M23 : Théorie des Graphes

M. Zimmermann

IUT Robert Schuman, Département Informatique

2022/23

Chapitre 2

Chromatisme

Définition : Coloration

Soit un graphe $G = (S, A)$ et C un ensemble (vu comme un ensemble de « couleurs »).
Une *coloration* de G est une application $c : S \longrightarrow C$ vérifiant :

$$\forall (s,t) \in S^2 : st \in A \Longrightarrow c(s) \neq c(t)$$

(pour les plus lents, deux sommets voisins doivent avoir une couleur différente).
Si une coloration existe avec $|C| = k$, on dit que G est *k-coloriable*.
Le plus petit k pour lequel G est k-coloriable est appelé *nombre chromatique* de G et est noté $\chi(G)$ (avec un χ comme χromatique).

Algorithme : algorithme glouton de coloriage

Données : Un graphe G et un ensemble de couleurs $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ (où $n = |G|$).

Donner un ordre sur les sommets

Pour chaque sommet s de G :

  Donner la plus petite couleur possible à s (la plus petite disponible qui n'est pas une couleur attribuée à un sommet voisin de s)

Retourner la coloration

Remarques :

1) Cet algorithme est un algorithme glouton qui ne donne pas forcément une coloration qui est optimale (c'est-à-dire utilisant un nombre de couleurs égal à $\chi(G)$).
2) D'autres algorithmes peuvent donner des solutions optimales à des problèmes particuliers (Kruskall et Prim par exemple).

Remarques :

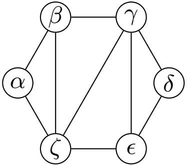
3) On verra en TD que cet algorithme peut donner une coloration optimale si les sommets ont un ordre particulier.

4) On a donc un algorithme théorique qui pourrait donner le nombre chromatique : on teste tous les ordres possibles sur les sommets, on applique l'algorithme glouton et on prend le minimum des couleurs utilisées (sachant qu'il existe au moins un ordre qui donne un coloriage optimal d'après la remarque précédente). Malheureusement, il y a $n!$ ordres possibles et, par conséquent, l'algorithme est inapplicable en pratique.

Coloriage glouton

Couleurs : {rouge, vert, bleu, orange, jaune}

État initial



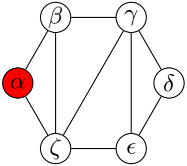
Liste des sommets coloriés :

Nombres de couleurs utilisées : 0

Coloriage glouton

Couleurs : {rouge, vert, bleu, orange, jaune}

Sommet α colorié en rouge



Liste des sommets coloriés :

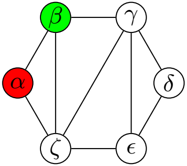
α rouge

Nombres de couleurs utilisées : 1

Coloriage glouton

Couleurs : {rouge, vert, bleu, orange, jaune}

Sommet β colorié en vert



Liste des sommets coloriés :

α rouge

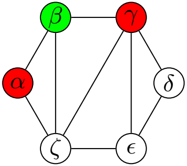
β vert

Nombres de couleurs utilisées : 2

Coloriage glouton

Couleurs : {rouge, vert, bleu, orange, jaune}

Sommet γ colorié en rouge



Liste des sommets coloriés :

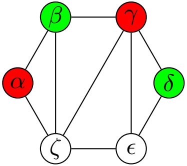
α	rouge
β	vert
γ	rouge

Nombres de couleurs utilisées : 2

Coloriage glouton

Couleurs : {rouge, vert, bleu, orange, jaune}

Sommet δ colorié en vert



Liste des sommets coloriés :

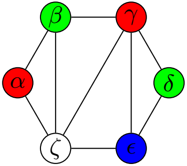
α	rouge
β	vert
γ	rouge
δ	vert

Nombres de couleurs utilisées : 2

Coloriage glouton

Couleurs : {rouge, vert, bleu, orange, jaune}

Sommet ϵ colorié en bleu



Liste des sommets coloriés :

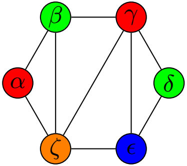
α	rouge
β	vert
γ	rouge
δ	vert
ϵ	bleu

Nombres de couleurs utilisées : 3

Coloriage glouton

Couleurs : {rouge, vert, bleu, orange, jaune}

Sommet ζ colorié en orange



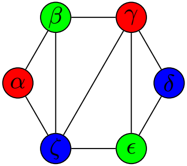
Liste des sommets coloriés :

α	rouge
β	vert
γ	rouge
δ	vert
ϵ	bleu
ζ	orange

Nombres de couleurs utilisées : 4

Nombre chromatique

Le coloriage glouton n'a pas donné un coloriage optimal.
Le nombre chromatique du graphe est : 3.



On ne peut utiliser moins de couleur parce que K^3 est un sous-graphe.

Section 1

Bipartisme

Définition : Graphe Biparti

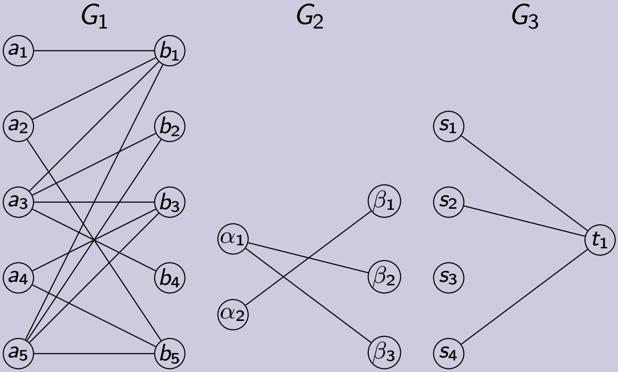
Soit un graphe $G = (S, A)$.
Si $\chi(G) = 2$, on dit que G est un *graphe biparti*.
Un graphe biparti tel que tous les sommets de couleurs distinctes sont voisins est dit *graphe biparti complet*.
Si le graphe biparti complet a n sommets de la première couleur et m sommets de la deuxième couleur, on le note $K^{n,m}$.

Remarque :

Il revient au même de dire que S admet une partition (*cf.* M11) en deux sous-ensembles S_1 et S_2 et que deux sommets du même sous-ensemble ne sont jamais voisins.
Le graphe est biparti complet si tous les sommets de S_1 sont voisins à tous les sommets de S_2.

Graphes bipartis

Exemples :



Graphes bipartis complets

Exemples :

$K^{4,1}$ $K^{3,3}$ $K^{2,4}$