IUT Robert Schuman
Institut universitaire de technologie
Département **informatique**
Université de Strasbourg

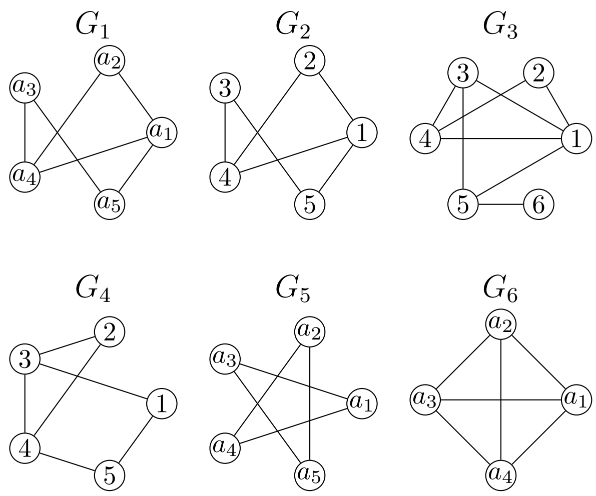
M23 : Exercices

2022/23

1 Notion de graphe

Exercice 1 : Tour des notions élémentaires

Soient les graphes donnés ci-dessous :



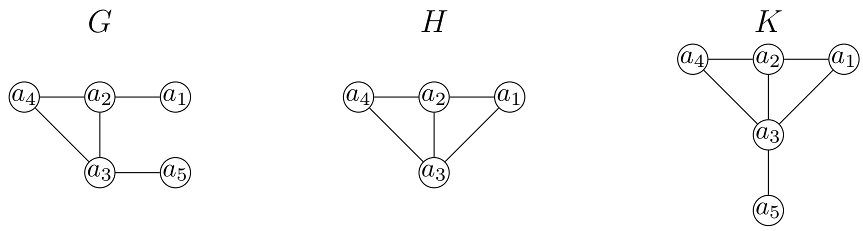
1) Pour chacun d'entre eux, donner leur ordre, le nombre d'arêtes, le degré de chaque sommet et leurs voisins et dire s'ils sont réguliers.
2) Donner le graphe complémentaire de chacun de ces graphes.
3) Donner les couples de graphes dont l'un est sous-graphe de l'autre.

4) Lesquels sont isomorphes entre eux ? Donner un isomorphisme le cas échéant.

5) Combien d'isomorphismes existe-t-il entre les couples de graphes isomorphes ?

Exercice 2 : (Iso)morphismes

1) Donner un épimorphisme de G sur H, un monomorphisme de G dans K et un morphisme qui n'est ni injectif, ni surjectif de G vers H et de G vers K :



2) Prouver que si un graphe a un sommet de degré d il ne peut pas être isomorphe à un graphe qui n'en contient pas.

3) Donner, si possible, deux graphes isomorphes pour lesquels il existe plusieurs isomorphismes.

4) Donner, si possible, deux graphes isomorphes d'ordre supérieur à 1 pour lesquels il n'existe qu'un seul isomorphisme.

5) Donner, si possible, deux graphes 2-réguliers de même ordre qui ne sont pas isomorphes.

6) Donner, si possible, deux graphes 3-réguliers connexes de même ordre qui ne sont pas isomorphes.

7) Pour quelles valeurs de $n \geqslant 1$, le graphe K^n est-il isomorphe au graphe C^n ?

8) Donner un graphe qui est isomorphe à son complémentaire.

Exercice 3 : Degrés

1) Prouver qu'il ne peut y avoir qu'un nombre pair de sommets de degré impair dans un graphe.

2) Prouver que pour un graphe d'ordre supérieur ou égal à deux, au moins deux sommets ont même degré.

Exercice 4 : Algorithme d'isomorphisme

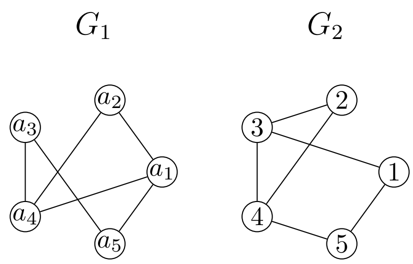
Une manière brutale de tester si deux graphes G et H sont isomorphes est de tester toutes les bijections de sommets, les unes après les autres, jusqu'à ce qu'on en trouve une qui induise un isomorphisme. Dans le cas où les graphes

ne sont pas isomorphes, bien sûr, on peut ne pas en trouver.
Il faut se donner un ordre sur les sommets de G et de H ce qui permet d'avoir un ordre naturel sur les bijections de sommets qui est l'ordre lexicographique des images.
Par exemple, si $S_G = (1, 2, 3, 4)$ et $S_H = (a, b, c, d)$, une bijection φ est donnée par le vecteur $(\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \varphi(4))$. Donc le vecteur (b, d, c, a) correspond à la bijection :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & b \\ 2 & \longmapsto & d \\ 3 & \longmapsto & c \\ 4 & \longmapsto & a \end{array}$$

et $(b, d, c, a) > (b, d, a, c)$ pour l'ordre lexicographique (*cf.* M11).

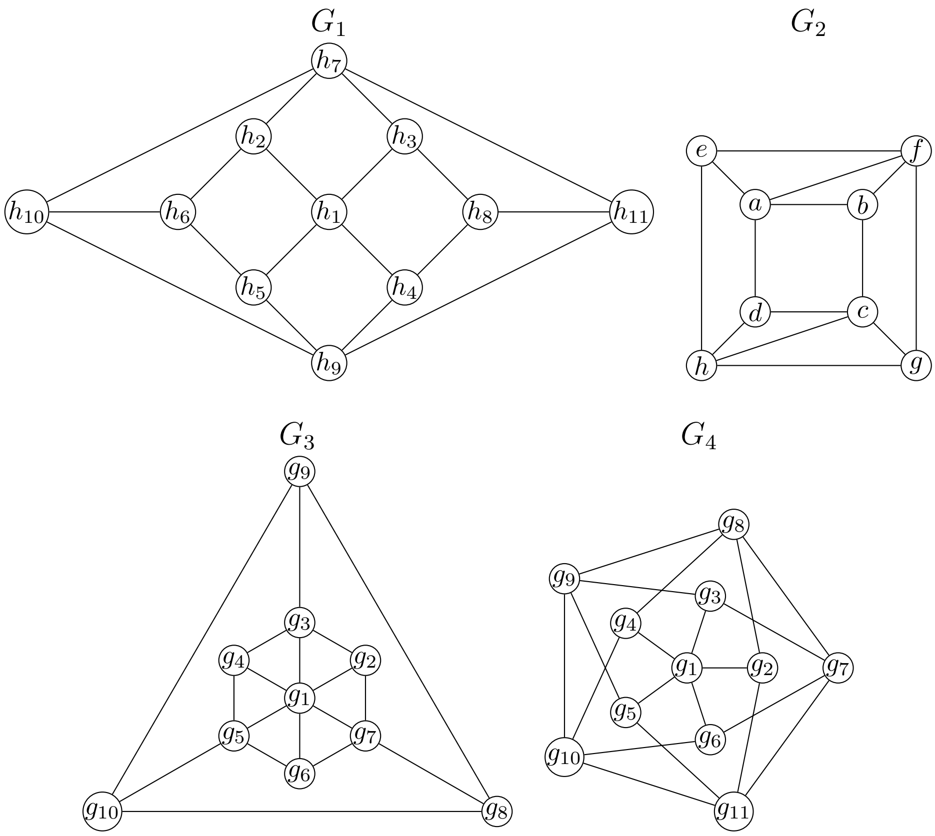
1) Pour des graphes d'ordre n, combien existe-t-il de bijections sur les sommets ?
2) En suivant l'algorithme, combien faut-il tester de bijections de sommets avant de trouver un isomorphisme entre les graphes G_1 et G_2 :



3) Donner un exemple de couple de graphes isomorphes pour lesquels l'isomorphisme est trouvé à la première bijection possible.
4) Donner un exemple de couple de graphes d'ordre supérieur à 2 pour lesquels l'isomorphisme est trouvé en testant la dernière bijection possible.
5) Admettons qu'il faille une microseconde pour tester une bijection sur des graphes d'ordre 100. Combien de temps prendrait l'algorithme pour trouver un isomorphismes dans le pire cas ?

2 Coloration

Exercice 5 : Nombre chromatique
1) Donner le nombre chromatique des graphes suivants :



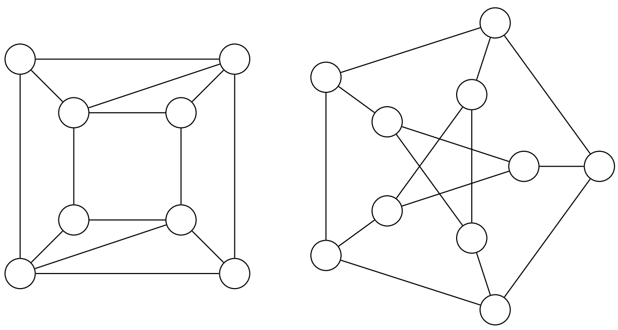
2) Quel est le nombre chromatique de C^n, K^n, d'un arbre ?

Exercice 6 : Couleurs

Prouver que 3 couleurs ne suffisent pas pour colorier une carte.

Exercice 7 : Algorithme glouton

1) Prouver qu'il existe toujours une numérotation des sommets d'un graphe permettant à l'algorithme glouton de trouver une coloration optimale.
2) Numéroter les sommets du graphe suivant pour que l'algorithme glouton permette de trouver le nombre chromatique :

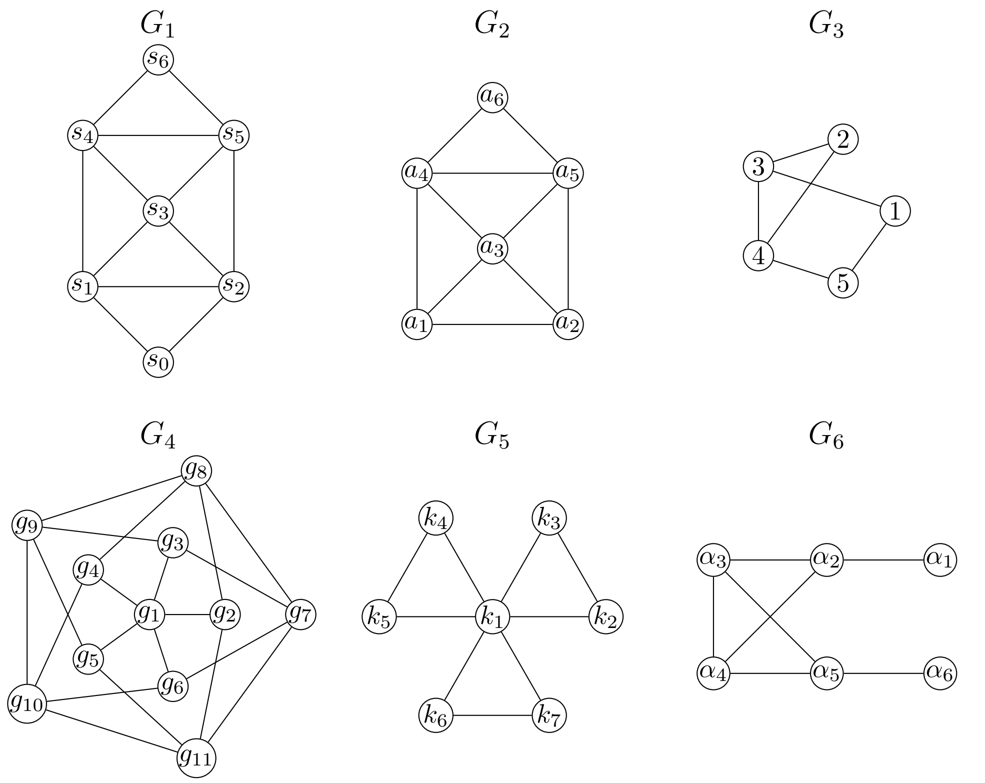


3) Trouver un graphe biparti d'ordre $2n$ tel qu'il existe une numérotation des sommets qui utilise n couleurs lorsqu'on lui applique le théorème glouton.

Exercice 8 : Graphes bipartis complets
Quel est le nombre d'arêtes de $K^{n,m}$?

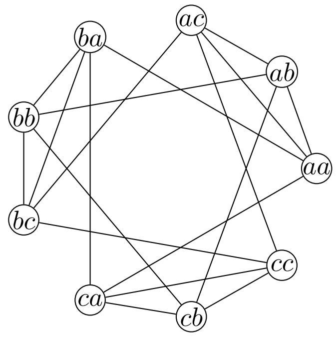
3 Parcours dans un graphe

Exercice 9 : Euler et Hamilton
1) Prouver qu'une chaîne fermée élémentaire est forcément un cycle.
2) Un graphe peut-il être à la fois eulérien et semi-eulérien ? Un graphe peut-il être à la fois hamiltonien et semi-hamiltonien ?
3) Quand est-ce que les graphes $K^{n,m}$ sont eulériens ? Hamiltoniens ?
4) Les graphes suivants sont-ils (semi-)eulériens et/ou (semi-)hamiltoniens ?



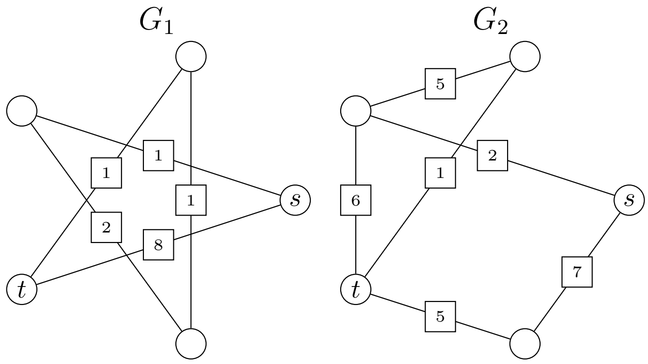
Exercice 10 : Algorithme de décomposition en cycles
1) Prouver que si tous les sommets d'un graphe sont de degré pair, alors, quel que soit le sommet de degré supérieur à 0, il existe un cycle dans ce graphe contenant ce sommet.

2) Utiliser l'algorithme de décomposition en cycles pour trouver un cycle eulérien dans le graphe suivant (graphe de Hamming $H(2,3)$) :



Exercice 11 : Distance

Quelle est la distance et quelle est la distance pondérée entre les sommets s et t dans les graphes suivants :



Exercice 12 : Maille, rayon et diamètre

La *maille* est la longueur du plus petit cycle du graphe. Si le graphe est acyclique, la maille est de $+\infty$.

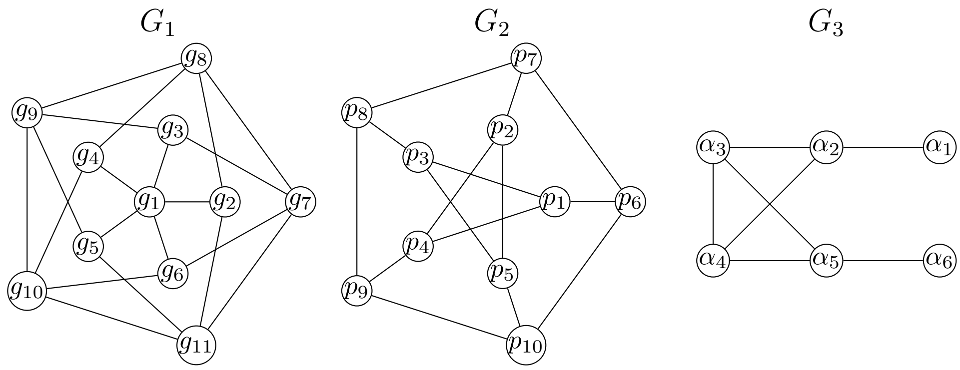
L'*excentricité* d'un sommet est la distance maximale entre ce sommet et n'importe quel autre sommet du graphe.

Le *rayon* est la plus petite excentricité

Le *diamètre* est la plus grande excentricité. C'est donc la plus longue distance possible entre deux sommets.

1) Donner la maille, le rayon et le diamètre de K^n pour $n \geqslant 2$, de $K^{n,m}$ pour n et m supérieurs ou égaux à 2 et C^n pour $n \geqslant 3$.

2) Donner le diamètre, le rayon et la maille de chacun des graphes suivants :

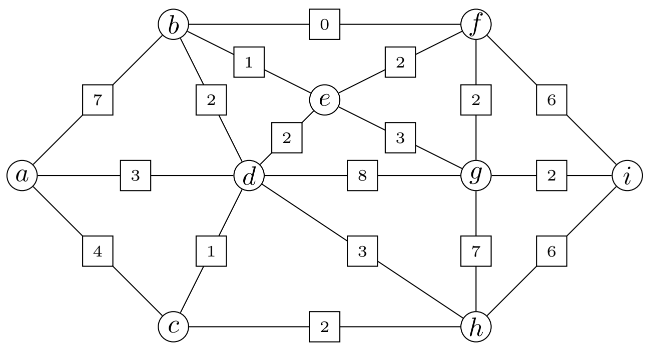


3) Donner un graphe de diamètre n et de maille 3.
4) Quel est le diamètre minimum d'un graphe de maille n ?
5) Notons $diam(G)$ le diamètre d'un graphe G et $ray(G)$ son rayon. Prouver que :

$$ray(G) \leqslant diam(G) \leqslant 2ray(G)$$

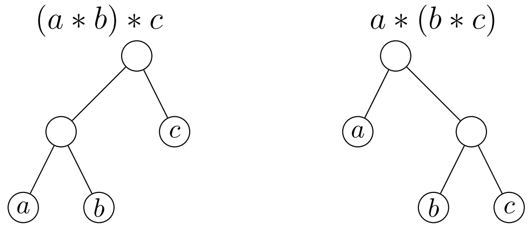
Donner un exemple de graphe réalisant les cas d'égalité.

Exercice 13 : Dijkstra
Utiliser l'algorithme de Dijkstra au départ du sommet a dans le graphe suivant :



4 Arbres

Exercice 14 : Arbres associatifs
Les *arbres associatifs* à n feuilles sont des arbres binaires enracinés qui représentent les parenthésages possibles d'une opération binaire sur n éléments. Par exemple, pour 3 éléments a, b et c nous avons les arbres associatifs suivants :

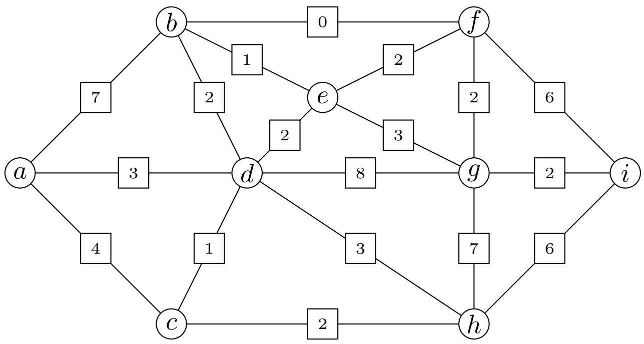


Remarque : pour les arbres binaires, en tant que structure de donnée, il y a des notions de gauche et de droite, de sommet parent...
Donner tous les graphes binaires enracinés avec pour feuilles a, b, c et d et donner les parenthésages associés.

Exercice 15 : Arbre syntaxique
Donner l'arbre syntaxique associé à l'expression algébrique suivante :

$$a + (-b) \times (c + d)$$

Exercice 16 : Prim et Kruskall
Sur le graphe suivant :



1) Construire un arbre couvrant de poids minimal en utilisant l'algorithme de Prim au départ de a.
2) Construire un arbre couvrant de poids minimal en utilisant l'algorithme de Prim au départ de i.
3) Utiliser l'algorithme de Kruskall pour trouver un arbre couvrant de poids minimal.