Лемма 1 (о несамодвойственной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{S}$. Тогда функции 0 и 1 можно задать формулами над множеством $\{f, {}^{-}\}$.

Лемма 1 (о несамодвойственной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{S}$. Тогда функции 0 и 1 можно задать формулами над множеством $\{f, {}^{-}\}$.

Доказательство:

- пусть f — k-местная несамодвойственная функция

$\Rightarrow$ существует $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_k) \in \{0,1\}^k$ такой, что $f(b_1, \ldots, b_k) = f(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k)$

Лемма 1 (о несамодвойственной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{S}$. Тогда функции 0 и 1 можно задать формулами над множеством $\{f, \bar{\ }\}$.

Доказательство:

- пусть f — k-местная несамодвойственная функция

$\Rightarrow$ существует $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_k) \in \{0,1\}^k$ такой, что $f(b_1, \ldots, b_k) = f(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k)$

- рассмотрим унарную функцию $\phi(x) = f(x^{b_1}, \ldots, x^{b_k})$

$\star$ $\phi(0) = f(0^{b_1}, \ldots, 0^{b_k}) = f(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k) = f(b_1, \ldots, b_k) = f(1^{b_1}, \ldots, 1^{b_k}) = \phi(1)$

$\Rightarrow$ $\phi(x)$ — константа

Лемма 1 (о несамодвойственной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{S}$. Тогда функции 0 и 1 можно задать формулами над множеством $\{f, \bar{\ }\}$.

Доказательство:

- пусть f — k-местная несамодвойственная функция

$\Rightarrow$ существует $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_k) \in \{0,1\}^k$ такой, что $f(b_1, \ldots, b_k) = f(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k)$

- рассмотрим унарную функцию $\phi(x) = f(x^{b_1}, \ldots, x^{b_k})$

$\star$ $\phi(0) = f(0^{b_1}, \ldots, 0^{b_k}) = f(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k) = f(b_1, \ldots, b_k) = f(1^{b_1}, \ldots, 1^{b_k}) = \phi(1)$

$\Rightarrow$ $\phi(x)$ — константа

$\star$ вторую константу можно записать формулой $\overline{\phi(x)}$

Лемма 1 (о несамодвойственной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{S}$. Тогда функции 0 и 1 можно задать формулами над множеством $\{f, \bar{\ }\}$.

Доказательство:

- пусть f — k-местная несамодвойственная функция

$\Rightarrow$ существует $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_k) \in \{0,1\}^k$ такой, что $f(b_1, \ldots, b_k) = f(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k)$

- рассмотрим унарную функцию $\phi(x) = f(x^{b_1}, \ldots, x^{b_k})$

⋆ $\phi(0) = f(0^{b_1}, \ldots, 0^{b_k}) = f(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k) = f(b_1, \ldots, b_k) = f(1^{b_1}, \ldots, 1^{b_k}) = \phi(1)$

$\Rightarrow$ $\phi(x)$ — константа

⋆ вторую константу можно записать формулой $\overline{\phi(x)}$

⋆ набор функций $x^{b_1}, \ldots, x^{b_k}$, подставляемых в f, содержит только x (при $b_i = 1$) и $\bar{x}$ (при $b_i = 0$)

$\Rightarrow$ $\phi(x)$ и $\overline{\phi(x)}$ задаются формулами над $\{f, \bar{\ }\}$ □

Лемма 2 (о немонотонной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{M}$. Тогда отрицание можно задать формулой над множеством $\{f, 0, 1\}$.

Лемма 2 (о немонотонной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{M}$. Тогда отрицание можно задать формулой над множеством $\{f, 0, 1\}$.

Доказательство:

- пусть f — k-местная немонотонная функция

$\Rightarrow$ существуют $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_k), \vec{b} = (b_1, \ldots, b_k) \in \{0,1\}^k$: $\vec{a} \leqslant \vec{b}$, $f(\vec{a}) > f(\vec{b})$

  - т.е. $f(\vec{a}) = 1$, $f(\vec{b}) = 0$

Лемма 2 (о немонотонной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{M}$. Тогда отрицание можно задать формулой над множеством $\{f, 0, 1\}$.

Доказательство:

- пусть f — k-местная немонотонная функция

$\Rightarrow$ существуют $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_k), \vec{b} = (b_1, \ldots, b_k) \in \{0,1\}^k$: $\vec{a} \leqslant \vec{b}$, $f(\vec{a}) > f(\vec{b})$

  - т.е. $f(\vec{a}) = 1$, $f(\vec{b}) = 0$

- рассмотрим любой $(\vec{a}, \vec{b})$-путь в ориентированном k-мерном кубе
  - т.е. в диаграмме Хассе ЧУМа $(\{0,1\}^k, \leqslant)$
  - ⋆ так как $\vec{a} \leqslant \vec{b}$, каждая вершина $(\vec{a}, \vec{b})$-пути покрывает предыдущую
- в вершине $\vec{a}$ функция f принимает значение 1, а в вершине $\vec{b}$ – значение 0

$\Rightarrow$ путь содержит пару вершин $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ такую, что $\vec{\beta}$ покрывает $\vec{\alpha}$, $f(\vec{\alpha}) = 1$, $f(\vec{\beta}) = 0$

Лемма 2 (о немонотонной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{M}$. Тогда отрицание можно задать формулой над множеством $\{f, 0, 1\}$.

Доказательство:

- пусть f — k-местная немонотонная функция

$\Rightarrow$ существуют $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_k), \vec{b} = (b_1, \ldots, b_k) \in \{0,1\}^k$: $\vec{a} \leqslant \vec{b}$, $f(\vec{a}) > f(\vec{b})$

  - т.е. $f(\vec{a}) = 1$, $f(\vec{b}) = 0$

- рассмотрим любой $(\vec{a}, \vec{b})$-путь в ориентированном k-мерном кубе
  - т.е. в диаграмме Хассе ЧУМа $(\{0,1\}^k, \leqslant)$

  ⋆ так как $\vec{a} \leqslant \vec{b}$, каждая вершина $(\vec{a}, \vec{b})$-пути покрывает предыдущую

- в вершине $\vec{a}$ функция f принимает значение 1, а в вершине $\vec{b}$ – значение 0

$\Rightarrow$ путь содержит пару вершин $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ такую, что $\vec{\beta}$ покрывает $\vec{\alpha}$, $f(\vec{\alpha}) = 1$, $f(\vec{\beta}) = 0$

⋆ $\vec{\beta}$ покрывает $\vec{\alpha}$ $\Rightarrow \vec{\alpha} = (c_1, \ldots, c_{i-1}, 0, c_{i+1}, \ldots, c_k)$, $\vec{\beta} = (c_1, \ldots, c_{i-1}, 1, c_{i+1}, \ldots, c_k)$

  - для некоторых битов $c_1, \ldots, c_k$

Лемма 2 (о немонотонной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{M}$. Тогда отрицание можно задать формулой над множеством $\{f, 0, 1\}$.

Доказательство:

- пусть f — k-местная немонотонная функция

$\Rightarrow$ существуют $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_k), \vec{b} = (b_1, \ldots, b_k) \in \{0,1\}^k$: $\vec{a} \leqslant \vec{b}$, $f(\vec{a}) > f(\vec{b})$

  - т.е. $f(\vec{a}) = 1$, $f(\vec{b}) = 0$

- рассмотрим любой $(\vec{a}, \vec{b})$-путь в ориентированном k-мерном кубе
  - т.е. в диаграмме Хассе ЧУМа $(\{0,1\}^k, \leqslant)$
  - ⋆ так как $\vec{a} \leqslant \vec{b}$, каждая вершина $(\vec{a}, \vec{b})$-пути покрывает предыдущую
- в вершине $\vec{a}$ функция f принимает значение 1, а в вершине $\vec{b}$ – значение 0

$\Rightarrow$ путь содержит пару вершин $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ такую, что $\vec{\beta}$ покрывает $\vec{\alpha}$, $f(\vec{\alpha}) = 1$, $f(\vec{\beta}) = 0$

⋆ $\vec{\beta}$ покрывает $\vec{\alpha}$ $\Rightarrow \vec{\alpha} = (c_1, \ldots, c_{i-1}, 0, c_{i+1}, \ldots, c_k)$, $\vec{\beta} = (c_1, \ldots, c_{i-1}, 1, c_{i+1}, \ldots, c_k)$

  - для некоторых битов $c_1, \ldots, c_k$

- рассмотрим унарную функцию $\phi(x) = f(c_1, \ldots, c_{i-1}, x, c_{i+1}, \ldots, c_k)$

⋆ $\phi(0) = f(\vec{\alpha}) = 1$, $\phi(1) = f(\vec{\beta}) = 0 \Rightarrow \phi(x) = \bar{x}$

Лемма 2 (о немонотонной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{M}$. Тогда отрицание можно задать формулой над множеством $\{f, 0, 1\}$.

Доказательство:

- пусть f — k-местная немонотонная функция

$\Rightarrow$ существуют $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_k), \vec{b} = (b_1, \ldots, b_k) \in \{0,1\}^k$: $\vec{a} \leqslant \vec{b}$, $f(\vec{a}) > f(\vec{b})$

  - т.е. $f(\vec{a}) = 1$, $f(\vec{b}) = 0$

- рассмотрим любой $(\vec{a}, \vec{b})$-путь в ориентированном k-мерном кубе
  - т.е. в диаграмме Хассе ЧУМа $(\{0,1\}^k, \leqslant)$
  - ⋆ так как $\vec{a} \leqslant \vec{b}$, каждая вершина $(\vec{a}, \vec{b})$-пути покрывает предыдущую

- в вершине $\vec{a}$ функция f принимает значение 1, а в вершине $\vec{b}$ – значение 0

$\Rightarrow$ путь содержит пару вершин $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ такую, что $\vec{\beta}$ покрывает $\vec{\alpha}$, $f(\vec{\alpha}) = 1$, $f(\vec{\beta}) = 0$

⋆ $\vec{\beta}$ покрывает $\vec{\alpha}$ $\Rightarrow \vec{\alpha} = (c_1, \ldots, c_{i-1}, 0, c_{i+1}, \ldots, c_k)$, $\vec{\beta} = (c_1, \ldots, c_{i-1}, 1, c_{i+1}, \ldots, c_k)$

  - для некоторых битов $c_1, \ldots, c_k$

- рассмотрим унарную функцию $\phi(x) = f(c_1, \ldots, c_{i-1}, x, c_{i+1}, \ldots, c_k)$

⋆ $\phi(0) = f(\vec{\alpha}) = 1$, $\phi(1) = f(\vec{\beta}) = 0 \Rightarrow \phi(x) = \bar{x}$

⋆ $c_1, \ldots, c_k \in \{0, 1\} \Rightarrow \phi(x)$ задана формулой над $\{f, 0, 1\}$ □

Лемма 3 (о нелинейной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{L}$. Тогда конъюнкцию можно задать формулой над множеством $\{f, 0, 1, \bar{\ }\}$.

Лемма 3 (о нелинейной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{L}$. Тогда конъюнкцию можно задать формулой над множеством $\{f, 0, 1, \bar{\ }\}$.

Доказательство:

- пусть f — k-местная нелинейная функция, $h(x_1, \ldots, x_k)$ — ее полином Жегалкина

$\Rightarrow$ h содержит нелинейный одночлен

  - без ограничения общности считаем, что этот одночлен содержит x_1 и x_2

Лемма 3 (о нелинейной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{L}$. Тогда конъюнкцию можно задать формулой над множеством $\{f, 0, 1, \bar{\ }\}$.

Доказательство:

- пусть f — k-местная нелинейная функция, $h(x_1, \ldots, x_k)$ — ее полином Жегалкина

$\Rightarrow$ h содержит нелинейный одночлен

  - без ограничения общности считаем, что этот одночлен содержит x_1 и x_2
- если $k = 2$, положим $\psi(x_1, x_2) = h(x_1, x_2)$; пусть $k > 2$

Лемма 3 (о нелинейной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{L}$. Тогда конъюнкцию можно задать формулой над множеством $\{f, 0, 1, ^{-}\}$.

Доказательство:

- пусть f — k-местная нелинейная функция, $h(x_1, \ldots, x_k)$ — ее полином Жегалкина

$\Rightarrow$ h содержит нелинейный одночлен
  - без ограничения общности считаем, что этот одночлен содержит x_1 и x_2
- если $k = 2$, положим $\psi(x_1, x_2) = h(x_1, x_2)$; пусть $k > 2$
- существуют полиномы $f_1(x_3, \ldots, x_k), f_2(x_3, \ldots, x_k), f_3(x_3, \ldots, x_k), f_4(x_3, \ldots, x_k)$ такие, что

$\star$ $h(x_1, \ldots, x_k) = x_1x_2f_1(x_3, \ldots, x_k) + x_1f_2(x_3, \ldots, x_k) + x_2f_3(x_3, \ldots, x_k) + f_4(x_3, \ldots, x_k)$

Лемма 3 (о нелинейной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{L}$. Тогда конъюнкцию можно задать формулой над множеством $\{f, 0, 1, \bar{\ }\}$.

Доказательство:

- пусть f — k-местная нелинейная функция, $h(x_1, \ldots, x_k)$ — ее полином Жегалкина

$\Rightarrow$ h содержит нелинейный одночлен

  - без ограничения общности считаем, что этот одночлен содержит x_1 и x_2

- если $k = 2$, положим $\psi(x_1, x_2) = h(x_1, x_2)$; пусть $k > 2$
- существуют полиномы $f_1(x_3, \ldots, x_k)$, $f_2(x_3, \ldots, x_k)$, $f_3(x_3, \ldots, x_k)$, $f_4(x_3, \ldots, x_k)$ такие, что

$\star$ $h(x_1, \ldots, x_k) = x_1 x_2 f_1(x_3, \ldots, x_k) + x_1 f_2(x_3, \ldots, x_k) + x_2 f_3(x_3, \ldots, x_k) + f_4(x_3, \ldots, x_k)$

- $f_1(x_3, \ldots, x_k)$ не равен константе 0

$\Rightarrow$ выберем вектор $(c_3, \ldots, c_k)$ так, что $f_1(c_3, \ldots, c_k) = 1$

- положим $\psi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, c_3, \ldots, c_k)$

Лемма 3 (о нелинейной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{L}$. Тогда конъюнкцию можно задать формулой над множеством $\{f, 0, 1, \bar{\ }\}$.

Доказательство:

- пусть f — k-местная нелинейная функция, $h(x_1, \ldots, x_k)$ — ее полином Жегалкина

$\Rightarrow$ h содержит нелинейный одночлен

  - без ограничения общности считаем, что этот одночлен содержит x_1 и x_2

- если $k = 2$, положим $\psi(x_1, x_2) = h(x_1, x_2)$; пусть $k > 2$
- существуют полиномы $f_1(x_3, \ldots, x_k)$, $f_2(x_3, \ldots, x_k)$, $f_3(x_3, \ldots, x_k)$, $f_4(x_3, \ldots, x_k)$ такие, что

$\star$ $h(x_1, \ldots, x_k) = x_1 x_2 f_1(x_3, \ldots, x_k) + x_1 f_2(x_3, \ldots, x_k) + x_2 f_3(x_3, \ldots, x_k) + f_4(x_3, \ldots, x_k)$

- $f_1(x_3, \ldots, x_k)$ не равен константе 0

$\Rightarrow$ выберем вектор $(c_3, \ldots, c_k)$ так, что $f_1(c_3, \ldots, c_k) = 1$

- положим $\psi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, c_3, \ldots, c_k)$
- пусть $\alpha = f_2(c_3, \ldots, c_k)$, $\beta = f_3(c_3, \ldots, c_k)$, $\gamma = f_4(c_3, \ldots, c_k)$

$\Rightarrow$ $\psi(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma$

  - при $k = 2$ функция $\psi(x_1, x_2)$ имеет такой же вид

Лемма 3 (о нелинейной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{L}$. Тогда конъюнкцию можно задать формулой над множеством $\{f, 0, 1, ^{-}\}$.

Доказательство:

- пусть f — k-местная нелинейная функция, $h(x_1, \ldots, x_k)$ — ее полином Жегалкина

$\Rightarrow$ h содержит нелинейный одночлен

  - без ограничения общности считаем, что этот одночлен содержит x_1 и x_2

- если $k = 2$, положим $\psi(x_1, x_2) = h(x_1, x_2)$; пусть $k > 2$
- существуют полиномы $f_1(x_3, \ldots, x_k)$, $f_2(x_3, \ldots, x_k)$, $f_3(x_3, \ldots, x_k)$, $f_4(x_3, \ldots, x_k)$ такие, что

$\star$ $h(x_1, \ldots, x_k) = x_1 x_2 f_1(x_3, \ldots, x_k) + x_1 f_2(x_3, \ldots, x_k) + x_2 f_3(x_3, \ldots, x_k) + f_4(x_3, \ldots, x_k)$

- $f_1(x_3, \ldots, x_k)$ не равен константе 0

$\Rightarrow$ выберем вектор $(c_3, \ldots, c_k)$ так, что $f_1(c_3, \ldots, c_k) = 1$

- положим $\psi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, c_3, \ldots, c_k)$
- пусть $\alpha = f_2(c_3, \ldots, c_k)$, $\beta = f_3(c_3, \ldots, c_k)$, $\gamma = f_4(c_3, \ldots, c_k)$

$\Rightarrow$ $\psi(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma$

  - при $k = 2$ функция $\psi(x_1, x_2)$ имеет такой же вид

- положим $\phi(x_1, x_2) = \psi(x_1 + \beta, x_2 + \alpha) + \alpha\beta + \gamma$

$\Rightarrow$ $\phi(x_1, x_2) = (x_1 + \beta)(x_2 + \alpha) + \alpha(x_1 + \beta) + \beta(x_2 + \alpha) + \gamma + \alpha\beta + \gamma = x_1 x_2$

Лемма 3 (о нелинейной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{L}$. Тогда конъюнкцию можно задать формулой над множеством $\{f, 0, 1, {}^{-}\}$.

Доказательство:

- пусть f — k-местная нелинейная функция, $h(x_1, \ldots, x_k)$ — ее полином Жегалкина

$\Rightarrow$ h содержит нелинейный одночлен

  - без ограничения общности считаем, что этот одночлен содержит x_1 и x_2
- если $k = 2$, положим $\psi(x_1, x_2) = h(x_1, x_2)$; пусть $k > 2$
- существуют полиномы $f_1(x_3, \ldots, x_k), f_2(x_3, \ldots, x_k), f_3(x_3, \ldots, x_k), f_4(x_3, \ldots, x_k)$ такие, что

⋆ $h(x_1, \ldots, x_k) = x_1x_2f_1(x_3, \ldots, x_k) + x_1f_2(x_3, \ldots, x_k) + x_2f_3(x_3, \ldots, x_k) + f_4(x_3, \ldots, x_k)$

- $f_1(x_3, \ldots, x_k)$ не равен константе 0

$\Rightarrow$ выберем вектор $(c_3, \ldots, c_k)$ так, что $f_1(c_3, \ldots, c_k) = 1$

- положим $\psi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, c_3, \ldots, c_k)$
- пусть $\alpha = f_2(c_3, \ldots, c_k)$, $\beta = f_3(c_3, \ldots, c_k)$, $\gamma = f_4(c_3, \ldots, c_k)$

$\Rightarrow$ $\psi(x_1, x_2) = x_1x_2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma$

  - при $k = 2$ функция $\psi(x_1, x_2)$ имеет такой же вид
- положим $\phi(x_1, x_2) = \psi(x_1 + \beta, x_2 + \alpha) + \alpha\beta + \gamma$

$\Rightarrow$ $\phi(x_1, x_2) = (x_1 + \beta)(x_2 + \alpha) + \alpha(x_1 + \beta) + \beta(x_2 + \alpha) + \gamma + \alpha\beta + \gamma = x_1x_2$

⋆ для получения ψ в f подставляются константы

⋆ для получения ϕ в ψ подставляются сами переменные или их отрицания $(x + 1 = \bar{x})$, и, возможно, берется отрицание итоговой формулы (при $\alpha\beta + \gamma = 1$)

Лемма 3 (о нелинейной функции)

Пусть $f \notin \mathbf{L}$. Тогда конъюнкцию можно задать формулой над множеством $\{f, 0, 1, {}^{-}\}$.

Доказательство:

- пусть f — k-местная нелинейная функция, $h(x_1, \ldots, x_k)$ — ее полином Жегалкина

$\Rightarrow$ h содержит нелинейный одночлен

  - без ограничения общности считаем, что этот одночлен содержит x_1 и x_2

- если $k = 2$, положим $\psi(x_1, x_2) = h(x_1, x_2)$; пусть $k > 2$
- существуют полиномы $f_1(x_3, \ldots, x_k), f_2(x_3, \ldots, x_k), f_3(x_3, \ldots, x_k), f_4(x_3, \ldots, x_k)$ такие, что

$\star$ $h(x_1, \ldots, x_k) = x_1 x_2 f_1(x_3, \ldots, x_k) + x_1 f_2(x_3, \ldots, x_k) + x_2 f_3(x_3, \ldots, x_k) + f_4(x_3, \ldots, x_k)$

- $f_1(x_3, \ldots, x_k)$ не равен константе 0

$\Rightarrow$ выберем вектор $(c_3, \ldots, c_k)$ так, что $f_1(c_3, \ldots, c_k) = 1$

- положим $\psi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, c_3, \ldots, c_k)$
- пусть $\alpha = f_2(c_3, \ldots, c_k)$, $\beta = f_3(c_3, \ldots, c_k)$, $\gamma = f_4(c_3, \ldots, c_k)$

$\Rightarrow$ $\psi(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma$

  - при $k = 2$ функция $\psi(x_1, x_2)$ имеет такой же вид

- положим $\phi(x_1, x_2) = \psi(x_1 + \beta, x_2 + \alpha) + \alpha\beta + \gamma$

$\Rightarrow$ $\phi(x_1, x_2) = (x_1 + \beta)(x_2 + \alpha) + \alpha(x_1 + \beta) + \beta(x_2 + \alpha) + \gamma + \alpha\beta + \gamma = x_1 x_2$

$\star$ для получения ψ в f подставляются константы

$\star$ для получения ϕ в ψ подставляются сами переменные или их отрицания $(x + 1 = \bar{x})$, и, возможно, берется отрицание итоговой формулы (при $\alpha\beta + \gamma = 1$)

$\Rightarrow$ $\phi(x)$ задана формулой над $\{f, 0, 1, {}^{-}\}$ □