DAFTAR ISI

BAB I
Matriks dan Operasinya

1.1 KONSEPSI MATRIKS

Definisi secara umum :

Matriks adalah suatu himpunan bilangan yang berbentuk persegi panjang, atau

Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riil atau bilangan kompleks) yang disusun secara empat persegi panjang menurut baris dan kolom atau

Suatu matriks adalah himpunan unsur-unsur yang disusun menurut baris dan kolom, sehingga berbentuk empat persegi panjang, dimana panjangnya dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom-kolom dan baris-baris.

Notasi matriks biasanya menggunakan huruf besar A, B, C ......

Definisi secara khusus :

Misalkan A adalah suatu matriks yang terdiri dari m buah baris dan n buah kolom, maka matriks A mempunyai ordo/dimensi/ukuran (mxn) dan a_{ij} merupakan elemen-elemen/unsur-unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A maka secara lengkap sebuah matriks dapat ditulis dengan A = [a_{ij}]

dimana a = elemen matriks

i = nomor baris = 1,2,3, ... , m

j = nomor kolom = 1,2,3, ... , n

Suatu matriks biasanya ditulis dengan : A **= [ ]** atau A = ( ) atau A = || ||

Sehingga elemen-elemen suatu matriks secara rinci dapat ditulis :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Elemen a_{11}, a_{22} , a_{33} , ... , a_{nn} disebut sebagai elemen-elemen yang terletak pada ***diagonal utama*** dari matriks A (yaitu elemen-elemen matriks dimana nomor baris dengan nomor kolomnya sama).

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 8 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$ adalah suatu matriks A yang berordo (3x4) karena

jumlah barisnya (m= 3) dan jumlah kolomnya (n=4).

Sedangkan elemen-elemen dari matriks tersebut adalah a_{11} = 1,

a_{12} = 0, a_{13} = -1, a_{14} = 4, a_{21} = 3, a_{22} = 2, a_{23} = 5, a_{24} = 7, a_{31} = 9, a_{32} = 8, a_{33} = -2, dan a_{34} = 6.

Dua matriks (matriks A = [a_{ij}] dan matriks B = [b_{ij}]) dikatakan ***sama*** (A = B) jika kedua matriks tersebut mempunyai ukuran (dimensi/ordo) yang sama (mxn) dan elemen-elemen yang bersangkutan (satu letak) di dalam kedua matriks tersebut sama ($a_{ij} = b_{ij}$) untuk setiap i = 1,2,…,m dan j = 1,2,…,n.

<u>*Contoh :*</u>

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Disini A = B, karena matriks A dan matriks B mempunyai ordo yang sama yaitu (2x2) dan semua elemen-elemennya juga sama, sedangkan matriks A ≠ C dan matriks B ≠ C karena ordonya tidak sama dan matriks C ≠ D karena elemen-elemennya tidak sama.

1.2 OPERASI ALJABAR MATRIKS

a. Penjumlahan dan pengurangan matriks

Syaratnya adalah matriks yang akan dijumlahkan/dikurangkan harus mempunyai ***ordo yang sama***.

Misalkan A = [a_{ij}] , B = [b_{ij}] , C = [c_{ij}]

maka A ± B = C

[a_{ij}] ± [b_{ij}] = [c_{ij}]

Sehingga : [$a_{ij} \pm b_{ij}$] = [c_{ij}]

(Matriks C merupakan hasil penjumlahan/pengurangan dari matriks A dan B yang satu posisi/satu letak).

<u>*Contoh :*</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ maka : } A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+2 \\ 3+3 & 4+1 \\ 5+4 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

b. Perkalian skalar dengan matriks

Kalau λ adalah skalar dan A = [a_{ij}], maka λA = λ [a_{ij}] = [λa_{ij}] dengan kata lain bahwa semua elemen matriks A dikalikan dengan skalar λ.

<u>*Contoh :*</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ maka } 2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 & 2.2 \\ 2.3 & 2.4 \\ 2.5 & 2.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

c. Perkalian Matriks dengan matriks

Syaratnya adalah ***jumlah kolom*** pada ***matriks pertama*** (misal matriks A) *sama dengan* ***jumlah baris*** pada ***matriks yang kedua*** (misal matriks B).

Definisi :

Jika A = $[a_{ij}]$ berordo (p x q) dan B = $[b_{ij}]$ berordo (q x r), maka perkalian matriks A dengan matriks B menghasilkan matriks C = $[c_{ij}]$ yang berukuran (p x r) dimana :

$$\begin{array}{ccccc} A & \times & B & = & C \\ (p\times q) & \times & (q\times r) & & (p\times r) \end{array}$$

Elemen-elemen dari hasil perkalian yaitu elemen-elemen matriks C (elemen c_{ij}) dapat dihitung dengan cara sebagai berikut :

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{iq}\, b_{qj}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}\, b_{kj}$$

untuk i = 1,2, ... , p , j = 1,2, ... , r dan k = 1, 2, 3, ..., q

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(syarat : jumlah kolom matriks A adalah 2 dan jumlah baris matriks B adalah 2, sedangkan ordo matriks hasil perkalian adalah jumlah baris matriks A kali jumlah kolom matriks B yaitu ordonya 2x1)

maka : $A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.(-2) + 2.4 \\ (-1).(-2) + 3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix}$

Beberapa hukum yang berlaku pada perkalian matriks :

1. A(B + C) = AB + AC, (B + C)A = BA + CA
2. A(BC) = (AB)C
3. Perkalian matriks tidak komutatif, artinya belum tentu AB = BA

4. Jika AB = 0 (matriks nol) kemungkinannya adalah :
   a. A = 0 dan B = 0
   b. A = 0 atau B = 0
   c. $A \neq 0$ dan $B \neq 0$
5. Bila AB = AC belum tentu B = C.

1.3 TRANSPOSE DARI SUATU MATRIKS

Definisi :

Jika suatu matriks A berordo m x n maka transpose dari matriks A adalah A^T dimana matriks A^T berordo n x m. Atau transpose matriks A adalah mengubah baris matriks A menjadi kolom serta mengubah kolom matriks A menjadi baris.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Beberapa sifat matriks transpose :

1). $(A + B)^T = A^T + B^T$ 2). $\lambda(A^T) = (\lambda A^T)$

3). $(A^T)^T = A$ dan 4). $(AB)^T = B^T A^T$

1.4 BEBERAPA JENIS MATRIKS KHUSUS

1. Matriks Bujursangkar/Kuadrat (Square matrix)

   yaitu matriks yang mempunyai jumlah baris dan jumlah kolom yang sama, jadi m = n.

   Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Nol (Null Matrix)

   yaitu matriks yang semua elemen-elemennya bernilai nol.

   Contoh :

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Matriks Diagonal (Diagonal Matrix)

   yaitu matriks bujursangkar yang semua elemen diluar diagonal utamanya adalah nol, jadi $a_{ij} = 0$ jika $i \neq j$.

Contoh :

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

4. Matriks Identitas (Identity Matrix (I_n))

   yaitu matriks diagonal yang elemen diagonal utamanya semua 1.

   Contoh :

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Matriks Skalar (Scalar Matrix)

   yaitu matriks diagonal yang semua elemen diagonal utamanya = k (suatu bilangan/scalar).

   Contoh :

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

6. Matriks Segitiga Bawah (Lower Triangular Matrix)

   yaitu matriks bujursangkar yang semua elemen di atas diagonal utamanya = 0, yaitu a_{ij} = 0 jika i < j.

   Contoh :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

7. Matriks Segitiga Atas (Upper Triangular Matrix)

   yaitu matriks bujursangkar yang semua elemen di bawah diagonal utamanya = 0, yaitu a_{ij} = 0 jika i > j.

   Contoh :

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Matriks Simetris/Setangkup (Symmetrix Matrix)

   yaitu matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri atau $A^T = A$, atau suatu matriks bujursangkar yang elemen-elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j nilainya sama dengan elemen-elemen pada baris ke-j dan kolom ke-i atau $[a_{ij}] = [a_{ji}]$.

<u>*Contoh :*</u>

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 7 & -8 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ -8 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

9. Matriks Anti-Simetris/miring setangkup (Skew Symmetric Matrix)

   yaitu matriks yang transposenya sama dengan negatif dirinya sendiri atau $A^T = -A$, atau

   suatu matriks bujursangkar yang elemen-elemen pada diagonal utamanya bernilai 0 dan elemen-elemen diluar diagonal utamanya mempunyai hubungan $[a_{ij}] = -[a_{ji}]$.

   <u>*Contoh :*</u>

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & -1 & 0 & 4 \\ -5 & -2 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Matriks Invers

    Kalau matriks A dan B adalah bujursangkar sehingga $AB = BA = I_n$ maka dikatakan B invers dari matriks A biasanya ditulis dengan $B = A^{-1}$ sehingga dapat ditulis $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Pembahasan matriks ini akan dibahas pada bab selanjutnya.

    <u>*Catatan :*</u> tidak semua matriks bujur sangkar yang mempunyai invers. Sebuah matriks yang inversnya adalah dirinya sendiri dengan perkataan lain $AA = I_n$ disebut matriks yang *involutory*.

11. Matriks komutatif dan antikomutatif.

    yaitu matriks jika A dan B adalah suatu matriks dan berlaku AB = BA dan jika AB = -BA dinamakan matriks antikomutatif.

    <u>*Contoh :*</u>

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{maka :}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } BA = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

    maka AB = BA sehingga matriks A dan matriks B dinamakan matriks yang saling komutatif.

12. Matriks Idempoten, Periodik dan Nilpoten.

    Jika A adalah suatu matriks dan berlaku :

    $A^2 = A$ maka A dinamakan matriks idempoten.

$A^p = A$ maka A dinamakan matriks periodik dengan periode (p-1)

$A^r = 0$ maka A dinamakan matriks nilpoten dengan indeks r (dimana r adalah bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi hubungan tersebut).

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ adalah matriks nilpoten dengan indeks = 3.

karena : $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

1.5 TRANSFORMASI ELEMENTER (OPERASI ELEMENTER)

Transformasi elementer pada baris atau kolom suatu matriks A adalah sebagai berikut :

1. Menukar letak elemen baris ke-i dengan baris ke-j matriks A ditulis $H_{ij}(A)$ atau H_{ij} dan menukar letak elemen kolom ke-i dengan kolom ke-j matriks A ditulis $K_{ij}(A)$ atau K_{ij}.

   Contoh :

   $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ maka $H_{12}(A) = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ dan $K_{23}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

2. Mengalikan baris ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$ dari matriks A ditulis $H_i^{(\lambda)}(A)$ atau $H_i^{(\lambda)}$ dan mengalikan kolom ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$ dari matriks A ditulis $K_i^{(\lambda)}(A)$ atau $K_i^{(\lambda)}$

   Contoh :

   $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ maka $H_1^{(2)}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ dan $K_2^{(-1)}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$

3. Menambah baris ke-i dengan λ kali baris ke-j matriks A ditulis $H_{ij}^{(\lambda)}(A)$ atau $H_{ij}^{(\lambda)}$ dan menambah kolom ke-i dengan λ kali kolom ke-j matriks A ditulis $K_{ij}^{(\lambda)}(A)$ atau $K_{ij}^{(\lambda)}$

Contoh :

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ maka $H_{12}^{(-1)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ dan $K_{32}^{(-1)}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

Catatan :

Kadang-kadang operasi (2) dan (3) dapat dilakukan dalam satu langkah : menambah λ_1 kali baris ke-i dengan λ_2 kali baris ke-j dari matriks A, ditulis : $H_i^{(\lambda_1)}{}_j^{(\lambda_2)}(A)$ atau $H_i^{(\lambda_1)}{}_j^{(\lambda_2)}$ dan menambah λ_1 kali kolom ke-i dengan λ_2 kali kolom ke-j dari matriks A, ditulis : $K_i^{(\lambda_1)}{}_j^{(\lambda_2)}(A)$ atau $K_i^{(\lambda_1)}{}_j^{(\lambda_2)}$.

Contoh :

A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka : $H_2^{(2)}{}_3^{(1)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sedangkan : $\mathbf{H_2^{(2)}{}_3^{(2)}(A)} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Misalkan diketahui matriks B merupakan hasil transformasi linier dari matriks A, maka dapat dicari matriks A, disebut invers dari transformasi elementer tersebut.

Contoh :

Misalkan B = $H_{31}^{(1)}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 11 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = H_{31}^{(1)^{-1}}(B)$

1.6 RANK MATRIKS

Rank dari suatu matriks menyatakan jumlah maksimum vektor-vektor baris/kolom yang bebas linier.

Notasi untuk rank matriks A adalah : r(A)

Petunjuk mencari rank suatu matriks :

(1) Pilih salah satu baris yang bukan vektor nol, kemudian beri tanda (*). Pilih salah satu elemen pada baris tadi yang bukan 0 (nol), elemen ini dinamakan elemen pivot. (Untuk mempermudah perhitungan sedapat mungkin dipilih baris yang terdapat angka 1 atau -1 untuk digunakan sebagai pivot).

(2) Jadikan nol semua elemen yang sekolom dengan pivot dengan menggunakan transformasi elemeneter secara baris.

(3) Sekarang baris yang tadi tidak usah diperhatikan lagi. Perhatikan baris-baris yang tersisa. kemudian kerjakan langkah (1), (2), dan (3).

(4) Proses ini akan berakhir jika langkah (1) tidak dapat dikerjakan lagi, yaitu apabila semua baris telah bertanda (*) dan atau menjadi baris nol. *Rank dari matriks tersebut adalah banyaknya baris yang bertanda (*) atau banyaknya baris semua dikurangi banyaknya baris yang menjadi baris nol.* .

Catatan :

Kalau hanya terdiri dari dua baris, maka jika berkelipatan maka rank = 1 tetapi jika tidak berkelipatan maka rank = 2.

Contoh :

Carilah rank dari matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ maka :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} H_{21}^{(-2)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} H_{31}^{(-3)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} H_{32}^{(-1)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena sudah terdapat baris nol maka proses berhenti dan r(A) = 3 - 1 = 2

Soal-soal Latihan

1. Diketahui : A = $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

   Tentukan :

   (a) 2A - 3B (b) (3A - B) A

2. Diketahui : A = $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

   Apakah AB komutatif ?

3. Diketahui : A = $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

   Tentukan matriks C sedemikian sehingga AC = B.

4. Diketahui A = $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

   Tentukanlah :

   a). A^2 dan A^3

b). Kalau $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 4I_2$ maka tentukanlah f(A).

5. Carilah harga a,b,c dan d, jika :

$$3\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b+1 \\ 5 & d+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & b+2 \\ c & 4 \end{bmatrix}$$

6. Diketahui : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

   Tentukan :

   (a). $(AB)^T$ (b). $B^T A^T$ (c) Apakah $(AB)^T = B^T A^T$?

7. Tunjukkanlah bahwa $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ adalah matriks Idempoten !

8. Tunjukkanlah bahwa matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks periodik, dan berapa periodenya !

9. Carilah matriks hasil sederetan transformasi elementer dari :

   $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ yang berturut-turut : $H_{21}^{(-3)}$, $H_{31}^{(2)}$, $K_{21}^{(-2)}$, $K_{41}^{(1)}$, K_{23}, $H_{32}^{(-2)}$, $K_{42}^{(-5)}$, $K_{32}^{(2)}$, $K_3^{(1/11)}$, $K_{43}^{(7)}$.

10. Carilah rank dari matriks berikut :

    (a). $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ (b). $\begin{bmatrix} 103 & 20 & 3 \\ 104 & 21 & -1 \\ 105 & 22 & -5 \end{bmatrix}$ (c). $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

Berfikir tentang orang lain dan melayaninya dengan tulus merupakan kunci kebahagiaan hidup
(Dalai lama)

BAB II
DETERMINAN

2.1 KONSEPSI DETERMINAN

Sudah dikenal bahwa fungsi $f(x) = x^2$ mengasosiasikan sebuah bilangan riel f(x) dengan sebuah nilai riel dari variabel x. Karena x dan f(x) kedua-duanya hanya mempunyai nilai riel, maka fungsi-fungsi seperti itu dapat digambarkan sebagai fungsi yang bernilai riel dari sebuah variabel riel. Akan dikaji fungsi bernilai riel dari sebuah variabel matriks, yakni fungsi yang mengasosiasikan sebuah bilangan riel f(X) dengan sebuah matriks X. Yang utama dari pengkajian ini diperuntukkan bagi satu fungsi yaitu fungsi determinan.

Setiap matriks bujursangkar A biasanya selalu dikaitkan dengan suatu skalar yang disebut determinan matriks tersebut, dan ditulis dengan det(A) atau | A |. Untuk mencari harga determinan suatu matriks ada berbagai macam cara. Cara mencari determinan yang sudah banyak dikenal adalah mencari determinan matriks untuk matriks bujursangkar ordo (2X2) dan ordo (3X3) sangat umum.

Sebelum mampu mendefinisikan fungsi determinan, terlebih dahulu perlu diketahui beberapa definisi berikut ini.

Definisi :

Sebuah *permutasi* himpunan bilangan-bilangan bulat {1, 2, …, n} adalah sebuah susunan bilangan-bilangan bulat ini menurut suatu aturan tanpa menghilangkan atau mengulangi bilangan-bilangan tersebut.

Contoh :

Ada enam permutasi yang berbeda dari himpunan bilangan-bilangan bulat {1,2,3}, yaitu : {1,2,3}, { 2,1,3}, {3,1,2}, {1,3,2}, {2,3,1}, {3,2,1}.

Catatan :

Jika terdapat n buah bilangan asli 1, 2, 3, …, n, maka banyaknya permutasi yang dapat dibentuk adalah n! = n(n-1)(n-2) … 2,1.

Definisi :

Yang dimaksud dengan sebuah *inversi* pada suatu permutasi $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ adalah $j_k < j_i$ (j_k mendahului j_i) padahal $j_i < j_k$ (i dan k= 1,2,…, n).

Contoh :

Misalkan ada permutasi (4,3,1,2), maka banyaknya inversi pada permutasi tersebut adalah 5 inversi karena :

(1) j_1 = 4 mendahului j_2 = 3 padahal 3 < 4.
(2) j_1 = 4 mendahului j_3 = 1 padahal 1 < 4.
(3) j_1 = 4 mendahului j_4 = 2 padahal 2 < 4.
(4) j_2 = 3 mendahului j_3 = 1 padahal 1 < 3.
(5) j_2 = 3 mendahului j_4 = 2 padahal 2 < 3.

Definisi :

Sebuah permutasi dinamakan *genap (even)* jika jumlah inversi seluruhnya adalah sebuah bilangan bulat yang genap dan dinamakan *ganjil (odd)* jika jumlah inversi seluruhnya adalah sebuah bilangan bulat yang ganjil. Pada permutasi (4,3,1,2) jumlah inversinya adalah *5* maka permutasi tersebut adalah *ganjil*.

Definisi :

Yang dapat diartikan sebagai *hasil perkalian elementer dari matriks* A adalah setiap perkalian n elemen dari A, yang tidak boleh dua diantaranya yang berasal dari baris yang sama atau kolom yang sama.

Jika sebuah matriks A yang berordo (nxn) mempunyai n! hasil perkalian elementer. Hasil-hasil perkalian elementer tersebut adalah hasil-hasil perkalian yang berbentuk $a_{1j1}a_{2j2} \dots a_{njn}$ dimana (j_1, j_2, …, j_n) adalah sebuah permutasi dari himpunan {1,2,3,…,n}. Yang diartikan dengan sebuah *hasil perkalian elementer bertanda dari* A adalah sebuah hasil perkalian elementer $a_{1j1}a_{2j2} \dots a_{njn}$ dikalikan dengan (+1) atau (-1). Digunakan tanda (+1) jika (j_1, j_2, …, j_n) adalah sebuah permutasi genap dan tanda (-1) jika (j_1, j_2, …, j_n) adalah sebuah permutasi ganjil.

Contoh :

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix}$

Hasil Perkalian Elementer	Permutasi yang Diasosiasikan	genap atau ganjil	Hasil Perkalian Elementer yang Bertanda
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1, 2, 3)	genap	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1, 3, 2)	ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2, 1, 3)	ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2, 3, 1)	genap	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3, 1, 2)	genap	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3, 2, 1)	ganjil	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Definisi :

Misalkan A adalah suatu matriks bujursangkar maka fungsi determinan ***(determinant function)*** yang dinyatakan dengan det(A), dan didefinisikan det(A) sebagai jumlah semua hasil perkalian elementer yang bertanda dari matriks A.

2.2 DETERMINAN MATRIKS ORDO (2X2) DAN ORDO (3X3)

Diketahui suatu matriks A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, maka determinan dari matriks A yaitu det(A) atau $|A|$ berdasarkan definisi diatas adalah :

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

Contoh :

Hitunglah determinan dari matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ **!**

Jawab :

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 3.(-2) - 1.4 = -6 - 4 = -10$$

Sedangkan untuk matriks yang berordo (3x3) dapat dihitung determinannya dengan menggunakan cara sebagai berikut :

Diketahui suatu matriks A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka determinan dari matriks A yaitu det(A) atau $|A|$ berdasarkan definisi diatas adalah :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Untuk memudahkan perhitungan dapat digunakan metode (yang dikenal dengan ***Metode Sarrus***) yaitu dengan cara menambahkan kolom pertolongan dengan menambahkan kolom kesatu dan kolom kedua diletakkan disebelah kanan kolom ketiga. Sehingga determinan dari matriks A diatas dapat diperoleh dengan cara :

(-) (-) (-)

$$|A| = \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

(+) (+) (+)

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

<u>Peringatan :</u> (Metode Sarrus hanya berlaku untuk matriks yang berordo (3x3), sedangkan untuk matriks yang berordo lebih dari (3x3) metode tersebut tidak berlaku.

<u>*Contoh :*</u>

Hitunglah determinan dari matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **!**

<u>*Jawab :*</u>

det(A) = $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{array}{ccccc} 2 & -4 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 1 \end{array}$$

= 2.(-2).(-1) + (-4).3.5 + 1.1.1 – 1.(-2).5 – 2.3.(-1) – (-4).1.(-1)

= 4 – 60 + 1 + 10 – 6 – 4 = **– 55**

2.3 SIFAT-SIFAT DETERMINAN

1. Jika A adalah sebarang matriks bujursangkar yang mengandung sebaris bilangan nol maka **det(A) = 0**.
2. Jika A adalah suatu matriks segitiga yang berordo (nxn), maka det(A) adalah haris perkalian dari elemen-elemen yang terletak pada diagonal utama, yaitu **det(A) = $a_{11}.a_{22}.a_{33} \ldots a_{nn}$.**

   <u>*Contoh :*</u>

   det(A) = $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ = 8.(-1).2 = -16

3. Misalkan A adalah sebarang matriks bujursangkar yang berordo (nxn), maka :
   a. Jika A_1 adalah matriks yang dihasilkan bila sebuah baris tunggal dari matriks A dikalikan dengan sebuah konstanta k (operasi elementer $H_i^{(k)}(A)$), maka **det(A_1) = k det (A).**
   b. Jika A_2 adalah matriks yang dihasilkan bila dua baris dari matriks A dipertukarkan tempatnya (operasi elementer $H_{ij}(A)$), maka **det(A_2) = - det(A).**

c. Jika A_3 adalah suatu matriks yang dihasilkan bila sebuah kelipatan dari satu baris matriks A ditambahkan kepada baris yang lain (operasi elementer $H_{ij}^{(k)}(A)$), maka **det(A_1) = det (A).**

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_1 = H_1^{(2)}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$A_2 = H_{12}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $A_3 = H_{23}^{(-2)}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Dengan metode Sarrus dapat diperoleh :

det(A) = 1.1.1 + 2.4.1 + 3.0.2 – 3.1.1 – 1.4.2 – 2.0.1

= 1 + 8 + 0 – 3 – 8 – 0 = –2

Berdasarkan sifat 3a maka det(A_1) = 2.det(A) = 2.(–2) = –4.

Berdasarkan sifat 3b maka det(A_2) = – det(A) = –(–2) = 2.

Berdasarkan sifat 3c maka det(A_3) = det(A) = –2.

4. Jika A adalah suatu matriks bujursangkar yang mempunyai dua baris yang sebanding, maka **det(A) = 0**.
5. Jika A adalah matriks bujursangkar, dan A^T merupakan transpose dari matriks A, maka : **det(A) = det(A^T)**.
6. Jika A adalah matriks yang berordo (nxn) dan *k* adalah suatu skalar maka : det(*k*A) = k^n det(A).
7. Misalkan A, A' dan A'' adalah matriks yang berordo (nxn) yang hanya berbeda di dalam sebuah baris tunggal, katakanlah baris ke-*r,* dan anggaplah bahwa baris ke-*r* dari A'' dapat diperoleh dengan menambahkan elemen-elemen yang bersangkutan di dalam baris ke-*r* dari A dan di dalam baris ke-*r* dari A', maka : **det(A'')=det(A)+det(A')**.

   Contoh :

   $$\det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

8. Jika A dan B adalah matriks bujursangkar yang ordonya sama, maka : **det(AB) = det(A).det(B).**

   Contoh :

Diketahui : A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ dan AB = $\begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$ maka dapat diperoleh det(A).Det(B) = 1.(-23) = -23 dan det(AB) = -23, sehingga det(AB) = det(A).det(B).

2.4 MINOR DAN KOFAKTOR

Definisi :

Jika terdapat suatu matriks A_{ij} dengan ordo n x n maka terdapat suatu submatriks M_{ij} dengan ordo (n-1) x (n - 1) yang didapatkan dengan cara elemen baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A dihilangkan atau

jika A adalah sebuah matriks bujursangkar yang berordo (nxn), maka ***minor dari elemen a_{ij}*** dinyatakan oleh $M_{ij}(A)$ dan didefinisikan sebagai determinan dari sub matriks yang tersisa (tinggal) setelah baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dicoret dari matriks A. Sedangkan bilangan $(-1)^{(i+j)}$ $M_{ij}(A)$ dinyatakan oleh $C_{ij}(A)$ yang dinamakan ***kofaktor dari elemen a_{ij}. Matriks Kofaktor*** dari matriks A yang dinyatakan dengan ***Kof(A)*** adalah suatu matriks elemen-elemennya merupakan kofaktor dari elemen a_{ij}. Jadi

Kof(A) = $[C_{ij}(A)] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$.

Sedangkan ***Adjoin*** dari matriks A yang dinyatakan dengan ***Adj(A)*** adalah tranposisi dari Matriks Kofaktor, jadi Adj(A) = $[\text{Kof}(A)]^T$.

Jadi Adj(A) = $[C_{ji}(A)] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$.

Contoh :

Misalkan A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ maka : $M_{11}(A)$ = $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$ = 40 – 24 = 16,

$M_{32}(A) = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ = 18 – (–8) = 26. Sedangkan Kofaktor dari elemen a_{11} adalah $C_{11}(A)$ = $(-1)^{1+1}$ $M_{11}(A)$ = 1.16 = 16, dan Kofaktor dari elemen a_{32} adalah $C_{32}(A)$ = $(-1)^{3+2}$ $M_{11}(A)$ = (-1).26 = –26.

Sebagai latihan dapat dihitung Minor dan Kofaktor untuk elemen-elemen a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31} dan a_{33}, Setelah semua Minor dan Kofaktor dari elemen matriks A diperoleh dapat ditentukan Matriks Kofaktor dan Adjoinnya.

2.5 EKSPANSI KOFAKTOR

Teorema Laplace :

Determinan sebuah matriks A yang berordo (nxn) dapat dihitung dengan cara mengalikan elemen-elemen di dalam suatu baris (kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil-hasil perkalian yang dihasilkan; yakni, untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$, maka :

$$\det(A) = a_{1j}\, C_{1j}(A) + a_{2j}\, C_{2j}(A) + \ldots + a_{nj}\, C_{nj}(A)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}(A)$$ untuk j = 1,2,…,n. ***(Ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j),*** dan

$$\det(A) = a_{i1}\, C_{i1}(A) + a_{i2}\, C_{i2}(A) + \ldots + a_{in}\, C_{in}(A)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}(A)$$ untuk i = 1,2,…,n. ***(Ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i)***

Contoh :

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, hitunglah determinannya dengan Ekspansi Kofaktor sepanjang baris ke-1 !

Jawab :

$$\text{Det}(A) = a_{11}C_{11}(A) + a_{12}C_{12}(A) + a_{13}C_{13}(A)$$

$$= 3.(-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + (-4).(-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3.(40-24)-(16-6)-4(8-5) = 3.16-10-12 = 26.$$

Dengan cara yang sama dapat dicari determinan dari matriks A dengan Ekspansi Kofaktor sepanjang baris ke-2, baris ke-3, kolom ke-1, kolom ke-2 dan kolom ke-3 yang hasilnya sama dengan 26. Bandingkan dengan Metode Sarrus!

2.6 DETERMINAN MATRIKS ORDO BESAR (ORDO LEBIH DARI (3X3))

Untuk menentukan determinan matriks ordo besar dapat digunakan Ekspansi Kofaktor, tetapi akan memakan waktu yang lama dan membutuhkan perhitungan angka yang besar pula. Agar perhitungannya tidak begitu besar dan waktu penyelesaiannya lebih singkat dapat mengkombinasikan *Operasi Elementer, sifat-sifat determinan* dan *Ekspansi Kofaktor*. Adapun caranya adalah sebagai berikut :

1. Carilah baris (kolom) yang sudah banyak elemen nol-nya, atau kalau belum ada carilah baris (kolom) yang banyak mengandung elemen 1 atau (-1), kalau tidak ada maka transformasikan matriks tersebut dengan operasi elementer ($H_i^{(\lambda)}$) sehingga mendapatkan elemen 1 atau (-1) dengan memperhatikan sifat-sifat determinan.
2. Jadikan nol semua elemen yang satu baris atau satu kolom dengan elemen 1 atau (–1) dengan operasi elementer ($H_{ij}^{(\lambda)}$), kemudian ekspansikan kofaktor sepanjang baris (kolom) yang memuat elemen nol paling banyak tadi.

Catatan :

Matriks yang mempunyai determinan = 0 dinamakan *matriks singular* sedangkan matriks yang mempunyai determinan $\neq$ 0 dinamakan *matriks nonsingular.*

Contoh :

Hitunglah : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$!

Jawab :

Menurut cara nomor (1) dapat dipilih kolom ke-1 yang memuat elemen 1, maka sisa elemen pada kolom ke-1 yaitu elemen a_{21}, a_{41}, dan a_{41} dijadikan nol dengan operasi elementer $H_{21}^{(-2)}$, $H_{41}^{(-1)}$, dan $H_{51}^{(-2)}$, sehingga diperoleh :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$ (dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-1 diperoleh)

$= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} + a_{41}C_{41} + a_{51}C_{51}$

(dimana nilai dari a_{21}, a_{31}, a_{41} dan a_{51} adalah nol, sehingga tidak perlu mencari C_{21}, C_{31}, C_{41} dan C_{51} sehingga diperoleh)

$= 1.\ (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & -4 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ (dengan memilih baris ke-3 maka dapat dijadikan nol elemen-elemen a_{33} dan a_{34} dengan operasi $K_{31}^{(1)}$ dan $K_{41}^{(-2)}$ maka dapat diperoleh)

$= \begin{vmatrix} -5 & -4 & -1 & 9 \\ 3 & 1 & 5 & -5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ (dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-3 maka dapat diperoleh)

$= (-1).(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -4 & -1 & 9 \\ 1 & 5 & -5 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 23 & 21 & 9 \\ -14 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 23 & 21 \\ -14 & -10 \end{vmatrix}$

$= -(-230 + 294) = -64.$

<u>Soal-soal Latihan :</u>

1. Carilah banyaknya inversi di dalam setiap permutasi dari {1,2,3,4,5} yang berikut kemudian klasifikasikan ke dalam permutasi *genap* atau *ganjil* :

   a. (3,4,1,4,2) b. (4,2,5,3,1) c. (5,4,3,2,1)
   d. (1,2,3,4,5) e. (1,3,5,4,2) f. (2,3,5,4,1)

2. Hitunglah determinan dari matriks berikut ini :

   a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -8 & -3 \end{vmatrix}$ d. $\begin{vmatrix} (k-1) & 2 \\ 4 & (k-3) \end{vmatrix}$

   e. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ f. $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ g. $\begin{vmatrix} & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix}$ h. $\begin{vmatrix} k & -3 & 9 \\ 2 & 4 & (k+1) \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix}$

3. Carilah semua nilai dari λ jika det(A) = 0.

   a. $A = \begin{vmatrix} (\lambda-1) & -2 \\ 1 & (\lambda-4) \end{vmatrix}$ b. $A = \begin{vmatrix} (\lambda-6) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & (\lambda-4) \end{vmatrix}$

4. Hitunglah determinan dari matriks-matriks berikut ini berdasarkan sifat-sifat determinan !

   a. $\begin{vmatrix} 2 & -40 & 17 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 7 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ e. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{vmatrix}$

5. Misalkan A = $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, maka tentukanlah :

   a. Semua Minornya !
   b. Semua Kofaktornya !
   c. Matriks Kofaktor !
   d. Adjoin dari matriks A !
   e. Determinan dengan Metode Sarrus !
   f. Determinan dengan Ekspansi Kofaktor sepanjang baris ke-2 !
   g. Determinan dengan Ekspansi Kofaktor sepanjang kolom ke-2 !

6. Hitunglah determinan dari :

   a. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ d. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ -4 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

7. Hitunglah : $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

8. Anggaplah det $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ = 5. Carilah :

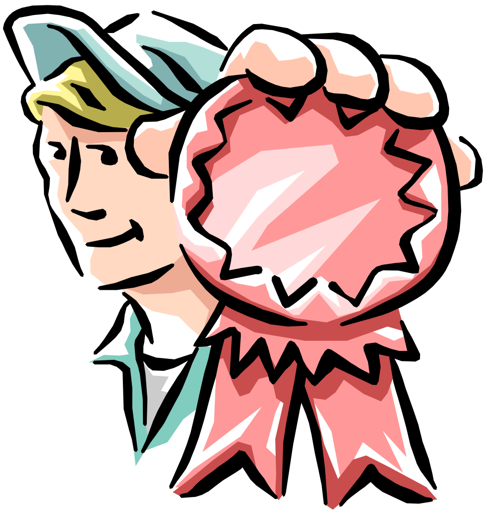
   a). det $\begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix}$ b). det $\begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{bmatrix}$

   c). det $\begin{bmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ d). det $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix}$

9. Anggaplah det(A) = 5, dimana : A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Carilah :

   a). det(3A) b). det($2A^{-1}$) c). det($(2A)^{-1}$) d). det $\begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

10. Buktikan : $\begin{vmatrix} bc & 1 & a \\ ca & 1 & b \\ ab & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (c - a)(c - b)(b - a)$!



Karakter seseorang tidak datang lewat ilham atau mimpi. Dibentuk melalui usaha keras dan masa penempaan yang panjang.(James A. Froude)

BAB III
MATRIKS INVERS

3.1 KONSEPSI MATRIKS INVERS

Definisi :

Sebuah matriks bujursangkar A berordo (nxn) disebut mempunyai invers jika ada suatu matriks B sedemikian sehingga AB = BA = I_n dimana I_n adalah matriks identitas dengan ordo (nxn). Matriks B dinamakan *invers dari matriks A, ditulis A^{-1}*, sehingga :

$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

Matriks-matriks yang mempunyai invers adalah matriks yang non singular (determinannya tidak nol), dan bila inversnya ada maka inversnya adalah tunggal (hanya ada satu).

Sifat-sifatnya adalah :

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Contoh :

Carilah invers dari A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Jawab :

Misalkan $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka akan berlaku : $A.A^{-1} = I_2$

Sehingga : $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, jika dikalikan akan diperoleh :

$\begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 4a+3c & 4a+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ atau

2a + c = 1 ……..(i) 2b + d = 0 ……..(ii)

40 + 3c = 0 ……(iii) 4a + 3d = 1 ……(iv)

dan jika dilakukan substitusi diperoleh : a = 3/2; b = -1/2; c = -2 ;d = 1

Sehingga : $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

3.2 MATRIKS INVERS DENGAN ADJOIN

Definisi :

Sebuah matriks A yang bujursangkar *dapat dibalik* jika dan hanya jika det(A) $\neq$ 0.

Akibat :

Jika A dapat dibalik maka : $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Definisi :

Jika A adalah sebuah matriks yang dapat dibalik, maka :

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}.Adj(A).$

Contoh :

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Tentukanlah :

a. Determinannya dengan Ekspansi Kofaktor sepanjang baris ke-2 !

b. Matriks Kofaktornya atau Kof(A) !

c. Matriks Adjoin dari A atau Adj(A) !

d. Matriks Inversnya !

Jawab :

a. $\det(A) = 0.\,(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (-4)\,(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 0 - 4.6 - 2.(-5) = -14.$

b. $C_{11}(A) = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18$, $C_{12}(A) = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2$,

$C_{13}(A) = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$, $C_{21}(A) = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -19$,

$C_{22}(A) = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6$, $C_{23}(A) = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$,

$C_{31}(A) = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 22$, $C_{32}(A) = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$,

$C_{33}(A) = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8.$

Maka Kof(A) = $\begin{bmatrix} -18 & 2 & 4 \\ -19 & 6 & 5 \\ 22 & -4 & -8 \end{bmatrix}$.

c. $\text{Adj}(A) = (\text{Kof}(A))^T = \begin{bmatrix} -18 & -19 & 22 \\ 2 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$

d. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}.Adj(A) = \dfrac{1}{(-14)}\begin{bmatrix} -18 & -19 & 22 \\ 2 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/7 & 19/14 & -11/7 \\ -1/7 & -3/7 & 2/7 \\ -2/7 & -5/14 & 4/7 \end{bmatrix}$

3.3 MATRIKS INVERS DENGAN METODE PENYAPUAN

Catatan 1 :

Dengan mengalikan matriks elementer baris H (matriks yang didapat dari satu kali transformasi elementer baris terhadap matriks I_n) dengan suatu matriks A, maka ***HA*** = matriks hasil transformasi elementer terhadap A dari jenis H yang sama.

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{21}^{(1)}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ = B, sedangkan matriks elementer $H_{21}^{(1)}(I_3)$ = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ = H, terlihat bahwa :

$$HA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Catatan 2 :

Misalkan K merupakan matriks elementer kolom (yang didapat dari satu kali transformasi elementer pada kolom dari matriks I_n), maka ***AK*** = matriks hasil transformasi elementer kolom terhadap matriks A dari jenis K yang sama.

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_{31}^{(1)}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ = C, sedangkan matriks elementer $K_{31}^{(1)}(I_3)$ = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ = K, terlihat bahwa :

$$AK = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = C.$$

Catatan 3 :

Matriks B disebut ekivalen dengan A (B ~ A), yaitu B diperoleh dari A dengan satu atau sederetan transformasi elementer baris dan/atau kolom dari A, maka selalu ada matriks P dan Q sedemikian sehingga ***PAQ = B***, berdasarkan catatan *(1)* dan *(2)*.

Contoh :

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, dan misalnya dilakukan transformasi elementer sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{21}^{(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_{13}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Jadi A ~ B (atau B ~ A). Sedangkan $H_{21}^{(1)}(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

dan $K_{13}(I_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Sebut $H_{21}^{(1)}(I_3)$ = P dan $K_{13}(I_3)$ = Q, ternyata bahwa : PAQ =

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Dengan demikian untuk mencari Matriks Invers dengan transformasi elementer dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut :

Misalkan terdapat matriks bujursangkar A yang berordo (nxn) yang non singular (det(A) $\neq$ 0) mempunyai bentuk normal I_n, maka selalu ada matriks-matriks bujursangkar P dan Q sedemikian sehingga PAQ = I_n, dimana matriks P diperoleh dari sederetan transformasi elemeter baris dan matriks Q diperoleh dari sederetan transformasi elemeter kolom terhadap matriks I_n.

Catatan 4:

Dengan hanya melakukan transformasi elementer baris dapat dicari matriks invers dari matriks A, yaitu setelah matriks A menjadi matriks segitiga atas, maka baris yang lebih bawah dapat dipakai *"menyapu"* semua elemen diatas diagonal utama menjadi nol, cara ini sering disebut dengan ***Metode Penyapuan.*** atau

Misalkan A adalah matriks bujursangkar yang berordo (nxn) maka dapat dilakukan operasi :

$$[\,A \mid I_n\,] \xrightarrow{\text{Op.Elementer}} [\,I_n \mid A^{-1}\,] \text{ atau } [\,I_n \mid A\,] \xrightarrow{\text{Op.Elementer}} [\,A^{-1} \mid I_n\,]$$

Keterangan :

Dengan meletakkan matriks Identitas di sebelahnya matriks A sehingga ordo matriks berubah menjadi (nx2n) dan dengan transformasi elementer matriks $[A \mid I_n]$ diubah menjadi matriks segitiga atas, setelah itu dengan transformasi elementer juga elemen-elemen yang terletak diatas diagonal utamanya dijadikan nol, sehingga dapat diperoleh yang tadinya matriks A diubah menjadi matriks I_n dan yang semula matriks Identitas berubah menjadi matriks Invers).

Contoh :

Carilah matriks invers dari A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ **dengan metode penyapuan !**

Jawab :

$$[\,I_n \mid A\,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[H_{31}^{(-2)}]{H_{21}^{(-1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{32}^{(1)}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{3}^{(1/7)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -3/7 & 1/7 & 1/7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[H_{23}^{(-4)}]{H_{13}^{(-2)}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/7 & -2/7 & -2/7 & 1 & 3 & 0 \\ 5/7 & 3/7 & -4/7 & 0 & 1 & 0 \\ -3/7 & 1/7 & 1/7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{12}^{(-3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2/7 & -11/7 & -10/7 & 1 & 0 & 0 \\ 5/7 & 3/7 & -4/7 & 0 & 1 & 0 \\ -3/7 & 1/7 & 1/7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$= [\,A^{-1} \mid I_n\,]$.

Jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2/7 & -11/7 & -10/7 \\ 5/7 & 3/7 & -4/7 \\ -3/7 & 1/7 & 1/7 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & -11 & -10 \\ 5 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Soal-soal Latihan :

1. Diketahui : A = $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

   Tentukanlah :

   a. A^{-1} dengan definisi : $A.\,A^{-1} = I_2$!

   b. A^{-1} dengan adjoin !

2. Carilah x dan y dari susunan persamaan linier berikut dengan menggunakan invers dari matriks koefisiennya.

   a). $x + y = 1$
 $2x + y = 1$

   b). $x + y = 3$
 $x + y + z = 0$

   c). $4x + 5z = 9$
 $y - 6z = -4$

$2y + z = 2$ $\qquad\qquad$ $6x \qquad + 8z = 14$

3. Tentukanlah invers dari matriks berikut ini dengan Adjoin !

   a). $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ b). $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ d). $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

4. Dari soal no. 3 diatas, carilah inversnya dengan Metode Penyapuan !
5. Dengan Metode Penyapuan tentukan invers dari matriks berikut :

   a). $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ b). $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ c). $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$

6. Carilah matriks-matriks P dan A sedemikian sehingga PAQ = I_3, bila :

   a). $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ b). $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

BAB IV
SISTEM PERSAMAAN LINIER (SPL)

4.1 KONSEP SISTEM PERSAMAAN LINIER

Persamaan linier dalam n peubah (variabel) x_1, x_2, x_3, ... , x_n merupakan persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk : $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$

dimana a_1, a_2,..., a_n, dan b adalah konstanta-konstanta riel.

Contoh :

a). $x + 3y = 7$ b). $y = \frac{1}{2}x + 3z + 1$ c). $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$

Persamaan linier tidak melibatkan hasil kali atau akar peubah, fungsi trigonometrik, fungsi logaritmik, maupun fungsi eksponensial.

Contoh :

a). $x + 3y^2 = 7$ b). $y - \sin x = 0$ c). $3x + 2y - z + xz = 4$ d). $\sqrt{x_1} + 2x_2 = 1$

Sebuah pemecahan (solution) persamaan linier $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ adalah urutan dari n bilangan s_1, s_2, s_3, **...**, s_n sehingga persamaan tersebut dipenuhi apabila disubstitusikan terhadap $x_1 = s_1$; $x_2 = s_2$;...; $x_n = s_n$. Himpunan semua pemecahan persamaan tersebut dinamakan *himpunan pemecahannya* (*its solution set)*.

Definisi :

Sebuah himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linier di dalam variabel-variabel x_1, x_2, … , x_n dinamakan *Sistem Persamaan Linier* atau sebuah *sistem linier*. Sebuah urutan bilangan-bilangan s_1, s_2, … , s_n dinamakan sebuah pemecahan dari sistem tersebut jika $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$,… , $x_n = s_n$ adalah sebuah pemecahan dari tiap-tiap persamaan di dalam sistem tersebut.

Contoh :

Misalkan sistem persamaan linier :

$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$

$3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$

mempunyai pemecahan $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$; karena nilai-nilai tersebut memenuhi kedua persamaan. Akan tetapi $x_1 = 1$; $x_2 = 8$; $x_3 = 1$; bukanlah sebuah pemecahan karena nilai-nilai tersebut hanya memenuhi persamaan yang pertama di dalam sistem tersebut.

Tidak semua sistem persamaan linier mempunyai pemecahan. Persamaan linier yang memiliki setidak-tidaknya satu pemecahan disebut ***konsisten (Consistent).*** Persamaan linier yang tidak mempunyai pemecahan disebut ***tak konsisten*** (***inconsistent).***

Ada 3 kemungkinan penyelesaaian persamaan linier :

1. Tidak mempunyai pemecahan
2. Mempunyai persis satu pemecahan.
3. Mempunyai tak hingga banyaknya pemecahan.

Definisi :

Sebuah Sistem Persamaan Linier yang terdiri dari *m* buah persamaan linier dengan *n* buah bilangan yang tidak diketahui dapat dinyatakan dengan :

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

dimana $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah bilangan-bilangan yang tidak diketahui dan a, b menyatakan kontanta-konstanta.

Dan apabila Sistem Persamaan Linier tersebut dinyatakan dengan perkalian matriks AX = B, maka dapat dinyatakan dengan :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

Dan apabila matriks B ditambahkan di kolom terakhir dari matriks A disebut dengan *bentuk matriks yang diperbesar (Augmented Matrix)* yang dinyatakan dengan:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Contoh :

Bentuk matriks yang diperbesar dari Sistem Persamaan Linier berikut ini :

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$

$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$

adalah $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$.

Jika AX = B adalah suatu Sistem Persamaan Linier (SPL), maka terdapat 2 macam SPL yaitu :

1. *Sistem Persamaan Linier Non Homogen* yaitu jika tidak semua nilai dari suku konstantanya (elemen dari matriks B) sama dengan nol.
2. *Sistem Persamaan Linier Homogen* yaitu jika semua suku konstantanya (elemen dari matriks B) sama dengan nol.

4.2 PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER

4.2.1 Eliminasi Gauss-Jordan

Eliminasi Gauss-Jordan adalah sebuah prosedur selangkah demi selangkah yang sistematis untuk memecahkan Sistem Persamaan Linier dengan mereduksi bentuk matriks yang diperbesar (augmented matrix) menjadi bentuk yang cukup sederhana yaitu *bentuk Eselon Baris yang Direduksi (Reduced Row-echelon Form)*.

Yang dimaksud dengan *Bentuk Eselon Baris yang Direduksi* adalah suatu bentuk matriks yang diperbesar yang mempunyai sifat :

1. Jika sebuah baris tidak terdiri seluruhnya dari elemen nol, maka bilangan tak nol pertama dalam baris tersebut adalah 1 (dinamakan *1 utama*).
2. Jika ada suatu baris yang seluruhnya terdiri dari elemen nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan bersama-sama di bagian bawah matriks.
3. Dalam sebarang dua baris yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari elemen nol, maka letak *1 utama* dalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan dari *1 utama* dalam baris yang lebih tinggi.
4. Setiap kolom yang mengandung *1 utama* mempunyai nol di tempat lain.

Jika suatu matriks yang diperbesar dari sistem persamaan linier mempunyai sifat 1, 2 dan 3 maka matriks tersebut mempunyai *bentuk eselon baris*. Sedangkan jika mempunyai sifat 1, 2, 3 dan 4 maka matriks tersebut mempunyai *bentuk eselon baris yang direduksi*.

Contoh :

1). Bentuk Eselon Baris :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2). Bentuk Eselon Baris yang Direduksi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika sebuah bentuk matriks yang diperbesar dari Sistem Persamaan Linier sudah berbentuk Eselon Baris yang Direduksi, maka himpunan pemecahan untuk sistem tersebut dapat diperoleh dengan pemeriksaan atau dengan sejumlah kecil langkah sederhana.

Contoh :

Pemecahan dari matriks yang diperbesar dari Sistem Persamaan Linier yang sudah direduksi menjadi bentuk eselon baris yang direduksi adalah :

a). $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ Sistem Persamaan Linier yang bersangkutan adalah :

$1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5$

$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = -2$

$0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 4$

sehingga dengan pemeriksaan diperoleh : $x_1 = 5$, $x_2 = -2$ dan $x_3 = 4$.

b). $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ Sistem Persamaan Linier yang bersangkutan adalah :

$1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 4x_4 = -1$

$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 2x_4 = 6$

$0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 3x_3 = 2$

Karena x_1, x_2, dan x_3 bersesuaian dengan *1 utama* di dalam matriks yang diperbesar, maka x_1, x_2, dan x_3 dapat disebut sebagai variabel utama, sehingga diperoleh :

$x_1 + 4x_4 = -1 \rightarrow x_1 = -1 - 4x_4$

$x_2 + 2x_4 = 6 \rightarrow x_2 = 6 - 2x_4$

$x_3 + 3x_4 = 2 \rightarrow x_3 = 2 - 3x_4$

Karena x_4 merupakan variabel bebas, maka dapat diberikan sebarang nilai misalkan t, sehingga diperoleh tak terhingga banyaknya pemecahan. Himpunan pemecahan ini diberikan oleh rumus-rumus :

$x_1 = -1 - 4t$, $x_2 = 6 - 2t$, $x_3 = 2 - 3t$ dan $x_4 = t$.

Misalkan t = 1 maka $x_1 = -5$, $x_2 = 4$, $x_3 = -1$ dan $x_4 = 1$.

Contoh :

Selesaikan Sistem Persamaan Linier dengan Eliminasi Gauss-Jordan :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Penyelesaian :

Bentuk matriks yang diperbesar dari SPL diatas adalah :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan operasi elementer matriks tersebut akan diubah menjadi bentuk eselon baris yang direduksi, yaitu :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_{31}^{(-3)}]{H_{21}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{2}^{(1/2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{32}^{(-3)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{3}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_{23}^{(7/2)}]{H_{13}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{12}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jadi pemecahan dari SPL tersebut adalah : $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$.

Soal-soal Latihan :

Selesaikan SPL berikut dengan Eliminasi Gauss-Jordan :

1). $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$$

2). $$\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 &= 12 \\ 3x_1 - 6x_2 &= 9 \\ -2x_1 + 4x_2 &= -6 \end{aligned}$$

3). $x_1 + 5x_2 - 4x_3 \quad - 7x_5 = -5$

$x_3 + x_4 + 7x_5 = 3$

$x_4 + 4x_5 = 2$

4). $-2x_3 \quad + 7x_5 = 12$

$2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 = 28$

$2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 = -1$

4.2.2 Kaidah Cramer

Definisi :

Jika AX = B adalah sebuah Sistem Persamaan Linier yang terdiri dari n buah persamaan linier dan n buah bilangan yang tidak diketahui sehiingga det(A) ≠ 0, maka sistem tersebut mempunyai sebuah pemecahan yang unik.

Pemecahan itu adalah :

$x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)}$, $x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)}$, ... , $x_n = \dfrac{\det(A_n)}{\det(A)}$ atau $x_j = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}$

dimana A_j merupakan matriks yang didapatkan dengan menggantikan elemen-elemen di dalam kolom ke-j dari matriks A dengan elemen-elemen di dalam matriks B.

Contoh :

Gunakanlah Kaidah Cramer untuk memecahkan Sistem Persamaan Linier berikut ini :

$x_1 \quad + 2x_3 = 6$

$-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30$

$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8$

Penyelesaian :

Jika Sistem Persamaan Linier dinyatakan dalam bentuk AX = B, maka diperoleh : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$, sedangkan : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$,

$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ dan $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$

Sehingga : $x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)} = \dfrac{-40}{44} = \dfrac{-10}{11}$, $x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)} = \dfrac{72}{44} = \dfrac{18}{11}$ dan

$x_3 = \dfrac{\det(A_3)}{\det(A)} = \dfrac{152}{44} = \dfrac{38}{11}$.

Soal-soal Latihan :

Gunakanlah Kaidah Cramer untuk memecahkan Sistem Persamaan Linier berikut ini :

1). $3x_1 - 4x_2 = -5$
$2x_1 + x_2 = 4$

2). $4x + 5y = 2$
$11x + y + 2z = 3$
$x + 5y + 2z = 1$

3). $x + y - 2z = 1$
$2x - y + z = 2$
$x - 2y - 4z = -4$

4). $x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$
$2x_1 - x_2 = -2$
$4x_1 - 3x_3 = 0$

5). $2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -32$
$7x_1 + 2x_2 + 9x_3 - x_4 = 14$
$3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 11$
$x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4$

4.3 SISTEM PERSAMAAN LINIER HOMOGEN

Suatu SPL dikatakan homogen jika semua suku konstan (b) nilainya sama dengan nol, yaitu Sistem Persamaan Linier tersebut memiliki bentuk :

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

SPL Homogen merupakan sistem yang konsisten karena setidaknya ada satu penyelesaian yaitu $x_1 = 0\ x_2 = 0 .... x_n = 0$. Penyelesaian ini disebut dengan *penyelesaian trivial (trivial solution)*. Jika terdapat pemecahan lain, maka pemecahan lain tersebut dinamakan *penyelesaian non trivial (nontrivial solution).*

Pada SPL homogen ada dua kemungkinan penyelesaian :

1. Sistem tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial.
2. Selain penyelesaian trivial, sistem tersebut mempunyai tak hingga banyak penyelesaian. (Penyelesaiannya tak trivial.)

Terdapat satu kasus dimana Sebuah SPL Homogen dipastikan mempunyai pemecahan yang non trivial jika SPL tersebut melibatkan lebih banyak bilangan yang tidak diketahui daripada banyaknya persamaan.

Contoh :

Pecahkanlah Sistem Persamaan Linier Homogen berikut ini dengan Eliminasi Gauss-Jordan :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \quad\quad + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \quad\quad - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Bentuk matriks yang diperbesar SPL Homogen tersebut adalah :

$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, dengan mereduksi matriks tersebut ke dalam bentuk eselon baris yang direduksi dengan operasi elementer, maka diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang bersangkutan adalah :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad\quad + x_5 &= 0 \\ x_3 \quad + x_5 &= 0 \\ x_4 \quad &= 0 \end{aligned}$$

Karena x_1 ,x_3 dan x_4 merupakan variabel utama maka akan menghasilkan :

$x_1 = -x_2 - x_5$; $x_3 = -x_5$; $x_4 = 0$

Misalkan $x_2 = s$ dan $x_5 = t$ maka himpunan pemecahannya akan diberikan oleh

$x_1 = -s - t$, $x_2 = s$, $x_3 = -t$, $x_4 = 0$ dan $x_5 = t$.

Perhatikan bahwa pemecahan trivial diperoleh jika $s = t = 0$.

Teorema :

SPL homogen dengan lebih banyak bilangan tak diketahui dari pada banyaknya persamaan selalu mempunyai tak hingga banyaknya penyelesaian.

Soal-soal Latihan :

Periksalah apakah SPL di bawah ini hanya memiliki penyelesaian trivial atau tak berhingga penyelesaian!

1). $$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2). $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 \quad &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

3). $$\begin{aligned} x + 6y - 2z &= 0 \\ 2x - 4y + z &= 0 \end{aligned}$$

4). $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

5). $$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 5y + 2z &= 0 \\ x + 4y + 7z &= 0 \\ x + 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

It's better to be a small man with big actions than a big man with a small action

BAB V
VEKTOR

5.1 VEKTOR SECARA ILMU UKUR

Definisi :

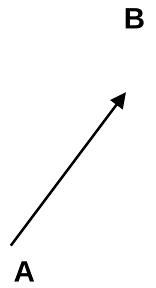
Vektor adalah suatu potongan (ruang, segmen) garis yang mempunyai arah.

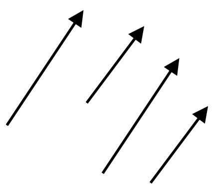
Vektor–vektor dalam dinyatakan secara geometris sebagai segmen-segmen garis terarah atau panah-panah di dalam ruang-2 atau ruang-3; arah panah menentukan arah vektor dan panjang panah menyatakan besarnya. Ekor anak panah dinamakan *titik permulaan (initial point)*, dan ujung panah dinamakan *titik terminal (terminal point)*.

Notasi Vektor :

Notasi Vektor dapat digambarkan dengan memberi tanda panah pada titik ujungnya. Sedangkan untuk menuliskannya, dapat dipakai salah satu notasi berikut: $\bar{a}, \vec{a}, \overline{A}, \vec{A}, \mathbf{a}, \underline{A}$.

Jika seperti di dalam Gambar 1.a. titik permulaan sebuah vektor **v** adalah A dan titik terminalnya adalah **B**, maka dapat dituliskan **v** = $\overrightarrow{AB}$. Vektor–vektor yang mempunyai panjang dan arahnya sama (arah sama, artinya mempunyai garis pembawa yang berimpit atau sejajar, dengan arah panah sama) jadi vektor tidak tergantung pad letaknya, tetapi tergantung pada panjang dan arahnya. Seperti vektor–vektor di dalam Gambar 1.b dinamakan ekivalen. Jika **v** dan **w** ekivalen maka dapat dituliskan **v** = **w**.





Gambar 1.a. Vektor $\overrightarrow{AB}$ **1.b. Vektor-vektor Ekivalen**

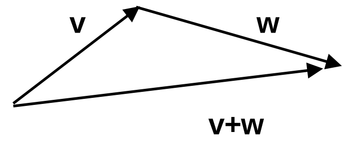
5.2. OPERASI-OPERASI PADA VEKTOR

Yang akan dibicarakan disini adalah operasi penjumlahan dan pengurangan vektor, dan perkalian skalar dengan vektor.

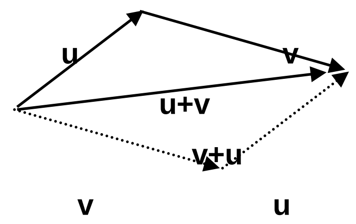
5.2.1. Penjumlahan dan Pengurangan Vektor

Definisi :

Jika **v** dan **w** adalah sebarang dua vektor , maka jumlah vektor **v + w** adalah vektor yang ditentukan sebagai berikut. Tempatkanlah vektor **w** sehingga titik permulaannya berimpit dengan titik terminal **v.** Vektor **v** dan **w** dinyatakan oleh panah dari titik permulaan dari **v** kepada titik terminal **w** (Metode Segitiga)

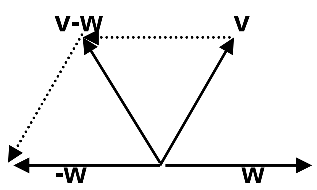


Adapun penjumlahan vektor **v** + **w** = **w** + **v** juga dapat dinyatakan dengan jumlah vektor tersebut berimpit dengan diagonal dari paralelogram yang ditentukan oleh **v** dan **w** bila vektor-vektor ini diletakkan sehingga vektor-vektor tersebut mempunyai titik permulaan yang sama (metode jajaran genjang).

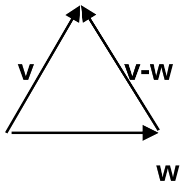


Definisi :

jika **v** dan **w** adalah sebarang dua vektor, maka pengurangan vektor dapat didefinisikan oleh : **v – w** = **v** + (**-w**).



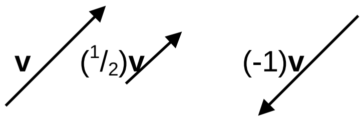
Untuk mendapatkan selisih **v – w** tanpa menggambarkan (**-w**) , maka dudukkanlah **v** dan **w** sehingga titik-titik permulaannya berimpit; vektor titik terminal dari **w** ke titik terminal **v** adalah vektor **v – w** .



5.2.2. Perkalian Vektor dengan Skalar

Definisi :

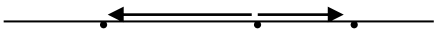
Jika **v** adalah sebuah vektor dan *k* adalah sebuah bilangan riil (skalar), maka hasil perkalian *k***v** didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya I*k*I kali panjang dari vektor **v** dan mempubyai arah sama seperti arah dari **v** jika *k*>o (positif) dan berlawanan arah dengan **v** jika *k*<0 (negatif).



5.3. VEKTOR PADA RUANG DIMENSI n (R^n)

5.3.1 Vektor dalam Ruang Dimensi Satu (R^1)

Setiap bilangan riel dapat diwakili oleh sebuah titik pada suatu garis lurus, yang membentuk susunan koordinat di dalam ruang dimensi satu ditulis R^1 **.** Untuk itu dapat dipilih titik O sebagai titik awal susunan koordinat dan suatu titik E dimana panjang OE = 1 satuan. Titik O mewakili bilangan nol dan titik E mewakili bilangan 1 dan dapat ditulis O(0), E(1).



A(-2) O(0) E(1)

Pandang sekarang vektor **a** yang titik awalnya O(0) dan titik ujungnya titik A(a_1) maka **a** = $\overrightarrow{OA}$ = [a_1] disebut *vektor posisi (radius vektor)* dari titik A.

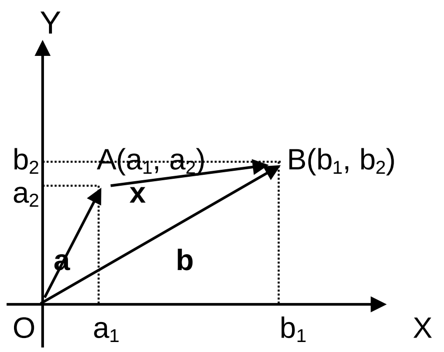
5.3.2 Vektor dalam Ruang Dimensi Dua (R^2)

Setiap pasangan bilangan riel dapat diwakili oleh sebuah titik pada suatu bidang rata, yang membentuk susunan koordinat di dalam ruang dimensi dua ditulis R^2 **.** Untuk itu dibuat dua garis lurus (tidak sejajar) dan titik potongnya adalah titik O sebagai titik awal (titik pusat). Susunan koordinat tersebut sering disebut sebagai susunan koordinat yang saling tegak lurus (susunan Koordinat Cartesian) dalam R^2. Masing-masing garis disebut sumbu koordinat.

Suatu vektor disebut satuan bila panjangnya 1 satuan dimana titik awalnya di O(0,0) dan titik ujungnya di E_1(1,0) maka dapat dinyatakan dengan $\mathbf{e_1} = \overrightarrow{OE_1} = [1,0]$, sedangkan yang bertitik awal di O(0,0) dan titik ujungnya di E_2(0,1) maka dapat dinyatakan dengan $\mathbf{e_2} = \overrightarrow{OE_2} = [0,1]$.

Pandang vektor **a** adalah suatu vektor yang berawal di O(0,0) dan berakhir di titik $A(a_1, a_2)$ maka $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = [a_1, a_2]$ yang disebut sebagai vektor posisi dari titik $A(a_1, a_2)$ dan dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2}$. Sedangkan panjang vektor **a** *(Norm)* adalah dinyatakan dengan $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Secara umum untuk vektor **x** yang berawal di titik $A(a_1, a_2)$ dan berakhir di titik $B(b_1, b_2)$ maka $\mathbf{x} = \overrightarrow{AB} = [(b_1-a_1), (b_2-a_2)]$, sedangkan panjang vektor $\mathbf{x} = |\mathbf{x}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$



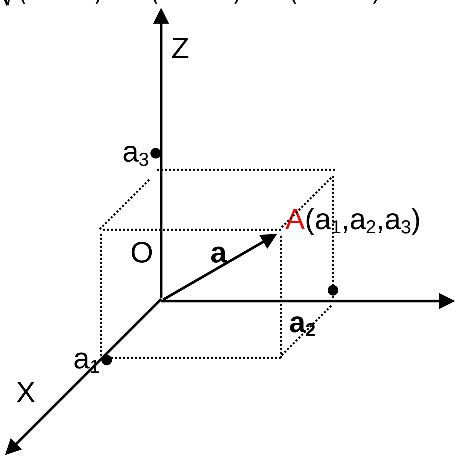
5.3.3 Vektor dalam Ruang Dimensi Tiga (R^3)

Setiap tripel bilangan riel dapat diwakili oleh sebuah titik pada suatu ruang dimensi tiga dan ditulis R^3 dengan membentuk suatu susunan koordinat, yaitu mengambil tiga garis lurus (tidak sejajar) dan titik potongnya adalah titik O sebagai titik awal (titik pusat).

Pandang vektor **a** adalah suatu vektor yang berawal di O(0,0) dan berakhir di titik $A(a_1,a_2,a_3)$ maka $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = [a_1,a_2,a_3]$ yang disebut sebagai vektor posisi dari titik $A(a_1,a_2,a_3)$ dan dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} + a_3\mathbf{e_3}$.

Sedangkan panjang vektor **a** *(Norm)* adalah dinyatakan dengan $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Secara umum untuk vektor **p** yang berawal di titik A(a_1,a_2,a_3) dan berakhir di titik B(b_1,b_2,b_3) maka **p** = $\overrightarrow{AB}$ = [(b_1-a_1),(b_2-a_2),(b_3-a_3)], sedangkan panjang vektor **p** = $|\mathbf{p}|$ = $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$



5.3.4 Vektor dalam Ruang Dimensi n (R^n)

Definisi :

Jika n adalah sebuah bilangan bulat positip, maka sebuah tupel-n-terorde (ordered-n-tuple) adalah sebuah urutan dari n bilangan riel (v_1, v_2, **…**, v_n). Himpunan dari semua tupel-n-terorde dinamakan ruang-n dan dinyatakan dengan R^n. Sebuah tupel-n-terorde (v_1, v_2, **…**, v_n) dapat dinyatakan sebagai "titik yang diperumum" maupun sebagai "vektor yang diperumum".

Definisi :

Vektor **u** = (u_1, u_2) dan **v** = (v_1 , v_2) sama, jika u_1 = v_1 dan u_2 = v_2 dengan perkataan lain bila komponen yang sama letaknya mempunyai harga yang sama.

Untuk R^n dapat diperluas sebagai berikut :

(1). Vektor posisi dari titik A(a_1, a_2, …, a_n) adalah **a** = $\overrightarrow{OA}$ = [a_1, a_2, …, a_n].

(2). Vektor **x** bertitik awal di P(p_1, p_2, …,p_n) dan bertitik ujung di titik Q(q_1, q_2, …,q_n) adalah **x** = $\overrightarrow{PQ}$ = [(q_1 - p_1), (q_2 - p_2), …, (q_n- p_n)].

(3). Panjang vektor **a** = [a_1, a_2, …, a_n] adalah **IaI** = $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ...+ a_n^2}$.

Jarak dua titik P(p_1, p_2, …,p_n) dan Q(q_1, q_2, …,q_n) adalah panjang vektor $\overrightarrow{PQ}$ yaitu : I$\overrightarrow{PQ}$I= $\sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + ...+ (q_n - p_n)^2}$

(4). Vektor **a** = [a_1, a_2, …, a_n] dan vektor **b** = [b_1, b_2, …, b_n] dikatakan *sama* jika a_1= b_1, a_2= b_2,…, a_n= b_n.

(5). Vektor-vektor satuan dari susunan koordinat adalah $\mathbf{e_1}$ = [1,0, …,0],

$\mathbf{e_2}$ = [0,1, …, 0], … , $\mathbf{e_n}$ = [0,0, …, 1] dan berlaku bila **a** = [a_1, a_2, …, a_n] maka **a** = $a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} + \ldots + a_n\mathbf{e_n}$.

(6). Penjumlahan dan pengurangan vektor **a** = [a_1, a_2, …, a_n] dengan vektor **b** = [b_1, b_2, …, b_n] berlaku :

a ± **b** = [a_1, a_2, …, a_n] ± [b_1, b_2, …, b_n] = [($a_1 \pm b_1$), ($a_1 \pm b_1$), …, ($a_n \pm b_n$)]

(7). Perkalian vektor **a** = [a_1, a_2, …, a_n] dengan skalar *k*, berlaku :

*k***a** = *k*[a_1, a_2, …, a_n] = [ka_1, ka_2, …, ka_n].

5.4. PERKALIAN TITIK (DOT PRODUCT) DAN PROYEKSI ORTOGONAL

Misalkan **u** dan **v** adalah suatu vektor yang tak nol yang berada dalam ruang R^2 dan R^3 dimana kedua titik permulaannya berimpit, maka θ merupakan sudut diantara vektor **u** dan **v** yang memenuhi 0 < θ < π.

Definisi :

Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor didalam ruang-2 atau ruang-3 dan θ adalah sudut diantara **u** dan **v**, maka *perkalian titik (dot product)* atau *perkalian dalam euclidis(Euclidean inner product)* **u**.**v** didefinisikan oleh :

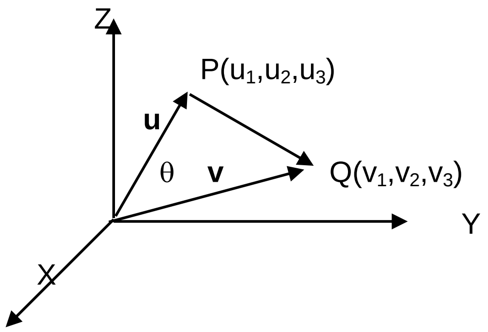
$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = \begin{cases} |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta, \text{jika } \mathbf{u}\neq 0 \text{ dan } \mathbf{v}\neq 0 \\ 0 \quad\quad\quad\quad , \text{jika } \mathbf{u}=0 \text{ dan } \mathbf{v}=0 \end{cases}$$

Contoh :

Diketahui vektor **u** = (0,0,1) dan vektor **v** = (0,2,2) dan sudut antara vektor **u** dan **v** adalah $\theta = 45^0$, maka **u**.**v** = |**u**||**v**| cos θ = $(\sqrt{0^2+0^2+1^2})\,(\sqrt{0^2+2^2+2^2})\,(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2$.

Misalkan **u** =(u_1,u_2,u_3), **v** =(v_1,v_2,v_3) adalah dua vektor tak nol dan θ adalah sudut diantara **u** dan **v**, maka hukum cosinus menghasilkan :

$|\overline{PQ}|^2 = |\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2 - 2\,|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta$ …….(1)



Karena $\overline{PQ}$ = **u** – **v**, maka dapat dituliskan kembali (1) sebagai :

$|\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}| \cos\theta = ½\ (|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2 - 2\ |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2)$

atau $\quad\quad \mathbf{u}.\mathbf{v} = ½\ (|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2 - 2\ |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2)$

dengan mensubtisusikan $|\mathbf{u}|^2 = u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2$, $|\mathbf{v}|^2 = v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2$ dan

$|\mathbf{v}\text{-}\mathbf{u}|^2 = (v_1\text{-}u_1)^2+(v_2\text{-}u_2)^2+(v_3\text{-}u_3)^2$ dan setelah disederhanakan akan didapatkan :

$\mathbf{u}.\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Jika $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ dan $\mathbf{v} = (v_1,v_2)$ adalah dua vektor di dalam ruang-2, maka rumus yang bersesuaian adalah $\mathbf{u}.\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$.

Contoh :

Tinjaulah vektor-vektor **u** = [2,-1,1] dan **v** = [1,1,2], tentukanlah sudut θ diantara **u** dan **v** !

Jawab :

Diketahui : $\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}| \cos\theta$ maka $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$

dimana $\mathbf{u}.\mathbf{v} = 2.1+(-1).1+1.2 = 3$ dan $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{6}$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$ sehingga $\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2}$. Jadi $\theta = 60^0$.

Teorema :

Misalkan **u** dan **v** adalah vektor-vektor di dalam R^2 dan R^3 maka :

a). $\mathbf{v}.\mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$; yakni $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}.\mathbf{v}}$

b). Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor tak nol dan θ sudut di antara kedua vektor tersebut, maka :

θ = sudut lancip jika dan hanya jika **u.v** > 0 (positif)

θ = sudut tumpul jika dan hanya jika **u.v** < 0 (negatif)

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (tegak lurus/ortogonal) jika dan hanya jika **u.v** = 0.

Teorema :

Jika **u**, **v** dan **w** adalah adalah vektor-vektor di dalam R^2 atau R^3 dan *k* adalah sebuah skalar maka :

a. **u.v** = **v.u**

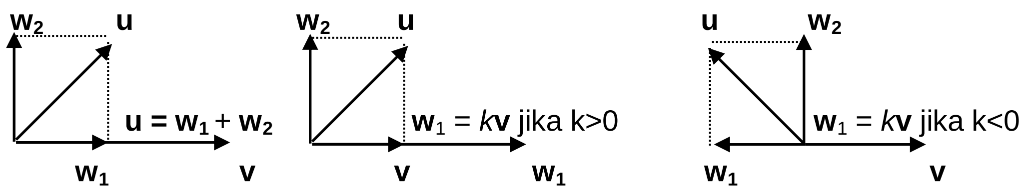
b. **u.(v** + **w)** = **u.v** + **u.w**

c. $k(\mathbf{u}.\mathbf{v}) = (k\mathbf{u}).\mathbf{v} = \mathbf{u}.(k\mathbf{v})$

d. $\mathbf{v}.\mathbf{v} > 0$ jika $\mathbf{v} \neq 0$ dan $\mathbf{v}.\mathbf{v} = 0$ jika $\mathbf{v} = 0$

Dapat didefinisikan bahwa dua vektor **u** dan **v** sebagai vektor-vektor ortogonal (ditulis $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$) jika $\mathbf{u}.\mathbf{v} = 0$. Jika disepakati bahwa vektor membuat sudut sebesar ($\pi/2$) dengan tiap-tiap vektor, maka dua vektor akortogonal satu sama lainnya jika dan hanya jika kedua vektor tersebut secara geometris tegak lurus satu sama lainnya.

Jika **u** dan **v** adalah adalah vektor-vektor di dalam R^2 atau R^3 maka dapat dituliskan bahwa : $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ dimana $\mathbf{w}_1$ merupakan kelipatan skalar dari **v** dan $\mathbf{w}_2$ tegak lurus dengan **v.** Vektor $\mathbf{w}_1$ disebut *proyeksi ortogonal dari* **u** *pada* **v** dan vektor $\mathbf{w}_2$ dinamakan *komponen dari **u** yang ortogonal kepada **v.***



Vektor $\mathbf{w}_1$ dan $\mathbf{w}_2$ dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut :

Karena $\mathbf{w}_1$ merupakan kelipatan skalar dari vektor v maka $\mathbf{w}_1 = k\mathbf{v}$**,** jadi :

. $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{u} = k\mathbf{v} + \mathbf{w}_2$ **.** Dengan mengambil perkalian titik dari kedua ruas dengan vektor **v** maka diperoleh :

$\mathbf{u}.\mathbf{v} = (k\mathbf{v} + \mathbf{w}_2).\mathbf{v} = k\mathbf{v}.\mathbf{v} + \mathbf{w}_2.\mathbf{v} = k|\mathbf{v}|^2 + \mathbf{w}_2.\mathbf{v}$ (karena $\mathbf{w}_2 \perp \mathbf{v}$) maka : $\mathbf{w}_2.\mathbf{v} = 0$, sehingga diperoleh : $k = \dfrac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}$ dan karena $\mathbf{w}_1 = k\mathbf{v}$ maka diperoleh : $\mathbf{w}_1 = \dfrac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}.\mathbf{v}$ yaitu *proyeksi ortogonal dari **u** pada **v**.* Dengan memecahkan $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ maka untuk $\mathbf{w}_2$ dapat diberikan $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = \mathbf{u} - \dfrac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}.\mathbf{v}$ yaitu *komponen dari **u** yang ortogonal kepada **v**.*

<u>*Contoh :*</u>

Tinjaulah vektor-vektor $\mathbf{u} = [2,-1,3]$ dan $\mathbf{v} = [4,-1,2]$, karena :

$\mathbf{u}.\mathbf{v} = 2.4+(-1).(-1)+3.2 = 15$ dan $|\mathbf{v}|^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21$, maka *proyeksi ortogonal dari* **u** *pada* **v** *adalah :* $\mathbf{w}_1 = \dfrac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}.\mathbf{v} = \dfrac{15}{21}.[4,-1,2] = [\dfrac{20}{7}, \dfrac{-5}{7}, \dfrac{10}{7}]$, sedangkan *komponen dari* **u** *yang ortogonal kepada* **v** *adalah :* $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = [2,-1,3] - [\frac{20}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{10}{7}]$

$= [\frac{-6}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{11}{7}]$.

Bagaimana jika diminta menentukan proyeksi ortogonal dari ***v*** *pada* ***u*** *dan komponen dari* ***v*** *yang ortogonal kepada* ***u*** *?*

Soal-soal Latihan :

1. Diketahui vektor-vektor **u** = [1,-3,7] dan **v** = [8,-2,-2], tentukanlah :
   a. **u.v**   b. Sudut di antara vektor **u** dengan vektor **v**
2. Tentukanlah apakah **u** dan **v** membentuk sebuah sudut lancip, tumpul atau ortogonal :
   a. **u** = [7,3,5] dan **v** = [-8,4,2]   b. **u** = [6,1,3] dan **v** = [4,0,6]
   c. **u** = [1,1,1] dan **v** = [-1,0,0]   d. **u** = [4,1,6] dan **v** = [-3,0,2]
3. Diketahui vektor-vektor **u** = [-7,1,3] dan **v** = [5,0,1], tentukanlah :
   a. Proyeksi ortogonal dari **u** pada **v**
   b. Proyeksi ortogonal dari **v** pada **u**
   c. Komponen dari **u** yang ortogonal kepada **v**
   d. Komponen dari **v** yang ortogonal kepada **u**
4. Gunakanlah vektor-vektor untuk mencari cosinus sudut dalam segitiga dengan titik-titik sudut (-1,0), (-2,1) dan (1,4) !
5. Buktikanlah identitas :
   a. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$
   b. $\mathbf{u.v} = \frac{1}{4}|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - \frac{1}{4}|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2$

5.5. PERKALIAN SILANG (*CROSS PRODUCT*)

Definisi :

jika **u** =($\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$), **v** =($\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$) adalah vektor-vektor didalam ruang-3, maka *perkalian silang* **u** x **v** adalah vektor yang didefinisikan oleh :

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = [u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1]$ atau dalam notasi determinan :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = [\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}]$$

Pernyataan :

Ada suatu pola dalam rumus diatas yang berguna untuk diingat. Jika kedua vektor dinyatakan dalam matriks ordo (2x3) yaitu :

$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ dimana entri-entri didalam baris pertama adalah komponen-komponen dari faktor pertama **u** dan entri-entri di dalam baris kedua adalah komponen-komponen dari faktor kedua **v**, maka determinan didalam komponen pertama dari **u** x **v** didapatkan dengan mencoret kolom pertama dari matriks tersebut, determinan didalam komponen kedua didapat dengan mencoret kolom kedua dari matriks, dan determinan didalam komponen ketiga didapatkan dengan mencoret kolom ketiga dari matriks tersebut.

Contoh :

Carilah **u** x **v**, dimana **u** =(1,2,-2) dan **v**=(3,0,1)

Penyelesaian :

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sehingga **u** x **v** = $\left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right)$ = [2, -7, -6].

Walaupun *perkalian titik* dari dua vektor adalah ***skalar***, namun *perkalian silang* dari dua vektor adalah ***sebuah vektor lain***. Teorema berikut memberikan sebuah hubungan diantara perkalian titik dan perkalian silang dan juga memperlihatkan bahwa **u**x**v** ortogonal pada **u** dan **v**.

Teorema :

Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor didalam ruang-3, maka :

(a). **u.**(**u**x**v**) = **0** (**u**x**v** ortogonal kepada **u**)

(b). **v.**(**u**x**v**) = **0** (**u**x**v** ortogonal kepada **v**)

(c). $|\mathbf{u}x\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}.\mathbf{v})^2$ (Identitas Lagrange)

Bukti :

Misalkan **u** = $[u_1,u_2,u_3]$ dan **v** = $[v_1,v_2,v_3]$ maka :

a). **u.**(**u**x**v**) = $[u_1,u_2,u_3].[u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1]$

$= u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1)$

$= u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2 + \mathbf{u_2u_3v_1} - u_1u_2v_3 + u_1u_3v_2 - \mathbf{u_2u_3v_1}$

= 0 (*terbukti*).

b). Serupa dengan a).

c). Karena : $|\mathbf{u}x\mathbf{v}|^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2$

dan $|\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}.\mathbf{v})^2 = (u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2$

Identitas Lagrange dapat dihasilkan dengan "menuliskan hasil perkalian" ruas kanan dengan ruas kiri dan membuktikan kesamaannya.

Contoh :

Tinjaulah vektor-vektor **u**=(1,2,-2) dan **v**= (3,0,1) **u**x**v** = (2,-7,-6)

karena **u.**(**u**x**v**) = (1,2,-2)**.**(2,-7,-6) = (1)(2) + (2)(-7) +(-2)(-6) = 0

dan **v.**(**u**x**v**) =(3)(2) +(0)(-7) +(1)(-6) = 0

sehingga **u**x**v** ortogonal pada **u** dan **v** seperti yang dijamin oleh teorema diatas.

Teorema :

Jika **u, v** dan **w** adalah vektor-vektor sebarang di dalam R^3 dan *k* adalah sebarang skalar, maka :

a). **u** x **v** = -(**v** x **u**)

b). **u** x (**v** + **w**) = (**u** x **v**) + (**u** x **w**)

c). (**u** + **v)** x **w** = (**u** x **w**) + (**v** x **w**)

d). *k* (**u** x **v**) = (*k***u**) x **v** = **u** x (*k***v**)

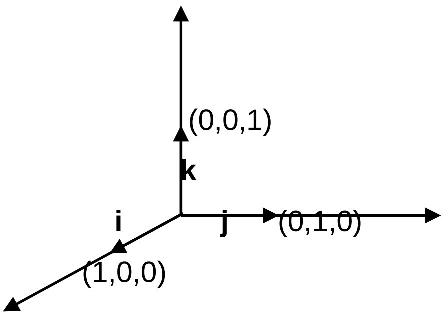
e). **u** x 0 = 0 x **u** = 0

f). **u** x **u** = 0

Diketahui vektor-vektor **i** = [1,0,0], **j** = [0,1,0] dan **k** = [0,0,1] dimana masing-masing vektor tersebut mempunyai panjang 1 satuan dan terletak di sepanjang sumbu-sumbu koordinat, vektor-vektor tersebut dinamakan *vektor satuan standar (sandard unit vectors)* di dalam R^3. Tiap-tiap vektor **v** = [v_1,v_2,v_3] di dalam R^3 dapat dinyatakan dalam **i, j** dan **k** dan dituliskan sebagai :

v = [v_1,v_2,v_3] = v_1 [1,0,0] + v_2 [0,1,0] + v_3 [0,0,1] = v_1 **i** + v_2 **j** + v_3 **k**

Misalnya : **v** = [2,-3,4] = 2**i** – 3**j** + 4**k**



Soal :

Tentukanlah :

a). **i** x **j** b). **j** x **k** c). **k** x **i** d). **i** x **k** e). **j** x **i**

f). **k** x **j** g). **i** x **i** h). **j** x **j** i). **k** x **k**

Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor yang tak nol di dalam R^3, maka panjang dari **u** x **v** mempunyai tafsiran geometrik yang berguna. Diketahui Identitas Lagrange adalah : $|\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}.\mathbf{v})^2$ ……….. (*1*)

dan jika θ menyatakan sudut antara vektor **u** dan **v**, maka :

$\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta$ ……. (*2*),

sehingga persamaan (*1*) dapat ditulis kembali dengan :

$|\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - (|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta)^2$

$= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 (1 - \cos^2\theta)$ (ingat sifat : $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$) maka :

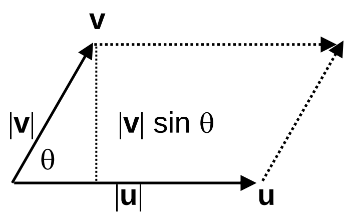
$= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 \sin^2\theta$

Jadi : $|\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \sin\theta$ ……….. (*3*)

Sedangkan luas segitiga yang dibentuk oleh vektor **u** dengan vektor **v** adalah : $\frac{1}{2}$ (alas x tinggi), dimana panjang alasnya = $|\mathbf{u}|$ dan tinggi dari segitiga tersebut adalah $|\mathbf{v}| \sin\theta$ maka luas segitiganya adalah : $\frac{1}{2}\,|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin\theta$ ………. (*4*)

Jadi dari persamaan (*3*) dan (*4*) diperoleh :

Luas segitiga yang dibentuk oleh vektor u dan v adalah : $\frac{1}{2}\,|\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v}|$



Soal-soal Latihan :

1. Misalkan **u** = [2,-1,3] , **v** = [0,1,7] dan **w** = [1,4,5], tentukanlah :

   a). **v** x **w** b). **u** x (**v** x **w**) c). (**u** x **v**) x **w**

   d). (**u** x **v**) + (**v** x **w**) e). **u** x (**v** - 2**w**) f). (**u** x **v**) - 2**w**

2. Tentukanlah sebuah vektor yang ortogonal kepada kedua vektor **u** dan **v** !

   a). **u** = [-7,3,1] dan **v** = [2,0,4] b). **u** = [-1,-1,-1] dan **v** = [2,0,2]

3. Tentukanlah luas segitiga yang mempunyai titik-titik sudut di titik P, Q dan R berikut ini :

   a).P(1,5,-2), Q(0,0,0) dan R(3,5,1)

b). P(2,2,0), Q(-1,0,2) dan R(0,4,3)

c). P(2,0,-3), Q(1,4,5) dan R(7,2,9)

5.6. KEBEBASAN LINEAR (LINEARLY INDEPENDENT)

Definisi :

Himpunan m buah vektor-vektor $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ disebut *bergantung linier (Linearly independent / tidak bebas linier)* bila terdapat skalar-skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ yang tidak semuanya nol sedemikian sehingga berlaku :

$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$. Dan himpunan vektor-vektor $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ disebut *bebas linier (linearly independent)* jika berlaku $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$ hanya terpenuhi oleh : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\ldots$, $\lambda_m = 0$. *atau*

Bila S merupakan himpunan dari vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\ldots\ldots, \mathbf{v}_r$, maka persamaan vektor $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_r\mathbf{v}_r = 0$ paling sedikit mempunyai 1 penyelesaian maka S disebut himpunan “ Linearly Independent”.

Contoh 1:

Himpunan S $=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ mempunyai vektor-vektor: $\mathbf{v}_1=(2,-1,0,3)$; $\mathbf{v}_2=(1,2,5,-1)$; $\mathbf{v}_3=(7,-1,5,8)$ adalah himpunan yang tak bebas linear karena $3\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3 = 0$

Contoh 2 :

Polinomial $p_1=1-x$; $p_2=5+3x-2x^2$; $p_3=1+3x-x^2$ membentuk himpunan yang tak bebas linear dalam p_2 karena $3p_1- p_2+2p_3 =0$.

Contoh 3 :

Diketahui himpunan S dari vektor-vektor : $\mathbf{v}_1=(1,-2,3)$; $\mathbf{v}_2=(5,6-1)$; $\mathbf{v}_3=(3,2,1)$. Selidikilah S merupakan huimpunan yang bebas linear atau tidak bebas linear.

Penyelesaian :

Menurut definisi S merupakan himpunan tak bebas linear bila ada skalar λ_1, λ_2, dan λ_3 sedemikian hingga : $\lambda_1\mathbf{v}_1+ \lambda_2\mathbf{v}_2+ \lambda_3\mathbf{v}_3=0$ tidak untuk semua k.

$\lambda_1(1,-2,3) + \lambda_2(5,6,-1) + \lambda_3(3,2,1) = 0$

$(\lambda_1+5\lambda_2+3\lambda_3, -2\lambda_1+6\lambda_2+2\lambda_3, 3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3) = 0$

Dengan menyamakan setiap komponen yang sesuai maka akan didapat :

$\lambda_1+5\lambda_2+3\lambda_3 =0$

$-2\lambda_1+6\lambda_2+2\lambda_3 =0$

$3\lambda_1 -\lambda_2+3\lambda_3 =0$

Terlihat dari susunan persamaan linier homogen ini ada penyelesaian yang non trivial, yang berarti himpunan S dari vektor –vektor $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ merupakan himpunan yang tak bebas linear.

5.7. RUANG VEKTOR DAN KOMBINASI LINEAR

Definisi :

Suatu vektor **w** disebut *kombinasi linear* dari vektor-vektor $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\ldots\ldots, \mathbf{v}_r\}$ bila terdapat skalar-skalar $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots., \lambda_r\}$ sedemikian sehingga **w** dapat dinyatakan sebagai : $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_r\mathbf{v}_r$.

Contoh :

Diketahui **u**=[1,2,-1] dan **v**=[6,4,2]. Tunjukkan bahwa **w** =[9,2,7] merupakan kombinasi linier dari **u** dan **v**.

Penyelesaian :

Menurut definisi **w** merupakan kombinasi linear dari **u** dan **v** bila ada bilangan λ_1 dan λ_2 sedemikian hingga berlaku :

$[9,2,7] = \lambda_1[1,2,-1] + \lambda_2[6,4,2]$

$[9,2,7] = [\lambda_1+6\lambda_2, 2\lambda_1+4\lambda_2, -\lambda_1+2\lambda_2]$, maka akan diperoleh :

$\lambda_1 + 6\lambda_2 = 9$; $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 2$; $-\lambda_1 + 2\lambda_2 = 7$

Terdapat 3 persamaan dengan 2 bilangan λ_1 dan λ_2 yang harus dicari. Untuk ini dipandang rank dari matriks A dan Augmented matriks B ialah :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$. Rank A =2 dan rank B = 2. Sehingga ada penyelesaiannya yaitu : $\lambda_1 = -3$ dan $\lambda_2 = 2$. Maka didapat **w** = -3**u** +2**v**. Jadi **w** merupakan kombinasi linier dari **u** dan **v**.

Contoh 2 :

Selidikilah **w** merupakan kombinasi linear dari **u** dan **v** atau bukan, bila diketahui : **w** = [4,-1,8], **u** = [1,2,-1], **v** = [6,4,2]

Dibuat susunan persamaan linear : $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v}$ ialah :

$[4,-1,8] = \lambda_1[1,2,-1] + \lambda_2[6,4,2]$, maka diperoleh :

$\lambda_1 + 6\lambda_2 = 4$; $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = -1$; $-\lambda_1 + 2\lambda_2 = 8$

Matriks $A=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

Rank A = 2 dan rank B = 3. Jadi tidak ada penyelesaian atau tidak ada λ_1 dan λ_2 yang memenuhi $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{v}$. Jadi **w** bukan kombinasi linear dari **u** dan **v**.

Definisi :

Bila $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ……,$\mathbf{v}_n$ merupakan vektor-vektor di dalam ruang vektor **V** dan bila setiap vektor dalam **V** dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, … ,$\mathbf{v}_n$ } maka dikatakan vektor ini merentang (span) **V**.

Contoh :

Diketahui himpunan polinomial P_n, P_n ini merupakan ruang vektor. Didalam P_n diketahui ada polinomial-polinomial 1, x, x^2,……, x^n. Maka polinomial 1, x, x^2,……, x^n ini “span” P_n karena tiap polinomial P di dalam P_n dapat dinyatakan sebagai : $P_n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n$ yang merupakan kombinasi linier dari 1, x, x^2,……, x^n

5.8. BASIS DAN DIMENSI RUANG VEKTOR

5.8.1. Dimensi Ruang Vektor

Definisi :

Bila **V** merupakan ruang vektor dan S = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ……., $\mathbf{v}_r$} adalah himpunan yang berhingga dari vektor-vektor elemen dari **V**, maka S disebut Basis dari **v** bila :

(i). S adalah bebas linear

(ii). S merentang **V**

Contoh :

Diketahui $\mathbf{v}_1$=(1,2,1) ; $\mathbf{v}_2$=(2,9,0) ; $\mathbf{v}_3$=(3,3,4). Buktikan bahwa S ={$\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$,$\mathbf{v}_3$} merupakan basis dari R_n.

Bukti :

Untuk membuktikan bahwa himpunan S merupakan basis, harus dipenuhi definisi :

(i). S bebas linear

(ii). S merentang R_3

maka :

(i). S bebas linear karena bila λ_1, λ_2, λ_3 merupakan skalar dan dibentuk persamaan : $\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\lambda_3\mathbf{v}_3=0$ akan didapat :

$\lambda_1(1,2,1)+\lambda_2(2,9,0)+\lambda_3(3,3,4)=0$ *atau*

$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3 =0$

$2\lambda_1+9\lambda_2+4\lambda_3 =0$

$\lambda_1 +0\lambda_2+4\lambda_3 =0$

akan terjadi susunan persamaan linear homogen. Susunan ini hanya mempunyai penyelesaian yang trivial saja, sehingga {$\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$,$\mathbf{v}_3$} bebas linear.

(ii). untuk membuktikan bahwa S merentang R_3 dibuktikan bahwa setiap vektor di R_3 dapat dinyatakan sebagai linear dari $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$.

Misalkan diambil vektor **b** =(b_1,b_2,b_3) di R^3 maka dinyatakan sebagai :

(b_1,b_2,b_3)=$p_1\mathbf{v}_1$+p_2 $\mathbf{v}_2$+p_3 $\mathbf{v}_3$ dengan p_i=(1,2,3) merupakan skalar. Bila diuraikan maka didapatkan :

(b_1,b_2,b_3)=p_1(1,2,1) +p_2(2,9,0) +p_3(3,3,4)

atau $b_1=p_1+2p_2+3p_3$

$b_2=2p_1+9p_2+3p_3$

$b_3=p_1+0p_2+4p_3$, yang merupakan susunan persamaan linear 'non homogen'. Susunan tersebut mempunyai penyelesaian =(p_1,p_2,p_3) bila determinannya $\neq 0$. $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ = -1. Ternyata |D| = -1$\neq 0$, jadi ada skalar p_1,p_2,p_3 yang tidak semuanya =0, sedemikian hingga **b** dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$,$\mathbf{v}_3$. Maka terbukti bahwa S merentang R_3.

5.8.2. Basis Ruang Vektor

Definisi :

Suatu ruang vektor **V** yang tidak ={0} disebut *finite dimensional* bila **V** memuat himpunan berhingga S = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,…….,$\mathbf{v}_r$} yang merupakan *basis*. Bila tidak ada himpunan S demikian maka **V** disebut ' infinite dimensional' {0} dapat juga dipandang sebagai 'finite dimensional' sekalipun tidak mempunyai basis dan tidak memuat himpunan bebas linear.

Contoh :

Himpunan {$\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$,$\mathbf{v}_3$}=S dengan $\mathbf{v}_1$=(1,2,1) ; $\mathbf{v}_2$=(2,9,0) ; dan $\mathbf{v}_3$ =(3,2,4) merupakan basis dari R_3. Jadi R_3 adalah 'finite dimensional'.

5.9. PERSAMAAN GARIS DAN PERSAMAAN BIDANG

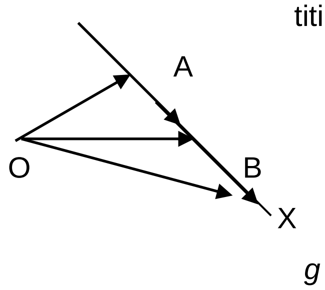
5.9.1. Persamaan Garis

Sebuah garis lurus akan tertentu bila diketahui 2 titik pada garis tersebut. Pandang ruang dimensi 3 (R^3). Misalkan titik $A(a_1,a_2,a_3)$ dan titik $B(b_1,b_2,b_3)$ terletak pada garis lurus *g*. Maka **OA** = $[a_1,a_2,a_3]$, **OB** = $[b_1,b_2,b_3]$ dan **AB** = $[b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3]$. Untuk setiap titik sebarang $X(x_1,x_2,x_3)$ pada garis *g* berlaku : **AX** = λ**AB** ($-\infty<\lambda<\infty$).

Jelas bahwa **OX** = **OA** + **AX**

= **OA** +λ**AB** atau $[x_1,x_2,x_3] = \lambda[b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3]$

disebut *persamaan vektoris garis lurus (1)* yang melalui 2 titik $A(a_1,a_2,a_3)$ dan titik $B(b_1,b_2,b_3)$.



Vektor **AB** (atau vektor-vektor lain $\neq 0$ yang terletak pada garis *g*, dengan perkataan lain, kelipatan dari **AB**) disebut *vektor arah garis lurus* tersebut. Jadi , bila garis lurus melalui titik $A(a_1,a_2,a_3)$ dengan vektor arah **a** = [a,b,c], persamaannya : $[x_1,x_2,x_3] = [a_1,a_2,a_3] + \lambda[a,b,c]$… *(2)* dengan ($-\infty<\lambda<\infty$).

Persamaan *(2)* dapat dinyatakan dengan :

$x_1 = a_1+\lambda a$, $x_2 = a_2+\lambda b$, $x_3 = a_3+\lambda c$ …… *(3)* yang disebut sebagai *persamaan parameter garis lurus*.

Kemudian jika $a \neq 0$, $b \neq 0$ dan $c \neq 0$ dan λ dieleiminasikan dari *(3)* maka diperoleh :

$\lambda = \dfrac{(x_1-a_1)}{a} = \dfrac{(x_2-a_2)}{b} = \dfrac{(x_3-a_3)}{c}$, atau bila dieliminasikan dari *(1)* yaitu $(b_1-a_1) \neq 0$, $(b_2-a_2) \neq 0$ dan $(b_3-a_3) \neq 0$ diperoleh :

$$\lambda = \frac{(x_1-a_1)}{(b_1-a_1)} = \frac{(x_2-a_2)}{(b_2-a_2)} = \frac{(x_3-a_3)}{(b_3-a_3)}.$$

Bentuk : $\dfrac{(x_1-a_1)}{a} = \dfrac{(x_2-a_2)}{b} = \dfrac{(x_3-a_3)}{c}$ merupakan *persamaan linier garis lurus* yang melalui titik $A(a_1,a_2,a_3)$ dengan vektor arah **a** = [a,b,c], dan

$\frac{(x_1 - a_1)}{(b_1 - a_1)} = \frac{(x_2 - a_2)}{(b_2 - a_2)} = \frac{(x_3 - a_3)}{(b_3 - a_3)}$ merupakan *persamaan linier garis lurus* yang melalui titik $A(a_1,a_2,a_3)$ dan titik $B(b_1,b_2,b_3)$.

Secara umum untuk R^n :

1). *Persamaan vektoris garis lurus* melalui titik titik $A(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ dan titik $B(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ adalah : $[x_1,x_2,\ldots,x_n] = [a_1,a_2,\ldots,a_n]+\lambda[b_1-a_1,b_2-a_2,\ldots,b_n-a_n]$ dan yang melalui titik $A(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ dengan vektor arah **p** = $[p_1,p_2,\ldots,p_n]$ adalah :

$[x_1,x_2, \ldots,x_n] = [a_1,a_2,\ldots,a_n] + \lambda[p_1, p_2, \ldots, p_n]$

2). *Persamaan parameter garis lurusnya* adalah :

$x_1 = a_1+\lambda(b_1- a_1)$, $x_2 = a_2+\lambda(b_2- a_2)$, …, $x_n = a_n+\lambda(b_n- a_n)$,

serta : $x_1 = a_1+\lambda p_1$, $x_2 = a_2+\lambda p_2$, …, $x_n = a_n+\lambda p_n$.

3). *Persamaan Linier garis lurusnya* adalah :

$\frac{(x_1 - a_1)}{(b_1 - a_1)} = \frac{(x_2 - a_2)}{(b_2 - a_2)} = \ldots = \frac{(x_n - a_n)}{(b_n - a_n)}$ bila $(b_i- a_i) \neq 0$ untuk setiap i = 1,2,…,n.

Serta : $\frac{(x_1 - a_1)}{p_1} = \frac{(x_2 - a_2)}{p_2} = \ldots = \frac{(x_n - a_n)}{p_n}$ bila $p_i \neq 0$ untuk setiap i = 1,2,…,n.

<u>Contoh :</u>

Persamaan garis lurus yang melalui titik (3,-1,0,1) dan titik (2,0,1,2) di dalam R^4 adalah :

Persamaan Vektoris : $[x_1,x_2,x_3,x_4] = [3,-1,0,1] + \lambda\ [(2-3),(0-(-1)),(1-0),(2-1)]$

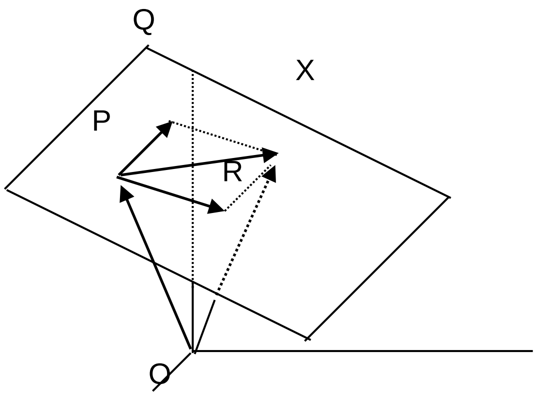
$= [3,-1,0,1] + \lambda\ [-1,1,1,1]$.

Persamaan Parameter : $x_1 = 3 - \lambda$, $x_2 = -1 + \lambda$, $x_3 = \lambda$, $x_4 = 1 + \lambda$.

Persamaan Linier : $\frac{(x_1 - 3)}{-1} = \frac{(x_2 + 1)}{1} = \frac{x_3}{1} = \frac{(x_4 - 1)}{1}$ atau $-x_1 - 3 = x_2 + 1 = x_3 = x_4 - 1$.

5.9.2 Persamaan Bidang Rata

Sebuah bidang rata akan tetentu bila diketahui tiga titik (yang tidak segaris) yang terletak padanya. Misalkan bidang rata diketahui 3 titik $P(p_1,p_2,p_3)$, $Q(q_1,q_2,q_3)$ dan $R(r_1,r_2,r_3)$.



Maka : **PQ** = $[q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3]$

PR = $[r_1 - p_1, r_2 - p_2, r_3 - p_3]$

Untuk setiap titik $X(x_1,x_2,x_3)$ pada bidang berlaku : **PX** = λ**PQ** + μ**PR**, dimana ($-\infty<\lambda<\infty; -\infty<\mu<\infty$), berdasarkan gambar diatas dapat diperoleh :

OX = **OP** + **PX** = **OP** + λ**PQ** + μ**PR** atau :

$[x_1,x_2,x_3] = [p_1,p_2,p_3] + \lambda[q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3] + \mu[r_1 - p_1, r_2 - p_2, r_3 - p_3]$ …. *(1)* adalah *persamaan vektoris bidang rata* melalui tiga titik. Kedua vektor **PQ** dan **PR** disebut *vektor-vektor arah bidang* (setiap 2 vektor yang tidak segaris dari bidang merupakan vektor-vektor arah bidang pula), sehingga persamaan vektoris bidang rata diketahui melalui titik $P(p_1,p_2,p_3)$ dengan vektor-vektor arah **u** = $[u_1,u_2,u_3]$ dan **v** = $[v_1,v_2,v_3]$ adalah :

$[x_1,x_2,x_3] = [p_1,p_2,p_3] + \lambda[u_1, u_2, u_3] + \mu[v_1, v_2, v_3]$ …… *(2)*

dan *persamaan parameternya :*

$x_1 = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1$ …… *(3)*

$x_2 = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2$ …… *(4)*

$x_3 = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3$ …… *(5)*

Kalau λ dan μ dieliminasikan dari persamaan *(3)* dan *(4)* diperoleh :

$$\lambda = \frac{v_2(x_1 - p_1) - v_1(x_2 - p_2)}{C} \text{ dan } \mu = \frac{u_1(x_2 - p_2) - u_2(x_1 - p_1)}{C}$$

dimana : $C = u_1v_2 - u_2v_1$ misalkan $u_1 \neq 0$. Kemudian kalau λ dan μ disubstitusikan ke persamaan *(5)* diperoleh :

$$x_3 - p_3 = \frac{v_2(x_1 - p_1) - v_1(x_2 - p_2)}{C} u_3 + \frac{u_1(x_2 - p_2) - u_2(x_1 - p_1)}{C} v_3$$

$= C(x_3 - p_3) - u_3 \{v_2(x_1 - p_1) - v_1(x_2 - p_2)\} - v_3 \{u_1(x_2 - p_2) - u_2(x_1 - p_1)\} = 0$

atau $(u_2v_3 - u_3v_2)(x_1 - p_1) + (v_1u_3 - u_1v_3)(x_2 - p_2) + C(x_3 - p_3) = 0$, misalkan :

$(u_2v_3 - u_3v_2) = A$, $(v_1u_3 - u_1v_3) = B$ dan $Ap_1+Bp_2+Cp_3 = -D$; akan diperoleh *persamaan linier bidang rata* $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$.

Contoh :

Persamaan bidang rata yang melalui 3 titik (0,0,1), (1,0,2), (0,1,4) adalah :

$[x_1,x_2,x_3] = [0,0,1] + \lambda[(1-0),(0-0),(2-1)] + \mu[(0-0),(1-0),(4-1)]$

$= [0,0,1] + \lambda[1,0,1] + \mu[0,1,3]$

Persamaan parameternya : $x_1 = \lambda$, $x_2 = \mu$, $x_3 = 1 + \lambda + 3\mu$, untuk mencari persamaan liniernya dieliminasikan nilai dari λ dan μ, sehingga diperoleh :

$x_3 = 1 + x_1 + 3x_2$ atau $x_1 + 3x_2 - x_3 + 1 = 0$.

Soal-soal Latihan :

1. Tentukan persamaan garis lurus *g* yang melalui titik A(2,3,1) dan sejajar BC bila B(4,-5,1) dan C(2,7,-3) !
2. Tentukanlah persamaan vektoris, persamaan parameter dan persamaan linier garis lurus yang melalui titik A(2,1,1) dengan vektor arah :
   i). [1,1,1], ii). [2,1,0] iii). [0,3,0]
3. Tentukanlah persamaan garis lurus *g* yang melalui titik P(2,3,4) dan tegak lurus bidang W : $[x_1,x_2,x_3] = [1,1,1] + \lambda[2,1,1] + \mu[1,2,1]$!
4. Tentukanlah persamaan bidang rata W yang melalui titik (0,0,0) dan garis lurus *g* : $[x_1,x_2,x_3] = [1,-1,0] + \lambda[2,1,1]$!
5. Tentukanlah persamaan bidang rata yang melalui (2,1,1) dan sejajar garis lurus *g* : $[x_1,x_2,x_3] = [2,1,0] + \lambda[1,1,1]$ serta *h* : $[x_1,x_2,x_3] = \lambda[2,3,1]$!
6. Tentukanlah persamaan bidang rata yang melalui (1,1,1) dan garis lurus *g* : $[x_1,x_2,x_3] = [1,2,1] + \lambda[1,0,2]$!
7. Tentukanlah persamaan bidang rata yang melalui garis lurus *g* : $[x_1,x_2,x_3] = [1,2,3] + \lambda[4,5,6]$ serta sejajar garis lurus *h* : $[x_1,x_2,x_3] = [7,8,10] + \lambda[1,2,3]$!
8. Tentukanlah persamaan garis lurus yang melalui titik (3,2,1) dan sejajar bidang rata $[x_1,x_2,x_3] = \lambda[1,2,3] + \mu[1,1,1]$ dan tegak lurus garis lurus $[x_1,x_2,x_3] = \lambda[-1,2,1]$!

BAB VI
TRANSFORMASI LINIER

6.1 KONSEPSI TRANSFORMASI LINIER

Misalkan terdapat dua buah himpunan A dan B. Kemudian dengan suatu aturan/cara tertentu *F*, dapat dikaitkan (digandengkan, dikawankan) setiap x $\in$ A dengan satu dan hanya satu y $\in$ B. Dapat dikatakan terdapat suatu fungsi *F* : A $\rightarrow$ B. (Himpunan A disebut ***Domain*** sedangkan himpunan B disebut ***Codomain*** dari fungsi *F*).

<u>*Catatan 1 :*</u>

Apabila himpunan A dan B merupakan himpunan bilangan riil R^1 (himpunan bilangan Kompleks C^1) atau himpunan bagiannya, cara/aturan pengaitan umumnya dirumuskan dalam suatu hubungan matematis.

<u>*Catatan 2 :*</u>

Fungsi *F :* $R^1 \rightarrow R^1$ dimana setiap x $\in$ R^1 dikaitkan dengan kuadratnya $\in$ R^1, atau $x \rightarrow x^2$ atau $F(x) = x^2$ untuk setiap x bilangan riil.

(Atau $y = x^2$).

Yang akan dibahas dalam bab ini adalah fungsi-fungsi dimana domain dan codomainnya merupakan ruang vektor, khususnya R^n, ruang vektor yang anggota-anggotanya n-tupel berurutan bilangan riil. Sehingga digunakan perkataan "*Transformasi*"/"*Mapping*"/ "*Pemetaan*" untuk mengganti kata *fungsi.*

Jika *V* dan *W* adalah ruang vektor dan *F* adalah sebuah fungsi yang mengasosiasikan sebuah vektor yang unik di dalam *W* dengan setiap vektor di dalam *V*, maka dapat dikatakan *F* ***memetakan*** *V* ke dalam *W,* dan dapat dituliskan *F* : $V \rightarrow W$. Lebih lanjut lagi jika *F* mengasosiasikan vektor ***w*** dengan vektor ***v***, maka dapat dituliskan :

w = *F(**v**)* dan dapat dikatakan bahwa ***w*** adalah *bayangan d*ari ***v*** di bawah *F.*

Untuk melukiskan, maka jika ***v*** = (x,y) adalah sebuah vektor di dalam R^2, maka rumus *F(**v**)* = (x,x+y,x-y) mendefinisikan sebuah fungsi yang memetakan R^2 ke dalam R^3, khususnya jika ***v*** = (1,1), maka x = 1 dan y = 1, sehingga bayangan dari ***v*** di bawah *F* adalah *F(**v**)* = (1,2,0).

Dapat dikatakan bahwa vektor (1,2,0) merupakan ***peta*** dari vektor ***v*** = (1,1), sebaliknya ***v*** = (1,1) merupakan ***prapeta*** dari vektor (1,2,0).

Contoh :

Diketahui suatu transformasi $F : R^3 \rightarrow R^3$ dengan rumus transformasi $F(\mathbf{v}) = (2x_1-x_2, x_2+x_3, x_3^2)$, untuk setiap $\mathbf{v} = (x_1,x_2,x_3) \in R^3$. Jika vektor $\mathbf{v}$ = (2,1,-1) maka $F(\mathbf{v}) = (2.2-1,1+(-1),(-1)^2) = (3,0,1)$.

Dapat dikatakan bahwa vektor (3,0,1) merupakan ***peta*** dari vektor ***v*** = (2,1,-1), sebaliknya ***v*** = (2,1,-1) merupakan ***prapeta*** dari vektor (3,0,1).

Definisi :

Jika $F : V \rightarrow W$ adalah sebuah fungsi dari ruang vektor V ke dalam ruang vektor W, maka F dinamakan ***transformasi linier (****linear transformation)* jika :

(i) $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$ untuk semua vektor ***u*** dan ***v*** di dalam *V.*

(ii) $F(k\mathbf{u}) = kF(\mathbf{u})$ untuk semua vektor ***u*** di dalam *V* dan semua skalar *k.*

Contoh :

Misalkan $F : R^2 \rightarrow R^3$ adalah fungsi yang didefinisikan oleh $F(v) = (x,x+y,x-y)$. Jika $u = (x_1,y_1)$ dan $v = (x_2,y_2)$, maka

$(u + v) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$, sehingga :

$F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (x_1+x_2, [x_1+x_2]+[y_1+y_2],[x_1+x_2]-[y_1+y_2])$

$= (x_1, x_1+y_1, x_1-y_1) + (x_2, x_2+y_2, x_2-y_2)$

$= F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$.

Juga, jika k adalah sebuah skalar, $k\mathbf{u} = k(x_1,y_1) = (kx_1,ky_1)$, sehingga :

$F(k\mathbf{u}) = (kx_1, k(x_1+y_1), k(x_1-y_1)) = (kx_1, kx_1+ky_1, kx_1-ky_1) =$

$= k (x_1, x_1+y_1, x_1-y_1) = kF(\mathbf{u})$.

Jadi *F* merupakan sebuah ***transformasi linier***.

Jika $F : V \rightarrow W$ adalah sebuah transformasi linier, maka untuk sebarang $\mathbf{v_1}$ dan $\mathbf{v_2}$ di dalam *V* dan sebarang skalar k_1 dan k_2, maka dapat diperoleh :

$F(k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2}) = F(k_1\mathbf{v_1}) + F(k_2\mathbf{v_2}) = k_1F(\mathbf{v_1}) + k_2F(\mathbf{v_2})$.

Demikian juga, jika $v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah vektor-vektor dalam *V* dan $k_1, k_2, \ldots, k_n$ adalah skalar, maka :

$F(k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \ldots + k_n\mathbf{v_n}) = k_1F(\mathbf{v_1}) + k_2F(\mathbf{v_2}) + \ldots + k_nF(\mathbf{v_n})$.

6.2 KERNEL DAN JANGKAUAN

Teorema :

Jika $F : V \rightarrow W$ adalah transformasi linier, maka :

a). $F(0) = 0$

b). $F(-\mathbf{v}) = - F(\mathbf{v})$ untuk semua **v** di dalam *V.*

*c). F(**v-w**) = F(**v**) - F(**w**)* untuk semua **v** dan **w** di dalam *V.*

Bukti :

Misalkan **v** adalah sebarang vektor di dalam *V.* Karena 0**v** = 0 maka dapat diperoleh : *F(0) = F(0**v**) = 0 F(**v**) = 0;* yang membuktikan a).

Juga *F(-**v**) = F((-1)**v**)* = (-1)*F*(**v**) = - *F*(**v**)*;* yang membuktikan b).

Akhirnya : **v – w** = **v** + (-1)**w** ; jadi :

F(**v** - **w**) = *F*(**v** + (-1)**w**) = *F*(**v**) + (-1) *F*(**w**) = *F*(**v**) **-** *F*(**w**).

Definisi :

Jika $F : V \rightarrow W$ adalah transformasi linier, maka himpunan vektor di dalam *V* yang dipetakan *F* ke dalam ***0*** dinamakan *kernel (atau **ruang nol**)* dari *F.* Himpunan tersebut dinyatakan dengan *ker(F)*. Himpunan semua vektor di dalam *W* yang merupakan bayangan dari *F* dari paling sedikit satu vektor di dalam *V* dinamakan ***jangkauan*** dari *F* ; himpunan tersebut dinyatakan oleh *R(F).*

Contoh :

Misalkan $F : V \rightarrow W$ adalah transformasi nol. Karena *F* memetakan tiap-tiap vektor ke dalam ***0***, maka *ker(F) = V.* Karena ***0*** adalah satu-satunya bayangan yang mungkin di bawah *F,* maka *R(F)* terdiri dari vektor nol.

Teorema :

Jika $F : V \rightarrow W$ adalah transformasi linier, maka :

a). Kernel dari *F* adalah sub ruang dari *V.*

b). Jangkauan dari *F* adalah sub ruang dari *W.*

Bukti :

a). Untuk memperlihatkan bahwa *ker(F)* adalah sub ruang, maka harus diperlihatkan bahwa *ker(F)* tersebut tertutup di bawah pertambahan dan perkalian skalar. Misalkan $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$ adalah vektor-vektor di dalam *ker(F)*, dan misalkan *k* adalah sebarang skalar, maka :

$F(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = F(\mathbf{v}_1) + F(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, sehingga $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ berada di dalam *ker(F).*

Juga : $F(k\mathbf{v}_1) = k\,F(\mathbf{v}_1) = k\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$, sehingga $k\mathbf{v}_1$ berada di dalam *ker(F).*

b). Misalkan $\mathbf{w}_1$ dan $\mathbf{w}_2$ adalah vektor di dalam jangkauan dari *F*. Untuk memperlihatkan bagian ini maka harus diperlihatkan bahwa: $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ dan $k\mathbf{w}_1$ berada di dalam jangkauan dari *F* untuk sebarang skalar *k*; yakni harus dicari vektor **a** dan **b** di dalam *V* sehingga :

$F(\mathbf{a}) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ dan $F(\mathbf{b}) = k\,\mathbf{w}_1$. Karena $\mathbf{w}_1$ dan $\mathbf{w}_2$ berada di dalam jangkauan *F*, maka ada vektor $\mathbf{a}_1$ dan $\mathbf{a}_2$ di dalam *V* sehingga berlaku :

$F(\mathbf{a}_1) = \mathbf{w}_1$ dan $F(\mathbf{a}_2) = \mathbf{w}_2$.

Misalkan $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ dan $\mathbf{b} = k\,\mathbf{a}_1$, maka :

$F(\mathbf{a}) = F(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = F(\mathbf{a}_1) + F(\mathbf{a}_2) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ dan

$F(\mathbf{b}) = F(k\,\mathbf{a}_1) = k\,F(\mathbf{a}_1) = k\,\mathbf{w}_1$.

6.3 TRANSFORMASI LINIER DARI R^n ke R^m

Dalam bagian ini akan dipelajari transformasi linier dari R^n ke R^m dan mendapatkan sifat-sifat geometrik dari transformasi linier dari R^n ke R^m .

Akan diperlihatkan bahwa tiap-tiap transformasi linier dari R^n ke R^m adalah transformasi matriks. Lebih tepat lagi akan diperlihatkan bahwa jika $F : R^n \to R^m$ adalah sebarang transformasi linier, maka dapat dicari sebuah matriks A yang berordo (*mxn*) sehingga *F* adalah perkalian oleh A. Untuk melihat hal ini dapat dimisalkan : $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ adalah merupakan basis standaruntuk R^n , dan misalkan A adalah matriks yang berordo (*mxn*) yang mempunyai : $F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_2), \ldots , F(\mathbf{e}_n)$ sebagai vektor-vektor kolomnya. (Dalam bagian ini dianggap bahwa semua vektor dinyatakan di dalam notasi matriks).

Misalkan, jika $F : R^2 \to R^2$ diberikan oleh : $F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$

maka :

$F(\mathbf{e}_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $F(\mathbf{e}_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ sehingga :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$

$F(\mathbf{e}_1)$ $F(\mathbf{e}_2)$

Secara lebih umum, jika :

$F(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$, $F(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$, … , $F(\mathbf{e}_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$ maka :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots.. (1)$$

$\uparrow \quad \uparrow \qquad \uparrow$

$F(\mathbf{e}_1)$ $F(\mathbf{e}_2)$ … $F(\mathbf{e}_n)$

Akan diperlihatkan bahwa transformasi linier $F : R^n \to R^m$ adalah perkalian oleh A. Untuk melihat hal tersebut, akan diperlihatkan bahwa:

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$, maka karena linieritas dari *F,* diperoleh : $F(\mathbf{x}) = x_1F(\mathbf{e}_1) + x_2F(\mathbf{e}_2) + \ldots + x_nF(\mathbf{e}_n)$. ....(*2*)

Sebaliknya :

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$= x_1F(\mathbf{e}_1) + x_2F(\mathbf{e}_2) + \ldots + x_nF(\mathbf{e}_n)$. ....(*3*).

Dengan membandingkan persamaan (*2*) dan (*3*) maka akan menghasilkan $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, yaitu *F* adalah perkalian oleh A.

Sedangkan matriks A pada persamaan (*1*) disebut sebagai *matriks standar untuk F.*

Contoh :

Carilah matriks standar untuk transformasi $F : R^3 \to R^4$ yang didefinisikan oleh : $F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$ **!**

Jawab :

$F(e_1) = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $F(e_2) = F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $F(e_3) = F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dengan menggunakan $F(e_1)$, $F(e_2)$ dan $F(e_3)$ sebagai vektor-vektor kolom, maka dapat diperoleh :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Sebagai pemeriksanaan dapat diperhatikan bahwa :

$$A\mathbf{x} = A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$$ yang sesuai dengan rumus yang diberikan untuk *F.*

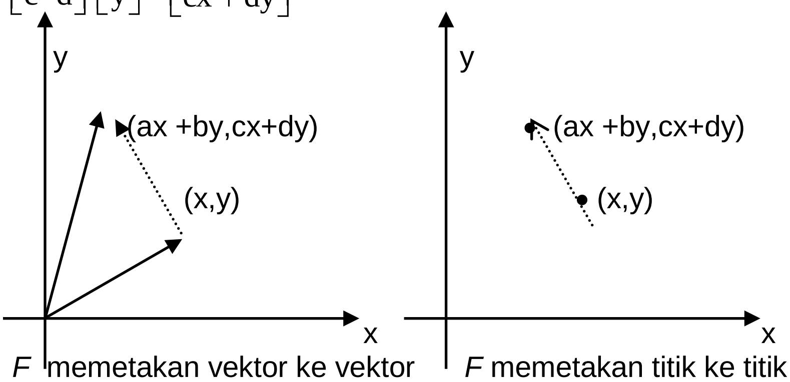
6.4 TRANSFORMASI LINIER BIDANG

Sebuah matriks A yang sebarang yang berordo (*mxn*) dapat dipandang sebagai matriks standar untuk transformasi linier yang memetakan basis standar untu R^n ke dalam vektor-vektor dari A.

Jadi : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ adalah matriks standar untuk transformasi linier dari R^3 ke R^2 yang memetakan :

$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ berturut-turut ke dalam $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$.

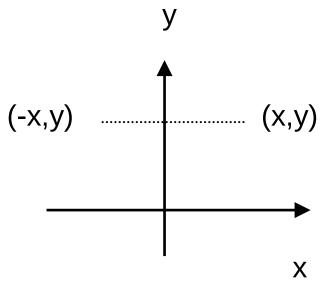
Dalam bagian lain dari bab ini akan diperlajari sifat geometrik dari *transformasi linier bidang,* yaitu transformasi linier dari R^2 ke R^2. Jika $F : R^2 \to R^2$ adalah sebuah transformasi linier dan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah matriks standar untuk *F*, maka : $F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$.



F memetakan vektor ke vektor   *F* memetakan titik ke titik

<u>*Contoh :*</u>

Misalkan $F : R^2 \to R^2$ adalah transformasi linier yang memetakan setiap titik ke dalam bayangan simetriknya terhadap sumbu-y, carilah matriks standar untuk *F* !



Jawab :

$F(\boldsymbol{e}_1) = F\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$; $F(\boldsymbol{e}_2) = F\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. Dengan menggunakan $F(\boldsymbol{e}_1)$ dan $F(\boldsymbol{e}_2)$ sebagai vektor-vektor kolom maka dapat diperoleh :

$A = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$. Sebagai pemeriksaan, maka : A**x** = $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}$. Sehingga perkalian oleh A akan memetakan titik (x,y) ke dalam bayangan simetriknya (-x,y) terhadap sumbu-y.

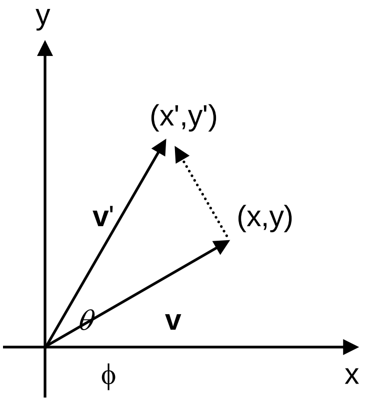
Terdapat lima jenis transformasi linier bidang yang mempunyai arti penting khusus yaitu *rotasi, refleksi, ekspansi, kompresi* dan *geseran.*

6.4.1 Rotasi

Misalkan θ adalah sebuah sudut tetap, dan misalkan $F : R^2 \to R^2$ adalah perkalian oleh matriks $A = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$.

Jika **v** adalah vektor **v** = $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, maka :

$F(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\cos\theta - y\sin\theta\\ x\sin\theta + y\cos\theta\end{bmatrix}$, secara geometrik, maka $F(\mathbf{v})$ adalah vektor yang dihasilkan jika **v** dirotasikan melalui sudut θ. Untuk melihat ini, maka misalkan ϕ adalah sudut di antara **v** dengan sumbu-x positif, dan misalkan $\mathbf{v}' = \begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ adalah vektor yang dihasilkan bila **v** dinotasikan melalui sudut θ.



Akan diperlihatkan bahwa **v**' = F(**v**). Jika r menyatakan panjangnya **v**, maka :

x = r cos ϕ dan y = r sin ϕ.

Demikian juga, karena **v**' mempunyai panjang yang sama seperti **v**, maka dapat diperoleh : x' = r cos ($\theta+\phi$) dan y' = r sin ($\theta+\phi$), maka :

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta+\phi) \\ r\sin(\theta+\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\phi - r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\sin\phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\mathbf{v} = F(\mathbf{v}).$$

Transformasi linier diatas dinamakan ***rotasi dari R^2 melalui sudut*** $\boldsymbol{\theta}$**.**

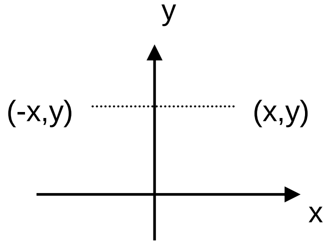
Sedangkan matriks standar untuk F adalah $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

6.4.2 Refleksi

Sebuah refleksi terhadap sebuah garis l melalui titik asal adalah sebuah transformasi yang memetakan setiap titik di dalam bidang ke dalam bayangan cerminnya terhadap l. Dapat diperlihatkan bahwa refleksi terhadap sumbu koordinat dan terhadap garis y = x.

Contoh :

Misalkan F : $R^2 \rightarrow R^2$ adalah transformasi linier yang memetakan setiap titik ke dalam bayangan simetriknya terhadap sumbu-y (refleksi terhadap sumbu-y) maka dapat dicari matriks standar untuk F dengan cara sebagai berikut :



Transformasi linier terhadap basis standar (**e_1 **dan** e_2**) adalah :

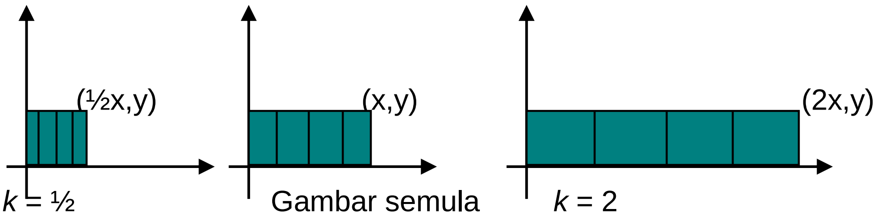
$F(\mathbf{e}_1) = F\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$; $F(\mathbf{e}_2) = F\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. Dengan menggunakan $F(\mathbf{e}_1)$ dan $F(\mathbf{e}_2)$ sebagai vektor-vektor kolom maka dapat diperoleh matriks standar untuk *reflesi terhadap sumbu-y* adalah $\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$. Sehingga perkalian oleh A terhadap $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ akan memetakan titik (x,y) ke dalam bayangan simetriknya (-x,y) terhadap sumbu-y.

Dengan cara yang sama dapat diperoleh matriks standar untuk *refleksi terhadap sumbu-x* adalah $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, sehingga perkalian oleh A terhadap $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ akan memetakan titik (x,y) ke dalam bayangan simetriknya (x,-y) terhadap sumbu-x, sedangkan matriks standar *refleksi terhadap garis x = y* adalah $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, sehingga perkalian oleh A terhadap $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ akan memetakan titik (x,y) ke dalam bayangan simetriknya (y,x) terhadap garis y = x.

6.4.3 Ekspansi dan Kompresi

Jika koordinat x dari setiap titik di dalam bidang dikalikan oleh sebuah konstanta k yang positif, maka efeknya adalah mengekspansikan atau mengkompresi setiap gambar bidang di dalam arah x. Jika $0 < k < 1$, maka hasilnya adalah sebuah *kompresi*, dan jika $k > 1$, maka hasilnya adalah sebuah *ekspansi*. Sehingga dapat dikatakan transformasi seperti itu sebuah ***ekspansi*** (atau ***kompresi***) ***di dalam arah x dengan faktor k.*** Demikian juga, jika koordinat y dari setiap titik dikalikan dengan sebuah konstanta k yang positif, maka akan didapatkan sebuah ***ekspansi*** (atau ***kompresi***) ***di dalam arah y***

dengan faktor k. Dapat diperlihatkan bahwa ekspansi dan kompresi sepanjang sumbu-sumbu koordinat adalah transformasi linier.



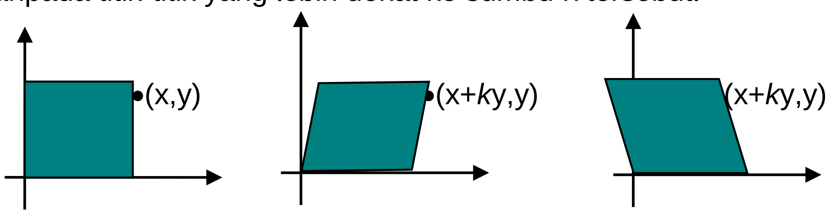
(Kompresi) *(Ekspansi)*

Jika $F : R^2 \rightarrow R^2$ adalah sebuah ekspansi atau kompresi di dalam arah x dengan faktor k, maka :

$F(\mathbf{e}_1) = F\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix}$; $F(\mathbf{e}_2) = F\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, sehingga matriks standar untuk F adalah : $\begin{bmatrix}k & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$. Demikian juga matriks standar untuk sebuah ekspansi atau kompresi di dalam arah y adalah : $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & k\end{bmatrix}$

6.4.4 Geseran

Sebuah geseran di dalam arah x dengan faktor k adalah sebuah transformasi yang menggerakkan setiap titik (x,y) sejajar dengan sumbu-x sebanyak ky ke kedudukan yang baru (x+ky,y). Di bawah transformasi seperti itu, maka titik-titik pada sumbu-x tidak digerakkan karena y=0. Akan tetapi, waktu makin menjauh dari sumbu-x, maka besarnya y bertambah, sehingga titik-titik yang lebih jauh dari sumbu-x bergerak sejarak yang lebih besar daripada titik-titik yang lebih dekat ke sumbu-x tersebut.



$k > 0$ $k < 0$

Sebuah geseran di dalam arah y dengan faktor k adalah sebuah transformasi yang menggerakkan setiap titik (x,y) sejajar dengan sumbu-y sebanyak kx ke kedudukan yang baru (x,y+kx). Di bawah transformasi seperti itu, maka titik-titik pada sumbu-y tetap diam dan titik-titik yang lebih jauh dari sumbu-y bergerak sejarak yang lebih besar daripada titik-titik yang lebih dekat ke sumbu-y tersebut.

Dapat diperlihatkan bahwa geseran adalah transformasi linier.

Jika $F : R^2 \to R^2$ adalah sebuah geseran di dalam arah x dengan faktor k, maka :

$F(\mathbf{e}_1) = F\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$; $F(\mathbf{e}_2) = F\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}$, sehingga matriks standar untuk F adalah : $\begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}$. Demikian juga matriks standar untuk sebuah geseran di dalam arah y dan faktornya k adalah : $\begin{bmatrix}1 & 0\\k & 1\end{bmatrix}$.

<u>*Catatan :*</u>

Perkalian dengan matriks Identitas (2x2) memetakan setiap titik ke dalam dirinya sendiri. Ini dinamakan ***transformasi identitas.*** Jika diinginkan, maka transformasi ini dapat dipandang sebagai rotasi melalui 0^0 ,atau sebagai geseran sepanjang salah satu sumbu dengan k = 0, atau sebagai kompresi atau ekspansi sepanjang salah satu sumbu dengan faktor k = 1.

Umumnya, jika transformasi-transformasi matriks :

$F_1(x) = A_1x,\ F_2(x) = A_2x,\ \dots,\ F_k(x) = A_kx$ dari R^n ke R^n dilakukan berurutan (mula-mula F_1, lalu F_2 , dan seterusnya), maka hasil yang sama dicapai dengan sebuah transformasi matriks tunggal $F(x) = Ax$, dimana $A = A_k \dots A_2A_1$.

<u>*Contoh :*</u>

a). Carilah sebuah transformasi matriks dari R^2 ke R^2 yang mula-mula menggeser dengan sebuah faktor sebesar 2 di dalam arah x dan kemudian merefleksiknya terhadap y=x !

b). Carilah sebuah transformasi matriks dari R^2 ke R^2 yang mula-mula merefleksikan terhadap y=x dan kemudian menggeser dengan sebuah faktor sebesar 2 di dalam arah x !

<u>*Jawab :*</u>

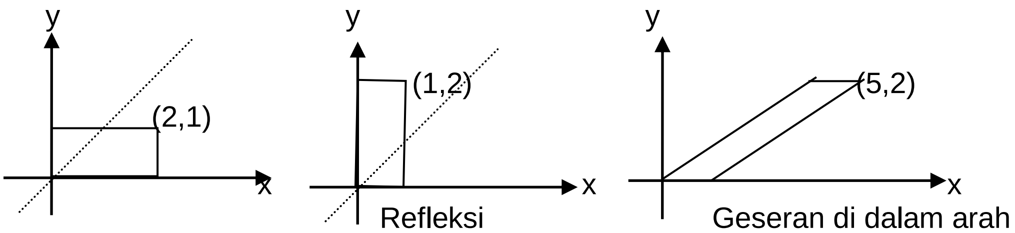
a). Matriks standar untuk geseran ke arah x dengan faktor sebesar 2 adalah :

$A_1 = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$ dan untuk refleksi terhadap garis y=x adalah : $A_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$,

sehingga matriks standar untuk geseran diikuti oleh refleksi adalah :

$$A_2A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jika diilustrasikan secara geometrik adalah sebagai berikut :



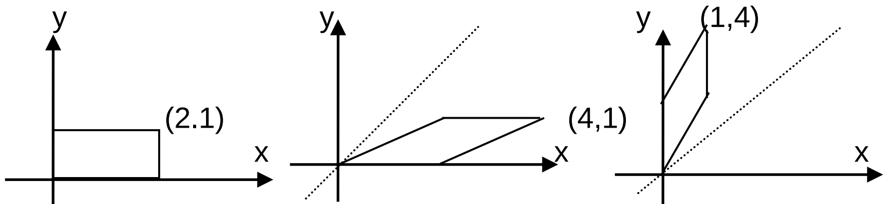
Refleksi terhadap y=x

Geseran di dalam arah x dengan k = 2

b). Sedangkan matriks standar untuk refleksi diikuti oleh geseran adalah :

$$A_1A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jika diilustrasikan secara geometrik adalah sebagai berikut :



Geseran di dalam arah x dengan k = 2

Refleksi terhadap garis y = x.

Soal-soal Latihan :

1. Carilah matriks standar dari setiap operator linier berikut :

a) $F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$ b) $F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

c) $F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 5x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ d) $F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 7x_2 \\ -8x_3 \end{bmatrix}$

e) $F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$ g) $F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2 + x_3 \\ -x_1 \end{bmatrix}$

2. Carilah matriks standar untuk transformasi linier bidang $F : R^2 \rightarrow R^2$ yang memetakan sebuah titik (x,y) ke dalam:

   a) refleksinya terhadap garis y = -x. b) refleksi melalui titik asal.

3. Carilah matriks yang merotasikan sebuah titik (x,y) yang mengelilingi titik asal melalui :

   a) 45^o b) 90^o c) 180^o d) 270^o e) -30^o

4. Perlihatkan bahwa jika $F : R^2 \rightarrow R^2$ adalah perkalian oleh sebuah *matriks elementer*, maka transformasi tersebut adalah salah satu dari antara yang berikut ini :

   a) Geseran sepanjang sebuah sumbu koordinat.
   b) Refleksi terhadap garis y = x.
   c) Kompresi sepanjang sebuah sumbu koordinat.
   d) Ekspansi sepanjang sebuah sumbu koordinat.
   e) Refleksi sepanjang sebuah sumbu koordinat.
   f) Kompresi atau ekspansi sepanjang sebuah sumbu koordinat yang diikuti oleh refleksi terhadap sumbu koordinat.

5. Gambarlah bayangan sebuah bujur sangkar dengan titik-titik sudut $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$, $P_3(0,1)$ dan $P_4(1,1)$ di bawah perkalian oleh : $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$!

BAB VII
NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

7.1 KONSEPSI EIGEN

Terdapat sebuah operator linier $F : V \rightarrow V$ sehingga dapat ditentukan suatu skalar λ dimana berlaku persamaan $F\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ mempunyai pemecahan yang tak nol.

Salah satu arti dari perkataan *"eigen"* di dalam Bahasa Jerman adalah "asli", ("proper"); nilai eigen dinamakan juga "nilai asli" ("proper value"), "nilai karakteristik" ("characteristic value") atau "akar laten" ("laten root").

Definisi :

Jika A suatu matriks bujursangkar yang berordo (nxn), maka sebuah vektor yang tak nol **x** di dalam R^n dinamakan sebuah *vektor eigen (eigenvector)* dari matriks A jika A**x** adalah kelipatan skalar dari vektor **x**; yaitu : $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan *nilai eigen (eigen value)* dari A dan **x** dikatakan sebuah *vektor eigen* yang **bersesuaian** dengan λ.

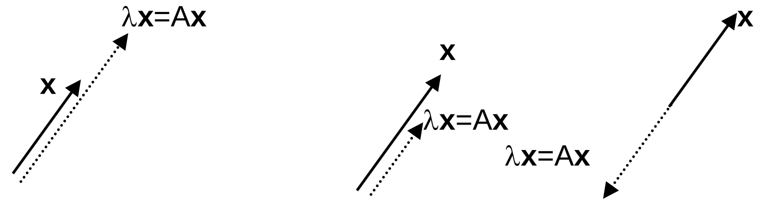
Contoh :

Diketahui vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 3$ karena :

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{x}.$$

7.2 NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Nilai eigen dan vektor eigen mempunyai tafsiran geometris yang berguna di dalam R^2 dan R^3. Jika λ adalah nilai eigen dari A yang bersesuaian dengan **x** maka $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, sehingga perkalian oleh A akan membesarkan **x**, mengkontraksi **x**, atau membalik arah **x** yang bergantung pada nilai λ.



(a) Dilatasi (pembesaran) $\lambda>1$ (b) Kontraksi $0<\lambda<1$ (c) Pembalikan arah $\lambda<0$

Untuk mencari nilai eigen dari sebuah matriks A yang berordo (nxn) maka dapat dituliskan kembali A**x** = λ**x,** sebagai A**x** = λI_n**x** (karena yang diketahui adalah sebuah matriks A, maka penyelesaiannya juga harus secara operasi matriks sehingga ruas kiri adalah suatu perkalian matriks maka ruas kanannya pun juga harus berupa perkalian matriks sehingga perlu dikalikan dengan sebuah matriks I_n dimana tidak akan merubah nilai dari λ**x**)**,** sehigga secara ekivalen A**x** = λI_n**x** dapat dinyatakan sebagai λI_n **x** - A**x** = 0 atau (λI_n – A)**x** = 0.

Supaya λ adalah nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan (λI_n – A)**x** = 0, akan tetapi menurut *teorema :*

Jika A adalah sebuah matriks yang berordo (nxn), maka pernyataan berikut ini ekivalen satu sama lainnya :

a). A dapat dibalik.

b). A**x** = **0** hanya mempunyai satu pemecahan trivial.

c). A ekivalen baris dengan I_n.

d). A**x** = **b** konsisten untuk tiap-tiap matriks **b** yang berordo (nx1).

e). det(A) $\neq$ 0.

f). A mempunyai rank n.

g). Vektor-vektor baris dari A bebas linier.

h). Vektor-vektor kolom dari A bebas linier.

maka persamaan (λI_n – A)**x** = 0 akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika : det(λI_n – A) = 0.

Ini dinamakan ***persamaan karakteristik*** dari A; skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A. Jika diekspansikan, maka determinan dari (λI_n – A) adalah sebuah polinomial di dalam λ yang dinamakan ***polinomial karakteristik*** dari A.

Teorema :

Jika A adalah sebuah matriks yang berordo (nxn), maka pernyataan-pernyataan berikut ini ekivalen satu dengan lainnya :

a. λ adalah nilai eigen dari A.

b. Sistem Persamaan (λI_n – A)**x** = **0** mempunyai pemecahan yang tak trivial.

c. Ada sebuah vektor tak nol **x** di dalam R^n sehingga A**x** = λ**x.**

d. λ adalah pemecahan riel dari persamaan karakteristik det(λI_n – A) = 0.

Setelah dapat menentukan nilai karakteristik (nilai eigen) maka timbul persoalan untuk menentukan vektor eigennya. Vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan sebuah nilai eigen λ adalah vektor tak nol yang memenuhi A**x** = λ**x**. Secara ekivalen maka vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah vektor tak nol di dalam ruang pemecahan dari $(\lambda I_n - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dapat dikatakan ruang pemecahan ini sebagai ***ruang eigen (eigen space)*** yang bersesuaian dengan λ.

Contoh :

Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$!

Jawab :

Diketahui : $(\lambda I_n - A) = \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda-3) & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$

maka *polinomial karakteristik* dari A adalah :

$\det(\lambda I_n - A) = \det\begin{bmatrix} (\lambda-3) & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda-3).\lambda - (-2).1 = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$

Sedangkan *persamaan karakteristik* dari A adalah : $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, dan pemecahan dari persamaan karakteristik ini adalah $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 2$ yang merupakan *nilai karakteristik* atau *nilai eigen*.

Menurut definisi $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ **adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika** x **adalah pemecahan tak trivial dari** $(\lambda I_n - A)\, x = 0$**, sehingga diperoleh :** $\begin{bmatrix} (\lambda-3) & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$**.**

*) Untuk $\lambda = 1$, akan diperoleh :

$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, dan jika dilakukan perkalian matriks diperoleh Sistem Persamaan Linier Homogen sebagai berikut :

$-2x_1 - 2x_2 = 0$

$x_1 + x_2 = 0$

Pemecahan yang tak trivial dari SPL Homogen diatas adalah :

$x_1 = -x_2$, misalkan $x_2 = a$, maka $x_1 = -a$.

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan λ = 1 adalah vektor-vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} -a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, sehingga $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan λ = 1.

*) Dengan cara yang sama untuk λ = 2, akan diperoleh :

$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, dan jika dilakukan perkalian matriks diperoleh Sistem Persamaan Linier Homogen sebagai berikut :

$-x_1 - 2x_2 = 0$

$x_1 + 2x_2 = 0$

Pemecahan yang tak trivial dari SPL Homogen diatas adalah : $x_1 = -2x_2$, misalkan $x_2 = t$, maka $x_1 = -2t$. Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan λ = 2 adalah vektor-vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, sehingga $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan λ = 2.

<u>*Soal-soal Latihan :*</u>

1. Tentukanlah persamaan karakteristik dari matriks-matriks berikut ini :

   a). $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ b). $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ c). $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ d). $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,

   e). $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ f). $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ g). $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ h). $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

2. Carilah nilai eigen dari matriks-matriks di dalam soal nomor 1 !
3. Carilah basis-basis untuk ruang eigen dari matriks-matriks di dalam soal nomor 1 !
4. Carilah akar-akar karakteristik dan vektor-vektor karakteristik yang bersesuaian dengan matriks berikut ini :

   a). $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ b). $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

5. Carilah semua akar karakteristik dari $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ dan basis dari masing-masing ruang eigen dari matriks tersebut !