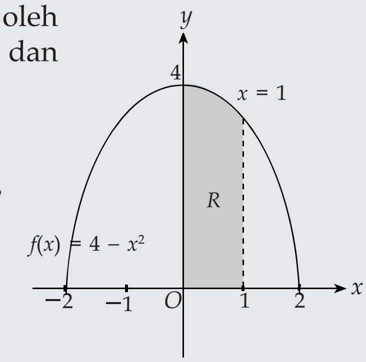
$$L(R) = \int_a^b f(x)dx$$



Gambar 1.4
Luas daerah di atas sumbu-x

Contoh

Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x) = 4 - x^2$, sumbu-x, garis $x = 0$, dan $x = 1$.



Jawab:

Daerah tersebut adalah daerah R. Luas daerah R adalah:

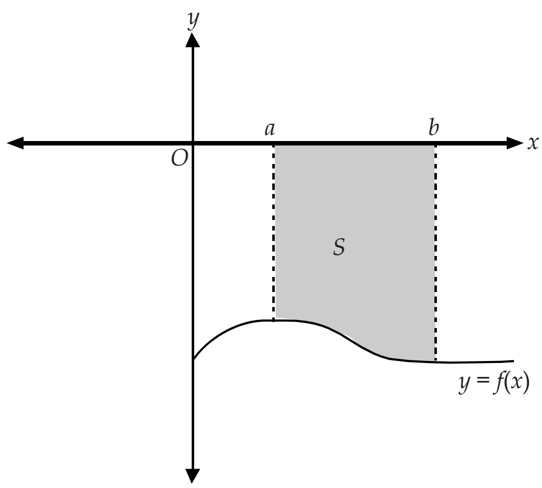
$$L(R) = \int_0^1 (4 - x^2)\, dx$$
$$= \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$= (4 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 0)$$
$$= 3\frac{2}{3}$$

Jadi, luas daerah R adalah $3\frac{2}{3}$ satuan luas.

D. 2. Menentukan Luas Daerah di Bawah Sumbu-x

Misalnya S daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu-x, garis $x = a$, dan garis $x = b$, dengan $f(x) \leq 0$ pada $[a, b]$, seperti yang telah dibahas di subbab D.1, maka luas daerah S adalah

$$L(S) = -\int_a^b f(x)\, dx$$

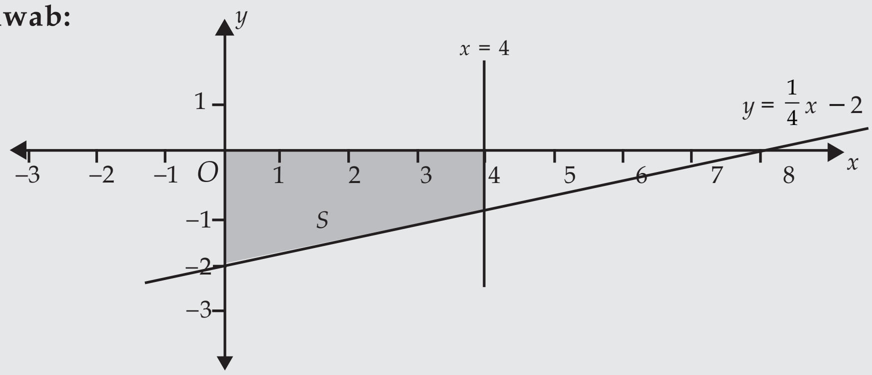


Gambar 1.5
Luas daerah di bawah sumbu x

Contoh

Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = \frac{1}{4}x - 2$, sumbu-x, garis $x = 4$, dan sumbu-y.

Jawab:



Daerah tersebut adalah daerah S. Luas Daerah S adalah

$$
\begin{aligned}
L(S) &= -\int_0^4 \left(\frac{1}{4}x - 2\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{8}x^2 - 2x\right]_0^4 \\
&= -((\frac{1}{8}\cdot 4^2 - 2\cdot 4) - 0) \\
&= -(2-8) = 6
\end{aligned}
$$

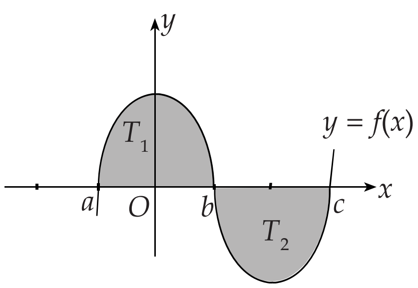
Jadi, luas daerah yang diarsir adalah 6 satuan.

D. 3. Menentukan Luas Daerah yang Terletak Dibatasi Kurva $y = f(x)$ dan sumbu-x

Misalkan T daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu-x, garis $x = a$, dan garis $x = c$, dengan $f(x) \geq 0$ pada $[a, b]$ dan $f(x) \leq 0$ pada $[b, c]$, maka luas daerah T adalah

$$L(T) = \int_a^b f(x)\, dx - \int_b^c f(x)\, dx$$

Rumus ini didapat dengan membagi daerah T menjadi T_1 dan T_2 masing-masing pada interval $[a, b]$ dan $[b, c]$. Kalian dapat menentukan luas T_1 sebagai luas darah yang terletak di atas sumbu-x dan luas T_2 sebagai luas daerah yang terletak di bawah sumbu-x.



Gambar 1.6
Luas daerah yang dibatasi kurva $y = f(x)$ dan sumbu-x

Contoh

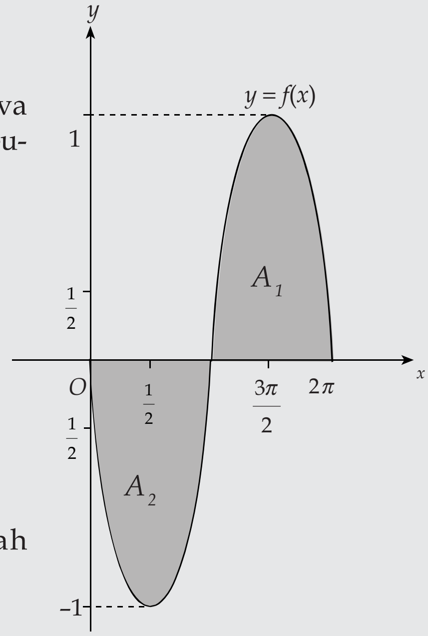
Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x) = -\sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, dan sumbu-x.

Jawab:

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x) = -\sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, dan sumbu-x adalah:

$$
\begin{aligned}
L &= L(A_1) + L(A_2) \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x \; dx - \int_{0}^{\pi} -\sin x \; dx \\
&= \left([\cos x]_{\pi}^{2\pi} \right) - [\cos x]_{0}^{\pi} \\
&= (\cos 2\pi - \cos \pi) - (\cos \pi - \cos 0) \\
&= (1 - (-1)) - (-1 - 1) \\
&= 2 + 2 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

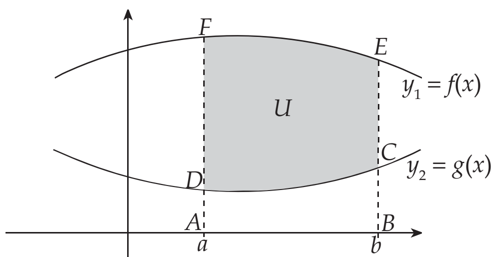
Jadi, luas daerah tersebut adalah 4 satuan luas.



D. 4. Menentukan Luas Daerah yang Terletak di Antara Dua Kurva

Luas daerah U pada gambar di bawah adalah

$$L(U) = \text{Luas } ABEF - \text{Luas } ABCD$$



Gambar 1.7
Luas daerah yang terletak di antara dua kurva

$ABEF$ adalah daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = f(x)$, $x = a$, $x = b$, dan $y = 0$ sehingga

$$\text{Luas } ABEF = \int_a^b f(x)\, dx$$

Adapun $ABCD$ adalah daerah yang dibatasi oleh kurva $y_2 = g(x)$, $x = a$, $x = b$, dan $y = 0$ sehingga

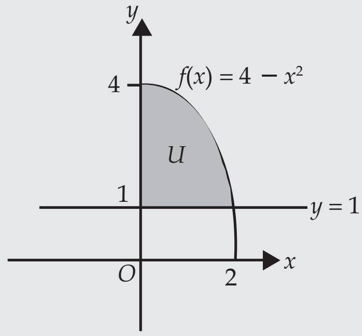
$$\text{Luas } ABEF = \int_a^b g(x)\, dx$$

Dengan demikian, luas daerah U adalah

$$\boxed{L(U) = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx}$$

Contoh

Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x) = 4 - x^2$, garis $x = 0$, dan di atas garis $y = 1$.



Jawab:

Luas daerah yang dimaksud adalah luas daerah U.
Tentukanlah batas-batas pengintegralan, yaitu absis titik potong antara kurva $y = f(x) = 4 - x^2$ dan garis $y = 1$ di kuadran I.

Substitusi $y = 1$ ke persamaan $y = 4 - x^2$ sehingga didapat:

$$4 - x^2 = 1$$
$$x^2 = 3$$
$$x_1 = -\sqrt{3} \text{ atau } x_2 = \sqrt{3}$$

Oleh karena daerah U ada di kuadran I, maka batas-batas pengintegralannya adalah $x = 0$ sampai $x = \sqrt{3}$.
Dengan demikian, luas daerah U adalah sebagai berikut.

$$L(U) = \int_0^{\sqrt{3}} (4 - x^2 - 1)\, dx$$
$$= \int_0^{\sqrt{3}} (3 - x^2)\, dx$$
$$= \left[3x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{3}}$$
$$= 3 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3 = 3\sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3}$$
$$= 3 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Jadi, luas daerah U adalah $2\sqrt{3}$ satuan luas.

Asah Kemampuan 3

Waktu : 60 menit

Bobot soal: 60

1. Gambarlah daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva berikut. Kemudian, tentukan luas daerah tersebut!
   a. $f(x) = 3x^2 - x^3$ dan sumbu-x.
   b. $g(x) = 1 + x^3$, sumbu-x, dan garis $x = 2$
   c. $h(x) = x^2 - 3x$, sumbu-x, $x = 0$, dan sumbu simetri parabola
   d. $i(x) = x$, $g(x) = 2x$, dan $x = 5$
   e. $j(x) = x^2 - 3x - 4$ dan sumbu garis $y = -4$
   f. $k(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$, untuk $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

2. Suatu daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x) = x^2 - 2x - 8$ dan sumbu-x dibagi menjadi dua bagian oleh sumbu-y. Tentukan perbandingan luas bagian masing-masing!

Bobot soal: 20

3. Tentukan luas persegi panjang terbesar yang dapat dibuat dalam daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$ dan garis $y = 4$.

Olimpiade Matematika SMU, 2000

Bobot soal: 20

Siapa Berani

Titik (a, b) dan $(-a, b)$ dengan a dan b bilangan real positif merupakan dua titik pada parabola $f(x) = 1 - x^2$. Jika kedua titik tersebut dengan titik $(1, 0)$ dan $(-1, 0)$ membentuk trapesium, tentukanlah luas terbesar trapesium tersebut!

Sumber : *Olimpiade Matematika SMU*, 2000

E. Menentukan Volume Benda Putar

E. 1. Menentukan Volume Benda Putar yang Diputar Mengelilingi Sumbu-x

Secara umum, volume dinyatakan sebagai luas alas dikali tinggi. Secara matematis, ditulis

$$\boxed{V = A \cdot h}$$

Kemudian, perhatikan sebuah benda yang bersifat bahwa penampang-penampang tegak lurusnya pada suatu garis tertentu memiliki luas tertentu. Misalnya, garis tersebut adalah sumbu-x dan andaikan luas penampang di x adalah $A(x)$ dengan $a \le x \le b$. Bagi selang $[a, b]$ dengan titik-titik bagi $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$.

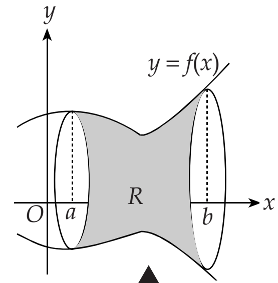
Melalui titik-titik ini, luas bidang tegak lurus pada sumbu-x, sehingga diperoleh pemotongan benda menjadi lempengan yang tipis-tipis. Volume suatu lempengan ini dapat dianggap sebagai volume tabung, yaitu $\Delta V_i \approx A(\overline{x})\Delta x_i$ dengan $x_{i-1} \le \overline{x}_i \le x_i$.

Dengan jumlah yang kalian dapatkan $V \approx \sum_{t=1}^{n} A(\overline{x}_i)\Delta x_i$, kemudian akan menjadi $V = \int_a^b A(x)\,dx$.

$A(x)$ adalah luas alas benda putar, oleh karena alas benda putar ini berupa lingkaran, maka $A(x) = \pi r^2$ jari-jari yang dimaksud merupakan sebuah fungsi dalam x_i misalnya $f(x)$. Dengan demikian volume benda putar dapat dinyatakan sebagai $V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2\,dx$.

Misalkan R daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $f(x)$, sumbu-x, garis $x = a$, garis $x = b$, dengan $a < b$, maka volume benda putar yang diperoleh dengan memutar daerah R mengelilingi sumbu-x adalah

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

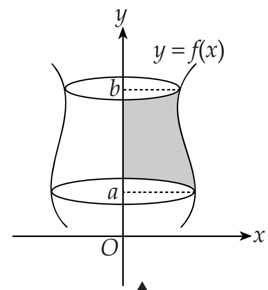


Gambar 1.8
Volume benda putar yang mengelilingi sumbu-x

E. 2. Menentukan Volume Benda Putar yang Diputar Mengelilingi Sumbu-y

Misalkan S daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $x = f(y)$, sumbu-y, garis $x = a$, garis $x = b$, dengan $a < b$, maka volume benda putar yang diperoleh dengan memutar daerah S mengelilingi sumbu-y adalah V.

$$V = \pi\int_a^b (f(y))^2\,dy$$

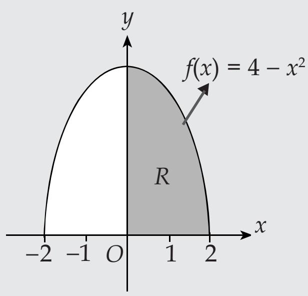


Gambar 1.9
Volume benda putar yang mengelilingi sumbu-y

Contoh

Tentukanlah volume benda putar, jika daerah yang dibatasi oleh grafik $f(x) = 4 - x^2$, sumbu-x, dan sumbu-y diputar 360° terhadap:

a. sumbu-x
b. sumbu-y



Jawab:

a. Volumenya adalah:

$$V = \pi\int_0^2 (4 - x^2)^2\,dx = \pi\int_0^2 (16 - 8x^2 + x^4)\,dx$$

$$= \pi\left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^2$$

$$= \pi\left(\left(16\cdot 2 - \frac{8}{3}\cdot 2^3 + \frac{1}{5}\cdot 2^5\right) - 0\right)$$

$$= \pi\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right)$$

$$= \frac{256}{15}\pi$$

Jadi, volume benda putar yang terjadi jika daerah R diputar mengelilingi sumbu-x adalah $\frac{256}{15}\pi$ satuan volume.

b. Untuk menentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah R diputar mengelilingi sumbu-y, kalian harus nyatakan persamaan kurva $y = f(x) = 4 - x^2$ menjadi persamaan x^2 dalam variabel y.

$y = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - y$

Volume benda putar tersebut adalah

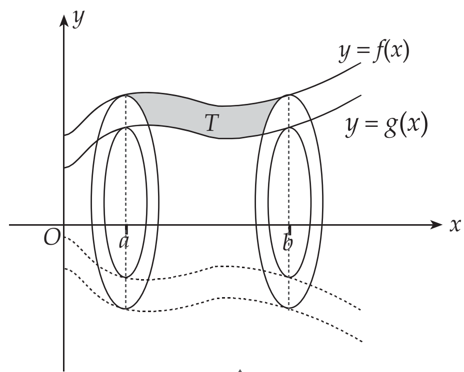
$$V = \pi\int_0^4 (4-y)\ dy$$
$$= \pi\left[4y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^4$$
$$= \pi\left(\left(4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4^2\right) - 0\right)$$
$$= \pi(16 - 8) = 8\pi$$

Jadi, volume benda putar yang terjadi jika daerah R diputar mengelilingi sumbu-y adalah 8π satuan volume.

E. 3. Menentukan Volume Benda Putar yang Dibatasi Kurva $f(x)$ dan $g(x)$ jika Diputar Mengelilingi Sumbu-x

Daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x)$ dan $g(x)$ dengan $|f(x)| \geq |g(x)|$ pada interval $[a, b]$ diputar mengelilingi sumbu-x seperti yang telah dijelaskan di subbab E.1, maka volume benda putar yang diperoleh adalah sebagai berikut.

$$V(T) = \pi\int_a^b (f(x))^2 - (g(x))^2\ dx$$



Gambar 1.10
Volume benda putar yang dibatasi kurva $f(x)$ dan $g(x)$ jika diputar mengelilingi sumbu-x

Contoh

Tentukanlah volume benda putar, jika daerah yang dibatasi oleh grafik $f(x) = x - 2$, sumbu-y, garis $x = 2$, dan $y = -1$ diputar 360° mengelilingi sumbu-x

Jawab:

Karena daerah yang dimaksud ada di bawah sumbu-x, maka volume nya adalah

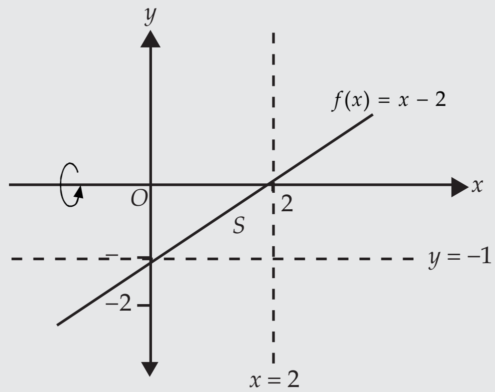
$$V = -\pi\int_0^2 ((-1)^2 - (x-2)^2))\ dx$$

$$= -\pi\int_0^2 1 - (x^2 - 4x + 4)\, dx$$

$$= -\pi\left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x\right)\Bigg|_0^2$$

$$= -\pi\left[\left(-\frac{8}{3} + 8 - 6\right) - 0\right]$$

$$= \frac{2}{3}\pi$$

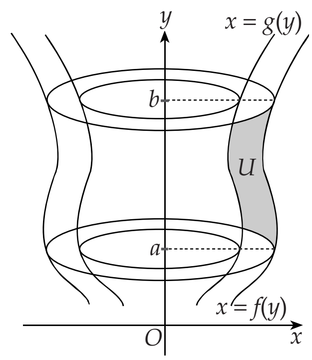


Jadi, volume benda putar yang terjadi jika daerah S diputar mengelilingi sumbu-x adalah $4\frac{1}{6}\pi$ satuan volume.

E.4. Menentukan Volume Benda Putar yang Dibatasi Kurva $f(y)$ dan $g(y)$ jika Diputar Mengelilingi Sumbu-y

Jika daerah yang dibatasi oleh kurva $f(y)$ dan $g(y)$ dengan $|f(y)| \geq |g(y)|$ pada interval $[a, b]$ diputar mengelilingi sumbu-y. Seperti yang telah dijelaskan di subbab E.1, maka volume benda putar yang diperoleh adalah sebagai berikut.

$$V(U) = \pi\int_a^b ((f(y))^2 - (g(y))^2\, dy$$

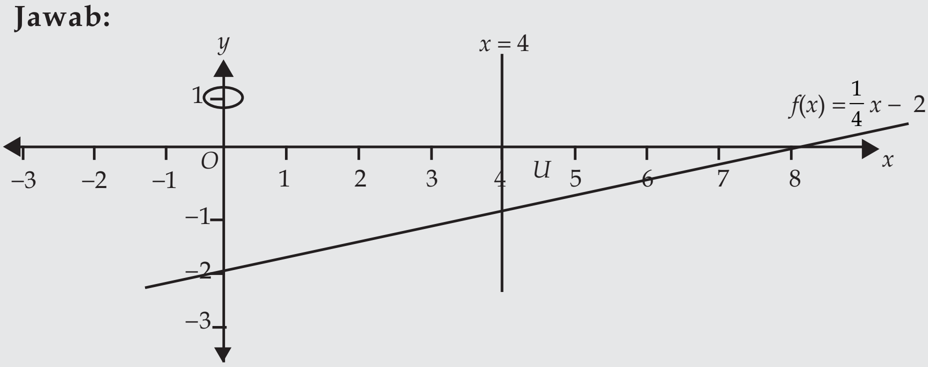


Gambar 1.11
Volume benda putar yang dibatasi kurva $f(y)$ dan $g(y)$ jika diputar mengelilingi sumbu-y

Contoh

Tentukanlah volume benda putar, jika daerah yang dibatasi oleh grafik $f(x) = \frac{1}{4}x - 2$, sumbu-x, garis $x = 0$, dan garis $x = 4$ diputar 360° mengelilingi sumbu-y.

Jawab:



Untuk menentukan volume benda putar tersebut, tentukan batas-batas pengintegralan, yaitu ordinat titik potong antara kurva $y = f(x) = \frac{1}{4}x - 2$ dan garis $x = 4$.

Substitusi $x = 4$ ke persamaan $y = \frac{1}{4}x - 2$ sehingga diperoleh,

$y = f(x) = \frac{1}{4} \cdot 4 - 2 = -1$

Jadi, batas-batas pengintegralannya adalah $y = -1$ sampai $y = 0$.
Oleh karena daerah tersebut diputar mengelilingi sumbu-y, maka kalian harus menyatakan persamaan kurva $y = \frac{1}{4}x - 2$ menjadi persamaan x dalam variabel y.

Dari $y = \frac{1}{4}x - 2$

$$\frac{1}{4}x = y + 2$$
$$x = 4y + 8$$

Jadi, volume benda putar tersebut adalah

$$V = \pi\int_{-1}^{0} ((4y + 8)^2 - 4^2)\, dy + \pi\int_{-2}^{-1} (4y + 8)^2\, dy$$
$$= \pi\int_{-1}^{0} (16y^2 + 64y + 48)\, dy + \pi\int_{-2}^{-1} (16y^2 + 64y + 64)\, dy$$
$$= \pi\left(\frac{16}{3}y^3 + 32y^2 + 48y\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \pi\left(\frac{16}{3}y^3 + 32y^2 + 64y\right)\Bigg|_{-2}^{-1}$$
$$= \pi\left[0 - \left(\frac{16}{3}\cdot(-1)^3 + 32(-1)^2 + 48(-1)\right)\right] +$$
$$\pi\left[\left(\frac{16}{3}\cdot(-1)^3 + 32(-1)^2 + 64(-1)\right) - \left(\frac{16}{3}\cdot(-2)^3 + 32(-2)^2 + 64(-2)\right)\right]$$
$$= -\pi\left(-\frac{16}{3} - 16\right) + \pi\left[\left(-\frac{16}{3} + 32 - 64\right) - \left(\frac{16}{3}\cdot 8 + 128 - 128\right)\right]$$
$$= 21\frac{1}{3}\pi + \frac{16}{3}\pi = \frac{80}{3}\pi$$

Dengan demikian, volume benda putar yang terjadi jika daerah U diputar mengelilingi sumbu-y adalah $\frac{80}{3}\pi$ satuan volume.

4 Asah Kemampuan

Waktu : 60 menit

Gambarlah daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva berikut ini. Kemudian, tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah tersebut diputar 360° mengelilingi sumbu-x dan volume jika diputar 360° mengelilingi sumbu-y.

1. $y = -x$, sumbu-x, garis $x = 0$, dan garis $x = 6$ — **Bobot soal: 20**
2. $f(x) = \sin x$ pada interval $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ dan sumbu-x — **Bobot soal: 20**
3. $x^2 + y^2 = 64$, sumbu-x, dan sumbu-y — **Bobot soal: 20**

4. $y^2 = 10x$, $y^2 = 4x$, dan $x = 4$

Bobot soal: 20

EBTANAS 1989

5. $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 2$, $g(x) = 2 - x$, dan $x = 2$

Bobot soal: 20

Rangkuman

1. Bentuk umum integral tak tentu

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

dengan

$\int dx$: Lambang integral yang menyatakan operasi antiturunan
$f(x)$: Fungsi integran, yaitu fungsi yang dicari antiturunannya
c : Konstanta

2. Rumus integral tak tentu

- $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, di mana c adalah konstanta, $n \neq -1$
- $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
- $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)\,dx$
- $\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$
- $\int (u(x))^r\,u'(x)\,dx = \frac{1}{r+1}(u(x))^{r+1} + c$, di mana c adalah konstanta, $n \neq -1$
- $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$, di mana c adalah konstanta
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$, di mana c adalah konstanta
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + c$, di mana c adalah konstanta

3. Bentuk umum integral tertentu

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

di mana f kontinu pada interval $[a, b]$

4. Rumus-rumus integral tertentu

- $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

- $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$
- $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ di mana f fungsi genap
- $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ di mana f fungsi ganjil

5. Rumus luas daerah (L) yang terletak

a. di atas sumbu-x

$$L(R) = \int_a^b f(x)\,dx$$

b. di bawah sumbu-x

$$L(S) = -\int_a^b f(x)\,dx$$

c. di atas dan di bawah sumbu–x

$$L(T) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

d. di antara dua kurva

$$L(U) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$

6. Volume benda putar (V) yang diputar mengelilingi

a. sumbu-x

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

b. sumbu-y

$$V = \pi\int_a^b (f(y))^2\,dy$$

c. sumbu-x dan dibatasi kurva $f(x)$ dan $g(x)$

$$V = \pi\int_a^b ((f(x))^2 - g(x))^2\,dx$$

d. sumbu-y dan dibatasi kurva $f(y)$ dan $g(y)$

$$V = \pi\int_a^b ((f(y))^2 - g(y))^2\,dy$$

Ulangan Bab 1

I. Pilihlah jawaban yang paling tepat!

1. Nilai dari $\int_0^2 (3x^2 - 3x + 7)\,dx$ adalah . . . .
   A. 12 D. 6
   B. 16 E. 4
   C. 10

2. Jika $f(x) = \int (x^2 - 2x + 5)\,dx$ dan $f(0) = 5$, maka $f(x) = \ldots.$
   A. $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x + 5$
   B. $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + 5$
   C. $\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + 5$
   D. $\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 5x + 5$
   E. $\frac{4}{3}x^3 - x^2 + 5x + 5$

3. Jika $b > 0$ dan $\int_1^b (2x - 3)\,dx = 12$, maka nilai b adalah . . . .
   A. 2 D. 5
   B. 3 E. 6
   C. 4

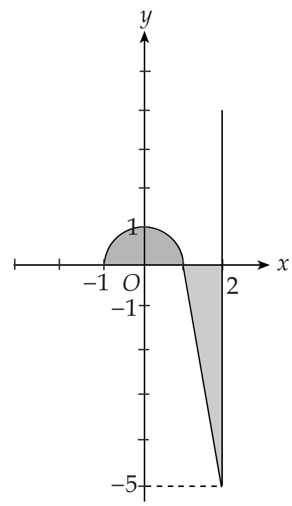
4. Jika $\int_1^p (1 + x)\,dx = p$, maka nilai p adalah . . . .
   A. $\sqrt{3}$ D. 1
   B. $\sqrt{2}$ E. $\frac{1}{2}$
   C. $\sqrt{5}$

5. Nilai dari $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x + \cos x)\,dx$ adalah . . . .
   A. $-1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ D. $2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$
   B. $1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ E. $2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$
   C. $-2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

6. Luas bidang yang dibatasi oleh grafik $y = 6x^2 - x$ dan sumbu-x adalah. . . .
   A. $\frac{1}{36}$ satuan luas D. $\frac{1}{216}$ satuan luas
   B. $\frac{1}{72}$ satuan luas E. $\frac{1}{432}$ satuan luas
   C. $\frac{1}{108}$ satuan luas

7. Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x + 7$ dan $y = 7 - x^2$ diputar mengelilingi sumbu-x sejauh 360°. Volume benda yang terjadi adalah . . . .
   A. $12\frac{1}{5}\pi$ D. $2\frac{4}{5}\pi$
   B. $11\frac{4}{5}\pi$ E. $2\frac{2}{3}\pi$
   C. $2\frac{1}{5}\pi$

8. Luas daerah terbatas di bawah ini adalah . . . .



   A. $\frac{4}{3}$ D. 2
   B. $\frac{10}{3}$ E. 1
   C. $\frac{8}{3}$

9. Panjang busur kurva $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ dari $x = 0$ sampai $x = 8$ adalah . . . .

A. $18\frac{2}{3}$
D. 16
B. 18
E. $14\frac{2}{3}$
C. $16\frac{2}{3}$

10. Luas daerah yang dibatasi oleh sumbu-y, kurva $y = x^2 + 1$, dan kurva $y = -x^2 + 19$ adalah . . . .

A. 3
D. 60
B. 36
E. 72
C. 54

II. Jawablah pertanyaan berikut dengan jelas dan tepat!

1. Proporsi dari pekerja yang mendapatkan upah antara a ribu dan b ribu rupiah/hari adalah $y = \frac{(-x^2 + 6x)}{36}$ dan dibatasi sumbu-x. Terletak di antara a dan b yang bernilai 0 dan 6. Berapakah persentase pekerja yang mendapatkan upah di bawah Rp1.500,00?

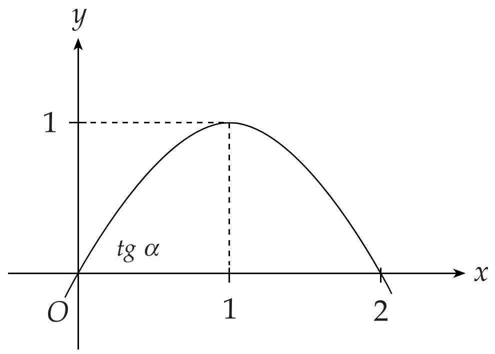
2. Sebuah benda bergerak dengan laju v m/det. Pada saat $t = 2$ detik posisi benda berada pada jarak 30 m dari titik asal. Tentukanlah posisi benda sebagai fungsi waktu t!

3. Sebuah bola bergulir pada sebuah bidang datar dengan laju awal 4 m/det. Akibat gesekan dengan bidang itu, bola mengalami perlambatan 2 m/det^2. Jika pada saat $t = 0$ posisi benda berada pada $s = 0$, berapa jauhkah jarak yang ditempuh bola dari awal sampai berhenti?

4. Ayu dan Bernard berangkat dari tempat yang sama pada saat $t = 0$. Kecepatan pada waktu t adalah $v(t)$ dan jarak yang dijalani antara $t = a$ dan $t = b$ adalah $\int_a^b v(t)\, dt$.

Kecepatan Ayu seperti kurva yang terlihat pada gambar di bawah ini. Jika $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Berapakah jarak yang ditempuh mereka masing-masing pada saat kecepatannya sama?



5. Sekelompok bakteri dalam suatu lingkungan hidup tertentu berkembang biak sesuai dengan perumusan $\frac{d_n}{d_t} = 0{,}5\ N$. Jika jumlah bakteri pada keadaan awal adalah 200, hitunglah jumlah bakteri setelah $t = 2$ detik, $t = 4$ detik, $t = 8$ detik, $t = 10$ detik!
(**Petunjuk:** Nyatakan hasil perhitungan dalam $e = 2, 71828 \ldots$)

BAB

2

Program Linear

A. Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

B. Model Matematika

C. Nilai Optimum Suatu Fungsi Objektif

Sumber: http://blontankpoer.blogsome.com

Dalam dunia usaha, seorang pengusaha pada umumnya ingin memperoleh keuntungan sebanyak-banyaknya dari bidang usaha yang digelutinya. Untuk itu, pengusaha tersebut membuat perencanaan untuk mengoptimalisasi sumber daya yang tersedia, seperti bahan baku, transportasi, sumber daya manusia, dan lain-lain. Upaya optimalisasi ini dapat dimodelkan dengan program linear.

A. Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Suatu garis dalam bidang koordinat dapat dinyatakan dengan persamaan yang berbentuk:

$$a_1x + a_2y = b$$

Persamaan semacam ini dinamakan persamaan linear dalam variabel x dan y (dua variabel). Secara umum, dapat didefinisikan sebagai persamaan linear dengan n variabel $x_1, x_2, \ldots x_n$ dalam bentuk berikut.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ adalah konstanta-konstanta real

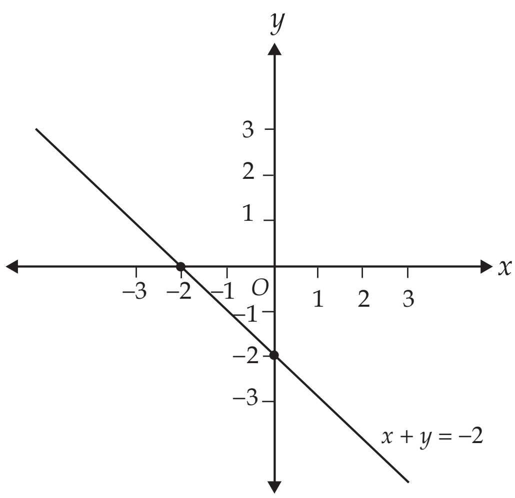
Jika melibatkan lebih dari satu persamaan, maka disebut dengan *sistem persamaan linear*. Dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = & b_n \end{array}$$

dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah variabel

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{mn}$ adalah konstanta real.

Untuk saat ini, pembahasan dibatasi menjadi dua variabel saja. Untuk pertidaksamaan linear, tanda "=" diganti dengan "≤", "<", "≥", ">". Sebagai contoh, untuk pertidaksamaan linear dua variabel dijelaskan sebagai berikut. Misalnya, kalian menggambar garis $x + y = -2$ dapat digambarkan sebagai berikut.

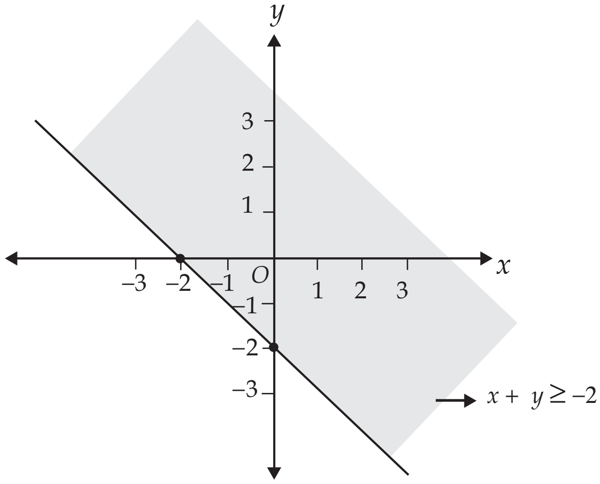


Gambar 2.1
Garis $x + y = -2$

Garis $x + y = -2$ membagi bidang koordinat menjadi dua daerah, yaitu daerah $x + y < -2$ dan daerah $x + y > -2$.

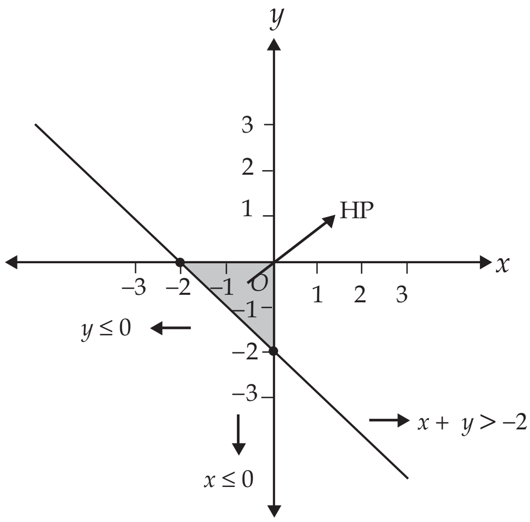
Sekarang, substitusi titik sembarang, misalnya titik $O(0, 0)$ ke persamaan garis tersebut. Didapat, $0 + 0 = 0 > -2$. Ini berarti, titik $O(0, 0)$ berada pada daerah $x + y > -2$.

Daerah $x + y > -2$ ini diarsir seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.2
Daerah penyelesaian $x + y \geq -2$

Jika daerah tersebut dibatasi untuk nilai-nilai x, $y \leq 0$, maka diperoleh gambar seperti berikut.



Gambar 2.3
Himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan $x + y > -2$, $x \leq 0$, dan $y \leq 0$

Daerah yang diarsir berupa daerah segitiga. Tampak bahwa daerah ini merupakan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear $x + y \geq -2$, $x \leq 0$, dan $y \leq 0$.

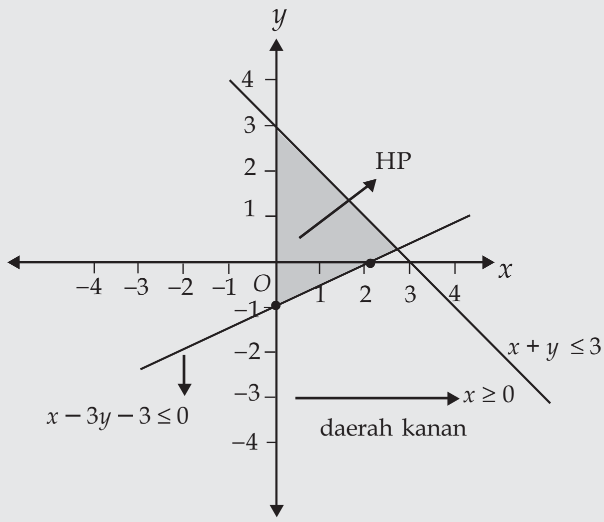
Untuk selanjutnya, himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear ini disebut daerah penyelesaian.

Contoh

Tentukanlah daerah penyelesaian dari pertidaksamaan dengan $x + y \leq 3$, $x - 3y - 3 \leq 0$, dan $x \geq 0$.

Jawab:

Daerah yang diarsir berikut merupakan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear $x + y \leq 3$, $x - 3y - 3 \leq 0$, dan $x \geq 0$.



Asah Kemampuan 1

Waktu : 60 menit

1. Gambarlah daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear berikut untuk $x, y \in R$.

   Bobot soal: 80

   a. $x - 5y \geq 10$, $x \geq 5$
   b. $-2 \leq x < 3$, $0 \leq y \leq 4$
   c. $0 < x < 2$, $-2 < y \leq 2$
   d. $8x - 4y \leq 56$ $x \geq 0$, $y \geq 0$
   e. $y \leq x - 3$, $x \leq 1 + y$, $x > 3$
   f. $4x - 2y \leq 10$, $x - 6y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq -4$
   g. $7x + 14y - 21 \geq 0$, $x - 9y - 27 \geq 0$, $x \leq 0$, $y \geq 0$
   h. $-6x + 9y \leq 3$, $y - 2x \leq 6$, $2x - 8y + 6 \leq 0$, $x \leq -8$, $x \geq 4$, $y \leq 0$

2. Gambarlah daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear berikut untuk $x, y \in R$.

   Bobot soal: 20

   $-x + 8y \leq 80$ $\quad$ $2x - y \geq 4$
   $2x - 4y \geq 5$ $\quad$ $x \geq 0$, $y \geq 0$
   $2x + y \geq 12$

   Tentukanlah luas daerah penyelesaian tersebut. Kesimpulan apa yang diperoleh?

B. Model Matematika

Sistem pertidaksamaan linear yang telah dijelaskan sebelumnya dapat diterapkan pada permasalahan sehari-hari dengan memodelkan permasalahan tersebut ke dalam *model matematika*.

Sumber: www.germes-online.com

Sebagai ilustrasi perhatikan contoh berikut. PT. Samba Lababan memproduksi ban motor dan ban sepeda. Proses pembuatan ban motor melalui tiga mesin, yaitu 2 menit pada mesin I, 8 menit pada mesin II, dan 10 menit pada mesin III. Adapun ban sepeda diprosesnya melalui dua mesin, yaitu 5 menit pada mesin I dan 4 menit pada mesin II. Tiap mesin ini dapat dioperasikan 800 menit per hari. Untuk memperoleh keuntungan maksimum, rencananya perusahaan ini akan mengambil keuntungan Rp40.000,00 dari setiap penjualan ban motor dan Rp30.000,00 dari setiap penjualan ban sepeda. Berdasarkan keuntungan yang ingin dicapai ini, maka pihak perusahaan merencanakan banyak ban motor dan banyak ban sepeda yang akan diproduksinya dengan merumuskan berbagai kendala sebagai berikut.

Perusahaan tersebut memisalkan banyak ban motor yang diproduksi sebagai x dan banyak ban sepeda yang diproduksi sebagai y, dengan x dan y bilangan asli. Dengan menggunakan variabel x dan y tersebut, perusahaan itu membuat rumusan kendala-kendala sebagai berikut.

Pada mesin I	:	$2x + 5y \leq 800$	…. *Persamaan* 1
Pada mesin II	:	$8x + 4y \leq 800$	…. *Persamaan* 2
Pada mesin III	:	$10x \leq 800$	…. *Persamaan* 3
x, y bilangan asli	:	$x \geq 0, y \geq 0$	…. *Persamaan* 4

Fungsi tujuan (objektif) yang digunakan untuk memaksimumkan keuntungan adalah $f(x, y) = 40.000x + 30.000y$. Dalam merumuskan masalah tersebut, PT. Samba Lababan telah membuat model matematika dari suatu masalah program linear.

DEFINISI

Model matematika adalah suatu cara sederhana untuk menerjemahkan suatu masalah ke dalam bahasa matematika dengan menggunakan persamaan, pertidaksamaan, atau fungsi.

Contoh

Lia ingin membuat puding buah dan es buah. Untuk membuat puding buah, ia membutuhkan 3 kg mangga dan 2 kg melon. Sedangkan untuk membuat es buah, ia membutuhkan 1 kg mangga dan 4 kg melon. Lia memiliki persediaan 11 kg mangga dan 14 kg melon. Buatlah model matematika dari persoalan ini!

Sumber: electronicintifada.net

Jawab:

Misalkan: x = banyaknya puding buah
y = banyaknya es buah

Kalian dapat merumuskan kendala-kendala dalam permasalahan ini sebagai berikut.

$3x + y \le 11$ ... *Persamaan* 1
$2x + 4y \le 14$ ... *Persamaan* 2
$x \ge 0$ ... *Persamaan* 3
$y \ge 0$ ... *Persamaan* 4

Asah Kompetensi 1

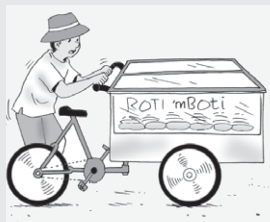
1. Liliana memiliki sejumlah uang. Seperempat dari uang ini digunakannya untuk membeli buku, seperlimanya untuk membeli spidol, dan sepertiganya untuk membeli majalah. Harga buku tidak lebih dari Rp15.000,00, harga spidol tidak lebih dari Rp12.000,00, dan harga majalah tidak lebih dari Rp30,000,00. Jika sisa uangnya Rp13.000,00, buatlah model matematika dari masalah tersebut!

Sumber: www.unityspokane.org

2. Luas suatu tempat parkir 300 m^2. Untuk memarkir mobil diperlukan tempat seluas 10 m^2 dan untuk bus diperlukan 20 m^2. Tempat parkir tersebut tidak dapat menampung lebih dari 15 mobil dan bus. Buatlah model matematika dari persoalan ini!

Sumber: Fortune, 16 September 2002

3. Umar Bakri adalah pedagang roti. Ia menjual roti menggunakan gerobak yang hanya dapat memuat 600 roti. Roti yang dijualnya adalah roti manis dan roti tawar dengan harga masing-masing Rp5.500,00 dan Rp4.500,00 per bungkusnya. Dari penjualan roti-roti ini, ia memperoleh keuntungan Rp500,00 dari sebungkus roti manis dan Rp600,00 dari sebungkus roti tawar. Jika modal yang dimiliki Umar Bakri Rp600.000,00, buatlah model matematika dengan tujuan untuk memperoleh keuntungan sebesar-besarnya!

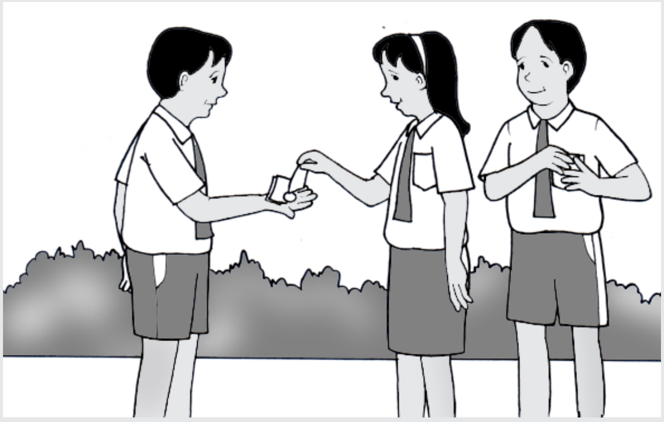


4. Sebuah pabrik pembuat boneka akan memproduksi boneka Si Unyil dan Pak Ogah dengan menggunakan dua mesin. Waktu yang diperlukan untuk memproduksi kedua boneka ini dapat dilihat pada tabel berikut.

Jenis Boneka	Waktu untuk membuat sebuah boneka	
	Mesin I	Mesin II
Si Unyil	20	10
Pak Ogah	10	20

Mesin I dan mesin II masing-masing beroperasi 8 jam per hari. Jika pabrik tersebut menjual boneka Si Unyil dan boneka Pak Ogah dengan keuntungan masing-masing Rp10.000,00 dan Rp8.500,00 per buah, buatlah model matematika dari permasalahan ini agar pabrik tersebut dapat memperoleh keuntungan sebesar-besarnya!

Siapa Berani



Jumlah uang Niko Sentera dan Butet kurang dari Rp5.000,00. Jumlah uang mereka ini juga kurang dari uang Ivan setelah ditambah Rp3.000,00. Adapun uang Ivan kurang dari Rp1.000,00 dikurangi uang Niko Sentera. Buatlah model matematika dari persoalan tersebut!

C. Nilai Optimum Suatu Fungsi Objektif

Dalam pemodelan matematika masalah produksi ban PT. Samba Lababan, kalian akan mencari nilai x dan y sedemikian sehingga $f(x, y) = 40.000x + 30.000y$ maksimum.

Bentuk umum dari fungsi tersebut adalah $f(x, y) = ax + by$. Suatu fungsi yang akan dioptimumkan (maksimum atau minimum). Fungsi ini disebut fungsi objektif. Untuk menentukan nilai optimum fungsi objektif ini, kalian dapat menggunakan dua metode, yaitu metode uji titik pojok dan metode garis selidik.

C. 1. Metode Uji Titik Pojok

Untuk menentukan nilai optimum fungsi objektif dengan menggunakan metode uji titik pojok, lakukanlah langkah-langkah berikut.

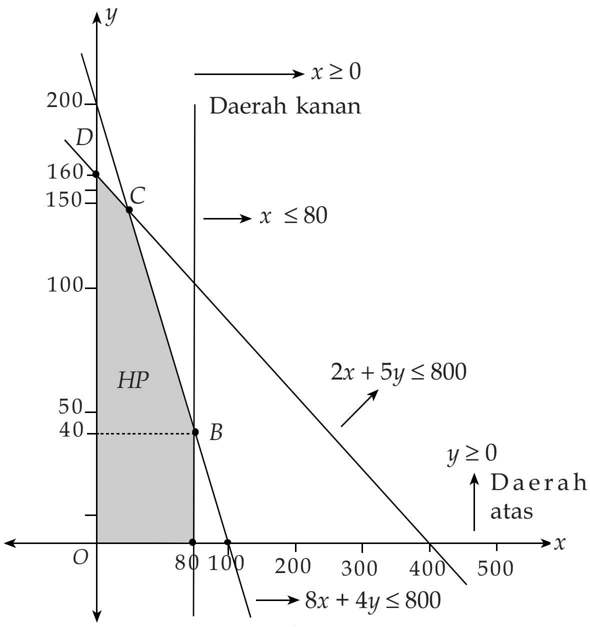
a. Gambarlah daerah penyelesaian dari kendala-kendala dalam masalah program linear tersebut.

b. Tentukan titik-titik pojok dari daerah penyelesaian itu.

c. Substitusikan koordinat setiap titik pojok itu ke dalam fungsi objektif.

d. Bandingkan nilai-nilai fungsi objektif tersebut. Nilai terbesar berarti menunjukkan nilai maksimum dari fungsi $f(x, y)$, sedangkan nilai terkecil berarti menunjukkan nilai minimum dari fungsi $f(x, y)$.

Sebagai contoh, kalian akan memaksimumkan keuntungan PT. Samba Lababan dari produksi ban dengan model matematika $f(x, y) = 40.000x + 30.000y$.



Gambar 2.4
Daerah penyelesaian yang memenuhi
$2x + 5y \le 800$; $8x + 4y \le 800$; $x \ge 0$, $y \ge 0$

Perhatikan daerah penyelesaian dari grafik pada gambar di atas.

a. Titik-titik pojoknya adalah titik *O*, *A*, *B*, *C*, dan *D*.

- Titik *O* adalah titik pusat koordinat. Jadi, titik $O(0,0)$.
- Titik *A* adalah titik potong antara garis $x = 80$ dan sumbu-x.
  Jadi, titik $A(80, 0)$.
- Titik *B* adalah titik potong antara garis $x = 80$ dan garis $8x + 4y = 800$.
  Substitusi $x = 80$ ke persamaan
  $$\begin{aligned} 8x + 4y &= 800 \\ 8 \cdot 80 + 4y &= 800 \\ y &= 40 \end{aligned}$$
  Jadi, titik $B(80, 40)$.
- Titik *C* adalah titik potong antara garis $8x + 4y = 800$ dan $2x + 5y = 800$.
  Dari $8x + 4y = 800$ didapat $y = 200 - 2x$.
  Substitusi nilai y ke persamaan $2x + 5y = 800$
  $$\begin{aligned} 2x + 5(200 - 2x) &= 800 \\ 2x + 1000 - 10x &= 800 \\ -8x &= -200 \\ x &= 25 \end{aligned}$$
  Substitusi $x = 25$ ke persamaan
  $$\begin{aligned} y &= 200 - 2x \\ y &= 200 - 2 \cdot 25 \\ y &= 150 \end{aligned}$$
  Jadi, titik $C(25, 150)$.
- Titik *D* adalah titik potong antara garis $2x + 5y = 800$ dan sumbu-y.
  Substitusi $x = 0$ ke persamaan
  $$\begin{aligned} 2x + 5y &= 800 \\ 2 \cdot 0 + 5y &= 800 \\ 5y &= 800 \\ y &= 160 \end{aligned}$$
  Jadi, titik $D(0, 160)$.

b. Uji titik-titik pojok ke fungsi objektif $f(x, y) = 40.000x + 30.000y$, sehingga fungsi objektif ini maksimum.

Titik Pojok (x, y)	$f(x, y) = 40.000x + 30.000y$
$A(80, 0)$	3.200.000
$B(80, 40)$	4.400.000
$C(25, 150)$	5.500.000
$D(0, 160)$	4.800.000

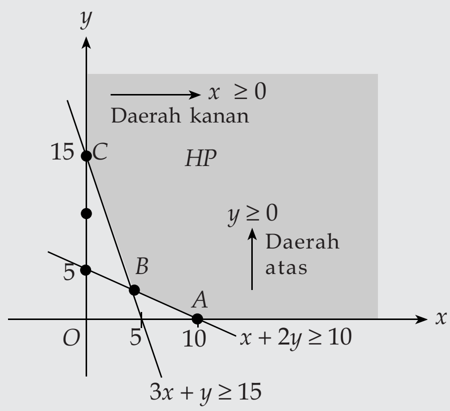
Dari tabel tersebut dapat diperoleh nilai maksimum fungsi objektif $f(x, y) = 40.000x + 30.000y$ adalah $f(25, 150) = 5.500.000$.
Jadi, PT. Samba Lababan harus memproduksi 25 ban motor dan 150 ban sepeda untuk memperoleh keuntungan maksimum.

Untuk menentukan nilai minimum dilakukan langkah yang sama. Lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh

Tentukan nilai minimum fungsi objektif $f(x, y) = 2x + 10y$ yang memenuhi $x + 2y \geq 10$, $3x + y \geq 15$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$.

Jawab:



a. Titik-titik pojoknya adalah titik A, B, dan C.

- Titik A adalah titik potong garis $x + 2y = 10$ dengan sumbu-x.
  Substitusi $y = 0$ ke persamaan $x + 2y = 10$.
  $$x + 2y = 10$$
  $$x + 2 \cdot 0 = 10$$
  $$x = 10$$
  Jadi, titik $A(0, 10)$.

- Titik B adalah titik potong garis $x + 2y = 10$ dengan garis $3x + y = 15$
  Dari $x + 2y = 10$ diperoleh $x = 10 - 2y$.
  Substitusi nilai x ke persamaan $3x + y = 15$
  $$3x + y = 15$$
  $$3(10 - 2y) + y = 15$$
  $$30 - 6y + y = 15$$
  $$30 - 5y = 15$$
  $$5y = 30 - 15$$
  $$5y = 15 \Leftrightarrow y = 3$$

Substitusi nilai $y = 3$ ke persamaan $x = 10 - 2y$

$$\begin{aligned} x &= 10 - 2y \\ &= 10 - 2 \cdot 3 \\ &= 10 - 6 = 4 \end{aligned}$$

Jadi, titik $B(4, 3)$.

- Titik C adalah titik potong garis $3x + y = 15$ dengan sumbu-y.
  Substitusi $x = 0$ ke persamaan $3x + y = 15$.
  $$\begin{aligned} 3x + y &= 15 \\ 3 \cdot 0 + y &= 15 \\ y &= 15 \end{aligned}$$
  Jadi, titik $C(0, 15)$.

b. Uji titik-titik pojok.

Titik Pojok (x, y)	**$f(x, y) = 2x + 10y$**
$A(10, 0)$	20
$B(4, 3)$	38
$C(0, 15)$	150

Dari tabel diperoleh nilai minimum fungsi objektif $f(x, y) = 2x + 10y$ adalah $f(10, 0) = 20$.

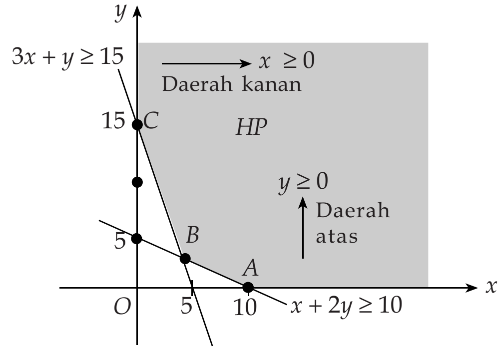
C. 2. Metode Garis Selidik

Untuk menentukan nilai optimum fungsi objektif dengan menggunakan metode garis selidik, lakukanlah langkah-langkah berikut.

a. Tentukan garis selidik, yaitu garis-garis yang sejajar dengan garis $ax + by = k$, $a > 0$, $b > 0$, dan $k \in R$.

b. Gambarkan garis selidik-garis selidik tersebut pada koordinat Cartesius!

c. Untuk menentukan **nilai maksimum fungsi tujuan** maka carilah garis selidik yang **jaraknya terbesar** terhadap titik pusat $O(0, 0)$ dan berada pada daerah penyelesaian. Sedangkan untuk menentukan **nilai minimum fungsi tujuan** maka carilah garis selidik yang **jaraknya terkecil** terhadap titik pusat $O(0, 0)$ dan berada pada daerah penyelesaian. Sebagai contoh, grafik berikut ini adalah produksi ban PT. Samba Lababan.

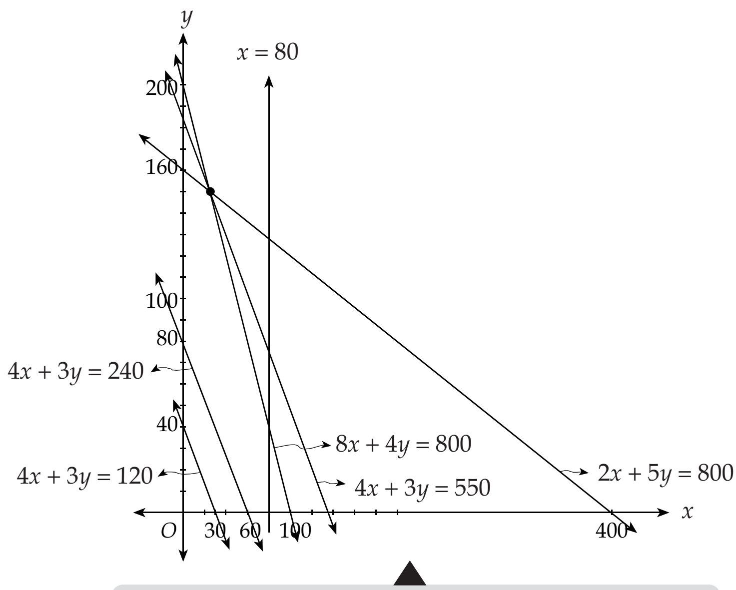


Gambar 2.5
Daerah penyelesaian yang memenuhi $x + 2y \geq 10$; $3x + y \geq 15$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

Garis selidik dari fungsi objektif $f(x, y) = 40.000x + 30.000y$ adalah $4x + 3y = k$.

Ambil $k = 120$, didapat garis selidik $4x + 3y = 120$.
Ambil $k = 240$, didapat garis selidik $4x + 3y = 240$.
Ambil $k = 550$, didapat garis selidik $4x + 3y = 550$.

Gambarkan garis-garis selidik ini sehingga kamu dapat menentukan nilai maksimum fungsi objektif $f(x, y) = 40.000x + 30.000y$.



Gambar 2.6
Garis-garis selidik yang memenuhi $2x + 5y = 800$; $4x + 3y = 550$; $8x + 4y = 800$; $4x + 3y = 240$; $4x + 3y = 120$

Perhatikan bahwa garis selidik yang menyebabkan fungsi objektif maksimum adalah $4x + 3y = 550$.

Dengan mengalikan kedua ruas persamaan garis selidik dengan 10.000, kamu mendapatkan nilai maksimum fungsi objektif sebagai berikut.

$$10.000(4x + 3y) = 10.000(550)$$
$$40.000x + 30.000y = 5.500.000$$

Jadi, nilai maksimum fungsi objektif $f(x, y) = 40.000x + 30.000y$ adalah 5.500.000.

Dari gambar di atas tampak bahwa garis selidik $4x + 3y = 550$ melalui titik $C(25, 150)$. Ini berarti, fungsi objektif $f(x, y) = 40.000x + 30.000y$ mencapai maksimum pada titik $C(25, 150)$.
Jadi, PT. Samba Lababan harus memproduksi 25 ban motor dan 150 ban sepeda untuk memperoleh keuntungan maksimum Rp5.500.000,00.

Asah Kompetensi 2

1. Gambarkan daerah penyelesaian dari setiap sistem pertidaksamaan berikut ini. Kemudian, tentukanlah nilai maksimum dan minimum dari fungsi tujuannya dengan metode uji titik pojok dan metode garis selidik!

   a. $4x + 2y \leq 60$
   $2x + 4y \leq 48$
   $x \geq 0, y \geq 0$
   Fungsi tujuannya $f(x, y) = 8x + 6y$

   b. $3y + 5x - 11 \leq 0$
   $-5x - 3y \geq 9$
   $x \geq 0, y \geq 0$
   Fungsi tujuannya $f(x, y) = 75x + 45y$

c. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2} \le 4$

$2x + 3y \le 4$

$x \ge 0, y \ge 0$

Fungsi tujuannya $f(x, y) = 7x - 6y$

d. $\frac{x+y}{3} \ge 3$

$3x + 3y - 27 \ge 0$

$x \ge 0, y \ge 0$

Fungsi tujuannya $f(x, y) = 60x - 60y$

e. $3x + 2y \le 8$

$3x + 2y \ge 2$

$4x - y \le -12$

$4x - y \ge -6$

$x \ge 0, y \ge 0$

Fungsi tujuannya $f(x, y) = -2x + 5y$

2. Sebuah pesawat udara mempunyai 48 buah tempat duduk yang terbagi dalam dua kelas, yaitu kelas A dan kelas B. Setiap penumpang kelas A diberi hak membawa barang seberat 60 kg, sedang penumpang kelas B hanya 20 kg, tempat bagasi paling banyak dapat memuat 1.440 kg. Bila banyaknya penumpang kelas A = x orang, sedang kelas B = y orang, maka:

a. buatlah model matematika dari permasalahan tersebut!

b. gambarkan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan tersebut!

2 Asah Kemampuan

Waktu : 60 menit

1. Dengan modal Rp450.000, Pak Jeri membeli pepaya seharga Rp1.000,00 dan jeruk seharga Rp3.500,00 per kilogram. Buah-buahan ini dijualnya kembali dengan menggunakan gerobak yang dapat memuat maksimum 300 kg. Jika keuntungan dari penjualan pepaya Rp500,00 per kilogram dan dari penjualan jeruk Rp1.000,00 per kilogram, tentukanlah keuntungan maksimum yang diperoleh Pak Jeri!

Sumber: member.at.infoseek.co.jp

Bobot soal: 20

2. PT. Ketok Magic akan memproduksi dua jenis sepatu, yaitu sepatu sepakbola dan sepatu kets. Sepatu sepakbola akan dijual Rp500.000,00 sepasang dan sepatu kets akan dijual Rp250.000,00 sepasang. Dari penjualan kedua jenis sepatu ini, direncanakan akan diperoleh keuntungan Rp100.000,00 dari sepasang sepatu sepakbola dan Rp50.000 dari sepasang sepatu kets. Jika kapasitas produksi sebulan 17.000 pasang sepatu dan modal yang disediakan 15 milyar rupiah, tentukanlah keuntungan maksimal yang mungkin didapat PT. Ketok Magic!

Sumber: www.mzxshoes.com

Bobot soal: 20

3. Ling ling membeli 120 ton beras untuk dijual lagi. Ia menyewa dua jenis truk untuk mengangkut beras tersebut. Truk jenis a memiliki kapasitas 6 ton dan truk jenis b memiliki kapasitas 4 ton. Sewa tiap truk jenis a adalah Rp100.000,00 sekali jalan dan truk jenis b adalah Rp50.000,00 sekali jalan. Maka Ling ling menyewa truk itu sekurang-kurangnya 48 buah. Berapa banyak jenis truk a dan b yang harus disewa agar biaya yang dikeluarkan minimum?

Sumber: lh3.google.com

Bobot soal: 20

4. Robi Sigara adalah pedagang asongan yang menjual dua jenis rokok, yaitu rokok kretek dan rokok filter. Rokok kretek dibeli dari agen Rp4.000,00 dan dijual Rp4.500,00 per bungkus. Rokok filter dibeli Rp4.750,00 dan dijual Rp5.500,00 per bungkus. Di kantongnya terdapat uang Rp240.000,00 dan ia bermaksud membeli kedua jenis rokok tersebut. Namun karena keterbatasan tempat, ia tidak mau membeli lebih dari 150 bungkus. Jika kedua jenis rokok tersebut diperkirakan akan laku semuanya, tentukanlah:
   a. fungsi tujuannya
   b. kendalanya dalam bentuk suatu sistem pertidaksamaan dan gambarkanlah daerah penyelesaiannya
   c. titik-titik pojok dari daerah penyelesaian tersebut.
   d. nilai fungsi tujuan dari setiap titik pojok tersebut.
   e. keuntungan maksimum yang dapat diperoleh dari penjualan kedua jenis rokok tersebut dan berapa bungkus rokok kretek dan rokok filter yang harus dibeli Robi Sigara untuk memperoleh keuntungan maksimum itu?

Sumber: member.at.infoseek.co.jp

Bobot soal: 40

Info Math

Pada mulanya program linear ini dikembangkan pada tahun 1940 oleh John Van Neumam, George B. Dantzig, dan para mitranya. Mula-mula digunakan oleh Marsekal Wood pada angkatan udara Amerika Serikat (USAF).

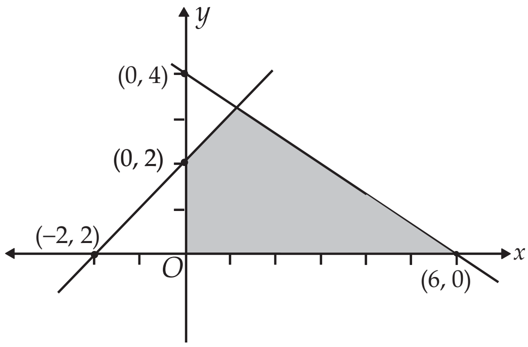
Rangkuman

1. Bentuk umum pertidaksamaan linear dengan dua variabel adalah
   - $ax + by \geq e$
   - $cx + dy \leq f$
2. Daerah yang merupakan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan disebut daerah layak.
3. Nilai optimum fungsi objektif (himpunan penyelesaian) dapat ditentukan dengan menggunakan nilai metode, yaitu:
   - metode uji titik pojok
   - metode garis selidik

Ulangan Bab 2

I. *Pilihlah jawaban yang paling tepat!*

1. Daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini menunjukan himpunan titik (x, y). Batas-batas yang memenuhi adalah . . . .



A. $x \geq 0, y \geq 0, 2x + 3y \leq 12, -x + y \geq 2$

B. $x \geq 0, y \geq 0, 2x + 3y \geq 12, -x + y \geq 2$

C. $x \geq 0, y \geq 0, 2x + 3y \leq 12, -x + y \leq 2$

D. $x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y \leq 12, -x + y \leq 2$

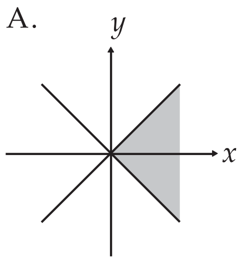
E. $x \geq 0, y \geq 0, 3x - 2y \leq 12, -x + y \geq 2$

2. Daerah yang layak memenuhi
$4x + y \geq 4$
$2x + 3y \geq 6$
$3x + 3y \leq 12$
$x, y \geq 0$
berbentuk . . . .

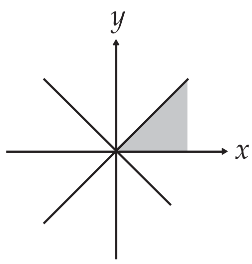
A. segitiga
B. segi empat
C. segi lima
D. persegi panjang
E. segi enam

3. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan
$(x + y)(x - y) \geq 0$
adalah . . . .

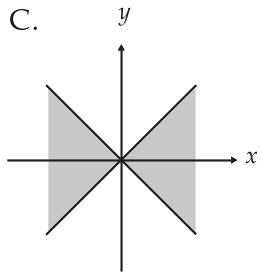
A.



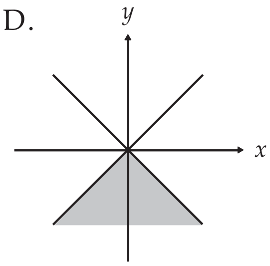
B.



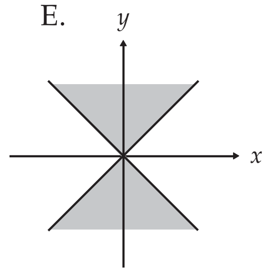
C.



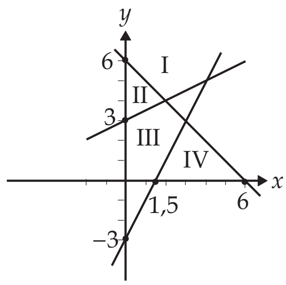
D.



E.

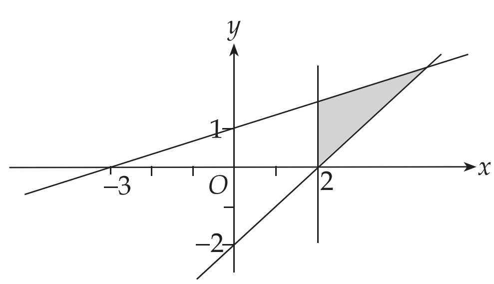


4. Daerah yang memenuhi pertidaksamaan
$x + y > 6$
$2x - y < 3$
$x - 2y + 6 < 0$
adalah . . . .



A. I
B. II
C. III
D. IV
E. III dan IV

5. Jika daerah yang diarsir pada diagram di bawah ini merupakan daaerah penyelesaian dengan fungsi objektif $f(x, y) = x - y$, maka nilai maksimum $f(x, y)$ adalah . . . .



A. $f(2, 0)$ D. $f(3, 2)$

B. $f\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$ E. $f(2, 1)$

C. $f\left(2, \frac{5}{3}\right)$

6. Jika $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \leq 6$, dan $x + 2y \leq 6$, maka fungsi $Q = x + y$ mempunyai nilai maksimum . . . .

A. 6 D. 3
B. 5 E. 2
C. 4

7. Nilai maksimum fungsi objektif $z = 8x + 6y$, dengan syarat
$4x + 2y \leq 60$
$2x + 4y \leq 48$
$x \geq 0$
$y \geq 0$
adalah . . . .

A. 132 D. 144
B. 134 E. 164
C. 136

8. Nilai maksimum dari $x + y - 6$ yang memenuhi $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + 8y \leq 340$, dan $7x + 4y \leq 280$ adalah . . . .

A. 52 D. 49
B. 51 E. 25
C. 50

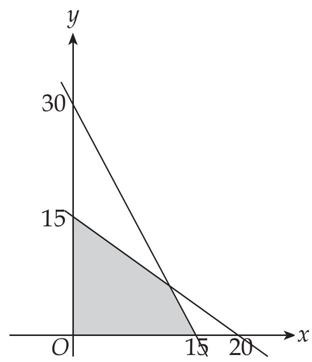
9. Nilai maksimum dari $z = 3x + 6y$ yang memenuhi $4x + y \geq 20$, $x + y \leq 20$, $x + y \geq 10$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ adalah . . . .

A. 180 D. 60
B. 150 E. 50
C. 120

10. Nilai minimum fungsi objektif
$f(x, y) = 20.000x + 10.000\ y$ yang memenuhi
$x + 2y \geq 10$
$3x + y \geq 15$
$x, y \geq 0$
adalah . . . .

A. 0 D. 110.000
B. 30.000 E. 150.000
C. 140.000

11. Daerah yang diarsir pada gambar tersebut ini adalah himpunan semua (x, y) yang



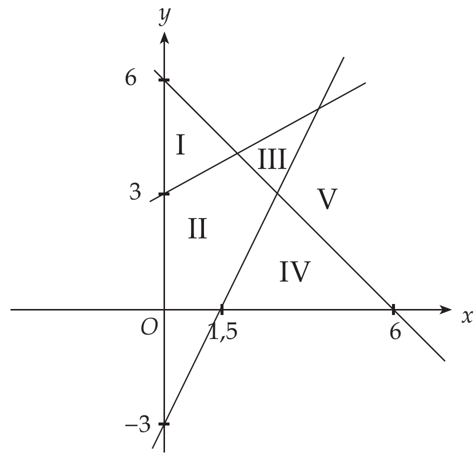
memenuhi . . . .

A. $2x + y \leq 30$, $3x + 4y \leq 60$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
B. $2x + y \geq 30$, $3x + 4y \geq 60$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
C. $x + 2y \geq 30$, $4x + 3y \geq 60$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
D. $x + 2y \leq 30$, $4x + 3y \leq 60$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
E. $2x + y \geq 30$, $4x + 3y \leq 60$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

12. Himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan
$2x + y \leq 40$, $x + 2y \leq 40$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ terletak pada daerah yang berbentuk . . . .

A. persegi panjang D. segi lima
B. segitiga E. trapesium
C. segi empat

13.



Daerah yang memenuhi penyelesaian dari
$x + y > 6$
$2x - y < 3$
$x - 2y + 6 < 0$
adalah . . . .

A. I D. IV
B. II E. V
C. III

14. Nilai maksimum fungsi tujuan $z = 8x + y$ dengan syarat
$4x + 2y \leq 60$
$2x + 4y \leq 48$
$x \leq 0$, $y \geq 0$
adalah . . . .

A. 120
B. 108
C. 102
D. 64
E. 12

15. Untuk (x, y) yang memenuhi $4x + y \geq 4$, $2x + 3y \geq 6$ dan $4x + 3y \leq 12$, nilai minimum untuk $f = x + y$ adalah . . . .

A. $1\frac{4}{5}$
B. $2\frac{1}{5}$
C. $2\frac{3}{5}$
D. $2\frac{4}{5}$
E. $3\frac{1}{5}$

II. Jawablah pertanyaan berikut dengan jelas dan tepat!

1. Wingki akan mendaftar ke sekolah favorit. Syarat untuk masuk ke sekolah tersebut adalah nilai Bahasa Indonesia tidak boleh kurang dari 6 dan nilai Matematika tidak boleh kurang dari 7, sedangkan jumlah nilai Bahasa Indonesia dan Matematika tidak boleh kurang dari 12. Wingki mendapat nilai dengan jumlah tiga kali nilai Bahasa Indonesia dan empat setengah kali nilai Matematika sama dengan 45. Apakah Wingki diterima di sekolah favorit tersebut?

2. Harga permen A Rp2.000,00 per bungkus dijual dengan keuntungan Rp200,00 per bungkus. Harga permen B Rp3.000,00 per bungkus dijual dengan keuntungan Rp300,00 per bungkus. Seorang pedagang mempunyai modal Rp900.000,00 dan kiosnya mampu menampung 500 bungkus permen. Berapa banyak permen A dan permen B untuk memperoleh keuntungan maksimum? Gambarkanlah dengan layaknya!

3. Seorang pemilik toko sepatu ingin mengisi tokonya dengan sepatu laki-laki paling sedikit 100 pasang dan sepatu wanita paling sedikit 150 pasang. Toko tersebut dapat memuat 460 pasang sepatu. Keuntungan setiap pasang sepatu laki-laki Rp10.000,00 dan setiap pasang sepatu wanita Rp5.000,00. Jika banyak sepatu laki-laki tidak boleh melebihi 150 pasang, tentukanlah keuntungan maksimum yang diperoleh pemilik toko!

4. Untuk membuat satu cetak roti A dipergunakan 50 gram mentega dan 60 gram tepung. Untuk membuat satu cetak roti B diperlukan 100 gram mentega dan 20 gram tepung. Jika tersedia 3,5 kg mentega dan 2,2 kg tepung, tentukanlah jumlah kedua roti terbanyak yang dapat dibuat!

5. Suatu proyek pembangunan gedung sekolah dapat diselesaikan dalam x hari dengan biaya proyek per hari $(3x - 3.600 + 120/x)$ ratus ribu rupiah. Agar biaya proyek minimum, berapa lamakah proyek tersebut diselesaikan?

BAB

3

Matriks

A. Pengertian Matriks

B. Operasi Hitung pada Matriks

C. Determinan dan Invers Matriks

D. Penerapan Matriks dalam Sistem Persamaan Linear

Sumber: www.smanela-bali.net

Pernahkah kalian mengamati denah tempat duduk di kelas? Berdasarkan denah tersebut, pada baris dan kolom berapakah kalian berada? Siapa sajakah yang duduk pada baris pertama? Dengan menggunakan matriks, kalian dapat meringkas penyajian denah tersebut sehingga dengan mudah diketahui letak tempat duduk dan teman-teman kalian. Dalam matriks, letak tempat duduk tersebut dinyatakan sebagai elemen-elemen matriks. Agar kalian lebih memahami tentang matriks ini, pelajarilah bab berikut.

A. Pengertian Matriks

Sumber: Koleksi Penerbit

Pada 17 April 2003, Universitas Pendidikan Literatur Indonesia (UPLI), mewisuda 2.630 mahasiswanya. 209 wisudawan di antaranya adalah wisudawan dari Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FPMIPA). Berikut ini data wisudawan FPMIPA UPLI pada April 2003 tersebut.

Jurusan	**Banyak Wisudawan**	
	Program Kependidikan	**Program Non Kependidikan**
Matematika	34	8
Fisika	34	6
Biologi	51	12
Kimia	51	13

Dengan menghilangkan judul baris dan judul kolomnya, penulisan data tersebut dapat diringkas sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 34 & 8 \\ 34 & 6 \\ 51 & 12 \\ 51 & 13 \end{pmatrix}$$

Perhatikan susunan kumpulan bilangan di atas. Susunan kumpulan bilangan di atas berbentuk persegi panjang dan dinyatakan dalam baris dan kolom. Susunan suatu kumpulan bilangan dalam bentuk persegi panjang yang diatur menurut baris dan kolom dengan menggunakan kurung biasa/siku ini disebut *matriks.*

Sebuah matriks dapat diberi nama menggunakan huruf kapital, seperti A, B, C, dan seterusnya. Misalnya nama matriks di atas adalah matriks A.

$$A_{4\times 2} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 34 & 8 \\ 34 & 6 \\ 51 & 12 \\ 51 & 13 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Baris pertama} \\ \longrightarrow \text{Baris kedua} \\ \longrightarrow \text{Baris ketiga} \\ \longrightarrow \text{Baris keempat} \end{array} \end{array}$$

Kolom pertama
Kolom kedua

Matriks A terdiri atas 4 baris dan 2 kolom. Oleh karena itu, matriks A dikatakan berordo 4×2. Adapun bilangan-bilangan yang terdapat dalam matriks dinamakan *elemen matriks*. Pada matriks A tersebut, kita dapat menuliskan elemen-elemennya sebagai berikut.

- Elemen-elemen pada baris pertama adalah 34 dan 8.
- Elemen-elemen pada baris kedua adalah 34 dan 6.
- Elemen-elemen pada baris ketiga adalah 51 dan 12.
- Elemen-elemen pada baris keempat adalah 51 dan 13.

- Elemen-elemen pada kolom pertama adalah 34, 34, 51, dan 51.
- Elemen-elemen pada kolom kedua adalah 8, 6, 12, dan 13.

Uraian ini menggambarkan definisi berikut.

> *Matriks* adalah susunan bilangan-bilangan dalam baris dan kolom yang berbentuk persegi panjang.
> *Baris sebuah matriks* adalah susunan bilangan-bilangan yang mendatar dalam matriks.
> *Kolom sebuah matriks* adalah susunan bilangan-bilangan yang tegak dalam matriks.

Secara umum, matriks berordo $i \times j$ dengan i dan j bilangan asli dapat ditulis sebagai berikut.

$$A_{i\times j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Baris pertama} \\ \longrightarrow \text{Baris kedua} \\ \\ \\ \longrightarrow \text{Baris ke-}i \end{array}$$

$\longrightarrow$ Kolom pertama

$\longrightarrow$ Kolom kedua

$\longrightarrow$ Kolom ke-j

Beberapa jenis matriks berdasarkan ordo dan elemen-elemen matriks adalah sebagai berikut.

1. *Matriks baris* adalah matriks yang terdiri dari satu baris.
   Misalnya: $P = [-5 \quad 2]$, $Q = [10 \quad 9 \quad 8]$
2. *Matriks kolom* adalah matriks yang terdiri dari satu kolom.
   Misalnya:
   $$R = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
3. *Matriks persegi* adalah matriks yang banyak baris sama dengan banyak kolom.
   Misalnya:
   $$T = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$
4. *Matriks nol* adalah matriks yang semua elemennya nol.
   Misalnya:
   $$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. *Matriks identitas* adalah matriks yang elemen-elemen diagonal utamanya sama dengan 1, sedangkan elemen-elemen lainnya sama dengan 0.
Misalnya:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. *Matriks Skalar* adalah matriks yang elemen-elemen diagonal utamanya sama, sedangkan elemen di luar elemen diagonalnya bernilai nol.
Misalnya:

$$K = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. *Matriks diagonal* adalah matriks persegi yang elemen di luar diagonal utamanya bernilai nol.
Misalnya:

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

8. *Matriks segitiga atas* adalah matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol.
Misalnya:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad T = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

9. *Matriks segitiga bawah* adalah matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol.
Misalnya:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

10. *Transpos matriks A* atau (A^t) adalah sebuah matriks yang disusun dengan cara menuliskan baris ke-i matriks A menjadi kolom ke-i dan sebaliknya, menuliskan kolom ke-j matriks A menjadi baris ke-j.
Misalnya:

$$\text{Jika } W = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{maka } W^t = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Beberapa sifat matriks adalah sebagai berikut.

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$
2. $(A^t)^t = A$
3. $(cA)^t = cA^t$, c adalah konstanta
4. $(AB)^t = B^tA^t$

Asah Kompetensi 1

1. Berikut ini adalah data hasil panen Bu Bariah salama 4 bulan (dalam ton).

Hasil panen	Bulan pertama	Bulan kedua	Bulan ketiga	Bulan keempat
Mangga	1	2	3	3
Pisang	5	3	2	4
Jambu	10	8	12	6

Tentukanlah:

a. bentuk matriks dari data di atas
b. banyaknya baris dan kolom pada matriks yang anda peroleh
c. elemen-elemen pada baris pertama
d. elemen-elemen pada baris ketiga
e. elemen-elemen pada kolom pertama
f. elemen-elemen pada kolom ketiga
g. elemen-elemen pada baris ketiga kolom keempat

2. Diketahui matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah:

a. banyaknya baris dan kolom
b. elemen-elemen pada setiap baris
c. elemen-elemen pada setiap kolom
d. letak elemen-elemen berikut
(i) -2 (iii) 4
(ii) -3 (iv) 5

3. Sebutkanlah jenis dari setiap matriks berikut ini!

a. $K = (2 \quad 5 \quad -3)$ b. $M = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ c. $O = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

d. $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ e. $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ f. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Tentukanlah transpos dari setiap matriks berikut!

a. $P = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ c. $R = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 7 \\ 5 & -6 & -1 \\ -3 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

b. $Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ d. $S = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 7 & -6 \\ 5 & -4 & 3 & 2 \\ 10 & -8 & 6 & 4 \\ -2 & 16 & 14 & -12 \end{pmatrix}$

Asah Kemampuan 1

Waktu : 60 menit

Bobot soal: 30

1. Perhatikan tabel jarak antardua kota dalam satuan kilometer berikut!

	Bandung	Jakarta	Bogor	Tasikmalaya	Sukabumi	Surabaya
Bandung	0	180	126	106	96	675
Jakarta	180	0	54	275	115	793
Bogor	126	54	0	232	61	801
Tasikmalaya	106	275	232	0	202	649
Sukabumi	96	115	61	202	0	771
Surabaya	675	793	801	649	771	0

a. Dengan menghilangkan judul baris dan judul kolomnya, tuliskanlah matriks yang kita peroleh!
b. Tentukanlah ordo matriks!
c. Tuliskanlah elemen-elemen pada setiap baris matriks!
d. Tuliskanlah elemen-elemen pada setiap kolom matriks!
e. Tentukanlah transpos dari matriks tersebut. Samakah matriks tersebut dengan matriks transposnya? Mengapa demikian?

2. Berikan contoh dari setiap matriks berikut!

Bobot soal: 30

a. Matriks berordo 2×7
b. Matriks berordo 7×2
c. Matriks berordo 5×5
d. Matriks berordo 1×4
e. Matriks berordo 4×1
f. Matriks identitas berordo 5×5
g. Transpos matriks identitas berordo 5×5

3. Tentukanlah x, jika $A^t = B$.

Bobot soal: 40

a. $A = \begin{pmatrix} -2 & x-2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ \frac{1}{2} & -4 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 2 & p \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} x+p & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 40 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2p & 0 \\ 1 & -4x \end{pmatrix}$

d. $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 3p \\ x-2p & 0 \end{pmatrix}$

B. Operasi Hitung pada Matriks

B. 1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Niko Sentera dan Ucok mengikuti tes untuk membuat SIM C. Tes ini terdiri atas tes tertulis dan tes praktek. Hasil tes mereka ini tampak seperti pada tabel berikut.

Nama	Nilai Tes		Nilai Total
	Tertulis	Praktek	
Niko Sentera	4	4	8
Ucok	5	2	7

Penjumlahan tersebut dapat juga dilakukan dengan menggunakan matriks, yaitu sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4 \\ 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa kedua matriks yang dijumlahkan memiliki ordo yang sama. Hasil matriks yang diperoleh adalah matriks yang berordo sama, diperoleh dengan cara menjumlahkan elemen-elemen yang seletak.

Bagaimana dengan pengurangan matriks?
Pengurangan matriks juga dapat dilakukan jika ordo matriks yang akan dikurangkan sama. Hasil pengurangan matriks ini merupakan matriks yang berordo sama, diperoleh dengan cara mengurangkan elemen-elemen yang seletak.

Contoh

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \text{ dan } C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah:

a. $A + B$

b. $B + A$

c. $B + C$

d. $A - B$

e. $B - A$

f. $(A + B) + C$

g. $A + (B + C)$

Jawab:

a. $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1+(-3) & -2+4 \\ 4+(-2) & 2+1 \\ -1+3 & 1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Jadi, $A + B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

b. $B + A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -3+1 & 4+(-2) \\ -2+4 & 1+2 \\ 3+(-1) & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Jadi, $B + A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

c. $B + C = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -3+5 & 4+(-5) \\ -2+(-2) & 1+3 \\ 3+1 & 6+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Jadi, $B + C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

d. $A - B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1-(-3) & -2-4 \\ 4-(-2) & 2-1 \\ -1-3 & 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 6 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$

Jadi, $A - B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 6 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$.

e. $B - A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -3-1 & 4-(-2) \\ -2-4 & 1-2 \\ 3-(-1) & 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -6 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Jadi, $B - A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -6 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

f. $(A + B) + C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -2+5 & 2+(-5) \\ 2+(-2) & 3+3 \\ 2+1 & 7+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Jadi, $(A + B) + C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

g. $A + (B + C) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1+2 & -2+-1 \\ -2+(-1) & 2+4 \\ -1+4 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Jadi, $A + (B + C) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Asah Kompetensi 2

1. Diketahui matriks-matriks berikut.

$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Tentukanlah:

a. $A + B$

b. $B + A$

c. $(B + C)^t$

d. $(C + B)^t$

e. $(A - B)^t$

f. $B - C$

g. $A + B + C$

h. $(A - B) - C$

i. $A - (B - C)$

j. $A^t - (B - C)^t$

2. Diketahui matriks-matriks berikut.

$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, dan $F = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tentukanlah:

a. $(D + E) + F$
b. $(E + F) + D$
c. $(D - E) + F$
d. $D - (E + F)$
e. $D - (E - F)$
f. $D + (E - F)$
g. $(F + E) - D$
h. $(D - F) + E$
i. $D - (E + F)$
j. $(D + F) - E$

3. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   Tentukanlah $(A + C) - (A + B)$ **Proyek Perintis 1979**

4. Hitunglah:

$$\begin{pmatrix} 2a_1 & b_1 - 3 & c_1 + 2 \\ a_2 + 2 & b_2 + 4 & 2c_2 \\ 3a_3 & 2b_3 + 1 & c_3 - 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3a_1 - 1 & 2b_1 + 4 & c_1 + 1 \\ 3a_2 + 4 & b_2 - 3 & c_2 + 4 \\ 3 - a_3 & 1 - b_3 & 2c_3 \end{pmatrix}$$

5. Diketahui:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 4 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \text{ dan } R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   Jika mungkin, selesaikanlah operasi matriks berikut ini. Jika tidak, berikan alasannya!

   a. $(P + Q) - R$
   b. $(P - Q) + R$
   c. $P + (Q - R)$
   d. $P - (Q + R)$

B. 2. Perkalian Bilangan Real dengan Matriks

Setelah Kita mempelajari penjumlahan dua dan tiga matriks. Sekarang, lakukan penjumlahan matriks A berordo $i \times j$ secara berulang sebanyak n kali.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix}$$

maka:

$$A + A + \cdots + A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix}$$

$$nA = \begin{pmatrix} \underbrace{a_{11}+a_{11}+\cdots+a_{11}}_{n} & \underbrace{a_{12}+a_{12}+\cdots+a_{12}}_{n} & \cdots & \underbrace{a_{1j}+a_{1j}+\cdots+a_{1j}}_{n} \\ \underbrace{a_{21}+a_{21}+\cdots+a_{21}}_{n} & \underbrace{a_{22}+a_{22}+\cdots+a_{22}}_{n} & \cdots & \underbrace{a_{2j}+a_{2j}+\cdots+a_{2j}}_{n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \underbrace{a_{i1}+a_{i1}+\cdots+a_{i1}}_{n} & \underbrace{a_{i2}+a_{i2}+\cdots+a_{i2}}_{n} & \cdots & \underbrace{a_{ij}+a_{ij}+\cdots+a_{ij}}_{n} \end{pmatrix}$$

$$nA = \begin{pmatrix} na_{11} & na_{12} & \cdots & na_{1j} \\ na_{21} & na_{22} & \cdots & na_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ na_{i1} & na_{i2} & \cdots & na_{ij} \end{pmatrix}$$

Dari uraian ini, kita dapat menarik kesimpulan sebagai berikut.

Jika A sebuah matriks dan k bilangan real maka hasil kali kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing elemen matriks A dengan k.

Contoh

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah:

a. $A + A + A$

b. $3A$

c. $3B$

d. $-B$

e. $3A - B$

f. $2(3A)$

g. $(2 \cdot 3)A$

Jawab:

a. $A + A + A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 6 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$

Jadi, $A + A + A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 6 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$.

b. $3A = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 6 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$$

Jadi, $3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 6 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$.

c. $3B = 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 0 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot(-3) \\ 3\cdot 7 & 3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & -9 \\ 21 & 15 \end{pmatrix}$$

Jadi, $3B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & -9 \\ 21 & 15 \end{pmatrix}$.

d. $-B = (-1)B = (-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -1\cdot 0 & -1\cdot 1 \\ -1\cdot 2 & -1(-3) \\ -1\cdot 7 & -1\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$$

Jadi, $-B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$.

e. $3A - B = 3A + (-B)$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 6 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \\ -7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 9 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Jadi, $3A - B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 9 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

f. $2(3A) = 2\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 6 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 9 & 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot 12 & 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 18 & 12 \\ 24 & 6 \end{pmatrix}$

Jadi, $2(3A) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 18 & 12 \\ 24 & 6 \end{pmatrix}$.

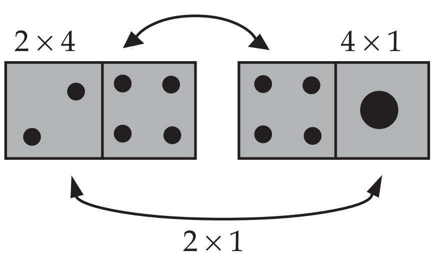
g. $(2 \cdot 3)A = 6A = 6\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 \cdot 2 & 6 \cdot 1 \\ 6 \cdot 3 & 6 \cdot 2 \\ 6 \cdot 4 & 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 18 & 12 \\ 24 & 6 \end{pmatrix}$

Jadi, $(2 \cdot 3)A = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 18 & 12 \\ 24 & 6 \end{pmatrix}$.

B. 3. Perkalian Dua Matriks

Pernahkah kita bermain domino? Bagaimanakah memasangkan kartu-kartu dalam permainan domino? Agar selembar kartu domino dapat dipasangkan dengan kartu domino yang lain, jumlah mata bagian kanan kartu tersebut harus sama dengan jumlah mata bagian kiri kartu pasangannya.



Prinsip pemasangan kartu domino ini dapat kita gunakan untuk memahami perkalian dua matriks, yaitu sebuah matriks A dapat dikalikan dengan matriks B jika banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris matriks B. Adapun elemen-elemen matriks hasil kali ini adalah jumlah dari hasil kali elemen-elemen pada baris matriks A dengan elemen-elemen pada kolom matriks B.

$$A_{m \times p} \times B_{p \times n} = C_{m \times n}$$

ordo hasil perkalian

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

Contoh

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \text{ dan } C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah:

a. AB

b. BA

c. AC

d. $AB + AC$

e. $A(B + C)$

Jawab:

a. $AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 1+4\cdot 7 & 3\cdot 2+4\cdot 8 \\ 6\cdot 1+5\cdot 7 & 6\cdot 2+5\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 38 \\ 41 & 52 \end{pmatrix}$$

Jadi, $AB = \begin{pmatrix} 31 & 38 \\ 41 & 52 \end{pmatrix}$.

b. $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 6 & 1\cdot 4+2\cdot 5 \\ 7\cdot 3+8\cdot 6 & 6\cdot 2+8\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 14 \\ 69 & 52 \end{pmatrix}$$

Jadi, $BA = \begin{pmatrix} 15 & 14 \\ 69 & 68 \end{pmatrix}$.

c. $AC = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3\cdot(-1)+4\cdot(-3) & 3\cdot(-2)+4\cdot(-4) \\ 6\cdot(-1)+5\cdot(-3) & 6\cdot(-2)+5\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -22 \\ -21 & -32 \end{pmatrix}$

Jadi, $AC = \begin{pmatrix} -15 & -22 \\ -21 & -32 \end{pmatrix}$.

d. $AB + AC = \begin{pmatrix} 31 & 38 \\ 41 & 52 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & -22 \\ -21 & -32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$

$AB + AC = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$

Jadi, $AB + AC = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$.

e. $A(B + C) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\right)$

$= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$

Jadi, $A(B + C) = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$.

Asah Kompetensi 3

1. Diketahui matriks-matriks berikut.

$K = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 11 & 30 \\ -4 & -11 \end{pmatrix}$, dan $M = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Tentukanlah:

a. KL
b. LK
c. KM
d. MK
e. $KL + KM$
f. $K(L + M)$
g. $LK + MK$
h. $(L + M)K$
i. $(KL)M$
j. $K(LM)$
k. $-4(KM)$
l. $(-4K)M$
m. $-4(M^tK^t)$
n. $((-4M^t)K^t)^t$
o. $(K(L + M))^t$
p. $((L + M)K)^t$

2. Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah matriks C yang memenuhi $3C - 2A = B$.

3. Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 \\ 2b & 3c \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 2c-3b & 2a+1 \\ a & b+7 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah nilai c agar $A = 2B^t$!

4. Tentukan nilai x yang menyebabkan perkalian matriks berikut menghasilkan matriks nol.

$$\begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

Contoh-contoh dan latihan yang telah Kita kerjakan menggambarkan sifat-sifat operasi hitung matriks.

Jika setiap matriks berikut dapat dioperasikan di mana a adalah konstanta, maka berlaku sifat-sifat berikut.

- $P + Q = Q + P$
- $(P + Q) + R = P + (Q + R)$
- $P(Q + R) = PQ + PR$
- $(P + Q)R = PR + QR$
- $P(Q - R) = PQ - PR$
- $(P - Q)R = PQ - QR$
- $a(P + Q) = aP + aQ$
- $a(P - Q) = aP - aQ$
- $(a + b)P = aP + bP$
- $(a - b)P = aP - bP$
- $(ab)P = a(bP)$
- $a(PQ) = (aP)Q = P(aQ)$
- $(PQ)R = P(QR)$

2 Asah Kemampuan

Waktu : 60 menit

1. Diketahui matriks-matriks berikut.

Bobot soal: 20

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ b & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ -c & d \end{pmatrix}, \text{ dan } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jika $A + B^t = C^2$, tentukan nilai d.

2. Tentukanlah nilai a dan b yang memenuhi persamaan-persamaan berikut!

Bobot soal: 20

a. $\begin{pmatrix} a & b \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -27 \\ 14 & -23 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2a+b & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 7 & 20 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -1 & d \\ -b & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 7b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2c & 1 \\ c & a+1 \end{pmatrix}$

3. Diketahui: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Bobot soal: 60

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

Tentukanlah $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Siapa Berani

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

1. Perlihatkan bahwa persamaan $AX = X$ dapat dinyatakan sebagai $(A - I)X = 0$. Kemudian, gunakan hasil ini untuk menentukan matriks X!

2. Dengan cara yang sama, tentukanlah matriks Y yang memenuhi $AY = 4Y$!

C. Determinan dan Invers Matriks

C. 1. Determinan

Suatu matriks persegi selalu dapat dikaitkan dengan suatu bilangan yang disebut *determinan*. Determinan dari matriks persegi A dinotasikan dengan $|A|$.

Untuk matriks A berordo 2×2, determinan matriks A didefinisikan sebagai berikut.

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka determinan matriks A adalah $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Adapun untuk matriks B berordo 3×3, determinan matriks B ini didefinisikan sebagai berikut menggunakan kaidah Sarrus.

Jika $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, maka determinan matriks B adalah

$$|B| = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Contoh

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -6 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Tentukanlah $|A|$ dan $|B|$.

Jawab:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-2)3 = 4 + 6 = 10$

Jadi, $|A| = 10$.

$$|B| = \left|\begin{matrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -6 \\ -3 & 4 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{matrix}$$

$= 2 \cdot 5 \cdot 1 + (-3)(-6)(-3) + 4 \cdot 1 \cdot 4 - 4 \cdot 5 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) \cdot 4 - (-3) \cdot 1 \cdot 1$

$= 10 - 54 + 16 + 60 + 48 + 3 = 83$

Jadi, $|B| = 83$.

Asah Kompetensi 4

1. Tentukanlah determinan dari setiap matriks berikut

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -3 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 8 & 16 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -10 & 17 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 12 \\ 22 & -1 & -6 \\ -10 & -7 & 14 \end{pmatrix},\ \text{dan } F = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Tentukanlah nilai x dari setiap persamaan berikut

a. $\begin{vmatrix} 2x & x+1 \\ 3 & x+5 \end{vmatrix} = 1$

b. $\begin{vmatrix} 2x & -3 \\ x-1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

c. $\begin{vmatrix} 6-x & 0 \\ 6 & 5-x \end{vmatrix} = 0$

d. $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} = -2$

e. $\begin{vmatrix} 2x-1 & -3 \\ -x & x+1 \end{vmatrix} = 3$

f. $\begin{vmatrix} -2x & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 6$

3. Diketahui matriks A dan B sebagai berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Buktikan bahwa $|AB| = |A||B|$.

Siapa Berani

Tanpa mengevaluasi determinan secara langsung, tunjukkan bahwa:

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\theta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\theta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\theta) \end{vmatrix} = 0$$

Sumber : *Elementary Linear Algebra*

C. 2. Invers Matriks

Matriks persegi A mempunyai invers, jika ada matriks B sedemikian hingga $AB = BA = I_{n \times n}$ dengan I matriks identitas. Pada persamaan $AB = BA = I_{n \times n}$, A dan B disebut *saling invers*. Berikut ini adalah syarat suatu matriks A mempunyai invers.

- Jika $|A| = 0$, maka matriks A tidak mempunyai invers. Oleh karena itu, dikatakan matriks A sebagai matriks singular.
- Jika $|A| \neq 0$, maka matriks A mempunyai invers. Oleh karena itu, dikatakan matriks A sebagai matriks nonsingular.

Contoh

Tunjukkan bahwa $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ saling invers!

Jawab:

Kita harus membuktikan bahwa $AB = BA = I_{2 \times 2}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa bentuk $AB = BA = I_{2 \times 2}$ sehingga dapat dikatakan bahwa A dan B saling invers.

Catatan

Sifat-sifat invers matrik:
1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Untuk matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ berordo 2×2 ini, kita dapat menentukan inversnya sebagai berikut.

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{Adj} A \\ &= \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Untuk menentukan invers suatu matriks dengan ordo 3×3, kalian harus memahami tentang matriks minor, kofaktor, dan adjoint.

a. *Matriks Minor*

Matriks minor M_{ij} diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j matriks A berordo 3×3, sehingga didapat matriks baru dengan ordo 2×2. Determinan dari matriks tersebut disebut minor dari determinan matriks A, ditulis dengan $|M_{ij}|$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Minor-minor dari matriks A adalah sebagai berikut.

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |M_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |M_{31}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |M_{32}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad |M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad |M_{33}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

b. *Kofaktor*

Kofaktor dari baris ke-i dan kolom ke-j dituliskan dengan A_{ij}. Untuk menentukannya ditentukan dengan rumus

$$A_{ij} = (-1)i + j\ |M_{ij}|$$

Kofaktor-kofaktor dari matriks A adalah sebagai berikut.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\ |M_{11}| = |M_{11}|$
$A_{12} = (-1)^{1+2}\ |M_{12}| = -|M_{12}|$
$A_{13} = (-1)^{1+3}\ |M_{13}| = |M_{13}|$
$A_{21} = (-1)^{2+1}\ |M_{21}| = -|M_{21}|$
$A_{22} = (-1)^{2+2}\ |M_{22}| = |M_{22}|$
$A_{23} = (-1)^{2+3}\ |M_{23}| = -|M_{23}|$
$A_{31} = (-1)^{3+1}\ |M_{31}| = |M_{31}|$
$A_{32} = (-1)^{3+2}\ |M_{32}| = -|M_{32}|$
$A_{33} = (-1)^{3+3}\ |M_{33}| = |M_{33}|$

c. *Adjoint*

Misalkan suatu matriks A berordo $n \times n$ dengan A_{ij} kofaktor dari matriks A, maka

$$\text{Adjoint}\,A\ (\text{Adj}\,A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix}$$

Untuk matriks A berordo 3×3, maka

$$\text{Adj}\,A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Contoh

Tentukan invers dari matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Jawab:

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 8 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

$$\begin{aligned} &= 40 + 6 + 0 - 15 - 0 - 32 \\ &= 46 - 47 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 0 = 40$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -(16 - 3) = -13$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 5 = -5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -(16 - 0) = -16$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 2) = 2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 15 = -9$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 6) = 3$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan determinan dari matriks berordo 3×3, selain dengan kaidah Sarrus, dapat juga digunakan matriks minor dan kofaktor.

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$

Determinan matriks A (det A) dapat ditentukan menggunakan rumus:

(i) $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

$= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$

$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

(ii) $|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$

$= -a_{21}|M_{21}| + a_{22}|M_{22}| - a_{23}|M_{23}|$

$= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

(iii) $|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$

$= a_{31}|M_{31}| - a_{32}|M_{32}| + a_{33}|M_{33}|$

$= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Contoh

Tentukan determinan dari matriks $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Jawab:

Untuk menentukan determinannya, dapat digunakan ketiga rumus yang telah dijelaskan di atas. Gunakan salah satu rumus tersebut.

$|B| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot (16 - 9) - 3 \cdot (4 - 3) + 3 \cdot (3 - 4)$

$= 7 - 3 - 3$

$= 1$

Asah Kompetensi 5

1. Tentukanlah invers dari setiap matriks berikut!

$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 14 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2(a-b)} & \dfrac{1}{2(a+b)} \\ \dfrac{1}{2(a-b)} & \dfrac{1}{2(a+b)} \end{pmatrix}$,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}, \text{ dan } E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Tentukanlah nilai x sehingga setiap matriks berikut singular!

$$A = \begin{pmatrix} x & 9 \\ 1 & 3x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & 9 \\ 4 & x \end{pmatrix}, \text{ dan } C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & x+2 & x \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Jika matriks $(A - kI)$ adalah matriks singular, tentukanlah nilai k!

4. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Jika $XA = B$, tentukanlah matriks X.

EBTANAS 1995

3 Asah Kemampuan

Waktu : 60 menit

1. Tentukanlah syarat agar matriks $\begin{pmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}$ tidak mempunyai invers.

Bobot soal: 10

2. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tunjukkan bahwa $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Bobot soal: 10

3. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Jika $|A^t| = k|A^t|$, tentukanlah nilai k.

EBTANAS 1997

Bobot soal: 50

4. Tunjukkan bahwa $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ habis dibagi 19.

Bobot soal: 30

Siapa Berani

Buktikan bahwa jika matriks B dapat bertukar tempat, maka $AB^{-1} = B^{-1}A$ jika dan hanya jika $AB = BA$.

Sumber: *Elementary Linear Algebra*

D. Penerapan Matriks dalam Sistem Persamaan Linear

Pada bab sebelumnya telah dibahas tentang penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan metode grafik, metode eliminasi, dan metode substitusi. Pada bab ini, kita akan menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut dengan menggunakan matriks.

Misalkan, sistem persamaan linear berikut.

$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

Sistem persamaan linear tersebut dapat kita tuliskan dalam persamaan matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Persamaan matriks ini dapat kita selesaikan dengan menggunakan sifat berikut.

1. Jika $AX = B$, maka $X = A^{-1}B$, dengan $|A| \neq 0$
2. Jika $XA = B$, maka $X = BA^{-1}$, dengan $|A| \neq 0$

Contoh

Tentukanlah penyelesaian sistem persamaan linear berikut!

$3x - 4y = 5$
$5x + 6y = 1$

Jawab:

Terlebih dahulu, ubah sistem persamaan linear tersebut menjadi persamaan matriks berikut.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Kemudian, tentukan determinan matriks A, yaitu :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - (-20) = 38$$

Penyelesaian sistem persamaan linear tersebut dapat kita tentukan dengan cara berikut.

$$A^{-1} = \frac{1}{38}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{X}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \frac{1}{38}\underset{A^{-1}}{\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}}\underset{B}{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{17}{19} \\ -\frac{11}{19} \end{pmatrix}$$

Jadi, $x = \frac{17}{19}$ dan $y = -\frac{11}{19}$.

Selain dengan cara di atas, sistem persamaan linear dapat juga diselesaikan dengan menggunakan aturan Cramer berikut.

Jika $AX = B$ maka $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$, $x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$, …, $x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$.

A_j adalah matriks yang didapat dengan mengganti elemen-elemen pada kolom-j dari matriks A dengan elemen-elemen matriks B.

Contoh

Tentukanlah penyelesaian sistem persamaan linear berikut dengan aturan Cramer!

$3x - 4y = 5$

$5x + 6y = 1$

Jawab:

Terlebih dahulu, tentukan $|A|$, $|A_1|$, dan $|A_2|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 38$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 34$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -22$$

Jadi, $x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{34}{38} = \frac{17}{19}$ dan $y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-22}{38} = -\frac{11}{19}$.

Dengan demikian, penyelesaian sistem persamaan linear tersebut adalah $x = \frac{17}{19}$ dan $y = -\frac{11}{19}$.

Asah Kemampuan 4

Waktu : 60 menit

1. Tentukanlah penyelesaian sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan invers matriks dan aturan Cramer. **Bobot soal: 40**

   a. $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3y - 4x + 12 = 0 \end{cases}$

   c. $\begin{cases} 3y - 2x = 6 \\ x = 3 \end{cases}$

   d. $\begin{cases} y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$

   e. $\begin{cases} 3y - 7 + x = 0 \\ x = -6y - 14 \end{cases}$

   f. $\begin{cases} x = 5 \\ 9 - x = 0 \end{cases}$

   g. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$

   h. $\begin{cases} x - 1 = 2(y - 1) \\ x + y = 5(x - y + 3) \end{cases}$

2. Tentukanlah penyelesaian sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan invers matriks dan aturan Cramer. **Bobot soal: 60**

   a. $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5 = 0 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} x + z = 1 \\ 2y - z = -1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

   c. $\begin{cases} x - z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \\ -y + 2z = 4 \end{cases}$

   d. $\begin{cases} x + y + 2x = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$

   e. $\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases}$

   f. $\begin{cases} -x + 2y + 3z = 2 \\ -x + 5y + z = 9 \\ 3x - 6y - 9z + 6 = 0 \end{cases}$

Rangkuman

1. Matriks adalah susunan suatu kumpulan bilangan dalam bentuk persegi panjang yang diatur menurut baris dan kolom.
2. Baris suatu matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang mendatar dalam matriks.
3. Kolom suatu matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang tegak dalam matriks.
4. Jenis-jenis matriks berdasarkan ordo dan elemen-elemen matriks
   - Matriks baris, yaitu matriks yang terdiri dari satu baris.
   - Matriks kolom, yaitu matriks yang terdiri dari satu kolom.
   - Matriks persegi, yaitu matriks yang banyak barisnya sama dengan banyak kolomnya.
   - Matriks nol, yaitu matriks yang semua elemennya nol.
   - Matriks identitas, yaitu matriks yang elemen-elemen diagonal utamanya sama dengan 1, sedangkan elemen-elemen lainnya sama dengan 0.
   - Matriks skalar, yaitu matriks yang elemen-elemen diagonal utamanya sama, sedangkan elemen di luar elemen diagonalnya bernilai nol.
   - Matriks diagonal, yaitu matriks persegi yang elemen di luar elemen diagonalnya bernilai nol.
   - Matriks segitiga atas, yaitu matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol.
   - Matriks segitiga bawah, yaitu matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol.
5. Matriks A transpos (A^t) adalah sebuah matriks yang disusun dengan cara menuliskan baris ke-i matriks A menjadi kolom ke–i dan sebaliknya.
   Beberapa sifat matriks adalah sebagai berikut.
   a. $(A + B)^t = A^t + B^t$
   b. $(A^t)^t = A$
   c. $(cA)^t = cA^t$, c adalah konstanta
   d. $(AB)^t = B^tA^t$
6. Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka determinan matriks A adalah:

   $$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

7. Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka invers matriks A adalah:

   $$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ulangan Bab 3

I. Pilihlah jawaban yang paling tepat!

1. Jika $\begin{pmatrix} x-5 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -16 & 5 \end{pmatrix}$, maka . . . .

A. $y = 3x$ D. $y = \dfrac{x}{3}$

B. $y = 2x$ E. $y = \dfrac{1}{2}x$

C. $y = x$

2. Invers dari matriks $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2(a-b)} & \dfrac{1}{2(a+b)} \\ \dfrac{-1}{2(a-b)} & \dfrac{1}{2(a+b)} \end{pmatrix}$ adalah . . . .

A. $\begin{pmatrix} a-b & a-b \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} a-b & -a+b \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} a-b & -a+b \\ -a-b & a+b \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a+b & a-b \end{pmatrix}$

3. Jika $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 24 \end{pmatrix}$, maka x dan y berturut-turut adalah . . . .

A. 3 dan 2 D. 4 dan 5

B. –3 dan –2 E. –2 dan 4

C. 3 dan –2

4. Diketahui

$A = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ b & c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ -c & d \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Jika $A + B^t = C^t$, di mana B^t transpos dari B, maka nilai d adalah . . . .

A. –1 D. –2

B. 0 E. –4

C. 1

5. A, B, dan C adalah matriks persegi ordo dua dengan $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, dan $AC = B$. Maka matriks C adalah . . . .

A. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ E. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

6. Invers matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ adalah . . . .

A. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ E. $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} \frac{1}{11} & \frac{4}{11} \\ -\frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix}$

7. Jika $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, maka $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ adalah . . . .

A. $\begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 13 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 6 & 13 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

8. Nilai determinan $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ adalah . . . .

A. 3
B. 2
C. 1
D. 0
E. $\frac{1}{2}$

9. Diketahui $K = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 4b \\ 8 & 3c & 11 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Kalau $K = L^t$, maka c adalah . . . .

A. 16
B. $\frac{7}{3}$
C. 14
D. 13
E. 12

10. Diketahui

$$3\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$, maka nilai a adalah . . . .

A. 4
B. 2
C. −2
D. −4
E. −6

11. Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, maka $A \times B = \ldots.$

A. $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 11 & 13 & 8 \\ 13 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 9 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 11 & 12 & 8 \\ 13 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 11 \\ 13 & 8 & 13 \\ 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

12. Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, maka $A^{-1} = \ldots.$

A. $\begin{pmatrix} -2\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -2\frac{1}{2} & -1\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

13. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ maka $(AB)C = \ldots.$

A. $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 18 & 16 \\ 46 & 38 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 20 & 14 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

14. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Nilai $(AB)^{-1}$ = ...

A. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

15. Misalkan A adalah matriks $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Nilai dari $A^2 - 2A + I$ adalah . . . . .

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 26 & 27 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{26}{27} & \frac{1}{27} \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

II. Jawablah pertanyaan berikut dengan jelas dan tepat!

1. x dan y memenuhi persamaan matriks.

$$\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 3 & 2x+y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah nilai $x + y$.

2. Jika diketahui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah $(AB)^{-1}A^t$.

3. Jika x memenuhi

$$\begin{pmatrix} {}^{x}\log a & \log(2a-b) \\ \log(b-2) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log b & 1 \\ \log a & 1 \end{pmatrix}$$

maka tentukanlah nilai x.

4. Jika a, b, c dan d memenuhi persamaan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2d & c \\ b & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

maka tentukanlah $a + b + c + d$.

5. Hitunglah determinan dari:

a. $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

b. $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$

BAB 4

Vektor

Sumber: http://images.encarta.msn.com

A. Pengertian Vektor

B. Operasi pada Vektor

C. Perbandingan Vektor

D. Perkalian Skalar Dua Vektor dan Proyeksi Vektor

Pernahkah kalian melihat lembing yang meluncur di udara saat dilempar oleh atlet lempar lembing? Lembing tersebut meluncur dengan kecepatan dan arah tertentu sesuai dengan keinginan sang atlet. Dalam matematika, lembing yang meluncur ini mewakili sebuah vektor, yaitu suatu besaran yang memiliki besar dan arah. Agar kalian lebih memahami tentang vektor ini, pelajarilah bab berikut.

A. Pengertian Vektor

Untuk memahami tentang vektor, lakukanlah kegiatan berikut.

Aktivitas di Kelas

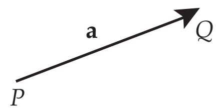
1. Gambarlah sebuah ruas garis pada selembar kertas!
2. Berilah tanda panah pada ujung ruas garis tersebut ini!
3. Sebut titik pangkal ruas garis sebagai titik P dan titik ujungnya sebagai titik Q.
4. Ukurlah panjang ruas garis dengan menggunakan penggaris!
5. Diskusikan dengan teman sebangkumu!
6. Apa yang dapat disimpulkan dari aktivitas ini? Kemukakan hasil kegiatan ini di depan kelas!

Ruas garis berarah yang kalian gambar pada kegiatan ini mewakili sebuah vektor. Panjang garis yang diukur menggunakan penggaris menunjukkan panjang vektor tersebut. Karena titik pangkal P dan titik ujung Q, maka vektor disebut sebagai vektor $\overrightarrow{PQ}$. Panjang vektor $\overrightarrow{PQ}$ ini dilambangkan dengan $|\overrightarrow{PQ}|$.

Selain cara di atas, sebuah vektor dapat pula ditulis menggunakan:

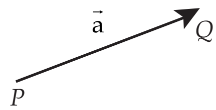
- huruf kecil yang dicetak tebal.

  Seperti **a**, **b**, **c**, dan sebagainya. Misalnya, vektor $\overrightarrow{PQ}$ di samping ditulis sebagai vektor **a**.



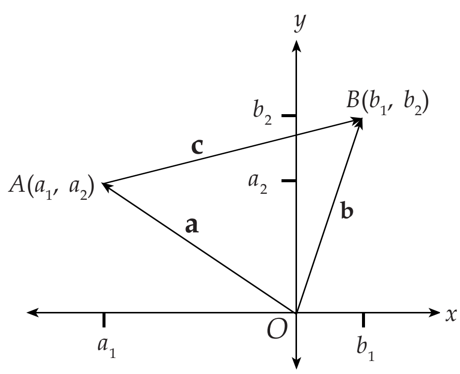
- huruf kecil yang di atas huruf itu dibubuhi tanda panah.

  Seperti $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dan sebagainya. Misalnya vektor $\overrightarrow{PQ}$ dapat ditulis sebagai vektor $\vec{a}$.



Penulisan vektor dengan menggunakan lambang panah di atas lebih sering digunakan. Karena mnggunakan tulisan tangan, vektor yang dibubuhi tanda panah lebih mudah dituliskan daripada yang dicetak tebal. Kalian bebas memilih cara penulisan vektor tersebut.

Sekarang, perhatikan sebarang titik $A(a_1, a_2)$ dan titik $B(b_1, b_2)$ pada koordinat Cartesius berikut.



Gambar 5.1
Titik $A(a_1, a_2)$ dan $B(b_1, b_2)$ pada koordinat Cartesius

Pada bidang Cartesius tersebut, vektor **a** mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal $O(0, 0)$ ke titik $A(a_1, a_2)$. Oleh karena itu, vektor **a** ini dapat kalian tuliskan dalam bentuk pasangan terurut $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$. Adapun vektor **b** mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal $O(0, 0)$ ke titik $B(b_1, b_2)$. Vektor **b** dapat kalian tuliskan sebagai $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$.

Dengan menggunakan rumus jarak, kalian dapat menentukan panjang vektor **a** dan **b** ini, yaitu:

Panjang vektor **a** adalah $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Panjang vektor **b** adalah $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$

Dengan menarik ruas garis dari titik A ke titik B, kalian mendapatkan vektor **c**. Dengan menggunakan rumus jarak, vektor **c** ini dapat di tuliskan sebagai $\mathbf{c} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ sehingga panjang vektor **c** adalah $|\mathbf{c}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

Jika arah vektor **c** dibalik, maka akan didapat vektor **–c**, yaitu sebuah vektor yang panjangnya sama dengan panjang vektor **c** dengan arah berlawanan. Vektor ini disebut vektor invers dari vektor **c**. Jika ditulis dalam bentuk pasangan terurut, vektor $-\mathbf{c} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$. Panjangnya adalah

$$|-\mathrm{c}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Untuk setiap vektor **a** yang bukan vektor nol, dapat ditentukan suatu vektor satuan dari vektor **a**, dilambangkan dengan $\hat{e}$. Vektor satuan arahnya searah dengan vektor **a** dan panjangnya sama dengan satu satuan.

Jika vektor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, maka vektor satuan dari **a** dirumuskan dengan:

$$\hat{e} = \frac{\mathrm{a}}{|\mathrm{a}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vektor-vektor satuan $\hat{\mathrm{i}}$ dan $\hat{\mathrm{j}}$ dapat dinyatakan dengan vektor kolom, yaitu:

$$\hat{\mathrm{i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \hat{\mathrm{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dengan pemahaman yang sama seperti vektor pada bidang (R^2), kalian dapat memahami vektor pada ruang (R^3). Misalnya, ambil sebarang titik $A(a_1, a_2, a_3)$ dan $B(b_1, b_2, b_3)$ pada ruang (R^3), maka kalian dapat menuliskan vektor **a** yang mewakili vektor $\overrightarrow{OA}$ dan vektor **b** yang mewakili vektor $\overrightarrow{OB}$ dalam bentuk pasangan terurut sebagai berikut.

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Panjang kedua vektor ini masing-masing

$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ dan $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

Untuk vektor pada ruang (R^3), juga dapat ditentukan vektor satuannya. Jika vektor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, maka vektor satuan dari **a** dirumuskan dengan:

$$\hat{e} = \frac{a}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Vektor-vektor satuan $\hat{i}, \hat{j}$, dan $\hat{k}$ dapat dinyatakan dengan vektor kolom, yaitu:

$$\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{dan } \hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Contoh

1. Diketahui segitiga ABC dengan titik-titik sudut $A(0, 3, 5)$, $B(2, 4, 6)$, dan $C(4, 3, 1)$. Tentukan:

a. Vektor **p** yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal A ke titik B

b. Vektor **q** yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal B ke titik C

c. Vektor **r** yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal A ke titik C

d. Keliling segitiga ABC

Jawab:

a. Vektor **p** mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal A ke titik B, maka $\mathbf{p} = \vec{AB} = (2 - 0, 4 - 3, 6 - 5) = (2, 1, 1)$.

Panjang vektor **p** adalah $|\mathbf{p}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$

$$|\vec{\mathbf{AB}}| = \sqrt{6}$$

b. Vektor **q** mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal B ke titik C, maka $\mathbf{q} = \vec{BC} = (4 - 2, 3 - 4, 1 - 6) = (2, -1, -5)$.

Panjang vektor **q** adalah

$|\mathbf{q}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 1 + 25} = \sqrt{30}$

c. Vektor **r** mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal A ke titik C, maka $\mathbf{r} = \vec{AC} = (4 - 0, 3 - 3, 1 - 5) = (4, 0, -4)$.

Panjang vektor **r** adalah $|\mathbf{r}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2}$

$$= \sqrt{16 + 16}$$

$$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

d. Keliling segitiga ABC adalah $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| + |\mathbf{r}| = \sqrt{6} + \sqrt{30} + 4\sqrt{2}$

2. Diketahui vektor **a** dan **b** di R^2. Jika $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 7$, dan $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = \sqrt{105}$, tentukan $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

Jawab:

Dari $|\mathbf{a}| = 5$, didapat $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 5 \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 = 25$ … *Persamaan* 1

Dari $|\mathbf{b}| = 7$, didapat $\sqrt{b_1^2 + b_2^2} = 7 \Rightarrow b_1^2 + b_2^2 = 49$ ... *Persamaan* 2

Dari $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = \sqrt{105}$, didapat $\sqrt{(a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2} = \sqrt{105}$

Sehingga diperoleh

$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 = 105 \Rightarrow a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2 = 105$

$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2a_1b_1 + 2a_2b_2 = 105$ … *Persamaan* 3

Substitusi persamaan 1 dan 2 ke persamaan 3

$25 + 49 + 2a_1b_1 + 2a_2b_2 = 105$

$2a_1b_1 + 2a_2b_2 = 31$ … *Persamaan* 4

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \sqrt{\begin{matrix}2a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + \\ a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2\end{matrix}}$$

$$= \sqrt{\begin{matrix}a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - \\ (2a_1b_1 + 2a_2b_2)\end{matrix}}$$

… *Persamaan* 5

Substitusi persamaan 1, 2, dan 4 ke persamaan 5

$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{25 + 49 - 31} = \sqrt{43}$

Jadi, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{43}$.

1 Asah Kemampuan

Waktu : 60 menit

1. Gambarkan vektor-vektor berikut pada koordinat Cartesius! **Bobot soal: 20**

   a. $\mathbf{k} = (4, 7)$
   b. $\mathbf{l} = (7, 4)$
   c. $\mathbf{m} = (5, 0)$
   d. $\mathbf{n} = (0, -5)$
   e. $\mathbf{o} = (-5, -5)$
   f. $\mathbf{p} = (-3, 0, 3)$
   g. $\mathbf{q} = (6, 7, 8)$
   h. $\mathbf{r} = (-2, -2, 0)$
   i. $\mathbf{s} = (4, 4, 4)$
   j. $\mathbf{t} = (0, 0, 0)$

2. Diketahui segitiga ABC dengan titik-titik sudut $A(3, 4, 2)$, $B(6, -3, 5)$, dan $C(2, 5, 6)$. **Bobot soal: 30**

   a. Gambarlah segitiga tersebut.

b. Tentukanlah vektor **a** yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal A ke titik B dan tentukan panjang vektor **a**.
c. Tentukanlah vektor **b** yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal B ke titik C dan tentukan panjang vektor **b**.
d. Tentukanlah vektor **c** yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal A ke titik C dan tentukan panjang vektor **c**.
e. Tentukanlah keliling segitiga ABC.
f. Tentukanlah luas segitiga ABC.

3. Diketahui vektor **u** = (1, –3, 2), **v** = (1, 1, 0), dan **w** = (2, 2, –4). Tentukanlah:

Bobot soal: 20

a. $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|$
b. $|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$
c. $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| - |\mathbf{u}| - |\mathbf{v}|$
d. $|\mathbf{w}-\mathbf{u}|$
e. $|\mathbf{w}| - |\mathbf{u}|$
f. $|\mathbf{w} - \mathbf{u}| + |\mathbf{w}| + |\mathbf{u}|$
g. $\dfrac{\mathbf{1}}{|\mathbf{w}|}\mathbf{w}$
h. $\left|\dfrac{1}{|\mathbf{w}|}\right|\mathbf{w}$

4. Diketahui vektor **u** dan **v** di R^2.

Bobot soal: 30

a. Jika $|\mathbf{u}| = 5$, $|\mathbf{v}| = 2$, dan $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 19$, tentukanlah $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$
b. Jika $|\mathbf{u}| = 3$, $|\mathbf{v}| = 5$, dan $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 7$, tentukanlah $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$
c. Jika $|\mathbf{u}| = 4$, $|\mathbf{v}| = 3$, dan $|\mathbf{u}-\mathbf{v}| = \sqrt{37}$, tentukanlah $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$

Siapa Berani

Buktikan secara geometris dan aljabar bahwa jika **u** dan **v** di R^2, maka:

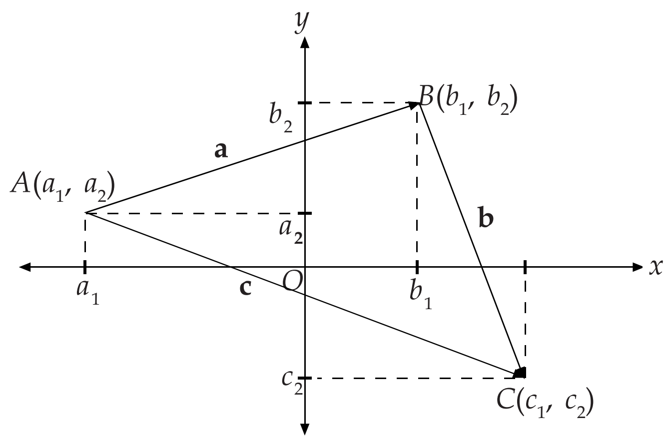
1. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$
2. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$.

Sumber: *Elementary Linear Algebra*

B. Operasi pada Vektor

B. 1. Penjumlahan dan Pengurangan Vektor

Perhatikan titik-titik $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, dan $C(c_1, c_2)$ pada koordinat Cartesius berikut ini!



Gambar 5.2
Titik $A(a_1, a_2)$ dan $B(b_1, b_2)$ dan $C(c_1, c_2)$ pada koordinat Cartesius

Pada gambar tersebut, vektor **a**, **b**, dan **c** dapat kalian tulis sebagai berikut.

- $\mathbf{a} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2)$.

  Dapat pula ditulis, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{b} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2)$.

  Dapat pula ditulis, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{c} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2)$.

  Dapat pula ditulis, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix}$

Sekarang, jumlahkanlah vektor **a** dan **b**. Karena vektor merupakan matriks kolom, maka kalian dapat menjumlahkan vektor **a** dan **b** dengan menggunakan aturan penjumlahan matriks. Dengan aturan ini, akan diperoleh

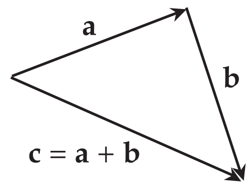
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 + c_1 - b_1 \\ b_2 - a_2 + c_2 - b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa $\begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{c}$.

Uraian tersebut menunjukkan bahwa **a** + **b** = **c**. Secara geometris, penjumlahan antara vektor **a** dan **b** ini dapat kalian lakukan dengan dua cara, yaitu:

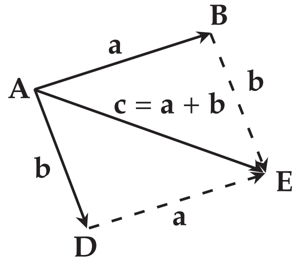
a. *Cara segitiga*

Dalam cara ini, titik pangkal vektor **b** berimpit ruas dengan titik ujung vektor **a**. Jumlah vektor **a** dan **b** didapat dengan menarik ruas garis dari titik pangkal vektor **a** ke titik ujung vektor **b**. Ruas garis ini diwakili oleh vektor **c**. Akibatnya, **a** + **b** = **c**.



Gambar 5.3
Penjumlahan vektor **a** + **b** = **c** dengan cara segitiga

b. *Cara jajargenjang*

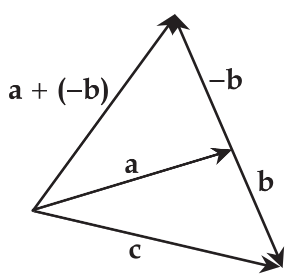


Gambar 5.4
Penjumlahan vektor **a** + **b** = **c** dengan cara jajargenjang

Misalkan, vektor **a** mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal *A* ke titik *B* dan vektor **b** mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal *C* ke titik *D*. Dalam cara jajargenjang, titik pangkal vektor **a** berimpit dengan titik pangkal vektor **b**, yaitu *A* = *C*.
Dengan membuat jajargenjang *ABED*, akan diperoleh

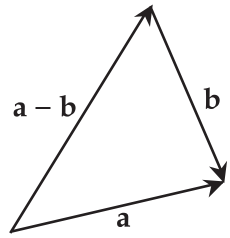
$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BE} \qquad \text{(Oleh karena } \vec{AD} = \vec{BE}\text{)}$$
$$= \vec{AE} \qquad \text{(Gunakan cara segitiga)}$$

Oleh karena $\vec{AB}$ = **a**, $\vec{AD}$ = **b**, dan $\vec{AE}$ = **c**, maka **a** + **b** = **c**.
Sekarang, jika vektor **a** dijumlahkan dengan invers vektor **b,** maka kalian mendapatkan penjumlahan vektor **a** + **(–b)** sebagai berikut.



Gambar 5.5
Penjumlahan vektor **a** + (–**b**)

Seperti pada bilangan real, kalian dapat menuliskan **a** + **(–b)** = **a** – **b.** Secara geometris, kalian dapat mengurangkan **a** dengan **b** sebagai berikut.



Gambar 5.6
Pengurangan **a** - **b** secara geometris

Dengan menggunakan aturan penjumlahan dan pengurangan matriks kolom, kalian dapat menyatakan aturan penjumlahan dan pengurangan vektor sebagai berikut.

- Untuk **a** dan **b** vektor-vektor di R^2, berlaku

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

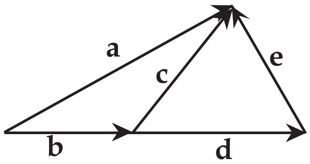
Dengan menggunakan pasangan terurut, dapat dituliskan
$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2)$
$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$

- Untuk **a** dan **b** vektor-vektor di R^3, berlaku

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan pasangan terurut, dapat dituliskan
$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 , a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$
$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3)$



Gambar 5.7
Penjumlahan vektor

Perhatikan gambar berikut!
Dari gambar di samping, kalian dapat menyatakan:
- **b** + **c** = **a**
- **d** + **e** = **c**
- **b** + **d** + **e** = **a**

Contoh

Diketahui vektor-vektor **a** = (0, –2, –1), **b** = (2, 3, 4), dan **c** = (–3, 0, 3), tentukan:

1. **a** + **b**	**6.** **a** + **a**
2. **b** + **a**	**7.** **a** – **a**
3. **b** + **c**	**8.** **a** + **0**
4. **b** – **c**	**9.** (**a** + **b**) + **c**
5. **c** – **b**	**10.** **a** + (**b** + **c**)

Jawab:

1. **a** + **b** = (0, –2, –1) + (2, 3, 4) = (0 + 2, –2 + 3, –1 + 4) = (2, 1, 3)
Jadi, **a** + **b** = (2, 1, 3).

2. **b** + **a** = (2, 3, 4) + (0, –2, –1) = (2 + 0, 3 + (–2), 4 + (–1)) = (2, 1, 3)
Jadi, **b** + **a** = (2, 1, 3).

3. **b** + **c** = (2, 3, 4) + (–3, 0, 3) = (2 + (–3), 3 + 0, 4 + 3) = (–1, 3, 7)
Jadi, **b** + **c** = (–1, 3, 7).

4. **b** – **c** = (2, 3, 4) – (–3, 0, 3) = (2 – (–3), 3 – 0, 4 – 3) = (5, 3, 1)
Jadi, **b** – **c** = (5, 3, 1).

5. **c** – **b** = (–3, 0, 3) – (2, 3, 4) = (–3 – 2, 0 – 3, 3 – 4) = (–5, –3, –1)
Jadi, **c** – **b** = (–5, –3, –1).

6. **a** + **a** = (0, –2, –1) + (0, –2, –1) = ((0 + 0, –2 + (–2), –1 + (–1)) = (0, –4, –2)
Jadi, **a** + **a** = (0, –4, –2).

7. **a** – **a** = (0, –2,– 1) – (0, –2, –1) = ((0 – 0, –2 – (–2), –1 – (–1)) = (0, 0, 0) = **o**
Jadi, **a** – **a** = **o**.

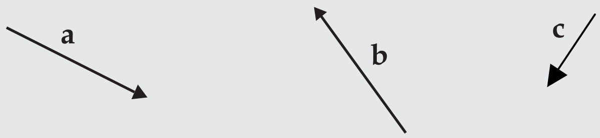
8. **a** + **o** = (0, –2, –1) + (0, 0, 0) = (0 + 0, –2 + 0, –1 + 0) = (0, –2, –1) = **a**
Jadi, **a** + **o** = **a**.

9. (**a** + **b**) + **c** = (2, 1, 3) + (–3, 0, 3) = (2 + (–3), 1 + 0, 3 + 3) = (–1, 1, 6)
Jadi, (**a** + **b**) + **c** = (–1, 1, 6).

10. **a** + (**b** + **c**) = (0, –2, –1) + (–1, 3, 7) = (0 + (–1), –2 + 3, –1 + 7) = (–1, 1, 6)
Jadi, **a** + (**b** + **c**) = (–1, 1, 6).

Asah Kompetensi 1

1. Diketahui vektor-vektor berikut.

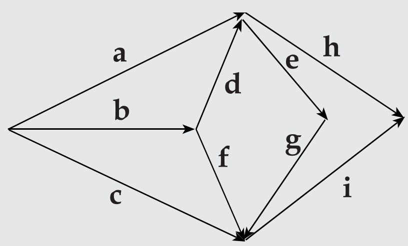


Jika $|\mathbf{a}| = 2|\mathbf{c}|$, dan $|\mathbf{b}| = 2\frac{1}{2}|\mathbf{c}|$, gambarkan vektor-vektor berikut!

a. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$
b. $\mathbf{b} + \mathbf{a}$
c. $\mathbf{b} + \mathbf{c}$
d. $\mathbf{c} + \mathbf{b}$
e. $\mathbf{a} + \mathbf{c}$
f. $\mathbf{c} + \mathbf{a}$
g. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
h. $(\mathbf{b} + \mathbf{a}) + \mathbf{c}$
i. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
j. $\mathbf{a} + (\mathbf{c} + \mathbf{a})$
k. $\mathbf{a} - \mathbf{b}$
l. $\mathbf{b} - \mathbf{a}$
m. $\mathbf{b} - \mathbf{c}$
n. $\mathbf{c} - \mathbf{b}$
o. $\mathbf{a} - \mathbf{c}$
p. $\mathbf{c} - \mathbf{a}$
q. $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
r. $\mathbf{a} - (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
s. $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{a} - \mathbf{c})$
t. $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) - (\mathbf{a} - \mathbf{c})$

2. Berdasarkan gambar berikut, tuliskanlah operasi-operasi vektornya dalam bentuk yang paling sederhana.

a. $\mathbf{b} + \mathbf{d}$
b. $\mathbf{b} + \mathbf{f}$
c. $\mathbf{d} + \mathbf{e}$
d. $\mathbf{a} + \mathbf{e} + \mathbf{g}$
e. $\mathbf{c} - \mathbf{b}$
f. $\mathbf{c} + \mathbf{i} - \mathbf{h}$



3. Diketahui vektor-vektor $\mathbf{a} = (-5, -4, -3)$; $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$; dan $\mathbf{c} = (-3, 8, 5)$; tentukanlah:

a. $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
b. $|\mathbf{b}| + |\mathbf{c}|$
c. $|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$
d. $(|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|) + |\mathbf{c}|$
e. $|\mathbf{a}| + (|\mathbf{b}| + |\mathbf{c}|)$
f. $(|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|) + |\mathbf{c}|$
g. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$
h. $\mathbf{b} + \mathbf{a}$
i. $\mathbf{b} + \mathbf{c}$
j. $\mathbf{c} + \mathbf{b}$
k. $\mathbf{a} + \mathbf{c}$
l. $\mathbf{c} + \mathbf{a}$
m. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
n. $(\mathbf{b} + \mathbf{a}) + \mathbf{c}$
o. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
p. $\mathbf{a} + (\mathbf{c} + \mathbf{a})$
q. $\mathbf{a} - \mathbf{b}$
r. $\mathbf{b} - \mathbf{a}$
s. $\mathbf{b} - \mathbf{c}$
t. $\mathbf{c} - \mathbf{b}$
u. $\mathbf{a} - \mathbf{c}$
v. $\mathbf{c} - \mathbf{a}$
w. $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{a} - \mathbf{c})$
x. $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) - (\mathbf{a} - \mathbf{c})$

4. Secara geometri, buktikan bahwa:

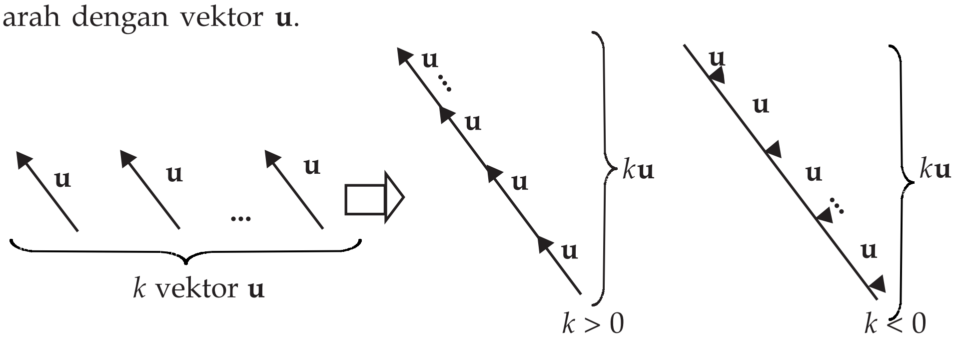
a. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
b. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
c. $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
d. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{o}$

B. 2. Perkalian Skalar dengan Vektor

Pada bagian sebelumnya, kalian telah mempelajari penjumlahan vektor. Apa yang terjadi jika vektor-vektor yang dijumlahkan adalah k vektor yang sama? Dalam penjumlahan tersebut, kalian akan mendapatkan sebuah vektor baru yang setiap komponen-komponennya diperoleh dengan mengalikan k dengan setiap komponen-komponen vektor **u**. Akibatnya, vektor baru tersebut segaris dengan vektor **u** dan memiliki panjang $k|\mathbf{u}|$.

Jika k skalar tak nol dan vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, maka $k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$.

Dalam perkalian skalar dengan vektor ini, jika $k > 0$, maka vektor k**u** searah dengan vektor **u**. Adapun jika $k < 0$, maka vektor k**u** berlawanan arah dengan vektor **u**.



Gambar 5.8
Perkalian skalar dengan vektor **u**

Contoh

1. Diketahui vektor $\mathbf{a} = (1, 4, 5)$ dan $\mathbf{b} = (2, 3, 2)$, tentukan vektor $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$.

   Jawab:

   $$\begin{aligned}\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} &= 2(1, 4, 5) + 3(2, 3, 2)\\ &= (2 \times 1, 2 \times 4, 2 \times 5) + (3 \times 2, 3 \times 3, 3 \times 2)\\ &= (2, 8, 10) + (6, 9, 6)\\ &= (8, 17, 16)\end{aligned}$$

   Jadi, $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = (8, 17, 16)$.

2. Buktikan bahwa vektor $\mathbf{u} = (-3, 0, 6)$ sejajar dengan vektor $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$.

   Bukti:

   Untuk membuktikan bahwa vektor $\mathbf{u} = (-3, 0, 6)$ sejajar dengan vektor $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$, kalian harus menunjukkan ada bilangan real k sehingga $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$.

   $\mathbf{u} = k\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} - k\mathbf{v} = \mathbf{o}$

   $(-3, 0, 6) - k(1, 0, -2) = (0, 0, 0)$

   $(-3, 0, 6) - (k, 0, -2k) = (0, 0, 0)$

   $(-3 - k, 0, 6 + 2k) = (0, 0, 0)$

   Didapat, $k = -3$, maka, $\mathbf{u} = -3\mathbf{v}$.

   Jadi, vektor $\mathbf{u} = (-3, 0, 6)$ sejajar dengan vektor $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$.

Asah Kompetensi 2

1. Diketahui vektor **a** = (–1, 2, 3), **b** = (0, –2, –1), dan **c** = (–1, –2, 3). Hitunglah:
   a. 2**a** + **b**
   b. 2**b** – 4**c**
   c. –**b** – 4**a**
   d. 2**a** + **b** – 4**c**
   e. 3**a** – 2**b** + 4**c**
   f. 4**a** + **b** – 2**c**

2. Diketahui vektor **a** dan **b** seperti gambar berikut.

   Gambarkan vektor **c** jika:
   a. **c** = 2**a** – 3**b**
   b. **c** = **a** + 2**b**
   c. **c** = –3**a** + **b**

3. Carilah vektor dengan titik pangkal $P(2, -1, 4)$ yang mempunyai arah sama seperti vektor **v** = (7, 6, –3)!

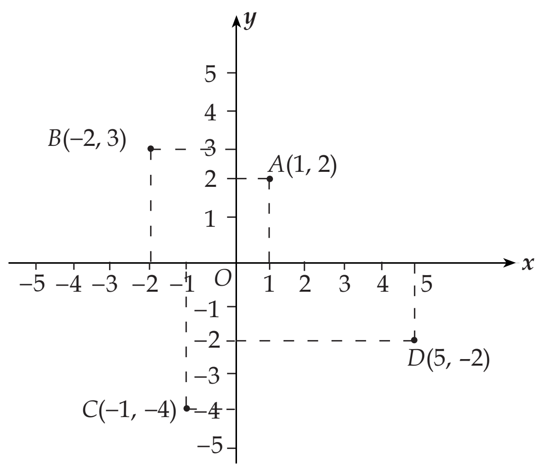
4. Carilah vektor dengan titik ujung $Q(2, 0, -7)$ yang arahnya berlawanan dengan vektor **v** = (–2, 4, –1)!

5. Buktikanlah bahwa vektor **u** = (2, –1, 3) sejajar dengan vektor **v** = (–4, 2, –6)!

6. Diketahui titik $A(2, 4, 6)$, $B(6, 6, 2)$, dan $C(14, 10, -6)$. Tunjukkan bahwa titik A, B, dan C segaris (kolinier)!

B. 3. Sifat-Sifat Operasi Hitung pada Vektor

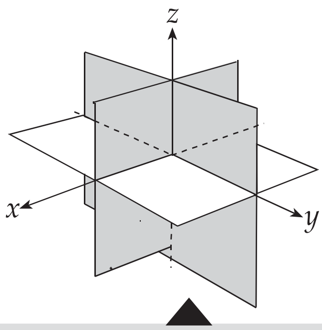
Vektor di R^2 berhubungan dengan letak suatu titik pada sebuah bidang dengan pasangan bilangan (x, y) merupakan koordinat Cartesius dari suatu titik atau koordinat bidang.



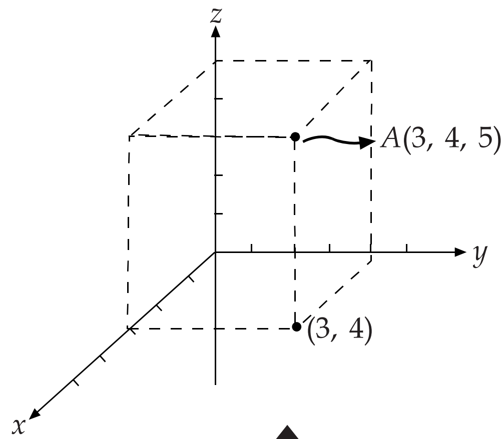
Gambar 5.9
Koordinat Cartesius di R^2

Vektor R^2 mempunyai pasangan bilangan (x, y, z) yang merupakan koordinat Cartesius dari suatu titik atau koordinat ruang ke tiga sumbu membentuk tiga bidang, yaitu bidang xy, bidang xz, dan bidang yz.

Ketiga bidang tersebut membagi ruang dimensi tiga menjadi 8 daerah seperti Gambar 5.10.



Gambar 5.10
Daerah perpotongan pada ruang dimensi tiga



Gambar 5.11
Koordinat Cartesius di R^3

Sifat-sifat yang terdapat dalam operasi hitung vektor adalah sebagai berikut.

Jika **a**, **b**, dan **c** vektor-vektor di R^2 atau di R^3 dan k serta l skalar tak nol maka berlaku hubungan berikut.

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$	**5.** $k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a}$
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$	**6.** $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$
3. $\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$	**7.** $(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$
4. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$	**8.** $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

Dalam buku ini akan dibuktikan sifat 1, sifat 2, sifat 4, dan sifat 7. Untuk sifat-sifat yang lain, dapat kalian buktikan sendiri.

Pembuktian sifat 1

Ambil sebarang vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, maka

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)\\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)\\ &= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3)\\ &= (b_1, b_2, b_3) + (a_1, a_2, a_3)\\ &= \mathbf{b} + \mathbf{a}\end{aligned}$$

Jadi, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

Pembuktian sifat 2

Ambil sebarang vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, dan $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, maka:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= ((a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)) + (c_1, c_2, c_3)\\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) + (c_1, c_2, c_3)\\ &= (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, a_3 + b_3 + c_3)\\ &= (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), a_3 + (b_3 + c_3))\\ &= (a_1, a_2, a_3) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3)\\ &= (a_1, a_2, a_3) + ((b_1, b_2, b_3) + (c_1, c_2, c_3))\\ &= \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})\end{aligned}$$

Jadi, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

Pembuktian sifat 4

Ambil sebarang vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, maka :

$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (a_1, a_2, a_3) + (-a_1, -a_2, -a_3) = (a_1 - a_1, a_2 - a_2, a_3 - a_3) = (0, 0, 0) = \mathbf{o}$

Jadi, $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$.

Pembuktian sifat 7

Ambil sebarang skalar k dan l serta vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, maka :

$$\begin{aligned}(k + l)\mathbf{a} &= (k + l)(a_1, a_2, a_3)\\ &= ((k + l)a_1, (k + l)a_2, (k + l)a_3)\\ &= (ka_1 + la_1, ka_2 + la_2, ka_3 + la_3)\\ &= (ka_1, ka_2, ka_3) + (la_1, la_2, la_3)\\ &= k(a_1, a_2, a_3) + l(a_1, a_2, a_3)\\ &= k\mathbf{a} + l\mathbf{a}\end{aligned}$$

Jadi, $(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$.

2 Asah Kemampuan

Waktu : 60 menit

1. Buktikan secara geometri bahwa: — Bobot soal: 20
   a. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$
   b. $k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a}$
   c. $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$

2. Tentukanlah vektor **u** dan **v**, jika $\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = (7, 2, -2)$ dan $2\mathbf{u} + 5\mathbf{v} = (12, 0, -1)$. — Bobot soal: 20

3. Diketahui titik $A(7, 3, 6)$, $B(1, 0, 0)$, dan $C(3, 2, 1)$. Tentukan panjang $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, dan $\overrightarrow{BC}$. Kemudian, buktikanlah bahwa C terletak pada garis AB. — Bobot soal: 20

4. Diketahui titik $A(-6, -2, -4)$, $B(3, 1, 2)$, dan $C(6, 2, 4)$. Tunjukkan bahwa titik A, B, dan C segaris (kolinier). — Bobot soal: 20

5. Tentukanlah semua skalar c_1, c_2, dan c_3 yang memenuhi $c_1(2, 7, 8) + c_2(1, -1, 3) + c_3(3, 6, 11) = 0$. — Bobot soal: 20

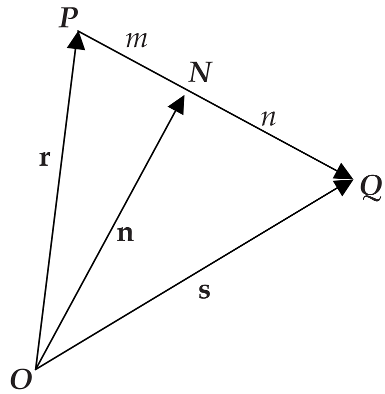
C. Perbandingan Vektor

Niko Sentera pergi dari rumah ke sekolahnya dengan berjalan kaki melintasi sebuah jalan yang lurus. Jika saat ini, ia telah meninggalkan rumah sejauh m meter dan ia harus menempuh jarak n meter lagi untuk tiba di sekolah, maka perbandingan jarak yang telah ditempuh dengan jarak yang belum ditempuhnya adalah $m : n$.

Misalkan:
Posisi rumah Niko Sentera adalah P
Posisi sekolah adalah Q
Posisi Niko Sentera saat ini adalah N
maka dapat dituliskan $PN : NQ = m : n$.

Dari perbandingan ini, kalian dapat menyatakan titik N sebagai vektor posisi **n** dalam vektor posisi titik P dan Q. Caranya sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \mathbf{r} + \overrightarrow{PN} \\
&= \mathbf{r} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{PQ} \\
&= \mathbf{r} + \frac{m}{m+n}(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \\
&= \frac{m\mathbf{r} + n\mathbf{r} + m\mathbf{s} - m\mathbf{r}}{m+n} \\
&= \frac{m\mathbf{s} + n\mathbf{r}}{m+n}
\end{aligned}$$



Jadi, $\mathbf{n} = \dfrac{m\mathbf{s} + n\mathbf{r}}{m+n}$.

- Jika $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ di R^2, maka $\mathbf{n} = \dfrac{m\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}}{m+n}$

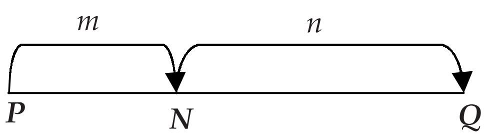
  Koordinat titik N adalah $N\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$

- Jika $P(x_1, y_1, z_1)$ dan $Q(x_2, y_2, z_2)$ di R^3, maka $\mathbf{n} = \dfrac{m\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}}{m+n}$

  Koordinat titik N adalah $N\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}, \dfrac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)$

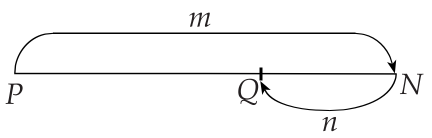
Dalam perbandingan $PN : NQ = m : n$ terdapat dua kasus, yaitu:

1. Titik N membagi PQ di dalam.



$PN : NQ = m : n$

2. Titik N membagi PQ di luar.



$PN : NQ = m : (-n)$

Contoh

Tentukanlah koordinat suatu titik pada garis hubung $A(2, 3, 4)$ dan $B(6, 7, 8)$ di dalam dan di luar dengan perbandingan 1 : 3.

Jawab:

Misalkan, titik tersebut adalah titik P.

- Untuk titik P membagi AB di dalam dengan perbandingan 1 : 3, berlaku $AP : PB = 1 : 3$.
  Koordinat titik P dapat kalian tentukan dengan cara berikut.
  $$P\left(\frac{1\cdot 6+3\cdot 2}{1+3}, \frac{1\cdot 7+3\cdot 3}{1+3}, \frac{1\cdot 8+3\cdot 4}{1+3}\right) = P(3, 4, 5)$$
  Jadi, titik $P(3 , 4, 5)$.
- Untuk titik P membagi AB di luar dengan perbandingan 1 : 3, berlaku $AP : PB = 1 : -3$.
  Koordinat titik P dapat kalian tentukan sebagai berikut.
  $$P\left(\frac{1\cdot 6+(-3)\cdot 2}{1+(-3)}, \frac{1\cdot 7+(-3)\cdot 3}{1+(-3)}, \frac{1\cdot 8+(-3)\cdot 4}{1+(-3)}\right) = P(0, 1, 2)$$
  Jadi, titik $P(0, 1, 2)$.

3 Asah Kemampuan

Waktu : 60 menit

1. Tentukanlah koordinat titik P yang terletak pada garis AB jika: **Bobot soal: 20**
a. $A(2, 0, 1)$, $B(10, 4, 5)$, dan $AP : PB = 3 : 1$
b. $A(1, 1, 1)$, $B(3, -2, 5)$, dan $AP : PB = 3 : -2$

2. Titik-titik sudut segitiga ABC adalah $A(3, 0, 6)$, $B(0, 3, -3)$, dan $C(1, 0, -4)$. Titik P membagi AB di dalam dengan perbandingan 1 : 2, Titik Q adalah titik tengah AC, dan titik R membagi BC di luar dengan perbandingan 2 : 1. Tentukanlah koordinat-koordinat titik P, Q, dan R. **Bobot soal: 20**

3. Buktikan bahwa $A(1, 3, -1)$, $B(3, 5, 0)$, $C(-1, 4, 1)$ adalah titik-titik sudut segitiga siku-siku samakaki. Tentukanlah koordinat titik sudut keempat dari persegi $ABCD$. **Bobot soal: 10**

4. Diketahui segitiga ABC dengan $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ dan $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$. Titik D pada sisi BC dengan $BD : DC = 1 : 2$ dan titik E pada AC dengan $AE : EC = 2 : 1$. **Bobot soal: 40**

a. Nyatakan vektor $\overrightarrow{AE}$ dan $\overrightarrow{AD}$ dalam vektor **a** dan **b**.
b. Jika M titik potong antara garis AD dan BE, nyatakan vektor dalam vektor **a** dan **b**.
c. Jika perpanjangan garis CM memotong garis AB di titik F, tentukanlah perbandingan $AF : FB$.
d. Jika perpanjangan garis DE memotong garis AB atau perpanjangannya di titik H, tentukan perbandingan $AH : HB$.

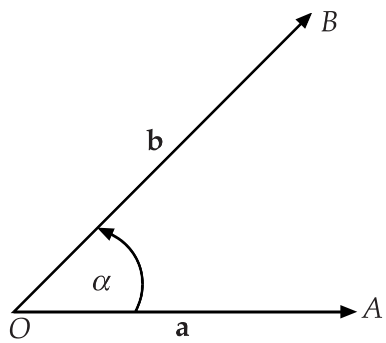
5. Diketahui jajargenjang $OABC$, D adalah titik tengah OA. Buktikanlah bahwa CD dibagi dua oleh OB dengan perbandingan 1 : 2. Buktikan juga bahwa OB dibagi dua oleh CD dengan perbandingan 1 : 2.

Bobot soal: 10

Siapa Berani

D, E, dan F berturut-turut titik tengah sisi AB, BC, dan CA suatu segitiga ABC. Buktikanlah bahwa $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{f}$

D. Perkalian Skalar Dua Vektor dan Proyeksi Vektor



Jika **a** dan **b** vektor-vektor tak nol dan α sudut di antara vektor **a** dan **b**, maka perkalian skalar vektor **a** dan **b** didefinisikan oleh $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha$.

Jika dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut, perkalian skalar dua vektor ini didefinisikan sebagai berikut.

Jika $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dan $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ adalah sebarang vektor pada R^n, maka hasil kali dalam atau perkalian skalarnya adalah

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

- Jika $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ dan $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ vektor-vektor di R^2, maka
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$
- Jika $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektor-vektor di R^3, maka
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Dalam perkalian skalar dua vektor terdapat sifat-sifat berikut.

Jika **a, b,** dan **c** vektor-vektor di R^2 atau di R^3 dan k skalar tak nol, maka:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

2. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

3. $k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b})$

4. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

Dalam buku ini akan dibuktikan sifat 1 dan sifat 3. Untuk sifat-sifat lainnya, dapat dibuktikan sendiri.

Pembuktian sifat 1

Ambil sebarang vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, maka:

Misalkan $\mathbf{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ dan $\mathbf{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \cdot (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$
$$= a_1b_1\hat{i} \cdot \hat{i} + a_2b_1\hat{i} \cdot \hat{j} + a_3b_1\hat{i} \cdot \hat{k} + a_1b_2\hat{i} \cdot \hat{j} + a_2b_2\hat{j} \cdot \hat{j} + a_3b_2\hat{j} \cdot \hat{k} + a_1b_3\hat{i} \cdot \hat{k} + a_2b_3\hat{j} \cdot \hat{k} + a_3b_3\hat{k} \cdot \hat{k}$$

karena $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$ dan

karena $\hat{i}, \hat{j}$, dan $\hat{k}$ saling tegak lurus, maka $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$

sehingga

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\\ &= b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3\\ &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}\end{aligned}$$

Jadi, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

Ambil sebarang vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dan k skalar tak nol, maka :

$$\begin{aligned}k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= k(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\\ &= (ka_1b_1 + ka_2b_2 + ka_3b_3) \qquad \dots (*)\\ &= (ka_1)b_1 + (ka_2)b_2 + (ka_3)b_3\\ &= (k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}\end{aligned}$$

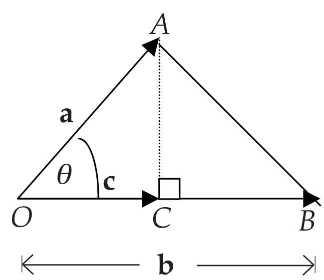
Dari persamaan (*), diperoleh

$k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = a_1(kb_1) + a_2(kb_2) + a_3(kb_3) = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b})$

Perhatikan gambar berikut!

Proyeksi vektor **a** pada vektor **b** adalah vektor **c**.

Perhatikan segitiga AOB!



Pada segitiga AOB, $\cos\theta = \dfrac{|\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}|} \Rightarrow |\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cos\theta = |\mathbf{a}|\dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$

Jadi, panjang proyeksi vektor **a** pada vektor **b** adalah $\boxed{|\mathbf{c}| = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}.}$

Setelah mengetahui panjangnya, kalian dapat pula menentukan vektor proyeksi tersebut, yaitu:

$\mathbf{c} = |\mathbf{c}| \times$ vektor satuan $\mathbf{c}$

Oleh karena **c** berimpit dengan **b** maka vektor satuan **c** adalah $\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$

Jadi, $\mathbf{c} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \cdot \mathbf{b}$

Sehingga proyeksi vektor **a** pada vektor **b** adalah vektor $\boxed{\mathbf{c} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} . \mathbf{b}}$

Contoh

Diketahui vektor **a** = (1, –1, 0) dan **b** = (–1, 2, 2). Tentukanlah:

a. besar sudut yang dibentuk oleh vektor **a** dan vektor **b**

b. panjang proyeksi vektor **a** pada vektor **b**

c. vektor proyeksi **a** pada vektor **b**

Jawab:

a. Untuk menentukan besar sudut yang dibentuk oleh vektor **a** dan vektor **b**, terlebih dahulu tentukanlah **a** · **b**, |**a**|, dan |**b**|.

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 2 = -1 - 2 = -3$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

Misalkan sudut yang dibentuk oleh vektor **a** dan vektor **b** adalah θ, maka:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{-3}{\sqrt{2} \cdot 3} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Didapat $\theta = 135°$.

b. Misalkan vektor proyeksi **a** pada **b** adalah **c**, maka:

$$|\mathbf{c}| = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{-3}{3} = |-1| = 1$$

Jadi, panjang proyeksi vektor **a** pada vektor **b** adalah 1.

c. Vektor proyeksi **a** pada **b** adalah

$$\mathbf{c} = |\mathbf{c}| \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = 1 \cdot \frac{(-1, 2, 2)}{3} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

4 ASAH KEMAMPUAN

Waktu : 90 menit

1. Tentukan $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$, dan sudut antara vektor **a** dan **b** jika:

   Bobot soal: 10

   a. $\mathbf{a} = (2, 1)$ dan $\mathbf{b} = (-3, 2)$
   b. $\mathbf{a} = (2, 6)$ dan $\mathbf{b} = (-9, 3)$
   c. $\mathbf{a} = (-7, 1, 3)$ dan $\mathbf{b} = (5, 0, 1)$
   d. $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ dan $\mathbf{b} = (8, 3, 4)$

2. Dari vektor-vektor **a** dan **b** pada **soal nomor 1**, tentukan:

   Bobot soal: 20

   a. Panjang proyeksi vektor **a** pada vektor **b**
   b. Vektor proyeksi **a** pada **b**
   c. Panjang proyeksi vektor **b** pada vektor **a**
   d. Vektor proyeksi **b** pada **a**

3. Gunakan vektor-vektor untuk menentukan sudut-sudut di bagian dalam segitiga dengan titik-titik sudut $(-1, 0)$, $(-2, 1)$, dan $(1, 4)$.

   Bobot soal: 10

4. Misalkan, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ dengan $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$. Apakah $\mathbf{b} = \mathbf{c}$? Jelaskan!

   Bobot soal: 10

5. Diketahui $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 2$, dan sudut antara vektor **a** dan **b** adalah lancip α dengan $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Tentukanlah:

   Bobot soal: 10

   a. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
   b. $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
   c. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$
   d. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$

6. Diketahui vektor $\mathbf{a} = (7, 6, 4)$, $\mathbf{b} = (-5, 3, -2)$, dan $\mathbf{c} = (1, 0, 2)$. Tentukanlah panjang proyeksi vektor **a** pada vektor $(\mathbf{b} + \mathbf{c})$

   Bobot soal: 10

7. Diketahui segitiga PQR dengan $P(5, 1, 5)$, $Q(11, 8, 3)$, dan $R(-3, -2, 1)$. Tentukanlah:

   Bobot soal: 20

   a. panjang $\overrightarrow{PR}$
   b. panjang $\overrightarrow{PQ}$
   c. panjang proyeksi $\overrightarrow{PR}$ pada $\overrightarrow{PQ}$
   d. proyeksi vektor $\overrightarrow{PR}$ pada $\overrightarrow{PQ}$
   e. luas segitiga PQR

8. Diketahui vektor $\mathbf{a} = (2, -1, 2)$ dan $\mathbf{b} = (4, 10, -8)$. Tentukan nilai x agar vektor $(\mathbf{a} + x\mathbf{b})$ tegak lurus pada vektor **a**.

   Bobot soal: 10

Olimpiade Matematika SMU, 2000

Siapa Berani

Diketahui vektor **a** = (3, −2, 1) dan **b** = (2, y, 2). Jika panjang proyeksi **a** pada **b** adalah $\frac{1}{2}|\mathbf{b}|$, tentukanlah nilai y yang mungkin!

Rangkuman

1. Penulisan vektor
   - Dengan huruf kecil dicetak tebal.
     Misalkan: **a**, **b**, **c**, ...
   - Dengan huruf kecil yang di atas huruf tersebut dibubuhi tanda panah.
     Misalkan: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots.$
2. Panjang vektor **a** dirumuskan sebagai berikut:
   - Jika $\mathbf{a} \in R^2$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, maka $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
   - Jika $\mathbf{a} \in R^3$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, maka $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
3. Jika vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ dan vektor $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, maka vektor yang menghubungkan vektor **a** dan **b** adalah vektor $\mathbf{c} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. Panjang vektor **c** adalah

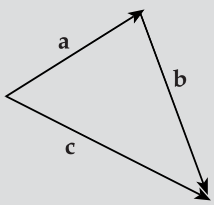
   $$|\mathbf{c}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$
4. Untuk setiap vektor **a** yang bukan vektor nol, dapat ditentukan suatu vektor satuan dari vektor **a**, dilambangkan dengan $\hat{e}$. Vektor satuan arahnya searah dengan vektor **a** dan panjangnya sama dengan satu satuan.

   Jika vektor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, maka vektor satuan dari **a** dirumuskan dengan:

   $$\hat{e} = \frac{\mathrm{a}}{|\mathrm{a}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
5. Jika a, b, c, k, l adalah vektor maka sifat-sifat operasi hitung pada vektor adalah sebagai berikut
   - $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
   - $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
   - $\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$
   - $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$
   - $\mathbf{k}(\mathbf{la}) = (\mathbf{kl})\mathbf{a}$

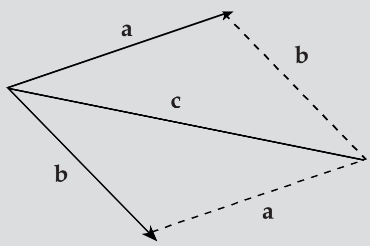
- $\mathbf{k}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{ka} + \mathbf{kb}$
- $(\mathbf{k} + \mathbf{l})\mathbf{a} = \mathbf{ka} + \mathbf{la}$
- $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

5. Penjumlahan antara vektor **a** dan **b** dapat dilakukan dengan dua cara berikut ini.
   - Cara segitiga



Titik pangkal vektor **b** berimpit dengan titik ujung vektor **a**.

   - Cara jajargenjang



Titik pangkal vektor **a** berimpit dengan titik pangkal vektor **.**

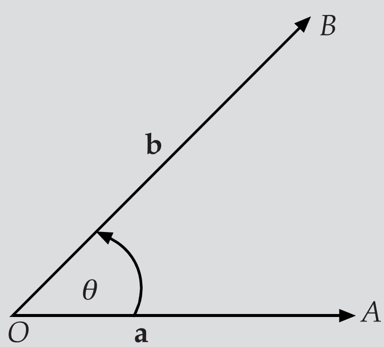
6. Sifat-sifat perkalian skalar dua vektor
   - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
   - $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
   - $k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b})$, k adalah konstanta
   - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

7. Sudut antara dua vektor

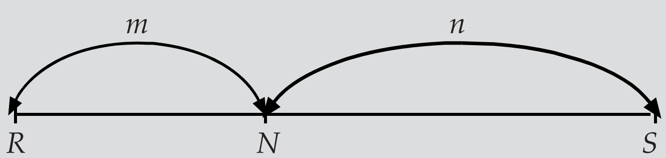
$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

Sehingga

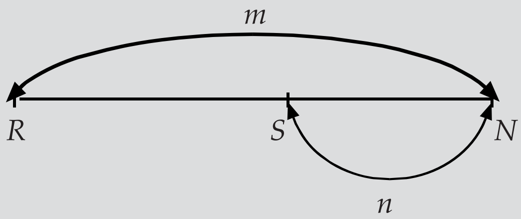
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$



8. Perbandingan vektor
   - Titik N membagi PQ di dalam $\Rightarrow PN : NQ = m : n$



- Titik N membagi PQ di luar $\Rightarrow$ $PN : NQ = m : (-n)$



Ulangan Bab 4

I. Pilihlah jawaban yang paling tepat!

1. Diketahui titik P (1, 7) dan Q(4, 1). Titik R adalah sebuah titik pada garis hubung PQ sehingga $\overrightarrow{PR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$. Koordinat titik C adalah . . . .

A. (5, 2)
B. (3, –6)
C. (2, 5)
D. (1, –2)
E. (4, 2)

2. Diketahui $C = 16i - 15j + 12k$ dan d vektor yang segaris (kolinear) berlawanan arah dengan c. Jika $|\mathbf{d}| = 75$, maka d = ...

A. $-16i + 15j - 12k$
B. $32i - 30j + 24k$
C. $-32i + 30j - 24k$
D. $-48i + 45j - 36k$
E. $-56i + 36j - 24k$

3. Diberikan segi enam beraturan $ABCDEF$. Jika $\overrightarrow{AB} = u$ dan $\overrightarrow{AF} = v$, maka $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$ = ...

A. $2u + 2v$
B. $4u + 4v$
C. $5u + 5v$
D. $6u + 6v$
E. $8u + 8v$

4. Jika $\overrightarrow{OA} = (1, 2)$, $\overrightarrow{OB} = (4, 2)$ dan $\theta = \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ maka $\tan\theta$ = ...

A. $\frac{3}{5}$
B. $\frac{3}{4}$
C. $\frac{4}{3}$
D. $\frac{9}{16}$
E. $\frac{6}{13}$

5. Jika $\mathbf{a}$ = (2, k), $\mathbf{b}$ = (3, 5), dan sudut ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$) adalah $\frac{\pi}{4}$, maka konstanta positif k adalah . . . .

A. $\frac{1}{4}$
B. $\frac{1}{2}$
C. 2
D. 4
E. 8

6. Jika sudut antara vektor $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j} + p\mathbf{k}$ dan $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \sqrt{2}\,\mathbf{j} + p\mathbf{k}$ adalah 60°, maka p = ...

A. $-\frac{1}{2}$ atau $\frac{1}{2}$
B. –1 atau 1
C. $-\sqrt{2}$ atau $\sqrt{2}$
D. $-\sqrt{5}$ atau $\sqrt{5}$
E. $-\sqrt{7}$ atau $\sqrt{7}$

7. Diketahui persegi panjang $OABC$ dan D titik tengah OA, CD memotong diagonal AB di P. Jika $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ dan $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, maka $\overrightarrow{OP}$ dapat dinyatakan sebagai . . . .

A. $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$
B. $\frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$
C. $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$
D. $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$
E. $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{3}{4}\mathbf{b}$

8. $ABCDEF$ adalah segi enam beraturan dengan pusat O, jika $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{BC}$ masing-masing dinyatakan oleh vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$, maka sama dengan . . . .

A. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$
B. $\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$
C. $\mathbf{v} - \mathbf{u}$
D. $2\mathbf{v} - \mathbf{u}$
E. $3\mathbf{v} - \mathbf{u}$

9. Diketahui kubus $OABC.\ DEFG$. Jika $\overrightarrow{OA}$ = (1, 0 , 0) dan $\overrightarrow{OC}$ = (0, 0, 1), maka vektor proyeksi $\overrightarrow{AF}$ ke $\overrightarrow{OF}$ adalah . . . .

A. $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ D. $\frac{2}{3}(1, 1, 1)$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$ E. $\frac{3}{4}(1, 1, 1)$

C. $\frac{2}{3}\sqrt{3}\,(1, 1, 1)$

10. Diketahui $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ dan $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$. Jika panjang proyeksi **u** dan **v** adalah 6, maka x adalah . . . .

A. 8 D. −6

B. 10 E. −8

C. −4

11. Gambar di bawah ini menunjukkan bahwa $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \ldots.$

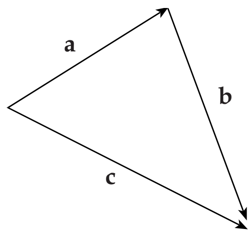
A. **c**

B. 2**a**

C. 2**b**

D. 2**c**

E. **c**



12. Diketahui kubus $OABC.DEFG$. Jika $\overrightarrow{OB}$ (1, 0, 0), $\overrightarrow{OC}$ = (0, 1, 0), dan $\overrightarrow{OB}$ (0, 0, 1). Vektor proyeksi $\overrightarrow{OD}$ ke $\overrightarrow{OF}$ adalah . . . .

A. $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ D. $\frac{2}{3}(1, 1, 1)$

B. $\frac{1}{3}\sqrt{3}(1, 1, 1)$ E. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

C. $\frac{2}{3}\sqrt{3}(1, 1, 1)$

13. Sudut antara vektor $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + (2\mathbf{x} + 1)\mathbf{j} - x\sqrt{3}\,\mathbf{k}$ dan **b** adalah 60°. Jika panjang proyeksi a ke b sama dengan $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, maka $x = \ldots.$

A. 4 atau $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$ atau −1

B. 1 atau 4 E. $-\frac{1}{2}$ atau 1

C. 1 atau 2

14. Diketahui **u** dan **v** vektor tak nol sebarang, $\mathbf{w} = |\mathbf{v}|.\mathbf{u} + |\mathbf{u}|.\mathbf{v}$. Jika $\theta = \angle(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$ dan $\phi = \angle(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$, maka . . . .

A. $\phi - \theta = 90°$ D. $\theta - \phi = 90°$

B. $\theta + \phi = 90°$ E. $\theta - \phi = 180°$

C. $\theta = \phi$

15. Sebuah vektor **x** dengan panjang $\sqrt{5}$ membuat sudut lancip dengan vektor $\mathbf{y} = (3, 4)$. Jika vektor **x** diproyeksikan ke vektor **y**, panjang proyeksinya 2. Vektor **x** tersebut adalah . . . .

A. (1, 2) atau $\left(\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$

B. (2, 1) atau $\left(\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$

C. (1, 2) atau $\left(\frac{4}{5}\sqrt{5}, -\frac{3}{5}\sqrt{5}\right)$

D. (2, 1) atau $\left(\frac{3}{5}\sqrt{5}, \frac{4}{5}\sqrt{5}\right)$

E. $\left(\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$ atau $\left(\frac{4}{5}\sqrt{5}, -\frac{3}{5}\sqrt{5}\right)$

II. ***Jawablah pertanyaan berikut dengan jelas dan tepat!***

1. Misalkan $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (2, -3, 1)$ dan $\mathbf{c} = (3, 2, -1)$. Hitunglah:

a. $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ d. $3(\mathbf{a} - 7\mathbf{b})$

b. $7\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ e. $-3\mathbf{b} - 8\mathbf{c}$

c. $-\mathbf{c} + \mathbf{b}$ f. $2\mathbf{b} - (\mathbf{a} + \mathbf{c})$

2. Gambarlah vektor-vektor berikut!

a. $\mathbf{m} = (-3, 7)$ d. $\mathbf{p} = (2, 3, 4)$

b. $\mathbf{n} = (-6, -2)$ e. $\mathbf{q} = (2, 0, 2)$

c. $\mathbf{o} = (0, -4)$ f. $\mathbf{r} = (0, 0, -2)$

3. Misalkan $\mathbf{p} = (1, -3, 2)$, $\mathbf{q} = (1,1, 0)$ dan $\mathbf{r} = (2, 2, -4)$. Hitunglah:

a. $|\mathbf{p} + \mathbf{q}|$ d. $|3\mathbf{p} - 5\mathbf{q} + \mathbf{r}|$

b. $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|$ e. $\frac{1}{|\mathbf{r}|}\mathbf{r}$

c. $|-2\mathbf{p}| + 2|\mathbf{p}|$ f. $\left|\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right|\mathbf{r}$

4. Buktikanlah bahwa:
$(\mathbf{u} + k\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$

5. Buktikanlah!

a. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$

b. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - \frac{1}{4}|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2$

BAB 5

Barisan, Deret, dan Notasi Sigma

Sumber: http://jsa007.tripod.com

A. Barisan dan Deret Aritmetika

B. Barisan dan Deret Geometri

C. Notasi Sigma dan Induksi Matematika

D. Aplikasi Barisan dan Deret

Saat mengendarai motor, pernahkah kalian mengamati speedometer pada motor tersebut? Pada speedometer terdapat angka-angka 0, 20, 40, 60, 80, 100, dan 120 yang menunjukkan kecepatan motor saat kalian mengendarainya. Angka-angka ini berurutan mulai dari yang terkecil ke yang terbesar dengan pola tertentu sehingga membentuk sebuah barisan aritmetika. Agar kalian lebih memahami tentang barisan aritmetika ini, pelajarilah bab berikut dengan baik.

A. Barisan dan Deret Aritmetika

Niko Sentera memiliki sebuah penggaris ukuran 20 cm. Ia mengamati bilangan-bilangan pada penggarisnya ini. Bilangan-bilangan tersebut berurutan 0, 1, 2, 3, …, 20. Setiap bilangan berurutan pada penggaris ini mempunyai jarak yang sama, yaitu 1 cm. Jarak antar bilangan berurutan ini menunjukkan selisih antarbilangan. Jadi, selisih antara bilangan pertama dan kedua adalah $1 - 0 = 1$, selisih antara bilangan kedua dan ketiga adalah $2 - 1 = 1$, dan seterusnya hingga selisih antara bilangan keduapuluh dan keduapuluh satunya juga 1.

Bilangan-bilangan berurutan seperti pada penggaris ini memiliki selisih yang sama untuk setiap dua suku berurutannya sehingga membentuk suatu barisan bilangan. Barisan bilangan seperti ini disebut **barisan aritmetika** dengan selisih setiap dua suku berurutannya disebut beda (b).

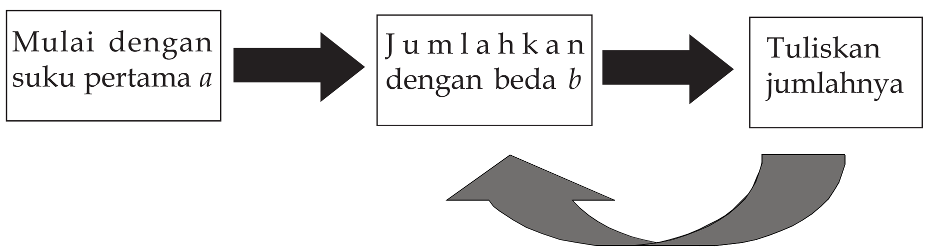
Barisan aritmetika adalah suatu barisan dengan selisih (beda) antara dua suku yang berurutan selalu tetap.
Bentuk umum:

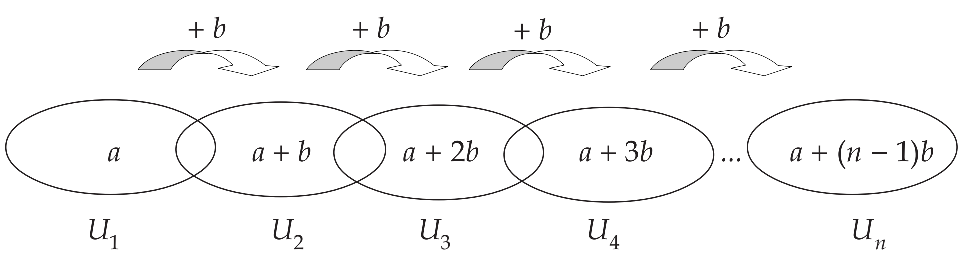
$$U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n \text{ atau}$$
$$a, (a + b), (a + 2b), \ldots, (a + (n - 1)b)$$

Pada penggaris yang dimiliki Niko Sentera, suku pertamanya 0, ditulis $U_1 = 0$. Adapun suku keduanya, $U_2 = 1$. Beda antara suku pertama dan suku kedua ini adalah $U_2 - U_1 = 1$. Begitu seterusnya, sehingga dapat dikatakan beda suku ke-n dengan suku sebelumnya adalah $U_n - U_{n-1} = 1$.

Pada barisan aritmetika, berlaku $U_n - U_{n-1} = b$ sehingga $U_n = U_{n-1} + b$

Jika kalian memulai barisan aritmetika dengan suku pertama a dan beda b maka kalian mendapatkan barisan berikut.





Tampak bahwa, $U_n = a + (n - 1)b$.

Suku ke-n barisan aritmetika adalah $U_n = a + (n - 1)b$
di mana U_n = Suku ke-n
a = Suku pertama
b = beda
n = banyaknya suku

Contoh

Diketahui barisan 5, –2, –9, –16, …, tentukanlah:
a. rumus suku ke-n
b. suku ke-25

Jawab:

Selisih dua suku berurutan pada barisan 5, –2, –9, –16, … adalah tetap, yaitu $b = -7$ sehingga barisan bilangan tersebut merupakan barisan aritmetika.

a. Rumus suku ke-n barisan aritmetika tersebut adalah $a + (n - 1)\,b$

$$\begin{aligned} U_n &= 5 + (n - 1)(-7) \\ &= 5 - 7n + 7 \\ &= 12 - 7n \end{aligned}$$

b. Suku ke-25 barisan aritmetika tersebut adalah

$$\begin{aligned} U_{25} &= 12 - 7 \cdot 25 \\ &= 12 - 175 \\ &= -163 \end{aligned}$$

Jika setiap suku barisan aritmetika dijumlahkan, maka diperoleh **deret aritmetika**.

Deret aritmetika adalah jumlah suku-suku dari barisan aritmetika.
Bentuk umum:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n \text{ atau}$$
$$a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (a + (n - 1)b)$$

$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (a + (n - 1)b)$ … *Persamaan* 1

Persamaan 1 ini dapat pula ditulis sebagai berikut.

$S_n = (a + (n - 1)b) + \ldots + (a + 2b) + (a + b) + a$ … *Persamaan* 2

Dengan menjumlahkan Persamaan 1 dan Persamaan 2, kalian mendapatkan

$$\begin{array}{rcl} S_n &=& a + (a + b) + \ldots + (a + (n - 1)b) \quad \ldots \textit{ Persamaan } 1 \\ S_n &=& (a + (n - 1)b) + (a + (n - 2)b) + \ldots + a \quad \ldots \textit{ Persamaan } 2 \\ \hline 2S_n &=& \underbrace{2a + (n - 1)b + 2a + (n - 1)b + \ldots + 2a + (n - 1)b}_{n \text{ suku}} \end{array} +$$

Catatan

- Barisan dituliskan sebagai berikut. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$
- Deret dituliskan sebagai berikut. $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

$$2S_n = n(2a + (n - 1)b)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$$

Oleh karena $U_n = a + (n - 1)b$, maka S_n dapat juga dinyatakan sebagai berikut.

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)b = \frac{n}{2}\left\{\left(a + \underbrace{a + (n-1)b)}_{U_n}\right)\right\} = \frac{n}{2}\{a + U_n\}$$

Rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika adalah

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)b] \text{ atau } S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

di mana S_n = Jumlah suku ke-n
n = banyaknya suku
a = Suku pertama
b = Beda
U_n = Suku ke-n

Contoh

1. Suku kedua suatu deret aritmetika adalah 5. Jumlah suku keempat dan suku keenam adalah 28. Tentukanlah suku kesembilannya.

Jawab:

$U_2 = 5$, berarti $a + b = 5$
$U_4 + U_6 = 28$, berarti:

$$\begin{aligned} (a + 3b) + (a + 5b) &= 28 \\ (a + b + 2b) + (a + b + 4b) &= 28 \\ (5 + 2b) + (5 + 4b) &= 28 \\ 10 + 6b &= 28 \\ 6b &= 18 \\ b &= 3 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi $b = 3$ ke $a + b = 5$, didapat $a + 3 = 5$ sehingga $a = 2$.
Jadi, suku kesembilan deret aritmetika tersebut adalah

$$\begin{aligned} U_9 &= 2 + 8 \cdot 3 \\ &= 2 + 24 \\ &= 26 \end{aligned}$$

2. Saat diterima bekerja di penerbit Literatur, Meylin membuat kesepakatan dengan pimpinan perusahaan, yaitu ia akan mendapat gaji pertama Rp1.800.000,00 dan akan mengalami kenaikan Rp50.000,00 setiap dua bulan. Jika ia mulai bekerja pada bulan Juli 2004, berapakah gaji yang diterimanya pada bulan Desember 2005?

Sumber: Koleksi Penerbit

Jawab:

Gaji Meylin mengikuti pola barisan aritmetika dengan suku pertama a = Rp1.800.000,00 dan beda b = Rp50.000,00.

Juli – Agustus 2004	September – Oktober 2004	November – Desember 2004	…	November – Desember 2005
U_1	U_2	U_3		U_9

$U_9 = a + 8b$ = Rp1.800.000,00 + 8 · Rp50.000,00 = Rp2.200.000,00

Jadi, gaji yang diterima Meylin pada bulan Desember 2005 adalah Rp2.200.000,00.

Asah Kompetensi 1

1. Tentukanlah suku yang dicantumkan di akhir barisan dan juga suku ke-n dari setiap barisan berikut!
   a. 13, 9, 5, …, U_{31}
   b. (2, 3), (–3, 2), (–8, 1), …, U_{20}
   c. ${}^2\log\frac{5}{16}, {}^2\log\frac{5}{8}, {}^2\log\frac{5}{4}, \ldots, U_{14}$
   d. $\frac{n+1}{n-1}, \frac{n+3}{n-3}, \frac{n+5}{n-5}, \ldots, U_{19}$
2. a. Suku pertama suatu deret aritmetika adalah $3\frac{1}{4}$, sedangkan suku ke-54 adalah $86\frac{3}{4}$. Tentukanlah jumlah 50 suku pertama deret tersebut!
   b. Suku kedua suatu deret aritmetika adalah 25, sedangkan suku ke-6 adalah 49. Tentukanlah jumlah 10 suku pertama deret tersebut!
   c. Suku ketiga suatu deret aritmetika adalah –38, sedangkan suku ke-7 adalah –66. Tentukanlah jumlah 12 suku pertama deret tersebut!
3. Banyak suku suatu deret aritmetika adalah 15. Suku terakhir adalah 47 dan jumlah deret 285. Tentukanlah suku pertama deret tersebut!
4. Tentukanlah jumlah deret berikut!
   a. Semua bilangan asli yang terletak di antara 1 dan 50 dan habis dibagi 4
   b. Semua bilangan bulat yang terletak di antara 1 dan 50 dan tidak habis dibagi 3
   c. Semua bilangan genap yang terletak di antara 1 dan 100 dan habis dibagi 3
5. Dalam sebuah permainan, 8 kentang ditempatkan pada sebuah garis lurus. Jarak dua kentang yang berdekatan 6 meter. Jarak kentang pertama ke keranjang 6 meter. Seorang peserta mulai bergerak dari keranjang, mengambil satu kentang sekali ambil dan memasukkannya ke dalam keranjang. Tentukanlah total jarak yang harus ditempuh peserta tersebut agar dapat menyelesaikan permainan!

Info Math

Tanpa menggunakan rumus, bagaimanakah cara menentukan jumlah 100 bilangan asli pertama? Caranya adalah sebagai berikut.
Misalkan, $J = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$.
Kalian juga dapat menuliskan, $J = 100 + 99 + 98 + \ldots + 1$.
Sekarang, jumlahkan kedua nilai J tersebut.

$$\begin{array}{rl} J &= 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 \\ J &= 100 + 99 + 98 + \ldots + 1 \quad + \\ \hline 2J &= 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 \\ 2J &= 100 \times 101 \\ 2J &= 10.100 \\ J &= 5.050 \end{array}$$

Jadi, jumlah 100 bilangan asli pertama adalah 5.050.

Bentuk umum penjumlahan bilangan asli dari 1 sampai n:

$$\begin{array}{rl} J_n &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n \\ J_n &= n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 \quad + \\ \hline 2J_n &= (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) \\ 2J_n &= n(n+1) \\ J_n &= \frac{n}{2}(n+1) \end{array}$$

GaMeMath

Di balik huruf-huruf yang membentuk kata **HITUNG** berikut tersembunyi bilangan-bilangan dengan pola tertentu.

H I T U N G

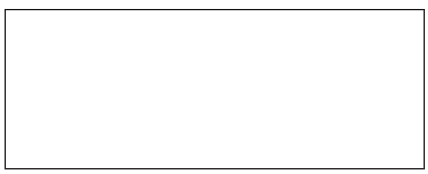
Jika huruf N, G, dan T berturut-turut menyembunyikan lambang bilangan 396, 418, dan 352, tentukanlah lambang bilangan yang tersembunyi di balik huruf H, I, dan U!

B. Barisan dan Deret Geometri

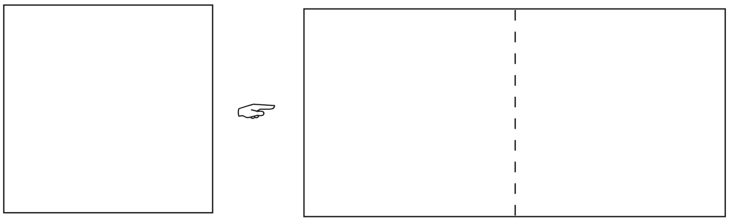
B. 1. Barisan Geometri

Niko Sentera mempunyai selembar kertas.

1 bagian kertas

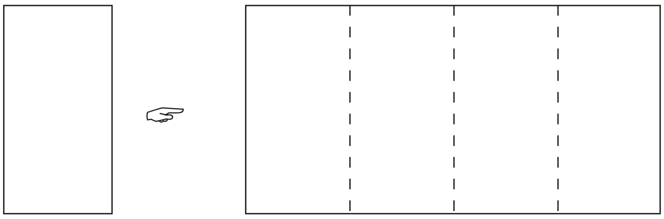


Ia melipat kertas ini menjadi 2 bagian yang sama besar.



Kertas terbagi menjadi 2 bagian yang sama besar

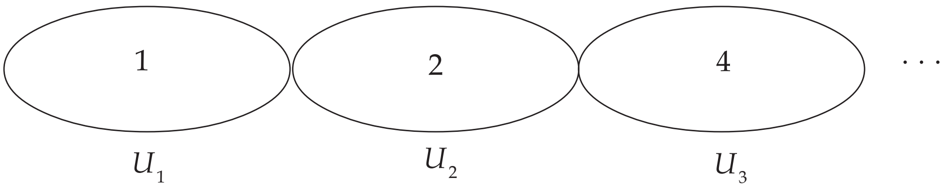
Kertas yang sedang terlipat ini, kemudian dilipat dua kembali olehnya.



Kertas terbagi menjadi 4 bagian yang sama besar

Niko Sentera terus melipat dua kertas yang sedang terlipat sebelumnya. Setelah melipat ini, ia selalu membuka hasil lipatan dan mendapatkan kertas tersebut terbagi menjadi 2 bagian sebelumnya.

Sekarang, perhatikan bagian kertas tersebut yang membentuk sebuah barisan bilangan.



Setiap dua suku berurutan dari barisan bilangan tersebut memiliki perbandingan yang sama, yaitu $\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \dots = \frac{U_n}{U_{n-1}} = 2$.

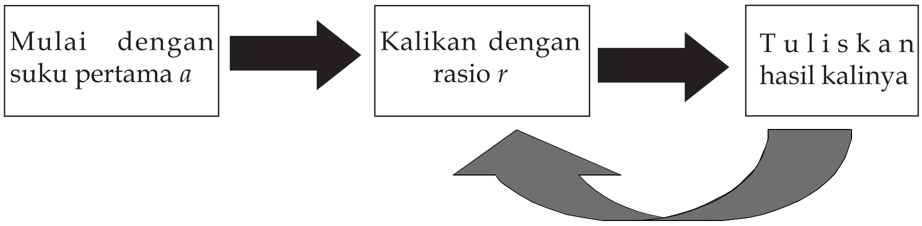
Tampak bahwa, perbandingan setiap dua suku berurutan pada barisan tersebut selalu tetap. Barisan bilangan seperti ini disebut **barisan geometri** dengan perbandingan setiap dua suku berurutannya dinamakan rasio (r).

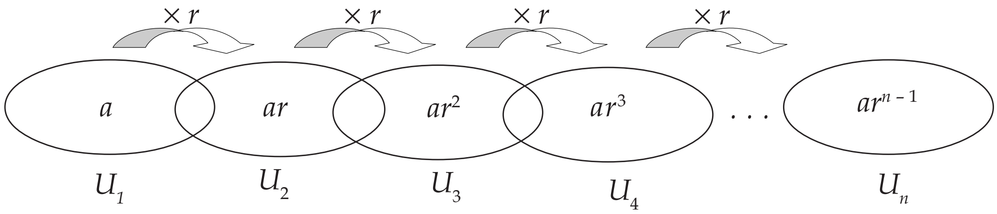
Barisan geometri adalah suatu barisan dengan pembanding (rasio) antara dua suku yang berurutan selalu tetap.
Bentuk umum:

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_n \text{ atau}$$
$$a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}$$

Pada barisan geometri, berlaku $\frac{U_n}{U_{n-1}} = r$ sehingga $U_n = r\, U_{n-1}$

Jika kalian memulai barisan geometri dengan suku pertama a dan rasio r maka kalian mendapatkan barisan berikut.





Contoh

Diketahui barisan 27, 9, 3, 1, . . . Tentukanlah:

a. rumus suku ke-n

b. suku ke-8

Jawab :

Rasio dua suku berurutan pada barisan 27, 9, 3, 1, . . . adalah tetap, yaitu $r = \frac{1}{3}$ sehingga barisan bilangan tersebut merupakan barisan geometri.

a. Rumus suku ke-n barisan geometri tersebut adalah

$$\begin{aligned} U_n &= 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= 3^3\,(3^{-1})^{n-1} \\ &= 3^3 \cdot 3^{-n+1} \\ &= 3^{4-n} \end{aligned}$$

b. Suku ke-8 barisan geometri tersebut adalah

$$\begin{aligned} U_8 &= 3^{4-8} \\ &= 3^{-4} \\ &= \frac{1}{81} \end{aligned}$$

B. 2. Deret Geometri

Jika setiap suku barisan geometri tersebut dijumlahkan, maka diperoleh *deret geometri.*

Deret geometri adalah jumlah suku-suku dari barisan geometri.
Bentuk umum:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n \text{ atau}$$
$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$

$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$ ... *Persamaan* 1

Dengan mengalikan kedua ruas persamaan 1 dengan r, didapatkan persamaan 2 berikut.

$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n$ ... *Persamaan* 2

Sekarang, kurangkan persamaan 1 dengan persamaan 2.

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n)$$

$$S_n(1 - r) = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Rumus jumlah n suku pertama deret geometri adalah

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, |r| < 1$$

B. 3. Deret Geometri Tak Terhingga

Deret geometri tak hingga adalah deret geometri dengan $|r| < 1$. Jumlah S dari dert geometri tak hingga adalah

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

Rumus pada deret geometri berlaku juga untuk n tak terhingga. Adapun untuk *n tak terhingga* terdapat dua kasus yang harus kalian perhatikan, yaitu:

Kasus 1

Jika $-1 < r < 1$, maka r^n menuju 0.

Akibatnya, $S_\infty = \frac{a(1-0)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$

Deret geometri dengan $-1 < r < 1$ ini disebut *deret geometri konvergen* (memusat).

Kasus 2

Jika $r < -1$ atau $r > 1$, maka untuk $n \to \infty$, nilai r^n makin besar.

Untuk $r < -1$, $n \to \infty$ dengan n ganjil didapat $r^n \to \infty$

Untuk $r < -1$, $n \to \infty$ dengan n genap didapat $r^n \to \infty$

Untuk $r > 1$, $n \to \infty$ didapat $r^n \to \infty$

Akibatnya, $S_\infty = \frac{a(1 \pm\infty)}{1-r} = \pm\infty$

Deret geometri dengan $r < -1$ atau $r > 1$ ini disebut *deret geometri divergen* (memencar).

Catatan

Rumus jumlah n suku pertama deret geometri.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, |r| < 1$$

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, |r| > 1$$

Contoh

1. Suatu deret geometri mempunyai suku ke-5 sama dengan 64 dan suku ke-2 sama dengan 8. Tentukanlah jumlah 10 suku pertama dan jumlah n suku pertama deret geometri tersebut!

   Jawab:

   $U_2 = 8$, berarti $ar = 8$

   $U_5 = 64$, berarti:

   $ar^4 = 64$

$$ar \cdot r^3 = 64$$
$$8r^3 = 64$$
$$r^3 = 8$$

Didapat $r = 2$.

Dengan mensubstitusi $r = 2$ ke persamaan $ar = 8$, kalian mendapatkan $a \cdot 2 = 8$ sehingga $a = 4$.

Jumlah n suku pertama deret ini adalah $S_n = \frac{4(1-2^n)}{1-2}$

$$= \frac{4 - 4 \cdot 2^n}{-1}$$
$$= 4 \cdot 2^n - 4$$
$$= 2^2 \cdot 2^n - 4$$
$$= 2^{2+n} - 4$$

Jumlah 10 suku pertama deret ini adalah $S_{10} = 2^{2+10} - 4$

$$= 2^{12} - 4$$
$$= 4.096 - 4$$
$$= 4.092$$

2. Tentukanlah nilai x agar deret geometri $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ konvergen.

Jawab:

Terlebih dahulu, kalian harus menentukan rasio dari deret tersebut.

$$r = \frac{x}{1} = x$$

Agar deret geometri tersebut konvergen, haruslah $-1 < r < 1$ sehingga $-1 < x < 1$.

Catatan

$S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$S_\infty = S_{ganjil} - S_{genap}$

$S_{ganjil} = \frac{a}{1-r^2}$

$S_{genap} = \frac{ar}{1-r^2}$

$r = \frac{S_{ganjil}}{S_{genap}}$

3. Niko Sentera memotong seutas tali menjadi 5 potong. Panjang kelima potong tali ini membentuk barisan geometri. Jika potongan yang paling pendek 2 cm dan potongan yang paling panjang 162 cm, berapakah panjang tali semula?

Jawab:

Panjang potongan yang paling pendek merupakan U_1, sedangkan panjang potongan yang paling panjang merupakan U_5.

Jadi, $U_1 = 2$ cm dan $U_5 = 162$ cm.

Dari $U_1 = 2$ cm, didapat $a = 2$ cm.

Dari $U_5 = 162$ cm, didapat $ar^4 = 162$ cm.

Oleh karena $a = 2$ cm, maka $2 \cdot r^4 = 162$ cm. Didapat, $r^4 = 81$.

Jadi, $r = 3$.

Panjang tali semula merupakan jumlah 5 suku pertama deret geometri tersebut, yaitu:

$$S_5 = \frac{2(1-3^5)}{1-3} = \frac{2(1-243)}{-2} = 242 \text{ cm}$$

Jadi, panjang tali semula adalah 242 cm.

Asah Kompetensi 2

1. Tentukanlah suku yang dicantumkan di akhir barisan dan juga suku ke-n dari setiap barisan berikut!

   a. $\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \ldots, U_{10}$

   b. $128, -64, 32, \ldots, U_{12}$

   c. $1, \sqrt{2}, 2, \ldots, U_9$

   d. $1, \frac{1}{a+1}, \frac{1}{a^2+2a+1}, \ldots, U_6$

2. a. Suku kedua suatu deret geometri adalah 10, suku ke-4 adalah 40, dan suku ke-n adalah 160. Jika suku-suku deret geometri tersebut merupakan suku-suku positif, tentukanlah jumlah n suku pertama deret tersebut!

   b. Suku ke-5 suatu deret geometri adalah 12 dan suku ke-8 adalah 96. Tentukanlah jumlah 8 suku pertama deret tersebut!

   c. Suku ke-5 suatu deret adalah geometri x^3 dan suku ke-8 adalah x^4. Tentukanlah jumlah 6 suku pertama deret tersebut!

   d. Suku pertama suatu deret geometri adalah x^{-4}, suku ke-3 adalah x^{2a}, dan suku ke-8 adalah x^{52}. Tentukanlah nilai a dan jumlah 10 suku pertama deret tersebut!

3. Tentukan nilai x agar deret geometri berikut konvergen.

   a. $(x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + \ldots.$

   b. $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots.$

   c. $x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^3 + \ldots.$

   d. $\cos x + \cos x \sin x + \cos x \sin^2 x + \ldots.$

4. Jika U_n menyatakan suku ke-n barisan geometri, a suku pertama, dan r rasio, maka tentukan

   $\frac{U_{n+2} \cdot U_{n-2}}{\left(U_{n-1}\right)^2}$.

5. Di antara bilangan 7 dan 448 disisipkan dua bilangan sehingga keempat bilangan tersebut membentuk barisan geometri. Tentukan rasio dari barisan tersebut!

6. Tentukan nilai x agar $4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^x = 1.364$

7. Diketahui $P = {}^{64}\log (x-2) + {}^{64}\log^2 (x-2) + {}^{64}\log^3 (x-2) + \ldots$

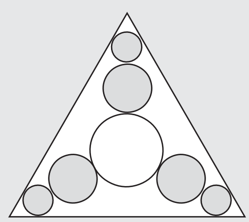
   Agar $1 < P < 2$, tentukanlah nilai x. **Olimpiade Matematika SMU, 2000**

8. Tiga orang membagi sebuah apel. Pertama, apel dibagi menjadi empat bagian sehingga setiap orang mendapat bagian. Bagian keempat dibagi empat bagian dan setiap orang mendapat bagian, demikian seterusnya. Berapa bagiankah yang didapat oleh mereka masing-masing?

Siapa Berani

Perhatikan gambar di samping!

Di dalam segitiga samasisi yang panjang sisinya 20 cm diisi lingkaran-lingkaran yang jumlahnya sampai tak hingga. Tentukanlah luas lingkaran seluruhnya!



1 Asah Kemampuan

Waktu : 90 menit

1. Jika U_n menyatakan suku ke-n, Sn jumlah n suku pertama, a suku pertama, dan b beda barisan aritmetika, tentukanlah:

Bobot soal: 20

a. $U_{n+3} - 3U_{n+2} + 3U_{n+1} + U_n$

b. $S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n$

2. a. Di antara bilangan 3 dan 57 disisipkan 8 bilangan sehingga terbentuk barisan aritmetika. Tentukanlah beda dari barisan tersebut!

Bobot soal: 20

b. Di antara bilangan 2 dan 62 disisipkan 9 bilangan sehingga terbentuk deret aritmetika. Tentukanlah jumlah suku-suku deret tersebut!

c. Di antara bilangan a dan b disisipkan 4 bilangan sehingga terbentuk barisan geometri dengan rasio. Jika jumlah semua bilangan tersebut 53, tentukanlah suku kedua dari barisan tersebut!

3. Tiga bilangan rasional membentuk barisan aritmetika. Jumlah ketiga bilangan 42 dan hasil kalinya 2.520. Tentukanlah bilangan terkecilnya!

Bobot soal: 20

4. U_1, U_2, U_3, U_4, dan U_5 adalah 5 suku pertama deret geometri. Jika $\log U_1 + \log U_2 - \log U_3 + \log U_4 + \log U_5 = 5 \log 3$ dan $U_4 = 12$, tentukanlah U_5.

Bobot soal: 20

Olimpiade Matematika SMU, 2001

5. Tiga bilangan merupakan barisan aritmetika. Jika suku tengah dikurangi 5, maka akan terbentuk barisan geometri dengan rasio 2. Tentukanlah jumlah barisan aritmetika dan barisan geometri yang terbentuk!

Bobot soal: 10

6. Pada barisan bilangan 4, x, y, z diketahui tiga suku pertama membentuk barisan geometri dan tiga suku terakhir membentuk barisan aritmetika. Tentukanlah nilai $x + y$.

Bobot soal: 10

Olimpiade Matematika SMU, 2001

C. Notasi Sigma dan Induksi Matematika

Notasi sigma yang dilambangkan dengan "Σ" adalah sebuah huruf Yunani yang artinya penjumlahan. Notasi ini digunakan untuk meringkas penulisan penjumlahan bentuk panjang dari jumlah suku-suku yang merupakan variabel berindeks atau suku-suku suatu deret.

Jika diketahui suatu barisan tak berhingga $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, maka jumlah dari n suku pertama barisan tersebut dinyatakan dengan $\sum_{k=1}^{n} a_k$.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Jumlah suatu deret aritmetika dan geometri (S_n) dapat ditulis dalam notasi sigma, yaitu:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$$

Untuk deret aritmetika:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(a + (k-1)b\right) = a + (a+b) + (a+2b) + \ldots + \left(a + (n-1)b\right)$$

Untuk deret geometri:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$

Contoh

Tentukanlah bentuk umum dari setiap deret berikut dengan menggunakan notasi sigma dan hitunglah hasil dari penjumlahan deret tersebut!

a. $1 + 3 + 5 + 7 + 9$

b. $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$

c. $1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2$

Jawab:

a. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{n=1}^{5} (2n-1) = 25.$

Pada notasi sigma ini, $n = 1$ disebut batas bawah, sedangkan 5 disebut batas atas. Penjumlahan yang ditulis dalam notasi sigma ini merupakan penjumlahan 5 bilangan ganjil pertama.

b. $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$

Pada notasi sigma ini, $k = 1$ disebut batas bawah, sedangkan n disebut batas atas. Penjumlahan yang ditulis dalam notasi sigma ini merupakan penjumlahan n bilangan ganjil pertama.

c. $1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n + 1)(2n + 1).$

Pada notasi sigma ini, $k = 1$ disebut batas bawah sedangkan n disebut batas atas. Penjumlahan yang ditulis dalam notasi sigma ini merupakan penjumlahan n bilangan kuadrat pertama.

Pada contoh nomor 2, kalian menyatakan bahwa jumlah n bilangan ganjil pertama adalah n^2. Adapun pada contoh nomor 3, kalian menyatakan bahwa jumlah n bilangan kuadrat pertama adalah $n(n + 1)(2n + 1)$. Apakah rumus yang kalian tuliskan tersebut benar?

Untuk membuktikannya, kalian dapat menggunakan induksi matematika yang telah kalian pelajari di kelas X. Langkah-langkah pembuktian tersebut adalah sebagai berikut.

a. Buktikan rumus tersebut berlaku untuk $n = 1$.

b. Misalkan rumus tersebut berlaku untuk $n = k$,

c. Buktikanlah bahwa rumus tersebut berlaku juga untuk $n = k + 1$.

Dengan induksi matematika ini, kalian dapat membuktikan contoh nomor 2 dan contoh nomor 3.

Akan dibuktikan $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Misalkan, $P(n) = 2n - 1$

Untuk $n = 1$, $P(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

Jadi, untuk $n = 1$, rumus berlaku sebab ruas kiri dan ruas kanan persamaan menghasilkan bilangan yang sama, yaitu 1.

Misalkan rumus berlaku untuk $n = k$, maka $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) = k^2$

Selidiki, apakah rumus berlaku untuk $n = k + 1$?

Untuk $n = k + 1$, pada ruas kiri didapat,

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1)}_{k^2} + (2(k + 1) - 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Pada ruas kanan persamaan, didapat $(k + 1)^2$.

Jadi, untuk $n = k + 1$, ruas kiri dan ruas kanan persamaan menghasilkan bilangan yang sama, yaitu $(k + 1)^2$.

Dengan demikian, $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)= n^2$ berlaku untuk $n = k$ dan untuk $n = k + 1$, sehingga dapat diambil kesimpulan bahwa $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ berlaku untuk semua n bilangan asli.

Sekarang, akan dibuktikan $1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2 = \frac{1}{2} n(n + 1)(2n + 1)$.

Misalkan $P(n) = n^2$.

Untuk $n = 1$, pada ruas kiri persamaan $P(1) = 1^2 = 1$.

Pada ruas kanan didapat $\frac{1}{6} \cdot 1(1 + 1)(2 \cdot 1 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 = 1$.

Jadi, untuk $n = 1$ rumus berlaku, sebab ruas kiri dan ruas persamaan menghasilkan bilangan yang sama, yaitu 1.

Misalkan rumus tersebut berlaku untuk $n = k$, maka

$$1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + k^2 = \frac{1}{6} k(k + 1)(2k + 1).$$

Selidiki, apakah rumus berlaku untuk $n = k + 1$?

Untuk $n = k + 1$, didapat ruas kiri persamaan,

$$\begin{aligned}
\underbrace{1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + k^2}_{\frac{1}{2} k(k + 1)(2k + 1)} + (k + 1)^2 &= \frac{1}{6} k(k + 1)(2k + 1) + (k + 1)^2 \\
&= (k + 1)\left(\frac{2k^2}{6} + \frac{7k}{6} + 1\right) \\
&= (k + 1)(2k^2 + 7k + 6) \\
&= (k + 1)(k + 2)(2k + 3)
\end{aligned}$$

Pada ruas kanan persamaan, juga didapat $\frac{1}{6}(k + 1)(k + 2)(2k + 3)$.

Jadi, untuk $n = k + 1$, ruas kiri dan ruas kanan persamaan menghasilkan bilangan yang sama, yaitu $(k + 1)(k + 2)(2k + 3)$.

Dengan demikian, $1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ berlaku untuk $n = k$ dan untuk $n = k + 1$ sehingga kalian dapat membuat kesimpulan bahwa $1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ di mana n adalah bilangan asli.

Berikut ini adalah sifat-sifat notasi sigma.

Jika m dan n adalah bilangan asli, dengan $m \leq n$ dan $c \in R$, maka berlaku:

1. $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$
2. $\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$
3. $\sum_{k=m}^{n} c\,a_k = c\sum_{k=m}^{n} a_k$
4. $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p}$
5. $\sum_{k=m}^{n} c = (n - m + 1)c$
6. $\sum_{k=m}^{p-1} a_k + \sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k$
7. $\sum_{k=m}^{m-1} a_k = 0$
8. $\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=m}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=m}^{n} a_k \cdot b_k + \sum_{k=m}^{n} b_k^2$

Asah Kompetensi 3

1. Tentukanlah bentuk notasi sigma dari setiap deret berikut!

a. $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots$

b. $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$

c. $1 + 8 + 27 + 64 + \ldots$

d. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \frac{5}{9} + \ldots$

e. $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots$

2. Nyatakanlah bentuk notasi sigma berikut dalam bentuk deret!

a. $\sum_{n=2}^{6} (2n + 1)$

b. $\sum_{n=1}^{5} \left(n^2 - 1\right)$

c. $\sum_{n=1}^{6} (1 - 4n)$

d. $\sum_{n=5}^{10} \left(\frac{n^2 + 1}{n}\right)$

3. Tentukanlah bentuk notasi sigma dari penjumlahan berikut!

a. $x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \ldots + xy^{n-1} + y^n$

b. $y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{20}$

c. $a^{2n} + a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 + \ldots + ab^{2n-1} + b^{2n}$

4. Buktikanlah!

a. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b. $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

c. $(a_0 + 1) + (a_1 + 1) + (a_2 + 1) + \ldots + (a_{n-1} + 1) = \sum_{n=1}^{1} an$

D. Aplikasi Barisan dan Deret

Barisan dan deret banyak digunakan dalam bidang ekonomi seperti perbankan, perdagangan, dan lain sebagainya. Lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh

1. Rina menanam modal sebesar Rp20.000.000,00 dengan bunga majemuk 5%. Berapakah besar modal setelah 2 tahun?

Jawab:

Misalkan M adalah modal awal, b adalah bunga setiap tahun, n adalah periode, dan M_n adalah modal setelah ditambah bunga majemuk.

- M = Rp20.000.000,00
- $n = 2$
- $b = 5\% = 0{,}05$
- $M_n = M(1 + b)n$
  $= 20.000.000(1 + 0{,}05)^2$
  $= 20.000.000(1{,}05)^2$
  $= 22.050.000$

Jadi, setelah 2 tahun modalnya menjadi Rp22.050.000,00.

2. Wagiman membeli sebuah komputer seharga Rp3.000.000,00. Setiap satu bulan kerja terjadi penyusutan sebesar 10% dari harga beli. Berapakah harga jual komputer tersebut pada akhir 9 bulan kerja?

Jawab:

Misalkan M adalah harga beli, p adalah penyusutan, n adalah periode, dan M_n adalah modal setelah ditambah harga majemuk.

- M = Rp3.000.000,00
- $p = 10$
- $n = 9$

Harga komputer pada akhir periode n adalah $M = M\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$

Maka harga jual komputer pada akhir 9 bulan kerja adalah

$$\begin{aligned} 3.000.000\left(1 - \frac{10}{100}\right)^9 &= 3.000.000(1 - 0{,}1)^9 \\ &= 3.000.000(0{,}9)^9 \\ &= 3.000.000 \cdot 0{,}387 \\ &= 1.161.000 \end{aligned}$$

Jadi, harga jual komputer setelah 9 bulan kerja adalah Rp1.161.000,00.

Asah Kompetensi 4

1. Pada setiap awal tahun Wisnu menanamkan modalnya sebesar Rp5.000.000,00 dengan bunga majemuk 6% per tahun. Hitunglah jumlah seluruh modal Wisnu setelah 3 tahun!
2. Makmur membeli sebuah motor dengan harga Rp10.000.000,00. Setiap tahun diperkirakan menyusut 15%. Tentukanlah harga jual motor tersebut setelah 2 tahun!

2 Asah Kemampuan

Waktu : 90 menit

Bobot soal: 20

1. Tuliskan penjumlahan berikut dengan notasi sigma. Kemudian, tentukanlah hasil penjumlahannya

   a. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots - \frac{1}{50}$

   b. $1 + 16 + 81 + 256 + \ldots + n^4$

   c. $\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32} + \ldots$

Olimpiade Matematika SMU, 2002

d. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{1997\cdot 1999}$

Olimpiade Matematika SMU, 2002

e. $\frac{1}{5^{-10}+1}+\frac{1}{5^{-9}+1}+\ldots+\frac{1}{5^{-1}+1}+\frac{1}{5^{0}+1}+\ldots+\frac{1}{5^{10}+1}$

Olimpiade Matematika SMU, 2002

2. Tentukanlah hasil penjumlahan yang dituliskan dengan notasi sigma berikut!

Bobot soal: 10

a. $\sum_{n=1}^{7} 2^{n-1}$

b. $\sum_{n=1}^{5}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

c. $\sum_{k=0}^{10}(2^{k}-2^{k-1})$

d. $\sum_{i=-1}^{6}(2i^{2}-3i+1)$

e. $\sum_{i=3}^{7}(-1)^{i}(5i^{2}-4i)$

3. Buktikanlah dengan induksi matematika!

Bobot soal: 30

a. Untuk semua bilangan asli n, berlaku:

$$\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{3\,.\,4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{n}{n+1}$$

b. Untuk semua bilangan asli $n \geq 1$, berlaku

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$$

c. Untuk semua bilangan asli n, berlaku $(1 + h)^n \geq 1 + nh$

d. Untuk semua bilangan asli $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3

e. Untuk semua bilangan asli n, $(2 + n) + (2 - n)$ selalu merupakan bilangan bulat

4. Ferdy membuka tabungan di bank pada bulan Desember 2003 sebesar Rp500.000,00. Pada bulan Januari 2004, Ferdy menabung Rp50.000,00, kemudian pada bulan Maret 2004 menabung lagi sebesar Rp55.000,00. Pada bulan-bulan berikutnya, Ferdy menabung Rp60.000,00, Rp65.000,00, dan seterusnya sampai bulan Desember 2004. Berapakah jumlah seluruh tabungan Ferdy sampai akhir tahun 2004? (tidak termasuk bunga bank).

Bobot soal: 20

5. Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 1 meter. Setiap kali sesudah jatuh mengenai lantai, bola itu dipantulkan lagi dan mencapai tinggi $\frac{3}{4}$ dari tinggi sebelumnya. Tentukanlah panjang seluruh jalan yang dilalui bola itu sampai berhenti!

Bobot soal: 20

Siapa Berani

Andika ingin mengambil uang di ATM yang hanya menyediakan pecahan uang Rp20.000,00 dan Rp50.000,00. Kelipatan berapakah uang yang dapat diambil Andika jika ia akan mengambil kedua pecahan uang tersebut?

Sumber : *Matematika Diskrit*

Sumber: www.andrew.cmu.cdu

Rangkuman

1. Barisan adalah bilangan-bilangan yang diurutkan menurut suatu aturan tertentu. Bentuk umum barisan dituliskan sebagai berikut.

$$U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots, U_n$$

2. Deret adalah penjumlahan dari suku-suku suatu barisan.
   Bentuk umum deret dituliskan sebagai berikut.

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$$

3. Barisan arimetika adalah barisan bilangan dengan selisih setiap suku dengan suku sebelumnya selalu sama. Selisih dua suku berurutannya disebut beda (b). Bentuk umum suku ke–n barisan aritmetika dituliskan sebagai berikut.

$$U_n = a + (n - 1)b$$

   di mana U_n = Suku ke–n
   a = Suku pertama
   b = Beda
   n = Banyaknya suku

4. Deret aritmetika adalah penjumlahan dari suku-suku suatu barisan aritmetika. Bentuk umum jumlah n suku pertama deret aritmetika dituliskan sebagai berikut.

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)b\right] \text{ atau } S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

   di mana S_n = Jumlah suku ke–n
   n = Banyaknya suku
   a = Suku pertama
   b = Beda
   U_n = Suku ke–n

5. Barisan geometri adalah barisan bilangan dengan perbandingan setiap suku dengan suku sebelumnya selalu sama. Perbandingan setiap dua suku berurutannya disebut rasio (r). Bentuk umum suku ke–n barisan geometri dituliskan sebagai berikut.

$$\boxed{U_n = ar^{n-1}}$$

di mana U_n = Suku ke–n
a = Suku pertama
r = Rasio
n = Banyaknya suku

6. Deret geometri adalah penjumlahan dari suku-suku suatu barisan geometri. Bentuk umum jumlah n suku pertama deret geometri dituliskan sebagai berikut.

$$\boxed{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, |r| < 1}$$

di mana S_n = Jumlah suku ke–n
a = Suku pertama
r = Rasio
n = Banyaknya suku

7. Deret geometri tak terhingga terdiri dari dua kasus.
   - Deret geometri konvergen (memusat)

     Jika $-1 < r < 1$, maka $S_\infty = \frac{a}{1-r}$
   - Deret geometri divergen (memencar)

     Jika $r < -1$ atau $r > 1$, maka $S_\infty = \pm\infty$

8. Langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika:
   a. Buktikan bahwa rumus berlaku untuk $n = 1$.
   b. Misalkan rumus tersebut berlaku untuk $n = k$.
   c. Buktikan bahwa rumus tersebut berlaku untuk $n = k + 1$.

Ulangan Bab 5

I. Pilihlah jawaban yang paling tepat!

1. Jumlah bilangan-bilangan bulat antara 250 dan 1.000 yang habis dibagi 7 adalah . . . .

A. 66.661 D. 54.396
B. 45.692 E. 36.456
C. 73.775

2. Jumlah tak hingga suatu deret geometri adalah 8, dan jumlah semua suku pada urutan genap adalah $\frac{8}{3}$. Suku kelima deret tersebut adalah . . . .

A. 1 D. $\frac{1}{4}$
B. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{1}{5}$
C. $\frac{1}{3}$

3. Jumlah suku-suku nomor ganjil suatu deret geometri tak terhingga adalah 4. Rasio deret tersebut adalah $\frac{1}{2}$. Maka deret tersebut adalah . . . .

A. $3, \frac{3}{4}, \frac{3}{16}, \ldots$ D. $\frac{3}{6}, \frac{3}{8}, \frac{3}{12}, \ldots$
B. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$ E. $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{6}, \ldots$
C. $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$

4. Jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika adalah $S_n = \frac{1}{2}n(11 - n)$. Suku ke-100 adalah . . . .

A. –1 D. 6
B. –94 E. 3
C. 12

5. Diketahui deret bilangan
$10 + 12 + 14 + 16 + \ldots + 98$. Jumlah bilangan dari deret bilangan yang habis dibagi 2 tetapi tidak habis dibagi 5 adalah . . . .

A. 1.380 D. 3.300
B. 1.500 E. 4.400
C. 1.980

6. Jumlah 10 suku pertama deret
$^a\log\frac{1}{x} + {^a\log}\frac{1}{x^2} + {^a\log}\frac{1}{x^3} + \ldots$
adalah . . . .

A. $-55\ {^a\log}\ x$ D. $\frac{1}{45}\ {^a\log}\ x$
B. $\frac{1}{55}\ {^a\log}\ x$ E. $\frac{1}{35}\ {^a\log}\ x$
C. $-45\ {^a\log}\ x$

7. U_n adalah suku ke-n suatu deret. Jika suku pertama deret itu 100 dan $U_{n+1} - U_n = -6$ untuk setiap n, maka jumlah semua suku deret itu yang positif adalah . . . .

A. 888 D. 864
B. 886 E. 846
C. 884

8. Hasil kali suku kedua dan suku keempat dari suatu barisan geometri yang semua sukunya positif adalah 16. Jika jumlah tiga suku pertama adalah 7, maka suku pertamanya adalah . . . .

A. 4 D. 1
B. $\frac{3}{2}$ E. 0
C. 2

9. Tiga bilangan memberikan suatu deret geometri. Jika hasil kalinya adalah 216 dan jumlahnya adalah 26, maka rasio deret tersebut adalah . . . .

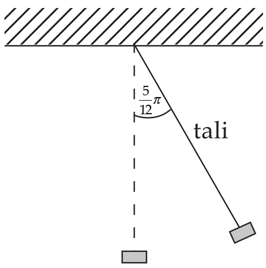
A. 2 atau $\frac{1}{2}$ D. 3 atau $\frac{1}{3}$
B. 18 atau 2 E. 4 atau $\frac{1}{4}$
C. 36 dan 20

10. Diketahui barisan sepuluh bilangan a_1, a_2, a_3, . . ., a_{10} Jika $a_1 = 2p + 25$, $a_2 = -p + q$, $a_3 = 3p + 7$, dan $a_{n+1} - a_n$ untuk $n = 1, 2, 3, \ldots, 9$, maka jumlah semua bilangan itu adalah . . . .

A. –240
B. –220
C. –200
D. –180
E. –160

II. Jawablah pertanyaan berikut dengan jelas dan tepat!

1. Sebuah ayunan memiliki panjang tali 60 cm mulai berayun dari posisi terjauh ke kedudukan seimbangnya sebesar $\frac{5}{12}\pi$ rad. Posisi terjauh yang dicapainya setiap kali berkurang sebesar 15 posisi dari sebelumnya. Tentukanlah panjang busur yang dijalani ujung ayunan itu sampai berhenti penuh!



2. Edwin menumpuk bata dalam bentuk barisan. Banyaknya bata pada baris pertama lebih banyak satu bata dari banyaknya bata pada baris di atasnya. Tumpukan bata dimulai dari 200 bata pada baris pertama dan baris terakhir satu bata. Hitunglah jumlah semua bata yang ditumpuk!

3. Berdasarkan survei, populasi hewan P bertambah menjadi empat kali lipat setiap 5 tahun. Jika pada tahun 200 populasi hewan P adalah 640 ekor, berapakah populasi hewan tersebut pada tahun 1990?

4. Grafik hasil produksi suatu pabrik per tahun merupakan suatu garis lurus. Jika produksi pada tahun pertama 150 unit dan pada tahun ketiga 190, tentukanlah produksi tahun ke-10!

5. Riska membeli barang kredit seharga Rp880.000,00. Ia melakukan pembayaran dengan diangsur berturut-turut setiap bulan sebesar Rp25.000,00, Rp27.000,00, Rp29.000,00, demikian seterusnya. Berapa lamakah kredit barang tersebut akan lunas?

Transformasi Geometri

BAB 6

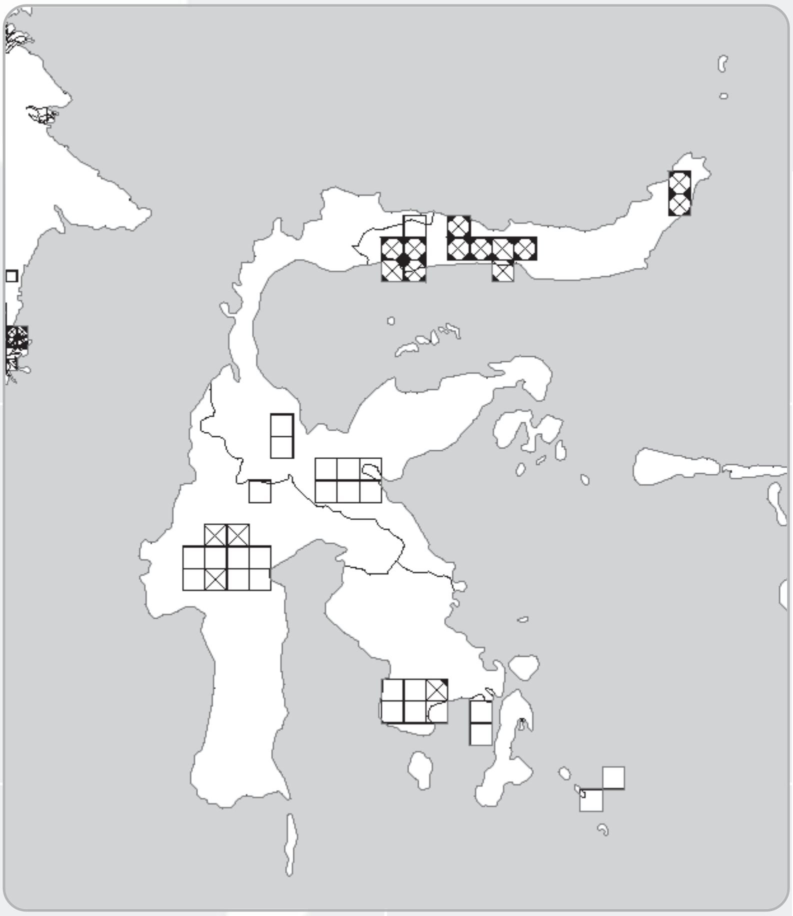
A. Translasi

B. Refleksi

C. Rotasi

D. Dilatasi

E. Komposisi Transformasi dengan Matriks



Sumber: www.geocities.com

Pantograf adalah alat untuk menggambar ulang suatu gambar dengan cara membesarkan dan mengecilkan gambar tersebut. Dengan menggunakan pantograf, Miko Sagala menggambar peta Pulau Sulawesi. Gambar peta yang dibuatnya memiliki bentuk yang sama dengan peta Pulau Sulawesi sesungguhnya dengan ukuran lebih besar. Dengan menggunakan pantograf ini, Miko Sagala telah mendilatasi peta sesungguhnya. Agar kalian lebih paham tentang dilatasi, pelajarilah bab berikut.

A. Translasi

Minggu lalu, Niko Sentera duduk di pojok kanan baris pertama di kelasnya. Minggu ini, ia berpindah ke baris ketiga lajur keempat yang minggu lalu ditempati Ucok. Ucok sendiri berpindah ke baris kedua lajur kedua yang minggu lalu ditempati Martina.

Sumber: smpstece1yk.tripod.com

Gambar 6.1 Niko Sentera dan kawan-kawan sedang belajar

Perhatikan perpindahan tempat duduk Niko Sentera dan Ucok ini.

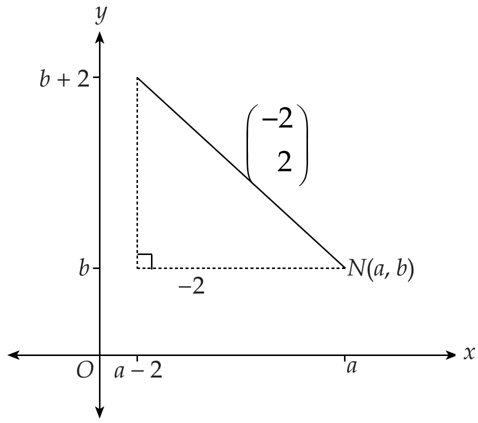
Hendra	Anah	Irma	Mega	Ganjar	Nunu	Baris
Ucok	Riska	Samuel	Gusti	Albert	Rajasa	
Bagas	Damai	Boy	Fadel	Katon	Agus	
Bani	Asep -1	Feri -2	Ucok	Erika	Utut	
Nugi	Martina	Bambang	Oci 2	Mahmud	Andre	
Jerisa	Tino	Tia	Pasha	Esti -2	Niko Sentera	

Lajur →   Guru

Gambar 6.2
Perpindahan tempat duduk Niko Sentra dan Ucok

- Niko Sentera berpindah 2 lajur ke kiri dan 2 baris ke belakang. Saat berpindah ini, Niko Sentera telah melakukan translasi 2 satuan ke kiri dan 2 satuan ke atas yang ditulis sebagai $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Kemudian, Ucok berpindah 2 lajur ke kiri dan 1 baris ke depan. Saat berpindah ini, Ucok telah melakukan translasi 2 satuan ke kiri dan 1 satuan ke bawah yang ditulis sebagai $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Misalkan, tempat duduk Niko Sentera minggu lalu di titik $N(a, b)$ pada koordinat Cartesius.

Dengan translasi $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, diketahui tempat duduknya minggu ini pada titik $N'(a - 2, b + 2)$.



Gambar 6.3

Translasi $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ titik N pada koordinat Cartesius

Kalian dapat menuliskan translasi ini sebagai berikut

$$N(a, b) \xrightarrow{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}} N'(a-2, b+2)$$

Dengan prinsip yang sama, jika titik $P(a, b)$ ditranslasikan dengan $T_1 = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, maka diperoleh bayangannya $P'(a + h, b + k)$.
Secara matematis, ditulis sebagai berikut.

$$\boxed{P(a, b) \xrightarrow{T_1 = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}} P'(a + h, b + k)}$$

Sekarang, translasikan lagi bayangan yang telah kalian peroleh dengan $T_2 = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$. Didapat,

$$P'(a + h, b + k) \xrightarrow{T_2 = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}} P''(a + h + l, b + k + m)$$

Perhatikan bahwa $P''(a + h + l, b + k + m) = P''(a + (h + l), b + (k + m))$.
Ini berarti, $P''(a + h + l, b + k + m)$ diperoleh dengan mentranslasikan $P(a, b)$ dengan $T = \begin{pmatrix} h + l \\ k + m \end{pmatrix}$.

Translasi T ini merupakan translasi T_1 dilanjutkan dengan T_2, yang ditulis sebagai $T_2 \circ T_1$.

Oleh karena $T_1 = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ dan $T_2 = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$, maka $T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} h + l \\ k + m \end{pmatrix}$

Akibatnya, titik $P(a, b)$ ditranslasikan dengan T_1 dilanjutkan dengan translasi T_2 menghasilkan bayangan P'' sebagai berikut.

$$P(a, b) \xrightarrow{T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} h + l \\ k + m \end{pmatrix}} P''(a + h + l, b + k + m)$$

Contoh

1. Translasi $T_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ memetakan titik $A(1, 2)$ ke $A'(4, 6)$.

a. Tentukan translasi tersebut.

b. Tentukanlah bayangan segitiga ABC dengan titik sudut $A(1, 2)$, $B(3, 4)$, dan $C(-5, 6)$ oleh translasi tersebut.

c. Jika segitiga yang kalian peroleh pada jawaban b ditranslasikan lagi dengan $T_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Tentukan bayangannya.

d. Translasikan segitiga ABC dengan translasi $T_2 \circ T_1$. Samakah jawabannya dengan jawaban c?

Jawab:

a.

$$A(1, 2) \xrightarrow{T_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}} A'(1 + p, 2 + q) = A'(4, 6)$$

Diperoleh $1 + p = 4$. Sehingga, $p = 3$

$2 + q = 6$. Didapat, $q = 4$

Jadi, translasi tersebut adalah $T_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. Translasi $T_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, artinya memindahkan suatu titik 3 satuan ke kanan dan 4 satuan ke atas. Dengan mentranslasikan titik-titik A', B', dan C' dari segitiga ABC dengan translasi T_1, kalian memperoleh segitiga $A'B'C'$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
A(1, 2) &\xrightarrow{T_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}} A'(1 + 3, 2 + 4) = A'(4, 6) \\
B(3, 4) &\longrightarrow B'(3 + 3, 4 + 4) = B'(6, 8) \\
C(-5, 6) &\longrightarrow C'(-5 + 3, 6 + 4) = C'(-2, 10)
\end{aligned}$$

Jadi, bayangan segitiga ABC adalah segitiga $A'B'C'$ dengan titik $A'(4, 6)$, $B'(6, 8)$, dan $C'(-2, 10)$.

c.

$$A'(4,\ 6) \xrightarrow{T_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}} A''(4 + (-1), 6 + (-1)) = A''(3,\ 5)$$

$$B'(6,\ 8) \longrightarrow B''(6 + (-1),\ 8 + (-1)) = B''(5,\ 7)$$

$$C'(-2,\ 10) \longrightarrow C''(-2 + (-1),\ 10 + (-1)) = C''(-3,\ 9)$$

Jadi, bayangan segitiga A'B'C' adalah segitiga $A''\ B''\ C''$ dengan titik $A''(3,\ 5)$, $B''(5,\ 7)$, dan $C''(-3,\ 9)$.

d. Translasi $T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} 3 + (-1) \\ 4 + (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bayangan segitiga ABC dengan translasi $T_2 \circ T_1$ adalah sebagai berikut.

$$A(1,\ 2) \xrightarrow{T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}} A''(1 + 2,\ 2 + 3) = A''(3,\ 5)$$

$$B(3,\ 4) \longrightarrow B''(3 + 2,\ 4 + 3) = B''(5,\ 7)$$

$$C(-5,\ 6) \longrightarrow C''(-5 + 2,\ 6 + 3) = C''(-3,\ 9)$$

Jadi, bayangan segitiga ABC dengan translasi $T_2 \circ T_1$ adalah segitiga $A''B''C''$ dengan titik $A''(3,\ 5)$, $B''(5,\ 7)$, dan $C''(-3,\ 9)$.

Perhatikan bahwa segitiga yang kalian peroleh pada jawaban **c** sama dengan segitiga yang kalian peroleh pada jawaban **d**.

2. Tentukanlah bayangan lingkaran $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ jika ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Jawab:

Ambil sebarang titik $P(a, b)$ pada $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$, sehingga $(a - 3)^2 + (b + 1)^2 = 4$ . . . (*)

Translasikan titik P dengan $T = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ sehingga kalian memperoleh

$$\text{titik } P(a, b) \xrightarrow{\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}} P'(a + (-5),\ b + 2) = P'(a - 5,\ b + 2)$$

Jadi, titik $P'(a - 5,\ b + 2)$.

Perhatikan bahwa: $a' = a - 5$. Dari persamaan (*), didapat $a = a' + 5$.

$b' = b + 2$. Dari persamaan (*), didapat $b = b' - 2$.

Dengan mensubstitusi nilai a dan b ini ke persamaan (*), akan diperoleh

$((a' + 5) - 3)^2 + ((b' - 2) + 1)^2 = 4$

$(a' + 2)^2 + (b' - 1)^2 = 4$

Jadi, bayangan lingkaran $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ jika ditranslasikan oleh

$T = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ adalah $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Asah Kompetensi 1

1. Tentukanlah translasi yang sesuai untuk pemetaan berikut!

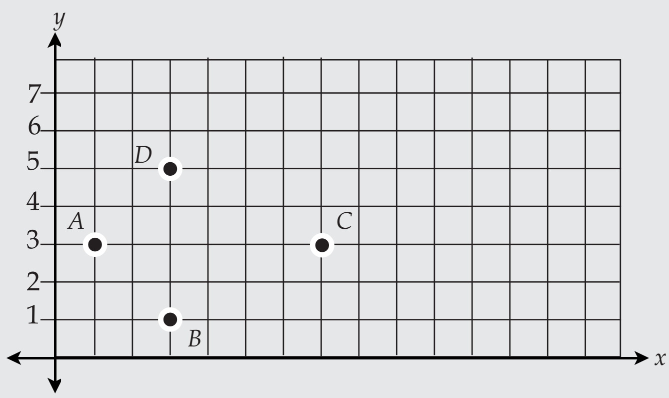
a. Titik $A(3, 9)$ ditranslasikan dengan T_1 menghasilkan $A'(9, 3)$

b. Titik $B(2, -6)$ ditranslasikan dengan T_2 menghasilkan $B'(-6, -3)$

c. Titik $C(-4, 7)$ ditranslasikan dengan T_3 menghasilkan $C'(-4, 0)$

d. Titik $D(3, 9)$ ditranslasikan dengan T_4 menghasilkan $D'(3, 9)$

2. Perhatikan bidang koordinat berikut!



a. Tarik garis dari titik A ke B, B ke C, C ke D, dan D ke A. Bangun apakah yang kalian peroleh?

b. Tentukanlah keliling dan luas bangun $ABCD$ tersebut!

c. Tentukanlah bayangan bangun $ABCD$ dengan translasi $T = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$. Bangun apakah yang kalian peroleh? Kongruenkah dengan bangun $ABCD$?

d. Tentukanlah keliling dan luas bangun hasil translasi ini!

3. Diketahui titik $P(2, 3)$.

a. Gambarlah segitiga siku-siku PQR yang memiliki luas enam petak satuan!

b. Tentukanlah koordinat titik Q dan R!

c. Tentukanlah keliling dan luas segitiga tersebut!

e. Tentukanlah bayangan segitiga PQR dengan translasi $T = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Bangun apakah yang kalian peroleh? Kongruenkah dengan segitiga PQR?

f. Tentukanlah keliling dan luas bangun hasil translasi!

4. Tentukan bayangan kurva berikut

a. Garis $3x + 2y - 3 = 0$ ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b. Parabola $y = x^2 + 1$ ditranslasikan oleh $T_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ dilanjutkan oleh $T_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

c. Lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$ ditranslasikan oleh $T_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dilanjutkan oleh $T_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

5. Bayangan garis $y = 2 - x$ oleh translasi $T_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dilanjutkan oleh $T_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -b \end{pmatrix}$ adalah $y = -x$. Tentukan translasi T_1 dan T_2 tersebut.

6. Bayangan lingkaran $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$ oleh translasi $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ adalah $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$. Tentukanlah nilai $a + b$.

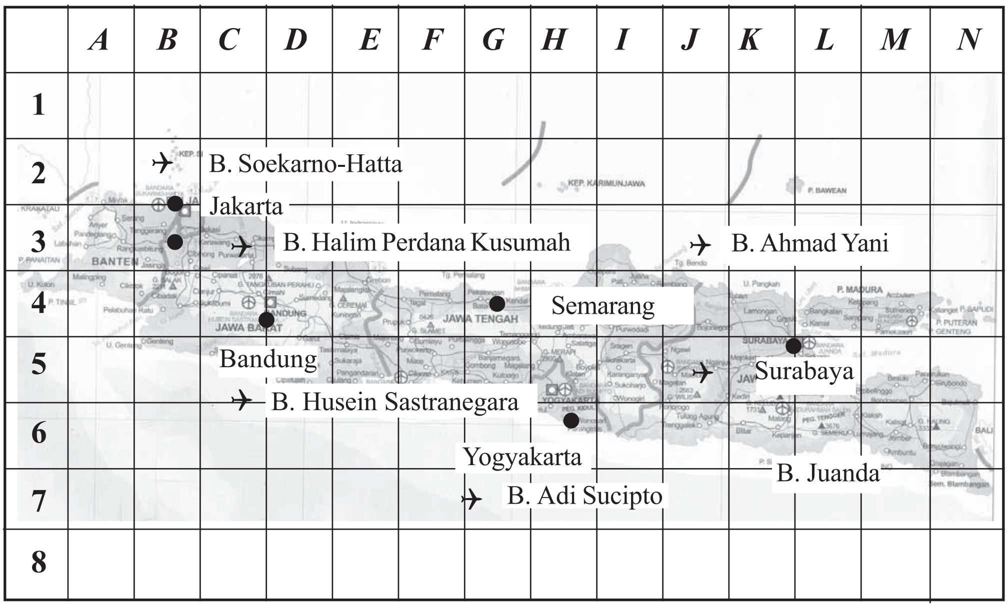
Siapa Berani

Tentukanlah persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ yang ditarik dari titik (8, 0). Jika lingkaran tersebut ditranslasikan oleh $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, tentukan persamaan bayangannya. Tentukan pula persamaan garis singgung setelah ditranslasikan!

GaMeMath

Suatu malam, Dimas bermimpi sangat aneh. Dalam mimpinya, ia berlibur ke Surabaya. Ia berangkat ke Surabaya naik pesawat. Ketika tiba di bandara, ia merasa heran karena bandara tersebut adalah Halim Perdana Kusumah. Dalam hati, ia pun bertanya-tanya, “Di kota mana sebenarnya aku ini?”

Jika dalam mimpi Dimas terjadi perpindahan letak bandara Halim Perdana Kusumah, tentukan translasi yang memindahkan bandara tersebut ke Surabaya. Untuk membantu menjawab teka-teki mimpi Dimas, kalian dapat mengamati peta berikut!



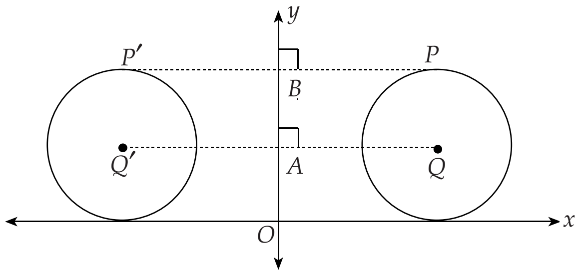
Sumber: Atlas Indonesia dan Dunia

Gambar 6.4
Peta pulau jawa

B. Refleksi

Kalian pasti sering bercermin. Ketika bercermin, amatilah diri dan bayangan kalian. Apakah memiliki bentuk dan ukuran yang sama? Amati pula jarak diri kalian ke cermin. Samakah dengan jarak bayangan kalian ke cermin? Dengan bercermin dan menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut, kalian akan menemukan beberapa sifat pencerminan.

Sekarang, perhatikan lingkaran Q yang dicerminkan terhadap sumbu-y berikut ini.



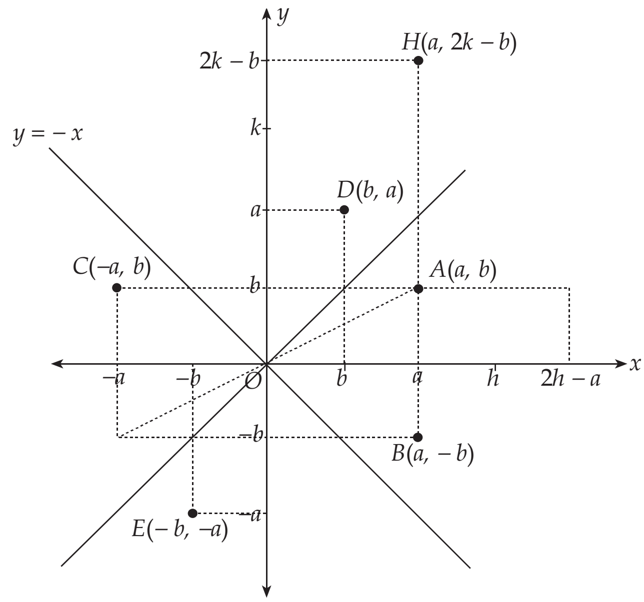
Gambar 6.5
Lingkaran Q yang dicerminkan terhadap sumbu–y.

Dari gambar tersebut, kalian dapat mengatakan bahwa:

- Lingkaran Q kongruen dengan bayangannya, yaitu lingkaran Q'.
- Jarak setiap titik pada lingkaran Q ke cermin sama dengan jarak setiap titik bayangannya ke cermin, yaitu $QA = Q'A$ dan $PB = P'B$.
- Sudut yang dibentuk oleh cermin dengan garis yang menghubungkan setiap titik ke bayangannya adalah sudut siku-siku.

Sifat-sifat tersebut merupakan *sifat-sifat refleksi.*

Dengan menggunakan sifat-sifat ini, kalian dapat menentukan bayangan sebuah titik yang dicerminkan terhadap suatu garis atau terhadap suatu titik lain. Perhatikan gambar berikut!



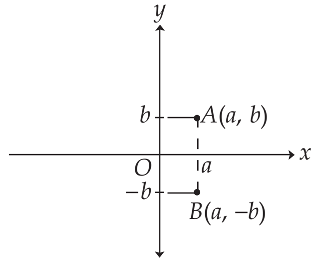
Gambar 6.6
Bayangan sebuah titik yang dicerminkan terhadap garis atau titik lainnya

Dari gambar tampak bahwa:

- Pencerminan titik $A(a, b)$ terhadap sumbu-x menghasilkan bayangan titik $B(a', b')$ dengan $a' = a$ dan $b' = -b$.

$$\boxed{A(a,\ b) \longrightarrow B(a,\ -b)}$$

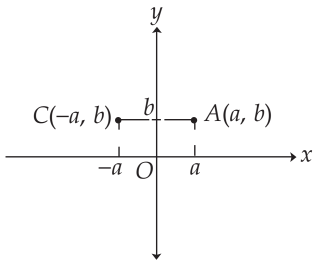
$$a' = a \Rightarrow a' = 1 \cdot a + 0 \cdot b,\ b' = -b \Rightarrow b' = 0 \cdot a - 1 \cdot b$$



Gambar 6.7
Pencerminan titik A terhadap sumbu-x

Matriks transformasi untuk pencerminan ini adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, sehingga

$$B = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



Gambar 6.8
Pencerminan titik A terhadap sumbu-y

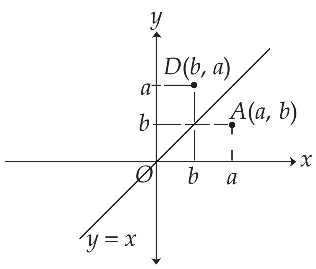
- Pencerminan titik $A(a, b)$ terhadap sumbu-y menghasilkan bayangan titik $C(a', b')$ dengan $a' = -a$ dan $b' = b$.

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Sumbu-}y} C(-a, b)$$

$$\begin{aligned} a' &= -a \Rightarrow a' = -1 \cdot a + 0 \cdot b \\ b' &= b \quad \Rightarrow b' = 0 \cdot a + 1 \cdot b \end{aligned}$$

Matriks transformasi untuk pencerminan ini adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sehingga

$$C = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



Gambar 6.9
Pencerminan titik A terhadap garis $y = x$

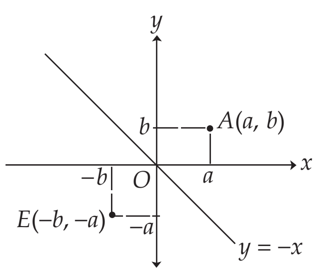
- Pencerminan titik $A(a, b)$ terhadap garis $y = x$ menghasilkan bayangan titik $D(a', b')$ dengan $a' = b$ dan $b' = a$.

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } y = x} D(b, a)$$

$$\begin{aligned} a' &= b \Rightarrow a' = 0 \cdot a + 1 \cdot b \\ b' &= a \Rightarrow b' = 1 \cdot a + 0 \cdot b \end{aligned}$$

Matriks transformasi untuk pencerminan ini adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, sehingga

$$D = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



Gambar 6.10
Pencerminan titik A terhadap garis $y = -x$

- Pencerminan titik $A(a, b)$ terhadap garis $y = -x$ menghasilkan bayangan titik $E(a', b')$ dengan $a' = -b$ dan $b' = -a$.

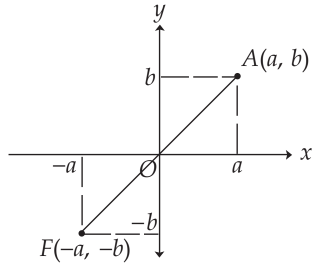
$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } y = -x} E(-b, -a)$$

$$\begin{aligned} a' &= -b \Rightarrow a' = 0 \cdot a - 1 \cdot b \\ b' &= -a \Rightarrow b' = -1 \cdot a + 0 \cdot b \end{aligned}$$

Matriks transformasi untuk pencerminan ini adalah $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, sehingga

$$E = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Pencerminan titik $A(a, b)$ terhadap titik asal menghasilkan bayangan titik $F(a', b')$ dengan $a' = -a$ dan $b' = -b$.



Gambar 6.11
Pencerminan titik A terhadap titik asal

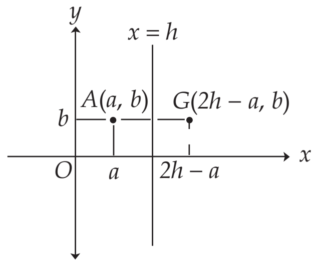
$$A(a, b) \xrightarrow[\text{Titik asal}]{O(0,\ 0)} F(-a, -b)$$

$a' = -a \Rightarrow a' = -1 \cdot a + 0 \cdot b$
$b' = -b \Rightarrow b' = 0 \cdot a - 1 \cdot b$

Matriks transformasi untuk pencerminan ini adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, sehingga

$$F = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Pencerminan titik $A(a, b)$ terhadap garis $x = h$ menghasilkan bayangan titik $G(a', b')$ dengan $a' = 2h - a$ dan $b' = -b$.



Gambar 6.12
Pencerminan titik A terhadap garis $x = h$

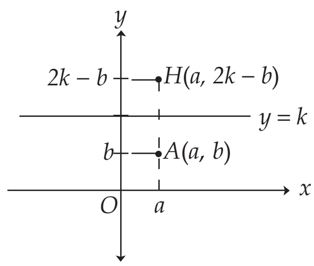
$$A\ (a, b) \xrightarrow{\text{Garis } x = h} G\ (2h - a, b)$$

$a' = 2h - a \Rightarrow a' = (-1 \cdot a + 0 \cdot b) + 2h$
$b' = b \qquad\ \Rightarrow b' = (0 \cdot a + 1 \cdot b) + 0$

Jika ditulis dalam matriks transformasi sebagai berikut.

$$G = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Pencerminan titik $A(a, b)$ terhadap garis $y = k$ menghasilkan bayangan titik $H(a', b')$ dengan $a' = a$ dan $b' = 2k - b$.



Gambar 6.13
Pencerminan titik A terhadap garis $y = k$

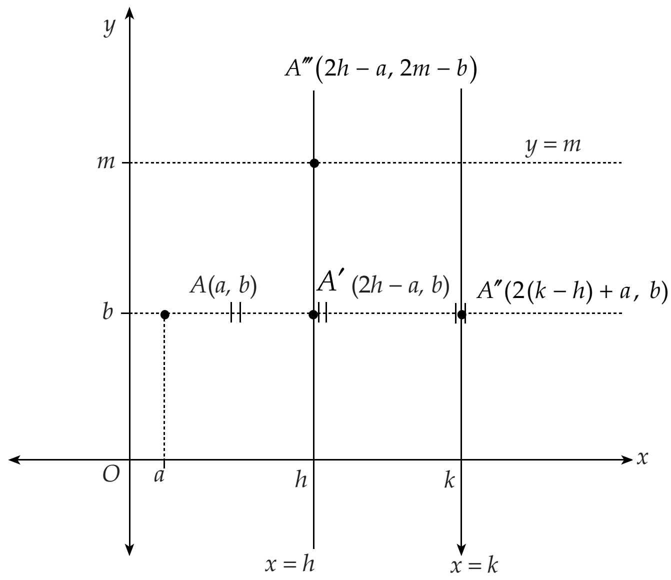
$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } y = k} H(a, 2k - b)$$

$a' = a \qquad\ \ \Rightarrow a' = (1 \cdot a + 0 \cdot b) + 0$
$b' = 2k - b \Rightarrow b' = (0 \cdot a - 1 \cdot b) + 2k$

Jika ditulis dalam matriks transformasi sebagai berikut.

$$H = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix}$$

Bagaimana jika dua refleksi dikomposisikan?
Misalnya, titik $A(a, b)$ dicerminkan terhadap garis $x = h$. Kemudian, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $x = k$.
Untuk mengetahui pencerminan ini, amatilah gambar berikut!



Gambar 6.14
Pencerminan titik $A(a, b)$ terhadap garis $x = h$ dan $x = k$

Dari gambar, tampak bahwa:

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } x = h} A'(2h - a, b) \xrightarrow{\text{Garis } x = k} A''(2(k - h) + a, b)$$

Dengan cara yang sama, kalian dapat menentukan bayangan titik $A(a, b)$ yang dicerminkan terhadap garis $y = m$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = n$ sebagai berikut.

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } y = m} A'(a, 2m - b) \xrightarrow{\text{Garis } y = n} A''(a, 2(n - m) + b)$$

Sekarang, jika titik $A(a, b)$ dicerminkan terhadap dua garis yang saling berpotongan tegak lurus, misalnya pencerminan terhadap garis $x = h$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = m$. Diperoleh bayangan A''' sebagai berikut.

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } x = h} A'(2h - a, b) \xrightarrow{\text{Garis } y = m} A'''(2h - a, 2m - b)$$

Contoh

1. Tentukan bayangan jajargenjang $ABCD$ dengan titik sudut $A(-2, 4)$, $B(0, -5)$, $C(3, 2)$, dan $D(1, 11)$ jika

a. dicerminkan terhadap sumbu-x

b. dicerminkan terhadap sumbu-y

c. dicerminkan terhadap sumbu-x. Kemudian, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-y

d. dicerminkan terhadap sumbu-y. Kemudian, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-x.

Jawab:

a. Pencerminan terhadap sumbu-x

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & -2 & -11 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan jajargenjang $ABCD$ oleh pencerminan terhadap sumbu-x adalah jajargenjang $A'B'C'D'$ dengan titik sudut $A'(-2,\ -4)$, $B'(0,\ 5)$, $C'(3,-2)$, dan $D'(1,-11)$.

b. Pencerminan terhadap sumbu-y

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan jajargenjang $ABCD$ oleh pencerminan terhadap sumbu-y adalah jajargenjang $A'B'C'D'$ dengan titik sudut $A'(2,\ 4)$, $B'(0,\ -5)$, $C'(-3,\ 2)$, dan $D'(-1,\ 11)$.

c. Pencerminan terhadap sumbu-x, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-y.

Pada jawaban a, kalian telah menemukan bayangan jajargenjang $ABCD$ yang dicerminkan terhadap sumbu-x. Sekarang hasil pencerminan tersebut, cerminkan lagi terhadap sumbu-y sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix} x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 \\ -4 & 5 & -2 & -11 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan jajargenjang $ABCD$ oleh pencerminan terhadap sumbu-x, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-y adalah jajargenjang $A''B''C''D''$ dengan titik sudut $A''(2,\ -4)$, $B''(0,\ 5)$, $C''(-3,\ -2)$, dan $D''(-1,\ -11)$.

Bayangan jajargenjang $ABCD$ ini dapat pula kalian tentukan dengan terlebih dahulu menentukan matriks komposisi refleksi terhadap sumbu-x dilanjutkan refleksi terhadap sumbu-y sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 \\ -4 & 5 & -2 & -11 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan jajargenjang $ABCD$ oleh pencerminan terhadap sumbu-x, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu–y adalah jajargenjang $A''B''C''D''$ dengan titik sudut $A''(2,\ -4)$, $B''(0,\ 5)$, $C''(-3,\ -2)$, dan $D''(-1,\ -11)$.

d. Pencerminan terhadap sumbu-y, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-x.

Pada jawaban b, kalian telah menemukan bayangan jajargenjang $ABCD$ yang dicerminkan terhadap sumbu-y. Sekarang hasil pencerminan tersebut, cerminkan lagi terhadap sumbu-x sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix} x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 \\ -4 & 5 & -2 & -11 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan jajargenjang $ABCD$ oleh pencerminan terhadap sumbu-y, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-x adalah jajargenjang $A''B''C''D''$ dengan titik sudut $A''(2,\ -4)$, $B''(0,\ 5)$, $C''(-3,\ -2)$, dan $D''(-1,\ -11)$.

Bayangan jajargenjang $ABCD$ ini dapat pula kalian tentukan dengan terlebih dahulu menentukan matriks komposisi refleksi terhadap sumbu-y dilanjutkan refleksi terhadap sumbu-x sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 \\ 4 & -5 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 \\ -4 & 5 & -2 & -11 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan jajargenjang $ABCD$ oleh pencerminan terhadap sumbu-y, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-x adalah jajargenjang $A''B''C''D''$ dengan titik sudut $A''(2,\ -4)$, $B''(0,\ 5)$, $C''(-3,\ -2)$, dan $D''(-1,\ -11)$.

2. Tentukan bayangan parabola $y = x^2 + 2x + 1$ yang dicerminkan terhadap garis $y = 3$.

Jawab:

Ambil sembarang titik $P(a,\ b)$ pada $y = x^2 + 2x + 1$, sehingga $b = a^2 + 2a + 1$ (*).

Refleksikan titik P terhadap garis $y = 3$ sehingga kalian memperoleh titik $P'(a',\ b')$.

Dengan mencerminkan titik $P(a, b)$ terhadap garis $y = 3$, kalian memperoleh titik $A'(a', b')$

$$P(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } y = 3} P'(a, 2 \cdot 3 - b) = P'(a, 6 - b)$$

Jadi, titik $P'(a, 6 - b)$.

Perhatikan bahwa: $a' = a$

$b' = 6 - b$. Dari persamaan ini, didapat $b = 6 - b'$.

Dengan mensubstitusi nilai a dan b ini ke persamaan (*), kalian memperoleh:

$6 - b' = (a')^2 + 2a' + 1$

$b' = -(a')^2 - 2a' + 5$

Jadi, bayangan parabola $y = x^2 + 2x + 1$ yang dicerminkan terhadap garis $y = 3$ adalah $y = -x^2 - 2x + 5$.

Asah Kompetensi 2

1. Titik-titik sudut segitiga ABC adalah $A(1, 2)$, $B(3, 4)$, dan $C(5, 6)$. Tentukan bayangan segitiga ABC tersebut jika:

a. dicerminkan terhadap sumbu-x

b. dicerminkan terhadap sumbu-y

c. dicerminkan terhadap garis $y = x$

d. dicerminkan terhadap garis $y = -x$

e. dicerminkan terhadap titik O

f. dicerminkan terhadap sumbu-x, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = x$

g. dicerminkan terhadap sumbu-y, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap titik O

h. dicerminkan terhadap titik O, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $x = 2$

i. dicerminkan terhadap garis $y = 2$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $x = -1$

j. dicerminkan terhadap sumbu-x, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = 2x$.

2. Tentukanlah bayangan titik $A(3, 2)$ oleh:

a. pencerminan terhadap garis $x = 1$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $x = 4$

b. pencerminan terhadap garis $x = 4$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $x = 1$

c. pencerminan terhadap garis $y = 1$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = -3$

d. pencerminan terhadap garis $y = -3$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = 1$.

3. Tentukanlah bayangan titik $A(4, 3)$ oleh:

a. pencerminan terhadap garis $y = 2x$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = x$

b. pencerminan terhadap garis $y = x$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = 2x$

c. pencerminan terhadap sumbu-x, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = x$

d. pencerminan terhadap garis $y = x$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-x

e. pencerminan terhadap garis $y = -x$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-y

f. pencerminan terhadap sumbu-y, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = -x$.

4. Tentukanlah bayangan kurva berikut!

a. Garis $x + 2y - 2 = 0$ dicerminkan terhadap garis $x = -9$.

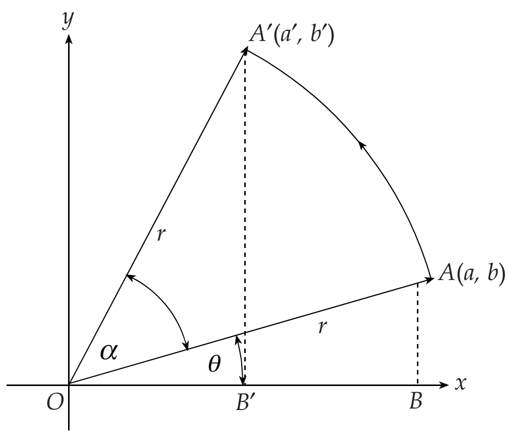
b. Parabola $y = x^2 - 2$ dicerminkan terhadap sumbu-y, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $x = 1$.

c. Lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = x$, dan dilanjutkan dengan dua kali pencerminan terhadap sumbu-x.

C. Rotasi

Dengan menggunakan jangka, Anakota membuat sebuah busur lingkaran. Ia menusukkan jarum jangka pada titik O, kemudian memutar jangka dengan sudut putar α berlawanan dengan arah perputaran jarum jam. Melalui peragaan ini, Anakota telah melakukan rotasi sebesar a dengan pusat titik O.

Misalkan, posisi awal pensil jangka pada titik $A(a, b)$. Setelah dirotasi sebesar α dengan pusat titik O, posisi pensil jangka ini berada pada titik $A(a', b')$ seperti pada gambar berikut.



Gambar 6.15
Rotasi titik $A(a, b)$ sebesar α dengan pusat titik O

Posisi awal pensil jangka ini dapat pula ditulis dalam koordinat kutub, $A(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Adapun posisi pensil jangka setelah diputar sebesar α dengan arah berlawanan dengan arah perputaran jarum dapat ditulis sebagai $A'\left(r\cos(\theta+\alpha)\right)$.

Jadi, dinyatakan dalam bentuk matriks, persamaan tersebut menjadi matriks berikut.

$$A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\alpha) \\ r\sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha \\ r\cos\theta\sin\alpha + r\sin\theta\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\cos\alpha - b\sin\alpha \\ a\sin\alpha + b\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Jadi, posisi pensil jangka setelah diputar sebesar α tersebut adalah

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Uraian ini menggambarkan rumus rotasi sebesar α dengan pusat titik $O(0, 0)$ sebagai berikut.

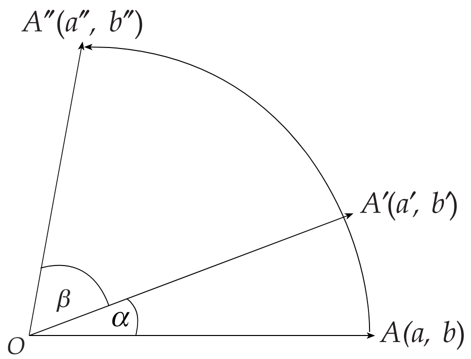
$$A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Adapun untuk rotasi sebesar α dengan pusat titik $P(m, n)$ dapat ditentukan sebagai berikut.

$$A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a - m \\ b - n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

Nilai α bertanda positif jika arah putaran sudut berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dan bertanda negatif jika arah putaran sudut searah dengan arah perputaran jarum jam.

Bagaimana jika titik $A(a, b)$ dirotasi sebesar α dengan pusat titik $O(0, 0)$. Kemudian, rotasi lagi sebesar β dengan pusat yang sama?
Perhatikan gambar berikut!



Gambar 6.16
Rotasi titik $A(a, b)$ dengan pusat titik O sebesar α dan dilanjutkan rotasi sebesar β

Tampak bahwa posisi rotasi sebesar α dengan pusat titik $O(0, 0)$. Kemudian dilanjutkan rotasi sebesar β dengan pusat yang sama diwakili oleh rotasi sebesar $(\alpha + \beta)$ dengan pusat titik $O(0, 0)$.
Akibatnya, bayangan titik A dapat kalian tentukan sebagai berikut.

$$A'' = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Contoh

1. Tentukan bayangan titik $A(-1, -2)$ yang dirotasi berturut-turut sebesar 180° dan 90° berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat yang sama, yaitu titik $O(0, 0)$.

Jawab:

Merotasi titik $A(-1, -2)$ berturut-turut sebesar 180° dan 90° berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat yang sama, yaitu titik $O(0, 0)$ sama artinya dengan merotasi titik A sebesar 270° dengan pusat $O(0, 0)$.
Bayangan titik A adalah sebagai berikut.

$$A'' = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 270^\circ & -\sin 270^\circ \\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik $A(-1, -2)$ adalah $A''(-2, 1)$.

2. Tentukan bayangan parabola $y = x^2 + 1$ yang dirotasi sebesar 90° searah dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat titik $P(1, -2)$.

Jawab:

Ambil sembarang titik $A(a, b)$ pada $y = x^2 + 1$ sehingga $b = a^2 + 1$ (*).
Rotasikan titik A sebesar 90° searah dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat titik $P(1, -2)$. Dengan rotasi ini, kalian memperoleh titik $A'(a', b')$.

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(90)^\circ & -\sin(-90)^\circ \\ \sin(-90)^\circ & \cos(-90)^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 \\ b-(-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 \\ b+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+3 \\ -a-1 \end{pmatrix}$$

Jadi, titik $A'(b + 3, -a - 1)$.

Perhatikan bahwa: $a' = b + 3$, dari persamaan ini didapat $b = a' - 3$ dan dari $b' = -a - 1$ didapat $a = -b' - 1$.

Dengan mensubstitusi nilai a dan b ini ke persamaan (*), kalian memperoleh:

$$a' - 3 = (-b' - 1)^2 + 1$$
$$a' - 3 = (b')^2 + 2b' + 2$$
$$a' = (b')^2 + 2b' + 5$$

Jadi, bayangan parabola $y = x^2 + 1$ yang dirotasi sebesar 90° searah dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat titik $P(1, -2)$ adalah $x = y^2 + 2y + 5$.

Asah Kompetensi 3

1. Tentukanlah bayangan titik-titik berikut!

a. Titik $P(-1, 5)$ dirotasi 270° berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar $O(0, 0)$.

b. Titik $Q(5, 2)$ dirotasi 60° searah dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar $A(2, 2)$.

c. Titik $R(3, -4)$ dirotasi 90° berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar $O(0, 0)$. Kemudian, dilanjutkan dirotasi 30° dengan arah dan pusat yang sama.

d. Titik $S(-6, -7)$ dirotasi 45° searah dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar $B(-3, 5)$. Kemudian, dilanjutkan dirotasi 135° dengan arah dan pusat yang sama.

e. Titik $T(2, -9)$ dirotasi 240° berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar $C(-3, -6)$. Kemudian, dilanjutkan dirotasi 15° dengan pusat yang sama dan arah putar berlawanan.

2. Tentukanlah bayangan bangun berikut. Kemudian, tentukan pula luas bangun bayangan tersebut!

a. Segitiga ABC dengan $A(5, 0)$, $B(-10, 10)$, dan $C(0, -15)$ dirotasi sebesar 225° berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar $O(0, 0)$.

b. Lingkaran $x^2 + y^{2-6x} + 10y - 10 = 0$ dirotasi 30° searah dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar $P(-2, -3)$.

3. Tentukanlah bayangan kurva-kurva berikut ini!

a. Garis $x - y + 3 = 0$ dirotasi $\frac{\pi}{3}$ berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar $O(0, 0)$.

b. Garis $y = x + 2$ dirotasi $\frac{\pi}{6}$ searah dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar $O(0, 0)$. Dilanjutkan dirotasi $\frac{\pi}{4}$ dengan arah dan pusat yang sama.

c. Parabola $x^2 + 6y = 0$ dirotasi $\frac{\pi}{3}$ berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar $P(4, 2)$. Dilanjutkan dirotasi $\frac{\pi}{2}$ dengan pusat yang sama dan arah berlawanan.

1 ASAH KEMAMPUAN

Waktu : 60 menit

1. Diketahui segitiga ABC dengan titik $A(-8, -2)$, $B(2, 1)$, dan $C(-3, 4)$. Z adalah titik berat segitiga ABC. Translasi $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ memetakan segitiga ABC dan titik beratnya menjadi segitiga $A'B'C'$ dan C' (2,3). Tentukanlah translasi tersebut dan koordinat A', B', dan C'

Bobot soal: 20

2. A adalah translasi $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan B adalah translasi $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Tentukanlah $(B \circ A \circ B \circ A \circ B)(-1, -2)$.

Bobot soal: 60

3. Tentukanlah bayangan kurva-kurva berikut ini!

Bobot soal: 20

a. Garis $y = -3x + 1$ dirotasikan sebesar 90° berlawanan dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar titik $O(0, 0)$. Kemudian, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu-x.

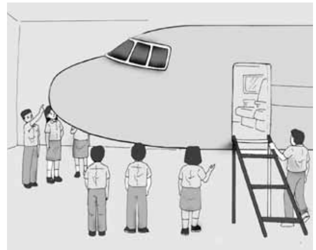
b. Lingkaran yang berpusat di titik $(2, -3)$ dan menyinggung sumbu-x dirotasi sebesar 90° searah dengan arah perputaran jarum jam dengan pusat putar titik $P(2, 0)$. Kemudian, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = x$.

c. Lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = 3x$. Kemudian, dilanjutkan dengan translasi $T = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Siapa Berani

Tentukanlah matriks pencerminan terhadap garis $y = x \tan \alpha$ sebagai komposisi transformasi!

D. Dilatasi

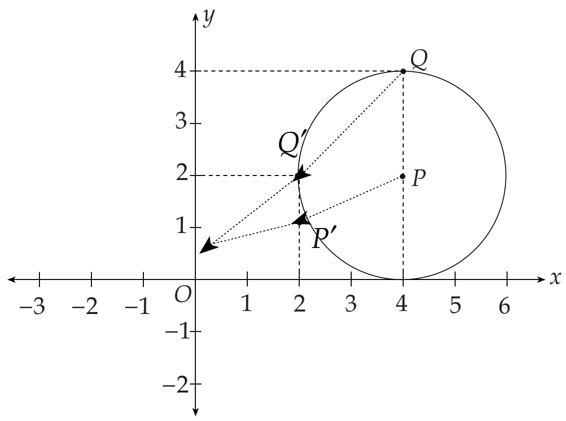


Aini dan teman-temannya berkunjung ke IPTN. Di sana, mereka mengamati miniatur sebuah pesawat terbang. Miniatur pesawat terbang ini mempunyai bentuk yang sama dengan pesawat terbang sesungguhnya, tetapi ukurannya lebih kecil. Bentuk seperti miniatur pesawat terbang ini telah mengalami dilatasi diperkecil dari pesawat terbang sesungguhnya.

Selain dilatasi diperkecil, terdapat pula dilatasi diperbesar, misalnya pencetakan foto yang diperbesar dari klisenya. Faktor yang menyebabkan diperbesar atau diperkecilnya suatu bangun ini disebut faktor dilatasi. Faktor dilatasi ini dinotasikan dengan huruf kecil, misalnya k.

- Jika $k < -1$ atau $k > 1$, maka hasil dilatasinya diperbesar
- Jika $-1 < k < 1$, maka hasil dilatasinya diperkecil
- Jika $k = 1$, maka hasil dilatasinya tidak mengalami perubahan

Sekarang, perhatikan lingkaran pada Gambar 6.10 yang berpusat di titik $P(4, 2)$ dan melalui titik $Q(4, 4)$ berikut yang didilatasi terhadap pusat $O(0, 0)$ dengan faktor skala $\frac{1}{2}$. Bayangan yang diperoleh adalah lingkaran yang berpusat di titik $P'(2, 1)$ dan melalui titik $Q'(2, 2)$. Lingkaran ini sebangun dengan lingkaran P dengan ukuran diperkecil.



Gambar 6.10
Dilatasi lingkaran P terhadap pusat O dengan faktor skala $\frac{1}{2}$

kalian dapat menentukan lingkaran hasil dilatasi ini dengan menggunakan matriks seperti berikut.

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & Q \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P' & Q' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dengan dilatasi terhadap pusat $O(0, 0)$ dan faktor skala $\frac{1}{2}$, diperoleh lingkaran dengan titik pusat $P'(2, 1)$ dan melalui titik $Q'(2, 2)$.

Secara umum, dilatasi ini sebagai berikut.

- Titik $P(a, b)$ didilatasi terhadap pusat $O(0, 0)$ dengan faktor skala k menghasilkan titik $P'(ka, kb)$.

  Secara matematis, ditulis:

$$P(a, b) \xrightarrow{[O,k]} P'(ka, kb)$$

  Kalian dapat menyatakannya dalam bentuk matriks berikut.

$$P' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Titik $P(a, b)$ didilatasi terhadap pusat $F(m, n)$ dengan faktor skala k menghasilkan titik $P'(k(a-m)+m,\ k(b-n)+n)$.

  Secara matematis, ditulis:

$$P(a, b) \xrightarrow{[F(m, n),\ k]} P'(k(a-m) + m, k(b-n) + n)$$

Kalian dapat menyatakannya dalam bentuk matriks berikut.

$$P' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - m \\ b - n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

Contoh

Tentukanlah bayangan titik $P(5, 6)$ jika didilatasikan oleh:

1. [O, 3]

Jawab:

$P(5, 6) \xrightarrow{[O,3]} P'(3 \cdot 5, 3 \cdot 6) = P'(15, 18)$

Jadi, titik $P'(15, 18)$.

2. [F(2, 3), 4]

Jawab:

$P(5, 6) \xrightarrow{[F(2,3),\ 4]} P'(4(5-2) + 2, 4(6-3) + 3) = P'(14, 15)$

Jadi, titik $P'(14, 15)$.

Aktivitas di Kelas

Komposisi transformasi dengan menggunakan matriks akan diperlukan pada pembahasan selanjutnya. Kalian telah membahas matriks transformasi pada subbab sebelumnya. Sekarang rangkumlah semua matriks komposisi tersebut dengan menyalin dan melengkapi tabel berikut!

No.	Jenis Transformasi	Matriks
1.	Refleksi terhadap sumbu-x	$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$
2.	Refleksi terhadap sumbu-y	$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$
3.	Refleksi terhadap sumbu $y = x$	$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$
4.	Refleksi terhadap sumbu $y = -x$	$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$
5.	Rotasi sejauh θ terhadap titik pusat O	$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$
6.	Dilatasi terhadap O dengan faktor skala k	$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$
7.	Dilatasi terhadap pusat $F(m, n)$ dengan faktor skala k	$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$

Diskusikan dengan teman-temanmu dan hasilnya tuliskan di papan tulis.

E. Komposisi Transformasi dengan Matriks

Transformasi T memetakan titik $P(x, y) \rightarrow P'(x', y')$. Hubungan antara (x', y') dengan (x, y) ditentukan oleh:

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \quad \text{atau} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, matriks yang bersesuaian dengan transformasi T adalah $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Berikut ini adalah tabel matriks-matriks transformasi geometri berordo 2×2.

No.	Transformasi	Pemetaan	Matriks transformasi
1.	Identitas (I)	$(x, y) \rightarrow (x, y)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2.	Dilatasi dengan faktor skala k	$(x, y) \rightarrow (kx, ky)$	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
3.	Refleksi (M)		
	a. terhadap sumbu-x (M_x)	$(x, y) \rightarrow (x, -y)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

	b. terhadap sumbu-y (M_y)	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	c. terhadap garis $y = x$ ($M_{y=x}$)	$(x, y) \rightarrow (y, x)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
	d. terhadap garis $y = -x$ ($M_{y=-x}$)	$(x, y) \rightarrow (-y, -x)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
4.	Rotasi terhadap titik asal $O(0,0)$		
	a. sebesar θ (R_θ)	$(x, y) \rightarrow (x', y')$ $x' = x \cos\theta - y \sin\theta$ $y' = x \cos\theta + y \cos\theta$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
	b. sebesar $\frac{\pi}{2}$ (+90°)	$(x, y) \rightarrow (-y, x)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
	c. sebesar $-\frac{\pi}{2}$ (–90°)	$(x, y) \rightarrow (y, -x)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
	d. sebesar π (setengah putaran)	$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Jika T_1 dan T_2 masing-masing adalah transformasi yang bersesuaian dengan matriks-matriks.

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ dan } M_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

maka komposisi transformasi yang dinyatakan dengan:

a. $T_2 \circ T_1$ bersesuaian dengan perkalian matriks

$$M_2 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

b. $T_1 \circ T_2$ bersesuaian dengan perkalian matriks

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Hasil perkalian $M_1 \cdot M_2$ belum tentu sama dengan hasil perkalian $M_2 \cdot M_1$.

Contoh

1. Diketahui T_1 dan T_2 adalah transformasi yang bersesuaian dengan matriks.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan matriks-matriks yang bersesuaian, tentukanlah koordinat bayangan yang dinyatakan dengan komposisi transformasi berikut ini.

a. $T_2 \circ T_1$ (2, 3)

b. $T_2 \circ T_1$ (–1, 4)

Jawab:

a. $T_2 \circ T_1$ (2, 3)

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Jadi, $T_2 \circ T_1$ (2, 3) = (10, 9)

b. $T_2 \circ T_1\ (-1, 4)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi, $T_2 \circ T_1\ (-1, 4) = (-3, 5)$

2. T_1 adalah transformasi pencerminan terhadap garis $y = -x$. T_2 adalah transformasi perputaran setengah putaran terhadap titik asal. Tentukan bayangan titik $P(3, -5)$ yang ditransformasikan terhadap T_1 dan dilanjutkan terhadap T_2.

Jawab:

$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Transformasi $T_2 \circ T_1$:

$$P(3, -5) \xrightarrow{T_2 \circ T_1} P''$$

$$P'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan akhir titik $P(3, -5)$ terhadap transformasi T_1 dan T_2 adalah $(-5, 3)$.

2 ASAH KEMAMPUAN

Waktu : 60 menit

1. Tentukanlah bayangan titik-titik berikut ini! **Bobot soal: 20**

a. $P(-2, -4)$ didilatasikan oleh $\left[O, \frac{1}{4}\right]$

b. $R(9, 6)$ didilatasikan oleh $[O, -9]$

c. $S(12, -8)$ didilatasikan oleh $[F(3, 2), 2]$

d. $T(-10, 21)$ didilatasikan oleh $\left[G\left(-\frac{1}{2}, 5\right), -\frac{1}{2}\right]$

2. Tentukanlah bayangan kurva-kurva berikut ini! **Bobot soal: 40**

a. Garis $3x - 5y + 15 = 0$ yang didilatasikan oleh $[O, 5]$

b. $y = \dfrac{1}{x}$ yang didilatasikan oleh $\left[O, -\frac{2}{5}\right]$

c. $x^2 - 4y^2 = 9$ yang didilatasikan oleh $\left[F(-5, 1), \frac{3}{4}\right]$

d. Lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 14 = 0$ yang didilatasikan oleh $[G(-10, 10), -5]$

3. Tentukanlah bayangan bangun-bangun berikut. Kemudian, tentukan pula luas bangun bayangan tersebut!

Bobot soal: 30

a. Segitiga ABC dengan titik-titik sudut $A(2, 1)$, $B(4, 3)$, dan $C(3, 6)$ oleh dilatasi $\left[O, -\frac{2}{7}\right]$.

b. Persegi panjang $ABCD$ dengan titik-titik sudut $A(1, 2)$, $B(4, 2)$, $C(1, 7)$, dan $D(4, 7)$ oleh dilatasi $[O, 3]$.

c. Lingkaran yang berpusat di titik $P(-5, 2)$ dan berjari-jari 4 oleh dilatasi $[F(-6, -7), -2]$.

4. Tentukanlah bayangan dari parabola $y = x^2 + 1$ yang ditranslasi oleh $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, dilanjutkan oleh dilatasi $[O, 3]$.

Bobot soal: 10

Rangkuman

1. Translasi (pergeseran) merupakan transformasi yang memindahkan titik pada bidang dengan arah dan jarak tertentu.
   - Jika titik $P(a, b)$ ditranslasikan dengan $T_1 = (h, k)$, maka akan diperoleh P' sebagai berikut

$$P(a, b) \xrightarrow{T_1 = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}} P'(a + h, b + k)$$

   - Jika titik $P(a, b)$ ditranslasikan dengan $T_1 = (h, k)$ dilanjutkan dengan $T_2 = (l, m)$, maka akan diperoleh P'' sebagai berikut.

$$P(a, b) \xrightarrow{T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} h + l \\ k + m \end{pmatrix}} P''(a + h + l, b + k + m)$$

2. Refleksi (pencerminan) merupakan transformasi yang memindahkan tiap titik pada bidang dengan sifat bayangan cermin.
   - Jika titik $A(a, b)$ direfleksikan terhadap sumbu-x, maka akan diperoleh

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Sumbu-}x} B(a, -b)$$

   - Jika titik $A(a, b)$ direfleksikan terhadap sumbu-y, maka akan diperoleh

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Sumbu-}y} C(-a, b)$$

- Jika titik $A(a, b)$ direfleksikan terhadap garis $y = x$, maka akan diperoleh

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } y = x} D(b, a)$$

- Jika titik $A(a, b)$ direfleksikan terhadap garis $y = -x$, maka akan diperoleh

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } y = -x} E(-b, -a)$$

- Jika titik $A(a, b)$ direfleksikan terhadap titik asal $O(0, 0)$, maka akan diperoleh

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Titik asal}} F(-a, -b)$$

- Jika titik $A(a, b)$ direfleksikan garis x terhadap garis $x = h$, maka akan diperoleh

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } x = h} G(2h - a, b)$$

- Jika titik $A(a, b)$ direflesikan terhadap garis $y = k$, maka akan diperoleh

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{Garis } y = k} H(a, 2k - b)$$

3. Rotasi (perputaran) merupakan transformasi yang memutar suatu bidang.

- Jika titik $A(a, b)$ dirotasikan sebesar α dengan titik dengan titik pusat O, maka akan diperoleh

$$A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos\alpha - b \sin\alpha \\ a \sin\alpha + b \cos\alpha \end{pmatrix}$$

- Jika titik $A(a, b)$ dirotasikan sebesar α dengan titik pusat $P(m, n)$, maka akan diperoleh

$$A' = \begin{pmatrix} a' - m \\ b' - n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a - m) \cos\alpha - (b - n) \sin\alpha \\ (b - m) \sin\alpha + (b - n) \cos\alpha \end{pmatrix}$$

4. Dilatasi (perkalian) merupakan transformasi yang memperkecil atau memperbesar suatu bidang.

- Jika titik $A(a, b)$ didilatasikan terhadap titik pusat $F(m, n)$ dengan faktor skala k, maka akan diperoleh

$$A(a, b) \xrightarrow{[O,\ k]} A'(ka, kb)$$

- Jika titik $A(a, b)$ dilatasikan terhadap titik pusat $F(m, n)$ dengan faktor skala k, maka akan diperoleh:

$$A(a, b) \xrightarrow{[F(m,\ n,\ k]} A'(k(a - m) + m,\ k(b - n) + n)$$

Ulangan Bab 6

I. Pilihlahlah jawaban yang paling tepat!

1. Bayangan titik $A(1, 4)$ oleh translasi $T(2, 3)$ adalah . . . .

A. $A'(3, 7)$ D. $A'(4, 6)$

B. $-A'(3, 5)$ E. $A'(4, 4)$

C. $A'(4, 3)$

2. Jika titik $M(2, 1)$ direfleksikan terhadap garis $x = 3$ dan terhadap garis $y = 3$, maka bayangan M'' adalah . . . .

A. $M''(4, 1)$ D. $M''(2, 4)$

B. $M''(2, 5)$ E. $M''(5, 1)$

C. $M''(5, 4)$

3. Jika titik $P(1, 2)$ diputar 90° berlawanan arah jarum jam terhadap titik asal koordinat O, maka bayangan dari titik P adalah . . . .

A. $P'(2, -1)$ D. $P'(-2, 1)$

B. $P'(2, -1)$ E. $P'(1, -2)$

C. $P'(2, 1)$

4. Jika titik $B(2, 6)$ dilatasi terhadap $T(0, -1)$, maka bayangan titik B adalah . . . .

A. $B'(4, 12)$ D. $B'(2, 12)$

B. $B'(1, 3)$ E. $B'(-2, -6)$

C. $B'(-2, 12)$

5. Garis g tegak lurus pada bidang V dan bidang W membentuk sudut lancip dengan V. Jika W memotong V menurut suatu garis s, maka proyeksi g pada W . . . .

A. tegak lurus pada V
B. tegak lurus pada s
C. sejajar dengan V
D. sejajar dengan s
E. sejajar dengan W

6. Bidang V dan W berpotongan tegak lurus sepanjang garis g. Garis l membentuk sudut 45°dengan V dan 30° dengan W. Sinus sudut antara l dan g adalah . . . .

A. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. Diketahui satu transformasi T dinyatakan oleh matriks $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, maka transformasi T adalah . . . .

A. Pencerminan terhadap sumbu-x
B. Pencerminan terhadap sumbu-y
C. Perputaran $\frac{1}{2}\pi$
D. Perputaran $-\frac{1}{2}\pi$
E. Perputaran $\frac{1}{4}\pi$

8. Diketahui T_1 dan T_2 adalah transformasi yang bersesuaian dengan matriks

$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dan $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

maka $T_2 \circ T_1\,(-3, 1) =$ . . . .

A. (4, 12) D. (–4, –6)

B. (–4, –12) E. (4, 6)

C. (4, –12)

9. Diketahui ΔPQR dengan titik-titik sudut $P(1, 3)$, $Q(1, -4)$, dan $R(-2, 1)$. Jika ΔPQR

direfleksikan terhadap sumbu-x kemudian dilanjutkan dengan dilatasi (0, −1), maka koordinat bayangannya adalah . . . .

A. $P'(-1, 3), Q'(1, -4)$, dan $R'(2, -1)$

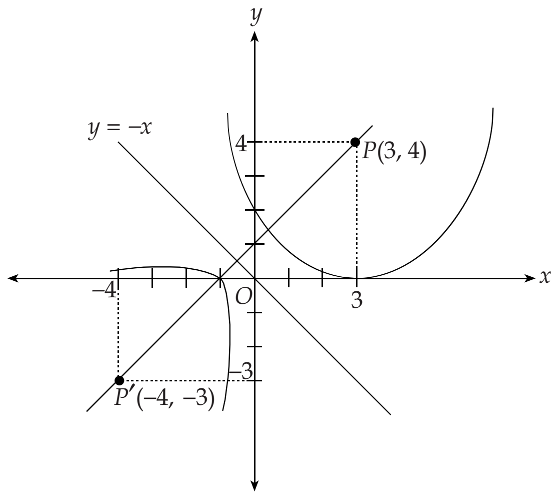
B. $P'(-1, 3), Q'(1, 4)$, dan $R'(2, 1)$

C. $P'(1, 3), Q'(1, -4)$, dan $R'(2, -1)$

D. $P'(1, 3), Q'(1, 4)$, dan $R'(2, -1)$

E. $P'(1, 3), Q'(1, 4)$, dan $R'(2, 1)$

10. Suatu lingkaran digambarkan sebagai berikut



Jika lingkaran yang berpusat di (3, 4) dan menyinggung sumbu-x dicerminkan pada $y = -x$, maka persamaan lingkaran yang terjadi adalah . . . .

A. $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 9 = 0$

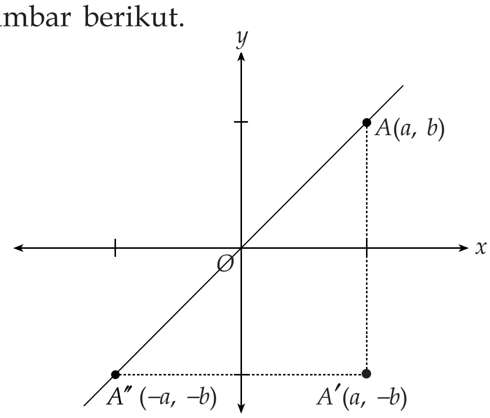
B. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$

C. $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$

D. $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 9 = 0$

E. $x^2 - y^2 + 8x + 6y + 9 = 0$

11. Suatu pencerminan ditunjukkan seperti gambar berikut.



Titik $A(a, b)$ dicerminkan terhadap sumbu-x dan bayangannya dicerminkan pula terhadap sumbu-y. Bayangan terakhir titik A merupakan . . . .

A. Perputaran titik A dengan titik pusat O sebesar π radian berlawanan perputaran jarum jam.

B. Perputaran titik A dengan titik pusat O sebesar 2π radian berlawanan perputaran jarum jam.

C. Pencerminan titik A terhadap garis $y = -x$

D. Pencerminan titik A terhadap garis $y = x$

E. Pencerminan titik A terhadap sumbu-y

12. Jika garis $3x - 2y = 6$ ditranslasikan terhadap $T(2, 3)$, maka . . . .

A. $3x - 2y = 6$

B. $3x - 2y = 3$

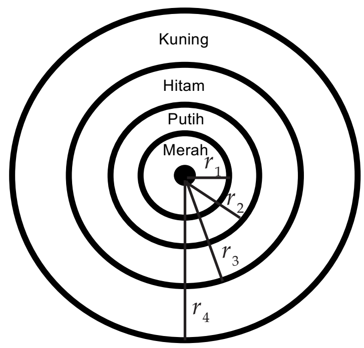
C. $3x + 2y = 4$

D. $3x - 2y = -4$

E. $3x - 2y = -11$

II. Jawablah pertanyaan berikut dengan jelas dan tepat!

1. Sebuah lingkaran target dibuat warna-warni seperti gambar berikut.



dengan:

$r_1 = \dfrac{1}{2} r_2$ $\qquad$ $r_3 = \dfrac{3}{4} r_4$

$r_2 = \dfrac{1}{2} r_4$

Tentukanlah faktor skala dari:

A. Merah ke Putih

B. Merah ke Hitam

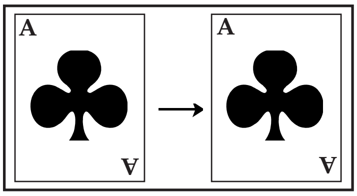
C. Merah ke Kuning

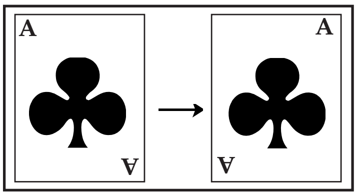
D. Kuning ke Putih

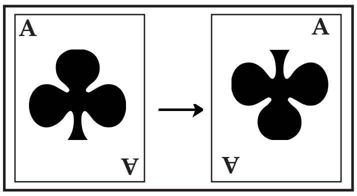
E. Hitam ke Putih

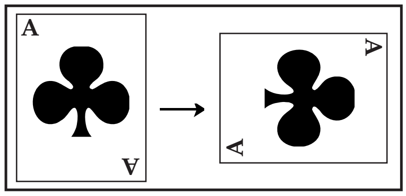
2. Sebuah bangun mula-mula ditransformasikan dengan refleksi terhadap garis $y = x$, dilanjutkan dengan rotasi 90° searah dengan jarum jam terhadap titik asal O. Tentukanlah bayangannya!

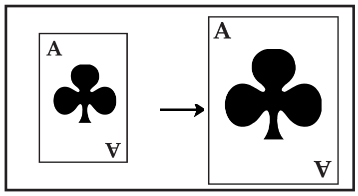
3. Sebutkan jenis transformasi yang memetakan tiap gambar berikut ini!

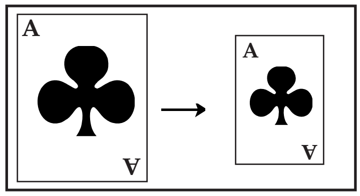
A.


B.


C.


D.


E.


F.


4. Tentukanlah persamaan bayangan dari garis $3x - y + 2 = 0$ oleh refleksi terhadap garis $y = x$ dilanjutkan dengan rotasi 90° terhadap O.

5. Titik $P(x, y)$ direfleksikan terhadap $y = x$ menghasilkan bayangan titik Q. Kemudian, diputar 90° dengan titik pusat O, sehingga bayangan akhirnya adalah $R(1, -2)$. Tentukan:
   A. koordinat titik P
   B. koordinat titik Q

Fungsi, Persamaan, dan Pertidaksamaan Eksponen dan Logaritma

BAB

7

A. Grafik Fungsi Eksponen dan Fungsi Logaritma

B. Persamaan dan Pertidaksamaan Eksponen

C. Persamaan dan Pertidaksamaan Logaritma

Sumber: http://peacecorpsonline.org

Gempa pemicu tsunami yang telah memporak-porandakan Nanggroe Aceh Darussalam merupakan gempa terdashyat ketiga di dunia dengan kekuatan $R = 9$ skala Richter. Kekuatan gempa ini dicatat dengan alat yang dinamakan seismograf dengan menggunakan rumus dasar $R = \log \frac{M}{M_0}$. Penerapan pada seismograf ini merupakan salah satu kegunaan logaritma. Pada bab ini, kalian juga akan mempelajari penerapan lainnya.

A. Grafik Fungsi Eksponen dan Fungsi Logaritma

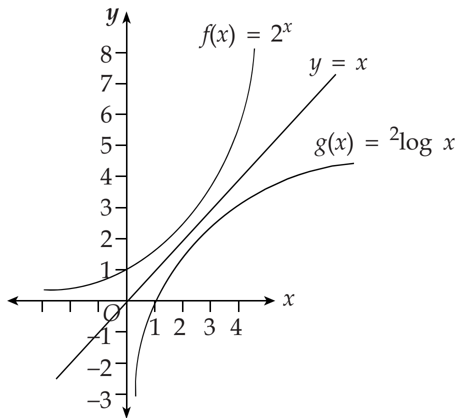
A. 1. Grafik Fungsi Eksponen dan Fungsi Logaritma dengan Bilangan Pokok $a > 1$

Di Kelas X, kalian telah mengetahui bahwa fungsi eksponen dan fungsi logaritma adalah dua fungsi yang saling invers. Untuk memahami sifat-sifat kedua fungsi tersebut, pada bab ini kalian akan menggambar grafik kedua fungsi itu. Sekarang, coba gambar grafik fungsi $f(x) = 2^x$ dan inversnya, yaitu $g(x) = {}^2\log x$ dalam satu sumbu koordinat.

Untuk memudahkan menggambar kedua grafik fungsi ini, terlebih dahulu buatlah tabel nilai-nilai x dan $f(x) = 2^x$ seperti berikut.

x	$-\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	∞
$f(x) = 2^x$	0	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...	∞

Setelah itu, gambarkan titik-titik tersebut pada koordinat Cartesius. Lalu hubungkan dengan kurva mulus, sehingga diperoleh grafik $f(x) = 2^x$. Grafik yang kalian dapatkan ini, cerminkan terhadap garis $y = x$ sehingga kalian mendapatkan grafik fungsi inversnya, yaitu $g(x) = {}^2\log x$.



Gambar 7.1
Grafik fungsi $f(x) = 2^x$ dan $g(x) = {}^2\log x$

Dengan memperhatikan grafik fungsi $f(x) = 2^x$ dan $g(x) = {}^2\log x$ yang masing-masing merupakan grafik fungsi eksponen dan fungsi logaritma dengan bilangan pokok 2, kalian dapat mengetahui bahwa:

No.	Fungsi $f(x) = 2^x$	Fungsi $g(x) = {}^2\log x$
1.	Daerah asalnya $\{x \mid x \in R\}$	Daerah asalnya $\{x \mid x > 0, x \in R\}$
2.	Daerah hasilnya $\{y \mid y > 0, y \in R\}$	Daerah hasilnya $\{y \mid y \in R\}$
3.	Sumbu-x asimtot datar	Sumbu y asimtot tegak
4.	Grafik di atas sumbu-x	Grafik di sebelah kanan sumbu-y
5.	Memotong sumbu-y di titik (0, 1)	Memotong sumbu-x di titik (1, 0)
6.	Merupakan fungsi naik untuk setiap x	Merupakan fungsi naik untuk setiap x

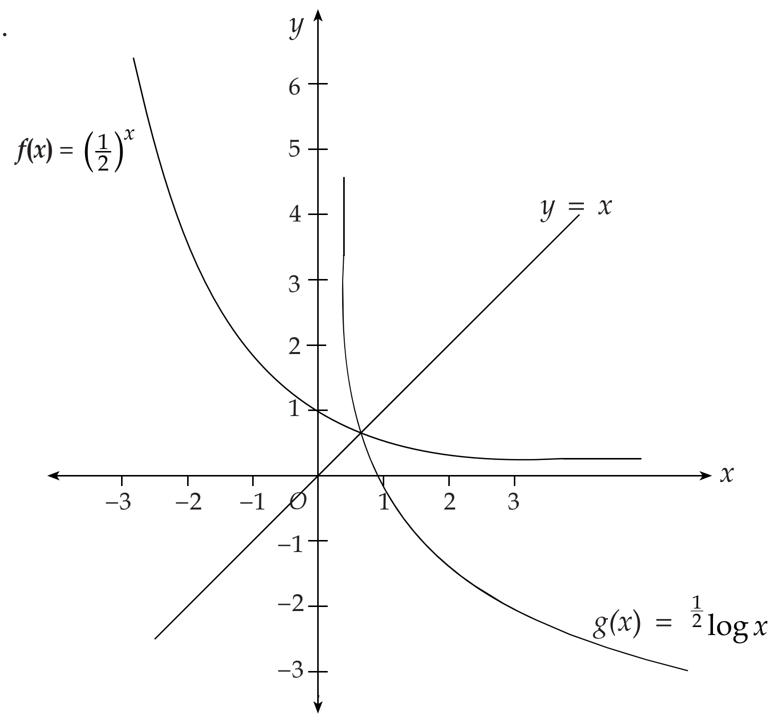
Sifat-sifat ini berlaku juga untuk setiap fungsi eksponen $f(x) = a^x$ dan fungsi logaritma $g(x) = {}^a\log x$ dengan $a > 1$.

A. 2. Grafik Fungsi Eksponen dan Fungsi Logaritma dengan Bilangan Pokok $0 < a < 1$

Untuk menggambar grafik fungsi eksponen dan fungsi logaritma dengan bilangan pokok $0 < a < 1$, kalian dapat menggunakan prinsip yang sama seperti pada bilangan pokok $a > 1$, yaitu terlebih dahulu gambarkan grafik fungsi eksponennya. Kemudian, cerminkan terhadap garis $y = x$ untuk mendapatkan inversnya, yaitu fungsi logaritma. Sekarang, coba gambar grafik fungsi $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ dan inversnya, yaitu $g(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ dalam satu sumbu koordinat. Untuk memudahkan menggambar kedua grafik fungsi ini, terlebih dahulu buatlah tabel nilai-nilai x dan $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ seperti berikut.

x	$-\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	∞
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	0	...	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...	0

Setelah itu, gambarkan titik-titik tersebut pada koordinat Cartesius. Lalu, hubungkan dengan kurva mulus, sehingga diperoleh grafik $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Grafik yang kalian dapatkan ini, cerminkan terhadap garis $y = x$ sehingga kalian mendapatkan grafik fungsi inversnya, yaitu $g(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$.



Gambar 7.2
Grafik fungsi $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ dan $g(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$

Dengan memperhatikan grafik fungsi $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ dan $g(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ yang masing-masing merupakan grafik fungsi eksponen dan fungsi logaritma dengan bilangan pokok $\frac{1}{2}$, kalian dapat mengetahui bahwa:

No.	Fungsi $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	Fungsi $g(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$
1.	Daerah asalnya $\{x \mid x \in R\}$	Daerah asalnya $\{x \mid x > 0, x \in R\}$
2.	Daerah hasilnya $\{y \mid y > 0, y \in R\}$	Daerah hasilnya $\{y \mid y \in R\}$
3.	Sumbu-x asimtot datar	Sumbu-y asimtot tegak
4.	Grafik di atas sumbu-x	Grafik di sebelah kanan sumbu-y
5.	Memotong sumbu-y di titik (0, 1)	Memotong sumbu-x di titik (1, 0)
6.	Merupakan fungsi turun untuk setiap x	Merupakan fungsi turun untuk setiap x

Sifat-sifat ini berlaku juga untuk setiap fungsi eksponen $f(x) = a^x$ dan fungsi logaritma $g(x) = {}^a\log x$ dengan $0 < a < 1$.

Asah Kompetensi 1

1. Gambarlah grafik dari tiap fungsi berikut ini!

a. $f(x) = 2^x + 1$

b. $f(x) = 2 + 3^x$

c. $f(x) = 3^x + 1$

d. $f(x) = 3^x + 3$

2. Gambarlah grafik dan invers dari tiap fungsi berikut!

a. $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

b. $f(x) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x$

c. $f(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+1}$

d. $f(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+3}$

1 Asah Kemampuan

Waktu : 60 menit

1. Gambarkan grafik fungsi-fungsi eksponen berikut ini!

Bobot soal: 40

a. $f(x) = 2^{3x - 2}$

b. $g(x) = 2^{3x + 2}$

c. $k(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x-2}$

d. $l(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x-2}$

e. $h(x) = 2^{3x - 2}$

f. $j(x) = 2^{3x + 2}$

g. $m(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}$

h. $n(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2}$

2. Gambarkan grafik fungsi-fungsi logaritma berikut ini.

Bobot soal: 40

a. $f(x) = {}^{3}\log (x - 1)$

b. $g(x) = {}^{3}\log (x + 1)$

c. $h(x) = {}^{3}\log x - 1$

d. $j(x) = {}^{3}\log x + 1$

e. $k(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log (x - 1)$

f. $l(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log (x + 1)$

g. $m(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log x - 1$

h. $k(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log x + 1$

3. Tentukanlah titik potong grafik fungsi $f(x) = -2^{x + 1} + (\sqrt{2})^x + 3$ terhadap sumbu-x dan sumbu-y!

Bobot soal: 20

B. Persamaan dan Pertidaksamaan Eksponen

B. 1. Sifat-sifat Fungsi Eksponen

Untuk menentukan penyelesaian persamaan eksponen, sebaiknya kalian mengingat kembali sifat-sifat fungsi yang telah dipelajari di Kelas X.

Jika $a, b \in R$, $a \neq 0$, m dan n bilangan rasional, maka sifat-sifat fungsi eksponen adalah sebagai berikut.

- $a^m \cdot a^n = a^{m + n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m - n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$
- $(a^m \cdot b^n)^p = a^{mp} \cdot b^{np}$
- $\left(\dfrac{a^m}{b^n}\right)^p = \dfrac{a^{m\cdot p}}{b^{n\cdot p}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[mn]{a^p} = a^{\frac{p}{mn}}$
- $a^0 = 1$

Contoh

1. Sederhanakanlah!

a. $(3x^2 \cdot y^{-5})(-3x^{-8} \cdot y^9)$

b. $\dfrac{5x^5 \cdot y^2}{7x^3 \cdot y^{-5}}$

Jawab:

a. $$\begin{aligned}(3x^2 \cdot y^{-5})(-3x^8 \cdot y^9) &= (3x^2)(-3x^{-8})(y^{-5})(y^9)\\ &= (3)(-3)x^2 \cdot x^{-8} \cdot y^{-5} \cdot y^9\\ &= -9 \cdot x^{2 - 8} \cdot y^{-5 + 9}\\ &= -9^{x - 6} \cdot y^4\\ &= -\frac{9y^4}{x^6}\end{aligned}$$

b. $\dfrac{5x^5 \cdot y^2}{7x^3 \cdot y^{-5}} = \dfrac{5x^5}{7x^3} \cdot \dfrac{y^2}{y^{-5}}$

$= \dfrac{5}{7} x^{5-3} \cdot y^{2-(-5)}$

$= \dfrac{5}{7} x^2 \cdot y^{2+5}$

$= \dfrac{5}{7} x^2 y^7$

2. Sederhanakanlah!

a. $\left(\sqrt{x}\right)^3$

b. $(8x^3 \cdot y^{12})^{\frac{1}{6}}$

Jawab:

a. $\left(\sqrt{x}\right)^3 = (x^{\frac{1}{2}})^3$

$= x^{\frac{3}{2}}$

b. $(8\,x^3 \cdot y^{12})^{\frac{1}{6}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} \cdot (x^3)^{\frac{1}{6}} \cdot (y^{12})^{\frac{1}{6}}$

$= 2^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^2$

$= y^2\sqrt{2x}$

3. Sederhanakanlah!

a. $\left(\sqrt{\dfrac{x}{y^5}}\right)^{10}$

b. $\sqrt[6]{\sqrt[4]{x^2}}$

Jawab:

a. $\left(\left(\dfrac{x}{y^5}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{10} = \left(\dfrac{x}{y^5}\right)^{\frac{1}{2} \cdot 10} = \left(\dfrac{x}{y^5}\right)^5 = \dfrac{x^5}{\left(y^5\right)^5} = \dfrac{x^5}{y^{25}}$

b. $\sqrt[6]{\sqrt[4]{x^2}} = {}^{6 \cdot 4}\!\sqrt{x^2} = \sqrt[24]{x^2} = x^{\frac{2}{24}} = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}$

Asah Kompetensi 2

1. Sederhanakanlah!

a. $2x^3 \cdot x^{-5}$

b. $\dfrac{4a^5}{2a^{-3}}$

c. $\left(\frac{2}{3}m^2\right)^3$

d. $\left(2m^{-4}\right)^{\frac{1}{2}}$

e. $(a^5 \cdot b^3)^{\frac{1}{15}}$

f. $\left(\dfrac{3k^2}{5l^3}\right)^{\frac{1}{6}}$

2. Sederhanakanlah!

a. $(4x^3y^{-2})(3x^2y^{-10})$

b. $\dfrac{x^7 10y^5}{9x^{-3}y^{-2}}$

c. $\left(\sqrt{4x}\right)^5$

d. $(-4x^2y^6)^{\frac{1}{3}}$

e. $\left(\sqrt{\dfrac{2x^2}{y^4}}\right)^5$

f. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2y^6}}$

Siapa Berani

1. $$\frac{\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{4}{x}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right)^{\frac{1}{2}}} = \ldots.$$

2. $$\left(1+\left(13+\sqrt{13+\sqrt[4]{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \ldots.$$

B. 2. Persamaan Eksponen

Persamaan eksponen adalah persamaan yang eksponen dan bilangan pokoknya memuat variabel. Simaklah contoh-contoh berikut ini.

- $4^{2x+1} = 32^{x-3}$ merupakan persamaan eksponen yang eksponennya memuat variabel x.
- $(y+5)^{5y-1} = (y+5)^{5-y}$ merupakan persamaan eksponen yang eksponen dan bilangan pokoknya memuat variabel y.
- $16^t + 2 \cdot 4^t + 1 = 0$ merupakan persamaan eksponen yang eksponennya memuat variabel t.

Ada beberapa bentuk persamaan eksponen ini, di antaranya:

a. $a^{f(x)} = a^m$

Jika $a^{f(x)} = a^m$, $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka $f(x) = m$

Contoh

Tentukanlah penyelesaian $3 = 27^{1-x}$.

Jawab:

$$\begin{aligned} 3 &= 27^{1-x} \\ 3^1 &= 3^{3(1-x)} \\ 3(1-x) &= 1 \\ 1-x &= \frac{1}{3} \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Jadi, penyelesaian $3 = 27^{1-x}$ adalah $x = \frac{2}{3}$.

b. $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka $f(x) = g(x)$

Contoh

Tentukanlah penyelesaian $25^{x+3} = 5^{x-1}$.

Jawab:

$$\begin{aligned} 25^{(x+3)} &= 5^{(x-1)} \\ 5^{2(x+3)} &= 5^{(x-1)} \\ 2(x+3) &= x-1 \\ 2x+6 &= x-1 \\ x &= -7 \end{aligned}$$

Jadi, penyelesaian $25^{x+3} = 5^{x-1}$ adalah $x = -7$.

c. $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, $a \neq b$

Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, dan $a \neq b$, maka $f(x) = 0$

Contoh

Tentukanlah penyelesaian $45^{x-6} = 50^{x-6}$.

Jawab:

$45^{x-6} = 50^{x-6}$

Supaya ruas kiri dan kanan sama, $x - 6 = 0$, sehingga $45^0 = 50^0$

$$\begin{aligned} x - 6 &= 0 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Jadi, penyelesaian $45^{x-6} = 50^{x-6}$ adalah $x = 6$.

d. $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$

Jika $f(x)g(x) = f(x)^{h(x)}$, maka penyelesaiannya adalah sebagai berikut.
- $g(x) = h(x)$
- $f(x) = 1$
- $f(x) = 0$, asalkan $g(x)$ dan $h(x)$ keduanya positif
- $f(x) = -1$, asalkan $g(x)$ dan $h(x)$ keduanya genap atau keduanya ganjil

Contoh

Tentukanlah himpunan penyelesaian $(3x - 10)^{x^2} = (3x - 10)^{2x}$.

Jawab:

- $$\begin{aligned} x^2 &= 2x \\ x^2 - 2x &= 0 \\ x(x-2) &= 0 \\ x &= 0 \text{ atau } x = 2 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 3x - 10 &= 1 \\ 3x &= 11 \\ x &= \frac{11}{3} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 3x - 10 &= 0 \\ 3x &= 10 \\ x &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

  Sekarang periksa apakah untuk $x = \frac{10}{3}$, $g(x)$ dan $h(x)$ keduanya positif?

  $g\left(\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{100}{9} > 0$

  $h\left(\frac{10}{3}\right) = 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3} > 0$

  Jadi, untuk $x = \frac{10}{3}$, $g(x)$ dan $h(x)$ keduanya positif, sehingga $x = \frac{10}{3}$ merupakan penyelesaian.
- $$\begin{aligned} 3x - 10 &= -1 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

  Sekarang periksa apakah untuk $x = 3$, $g(x)$, dan $h(x)$ keduanya genap atau keduanya ganjil?

  $g(3) = 3^2 = 9$ dan $h(3) = 2 \cdot 3 = 6$

  Perhatikan bahwa untuk $x = 3$, $g(x)$ ganjil dan $h(x)$ genap sehingga $x = 3$ bukan penyelesaian.

  Dengan demikian, himpunan penyelesaian

  $(3x - 10)^{x^2} = (3x - 10)^{2x}$ adalah $\left\{0, 2, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}\right\}$.

e. $A(a^{f(x)})^2 + B \cdot a^{f(x)} + C = 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $A, B, C \in R$, $A \neq 0$

Terlebih dahulu, misalkan $y = a^{f(x)}$. Dari pemisalan ini, diperoleh $Ay^2 + By + C = 0$. Nilai y yang kalian peroleh, substitusi kembali pada pemisalan $y = a^{f(x)}$ sehingga kalian memperoleh nilai x.

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian $16^t + 2 \cdot 4^t + 1 = 0$.

Jawab:

$16^t + 2 \cdot 4^t + 1 = 0$

$4^{2t} + 2 \cdot 4^t + 1 = 0$

Misalkan $y = 4^t$, sehingga diperoleh:

$$y^2 + 2y + 1 = 0$$
$$(y + 1)^2 = 0$$
$$y = -1$$

Substitusi nilai y yang kalian peroleh ke pemisalan $y = 4^t \Leftrightarrow 4^t = -1$.
Oleh karena untuk setiap $t \in R$, $4^t > 0$, maka tidak ada nilai t yang memenuhi $4^t = -1$.
Jadi, himpunan penyelesaian $16^t + 2 \cdot 4^t + 1 = 0$ adalah $\varnothing$.

Asah Kompetensi 3

1. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan-persamaan berikut!
   a. $2^5 \times 8^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x}$
   b. $2^{x-y+1} = 16$
   c. $3^{2x-y+3} = 9^x$
   d. $3^{5x-1} = 27^{x+3}$
   e. $\frac{4^{x+2}}{8} = \sqrt{8^x}$
   f. $12^{x^2-x+2} = 24^{x^2-x+2}$
   g. $6^{x-2} + 6^{x-1} = 5$
   h. $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$
2. x_1 dan x_2 memenuhi persamaan $\left(\log(x-1) \cdot \log(x+1)\right) \cdot \frac{1}{{}^x\log 10} = \log 10$

   Tentukanlah $x_1 \cdot x_2$
3. x_1 dan x_2 memenuhi persamaan $\frac{{}^{100}\log \frac{x^5}{100}}{{}^{100}\log x} \cdot {}^{100}\log x = \frac{5}{{}^{100}\log x}$

   Tentukanlah $\sqrt[5]{x_1 x_2}$.

Siapa Berani

Tentukan nilai x yang memenuhi $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = \frac{3}{2}$.

B. 3. Pertidaksamaan Eksponen

Sebelumnya, kalian telah mengetahui sifat-sifat fungsi eksponen, yaitu sebagai berikut.

- Untuk $a > 1$, fungsi $f(x) = a^x$ merupakan fungsi naik. Artinya, untuk setiap $x_1, x_2 \in R$ berlaku $x_1 < x_2$ jika dan hanya jika $f(x_1) < f(x_2)$.
- Untuk $0 < a < 1$, fungsi $f(x) = a^x$ merupakan fungsi turun. Artinya, untuk setiap $x_1, x_2 \in R$ berlaku $x_1 < x_2$ jika dan hanya jika $f(x_1) > f(x_2)$.

Sifat-sifat ini berguna untuk menyelesaikan pertidaksamaan eksponen.

Catatan

Himpunan penyelesaian dapat disingkat dengan **HP.**

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian $2^{x+2} > 16^{x-2}$.

Jawab:

$2^{x+2} > 16^{x-2}$

$2^{x+2} > 2^{4(x-2)}$

$x + 2 > 4(x - 2)$ .... $a > 1$, maka fungsi naik

$x + 2 > 4x - 8$

$3x < 10$

$x < \frac{10}{3}$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah HP = $\left\{x \mid x < \frac{10}{3}, x \in R\right\}$.

Asah Kompetensi 3

Tentukanlah himpunan penyelesaian pertidaksamaan-pertidaksamaan berikut!

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sqrt{2^{2x+1}} \le \frac{2^5}{4}$
2. $3^{x+5} > 3^{x^2+6x+11}$
3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x+1} < \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$
4. $3^{2x-4} < 3^{2x-3}$
5. $(x^2 - 2x + 3)^{2x-1} \ge (x^2 - 2x + 3)^{x+3}$
6. $6^{2x+1} + 8 \cdot 6^x + 2 > 0$

2 Asah Kemampuan

Waktu : 60 menit

1. Tentukanlah himpunan penyelesaian persamaan-persamaan berikut. **Bobot soal: 20**

a. $\sqrt{\left(\frac{1}{64}\right)^{3x-1}} = 32$

b. $(3x + 1)^{2x - 8} = (5x - 3)^{3x^2 - 8}$

c. $2^{2x} + 2^{x + 2} - 32 = 0$

d. $3^{2x} - 5 \cdot 3^{4x + 1} + 6 = 0$

2. Tentukanlah himpunan penyelesaian pertidaksamaan-pertidaksamaan berikut! **Bobot soal: 20**

a. $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2-2x}} \geq 8$

b. $(x + 2)^{2x + 6} < (x^2 + 4x + 4)^{3x + 5}$

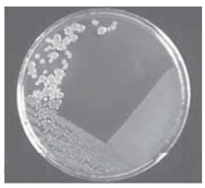
c. $3x + \frac{3}{3^x} - 4 > 0$

d. $2^{2x} - 2^{x + 2} + 3 = 0$

3. Sebuah koloni lebah meningkat 25% setiap tiga bulan. Pak Tahomadu ingin memelihara lebah-lebah ini. Ia menargetkan lebah-lebah tersebut mencapai 18.000 dalam 18 bulan mendatang. Berapa banyak lebah yang harus dipeliharanya sekarang? **Bobot soal: 20**

Sumber: www.soccer.net

4. Jika populasi suatu koloni bakteri berlipat dua setiap 30 menit, berapa lama waktu yang diperlukan oleh koloni itu agar populasinya menjadi berlipat tiga? **Bobot soal: 20**



Sumber: Microsoft Encarta Reference Library, 2005

5. Segelas kopi kira-kira mengandung 100 mg kafein. Jika kalian meminum segelas kopi, kafein akan diserap ke dalam darah dan akhirnya dimetabolisme oleh tubuh. Setiap 5 jam, banyak kafein di dalam darah berkurang 50%. **Bobot soal: 20**

Sumber: Microsoft Encarta Reference Library, 2005

a. Tulislah sebuah persamaan yang menyatakan banyak kafein di dalam darah sebagai suatu fungsi eksponen dari waktu t sejak kalian minum kopi!

b. Setelah berapa jam kafein di dalam darah tinggal 1 mg?

C. Persamaan dan Pertidaksamaan Logaritma

C. 1. Sifat-Sifat Fungsi Logaritma

Di Kelas X telah dipelajari sifat-sifat logaritma. Secara umum bentuk logaritma dituliskan

$$\boxed{a^b = c \Leftrightarrow {}^a\log c = b}$$

dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$

Sifat-sifat logaritma:

- ${}^a\log 1 = 0$
- ${}^a\log a = 1$
- ${}^a\log \frac{1}{a} = -1$
- ${}^a\log a^b = b$
- ${}^a\log b + {}^a\log c = {}^a\log bc$
- ${}^a\log b - {}^a\log c = {}^a\log \frac{b}{c}$
- $a^{{}^a\log b} = b$
- ${}^a\log b = \frac{{}^c\log b}{{}^c\log a}$
- ${}^a\log b = \frac{1}{{}^b\log a}$
- ${}^{a^c}\log b^d = {}^a\log b^{\frac{d}{c}} = \frac{d}{c} \cdot {}^a\log b$

Contoh

Hitunglah!

a. ${}^4\log 1$

b. ${}^{\frac{1}{3}}\log \frac{1}{3}$

c. ${}^{\frac{1}{2}}\log 8$

d. ${}^5\log \frac{1}{5}$

e. ${}^{16}\log 4$

f. ${}^8\log 32$

g. $\frac{1}{{}^3\log 6} + \frac{1}{{}^2\log 6}$

h. ${}^3\log 18 - {}^3\log 2$

Jawab:

a. ${}^4\log 1 = 0$

b. ${}^{\frac{1}{3}}\log \frac{1}{3} = 1$

c. ${}^{\frac{1}{2}}\log 8 = {}^{\frac{1}{2}}\log \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3$

d. ${}^5\log \frac{1}{5} = -1$

e. $${}^{16}\log 4 = \frac{{}^2\log 4}{2\log 16} = \frac{{}^2\log (2)^2}{{}^2\log (2)^4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

f. $^{8}\log 32 = {}^{2^3}\log 2^5$

$= \frac{5}{3} \cdot {}^{2}\log 2 = \frac{5}{3}$

g. $\frac{1}{^{3}\log 6} + \frac{1}{^{2}\log 6} = {}^{6}\log 3 + {}^{6}\log 2$

$= {}^{6}\log 3 \cdot 2$

$= {}^{6}\log 6 = 1$

h. $^{3}\log 18 - {}^{3}\log 2 = {}^{3}\log \frac{18}{2}$

$= {}^{3}\log 9$

$= {}^{3}\log (3)^2 = 2$

C. 2. Persamaan Logaritma

Persamaan logaritma adalah persamaan yang variabelnya sebagai numerus atau sebagai bilangan pokok dari suatu logaritma. Perhatikan contoh berikut ini.

- $\log x + \log (2x + 1) = 1$ merupakan persamaan logaritma yang numerusnya memuat variabel x
- $^{5}\log 4m + {}^{5}\log m^2 = 0$ merupakan persamaan logaritma yang numerusnya memuat variabel m
- $^{x}\log 5 + {}^{x}\log 2 = 2$ merupakan persamaan logaritma yang bilangan pokoknya memuat variabel x
- $^{2t}\log (t - 2) - {}^{2t}\log 2t = -2$ merupakan persamaan logaritma yang numerus dan bilangan pokoknya memuat variabel t

Ada beberapa bentuk persamaan logaritma ini, di antaranya:

a. $^{a}\log f(x) = {}^{a}\log m$

Jika $^{a}\log f(x) = {}^{a}\log m$, $f(x) > 0$, maka $f(x) = m$.

Contoh

Tentukanlah penyelesaian $^{2}\log (x - 2) = 4$.

Jawab:

$^{2}\log (x - 2) = 4$

$^{2}\log (x - 2) = {}^{2}\log 2^4$

$x - 2 = 2^4$

$x = 18$

Jadi, penyelesaian $^{2}\log (x - 2) = 4$ adalah $x = 18$.

b. $^{a}\log f(x) = {}^{b}\log f(x)$

Jika $^{a}\log f(x) = {}^{b}\log f(x)$, $a \neq b$, maka $f(x) = 1$.

Contoh

Tentukanlah penyelesaian $\log (x^2 - 3) = {}^{4}\log (x^2 - 3)$.

Jawab:

$$\begin{aligned} \log (x^2 - 3) &= {}^{4}\log (x^2 - 3) \\ x^2 - 3 &= 1 \\ x^2 &= 4 \\ x &= -2 \text{ atau } x = 2 \end{aligned}$$

Jadi, penyelesaian $\log (x^2 - 3) = {}^{4}\log (x^2 - 3)$ adalah $x = -2$ atau $x = 2$.

c. $^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x)$

Jika $^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, dan $g(x) > 0$, maka $f(x) = g(x)$.

Contoh

Tentukanlah penyelesaian $^{7}\log (x^2 - 2x + 3) = {}^{7}\log (4x - 2)$.

Jawab:

$$\begin{aligned} {}^{7}\log (x^2 - 2x + 3) &= {}^{7}\log (4x - 2) \\ x^2 - 2x + 3 &= 4x - 2 \\ x^2 - 6x + 5 &= 0 \\ (x - 1)(x - 5) &= 0 \\ x &= 1 \text{ atau } x = 5 \end{aligned}$$

Sekarang, selidiki apakah $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$?

- $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 1 - 2 + 3 = 2 > 0$
  $g(1) = 4 \cdot 1 - 2 = 4 - 2 = 2 > 0$
- $f(5) = 5^2 - 2 \cdot 5 + 3 = 25 - 10 + 3 = 18 > 0$
  $g(5) = 4 \cdot 5 - 2 = 20 - 2 = 18 > 0$

Karena untuk $x = 1$ dan $x = 5$, $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$, maka $x = 1$ dan $x = 5$ merupakan penyelesaian.

Jadi, penyelesaian $^{7}\log (x^2 - 2x + 3) = {}^{7}\log (4x - 2)$ adalah $x = 1$ dan $x = 5$.

d. $^{f(x)}\log g(x) = {}^{f(x)}\log h(x)$

Jika $^{f(x)}\log g(x) = {}^{f(x)}\log h(x)$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $h(x) > 0$, dan $f(x) \neq 1$, maka $g(x) = h(x)$.

Contoh

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari
${}^{x-1}\log (x + 2) = {}^{x-1}\log (x^2 + 3x + 2)$

Jawab:

$${}^{x-1}\log (x + 2) = {}^{x-1}\log (x^2 + 3x + 2)$$
$$x + 2 = x^2 + 3x + 2$$
$$x^2 + 2x = 0$$
$$x(x + 2) = 0$$
$$x = 0 \text{ atau } x = -2$$

Sekarang, selidiki apakah $f(x) > 0$, $f(x) \neq 1$, $g(x) > 0$, dan $h(x) > 0$
$f(0) = 0 - 1 = -1 < 0$
$f(-2) = -2 - 1 = -3 < 0$

Oleh karena untuk $x = 0$ dan $x = -2$, $f(x) < 0$, maka $x = 0$ atau $x = -2$ bukan penyelesaian.

Jadi, himpunan penyelesaian dari
${}^{x-1}\log (x + 2) = {}^{x-1}\log (x^2 + 3x + 2)$ adalah $\varnothing$.

e. $\boldsymbol{A\,{}^{p}\log^2 f(x) + B\,{}^{p}\log f(x) + C = 0}$

Terlebih dahulu, misalkan $y = {}^{p}\log f(x)$. Dari pemisalan ini, diperoleh $Ay^2 + By + C = 0$. Nilai y yang kalian peroleh, substitusi kembali pada pemisalan $y = {}^{p}\log f(x)$, sehingga kalian memperoleh nilai x.

Contoh

Tentukan penyelesaian ${}^{4}\log^2 x - {}^{4}\log x^3 + 2 = 0$.

Jawab:

${}^{4}\log^2 x - {}^{4}\log x^3 + 2 = 0$.

${}^{4}\log^2 x - 3\,{}^{4}\log x + 2 = 0$.

Misalkan $y = {}^{4}\log x$, maka

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$
$$(y - 1)(y - 2) = 0$$
$$y = 1 \text{ atau } y = 2$$

Untuk mendapatkan nilai x, substitusilah nilai y yang kalian peroleh ke pemisalan $y = {}^{4}\log x$

$y = 1 \Rightarrow {}^{4}\log x = 1$, sehingga $x = 4$.

$y = 2 \Rightarrow {}^{4}\log x = 2$, sehingga $x = 16$.

Jadi, penyelesaian ${}^{4}\log^2 x - {}^{4}\log x^3 + 2 = 0$ adalah $x = 4$ atau $x = 16$.

Asah Kompetensi 5

1. Tentukan penyelesaian persamaan-persamaan logaritma berikut.

a. ${}^{3}\log\,(x^2 - 5x + 7) = 0$

b. ${}^{3}\log\,(x^2 - 3x + 2) = {}^{3}\log\,(2x - 4)$

c. ${}^{x}\log\,(3x + 4) = {}^{x}\log\,(x^2 - 2x + 10)$

d. $2\,\log^2 x - 9\,\log x = -4$

e. $\dfrac{{}^{3}\log\,(2x - 3)}{{}^{3}\log\,x} + \dfrac{{}^{x}\log\,(x + 6)}{{}^{x+2}\log\,x} = 1$

2. Hitunglah!

a. ${}^{2}\log 10\;{}^{5}\log 10 - ({}^{2}\log 5 + {}^{5}\log 2)$

b. $\log 30 - \dfrac{1}{{}^{48}\log 10} + \dfrac{1}{{}^{16}\log 10}$

Olimpiade Matematika SMU, 2000

c. $\dfrac{({}^{5}\log x)^2 - ({}^{5}\log y)^2}{{}^{5}\log x - {}^{5}\log y}$

d. $\dfrac{\log x\sqrt{y} + \log y\sqrt{x} - \log xy}{\log xy}$

e. ${}^{2}\log \sin x + {}^{2}\log \cos x - {}^{2}\log \sin 2x$, untuk $\sin x > 0$ dan $\cos x > 0$

GaMeMath

Nini Sentera dan Uci bermain tebak-tebakan. Nini Sentera merahasiakan dua bilangan. Bilangan pertama terdiri atas 14 angka sedangkan bilangan kedua terdiri atas 18 angka. Ia meminta Uci memperkirakan banyak angka di depan koma jika bilangan pertama dibagi bilangan kedua.

C. 3. Pertidaksamaan Logaritma

Pada pembahasan sebelumnya, kalian telah mengetahui sifat-sifat fungsi logaritma, yaitu sebagai berikut.

- Untuk $a > 1$, fungsi $f(x) = {}^{a}\log x$ merupakan fungsi naik. Artinya, untuk setiap $x_1, x_2 \in R$ berlaku $x_1 < x_2$ jika dan hanya jika $f(x_1) < f(x_2)$.
- Untuk $0 < a < 1$, fungsi $f(x) = {}^{a}\log x$ merupakan fungsi turun. Artinya, untuk setiap $x_1, x_2 \in R$ berlaku $x_1 < x_2$ jika dan hanya jika $f(x_1) > f(x_2)$.

Sifat-sifat ini berguna untuk menyelesaikan pertidaksamaan logaritma.

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian ${}^3\log\ (x + 5) > 0$.

Jawab:

${}^3\log\ (x + 5) > 0$

${}^3\log\ (x + 5) > {}^3\log 1$

$x + 5 > 1$ .... karena $a > 1$, maka fungsi naik

$x > -4$

Perhatikan pula bahwa numerusnya harus lebih dari nol. Berarti, $x + 5 > 0$. Didapat $x > -5$.

Jadi, himpunan penyelesaian ${}^3\log\ (x + 5) > 0$ adalah

HP = $\{x | x > -5 \text{ atau } x > -4, x \in R\}$

Asah Kompetensi 6

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan-pertidaksamaan logaritma berikut.

1. ${}^3\log x > 2$
2. ${}^3\log\ (x - 2) \geq 4$
3. ${}^2\log\ (x^2 - 2x) > 3$
4. ${}^9\log\ (x^2 - x + 3) \leq 1$
5. $\log\ (x^2 + 2x + 1) \leq \log\ (3x + 4)$
6. ${}^{\frac{1}{2}}\log\ (3x + 1) < {}^{\frac{1}{2}}\log\ (x + 7)$
7. ${}^{\frac{1}{3}}\log\ (x + 3) \geq 2$
8. ${}^{\frac{1}{2}}\log\ (x^2 - 3) < 0$
9. ${}^{\frac{1}{2}}\log\ (3x^2 - 4x + 1) > 0$
10. $2\,{}^3\log^2 x - 5\,{}^3\log x + 2 \leq 0$

3 Asah Kemampuan

Waktu : 60 menit

1. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan-persamaan logaritma berikut! **Bobot soal: 70**
   a. $\log x - \log 3 = \log\ (x - 3)$
   b. $\log\log\ (x + 2) = 2 + \log 3$
   c. ${}^{0,5}\log\ (x + 2) + {}^4\log\ (x + 2) = 0$
   d. $\log x = \log\ (\log x + 4) - 4$
   e. $25^{5}\log\sqrt{x+1} = 4$
   f. ${}^2\log({}^3\log\ (2x - 1)) = 2$
   g. $\sqrt{{}^2\log\sqrt{x+6}} = 2$

2. Diketahui $\log (x - y) = \log 3 \cdot {}^{9}\log 4$ dan $2^{x-1} = 4^{y+x}$. Tentukanlah nilai x dan y.

Bobot soal: 10

3. Diketahui $xy = 80$ dan $\log x - 2 \log y = 1$. Tentukanlah nilai $x - 4y$

Olimpiade Matematika SMU, 2000

Bobot soal: 10

4. Banyak desibel suatu suara yang berintensitas I didefinisikan sebagai $B = 10 \log \frac{I}{I_0}$. Jika dua suara yang berintensitas I_1 dan I_2 mempunyai desibel B_1 dan B_2, tunjukkan bahwa $B_1 - B_2 = 10 \log \frac{I_1}{I_2}$.

Olimpiade Matematika SMU, 2000

Bobot soal: 10

Siapa Berani

x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan $3\log (9x + 18) = 2 + x$. Tentukanlah nilai $x_1 + x_2$.

Olimpiade Matematika SMU, 2000

Rangkuman

1. Fungsi eksponen dan fungsi logaritma adalah dua fungsi yang saling invers.

$$f(x) = a^x \Rightarrow g(x) = {}^{a}\log x$$

dengan $f(x)$: fungsi eksponen
$g(x)$: fungsi logaritma

2. Bentuk-bentuk persamaan eksponen.
   - Jika $a^{f(x)} = a^m$, $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka $f(x) = m$
   - Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka $f(x) = g(x)$
   - Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, dan $a \neq b$, maka $f(x) = 0$
   - Jika $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$, maka $g(x) = h(x)$

3. Sifat-sifat fungsi eksponen
   - $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
   - $(a^m \cdot b^n)^p = a^{m.p} \cdot b^{n.p}$
   - $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
   - $\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^p = \frac{a^{m.p}}{b^{n.p}}$
   - $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$
   - $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[mn]{a^p} = a^{\frac{p}{mn}}$
   - $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
   - $a^0 = 1$

4. Bentuk-bentuk persamaan logaritma
- Jika ${}^a\log f(x) = {}^a\log m$, $f(x) > 0$, maka $f(x) = m$
- Jika ${}^a\log f(x) = {}^b\log f(x)$, $a \neq b$, maka $f(x) = 1$
- Jika ${}^a\log f(x) = {}^a\log g(x)$, $g(x) > 0$, dan $g(x) > 0$, maka $f(x) = g(x)$
- Jika ${}^{f(x)}\log g(x) = {}^{f(x)}\log h(x)$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $h(x) = 0$, dan $f(x) = 1$

5. Sifat-sifat fungsi logaritma
- ${}^a\log 1 = 0$
- ${}^a\log a = 1$
- ${}^a\log \frac{1}{a} = -1$
- ${}^a\log a^b = b$
- ${}^a\log b + {}^a\log c = {}^a\log bc$
- ${}^a\log b - {}^a\log c = {}^a\log \frac{b}{c}$
- $a^{{}^a\log b} = b$
- ${}^a\log b = \frac{{}^c\log b}{{}^c\log a}$
- ${}^a\log b = \frac{1}{{}^b\log a}$
- ${}^{a^c}\log b^d = {}^a\log b^{\frac{d}{c}} = \frac{d}{c} \cdot {}^a\log b$

Ulangan Bab 7

I. Pilihlah jawaban yang paling tepat!

1. Jika $a = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ dan $b = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$, maka $a + b = \ldots.$
   A. $4\sqrt{3}$
   B. 4
   C. 1
   D. –4
   E. –6
2. Nilai x yang memenuhi $2^{n+3} = \sqrt[n+4]{64}$ adalah . . . .
   A. 6 dan 1
   B. 1
   C. –6
   D. –1 dan –6
   E. –2 dan –8
3. Jika ${}^{3}\log 5 = p$ dan ${}^{3}\log 11 = q$, maka ${}^{15}\log 275 = \ldots.$
   A. $\frac{2p+q}{p+1}$
   B. $\frac{p+2q}{p+1}$
   C. $\frac{2q+1}{p}$
   D. $(2p + q)(p + 1)$
   E. $\frac{p+q}{2q}$
4. Nilai dari $\frac{\log(a^2 - x^2)}{\log a} - {}^{a}\log\left[1 - \frac{x^2}{a^2}\right]$ adalah . . . .
   A. –2
   B. –1
   C. 1
   D. 3
   E. 2
5. Nilai x yang memenuhi $\left({}^{4}\log x\right)^2 - {}^{2}\log\sqrt{x} - \frac{3}{4} = 0$ adalah . . . .
   A. 16 atau 4
   B. 16 atau $\frac{1}{4}$
   C. 8 atau 2
   D. 8 atau $\frac{1}{2}$
   E. 8 atau 4
6. Jika x_1 dan x_2 memenuhi $2\left({}^{4}\log x\right)^2 - 6\left({}^{4}\log \frac{x}{2}\right) + 1 = 0$, maka $x_1 + x_2 = \ldots.$
   A. 20
   B. 12
   C. 6
   D. 4
   E. 2
7. Nilai x yang memenuhi $4^{2x^2 + 3x - 5} < \frac{1}{64}$ adalah . . . .
   A. $\frac{1}{2} < x < 2$
   B. $-\frac{1}{2} < x < 2$
   C. $-2 < x < -\frac{1}{2}$
   D. $2 < x < \frac{1}{2}$
   E. $-4 < x < -2$
8. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan ${}^{2}\log\left(x + \frac{12}{x}\right) \geq 3$ adalah . . . .
   A. $\{x | x \leq 2 \text{ atau } x \geq 6, x \in R\}$
   B. $\{x | 0 < x \leq 2 \text{ atau } x \geq 6, x \in R\}$
   C. $\{x | x < 0 \text{ atau } 2 \leq x \leq 6, x \in R\}$
   D. $\{x | x < 0 \text{ atau } x \geq 1\}$
   E. $\{x | x < 0 \text{ atau } x \geq 2\}$
9. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\frac{|x| - 2}{x} \leq 3$ adalah . . . .
   A. $\{x | x \geq 1, x \in R\}$
   B. $\{x | x \leq \frac{1}{2} \text{ atau } x \geq 1, x \in R\}$
   C. $\{x | 0 < x \leq 1, x \in R\}$
   D. $\left\{x \middle| x > 0 \text{ atau } -\frac{1}{2} < x < 0, x \in R\right\}$
   E. $\{x | x < 1 \text{ atau } x \geq 2\}$

10. Himpunan penyesaian pertidaksamaan $\log 4 + \log (x+3) \leq \log x^2$ adalah . . . .
A. $\{x | x \geq 6, x \in R\}$
B. $\{x | -3 < x \leq -2 \text{ atau } x \geq 6\}$
C. $\{x | -3 < x \leq -2 \text{ atau } 0 \leq x \leq 6\}$
D. $\{x | x \leq -2 \text{ atau } x \geq 6\}$
E. $\{x | x \leq -4 \text{ atau } x \geq 4\}$

11. Jika
$$3^{5x-1} - 27^{x+3} = 0$$
Nilai x yang memenuhi adalah . . . .
A. 2
B. 3
C. 5
D. 6
E. 7

12. Bentuk $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}\ b^{-3}}{a^{-1}\ b^{-\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}$ dapat disederhanakan menjadi . . . .
A. $\dfrac{b}{a}$
B. $\dfrac{a}{b}$
C. $b\sqrt{a}$
D. ab
E. $\sqrt[a]{b}$

13. Nilai-nilai yang memenuhi persamaan $1000^{(x^2 - 3x - 4)} = 1^{(x^2 - 2x - 3)}$ adalah . . . .
A. $x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{9}{2}$
B. $x_1 = -1,\ x_2 = \dfrac{9}{2}$
C. $x_1 = -1,\ x_2 = \dfrac{7}{2}$
D. $x_1 = 1,\ x_2 = -\dfrac{7}{2}$
E. $x_1 = -\dfrac{1}{2},\ x_2 = 9$

14. Bila
$$\frac{4^{(2^{3x-2})}}{5} + \frac{8^x}{20} = 1,$$
maka nilai x adalah . . . .
A. $\dfrac{3}{2}$
B. $\dfrac{2}{3}$
C. $-\dfrac{2}{3}$
D. $-\dfrac{3}{2}$
E. 1

15. ${}^5\log\sqrt{27} \cdot {}^9\log 125 + {}^{16}\log 32 = \ . . . .$
A. $\dfrac{61}{36}$
B. $\dfrac{9}{4}$
C. $\dfrac{61}{20}$
D. $\dfrac{41}{12}$
E. $\dfrac{7}{2}$

16. Penyelesaian dari $2^{\log x} = 1$ adalah . . . .
A. 0
B. 1
C. $\dfrac{1}{10}$
D. 2
E. 10

17. Jika $\left({}^a\log (3x-1)\right)\left({}^5\log a\right) = 3$, maka nilai x adalah . . . .
A. 36
B. 39
C. 42
D. 45
E. 48

18. Jika
$${}^a\log 81 - 2 \cdot {}^a\log 27 + {}^a\log 27 + {}^a\log 243 = 6,$$
maka nilai a sama dengan . . . .
A. $\sqrt{3}$
B. 3
C. $\sqrt{3}$
D. 9
E. 12

19. Jika
$${}^{(x+1)}\log (x^3 + 3x^2 + 2x + 4) = 3,$$
maka nilai x adalah . . . .
A. 0
B. 1
C. 3
D. 5
E. 9

20. Jika nilai ${}^5\log 3 = a$ dan b, maka nilai dari ${}^4\log 15$ adalah . . . .

A. $\dfrac{a+1}{ab}$

B. $\dfrac{ab}{a+1}$

C. $\dfrac{a+b}{a+1}$

D. $\dfrac{a+1}{a+b}$

E. $\dfrac{ab}{a-1}$

II. Jawablah pertanyaan berikut dengan jelas dan tepat!

1. Hitunglah nilai x yang memenuhi tiap persamaan berikut ini!

a. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-1} = \sqrt[3]{2^{3x+1}}$

b. $\left(\dfrac{3}{3^{x-2}}\right)^2 = \sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$

c. $\left(\sqrt{3}\right)^{5x} > 9^{3x+7}$

d. $\left(\sqrt{5}\right)^{x^3} < 25^{x^2-\frac{3}{4}x}$

e. $x^{2\log x} = \dfrac{x^4}{8}$

f. ${}^2\log(x-2) + {}^2\log(x-3) = {}^2\log 3 \;.\; {}^3\log 2$

g. ${}^6\log(x-2) \le 1$

h. $\log\left(x^2+4x+4\right) \le \log(5x+10)$

2. Suatu zat radioaktif yang meluruh dapat dinyatakan dengan persamaan

$$x(t) = x(0)\ .\ e^{-\lambda t}$$

dengan

$x(t)$: Massa yang ditinggal setelah t detik
$x(0)$: Massa awal
λ : Konstanta peluruhan

Tunjukkanlah:

a. Laju peluruhan $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)$ yang memenuhi persamaan $\dfrac{dx}{dt} = -\lambda \cdot x(t)$.

b. $t_{\frac{1}{2}} = \dfrac{0,693}{\lambda}$, jika $t_{\frac{1}{2}}$ adalah waktu paruh

Tugas Akhir

1. Nilai dari $\int (2x-3)^3\, dx$ adalah . . . .

   A. $\frac{1}{2}(2x-3)^4+c$
   B. $\frac{1}{4}(2x-3)^4+c$
   C. $\frac{1}{6}(2x-3)^4+c$
   D. $\frac{1}{8}(2x-3)^4+c$
   E. $\frac{1}{10}(2x-3)^4+c$

2. Nilai dari $\int x \sin x\, dx$ adalah . . . .

   A. $x\cos x + c$
   B. $-x\cos x + c$
   C. $x\cos x + \sin x + c$
   D. $-x\cos x + \sin x + c$
   E. $-x\cos x - \sin x + c$

3. Nilai dari $\int_0^{\pi} \cos x\, dx$ adalah . . . .

   A. 0
   B. $\frac{1}{4}$
   C. 2
   D. 1
   E. $\frac{1}{2}$

4. Diketahui $f(x) = \int \left(x^2 - 2x + 5\right) dx$
   dan $f(0) = 5$ nilai $f(x)$ = ...

   A. $\frac{4}{3}x^3 - x^2 + 5x + 5$
   B. $\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 5x + 5$
   C. $\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + 5$
   D. $\frac{1}{9}x^3 - 2x^2 + 5x + 3$
   E. $\frac{1}{9}x^3 - x^2 + 5x + 5$

5. Jika daerah yang dibatasi oleh grafik $f(x) = \frac{1}{4}x - 2$, sumbu-x, garis $x = 0$ dan garis $x = 4$ diputar 360° mengelilingi sumbu-y, maka volume benda putar adalah . . . .

   A. $19\frac{1}{2}$
   B. $19\frac{1}{3}$
   C. $20\frac{1}{3}$
   D. $21\frac{1}{3}$
   E. $22\frac{1}{3}$

6. Suku ke-n dari barisan 3, 7, 11, . . . adalah . . . .

   A. 15
   B. 39
   C. 43
   D. 47
   E. 51

7. Jumlah 24 suku deret 2 + 4 + 6 + . . . adalah . . . .

   A. 50
   B. 150
   C. 300
   D. 600
   E. 1.200

8. Suku kesembilan dari barisan 16, 8, 4, . . . adalah . . . .

   A. 2
   B. $\frac{1}{16}$
   C. 0
   D. 1
   E. $\frac{1}{8}$

9. Jika

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

   maka $A(BC)$ adalah . . . .

   A. $\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
   B. $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
   C. $\begin{pmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
   D. $\begin{pmatrix} 9 & -10 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$
   E. $\begin{pmatrix} 18 & 16 \\ 46 & 38 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

10. Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Nilai A^3 adalah . . . .

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 26 & 27 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{26}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

11. Invers dari $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ adalah . . . .

A. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

12. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, maka nilai $B^{-1}A^{-1}$ = ...

A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} -7 & -6 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}$

13. Jika $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

maka BA = ...

A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 6 & -25 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

14. A adalah titik (1, 2, 3), B adalah titik (2, 4, 6), dan C adalah (5, 10, 15). Nilai dari $AB : BC$ adalah . . . .

A. 1 : 2
B. 1 : 3
C. 1 : 4
D. 2 : 3
E. 2 : 4

15. Jika vektor **a** = (1 1 2). Besar dari vektor **a** adalah . . . .

A. $\sqrt{4}$
B. $\sqrt{5}$
C. $\sqrt{6}$
D. $\sqrt{8}$
E. $\sqrt{10}$

16. Jika P adalah (1, 2, 3) dan Q (4, 5, 6). Panjang vektor PQ adalah . . . .

A. 2
B. 3
C. 4
D. 5
E. 6

17. Nilai x dari $(2x^2 + 3 - 1)^{x^2 - 3x + 2} = 1$ adalah . . . .

A. $x = \frac{1}{2}$ atau $x = -2$
B. $x = \frac{1}{4}$ atau $x = -4$
C. $x = -2$ atau $x = 2$
D. $x = 3$ atau $x = -3$
E. $x = -\frac{1}{2}$ atau $x = 2$

18. Diketahui ${}^{x^2+1}\log\left(x^2-3\right) = {}^{x^2+1}\log(x+3)$.

Nilai dari x adalah . . . .

A. $x = 3$ atau $x = -2$
B. $x = 4$ atau $x = 2$
C. $x = 5$ atau $x = -2$
D. $x = -3$ atau $x = 2$
E. $x = -3$ atau $x = -2$

19. Diketahui ${}^{2}\log\left(x^2+2x\right) = {}^{2}\log 3$.

Nilai x adalah . . . .

A. $x = -3$ atau $x = 1$
B. $x = -3$ atau $x = -1$
C. $x = 3$ atau $x = -1$
D. $x = 3$ atau $x = 1$
E. $x = -3$ atau $x = 2$

20. Diketahui ${}^{2}\log(2x-3) = {}^{2}\log(x+1)$.

Nilai x adalah . . . .

A. 2
B. 3
C. 4
D. 5
E. 6

GLOSARIUM

absis	:	jarak di sepanjang sumbu horisontal pada grafik koordinat
asimtot	:	garis putus-putus pada sebuah grafik yang mewakili batas nilai dimana fungsi rasional atau hiperbola terdefinisi
barisan	:	suatu daftar bilangan-bilangan dalam urutan dan pola tertentu
barisan aritmetika	:	barisan bilangan dimana setiap suku setelah suku pertama berlaku tambahkan bilangan tertentu pada suku sebelumnya
barisan geometri	:	suatu barisan bilangan dengan suku-sukunya merupakan hasil kali suku sebelumnya dengan pengali yang tetap
bayangan	:	posisi akhir dari suatu bangun yang dihasilkan dari suatu transformasi
beda	:	selisih suatu suku dengan suku sebelumnya pada barisan aritmetika
bilangan	:	kombinasi angka-angka, seperti 12.254 atau 36.650
bilangan pokok	:	pada pemangkatan x^n, x adalah bilangan pokok
bilangan rasional	:	suatu bilangan yang mungkin dituliskan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dimana a dan b adalah bilangan asli dan b tidak sama dengan nol
bilangan real	:	suatu bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk desimal
daerah asal	:	himpunan semua nilai x (bilangan pertama dalam setiap pasangan berurutan) dalam suatu relasi
daerah hasil	:	himpunan semua nilai y (bilangan kedua pada setiap pasangan berurutan) pada sebuah relasi
daerah kawan	:	himpunan semua nilai y (bilangan kedua dalam setiap pasangan berurutan) dalam suatu relasi
deret aritmetika	:	jumlah dari suku-suku barisan aritmetika
deret geometri	:	jumlah dari suku-suku pada barisan geometri
diagonal	:	suatu garis lurus yang menghubungkan dua sudut yang berbeda dari suatu bangun
eksponen	:	pada pemangkatan x^n, n adalah eksponen
elemen	:	anggota sebuah himpunan
eliminasi	:	dalam sistem persamaan, eliminasi berarti proses menggabungkan persamaan untuk menghilangkan salah satu peubahnya sehingga lebih mudah dikerjakan
faktor	:	suatu bilangan yang membagi bilangan lain dengan tepat, disebut juga pembagi
faktor skala	:	suatu bilangan yang mengalikan bilangan-bilangan lain untuk merubah ukurannya

fungsi	:	suatu aturan, biasanya berupa persamaan, tabel, atau grafik yang menghubungkan setiap anggota (biasanya suatu bilangan) dari satu himpunan bilangan pada anggota tertentu himpunan bilangan lain. Persamaan $y = 2x$ adalah suatu fungsi yang menggandakan setiap bilangan x
garis berpotongan	:	garis-garis yang tepat berpotongan pada sebuah titik
gradien	:	gradien dari suatu garis adalah rasio dari perubahan pada y terhadap perubahan di x
grafik	:	sebuah gambar yang menyatakan jawaban persamaan matematika
invers	:	operasi kebalikan dari suatu operasi tertentu
jajargenjang	:	suatu segiempat yang memiliki dua pasang sisi yang sejajar
keliling	:	jarak di sekeliling bangun datar
kongruen	:	mempunyai ukuran dan bentuk yang sama
konstanta	:	sesuatu yang tidak berubah, yang bukan merupakan variabel
koordinat	:	suatu pasangan terurut dari bilangan-bilangan yang dipasangkan dengan suatu titik pada bidang koordinat
koordinat cartesius	:	sistem untuk menyatakan posisi suatu titik pada sebuah bidang grafik
kuadrat	:	hasil kali sebuah bilangan dengan dirinya sendiri
lingkaran	:	kumpulan titik-titik pada bidang datar yang mempunyai jarak sama dari titik tertentu (tetap) pada bidang tersebut. Titik tertentu tersebut terletak di tengah lingkaran
logaritma	:	sebuah bilangan yang sudah ditentukan (bilangan pokok) yang dipangkatkan untuk menghasilkan sebuah bilangan
luas	:	ukuran ruang di dalam bangun dua dimensi
matriks	:	sebuah kumpulan bilangan atau peubah yang disusun sehingga berbentuk persegi panjang yang bisa digunakan untuk mewakili sistem persamaan
ordinat	:	jarak di sepanjang sumbu vertikal pada grafik koordinat
parabola	:	suatu grafik yang persamaannya $y = ax^2 + bx + c$, dengan $a \neq 0$
pencerminan	:	suatu transformasi (gerakan) dari bentuk geometri dengan suatu cermin
persamaan	:	kalimat matematika yang memiliki simbol "sama dengan" di dalamnya
persegi panjang	:	suatu segi empat yang mempunyai empat sudut siku-siku
pertidaksamaan	:	suatu kalimat/pernyataan yang memiliki satu dari simbol-simbol: $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$
pertidaksamaan linear	:	suatu kalimat linear yang tidak mengandung tanda "sama dengan" (=)

rasio	:	hasil bagi dari dua bilangan yang memiliki satuan sama
substitusi	:	dalam sistem dua persamaan dengan dua peubah, substitusi merupakan proses penyelesaian sebuah persamaan untuk mencari sebuah peubah dan mensubstitusikan hasilnya ke persamaan kedua untuk mendapatkan satu persamaan dalam satu peubah
suku	:	semua bilangan dalam sebuah barisan atau bagian polinomial yang terpisah dengan tanda + atau −
sumbu simetri	:	garis putus-putus atau lipatan suatu bangun datar untuk menghasilkan tepat dua bagian yang sama
sumbu-x	:	garis bilangan horisontal pada grafik koordinat
sumbu-y	:	garis bilangan vertikal pada grafik koordinat
transformasi	:	suatu operasi pada bangun geometri pada setiap titik-titiknya sehingga bangun tersebut menjadi bangun yang baru
translasi	:	suatu transformasi (gerakan) dari bentuk geometri dengan suatu pergeseran tanpa perputaran
volume	:	jumlah satuan kubik bagian dalam suatu bangun ruang

PUSTAKA ACUAN

Arsyad, M. 2004. *Contextual Mathematics*. Jakarta: Literatur

Aminulhayat. 2004. *Matematika*. Bogor: Regina

Bostock, L., cs. 2002. *STP National Curriculum Mathematics 7A*. United Kingdom: Nelson Thornes

Collins, W. 2001. *Mathematics Aplications and Connection*. New York: Mc Graw-Hill

Daiman, E. 2004. *Penuntun Belajar Matematika*. Bandung: Ganesha Exact

Demana, F. and Waits, B. 1990. *College Algebra and Trigonometri*. New York: Addison Wesley

Keng Seng, T., dan Chin Keong, L. 2002. *New Syllabus*. Singapura: Shinglee

Nasution, A. H. 1995. *Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka

Neswan, O. dan Setya Budhi, W. 2003. *Matematika*. Bandung: ITB

Phillips, D., cs. 2000. *Maths Quest for Victoria*. Australia: John Wiley

Purcell, E. J., dan Varberg, D. 1995. *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Jakarta: Erlangga

Swee Hock , L., cs. 2001. *Matematik Tingkatan 4*. Kuala Lumpur: Darul Fikir

Sobel, M. A.., dan Maletsky, E. M. 2001. *Teaching Mathematics*. New York: Pearson

Sembiring, S. 2002. *Olimpiade Matematika*. Bandung: Yrama Widya

Simangunsong, W. dan Poyk. F. M. 2002. *Matematika Program Pemantapan Kemampuan Siswa*. Jakarta: Gematama

Soka, Y. 1986. *Logika Matematika Elementer*. Bandung: Tarsito

Tampomas, H. 1999. *Seribu Pena Matematika SMU*. Jakarta: Erlangga

________, 2004. *Matematika Plus*. Bogor: Yudhistira

Wahyudin, H. 2002. *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*. Jakarta: Tarity Samudra Berlian

KUNCI JAWABAN

ULANGAN BAB 1

I.

1. B	**4.** A	**7.** C	**9.** B
2. A	**5.** B	**8.** D	**10.** B
3. D	**6.** D		

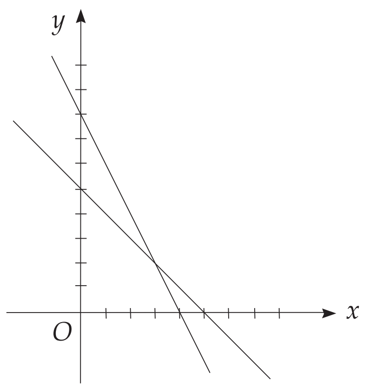
II.
1. 15,625 %
2. $S(t) = 5t - t^2 + 15$
4. Ayu $= \frac{9}{8}$; Bernard $= \frac{9}{16}$

ULANGAN BAB 2

I.

1. C	**5.** A	**9.** C	**13.** A
2. A	**6.** C	**10.** D	**14.** A
3. B	**7.** A	**11.** A	**15.** B
4. A	**8.** D	**12.** C	

II.
1. Tidak
2. 300 bungkus permen A dan 200 bungkus permen B



3. Rp275.000,00
4. 50 buah
5. 150 hari

ULANGAN BAB 3

I.

1. A	**4.** B	**7.** C	**9.** D
2. D	**5.** C	**8.** D	**10.** A
3. B	**6.** A		

II.
1. 125π rad
2. 20.100
3. 80
4. 330
5. 20 bulan

ULANGAN BAB 4

I.

1. D	**5.** C	**9.** B	**13.** C
2. B	**6.** D	**10.** D	**14.** A
3. C	**7.** A	**11.** A	**15.** C
4. C	**8.** D	**12.** A	

II.
1. $-3\frac{1}{6}$
2. $\begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} & 4\frac{1}{2} \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$
3. 8
4. –7
5. **a.** –10
b. 240

ULANGAN BAB 5

I.

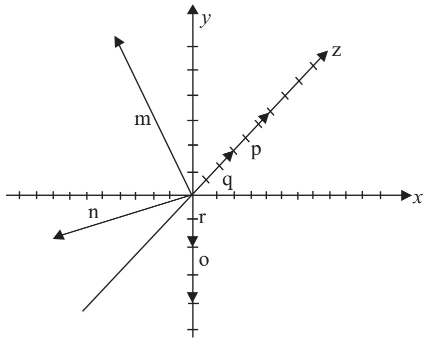
1. C	**5.** B	**9.** D	**13.** D
2. D	**6.** D	**10.** D	**14.** C
3. -	**7.** C	**11.** D	**15.** B
4. -	**8.** C	**12.** D	

II.
1. **a.** (–2, 0, 4)
b. (23, –14, 4)
c. (–1, –5, 2)
d. (–39, 69, –12)
e. (–30, –7, 5)
f. (0, –10, 0)
3. **a.** $2\sqrt{3}$
b. $\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{7}\right)$
c. $4\sqrt{14}$
d. $2\sqrt{2}$

e. $\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

f. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

2.



4. Bukti
5. Bukti

ULANGAN BAB 6

I.	**1.** A	**4.** E	**7.** D	**10.** A
	2. B	**5.** D	**8.** C	**11.** A
	3. D	**6.** D	**9.** -	

II. 1.
- **a.** 1 : 2
- **b.** 1 : 3
- **c.** 1 : 4
- **d.** 2 : 1
- **e.** 3 : 2

3.
- **a.** Rotasi
- **b.** Rotasi
- **c.** Rotasi
- **d.** Rotasi
- **e.** Dilatasi
- **f.** Dilatasi

ULANGAN BAB 7

I.	**1.** E	**6.** A	**11.** C	**16.** B
	2. D	**7.** D	**12.** B	**17.** C
	3. A	**8.** B	**13.** B	**18.** B
	4. E	**9.** D	**14.** B	**19.** A
	5. D	**10.** B	**15.** E	**20.** A

II. 1.
- **a.** $x = \frac{5}{9}$
- **b.** $x = -\frac{2}{3}$
- **c.** $x < -4$
- **d.** $x < 0$ atau $1 < x < 3$
- **e.** -
- **f.** $x = 1$ atau $x = 4$
- **g.** $x \le 8$
- **h.** $-2 \le x \le 3$

2. Bukti

TUGAS AKHIR

I.	**1.** D	**6.** C	**11.** A	**16.** B
	2. D	**7.** D	**12.** C	**17.** A
	3. A	**8.** B	**13.** B	**18.** A
	4. -	**9.** C	**14.** B	**19.** A
	5. D	**10.** A	**15.** C	**20.** C

INDEKS

A

absis: 25
adjoint: 71, 72
antiturunan: 15, 17, 18
asimtot: 162, 164
aturan Cramer: 77

B

baris: 52–54, 65, 71, 72
barisan: 110–112, 114–116, 121, 124
barisan aritmetika: 110–112
barisan geometri: 114–116
beda: 110–112
bayangan: 133, 134, 138–142, 148, 152
bidang koordinat: 36
bilangan kuadrat: 121
bilangan pokok: 162–164, 174
bilangan rasional: 4, 165
bilangan real: 61, 62, 91

C

cara jajargenjang: 90
cermin: 138, 139

D

daerah asal: 162, 164
daerah hasil: 162, 164
deret: 110–112, 114, 116, 117, 120, 121, 124
deret aritmetika: 110–112, 121
deret geometri: 114, 116, 117, 121
deret geometri divergen: 117
deret geometri konvergen: 117
determinan: 69, 71, 74
diagonal: 54
dilatasi: 151–153

E

elemen matriks: 50, 51, 63

F

faktor dilatasi: 151
faktor skala: 151
fungsi eksponen: 162–165, 171
fungsi kuadrat: 13
fungsi logaritma: 162–164, 173, 177
fungsi naik: 162, 171, 177
fungsi objektif: 41, 43–45
fungsi turun: 164, 171, 177

G

George Fredrich Gernhard Riemann: 15

I

induksi matematika: 120, 121
integral: 2, 4, 5, 7–10, 13–16, 21
integral parsial: 5, 7
integral substitusi: 4, 6
integral tak tentu: 4, 15
integral tertentu: 13–15, 21
integral trigonometri: 5, 8
invers matriks: 69, 71

K

kaidah Sarrus: 69, 74
kofaktor: 71, 72, 74
kolom: 52–54, 65, 71, 77
kongruen: 139
konstanta: 2–5, 16
koordinat cartesius: 44, 84, 89, 95, 132, 162, 163
kurva: 14, 21–24, 28, 29, 162, 163
lingkaran: 26, 138, 139, 146, 151

L

Leibniz: 2
logaritma: 173, 174, 177
luas: 13–15, 21–26

M

matriks: 52–55, 57, 58, 61, 62, 64, 65, 65, 67, 71, 72, 74, 76, 77
matriks baris: 53
matriks diagonal: 53
matriks identitas: 54
matriks kolom: 53
matriks minor: 71, 74
matriks nol: 53
matriks persegi: 53, 54, 69
matriks skalar: 53
matriks segitiga atas: 54
matriks segitiga bawah: 54
metode garis selidik: 41, 44, 45
metode uji titik pojok: 41–43
model matematika: 39, 41

N

nilai optimum: 41, 44
notasi sigma: 14, 121, 123

O

ordinat: 29
ordo: 52, 53, 58, 61, 69, 71, 72, 74

P

panjang vektor: 84, 85
pencerminan: 138–142
perkalian skalar: 94, 100, 101
persamaan eksponen: 165, 167
pertidaksamaan eksponen: 165, 171
program linear: 39, 41
proyeksi vektor: 100–102

R

rasio: 115, 116
refleksi: 138, 139, 141, 153
rotasi: 146–148, 154

S

saling invers: 71
seismograf: 161
sistem pertidaksamaan linear: 36, 37, 39
sistem persamaan linear: 76, 77
skalar: 94, 96, 97, 100, 101
sudut rangkap: 9, 10

T

teorema dasar kalkulus: 15
transformasi geometri: 153
translasi: 132–134
transpos matriks: 54
turunan: 2, 3, 7

V

vektor: 84–86, 89–92, 94–96, 98, 100, 102
vektor satuan: 85, 86, 101, 102
volume benda putar: 26–29

MATEMATIKA
APLIKASI

Buku ini ditulis berdasarkan standar kompetensi yang sudah final dan pendekatannya difokuskan pada matematika aplikasi dalam kehidupan nyata.

Materi disajikan dengan bahasa yang lugas dan ilustrasi yang menarik.

Pada setiap awal bab dibuat gambar-gambar foto sebagai ilustrasi untuk menambah daya tarik pengantar bab.

Pengantar bab yang dibuat tidak asal diberikan tetapi erat kaitannya dengan unsur-unsur yang terdapat dalam bab tersebut.

Pengantar mengungkapkan contoh kasus yang mengaplikasikan matematika.

Dalam buku ini, siswa dapat belajar aktif melalui Aktifitas di kelas, GameMath dan Siapa Berani.

Soal-soal latihan yang disajikan bergradasi sehingga mampu memenuhi perbedaan kemampuan siswa dan dapat memperkuat konsep-konsep teori yang telah dipelajari.

ISBN 979-462-948-0

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 34 Tahun 2008 tanggal 10 Juli 2008 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

HET (Harga Eceran Tertinggi) Rp