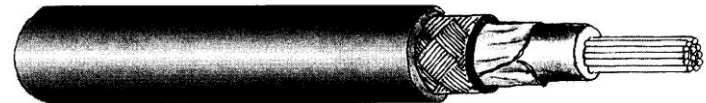


Freiraumausbreitung geführte Wellen

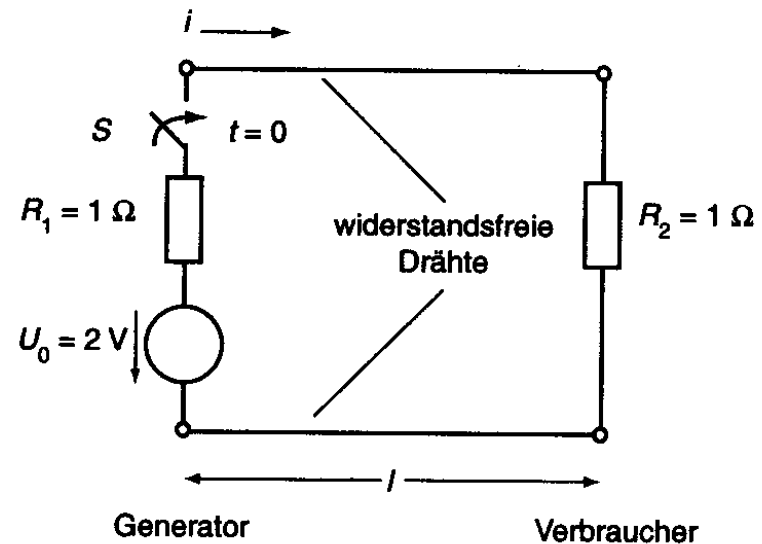


THIN-WIRE-ETHERNET-KABEL



Wellenausbreitung: Einführende Überlegungen

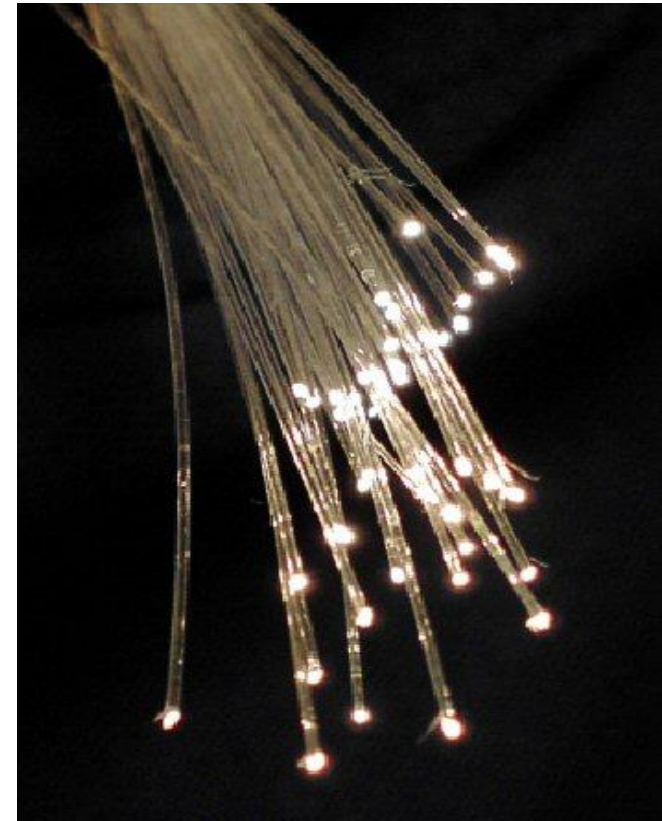
- Wie groß ist der Strom im ersten Moment nach dem Einschalten?
- Die Quelle weiß noch nichts über den Verbraucher!
- Die größte bekannte Geschwindigkeit:
Lichtgeschwindigkeit
- Strom hängt ab von den Eigenschaften des Ausbreitungsmediums.



d 3.1-1 Versuch zur Wellenausbreitung



- Wellenleiter geben Randbedingungen für die Wellenausbreitung.
- Elektromagnetische Wellen breiten sich ggf. **entlang** (nicht unbedingt **in**) den Wellenleitern aus.
 - Parallelleitung
 - Koaxialleitung
 - Schlitzleitung
 - Streifenleitung
 - Hohlleiter
 - Lichtwellenleiter



Maxwellgleichungen lieferten bereits 1864 die mathematischen Grundlagen, um Wellenausbreitungsvorgänge zu beschreiben

Maxwell'sche Gleichungen (1864) für die Elektrodynamik

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \\ \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} &= \int_A \left(\mathbf{J} + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{A} \\ \oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} &= 0 \quad \oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q\end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

Bild 3.2-4 Integralform der Maxwell'schen Gleichungen

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0 \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho\end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

Bild 3.2-5 Differenzialform der Maxwell'schen Gleichungen (ρ ist die Raumladungsdichte)



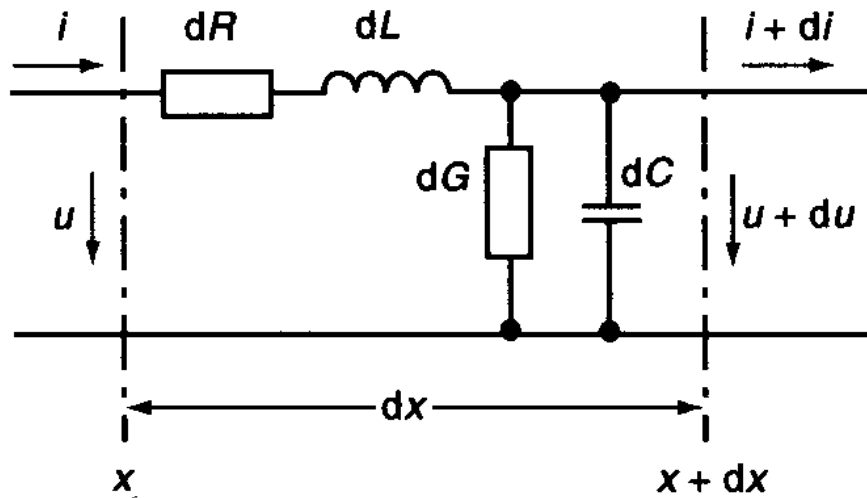


Bild 3.3-4 Ortsabhängigkeit der Spannungen und Ströme am differentiellen Leitungsstück

Leitungsbeläge:
 L', R', C', G'

$$dL = L' \cdot dx$$

$$dR = R' \cdot dx$$

$$dC = C' \cdot dx$$

$$dG = G' \cdot dx$$



Maschen- und Knotenregel für das Leitungselement ergibt die Leitungsgleichung (Telegrafengleichung):

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R'i + L' \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G'u + C' \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L'C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (R'C' + L'G') \frac{\partial u}{\partial t} + R'G'u$$

(2.2.3)



- Superposition einer vorlaufenden und rücklaufenden Spannungswelle erfüllt die Leitungsgleichungen.
- Beliebige Form der Spannungswelle:
 - pulsförmig
 - sinusförmig

$$u(x, t) = u_h(x - v_p t) + u_r(x + v_r t)$$



Einsetzen des Lösungsansatzes in die Wellengleichung und Anpassung an Randbedingungen ergibt:

Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\epsilon_0\mu_r\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} c_0$$

Wegen $v < c_0$ ist die Wellenlänge im Medium verkürzt:

Verkürzungsfaktor: $k = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{c}{c_0} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}}$



- Der Wellenwiderstand ist der Quotient von hinlaufender Spannungswelle und hinlaufender Stromwelle:

$$Z_W = \frac{u_h}{i_h} = \frac{u_r}{-i_r}$$

- Gibt es keine Reflexionen, so ist $u=u_h$ und $i=i_h$ daher gilt:

$$Z_W = \frac{u_h}{i_h} = \frac{u}{i}$$

- Wellenwiderstand für verlustlose Leitung ($R'=G'=0$):

$$Z_W = \frac{u_h}{i_h} = \frac{u_r}{-i_r} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$



- Der Wellenwiderstand ist der Eingangswiderstand einer reflexionsfrei abgeschlossenen Leitung.
- Bei einer unendlich langen Leitung gibt es keine Reflexionen, daher gilt: Der Wellenwiderstand ist der Eingangswiderstand einer unendlich langen Leitung.
- Im Einschaltaugenblick gibt es keine Reflexionen, daher gilt: Der Wellenwiderstand ist der Eingangswiderstand im Einschaltaugenblick

$$Z_{IN} = \frac{u_{IN}}{i_{IN}} = \frac{u_{IN,h} + u_{IN,r}}{i_{IN,h} + i_{IN,r}} = \frac{u_{IN,h}}{i_{IN,h}} = Z_W$$

↑
keine Reflexionen



Definition: $r = \frac{u_r}{u_h}$

anpassen an Randbedingung:

$$Z_L = \frac{u_L}{i_L} = \frac{u_h + u_r}{i_h + i_r} = \frac{u_h \left(1 + \frac{u_r}{u_h}\right)}{i_h \left(1 + \frac{i_r}{i_h}\right)} = Z_W \frac{1+r}{1-r}$$

umformen: $r = \frac{Z_L - Z_W}{Z_L + Z_W}$

r ist eine komplexe Größe!



Pulse auf Leitungen

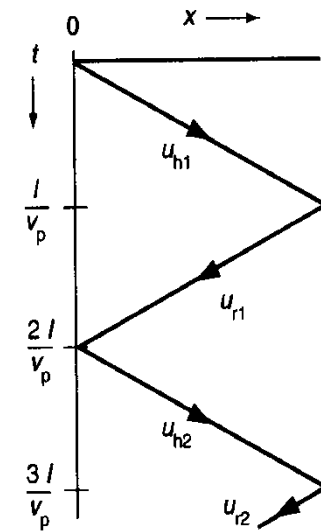
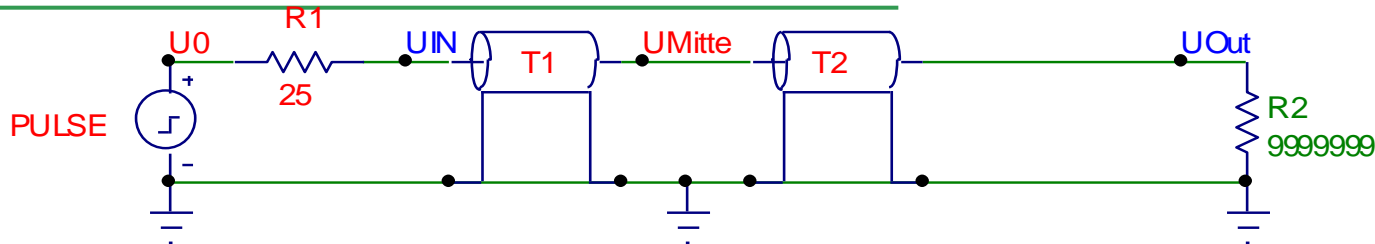
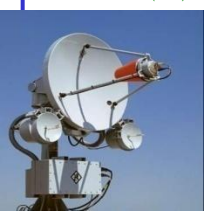
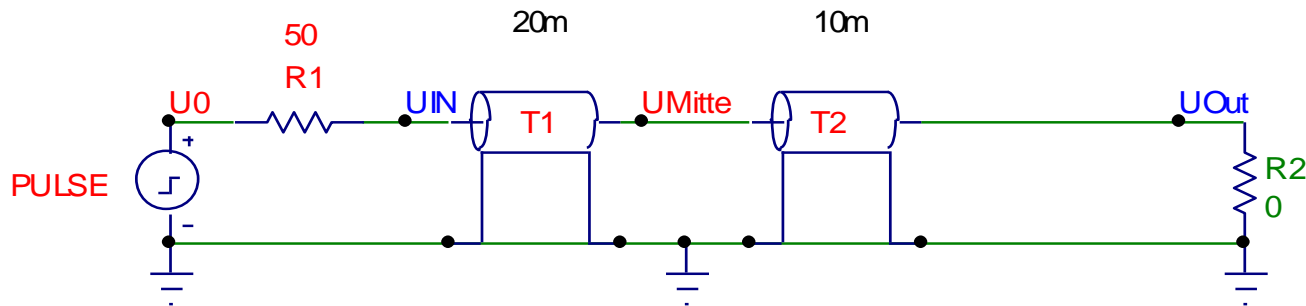


Bild 3.4-5 Grafischer Wellenfahrplan



Aufgaben: Pulse auf Leitungen



geg:

Zwei verbundene RG58-Kabelstücke, angesteuert mit einem einzelnen Impuls: $u = 5V$, $t_P = 30ns$, $300ns$, $3000ns$

$R_1 = 50\Omega$, 20Ω ; $R_2 = 50\Omega$, $\infty\Omega$, 0Ω , 25Ω , 100Ω ,

ges:

Zeitverlauf der Spannungen u_0 , u_{IN} , u_{Mitte} , u_{OUT}



Aufgabe: Leitungsmessung mit Spannungssprung

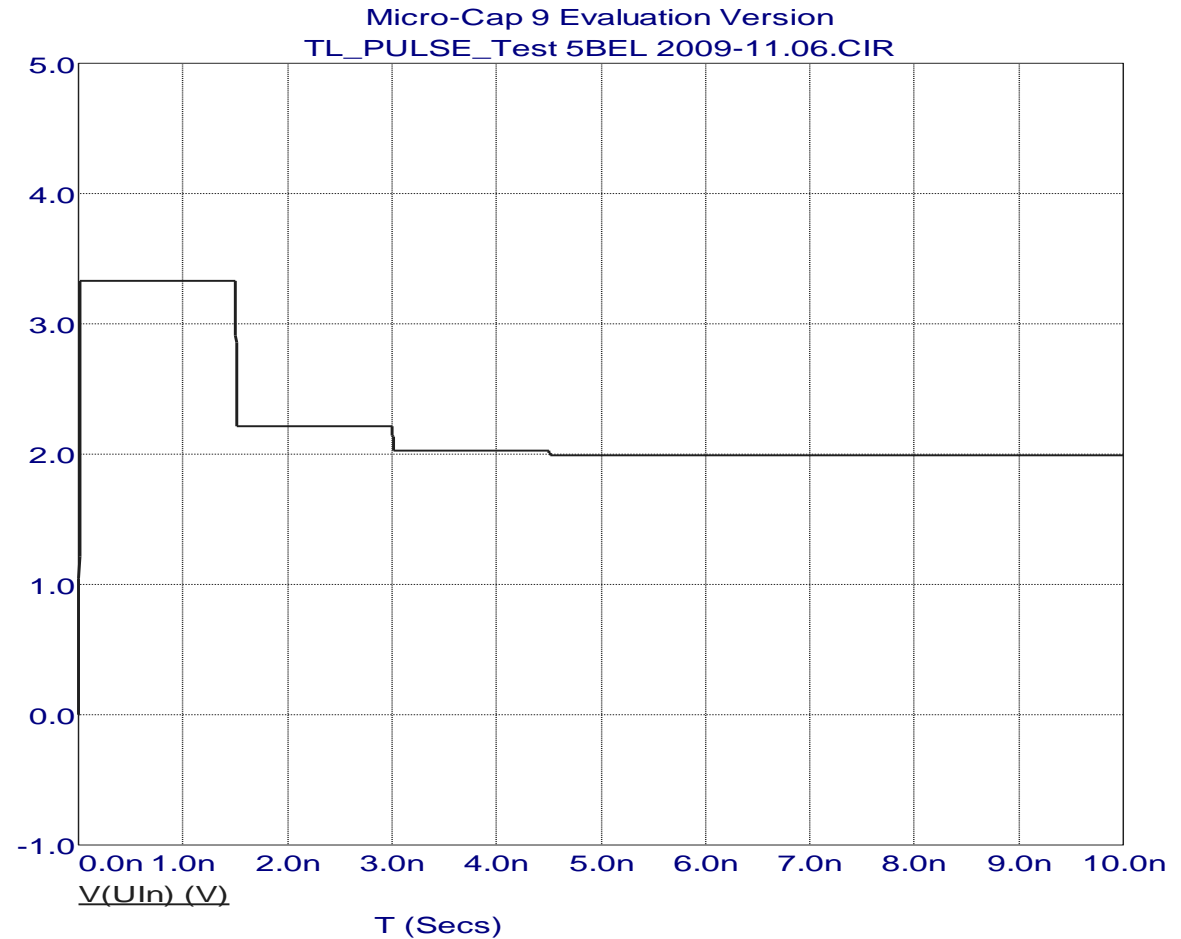
geg:

Generator: $R_i = 50\Omega$

$U_0 = 5V$

Leitungslänge: 17cm

ges: Z_L ; Z_w ; c ; L' ; C'



- Wellenausbreitungsvorgänge muss man bei „schnellen“ Signalen berücksichtigen! Wann ist ein Signal schnell?
- Faustregel 1: Anstiegszeiten kürzer als Laufzeiten, d.h.

$$t_r \cdot c \leq \textit{Leitungslängen}$$

- Faustregel 2: Wellenlänge kleiner als zehnfache Leitungslängen, d.h.

$$\textit{Leitungslänge} \geq \frac{\lambda}{10}$$



Messung des Wellenwiderstandes einer Leitung durch Pulsreflektrometrie

- Methode 1:
Im Einschaltaugenblick gilt der Spannungsteiler

$$u_1 = u_0 \cdot \frac{Z_W}{Z_w + R_i}$$

- Methode 2:
 - Leitung mit Lastwiderstand abschließen.
 - Reflexion bei u_1 (Leitungseingang) beobachten (Oszilloskop).
 - Den Lastwiderstand R_L solange ändern, bis keine Reflexionen mehr auftreten.
 - keine Reflexionen $\rightarrow R_L = Z_w$
 - „Keine Reflexion“ ist auch daran erkennbar, dass der Eingangsimpuls und der Ausgangsimpuls gleich sind.



- Ein FPGA-Baustein auf einer Printplatte ist mit weiteren Bausteinen verbunden. Die größte Leitungslänge ist 3cm. Welche minimale Anstiegszeit dürfen die Signalfanken nicht unterschreiten, damit man Wellenausbreitungsvorgänge unberücksichtigt lassen darf?
- Bei einem Laboraufbau sind ein Signalgenerator, ein Oszilloskop und eine hochohmige Schaltung mit RG58-Kabel verbunden. Die drei 1m langen Kabelstücke sind mit einem BNC-T-Stücken verzweigt. Bis zu welcher maximalen Frequenz darf dieser Schaltungsaufbau verwendet werden?



Übergang zur komplexen
Wechselstromrechnung:

$$L' \frac{di}{dt} \longrightarrow j\omega L'$$

$$C' \frac{du}{dt} \longrightarrow j\omega C'$$

ergibt:

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C')U(x)$$



Der Ansatz: $U(x) = U' e^{-\gamma x} + U' e^{+\gamma x} = U_h(x) + U_r(x)$

gibt folgende Ergebnisse:

$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$ komplexe Ausbreitungskonstante

$Z_W = \frac{U_h}{I_h} = \frac{U_r}{-I_r} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$ komplexer Wellenwiderstand



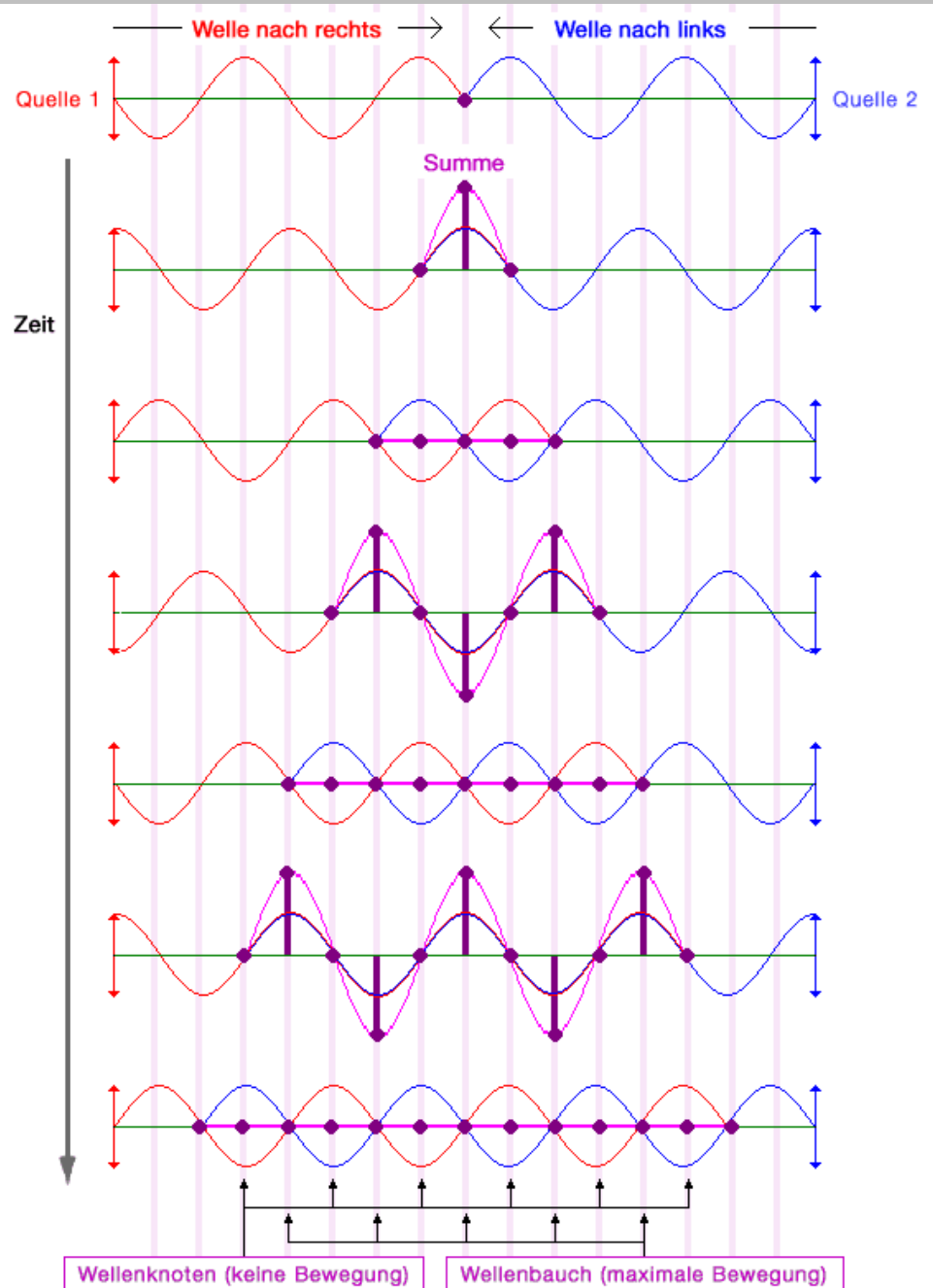
„RG“-Leitung (praktisch uninteressant)	Übertragungstechnik		Höchstfrequenz- technik „verlustlose“ Leitung
	„stark gedämpfte“ Leitung	„schwach gedämpfte“ Leitung	
$G' \gg j\omega C'$ $R' \gg j\omega L'$	$G' \ll j\omega C'$ $R' \gg j\omega L'$	$G' \ll j\omega C'$ $R' < j\omega L'$	$G' \ll j\omega C'$ $R' \ll j\omega L'$
$\alpha \approx \sqrt{R'G'}$ $\beta \approx 0$ $\underline{Z}_W = \sqrt{\frac{R'}{G'}}$	$\alpha = \beta \approx \sqrt{\frac{\omega R' C'}{2}}$ $\gamma = \alpha + j\beta \approx$ $\approx \sqrt{j\omega R' C'}$ $\underline{Z}_W \approx \sqrt{\frac{R'}{j\omega C'}} =$ $= \sqrt{\frac{R'}{\omega C'}} e^{-j\frac{\pi}{4}}$	$\alpha \approx \frac{R'}{2 \underline{Z}_W }$ $\beta \approx \omega \sqrt{L' C'}$ $\underline{Z}_W \approx \underline{Z}_W e^{j\varphi_Z}$ $ \underline{Z}_W \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}}$ $\varphi_Z \approx -\frac{R'}{2\omega L'}$	$\alpha \lambda \approx 0$ $\beta \approx \omega \sqrt{L' C'}$ $\underline{Z}_W \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}}$

Bild 3.5-5 Frequenzabhängigkeit von γ und Z_W



Stehende Welle 1

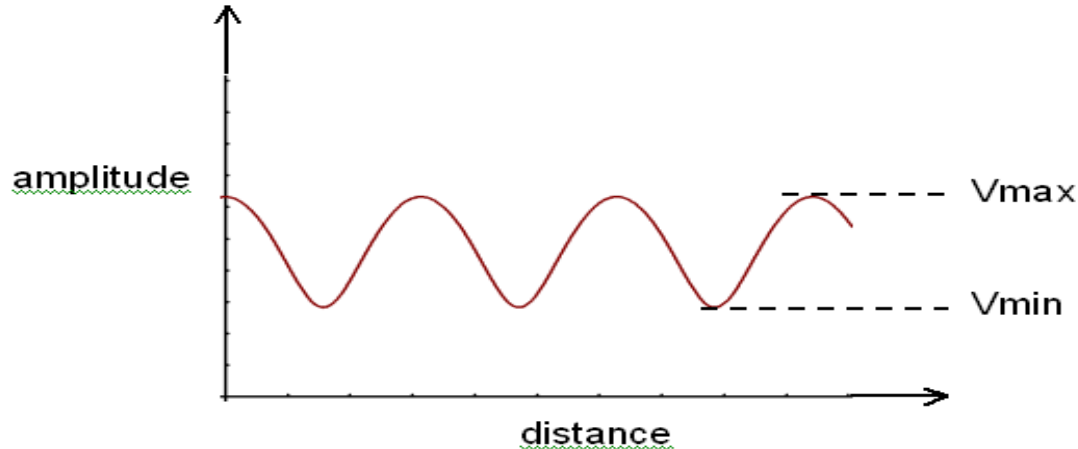
- Hinlaufende und rücklaufende Welle überlagern sich:
 - $U_h + U_r$
 - $i_h + i_r$
- Es entstehen ortsfeste Spannungs- bzw. Strom-Maxima und Minima
 - u_h gleichphasig zu u_r -> Spannungsmaximum
 - u_h gegenphasig zu u_r -> Spannungsminimum



$$VSWR = \frac{u_{\max}}{u_{\min}} = \frac{|u_h| + |u_r|}{|u_h| - |u_r|} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|}$$

$$Z_W > Z_L \Rightarrow VSWR = \frac{Z_W}{Z_L}$$

$$Z_W < Z_L \Rightarrow VSWR = \frac{Z_L}{Z_W}$$



Wertebereich von VSWR:

- Anpassung: $r=0 \rightarrow VSWR=1$
- Totalreflexion: $r=1 \rightarrow VSWR=\infty$



Eingangswiderstand einer abgeschlossenen Leitung

Abschlusswiderstand Z_L
Der Eingangswiderstand ist
periodisch mit $\lambda/2$

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{\frac{Z_L}{Z_0} + j \tan(2\pi \frac{l}{\lambda})}{1 + j \frac{Z_L}{Z_0} \tan(2\pi \frac{l}{\lambda})}$$

Leerlauf-Eingangswiderstand: $Z_L = \infty$
kurze Leitung entspricht Kondensator

$$Z_{IN,LL} = -jZ_0 \cot(2\pi \frac{l}{\lambda})$$

Kurzschluss-Eingangswiderstand: $Z_L = 0$
kurze Leitung entspricht Induktivität

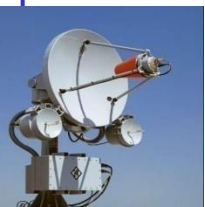
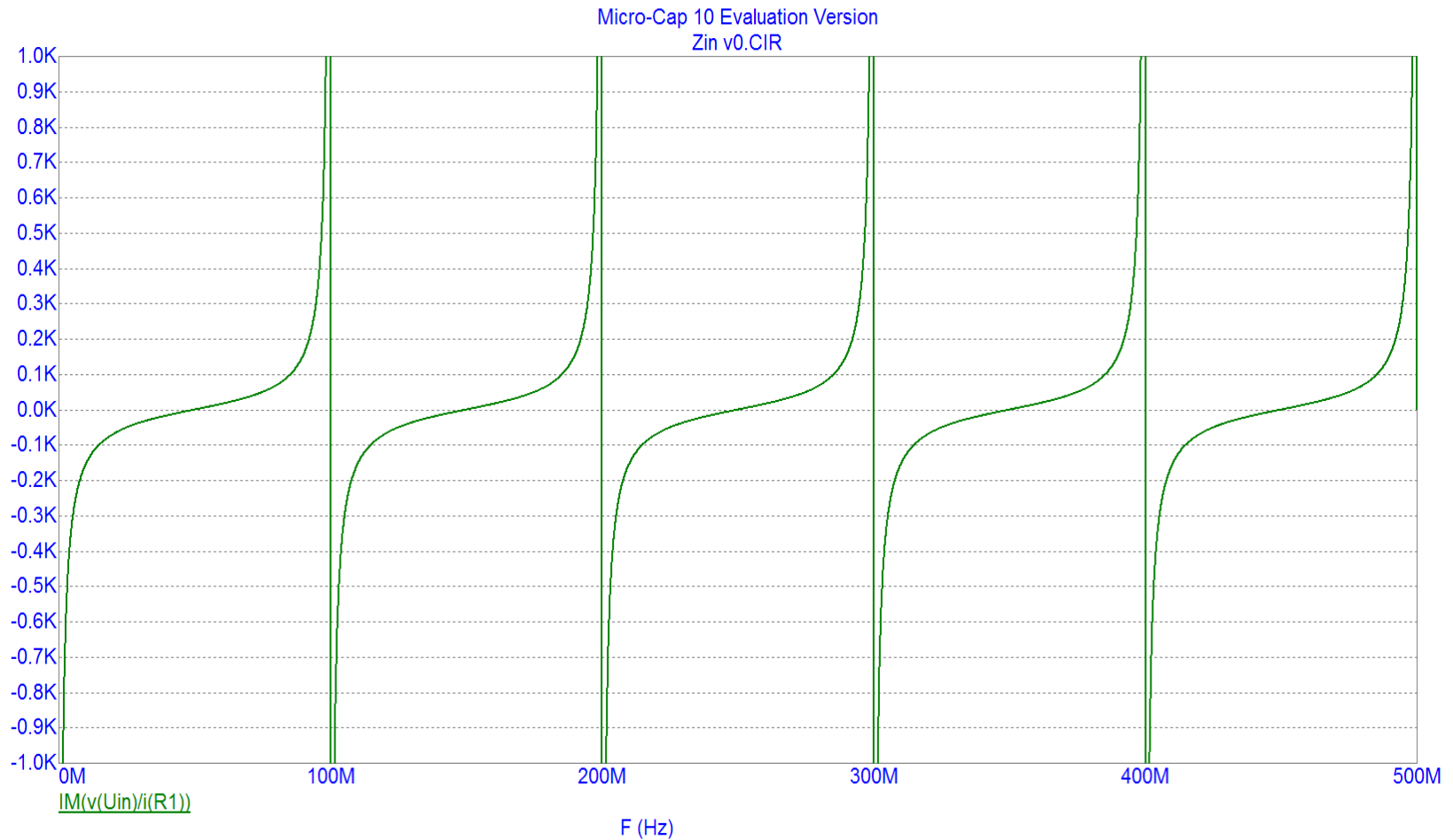
$$Z_{IN,K} = jZ_0 \tan(2\pi \frac{l}{\lambda})$$



- Durch Kurzschluss und Leerlauf am Leitungsende sind beliebige Induktivitätswerte und Kapazitätswerte realisierbar.
 - Anwendung:
 - Stichleitung zur Anpassung
 - Stichleitung als Filter
- $\lambda/4$ -Transformator: $Z_{IN} Z_L = Z_0^2$



Eingangswiderstand einer offenen Leitung



Aufgabe: Stehende Welle

geg:

RG58 Kabel mit der Länge 1m. Die Leitung wird mit einem Generator mit $R_i = 50\Omega$ angesteuert ($f=300\text{MHz}$), und ist mit $R_L = 100\Omega$ abgeschlossen.

ges:

Skizziere die Anordnung. Berechne und skizziere die Stehwelle entlang der Leitung.



geg:

Ein Sendeverstärker sendet mit einer Frequenz von 400MHz. Mit einer Stichleitung soll ein LeitungsfILTER konstruiert werden, das die erste Oberwelle wegfiltert.

ges:

- Leitungsanordnung
- Übertragungsfunktion des Leitungsfilters.



Aufgabe: $\lambda/4$ Transformator

Ein HF-Verstärker wird mit einer HF-Leitung mit einer Antenne verbunden. Der Abstand von Verstärker und Antenne ist 2m. Die Sendefrequenz ist 500MHz. Die Antenne hat einen Eingangswiderstand von 50Ω . Der Verstärker hat einen Ausgangswiderstand von 20Ω .

Ein Teil der 2m langen Anschlussleitung wird als $\lambda/4$ -Transformator ausgeführt, um damit eine Anpassung vorzunehmen.

Skizziere die Anordnung und gib die Wellenwiderstände und die Längen der Leitungsstücke an.

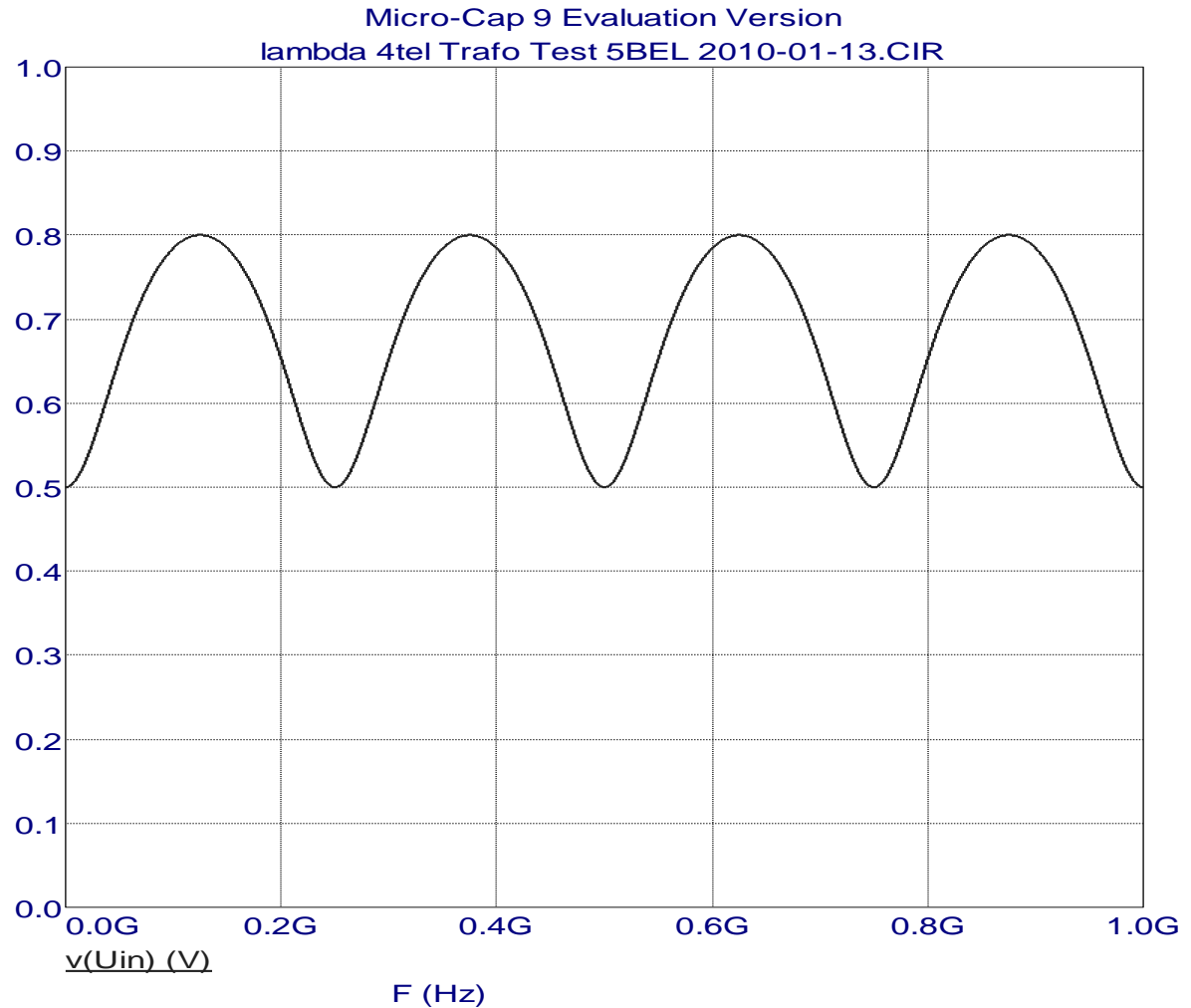


Aufgabe: Leitungsmessung 1

geg:

- Generator: $R_i = 50\Omega$; $U_0 = 1V$
- Leitungslänge: 40cm
- Die Frequenz wird von 0Hz bis 1GHz durchgestimmt und es wird die Spannung am Eingang der Leitung gemessen. Dabei ergibt sich der in der nebenstehenden Abbildung gezeigte Frequenzverlauf.

ges: VSWR; Z_L ; Z_w ; c ; L' ; C'

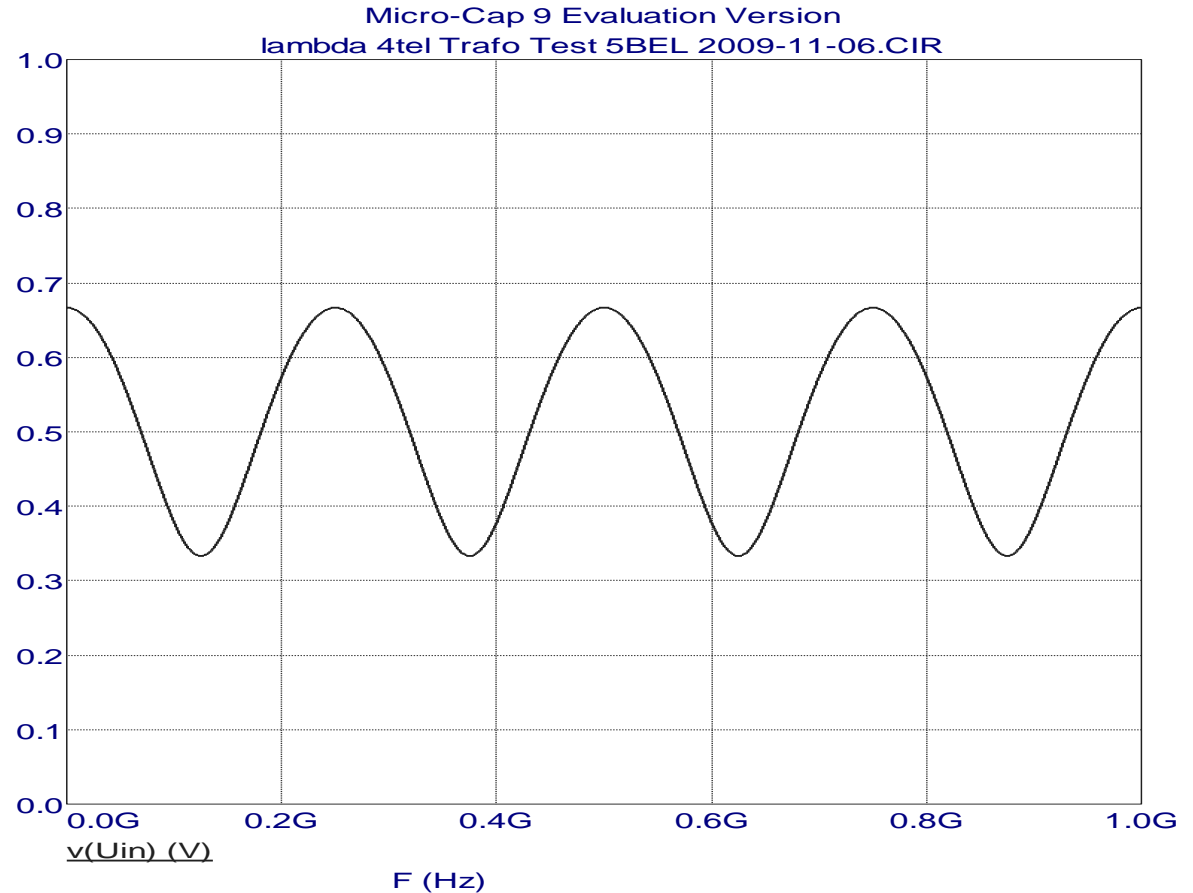


Aufgabe: Leitungsmessung 2

geg:

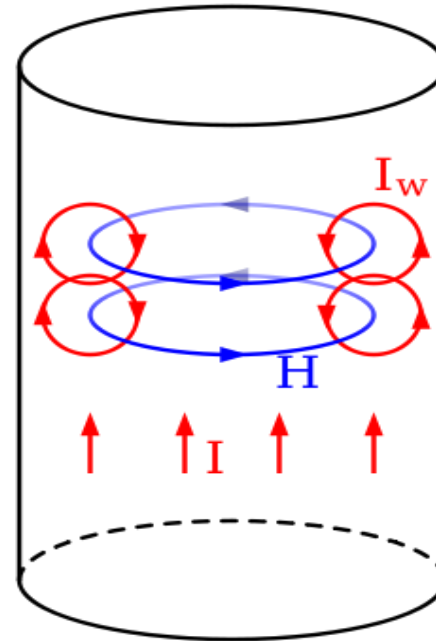
- Generator: $R_i = 50\Omega$; $U_0 = 1V$
- Leitungslänge: 36cm
- Die Frequenz wird von 0Hz bis 1GHz durchgestimmt und es wird die Spannung am Eingang der Leitung gemessen. Dabei ergibt sich der in der nebenstehenden Abbildung gezeigte Frequenzverlauf.

ges: VSWR; Z_L ; Z_w ; c ; L' ; C'



- Wechselstrom induziert Wirbelströme, die dem ursprünglichen Strom entgegengerichtet sind.

Frequenz	δ
50 Hz	9.38 mm
60 Hz	8.57 mm
10 kHz	0.66 mm
10 MHz	21 μm



$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \mu_r \sigma}}$$

σ Leitfähigkeit



- Leitungen mit möglichst großer Oberfläche:
Rohre sparen Material und Gewicht. Wo kein Strom fließt, braucht man auch kein Leitermaterial.
- Oberfläche hochleitfähig beschichten: Gold, Silber
- Oberfläche sehr glatt -> Stromweg kürzer
- Hochfrequenzlitze: viele gegeneinander isolierte Drähte; so verflochten, dass im Mittel jeder Einzeldraht möglichst jede Stelle im Gesamtquerschnitt der Litze gleich oft einnimmt.

