

《概率论与数理统计 B》

一、 选择题

1、 甲、乙两人射击， A 、 B 分别表示甲、乙射中目标，则 \overline{AB} 表示的事件为 ()

- (A) 两人都没射中； (B) 至少有一人没射中；
(C) 两人都射中； (D) 至少有一人射中.

2、 设事件 A 与 B 互不相容，则下列等式中正确的是 ()

- (A) $P(AB)=P(A)P(B)$ ； (B) $P(A)+P(B)=1$ ；
(C) $P(A|B)=P(A)$ ； (D) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

3、 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} ax^4, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，则 $a =$ ()

- (A) $\frac{1}{5}$ ； (B) $\frac{1}{4}$ ； (C) 4； (D) 5.

4、 设 $X \sim N(0,9)$ ， $Y \sim N(0,1)$ ，且 X 与 Y 独立，则 $D(X-2Y) =$ ()

- (A) 13； (B) 11； (C) 7； (D) 5.

5、 设 X ， Y 为随机变量，则下列结论中与 $\text{cov}(X,Y)=0$ 不等价的是 ()

- (A) $E(XY)=E(X)E(Y)$ ； (B) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ ；
(C) X 与 Y 不相关； (D) X 与 Y 相互独立.

6、 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本，则

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim ().$$

- (A) $\chi^2(n-1)$ ； (B) $\chi^2(n)$ ； (C) $t(n-1)$ ； (D) $t(n)$.

7、 设 X_1, X_2, X_3 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本， μ 未知，则下列各式中() 不是统计量。

- (A) \bar{X} ； (B) $\sum_{i=1}^n X_i^2$ ； (C) $\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ ； (D) $\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

二、 填空题

1、 设事件 A ， B 相互独立，且 $P(A)=0.8$ ， $P(B)=0.5$ ，则 $P(A\cup B)=$ _____.

2、在 1~10 这 10 个整数中随机地取一个数，则取到的数能被 2 或 3 整除的概率是_____；取到的数能被 2 整除而不能被 3 整除的概率是_____.

3、设 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ ，则 $P(1 < X \leq 3) =$ _____.

4、设 X 的分布律为 $P(X=1)=0.2$ ， $P(X=2)=0.3$ ， $P(X=3)=0.5$ ，则 $E(X)=$ _____.

5、设 X 服从参数为 2 的泊松分布，令 $Y=3X-2$ ，则 $E(Y)=$ _____.

6、设 X 的方差 $D(X)>0$ ， $Y=-3X+5$ ，则 X 与 Y 的相关系数 $\rho=$ _____.

7、设随机变量 X_1, \dots, X_{100} 独立同分布，且 $E(X_i)=0$ ， $D(X_i)=1$ ， $i=1, 2, \dots, 100$ ，

令 $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ ，则由中心极限定理， Y 近似服从_____.

三、计算题

1、两台车床加工同样的零件，第一台出现不合格品的概率是 0.03，第二台出现不合格品的概率是 0.06，加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍.

(1) 求任取一个零件是不合格品的概率；

(2) 如果取出的零件是不合格品，求它是由第二台车床加工的概率.

2、已知某批产品的次品率为 $1/3$ ，从这批产品中有放回地取 4 件产品，求

(1) 恰好取到两件次品的概率；(2) 至少取到一件次品的概率.

3、设随机变量 X 服从区间 $(-1,1)$ 上的均匀分布，试求：

(1) $P\left(|X| > \frac{1}{2}\right)$ ；(2) $Y=|X|$ 的概率密度函数.

4、已知 $X \sim N(5,9)$ ，求(1) $P(X > 8)$ ；(2) $P(5 < X < 14)$.

(已知 $\Phi(1/3)=0.6293$ ， $\Phi(1)=0.8413$ ， $\Phi(2)=0.9772$ ， $\Phi(3)=0.9987$)

5、设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}xy^2, & 0 < x < 2, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $E(X)$, $E(Y)$ 及协方差 $\text{cov}(X, Y)$.

6、下表为二维随机变量 (X, Y) 的联合分布列，试求：

(1) 常数 a ；

(2) (X, Y) 的两个边缘分布律；

(3) X 与 Y 是否相互独立？为什么？

(4) $P(X = Y)$.

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	1	2	3
1	$1/10$	$1/20$	$3/20$
2	$1/5$	a	$1/10$
3	$1/10$	$1/10$	0

四、证明题

已知事件 A, B, C 相互独立，证明 $A \cup B$ 与 C 相互独立.

参考答案

一、选择题

1、(B) 2、(D) 3、(D) 4、(A) 5、(D) 6、(A) 7、(C)

二、填空题

1、0.9 2、 $e^{-1}-e^{-3}$; 3、0.7、0.4; 4、4; 5、2.3;

6、 $N(0,100)$; 7、-1

三、计算题

1、解：设 A_i = “取到的产品为第 i 车床加工的”， $i=1,2$ ， B = “取到的产品为不合格品”，

$$(1) P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{2}{3} \times 0.03 + \frac{1}{3} \times 0.06 = 0.04$$

$$(2) P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{1/3 \times 0.06}{0.04} = 0.5$$

2、解：设 X 为取到的次品件数，则 $X \sim B\left(4, \frac{1}{3}\right)$,

$$(1) P(X=2) = C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

$$(2) P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - C_4^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{65}{81}$$

3、解：因为 $X \sim U(-1,1)$ ，所以 $f(x) = \begin{cases} 1/2, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$(1) P(|X| > 1/2) = \int_{-1}^{-1/2} \frac{1}{2} dx + \int_{1/2}^1 \frac{1}{2} dx = 1/2$$

(2) 当 $y < 0$ 时， $F_Y(y) = P(\emptyset) = 0$ ；当 $y > 1$ 时， $F_Y(y) = P(\Omega) = 1$ ；

当 $0 \leq y \leq 1$ 时， $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y)$

$$= P(-y \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(-y),$$

所以 $f_Y(y) = F'_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y) = 1$ ，故 $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

4、解：(1) $P(X > 8) = 1 - \Phi\left(\frac{8-5}{3}\right) = 1 - \Phi(1) = 0.1587$

$$(2) \quad P(5 < X < 14) = \Phi\left(\frac{14-5}{3}\right) - \Phi\left(\frac{5-5}{3}\right) = \Phi(3) - \Phi(0) = 0.4987$$

$$5、\text{解：} E(X) = \int_0^2 dx \int_0^1 x \cdot \frac{3}{2} xy^2 dx = \frac{4}{3};$$

$$E(Y) = \int_0^2 dx \int_0^1 y \cdot \frac{3}{2} xy^2 dx = \frac{3}{4};$$

$$E(XY) = \int_0^2 dx \int_0^1 xy \cdot \frac{3}{2} xy^2 dx = 1,$$

$$\text{所以 } \text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

$$6、\text{解：} (1) \text{ 由正则性, } a = \frac{1}{5};$$

(2)

X	1	2	3
P	3/10	1/2	1/5

Y	1	2	3
P	2/5	7/20	1/4

(3) X 与 Y 不独立

$$(4) \quad P(X=Y) = P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=3) \\ = 1/10 + 1/5 + 0 = 3/10$$

五、证明题

$$\text{证明：} P((A \cup B)C) = P(AC \cup BC) = P(AC) + P(BC) - P(ABC)$$

$$= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C)$$

$$= P(C)(P(A) + P(B) - P(A)P(B)) = P(C)P(A \cup B), \text{ 所以 } A \cup B \text{ 与 } C \text{ 独立}$$