M23 : Théorie des Graphes

M. Zimmermann

IUT Robert Schuman, Département Informatique

2022/23

Chapitre 1

Notion de graphe

Section 1

Graphes et exemples

Définition : Graphe

Un *graphe* $G = (S, A)$ est la donnée :

1. d'un ensemble de *sommets* S ;
2. d'un ensemble d'*arêtes* A où une arête est un ensemble de deux éléments distincts de S.

Pour plus de commodité, quand les noms des ensembles ne sont pas explicitement donnés, on écrira $S(G)$ ou S_G l'ensemble des sommets d'un graphe et $A(G)$ ou A_G pour l'ensemble des arêtes d'un graphe. Si $\{s, t\}$ est une arête de G, on pourra la noter st pour plus de concision.
On se permettra l'abus de notation $s \in G$ plutôt que $s \in S$ ainsi que $a \in G$ plutôt que $a \in A$.

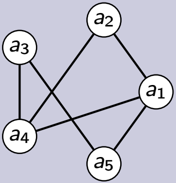
Exemples :

1) Les ensembles :

$$S_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$A_1 = \{\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_4\}, \{a_1, a_5\}, \{a_2, a_4\}, \{a_3, a_4\}, \{a_3, a_5\}\}$$

définissent un graphe $G_1 = (S_1, A_1)$ qu'on peut aisément représenter par :



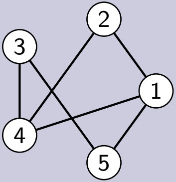
Exemples :

2) Les ensembles :

$$S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A_2 = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$$

définissent un (nouveau ?) graphe $G_2 = (S_2, A_2)$ qu'on peut aisément représenter par :



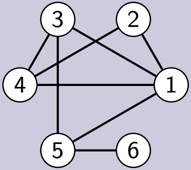
Exemples :

3) Les ensembles :

$$S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

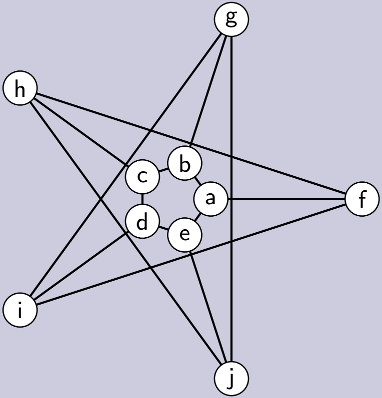
$$A_3 = \big\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{5,6\}\big\}$$

définissent un graphe $G_3 = (S_1, A_1)$ qu'on peut aisément représenter par :



Exemples :

4) Le graphe de Petersen :



Attention!

Il ne faut pas confondre un graphe et sa représentation (ou plutôt une de ses nombreuses représentations possibles).
De même, il n'y a pas de point ou de segment mais bien des sommets et des arêtes. On peut remarquer sur la représentation graphique du graphe de Petersen qu'il y a des « points d'intersection » qui ne sont pas des sommets.

Définition : Sous-graphe

Soient deux graphes $G = (S, A)$ et $H = (T, B)$.
On dit que H est un *sous-graphe* de G lorsque $T \subset S$ et $B \subset A$.
On le note $H \subset G$.

Exemple :

Le graphe G_2 est un sous-graphe de G_3 :

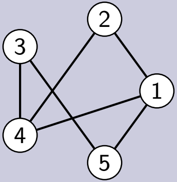
$$S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

et

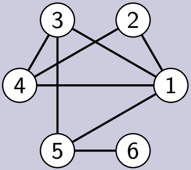
$$A_2 = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$$

$$\subset$$

$$A_3 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{5, 6\}\}$$



$\subset$



Définition : Ordre

On appelle *ordre* d'un graphe $G = (S, A)$ le cardinal de S (*i.e.* le nombre de sommets).
On le note $\left|G\right|$ ou $o(G)$.
Soit, avec les notations de M11 : $\left|G\right| = \left|S\right|$
La notation $\|G\|$ désigne quant à elle le nombre d'arêtes.
Soit, avec les notations de M11 : $\|G\| = \left|A\right|$

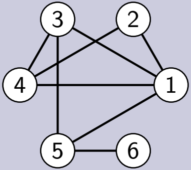
Remarques :

a) Autant on donne un nom au nombre de sommets, autant on n'en donne pas au nombre d'arêtes. La vie est injuste, c'est comme ça...

b) On ne considérera dans ce cours que des graphes finis, *i.e.* des graphes d'ordre fini.

Exemple :

Revenons à G_3 :



1. L'ordre de G_3 est 6 (ce qui peut s'écrire $\left|G_3\right| = 6$ ou encore $o(G_3) = 6$).
2. Le nombre d'arêtes de G_3 est 8 (ce qui peut s'écrire $\left\|G_3\right\| = 8$)

Définition : Graphe valué

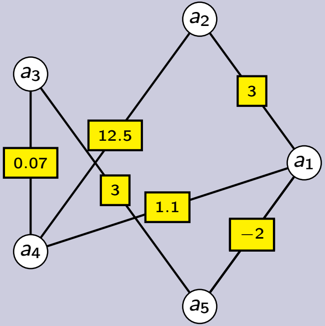
Un *graphe valué* $G = (S, A, m)$ est la donnée :

1) d'un ensemble de *sommets* S ;
2) d'un ensemble d'*arêtes* A où une arête est un ensemble de deux éléments distincts de S.
3) d'une application $m : A \to V$ où V est l'*espace de valuation* ou de *poids* (pour nous, généralement $\mathbb{R}$).

C'est donc un graphe avec la possibilité *supplémentaire* de donner une *valuation* (ou un *poids*) à chaque arête.

Exemple :

Un exemple avec des poids réels :



Définition : Multigraphe

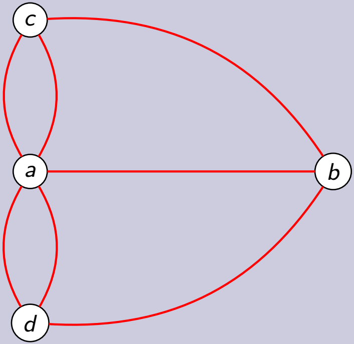
Un *multigraphe* $G = (S, A, m)$ est la donnée :

1. d'un ensemble de *sommets* S ;
2. d'un ensemble d'*arêtes* A où une arête est un ensemble de deux éléments distincts de S ou un seul (une arête faisant un une boucle sur un sommet).
3. d'une application $m : A \to \mathbb{N}^*$ donnant la *multiplicité* de chaque arête.

C'est donc un graphe avec la possibilité *supplémentaire* d'avoir plusieurs arêtes entre chaque couple de sommets.
On peut bien sûr le voir comme un cas particulier de graphe valué avec des poids entiers.

Exemple :

Le graphe de Königsberg dont on parlera dans les problèmes de parcours :



Définition : Graphe

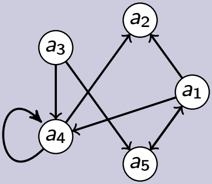
Un *graphe orienté* $G = (S, A)$ est la donnée :

1. d'un ensemble de *sommets* S ;
2. d'un ensemble d'*arêtes* A où une arête est un *couple* de deux éléments de S.

C'est donc un graphe avec une direction donnée à chaque arête.

Exemple :

Un exemple avec une boucle (ce qu'on ne permet pas *a priori* avec les graphes simples) :



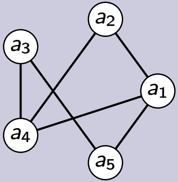
Section 2

Incidence, adjacence, degré

Définition : Incidence et adjacence

1. On dit qu'un sommet s est un *sommet incident* à une arête a lorsque $s \in a$.
2. On dit qu'une arête a est une *arête incidente* à un sommet s lorsque $s \in a$.
3. On dit qu'une arête a *connecte* les sommets s et t lorsque $a = \{s, t\}$. On dit aussi alors que les sommets sont des *sommets adjacents* ou des *sommets voisins*.
4. On dit que des arêtes sont des *arêtes adjacentes* lorsqu'elles sont incidentes à un même sommet.

Exemple :



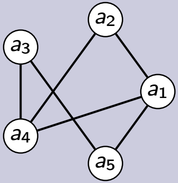
1) L'arête $\{a_1 a_4\}$ est incidente au sommet a_1 ainsi qu'à a_4.
2) Le sommet a_3 est incident à l'arête $\{a_3, a_4\}$ ainsi qu'à $\{a_3, a_5\}$.
3) L'arête $\{a_1 a_4\}$ connecte les sommets a_1 et a_4.
4) Les sommets a_1 et a_4 sont adjacents (ou voisins).
5) Un exemple de couple de sommets non adjacents : a_2 et a_3.
6) Les arêtes $\{a_1 a_4\}$ et $\{a_1 a_2\}$ sont adjacentes.
7) Un exemple de couple d'arêtes non adjacentes : $\{a_1 a_4\}$ et $\{a_3 a_5\}$.

Définition : Degré

1. Le *degré* d'un sommet s est le nombre d'arêtes auxquelles il est incident. On le note $deg(s)$.
2. On dit qu'un graphe est un *graphe régulier* lorsque tous ses sommets ont même degré. Lorsque ce degré est r, on dit qu'il est un *graphe r-régulier*.

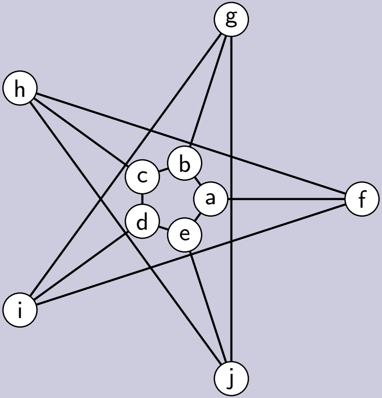
Exemple :

Revenons à G_1 :



1. Le degré du sommet a_1 est : 3.
2. $deg(a_3) = 2$.
3. Le graphe est-il régulier ? Non !

Exemple :



1) Le graphe est-il régulier ? Oui ! Tous les sommets sont de degré 3. Il est donc 3-régulier.

Hand Shaking Lemma

Soit un graphe $G = (S, A)$.
On a l'égalité suivante :

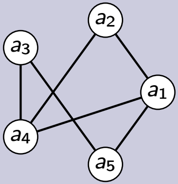
$$\sum_{s \in S} deg(s) = 2\,\|G\| \quad \left(= 2\left|A\right|\right)$$

(pour les plus lents, $\left|A\right|$ et $\|G\|$ désignent le nombre d'arêtes).

Démonstration : Il suffit de remarquer qu'à chaque arête qu'on ajoute à un graphe, on augmente de 1 le degré des deux sommets qu'il connecte, donc on augmente la somme des degrés de 2 pour chaque arête. ∎

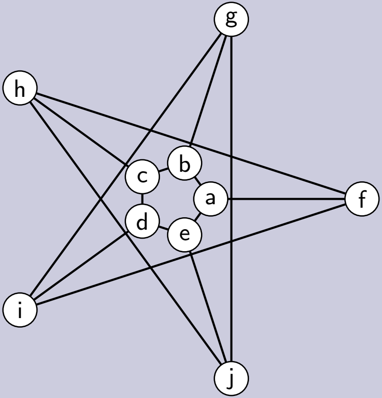
Exemple :

Revenons à G_1 :



1. $\|G_1\| = 6$
2. $deg(a_1) + deg(a_2) + deg(a_3) + deg(a_4) + deg(a_5) = 3 + 2 + 2 + 3 + 2 = 12.$

Exemple :



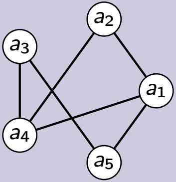
$$\|G_4\| = 15 \text{ et } \sum_{s \in S(G_4)} deg(s) = 3 \times |G_4| = 30$$

Définition : Graphe complémentaire

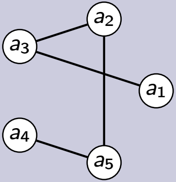
Soit un graphe $G = (S, A)$.
Le *graphe complémentaire* de G, noté $\overline{G}$ est le graphe ayant le même ensemble de sommets que G et tel que les sommets de $\overline{G}$ sont adjacents si et seulement s'ils ne le sont pas dans G.

Exemple :

G_1



$\overline{G_1}$



Section 3

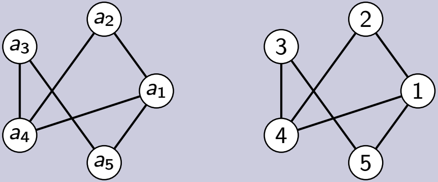
(Iso)morphismes de graphes

Définition : Morphisme de Graphe

Soient deux graphes $G = (S, A)$ et $H = (T, B)$.
On dit qu'une application $\varphi : S \longrightarrow T$ est un *morphisme de graphes* lorsqu'elle induit une application de A vers B, plus précisément si s et t sont deux sommets adjacents de G (st est une arête de G), alors $\varphi(s)$ et $\varphi(t)$ sont adjacents dans H.
Si de plus φ est une bijection entre S et T et qu'elle induit une bijection sur A et B, on dit que φ est un *isomorphisme de graphes* et que G et H sont *isomorphes*. On le note : $G \cong H$.

Exemple :

$$G_1 \qquad \cong \qquad G_2$$



Ici, l'isomorphisme est vite trouvé :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & S_1 & \longrightarrow & S_2 \\ & a_1 & \longmapsto & 1 \\ & a_2 & \longmapsto & 2 \\ & a_3 & \longmapsto & 3 \\ & a_4 & \longmapsto & 4 \\ & a_5 & \longmapsto & 5 \end{array}$$

Remarques :

1) La notion d'isomorphisme, comme souvent en maths, nous permet de considérer deux graphes comme « égaux en pratique » (*i.e.* « isomorphes ») alors qu'ils ne sont pas égaux (ici $S_1 \neq S_2$ par exemple).
2) Deux graphes isomorphes ont les mêmes propriétés (ordre, nombre d'arêtes bien sûr mais aussi les degrés des sommets et la régularité ainsi que d'autres propriétés à venir comme l'acyclicité, la connexité, le nombre chromatique, le fait d'être complet ou cyclique,...).

Remarques :

3) La relation « être isomorphe à » définit une relation d'équivalence sur les graphes. À partir de maintenant, on peut ne plus se référer explicitement à des noms de sommets en considérant les classes d'équivalence de graphes isomorphes.
4) On peut parler de graphes étiquetés lorsqu'on se réfère à un ensemble de sommets en particulier et de graphes non étiquetés sinon.

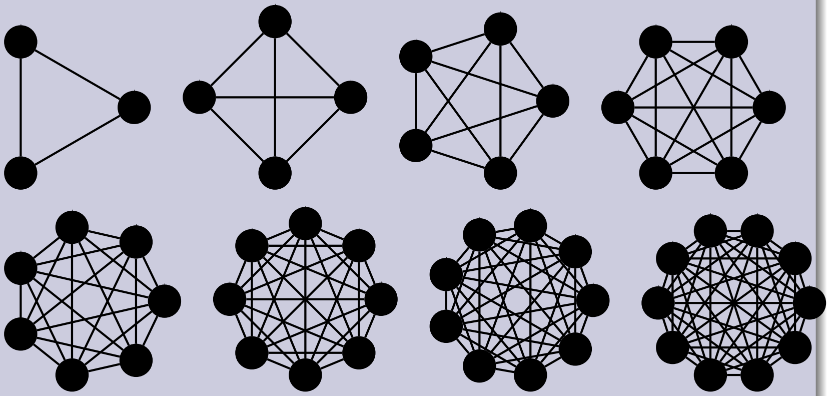
Section 4

Familles de graphes à connaître

Définition : Graphe complet

Soit un graphe $G = (S, A)$ d'ordre n.
Le graphe G est appelé *graphe complet d'ordre n* lorsque tous les sommets sont adjacents.
On le note souvent K^n (K comme ~~Kraemer~~ Komplet) si on ne se réfère pas à un ensemble de sommets précis.

Exemples :



Définition : Graphe cyclique

Soit un graphe $G = (S, A)$ d'ordre $n \geqslant 3$ avec $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Le graphe G est appelé *graphe cyclique d'ordre n* lorsque $A = \left\{s_1s_2, s_2s_3, \ldots s_{n-1}s_n, s_ns_1\right\}$ (de même pour les graphes isomorphes). On le note souvent C^n (C comme cyclique, ça marche mieux en français) si on ne se réfère pas à un ensemble de sommets précis.

Exemples :