Решетка замкнутых классов

★ ЧУМ замкнутых классов с отношением включения является решеткой

- $C_1 \wedge C_2 = C_1 \cap C_2$
- $C_1 \vee C_2 = \langle C_1 \cup C_2 \rangle$

Решетка замкнутых классов

★ ЧУМ замкнутых классов с отношением включения является решеткой

- $C_1 \wedge C_2 = C_1 \cap C_2$
- $C_1 \vee C_2 = \langle C_1 \cup C_2 \rangle$

★ вообще, система замкнутых множеств всегда образует решетку

Решетка замкнутых классов

- ★ ЧУМ замкнутых классов с отношением включения является решеткой
  - $C_1 \wedge C_2 = C_1 \cap C_2$
  - $C_1 \vee C_2 = \langle C_1 \cup C_2 \rangle$
  - ★ вообще, система замкнутых множеств всегда образует решетку
- Решетку замкнутых классов б.ф. иногда обозначают $\mathcal{P}_2$ в честь Поста
  - $\mathcal{P}_k$ — это решетка замкнутых классов функций на k-элементном множестве

Решетка замкнутых классов

- ★ ЧУМ замкнутых классов с отношением включения является решеткой
  - $C_1 \wedge C_2 = C_1 \cap C_2$
  - $C_1 \vee C_2 = \langle C_1 \cup C_2 \rangle$
  - ★ вообще, система замкнутых множеств всегда образует решетку
- Решетку замкнутых классов б.ф. иногда обозначают $\mathcal{P}_2$ в честь Поста
  - $\mathcal{P}_k$ — это решетка замкнутых классов функций на k-элементном множестве
- Единицей решетки $\mathcal{P}_2$ является класс **B** всех булевых функций

Решетка замкнутых классов

- ★ ЧУМ замкнутых классов с отношением включения является решеткой
  - $C_1 \wedge C_2 = C_1 \cap C_2$
  - $C_1 \vee C_2 = \langle C_1 \cup C_2 \rangle$
  - ★ вообще, система замкнутых множеств всегда образует решетку
- Решетку замкнутых классов б.ф. иногда обозначают $\mathcal{P}_2$ в честь Поста
  - $\mathcal{P}_k$ — это решетка замкнутых классов функций на k-элементном множестве
- Единицей решетки $\mathcal{P}_2$ является класс $\mathbf{B}$ всех булевых функций
- Нулем решетки $\mathcal{P}_2$ является класс $\mathbf{Pr} = \{PROJ_i\}$ всех проекций
  - это функции, которые можно задать формулами без операторов (или схемами без вентилей)

Решетка замкнутых классов

★ ЧУМ замкнутых классов с отношением включения является решеткой

- $C_1 \wedge C_2 = C_1 \cap C_2$
- $C_1 \vee C_2 = \langle C_1 \cup C_2 \rangle$

★ вообще, система замкнутых множеств всегда образует решетку

- Решетку замкнутых классов б.ф. иногда обозначают $\mathcal{P}_2$ в честь Поста
  - $\mathcal{P}_k$ — это решетка замкнутых классов функций на k-элементном множестве
- Единицей решетки $\mathcal{P}_2$ является класс **B** всех булевых функций
- Нулем решетки $\mathcal{P}_2$ является класс $\mathbf{Pr} = \{PROJ_i\}$ всех проекций
  - это функции, которые можно задать формулами без операторов (или схемами без вентилей)
- Элемент решетки — атом, если он покрывает 0, и коатом, если его покрывает 1

Решетка замкнутых классов

- ★ ЧУМ замкнутых классов с отношением включения является решеткой
  - $C_1 \wedge C_2 = C_1 \cap C_2$
  - $C_1 \vee C_2 = \langle C_1 \cup C_2 \rangle$
  - ★ вообще, система замкнутых множеств всегда образует решетку
- Решетку замкнутых классов б.ф. иногда обозначают $\mathcal{P}_2$ в честь Поста
  - $\mathcal{P}_k$ — это решетка замкнутых классов функций на k-элементном множестве
- Единицей решетки $\mathcal{P}_2$ является класс **B** всех булевых функций
- Нулем решетки $\mathcal{P}_2$ является класс $\mathbf{Pr} = \{PROJ_i\}$ всех проекций
  - это функции, которые можно задать формулами без операторов (или схемами без вентилей)
- Элемент решетки — атом, если он покрывает 0, и коатом, если его покрывает 1

Следствие о замкнутых классах

Коатомами решетки $\mathcal{P}_2$ являются в точности классы $\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$.

Решетка замкнутых классов

★ ЧУМ замкнутых классов с отношением включения является решеткой

- $C_1 \wedge C_2 = C_1 \cap C_2$
- $C_1 \vee C_2 = \langle C_1 \cup C_2 \rangle$

★ вообще, система замкнутых множеств всегда образует решетку

- Решетку замкнутых классов б.ф. иногда обозначают $\mathcal{P}_2$ в честь Поста
  - $\mathcal{P}_k$ — это решетка замкнутых классов функций на k-элементном множестве
- Единицей решетки $\mathcal{P}_2$ является класс $\mathbf{B}$ всех булевых функций
- Нулем решетки $\mathcal{P}_2$ является класс $\mathbf{Pr} = \{PROJ_i\}$ всех проекций
  - это функции, которые можно задать формулами без операторов (или схемами без вентилей)
- Элемент решетки — атом, если он покрывает 0, и коатом, если его покрывает 1

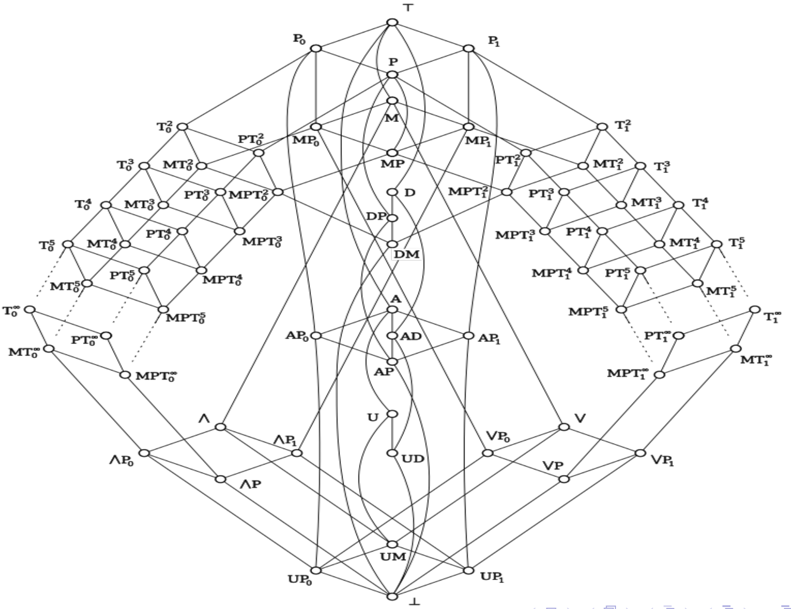
Следствие о замкнутых классах

Коатомами решетки $\mathcal{P}_2$ являются в точности классы $\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$.

Доказательство:

- классы $\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$ несравнимы по включению
  - см. примеры принадлежности функций классам
- по теореме Поста замкнутый класс, не содержащийся ни в одном из классов $\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$, совпадает с $\mathbf{B}$

$\Rightarrow$ каждый из классов $\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$ — коатом, и других коатомов нет


$\top$
P_0
P_1
P
M
MP_0
MP_1
MP
T_0^2
PT_0^2
T_1^2
T_0^3
MT_0^2
PT_1^2
MT_1^2
T_1^3
D
PT_0^3
MPT_0^2
MPT_1^2
PT_1^3
T_0^4
MT_0^3
MT_1^3
T_1^4
DP
PT_0^4
MPT_0^3
MPT_1^3
PT_1^4
T_0^5
MT_0^4
MT_1^4
T_1^5
DM
PT_0^5
MPT_0^4
MPT_1^4
PT_1^5
MT_0^5
MT_1^5
T_0^∞
A
MPT_0^5
MPT_1^5
T_1^∞
AP_0
AD
AP_1
PT_0^∞
PT_1^∞
MT_0^∞
MT_1^∞
MPT_0^∞
MPT_1^∞
AP
$\wedge$
U
$\vee$
$\wedge P_1$
$\vee P_0$
$\wedge P_0$
UD
$\vee P_1$
$\wedge P$
$\vee P$
UM
UP_0
UP_1
$\perp$