Теорема Поста

Критерий полноты множества булевых функций дает следующая

Теорема Поста

Множество B булевых функций является полной системой $\Leftrightarrow$ B не содержится ни в одном из классов $\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$.

Критерий полноты множества булевых функций дает следующая

Теорема Поста

Множество B булевых функций является полной системой $\Leftrightarrow$ B не содержится ни в одном из классов $\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$.

Доказательство необходимости:

- ⋆ ни один из классов $\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$ не совпадает со множеством всех булевых функций
- если $B \subseteq C$, где $C \in \{\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1\}$ — замкнутый класс, то $\langle B \rangle \subseteq C$

$\Rightarrow$ B не является полной системой $\square$

Критерий полноты множества булевых функций дает следующая

Теорема Поста

Множество B булевых функций является полной системой $\Leftrightarrow$ B не содержится ни в одном из классов $\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$.

Доказательство необходимости:

- ⋆ ни один из классов $\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$ не совпадает со множеством всех булевых функций
- если $B \subseteq C$, где $C \in \{\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1\}$ — замкнутый класс, то $\langle B \rangle \subseteq C$

$\Rightarrow$ B не является полной системой $\square$

Доказательство достаточности:

- будем доказывать, что формулами над B можно задать отрицание и конъюнкцию
- так как $\{\wedge, \bar{\ }\}$ — полная система, отсюда будет следовать полнота B
- доказательство опирается на леммы из предыдущего фрагмента $\Longrightarrow$

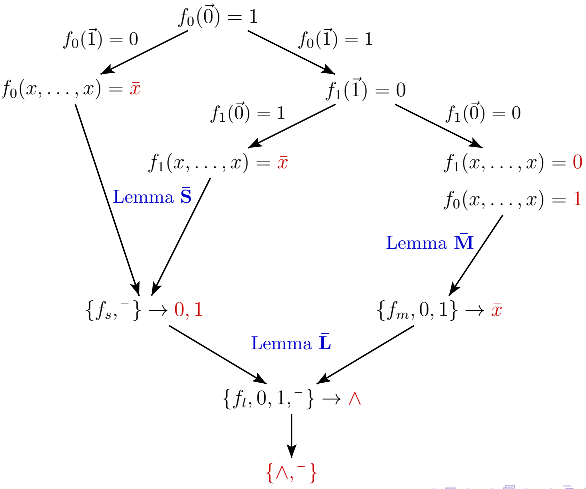
- Выберем в B функции $f_0 \notin \mathbf{T}_0$, $f_1 \notin \mathbf{T}_1$, $f_s \notin \mathbf{S}$, $f_m \notin \mathbf{M}$, $f_l \notin \mathbf{L}$
  - некоторые из выбранных функций могут совпадать

Теорема Поста — доказательство достаточности

- Выберем в B функции $f_0 \notin \mathbf{T}_0$, $f_1 \notin \mathbf{T}_1$, $f_s \notin \mathbf{S}$, $f_m \notin \mathbf{M}$, $f_l \notin \mathbf{L}$
  - некоторые из выбранных функций могут совпадать
- Зададим конъюнкцию и отрицание формулой над $\{f_0, f_1, f_s, f_m, f_l\}$:

Теорема Поста — доказательство достаточности

- Выберем в B функции $f_0 \notin \mathbf{T}_0$, $f_1 \notin \mathbf{T}_1$, $f_s \notin \mathbf{S}$, $f_m \notin \mathbf{M}$, $f_l \notin \mathbf{L}$
  - некоторые из выбранных функций могут совпадать
- Зададим конъюнкцию и отрицание формулой над $\{f_0, f_1, f_s, f_m, f_l\}$:



Алгоритмичность теоремы Поста

- Чтобы проверить произвольную систему булевых функций на полноту, надо уметь проверять функцию на принадлежность к каждому из классов $\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$

- ⋆ Чтобы проверить произвольную систему булевых функций на полноту, надо уметь проверять функцию на принадлежность к каждому из классов $\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$
  - пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ задана таблицей значений, т.е. битовым вектором $F[0..2^n{-}1]$
- Принадлежность f ко всем классам может быть проверена за время $O(n \cdot 2^n)$:

Алгоритмичность теоремы Поста

- Чтобы проверить произвольную систему булевых функций на полноту, надо уметь проверять функцию на принадлежность к каждому из классов $\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$
  - пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ задана таблицей значений, т.е. битовым вектором $F[0..2^n{-}1]$
- Принадлежность f ко всем классам может быть проверена за время $O(n \cdot 2^n)$:
  - $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$: проверить один бит в F

- Чтобы проверить произвольную систему булевых функций на полноту, надо уметь проверять функцию на принадлежность к каждому из классов $\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$
  - пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ задана таблицей значений, т.е. битовым вектором $F[0..2^n{-}1]$
- Принадлежность f ко всем классам может быть проверена за время $O(n \cdot 2^n)$:
  - $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$: проверить один бит в F
  - $\mathbf{S}$: сравнить биты $F[i]$ и $F[2^n{-}i{-}1]$ для всех i

Алгоритмичность теоремы Поста

- ⋆ Чтобы проверить произвольную систему булевых функций на полноту, надо уметь проверять функцию на принадлежность к каждому из классов $\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$
  - пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ задана таблицей значений, т.е. битовым вектором $F[0..2^n-1]$
- Принадлежность f ко всем классам может быть проверена за время $O(n \cdot 2^n)$:
  - ⋆ $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$: проверить один бит в F
  - ⋆ $\mathbf{S}$: сравнить биты $F[i]$ и $F[2^n-i-1]$ для всех i
  - ⋆ $\mathbf{L}$: записать равенство $f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \cdots a_nx_n$
  - подставить каждое значение вектора $\vec{x}$ и соответствующее значение $f(\vec{x})$
    - получится система 2^n уравнений с $n+1$ неизвестными $a_0, \ldots, a_n$ над $\mathbb{F}_2$
  - проверить совместность системы

- ⋆ Чтобы проверить произвольную систему булевых функций на полноту, надо уметь проверять функцию на принадлежность к каждому из классов $\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$
  - пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ задана таблицей значений, т.е. битовым вектором $F[0..2^n-1]$
- Принадлежность f ко всем классам может быть проверена за время $O(n \cdot 2^n)$:
  - ⋆ $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$: проверить один бит в F
  - ⋆ $\mathbf{S}$: сравнить биты $F[i]$ и $F[2^n-i-1]$ для всех i
  - ⋆ $\mathbf{L}$: записать равенство $f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \cdots a_nx_n$
  - \- подставить каждое значение вектора $\vec{x}$ и соответствующее значение $f(\vec{x})$
    - получится система 2^n уравнений с $n+1$ неизвестными $a_0, \ldots, a_n$ над $\mathbb{F}_2$
  - \- проверить совместность системы
  - ! придумайте, как сделать это за время $O(n \cdot 2^n)$

- ⋆ Чтобы проверить произвольную систему булевых функций на полноту, надо уметь проверять функцию на принадлежность к каждому из классов $\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$
  - пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ задана таблицей значений, т.е. битовым вектором $F[0..2^n{-}1]$
- Принадлежность f ко всем классам может быть проверена за время $O(n \cdot 2^n)$:
  - ⋆ $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$: проверить один бит в F
  - ⋆ $\mathbf{S}$: сравнить биты $F[i]$ и $F[2^n{-}i{-}1]$ для всех i
  - ⋆ $\mathbf{L}$: записать равенство $f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \cdots a_nx_n$
  - подставить каждое значение вектора $\vec{x}$ и соответствующее значение $f(\vec{x})$
    - получится система 2^n уравнений с $n+1$ неизвестными $a_0, \ldots, a_n$ над $\mathbb{F}_2$
  - проверить совместность системы
  - ! придумайте, как сделать это за время $O(n \cdot 2^n)$
  - ⋆ $\mathbf{M}$: для каждого из $O(n \cdot 2^n)$ ребер n-мерного куба проверить, что значение f на верхнем конце не меньше значения на нижнем