Замкнутые классы

- Пусть B — некоторое множество булевых функций

⋆ $\langle B \rangle$ — множество функций, которые можно записать формулами над B

Замкнутые классы

- Пусть B — некоторое множество булевых функций

⋆ $\langle B \rangle$ — множество функций, которые можно записать формулами над B

⋆ $\langle \cdot \rangle$ — оператор замыкания:
  - $B \subseteq \langle B \rangle$ (экстенсивность)
  - $A \subseteq B \Rightarrow \langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$ (монотонность)
  - $\langle \langle B \rangle \rangle = \langle B \rangle$ (идемпотентность)

Замкнутые классы

- Пусть B — некоторое множество булевых функций

⋆ $\langle B \rangle$ — множество функций, которые можно записать формулами над B

⋆ $\langle \cdot \rangle$ — оператор замыкания:
  - $B \subseteq \langle B \rangle$ (экстенсивность)
  - $A \subseteq B \Rightarrow \langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$ (монотонность)
  - $\langle \langle B \rangle \rangle = \langle B \rangle$ (идемпотентность)

- B называется замкнутым классом (булевых функций), если $B = \langle B \rangle$

⋆ B — полная система $\Leftrightarrow$ $\langle B \rangle$ содержит все булевы функции

Замкнутые классы

- Пусть B — некоторое множество булевых функций
- ⋆ $\langle B \rangle$ — множество функций, которые можно записать формулами над B
- ⋆ $\langle \cdot \rangle$ — оператор замыкания:
  - $B \subseteq \langle B \rangle$ (экстенсивность)
  - $A \subseteq B \Rightarrow \langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$ (монотонность)
  - $\langle \langle B \rangle \rangle = \langle B \rangle$ (идемпотентность)
- B называется замкнутым классом (булевых функций), если $B = \langle B \rangle$
- ⋆ B — полная система $\Leftrightarrow$ $\langle B \rangle$ содержит все булевы функции

- Б.ф. f сохраняет 0, если $f(\vec{0}) = 0$, и сохраняет 1, если $f(\vec{1}) = 1$
  - множество всех б.ф., сохраняющих 0 (сохраняющих 1) обозначается $\mathbf{T}_0$ ($\mathbf{T}_1$)

Замкнутые классы

- Пусть B — некоторое множество булевых функций

⋆ $\langle B\rangle$ — множество функций, которые можно записать формулами над B

⋆ $\langle\cdot\rangle$ — оператор замыкания:
  - $B \subseteq \langle B\rangle$ (экстенсивность)
  - $A \subseteq B \Rightarrow \langle A\rangle \subseteq \langle B\rangle$ (монотонность)
  - $\langle\langle B\rangle\rangle = \langle B\rangle$ (идемпотентность)

- B называется замкнутым классом (булевых функций), если $B = \langle B\rangle$

⋆ B — полная система $\Leftrightarrow$ $\langle B\rangle$ содержит все булевы функции

- Б.ф. f сохраняет 0, если $f(\vec{0}) = 0$, и сохраняет 1, если $f(\vec{1}) = 1$
  - множество всех б.ф., сохраняющих 0 (сохраняющих 1) обозначается $\mathbf{T}_0$ ($\mathbf{T}_1$)
    примеры: $0, \vee, \wedge, + \in \mathbf{T}_0$; $1, ^-, \sim, \downarrow \notin \mathbf{T}_0$; $1, \vee, \wedge, \sim \in \mathbf{T}_1$; $0, ^-, +, ' \notin \mathbf{T}_1$

- Пусть B — некоторое множество булевых функций

⋆ $\langle B\rangle$ — множество функций, которые можно записать формулами над B

⋆ $\langle\cdot\rangle$ — оператор замыкания:
  - $B \subseteq \langle B\rangle$ (экстенсивность)
  - $A \subseteq B \Rightarrow \langle A\rangle \subseteq \langle B\rangle$ (монотонность)
  - $\langle\langle B\rangle\rangle = \langle B\rangle$ (идемпотентность)

- B называется замкнутым классом (булевых функций), если $B = \langle B\rangle$

⋆ B — полная система $\Leftrightarrow$ $\langle B\rangle$ содержит все булевы функции

- Б.ф. f сохраняет 0, если $f(\vec{0}) = 0$, и сохраняет 1, если $f(\vec{1}) = 1$
  - множество всех б.ф., сохраняющих 0 (сохраняющих 1) обозначается $\mathbf{T}_0$ ($\mathbf{T}_1$)
    примеры: $0, \vee, \wedge, + \in \mathbf{T}_0$; $1, {}^{-}, \sim, \downarrow \notin \mathbf{T}_0$; $1, \vee, \wedge, \sim \in \mathbf{T}_1$; $0, {}^{-}, +, {}' \notin \mathbf{T}_1$

Лемма

$\mathbf{T}_0$ и $\mathbf{T}_1$ — замкнутые классы.

- Пусть B — некоторое множество булевых функций

⋆ $\langle B\rangle$ — множество функций, которые можно записать формулами над B

⋆ $\langle\cdot\rangle$ — оператор замыкания:
  - $B \subseteq \langle B\rangle$ (экстенсивность)
  - $A \subseteq B \Rightarrow \langle A\rangle \subseteq \langle B\rangle$ (монотонность)
  - $\langle\langle B\rangle\rangle = \langle B\rangle$ (идемпотентность)

- B называется замкнутым классом (булевых функций), если $B = \langle B\rangle$

⋆ B — полная система $\Leftrightarrow$ $\langle B\rangle$ содержит все булевы функции

- Б.ф. f сохраняет 0, если $f(\vec{0}) = 0$, и сохраняет 1, если $f(\vec{1}) = 1$
  - множество всех б.ф., сохраняющих 0 (сохраняющих 1) обозначается $\mathbf{T}_0$ ($\mathbf{T}_1$)
    примеры: $0, \vee, \wedge, + \in \mathbf{T}_0$; $1, \bar{\ }, \sim, \downarrow \notin \mathbf{T}_0$; $1, \vee, \wedge, \sim \in \mathbf{T}_1$; $0, \bar{\ }, +, ' \notin \mathbf{T}_1$

Лемма

$\mathbf{T}_0$ и $\mathbf{T}_1$ — замкнутые классы.

Доказательство: рассмотрим формулу над $\mathbf{T}_0$, построим по ней схему
- если любому элементу схемы подать 0 на все входы, то на выходе у него будет 0
- подадим 0 на все входы схемы

$\Rightarrow$ на выходе схемы будет 0

$\Rightarrow$ функция, задаваемая схемой, принадлежит $\mathbf{T}_0$

- Пусть B — некоторое множество булевых функций

⋆ $\langle B\rangle$ — множество функций, которые можно записать формулами над B

⋆ $\langle\cdot\rangle$ — оператор замыкания:
  - $B \subseteq \langle B\rangle$ (экстенсивность)
  - $A \subseteq B \Rightarrow \langle A\rangle \subseteq \langle B\rangle$ (монотонность)
  - $\langle\langle B\rangle\rangle = \langle B\rangle$ (идемпотентность)

- B называется замкнутым классом (булевых функций), если $B = \langle B\rangle$

⋆ B — полная система $\Leftrightarrow$ $\langle B\rangle$ содержит все булевы функции

- Б.ф. f сохраняет 0, если $f(\vec{0}) = 0$, и сохраняет 1, если $f(\vec{1}) = 1$
  - множество всех б.ф., сохраняющих 0 (сохраняющих 1) обозначается $\mathbf{T}_0$ ($\mathbf{T}_1$)
    примеры: $0, \vee, \wedge, + \in \mathbf{T}_0$; $1, \bar{\ }, \sim, \downarrow \notin \mathbf{T}_0$; $1, \vee, \wedge, \sim \in \mathbf{T}_1$; $0, \bar{\ }, +, ' \notin \mathbf{T}_1$

Лемма

$\mathbf{T}_0$ и $\mathbf{T}_1$ — замкнутые классы.

Доказательство: рассмотрим формулу над $\mathbf{T}_0$, построим по ней схему
  - если любому элементу схемы подать 0 на все входы, то на выходе у него будет 0
  - подадим 0 на все входы схемы

$\Rightarrow$ на выходе схемы будет 0

$\Rightarrow$ функция, задаваемая схемой, принадлежит $\mathbf{T}_0$

- для $\mathbf{T}_1$ доказательство аналогично

Линейные функции

- Функция $f(x_1,\ldots,x_k)$ линейна, если ее полином Жегалкина — линейный
  - т.е. $f(x_1,\ldots,x_k) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_kx_k$ для некоторых $a_0,\ldots,a_k \in \{0,1\}$
  - $\star$ f обладает свойствами самой обычной линейной функции из курса алгебры
  - множество всех линейных б.ф. обозначается **L**

- Функция $f(x_1,\ldots,x_k)$ линейна, если ее полином Жегалкина — линейный
  - т.е. $f(x_1,\ldots,x_k) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_kx_k$ для некоторых $a_0,\ldots,a_k \in \{0,1\}$
  - ⋆ f обладает свойствами самой обычной линейной функции из курса алгебры
  - множество всех линейных б.ф. обозначается $\mathbf{L}$
    примеры: $0, \bar{\ }, +, \sim \in \mathbf{L}$; $\wedge, \vee, \to, \downarrow \notin \mathbf{L}$

- Функция $f(x_1, \ldots, x_k)$ линейна, если ее полином Жегалкина — линейный
  - т.е. $f(x_1, \ldots, x_k) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_kx_k$ для некоторых $a_0, \ldots, a_k \in \{0, 1\}$
  - ⋆ f обладает свойствами самой обычной линейной функции из курса алгебры
  - множество всех линейных б.ф. обозначается $\mathbf{L}$
    примеры: $0, \bar{\ }, +, \sim \in \mathbf{L}$; $\quad \wedge, \vee, \rightarrow, \downarrow \notin \mathbf{L}$

Лемма

$\mathbf{L}$ — замкнутый класс.

Линейные функции

- Функция $f(x_1,\ldots,x_k)$ линейна, если ее полином Жегалкина — линейный
  - т.е. $f(x_1,\ldots,x_k) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_kx_k$ для некоторых $a_0,\ldots,a_k \in \{0,1\}$
  - ⋆ f обладает свойствами самой обычной линейной функции из курса алгебры
  - множество всех линейных б.ф. обозначается $\mathbf{L}$
    примеры: $0, \bar{\ }, +, \sim \in \mathbf{L}$; $\wedge, \vee, \to, \downarrow \notin \mathbf{L}$

Лемма

$\mathbf{L}$ — замкнутый класс.

Доказательство: рассмотрим формулу над $\mathbf{L}$, построим по ней схему

- каждый элемент схемы вычисляет линейную функцию своих входов
- линейная функция от линейных функций переменных является линейной функцией этих переменных

$\Rightarrow$ вся схема вычисляет линейную функцию $\square$

Самодвойственные функции

- Функция $f(x_1, \ldots, x_k)$ самодвойственна, если $f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k) = \overline{f(x_1, \ldots, x_k)}$
  - на противоположных наборах аргументов f принимает разные значения
  - множество всех самодвойственных б.ф. обозначается **S**

Самодвойственные функции

- Функция $f(x_1,\ldots,x_k)$ самодвойственна, если $f(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_k)=\overline{f(x_1,\ldots,x_k)}$
  - на противоположных наборах аргументов f принимает разные значения
  - множество всех самодвойственных б.ф. обозначается $\mathbf{S}$
    примеры: $\bar{}\,, x+y+z, T_2(x,y,z)\in\mathbf{S}; \quad 0,\vee,\to,\downarrow\notin\mathbf{S}$

Самодвойственные функции

- Функция $f(x_1,\ldots,x_k)$ самодвойственна, если $f(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_k) = \overline{f(x_1,\ldots,x_k)}$
  - на противоположных наборах аргументов f принимает разные значения
  - множество всех самодвойственных б.ф. обозначается $\mathbf{S}$
    примеры: $\bar{\ }, x+y+z, T_2(x,y,z) \in \mathbf{S}$; $\quad 0, \vee, \to, \downarrow \notin \mathbf{S}$

Лемма

$\mathbf{S}$ — замкнутый класс.

Самодвойственные функции

- Функция $f(x_1,\ldots,x_k)$ самодвойственна, если $f(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_k) = \overline{f(x_1,\ldots,x_k)}$
  - на противоположных наборах аргументов f принимает разные значения
  - множество всех самодвойственных б.ф. обозначается $\mathbf{S}$

    примеры: $\bar{\ }, x+y+z, T_2(x,y,z) \in \mathbf{S}$; $\quad 0, \vee, \to, \downarrow \notin \mathbf{S}$

Лемма

$\mathbf{S}$ — замкнутый класс.

Доказательство: рассмотрим формулу над $\mathbf{S}$, построим по ней схему

- подадим на входы произвольный битовый вектор
- ⋆ на выходе каждого элемента схемы будет некоторый бит
- поменяем биты на всех входах
- ⋆ докажем, что бит на выходе каждого элемента поменялся индукцией по максимальной длине n пути от входа до элемента
- база индукции: $n = 1$
- входы элемента являются входами схемы, элемент задает функцию из $\mathbf{S}$
- $\Rightarrow$ выходной бит изменился, так как поменялись все входы
- шаг индукции:
- входами элемента являются либо входы схемы (поменялись по условию), либо выходы элементов с меньшей длиной пути (поменялись по предположению индукции)
- $\Rightarrow$ выход элемента, задающего самодвойственную функцию, поменялся
- $\Rightarrow$ в частности, поменялся выходной бит всей схемы
- $\Rightarrow$ так как рассуждение верно для любого вектора на входе схемы, схема вычисляет самодвойственную функцию

Монотонные функции

- Введем на битовых векторах равной длины покомпонентный порядок:
  - $(x_1, \ldots, x_k) \leqslant (y_1, \ldots, y_k) \Leftrightarrow x_1 \leqslant y_1, \ldots, x_k \leqslant y_k$
  - диаграмма Хассе ЧУМа $(\{0,1\}^k, \leqslant)$ — k-мерный куб

Монотонные функции

- Введем на битовых векторах равной длины покомпонентный порядок:
  - $(x_1, \ldots, x_k) \leqslant (y_1, \ldots, y_k) \Leftrightarrow x_1 \leqslant y_1, \ldots, x_k \leqslant y_k$
  - диаграмма Хассе ЧУМа $(\{0,1\}^k, \leqslant)$ — k-мерный куб
- Функция $f(\vec{x})$ монотонна, если $f(\vec{x}) \leqslant f(\vec{y})$ для любых $\vec{x} \leqslant \vec{y}$
  - если значения каких-то аргументов f увеличить (подняться вверх по кубу), то значение f не уменьшится
  - множество всех монотонных б.ф. обозначается **M**

- Введем на битовых векторах равной длины покомпонентный порядок:
  - $(x_1, \ldots, x_k) \leqslant (y_1, \ldots, y_k) \Leftrightarrow x_1 \leqslant y_1, \ldots, x_k \leqslant y_k$
  - диаграмма Хассе ЧУМа $(\{0,1\}^k, \leqslant)$ — k-мерный куб
- Функция $f(\vec{x})$ монотонна, если $f(\vec{x}) \leqslant f(\vec{y})$ для любых $\vec{x} \leqslant \vec{y}$
  - если значения каких-то аргументов f увеличить (подняться вверх по кубу), то значение f не уменьшится
  - множество всех монотонных б.ф. обозначается $\mathbf{M}$
    примеры: $0, \vee, \wedge, T_i \in \mathbf{M}$; $\quad +, ^-, \to, ' \notin \mathbf{M}$

Монотонные функции

- Введем на битовых векторах равной длины покомпонентный порядок:
  - $(x_1, \ldots, x_k) \leqslant (y_1, \ldots, y_k) \Leftrightarrow x_1 \leqslant y_1, \ldots, x_k \leqslant y_k$
  - диаграмма Хассе ЧУМа $(\{0,1\}^k, \leqslant)$ — k-мерный куб
- Функция $f(\vec{x})$ монотонна, если $f(\vec{x}) \leqslant f(\vec{y})$ для любых $\vec{x} \leqslant \vec{y}$
  - если значения каких-то аргументов f увеличить (подняться вверх по кубу), то значение f не уменьшится
  - множество всех монотонных б.ф. обозначается **M**
    примеры: $0, \vee, \wedge, T_i \in \mathbf{M}$; $\quad +, {}^{-}, \to, {}' \notin \mathbf{M}$

Лемма

M — замкнутый класс.

Монотонные функции

- Введем на битовых векторах равной длины покомпонентный порядок:
  - $(x_1, \ldots, x_k) \leqslant (y_1, \ldots, y_k) \Leftrightarrow x_1 \leqslant y_1, \ldots, x_k \leqslant y_k$
  - диаграмма Хассе ЧУМа $(\{0,1\}^k, \leqslant)$ — k-мерный куб
- Функция $f(\vec{x})$ монотонна, если $f(\vec{x}) \leqslant f(\vec{y})$ для любых $\vec{x} \leqslant \vec{y}$
  - если значения каких-то аргументов f увеличить (подняться вверх по кубу), то значение f не уменьшится
  - множество всех монотонных б.ф. обозначается $\mathbf{M}$
    примеры: $0, \vee, \wedge, T_i \in \mathbf{M}$; $\quad +, ^{-}, \to, ' \notin \mathbf{M}$

Лемма

$\mathbf{M}$ — замкнутый класс.

Доказательство: рассмотрим формулу над $\mathbf{M}$, построим по ней схему

- подадим на входы произвольный битовый вектор, не равный $\vec{1}$
- ⋆ на выходе каждого элемента схемы будет некоторый бит
- поменяем биты на некоторых входах с 0 на 1
- ⋆ докажем, что ни у какого элемента выходной бит не поменялся с 1 на 0 индукцией по максимальной длине n пути от входа до элемента
- ! восстановите детали по аналогии с предыдущей леммой
- $\Rightarrow$ выходной бит всей схемы не уменьшился
- $\Rightarrow$ так как рассуждение верно для любого вектора на входе схемы, схема вычисляет монотонную функцию

□