



Implementation av en finit differensmetod för flödesproblem

Felix Steinberger Eriksson
`felix.s.eriksson@gmail.com`

under handledning av
Lars Adiels

Vårterminen 2020
Norra Real

Abstract

Fluid dynamics is an extensive research area of many use cases; where experiments are impractical and analytic solutions fail, numerical alternatives are needed. One type of such methods used to compute numerical solutions to the governing partial differential equations are finite difference methods. This paper describes the design and implementation of a finite difference solver for incompressible, viscous flows using forward, backward and central difference schemes for first order derivative approximations, in addition to an adapted second order central difference scheme. A coupling between velocity and pressure is established in the form of an iterative approach to a Poisson equation. Regular and periodic boundary conditions to simulate physical phenomena are developed. Finally, the general applicability, order of accuracy, consistency and stability of the solver are discussed in depth with a comprehensive Von Neumann stability analysis of the schemes used.

1 Inledning

En betydande del av världen består av eller påverkas av vätskor och gaser. Inte oväntat har även en motsvarande stor del av den naturvetenskapliga forskningen genom historien med början i Arkimedes observationer om flytkraft bedrivits just om vätskor och gaser. Forskningen ökade markant under den industriella revolutionen, huvudsakligen på grund av den nyfunna nyttan inom motorer. I vår vardag andas vi luft, dricker vatten, färdas i motordrivna bilar och flyger kanske i ett flygplan. Likaså bedrivs forskning bland annat om vätskeflödet i motorer (Schwer & Kailasanath, 2013), om blodcirkulationssystemet (Dinnar, 2019), om flygplansvingar (Zhu, McCrink, Bons, & Gregory, 2020) och om de aerosolflöden som spelar en nyckelroll i spridningen av virusburna infektionssjukdomar (Mittal, Ni, & Seo, 2020).

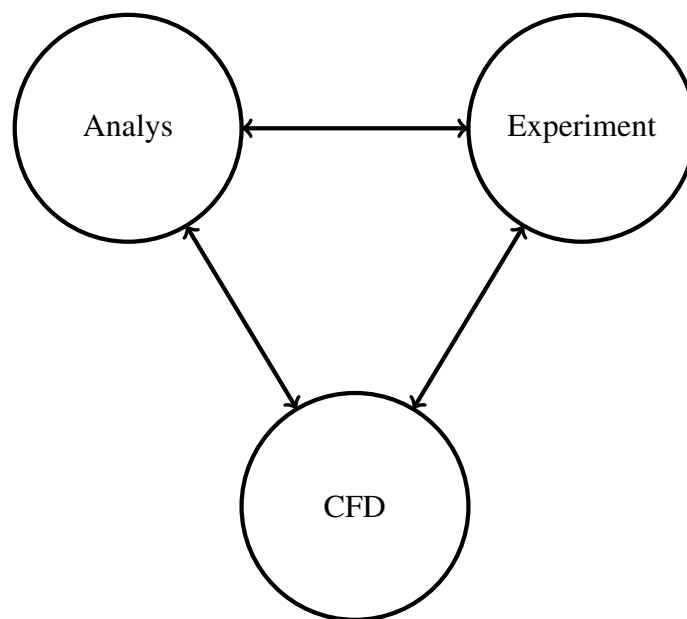
1.1 Varför CFD?

Ett betydande problem och en bestående svårighet med fluiddynamiken är de ekvationer som beskriver vätskors och gasers rörelse i tre dimensioner idag ännu inte har en bekant generell analytisk lösning. En lösning antas däremot finnas, och betydande framsteg inom området skulle belönas med ett millenniepris (Ladyzhenskaya, 2003). Det är alltså inte alltid praktiskt möjligt att med enbart matematisk analys sluta sig till ett resultat. Redan i härledningen gör vi förenklingar som att anta inkompressibilitet och att fluiden följer Newtons viskositetslag: Trots att giltigheten blir mindre generell så blir hanteringen och formuleringen lättare. Vanligt är också—framför allt för att lära ut teorin—att betrakta ekvationerna i endast två dimensioner istället för tre. För det fallet existerar nämligen analytiska lösningar för flera specialfall. Det faktum att den praktiska nyttan av en tvådimensionell modell på ett reellt, tredimensionellt problem i många fall är som bäst begränsad är dock också uppenbart.

Traditionellt har i fall där matematisk analys ej räckt till istället experiment utförts. Ännu idag sker en stor del av forskningen i fluiddynamik inom det experimentella. Det finns dock ett antal nackdelar med empiriska försök. Delvis kommer resultaten från ett experiment alltid ha begränsad generalitet jämfört med exempelvis en analytisk lösning på samma problem. Exper-

imentets resultat kommer alltid påverkas mer eller mindre av de specifika tillstånd som existerade just då försöket genomfördes. Ett mycket större problem är dock kostnadsaspekten. För pålitliga resultat vid experiment krävs utrustning av hög kvalitet, kunnig personal och tid. Det driver upp kostnaden, vilket leder till att bara få av de problem som skulle kunna undersökas faktiskt gör det.

Sist men inte minst händer det inte sällan att forskare vill undersöka ett fluiddynamiskt system som inte är praktiskt möjligt eller realistiskt att undersöka empiriskt. Här kan nämnas framför allt fenomen på väldigt stor och väldigt liten skala, samt sådana som direkt involverar människor. Det är till exempel inte möjligt i praktiken att göra relevanta och noggranna mätningar på vädersystem (Schneiderbauer, Tschachler, Fischbacher, Hinterberger, & Fischer, 2008), då dessa är för stora, och människans cirkulationssystem—som är av specifikt intresse för att förebygga sjukdomar—är både för litet för att hanteras noggrannt samt problematiskt då det är svårt att undersöka under etiska förhållanden (Petkova, Hossain, Naser, & Palombo, 2003).



Figur 1: Samverkan mellan analytisk fluiddynamik, empiriska metoder och CFD.

Sedan 50-talet (Harlow, 2004) används i relativt stor utsträckning som ett tredje alternativ till analys och empiri även datoriserade simulationer, så kallad *Computational Fluid Dynamics* eller CFD. CFD utgörs av diverse metoder för att lösa eller approximera Navier-Stokes ekvationer eller specialfall av dem numeriskt. På detta vis kan en ungefärlig lösning finnas till

mycket lägre kostnad än exempelvis empiriska metoder, och CFD kan tillämpas där analytiska lösningar helt enkelt ännu inte är ett alternativ. CFD är dock ingalunda en universallösning som helt kan ersätta de tidigare etablerade grenarna; snarare bör det ses som ett praktiskt komplement till de tidigare nämnda metoderna. Ett vanligt scenario är exempelvis att ett experiment modelleras med stor variation med hjälp av en dator för att få en fingervisning om vilka parametrar som verkar lovande för ett resultat. Därefter utförs empiriska mätningar, men då redan med bättre insyn i användbara ändringar. På så vis är det möjligt att hitta en kompromiss mellan säkerheten och verklighetstrogenheten som empiri erbjuder och prisvärdheten som CFD erbjuder. I samma anda samverkar datormodellering och analytisk fluiddynamik: CFD är en ung disciplin som fortfarande utvecklas, till viss del genom analytiska framsteg, men problem i CFD kan på samma vis visa på grundläggande oklarheter inom den analytiska fluiddynamiken och leda utvecklingen framåt.

1.2 Introduktion till fluiddynamik

Innan vi fortsätter är det dock av yttersta vikt att redogöra för grunderna inom den analytiska fluiddynamiken, då den utgör en absolut nödvändig förutsättning för förståelse av CFD. Inom fluiddynamiken betraktas både statiska och dynamiska system, där fluider¹ antingen står still eller rör på sig. En lejonpart av forskningen och användningsområdena inom fluiddynamiken återfinns inom den grenen som behandlar dynamiska system. Den delen kallas ofta strömmingsmekanik och är den som framför allt diskuteras här. Trots de på första anblick olika naturerna är det i grund och botten samma ekvationer som beskriver båda sorters system. Beroende på situation och syfte kan vissa antaganden göras om systemets fysiska egenskaper för att förenkla beräkningarna. Vanligt är exempelvis att bortse från tyngdkraftens påverkan på ett system, att betrakta viskositeten hos förhållandevis icke-trögflytande vätskor som 0 eller att betrakta vätskor som inkompressibla. Detta förenklar de styrande ekvationerna, då någon term kan likställas med 0 eller betas sig på ett mer förutsägbart vis.

De styrande ekvationerna kallas Navier-Stokes ekvationer, efter Claude-Louis Navier och

¹Substanser som deformeras under skjuvspänning, oftast vätskor eller gaser, kallas med ett begrepp fluider.

George Gabriel Stokes. Dessa partiella differentialekvationer kan härledas på olika sätt genom att tillämpa Newtons andra lag på fluidrörelsen, samtidigt som dragspänningen i fluiden antas bero på trycket i fluiden och en viskös term. Ekvationerna kan formuleras både som partiella differentialekvationer och som integralekvationer.

1.2.1 Några vektoroperatorer och den materiella derivatan

Vi börjar med att definiera operatoren del, symboliserad av ∇ , i ett kartesiskt koordinatsystem \mathbb{R}^n med vektorer på formen (x_1, \dots, x_n) och standardbasen $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ som

$$\nabla = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right). \quad (1)$$

Operatoren sammanfattar på ett praktiskt sätt den partiella förstaderivatan på vektorform. Med hjälp av ∇ kan andra operatorer definieras, som senare ska bli användbara. Gradienten kan ses som en flervariabelsgeneralisering av derivatan. Den definieras för en funktion f på samma koordinatsystem som ovan som

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \vec{e}_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Vi kan dessutom definiera divergensen på ett vektorfält \mathbf{F} med samma definition som det kartesiska koordinatsystemet ovan som

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot (F_1, \dots, F_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}. \quad (3)$$

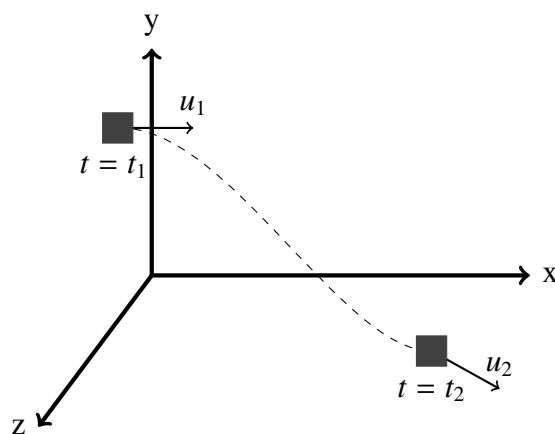
Divergensen av ett vektorfält är alltså ett skalärfält. I vår tillämpning använder vi framför allt divergensen av hastighetsfältet.

Vi kan också definiera den så kallade Laplace-operatoren ∇^2 som i ett kartesiskt koordinatsystem ges av summan av partiella andraderivator av en funktion med respekt till varje

oberoende variabel. Vi kan alltså för ett kartesiskt koordinatsystem enligt ovan skriva Laplaceoperatorn på f som

$$\nabla^2 f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}. \quad (4)$$

Sist men inte minst definierar vi den materiella derivatan $\frac{D}{Dt}$, framför allt för att senare spara plats. Vi betraktar ett fludelement i figur 2 som rör sig i en kartesisk (oftast två- eller tredimensionell) rymd. Basvektorerna utmed x-, y- och z-axeln låter vi heta \vec{i} , \vec{j} och \vec{k} . Vektorfältet för hastigheten ges av $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$, där u_x , u_y och u_z alla är beroende av tre rumskoordinater och en tidskoordinat.



Figur 2: Ett fludelement som rör sig genom rummet kan ändra hastighet både genom lokala och tidsberoende förändringar.

Mellan $t = t_1$ och $t = t_2$ har hastigheten ändrats, men inte bara eftersom \vec{u} är tidsberoende utan även eftersom fludelementet har förflyttat sig i rymden. Vi säger för kartesiska koordinater att hastigheten \vec{u} förändras enligt

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} \equiv \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} + \vec{u} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} + \dots \quad (5)$$

1.2.2 Massans bevarande

I ett slutet system där ingen massa tillförs eller försvinner, kan—vid icke-relativistiska villkor—massan inte ändras, utan förblir konstant. Ett annat sätt att formulera detta på är att låta

den substantiella derivatan av hela systemet vara 0, enligt

$$\frac{Dm_{sys}}{Dt} = 0, \quad (6)$$

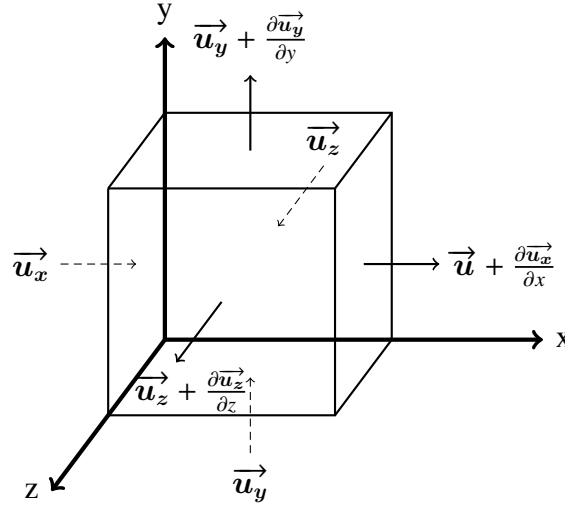
där m_{sys} beskriver systemets totala massa. Med hjälp av Reynolds transportteorem (Reynolds, Brightmore, & Moorby, 1900; Yamaguchi, 2008) kan vi skriva om ekvation 6 genom att betrakta endast en fixerad volym i systemet, genom vilken fluiden i fråga rör sig—hädanefter kallad *kontrollvolym*. Med *c.v.* som kontrollvolym och *c.s.* som kontrollvolymens yta kan vi enligt Gauss divergenssats (Anderson, 1992) skriva att ekvationen ovan motsvarar

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{c.v.} \rho dV \right) + \iint_{c.s.} \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA = 0. \quad (7)$$

Den första integraltermen uttrycker den tidsberoende massändringen för den fixerade kontrollvolymen och den andra termen beskriver massaflödet ortogonalt mot kontrollvolymens yta i alla mantelareans punkter, eftersom $\vec{u} \cdot \hat{n}$ beskriver skalärprodukten av fluidens lokala hastighet \vec{u} med ytnormalen \hat{n} i en given punkt. Den totala förändringen i massa beskrivs av vänsterledets två termer och kan ställas lika med 0. Vi ska nu skriva om ekvation 7 på differential form, och betraktar därför ett litet fludelement av storlek $\delta x \delta y \delta z$. Eftersom vi betraktar väldigt små element kan vi anta att densiteten ρ är konstant för ett godtyckligt sådant element, även om densiteten varierar över systemet. Då kan första termen ovan skrivas som

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{c.v.} \rho dV \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z. \quad (8)$$

Den andra termen i ekvation 7 beskriver som sagt netto-massaflödet över kontrollvolymens yta. För att beskriva den på differential form betraktar vi vårt fludelement som ett rätblock eller en kub enligt figur 3. På så vis kan vi iaktta att massaflödet i en riktning kan bestämmas utifrån endast densiteten och hastighetskomponenten i den riktningen.



Figur 3: Massaflödet över ett distinkt fluidelement med differentiala sidlängder.

Betrakta den vänstra av de två sidorna ortogonala mot x-axeln. Hastighetskomponenten i x-riktning är \vec{u}_x , vilket innebär att den massa som strömmar till volymen genom denna sida är $(\rho \vec{u}_x) \delta y \delta z$. Om hastigheten har den x-beroende derivatan $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}$, så kommer den massa som strömmar ut genom den högra sidan vara $(\rho \vec{u}_x + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \delta x) \delta y \delta z$. Nettomassaflödet i x-led kan beskrivas som de två flödenas differens

$$\left(\rho \vec{u}_x + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z - (\rho \vec{u}_x) \delta y \delta z = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \delta x \delta y \delta z. \quad (9)$$

Samma resonemang kan upprepas i y-led och z-led för att få

$$\oint_{c.s.} \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \delta y \delta z \delta x + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \delta z \delta x \delta y. \quad (10)$$

Eftersom volymen är distinkt nollskiljd kan vi (efter insättning av ekvation 8 och ekvation 10 i ekvation 7) dividera med den på båda sidor. Vi kan också inse att vårt vänsterled då kan skrivas som

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = 0 \iff \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} = 0 \iff \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (11)$$

För inkompressibelt flöde—det vill säga flöde där fluidens densitet är konstant—beskriver den andra delen av ekvation 11 fullständigt massans bevarande i ett slutet system.

1.2.3 Rörelsemängdens bevarande

Likt ovan ska vi med grund i Newtons andra lag härleda en princip för konservering av rörelsemängd vid fluidrörelse. Vi kan ställa upp Newtons andra lag som en integral över hela det betraktade systemet

$$\vec{F} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{sys} \vec{u}_m dm \right) \quad (12)$$

eftersom rörelsemängden \vec{p} motsvarar produkten av massan m och den massans hastighet \vec{u}_m för ett godtyckligt litet masselement. På samma sätt som ovan kan vi använda Reynolds transportteorem för att uttrycka detta samband på integralform för en kontrollvolym $c.v.$ enligt

$$\sum_{c.v.} \vec{F}_{c.v.} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{c.v.} \vec{u} \rho dV \right) + \iint_{c.s.} \vec{u} \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA, \quad (13)$$

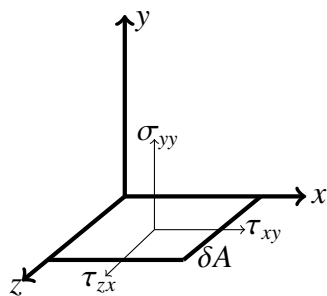
där vänsterledets första term beskriver tidsderivatan av kontrollvolymens rörelsemängd och den andra termen består av de rörelsemängdskomponenter som går normalt mot kontrollvolymens yta i alla punkter. Om vi nu likt ovan betraktar ett litet element—den här gången av massa och inte volym—så kan vi ställa upp en differential form även av ekvation 13. För masselementet δm gäller alltså att

$$\delta \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} \delta m) = \delta m \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} = \delta m \vec{a}. \quad (14)$$

Vi kan i en fluid iakta två sorters krafter: Volymkrafter och ytkrafter (Fung, 1977). Exempel på volymkrafter är tyngdkraften och krafter som uppstår genom magnetiska eller elektriska fält. Karakteristiskt för dessa är att de verkar just över en kropps hela volym. Ytkrafterna däremot verkar endast vid kroppens yta; några exempel på dessa är normalkrafter, dragkrafter och skjuvkrafter². Vi kommer i härledningen endast beakta tyngdkraften bland volymkrafterna, men bland ytkrafterna ställer vi upp en normalkraft och två ortogonala tangentiellt verkande

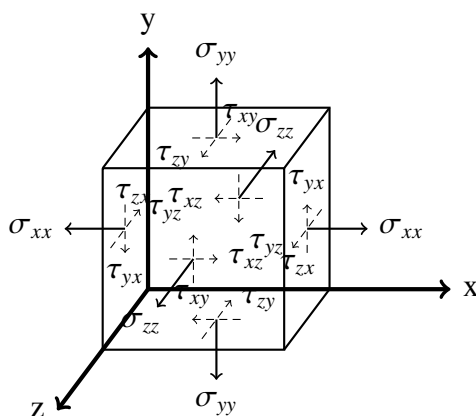
²Skjuvkrafter är krafter som deformerar en kropp genom att verka parallellt med ytarean. Strikt sagt uppstår skjuvkrafter, som till exempel friktionskrafter, endast i fasta kroppar, då en fluid direkt deformerar genom en potentiellt uppstående skjuvkraft.

krafter. Dessa antas verka på ett areaelement δA så att de alla tre är vinkelräta mot varandra. Tangentkrafterna ligger i samma plan som δA och normalkraften är vinkelrät mot det planet. Vi låter nu de spänningar som uppstår som följd av krafterna beskrivas av σ_n (normalspänningen) samt τ_1 och τ_2 (de två tangentiella spänningarna). Här används en indexnotation där varje spänningskomponent har två index, och där det första beskriver riktningen av normalen till den sida spänningen agerar på och det andra spänningens riktning (Pedley, 1997).



Figur 4: Ytkrafterna på ett ytelement δA som ligger ortogonalt mot y-axeln. σ_{yy} är normalspänningen och τ_{xy} och τ_{zy} är de tangentiella spänningarna i x -respektive z -riktning.

Till exempel är σ_{xx} en normalspänning på planet som är ortogonalt mot x -axeln, och τ_{yz} är en tangentialspänning som agerar parallellt med z -axeln på planet ortogonalt mot y -axeln. Vi kan konstatera att de båda indexen är lika om och endast om spänningen är normal. Vi väljer alltså att betrakta vårt massaelement som en infinitesimal kub orienterad utefter ett tredimensionellt koordinatsystem.



Figur 5: Alla normala och tangentiella spänningar som agerar på ett infinitesimalt fludelement. Positiv eller negativ riktning på vektorn är godtycklig och de namn som används i figuren beskriver endast vilken sorts spänning vektorn symboliserar, inte dess magnitud.

I illustrationssyfte iakttas den totala nettoytkraften i x-riktning $\delta \vec{F}_x$ som agerar på vårt fluidelement. Den motsvarar

$$\delta \vec{F}_x = \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} \delta x - \sigma_{xx} \right) \delta y \delta z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} \delta y - \tau_{yx} \right) \delta z \delta x + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \delta z - \tau_{zx} \right) \delta x \delta y, \quad (15)$$

där vi alltså får nettokraften i x-riktning som differensen mellan krafterna i x-riktning mellan vardera två parallella ytor av kubens. Spänningen (och därmed kraften) längs en axel vid den ena arean kan beräknas utifrån spänningen vid den andra och rumsderivatan i den riktningen för spänningen. Detta kan också skrivas något mer kompakt som

$$\delta \vec{F}_x = \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right) \delta x \delta y \delta z. \quad (16)$$

Vi kan med samma resonemang etablera nettoytkrafterna i y- och z-riktning som

$$\delta \vec{F}_y = \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right) \delta x \delta y \delta z \quad \text{och} \quad (17)$$

$$\delta \vec{F}_z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} \right) \delta x \delta y \delta z. \quad (18)$$

Genom att konstatera att $\delta m = \rho \delta x \delta y \delta z$ och med hjälp av ekvationerna 14, 16, 17 och 18 kan vi nu ställa upp en rent fysisk härledning av rörelselagarna för fluider med bas i Newtons andra lag. Vi kan ställa upp x-komponenten med dessa ekvationer samt en generell volymkraft g (för vilken vi ännu inte antar någon riktning) som

$$\rho \frac{Du_x}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx}. \quad (19)$$

Det bör förtydligas att båda led i ekvation 19 redan dividerats med $\delta x \delta y \delta z$, eftersom den volymen (som är nollskiljd) uppkommer i form av massa ($\rho \delta x \delta y \delta z$) i vänsterled samt i högerledets första term såväl som i högerledets övriga tre termer. Vi kan på samma vis ställa upp en ekvation vardera för y-riktning och z-riktning, men dessa skrivs av platsskäl inte ut. Som sista steg i härledningen kan vi generalisera ekvationen ännu mer genom att anta att fluiden följer Newtons

viskositetslag. För en sådan fluid gäller ett proportionellt samband mellan spänning och deformation. Vi kommer vidare att anta inkompressibilitet, då det generella kompressibla fallet är mer invecklat och i vår tillämpning inte nödvändig. Detta ger oss två egenskaper, viskositeten och densiteten, som förblir konstanta för fluiden. Det kan visas (Temam, 2001) att vi kan ställa upp samband mellan normalspänning, trycket p och viskositeten med viskositetskoefficienten μ enligt

$$\sigma_{xx} = -p_x + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (20a)$$

$$\sigma_{yy} = -p_y + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (20b)$$

$$\sigma_{zz} = -p_z + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (20c)$$

Eftersom flödet antas vara inkompressibelt har vi dock att hastighetens gradient $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, vilket är det samma som att $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$. På så vis kan vi skriva att

$$\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = -p. \quad (21)$$

För de tangentiella spänningarna gäller på samma vis proportionalitet mot deformationen, men också symmetri. Eftersom vårt fludelement inte roterar kan vi med hjälp av en balans i kraftmoment härleda (McLennan, 1966) att

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \quad (22)$$

På samma vis har vi att

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad (23)$$

och att

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right). \quad (24)$$

Vi har nu i ekvationerna 21, 22, 23 och 24 alla spänningar som funktioner av någon derivata av hastigheten. Vi kan alltså skriva om ekvation 19 och motsvarande för y-riktning och z-

riktning utan något beroende på spänningstermerna. Vi kan då sätta in uttrycken för spänningstermerna i ekvation 19 för att få

$$\rho \frac{Du_x}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p_x}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \quad (25)$$

vilket kan skrivas om som

$$\rho \frac{Du_x}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p_x}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \right). \quad (26)$$

Den sista termen kan skrivas om och likställas med 0,

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x} (0) = 0, \quad (27)$$

eftersom vi igen har att $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ på grund av fluidens inkompressibilitet. På så vis har vi i x-riktning att

$$\rho \frac{Du_x}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p_x}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right). \quad (28)$$

I enlighet med ovan kan ekvationer för y-riktning och z-riktning ställas upp, vilka kan sammanfattas på vektorform som

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla \vec{p} + \mu \nabla^2 \vec{u}. \quad (29)$$

1.3 Syfte

Studien ämnar utveckla en numerisk lösare för en förenklad variant av Navier-Stokes ekvationer, för att kunna modellera enkla flöden (huvudsakligen kanalströmning). För detta diskretiseras ekvationerna så att de kan lösas iterativt med en finit differensmetod.

1.4 Begränsningar

Studiens främsta begränsning är att modellen endast är avsedd för tvådimensionella flöden och inte de tredimensionella flöden som existerar i verkligheten. Med detta följer en klar begrän-

sning i modellens realism och praktiska tillämplighet. Likaså har förenklingar i de styrande ekvationerna gjorts, som—även om de gör modellering avsevärt lättare—drastiskt minskar realismen i resultaten. Modellen bygger på ett kanalflöde, men kan anpassas till andra geometrier. Över lag bör modellen betraktas som en s. k. *toy model*, vars huvudsakliga nytta ligger i byggandet av vidare förståelse och ingivelsen av intuition, snarare än realistiska numeriska simulationer av realistiska fysikaliska fenomen.

2 Metod

Grundproblemet i CFD är att verkligheten, och därmed Navier-Stokes ekvationer, är kontinuerliga, men att datorer är känt dåliga på att behandla kontinuerliga matematiska entiteter. Datorer är däremot förhållandevis väldigt effektiva på att hantera diskreta matematiska beräkningar med siffror av normala storleksordningar. En avgörande del av forskningen har ägnats åt sätt att approximera den kontinuerliga verkligheten på ett sätt som är både effektivt att beräkna, precis nog för att vara applicerbart på verkligheten och stabilt³.

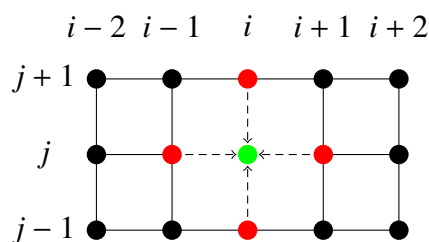
Modellen använder en typ av finit differensmetod (Forsythe & Wasow, 1960) för att approximera de styrande ekvationerna. Finita differensmetoder är tillsammans med finita volymmetoder (Versteeg & Malalasekera, 2007), finita elementmetoder (Zienkiewicz, Taylor, Nithiarasu, & Zhu, 1977), spektrala elementmetoder (Patera, 1984) och randelementmetoder (Chen & Zhou, 1992) bland de vanligast använda metoderna för approximativ lösning av partiella differentialekvationer.

2.1 Finita differensmetoder

Grundtanken för finita differensmetoder är att approximera partiella derivator med hjälp av Taylorutvecklingar och skapa ett kartesiskt koordinatsystem som får stå för rummet, för att kunna finna en närmelösning numeriskt. Både i härledningen och i modellen betraktas endast

³Det vill säga att eventuella numeriska fel begränsas till en viss storleksordning, och inte blir dominerande i lösningen. För finita differensmetoder är stabilitet enligt Lax ekvivalenssats (Lax & Richtmyer, 1956) ett nödvändigt och tillräckligt krav för konvergens hos en konsistent diskretisering av ett begynnelsevärdesproblem.

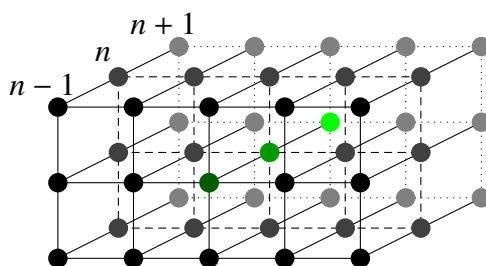
det tvådimensionella fallet.



Figur 6: Ett tvådimensionellt kartesiskt koordinatsystem som approximation av det kontinuerliga planet. Värdet i punkten (i, j) beror bara på värden i punkterna $(i - 1, j)$, $(i, j + 1)$, $(i + 1, j)$ och $(i, j - 1)$.

Vi betraktar ett koordinatsystem som det i figur 6, där en godtycklig punkt utan inskränkning kan betraktas som origo. Koordinatsystemet är en diskret förenkling av det kontinuerliga planet. I den förenklingen har varje punkt (i, j) precis fyra grannar: $(i - 1, j)$, $(i, j + 1)$, $(i + 1, j)$ och $(i, j - 1)$. Vi erinrar oss om att de styrande ekvationerna har partiella rumsderivatatermer. Funktionsvärdet i en given punkt är alltså beroende av kringliggande punkters funktionsvärden; så är även fallet för det diskretiserade planet. Närmare bestämt ser vi att funktionsvärdet i (i, j) är direkt beroende av alla fyra grannar, men inga fler. Detta är en nyckelinsikt för att metoden ska fungera.

Diskretiseringen fungerar på samma sätt i tiden. I två rumsdimensioner kan detta smidigt visualiseras med hjälp av den tredje rumsdimensionen, som i figur 7. Samma visualisering fungerar naturligtvis inte i en modell med tre rumsdimensioner, men konceptet är generellt.



Figur 7: För en tvådimensionell modell kan tiden visualiseras på den tredje rumsdimensionen. Det mittersta lagret representerar planet vid tiden $t = n$.

Innan vi försätter inför vi ny, smidigare notation. Vi betraktar punkter på vårt rutnät, och låter Δx och Δy vara avstånden i x - respektive y -led på rutnätet. Vi kommer även att använda

subskript för rumskoordinater och superskript för tid. Exempelvis låter vi vid tiden $t = n$ funktionsuttrycket $u(i, j)$ betecknas av $u_{i,j}^n$. För att diskretisera Navier-Stokes ekvationer komplett krävs en diskret formulering för partiella första- och andraderivator med respekt till en separat tids- eller rumskoordinat.

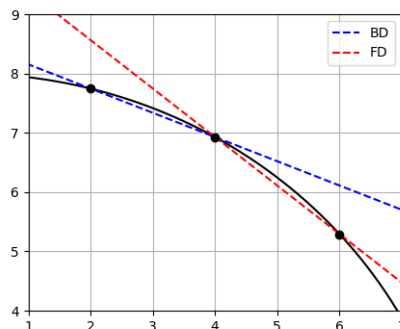
Vi börjar med att härleda ett diskret uttryck för förstaderivatan. Med hjälp av en Taylorutveckling, där vi försummar termer av storleksordning Δx^2 kan vi skriva

$$u_{i+1}^n \approx u_i^n + (i + \Delta x - i) \frac{\partial u}{\partial x} \iff \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}. \quad (30)$$

För tillräckligt små Δx ger detta en tillfredsställande approximation. Vi kan på samma sätt härleda en tidsderivata, men eftersom vi använder en ickestandardnotation skriver vi i illustrationssyfte ut även att

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}. \quad (31)$$

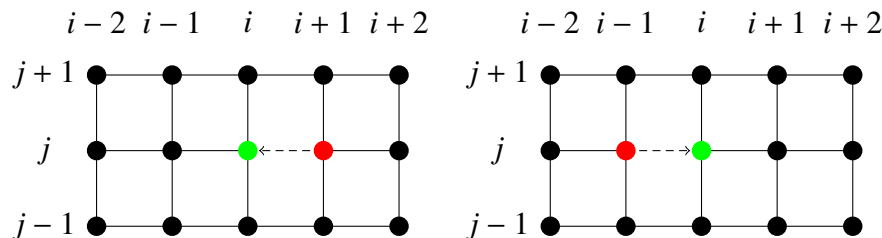
Notera att vi har använt index i och $i + 1$ för den beräkningen. Vi har alltså betraktat ett värde *framför* det i vilket vi undersöker derivatan.



Figur 8: FD och BD (lutningarna på kurvorna) är inte nödvändigtvis ekvivalenta om inte Δx går mot 0. De ger två olika men likvärdiga approximationer för derivatan i en punkt.

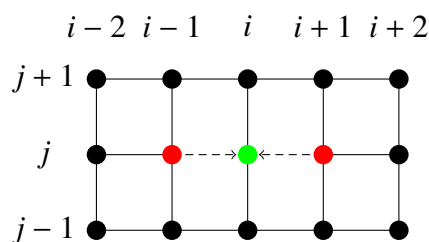
Detta kallas passande nog framåtdifferensen eller FD. På liknande vis kan vi betrakta en punkt med index i samt punkten ett steg bakåt med index $i - 1$. Detta kallar bakåtdifferensen eller BD och ger uttrycket $\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}$ för samma derivata i punkten i . Både FD och BD ger giltiga approximationer för derivatan, men trots att de i gränsvärdet är ekvivalenta så är de för andra

värden på Δx inte nödvändigtvis identiska, något som demonstreras i figur 8. FD i punkten i är däremot ekvivalent med BD i punkten $i + 1$ (och BD i i är ekvivalent med FD i $i - 1$); det som skiljer de båda är i vilken punkt— i eller $i + 1$ den approximerade derivatan tolkas gälla.



Figur 9: Jämförelse av de involverade punkterna vid FD och BD i x -led. Till vänster: FD i punkten (i, j) . Till höger: BD i samma punkt. Lägg märke till att samma punkter är involverade i båda; om BD till höger skulle skiftas ett steg åt höger, men i det andra fallet skulle värdet tolkas som derivatan i $(i + 1, j)$ istället för i (i, j)

För efterlikning av vissa fysikaliska fenomen är det inte lämpligt med ett asymmetriskt schema. Ett vanligt exempel är diffusion, där essentiell information går förlorad och diskretiseringen lätt kan ge en snedvriden bild av verkligheten om inte ett symmetriskt schema används. Därför används för approximation av förstaderivatan i (i, j) i sådana fall en central differens, som kan betraktas som en FD i $(i - 1, j)$ (alternativt som en BD i $(i + 1, j)$) fast med steglängden $2\Delta x$ och det beräknade värdet gällande för punkten (i, j) .



Figur 10: Vid en central differens beräknas värdet i en punkt utifrån två närliggande punkter. Detta efterliknar bättre den fysiska verkligheten hos diffusionsfenomen.

Vi skriver i det fallet att

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}, \quad (32)$$

notera senare likheten med andraderivatans approximation, framför allt i vilka punkters värden som används vid beräkningen.

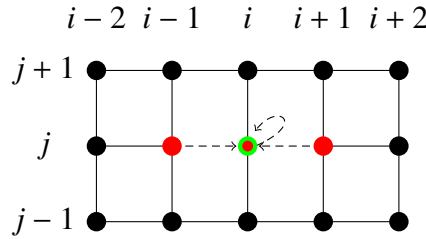
För andraderivatans approximation utvecklas först $u(i+1) \equiv u_{i+1}$ och $u(i-1) \equiv u_{i-1}$ kring punkten i :

$$u_{i+1} = u_i + \Delta x \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3} + \dots \quad (33a)$$

$$u_{i-1} = u_i - \Delta x \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3} + \dots \quad (33b)$$

Vi kan addera dessa ekvationer och bortse från termer av storleksordning Δx^4 och mindre⁴ för att få

$$u_{i+1} + u_{i-1} = 2u_i + \Delta x^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \dots \implies \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}. \quad (34)$$



Figur 11: För diskretiseringen av andraderivatans används momentanvärden i både $i-1, j, i, j$ och $i+1, j$.

Vi återkopplar en gång till de ekvationer som styr ett inkompressibelt flöde:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (35a)$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla \vec{p} + \mu \nabla^2 \vec{u}. \quad (35b)$$

Det finns inget uppenbart sätt för inkompressiblet flöde med en konstant densitet ρ att finna ett tryckberoende för hastighetsfältet. Detta är ett krav för att ekvationssystemet ska gå att lösa. I kompressibla flöden är detta inte ett problem; där ger massa-kontinuitetsekvationerna en utveckling för ρ som är beroende av p (Saad, 1985). För ett inkompressibelt flöde gäller dock att $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, vilket indirekt innebär att tryckfältet måste förändras så att detta krav uppfylls. Ett sätt att lösa detta på är att konstruera ett tryckfält som uppfyller detta utifrån

⁴Termer av storleksordning Δx^3 har motsatta tecken i de två ekvationerna och försvinner oavsett.

start- och randvillkor som är konsekventa med det fysiska systemet. Vi kan använda den s.k. Poissonekvationen $\nabla^2 p = -f$ (se appendix A för en utförlig härledning) som beskriver det tryckfältet.

2.2 Det implementerade schemat

För en faktisk diskretisering går vi från de generellare vektorekvationerna till partiella differentialekvationerna för respektive komponenter u i x -riktning och v i y -riktning av hastighetsfältet. Då vi simulerar ett kanalflöde lägger vi också till en källterm S i ekvationen för hastighet i x -led, som imiterar de drivkrafter som i verkligheten uppstår av tryck. Vi ersätter dessutom den ursprungliga kontinuitetsekvationen med Poissons ekvation enligt appendix A för att få

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + S \quad (36a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (36b)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (36c)$$

där $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ är den kinematiska viskositeten. Notera att alla derivatatermer i ekvationerna 36a, 36b och 36c är på en sådan form att vi utan vidare kan substituera in de härledda approximationerna. Görs detta för de två rörelsemängdsekvationerna med en framåtdifferens i tid (för att få nästa tidssteg i termer av det nuvarande), en bakåtdifferens i x och y och standarddiskretiseringen för andraderivatan där den uppkommer, så får vi följande ekvationer:⁵

⁵Likhetstecknet kommer härnäst användas i de ekvationer som beskriver modellen, trots att likheten egentligen bara är ungefärlig.

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \\ & + v \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) + S_{i,j} \end{aligned} \quad (37a)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n \frac{v_{i,j}^n - v_{i-1,j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n}{\Delta y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \\ & + v \left(\frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (37b)$$

Dessa ekvationer kan nu användas för den praktiska implementationen av lösaren.

2.3 Praktisk implementation

För en effektiv datorberäkning av vad som i essens är ett ekvationssystem ställer vi upp beräkningarna som matrismultiplikationer. En matris används per ekvation och tidssteg. $u_{i,j}^{n+1}$ är alltså elementet med index (i, j) i matrisen som representerar u -fältet vid tiden $n+1$, och det är praktiskt att kunna beräkna varje element utifrån redan bekant data. Därför isoleras termerna $u_{i,j}^{n+1}$ och $v_{i,j}^{n+1}$ i respektive vänsterled

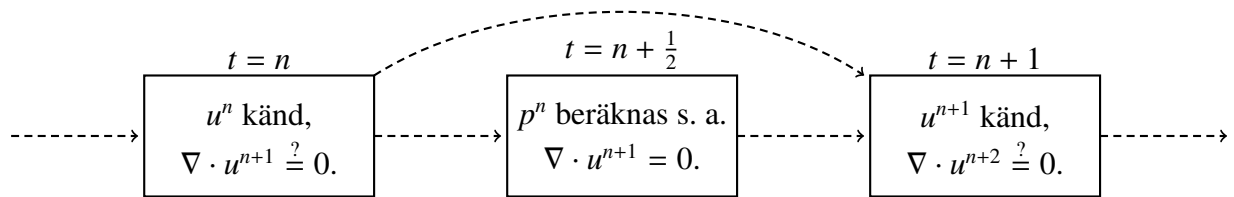
$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} = & u_{i,j}^n - u_{i,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) - v_{i,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta y} (v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\rho\Delta x} (p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n) \\ & + \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) + \frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2} (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) + \Delta t S_{i,j} \end{aligned} \quad (38a)$$

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{n+1} = & v_{i,j}^n - u_{i,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (v_{i,j}^n - v_{i-1,j}^n) - v_{i,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta y} (v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\rho\Delta y} (p_{i,j+1}^n - p_{i,j-1}^n) \\ & + \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} (v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n) + \frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2} (v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n). \end{aligned} \quad (38b)$$

I det verkliga, kontinuerliga fallet har vi för flödet att $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Eftersom de styrande ekvationerna i beräkningssyfte har diskretiserats kan vi inte längre garantera detta i modellen. Det skulle mycket väl kunna ske att $\nabla \cdot \vec{u}^n \neq 0$ för något tidssteg n . Vi vill dock för varje tidssteg n att $\nabla \cdot \vec{u}^{n+1} = 0$. Potentiella numeriska fel måste alltså motverkas och korrigeras inom ett givet tidssteg. Sättet detta görs på är att för varje tidssteg ett tryckfält beräknas så att divergensen hos hastighetsfältet vid nästa tidssteg nödvändigtvis blir 0. Tryckfältet blir den korrigerande faktorn som garanterar $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Om trycktermen i rörelsemängdsekvationen isoleras så kan divergenserna av respektive sida likställas för att få

$$\nabla^2 \vec{p}^{n+1} = -\rho \frac{\nabla \cdot \vec{u}^n}{\Delta t} - \rho \nabla \cdot (\vec{u}^n \cdot \nabla \vec{u}^n) + \mu \nabla^2 \vec{u}^n. \quad (39)$$

Eftersom \vec{u}^n är känd, i och med att den precis beräknats, så kan även tryckfältet \vec{p}^{n+1} när det beräknas justeras så att \vec{u}^{n+1} —som beräknas utifrån \vec{u}^n och \vec{p}^{n+1} —har en divergens lika med 0.



Figur 12: För ett givet tidssteg är det på grund av diskretiseringen inte säkert att hastighetens divergens är lika med 0. Därför ställs tryckfältet mellan två tidssteg upp så att det både säkerställer $\nabla \cdot u^{n+1} = 0$ och är konsistent med u^n . Då kan u^{n+1} beräknas utifrån u^n och p^n .

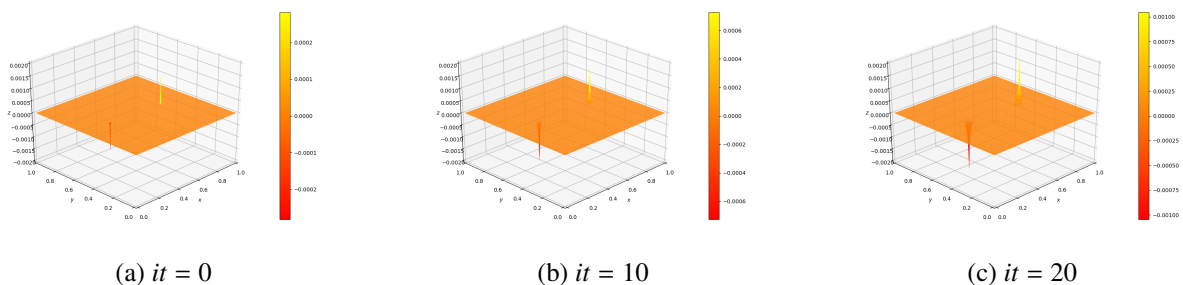
Men vi vet att ekvation 36c är en giltig förenkling av tryckekvationen, som då kan diskretiseras⁶ enligt

$$\frac{p_{i+1,j}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j+1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) - \rho \left(\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \right)^2 + 2 \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \right)^2 \right). \quad (40)$$

⁶Tryckekvationen diskretiseras med en standarddiskretisering för andraderivatorna och med en centraldifferens i rumskoordinater. Centraldifferensen återspeglar symmetrin i fysisk diffusion bättre än ett asymmetriskt schema.

Vid diskretiseringen utelämnas tidsindex för hastighetsfältet och tidsindex för tryckfältet ges som n . Tryckfältet för $t = n$ beräknas alltså “halvvägs” mellan $t = n$ och $t = n + 1$, men används i senare beräkningar för $t = n$.

Notera däremot Δt i högerledet av ekvation 40. Poissonekvationen löses med en iterativ process som kan betraktas som tidsberoende, även om tiden inte motsvarar faktisk, fysisk tid. Istället löses ekvationen genom att de rand- och startvärden som ger upphov till rätt tryckfält ansätts för att sedan iterera i pseudotid tills tryckfältet uppnått ett *steady state* som motsvarar det faktiska tryckfältet.

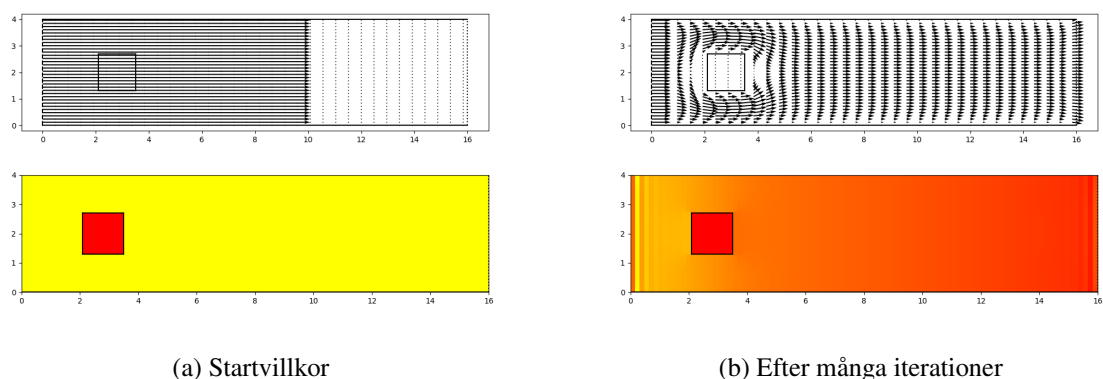


Figur 13: Exempellösning på en poissonekvation $\varphi(x, y)$ med två källtermer/randvillkor. Källtermerna ges av $\varphi(0.25, 0.5) = -100$ och $\varphi(0.75, 0.5) = 100$ och it motsvarar antal genomförda iterationer. Lösningen närmar sig ett stabilt läge, där varje successiv iteration ändrar tillståndet mindre än den föregående.

Tryckekvationen belyser behovet av randvillkor och startvillkor, både vid lösning av trycket i de alternerande stegen och vid lösning för hastighetsfälten. Om ett asymmetriskt schema, t. ex. BD, används, så kan iterationen gestaltas på ett sådant vis att ett värde, givet startvillkor, endast är beroende av redan beräknade värden (se figur 9). Om däremot nån form av symmetriskt schema används, exempelvis för en andraderivata, så blir det ofta så att värdet i en punkt är beroende av ännu icke beräknade värden. Ekvationen går inte att lösa innan randvillkor har specificerats. Dessa ges manuellt för att bestämma beteendet vid modellens gränser. Då försvinner en eller flera obekanta vid gränsen, så att värdet där kan lösas, vilket i sin tur låter nästa värde in lösas, och så vidare.

3 Resultat

Modellen är implementerad i Python 3.8.2; källkoden är öppen och finns allmänt tillgänglig på GitHub⁷. Mer specifikt används biblioteket NumPy och dess *array*-objekt (Walt, Colbert, & Varoquaux, 2011) för effektiva matrismultiplikationer och listoperationer. Visualisering sker i Python-biblioteket Matplotlib (Hunter, 2007).



Figur 14: En grov exempellösning: flöde kring ett kvadratisk hinder. Den övre figuren beskriver hastighetsfältet, den undre tryckfältet. Vid ett flöde kring ett kvadratisk hinder stabiliserar flödet efter flera iterationer. Notera bland annat den låga hastigheten vid kanterna som följd av *no-slip condition*.

Både randvillkor och parametrar kan justeras i lösaren för att återspegla de egenskaper som önskas simuleras. Det samma gäller eventuella hinder, där geometrin istället anpassas. De metaparametrar som användes vid exempellösningen i figur 14 redovisas i tabell 1. Som randvillkor användes en klassisk *no-slip condition* (Richardson, 1973) som nollställer fluidens hastighet precis vid en kants grannceller. För att imitera ett tryckdrivet flöde från vänster sattes hastigheten i x -led längst till vänster för varje tidssteg till 1. Detta har samma effekt som att använda en källterm F som är 0 över hela geometrin förutom vid inloppet, där värdet av F är den önskade inloppshastigheten (till exempel 1).

⁷<https://github.com/felixseriksson/finitedifference>

Tabell 1: Parametrar och metaparametrar för exempellösningen i figur 14

Parameter	Förklaring	Exempelvärde
<code>gridsize_x</code> , <code>gridsize_y</code>	Rutnätets storlek	16, 4
<code>nx</code> , <code>ny</code>	Antal celler i <i>x</i> - resp. <i>y</i> -led	101, 101
<code>nt</code> , <code>nit</code>	Antal tidssteg, Tryckiterationer	50000, 500
ρ	Densitet	1
ν	Kin. viskositet	0.5
Δt	Storlek på tidssteg	0.001

4 Diskussion

Modellen har begränsad applicerbarhet redan på grund av de förenklingar som görs vid konstruktionen. Den är endast till för tvådimensionella system, vilket starkt begränsar generaliteten i eventuella resultat och gör det mer eller mindre omöjligt att dra faktiska slutsatser om fysiska fenomen från den. Likaså begränsar det faktum att modellen inte tar hänsyn till tyngdkraft användningsområdena. Den variant av Navier-Stokes ekvationer som används är dessutom också bara giltig för inkompressibla fluider, vilket är en ofta gjord men aldrig helt uppfylld förenkling i stil med "friktionsfri yta" och "resistansfri ledare". I många fall kan vätskor betraktas som inkompressibla, och gasers kompressibilitet beror ofta på hastigheten; Luft betraktas till exempel ofta som inkompressibel under ca. $200 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (Deville, Fischer, Mund, et al., 2002).

Huvudnackdelen med alla sorters finita differensmetoder är deras begränsade praktiska användningsmöjligheter jämfört med nyare metoder som finita elementmetoder och finita volymmetoder. De största felkällorna hos finita differensmetoder—rundningsfel vid flyttalsberäkningar och avkortningsfel från det faktum att $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \neq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ —finns visserligen även i de andra metoderna, men inte till samma grad.

Likaså är de scheman som använts inte särskilt noggranna. FD och BD kan visas ha avkortningsfel av storleksordningen $O(\Delta x)$ och CD och andraderivatans approximation kan på samma

sätt visas ha avkortningsfel dominerade av en term av storleksordning $O(\Delta x^2)$. Detta innebär att avkortningsfelen växer linjärt med storleken på ett steg i rutnätet (eller kvadratisk i de senare två fallen). Lax-Wendroff-metoden (LeVeque, 1992), Richtmyer-metoden (Von Neumann & Richtmyer, 1950) och MacCormack-schemat (Selle, Fedkiw, Kim, Liu, & Rossignac, 2008) är exempel på numeriska diskretiseringsscheman som ger avkortningsfel på storleksordning $O(\Delta x^2)$ utan att vara mycket mer beräkningsintensiva.

På första anblick kan det verka underligt att fysikaliska enheter inte nämnts eller diskuterats mycket alls i denna rapport. Fysikaliska enheter är trots allt viktiga när de fysiska fenomen som undersöks ska beskrivas. Detta är helt enkelt en begränsning i rapportens omfång. Visserligen är enheterna viktiga när fysiska fenomen behandlas, men de gör på de flesta storleksordningar ingen matematisk skillnad. Skillnaden på om ett tidssteg räknas som 0.1s eller det tiodubbla är alltså på det stora hela irrelevant om samma skala används vid analys av resultatet. Det samma gäller för kvantiteter som densitet och viskositet, som kan anges manuellt. Naturligtvis har även detta sina begränsningar, liksom all klassisk fysik. Vid tillräckligt stor eller liten skala förlorar modellen giltighet, och i andra fall kan effekter behöva beaktas som modellen inte tar hänsyn till. Ett sådant exempel är kvanteeffekter vid tillräckligt höga hastigheter.

I modellen används på flera ställen och av olika anledningar randvillkor för simulering av vissa fysiska effekter. Många av dessa, som källtermerna i tryckiterationen, är direkt nödvändiga för en fungerande lösning. Andra, som *no-slip condition* vid väggarna har starkt experimentellt stöd, även om det begränsar modellens giltighet till fall där adhesiva krafter mellan väggens solida partiklar och fluidpartiklar är starkare än de kohesiva krafterna mellan olika fluidpartiklar, vilket är de allra flesta (men inte alla) viskösa flödena. Vissa randvillkor kan däremot istället betraktas som genvägar till en mer modulär lösning. Exempelvis implementeras hinder med en form av randvillkor där för varje tidssteg tryck och hastigheter i hindrets form på rutnätet (i figur 14 en kvadrat centrerad i kanalens inlopp) först beräknas som vanligt och därefter nollställs. Fördelarna med detta är uppenbara och ligger främst i enkelhet: Ett mer verklighetstroget närmande hade implementerat icke-enhetliga rutnät och en adekvat undantagshantering, men det är avsevärt behändigare att kunna iterera över rutnätet på samma vis

som utan hinder. De negativa effekterna av just förenklingar som dessa är minimala, speciellt för en tillräckligt liten rutnätsstorlek, men de bör ändå nämnas och vara del av en holistisk bedömning.

I samma anda bör även användningen av periodiska randvillkor nämnas. Dessa används inte i exempellösningen, men finns implementerade som alternativ i modellen. Det finns många fördelar med periodiska randvillkor. För det första tillåter periodiska randvillkor för Poissonekvationen för tryck mer välordnade analytiska lösningar (i och med att summan av flödestermerna ut ur och in i det modellerade området blir exakt 0), som möjliggör en praktisk jämförelse mellan dessa och modellen. För det andra kan periodiska randvillkor användas för att med begränsad datorkraft modellera en godtyckligt stor domän, givet att den är på det stora hela likformig. Detta används ofta vid modelleringar av småskaliga biologiska fenomen på molekyl-nivå (Cheatham, Miller, Fox, Darden, & Kollman, 1995). Sist men inte minst kan periodiska randvillkor användas för att simulera flöden över en torus, vilket i vissa fall kan approximera tredimensionella fenomen bättre.

För en lösare för kompressibla flöden är en extern koppling mellan tryck, densitet och hastighet inte nödvändig. För dem räcker det med den tillståndsekvation som beskriver hur trycket deformerar fluiden och påverkar densiteten. För många gasflöden kan till exempel den ideala gaslagen eller en variant därav användas.

Modellen använder scheman som kan visas vara konsistenta, vilket innebär att diskretiseringens lösning går mot den analytiska lösning då diskretiseringsstegen (Δx , Δy och Δt) går mot 0. Ett problem är att diskretiserade ekvationer ofta är mer diffusiva än de kontinuerliga motsvarigheterna (Trefethen, 1996). Detta sätter en praktisk nedre gräns för hur små diskretiseringssteg som kan användas, framför allt i tid. Mindre steg låter den numeriska lösningen gå mot en analytisk, men ger upphov till mer numerisk diffusion per enhet tid, då fler distinkta iterationer måste genomföras.

Stabiliteten kan också demonstreras mer rigoröst med hjälp av Von Neumann-stabilitetsanalys (Charney, Fjörtoft, & Von Neumann, 1990). Nyckeln till detta är utvecklingen av lösningen (eller felet) som en ändlig Fourierserie. I appendix B demonstreras rigoröst att BD, FD och CD

alla har markanta avvägningar som måste göras mellan konsistens och stabilitet.

4.1 Fortsatta undersökningsmöjligheter

CFD är ett förhållandevis ungt forskningsområde med mycket utveckling. Undersökning och etablering av nya metoder eller insikter inom existerande metoder är naturligtvis alltid intressanta. Möjligtvis bör dock studier med ett reellt användningssyfte fokusera främst på finita volymmetoder, finita elementmetoder och dylikt, eller för den delen rent av nya metoder. Även högupplösningssmetoder eller tekniker för specifik simulering av enstaka fenomen som virvlar, chockvågor och liknande är intressant.

I avseende på vidare utveckling gällande den finita differenslösaren utvecklad i den här rapporten är framför allt generalisering intressant. Ett skifte till ett mer objektorienterat närmande skulle förenkla integrationen av andra geometrier, hinder, scheman et cetera. Detta i kombination med en potentiell användning av GPU-baserad beräkning skulle tillåta mer realistiska beräkningar på mer finkänsliga skalor, förmodligen till och med i tre dimensioner, vilket skulle öka den reella tillämpligheten väsentligt. Å andra sidan finns den sortens program redan tillgängliga, både proprietära versioner och sådana med öppen källkod.

Referenser

- Anderson, J. D. (1992). Governing equations of fluid dynamics. In *Computational fluid dynamics* (pp. 15–51). Springer.
- Charney, J. G., Fjörtoft, R., & Von Neumann, J. (1990). Numerical integration of the barotropic vorticity equation. In *The atmosphere—a challenge* (pp. 267–284). Springer.
- Cheatham, T. I., Miller, J., Fox, T., Darden, T., & Kollman, P. (1995). Molecular dynamics simulations on solvated biomolecular systems: the particle mesh ewald method leads to stable trajectories of dna, rna, and proteins. *Journal of the American Chemical Society*, 117(14), 4193–4194.
- Chen, G., & Zhou, J. (1992). *Boundary element methods* (Vol. 92). Academic Press London.
- Deville, M. O., Fischer, P. F., Mund, E., et al. (2002). *High-order methods for incompressible fluid flow* (Vol. 9). Cambridge university press.
- Dinnar, U. (2019). *Cardiovascular fluid dynamics*. CRC Press.
- Forsythe, G. E., & Wasow, W. R. (1960). Finite difference methods. *Partial Differential*.
- Fung, Y.-c. (1977). A first course in continuum mechanics. *Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, Inc., 1977. 351 p.*
- Harlow, F. H. (2004). Fluid dynamics in group t-3 los alamos national laboratory:(la-ur-03-3852). *Journal of Computational Physics*, 195(2), 414–433.
- Hunter, J. D. (2007). Matplotlib: A 2d graphics environment. *Computing in science & engineering*, 9(3), 90–95.
- Ladyzhenskaya, O. A. (2003). Sixth problem of the millennium: Navier-stokes equations, existence and smoothness. *Russian Mathematical Surveys*, 58(2), 251.
- Lax, P. D., & Richtmyer, R. D. (1956). Survey of the stability of linear finite difference equations. *Communications on pure and applied mathematics*, 9(2), 267–293.
- LeVeque, R. (1992). *Numerical methods for conservation laws* (Vol. 3). Springer.
- McLennan, J. (1966). Symmetry of the stress tensor. *Physica*, 32(4), 689–692.
- Mittal, R., Ni, R., & Seo, J.-H. (2020). The flow physics of covid-19. *Journal of Fluid*

Mechanics, 894, F2. doi: 10.1017/jfm.2020.330

- Patera, A. T. (1984). A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *Journal of computational Physics*, 54(3), 468–488.
- Pedley, T. J. (1997). Introduction to fluid dynamics. *Scientia Marina*, 61, 7–24.
- Petkova, S., Hossain, A., Naser, J., & Palombo, E. (2003). Cfd modelling of blood flow in portal vein hypertension with and without thrombosis. In *Third international conference on cfd in the minerals and process industries csiro, melborne, australia* (pp. 10–12).
- Reynolds, O., Brightmore, A. W., & Moorby, W. H. (1900). *Papers on mechanical and physical subjects: 1869-1882* (Vol. 1). The University Press.
- Richardson, S. (1973). On the no-slip boundary condition. *Journal of Fluid Mechanics*, 59(4), 707–719.
- Saad, M. A. (1985). Compressible fluid flow. *Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, Inc.*, 1985. 570 p..
- Schneiderbauer, S., Tschachler, T., Fischbacher, J., Hinterberger, W., & Fischer, P. (2008). Computational fluid dynamic (cfd) simulation of snowdrift in alpine environments, including a local weather model, for operational avalanche warning. *Annals of glaciology*, 48, 150–158.
- Schwer, D., & Kailasanath, K. (2013). Fluid dynamics of rotating detonation engines with hydrogen and hydrocarbon fuels. *Proceedings of the Combustion Institute*, 34(2), 1991–1998.
- Selle, A., Fedkiw, R., Kim, B., Liu, Y., & Rossignac, J. (2008). An unconditionally stable maccormack method. *Journal of Scientific Computing*, 35(2-3), 350–371.
- Temam, R. (2001). *Navier-stokes equations: theory and numerical analysis* (Vol. 343). American Mathematical Soc.
- Trefethen, L. N. (1996). Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equations.
- Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. (2007). *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. Pearson education.

- Von Neumann, J., & Richtmyer, R. D. (1950). A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. *Journal of applied physics*, 21(3), 232–237.
- Walt, S. v. d., Colbert, S. C., & Varoquaux, G. (2011). The numpy array: a structure for efficient numerical computation. *Computing in Science & Engineering*, 13(2), 22–30.
- Yamaguchi, H. (2008). *Engineering fluid mechanics* (Vol. 85). Springer Science & Business Media.
- Zhu, W., McCrink, M. H., Bons, J. P., & Gregory, J. W. (2020). The unsteady kutta condition on an airfoil in a surging flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 893, R2. doi: 10.1017/jfm.2020.254
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Nithiarasu, P., & Zhu, J. (1977). *The finite element method* (Vol. 3). McGraw-hill London.

A Härledning av en Poissonekvation för tryckkontinuitet

I detta stycke redovisas en härledning av de ekvationer som används för en relation mellan densiteten ρ och trycket p . Betrakta åter Navier-Stokes ekvationer för inkompressibla fluider

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (41a)$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla \vec{p} + \mu \nabla^2 \vec{u}. \quad (41b)$$

Massakonservationen (ekvation 41a) kan betraktas som en begränsning av rörelsemängdskonservationen (ekvation 41b) som ställer krav på hur tryckfältet kan utvecklas så att båda ekvationer satisfieras. Vi har inget uppenbart sätt att beskriva densiteten i termer av trycket eller vice versa, vilket krävs för att lösa ekvationssystemet. Om de två ekvationerna ovan skrivs ut komponentvis i två dimensioner erhålls

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (42a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (42b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (42c)$$

Vi kan skriva divergensen av ekvation 41b genom att summera den partiella derivatan med respekt till x av ekvation 42b och den partiella derivatan med respekt till y av ekvation 42c för att erhålla⁸

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \\ - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \nu \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (43)$$

⁸Vi antar kontinuitet, så $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$.

Vänsterledet kan skrivas om, med några termer faktorerade, som

$$VL = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (44)$$

Men ekvation 42a säger att $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, vilket låter oss eliminera divergenstermerna. Då kan vi skriva

$$VL = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2. \quad (45)$$

På samma sätt kan vi faktorisera den sista parentesen i högerledet av ekvation 43 och eliminera termer som har en faktor $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ för att komma fram till

$$\begin{aligned} HL = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) = \\ -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) = \\ -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Efter många förenklingar har vi alltså etablerat sambandet

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2, \quad (47)$$

som är en Poissonekvation för tryck i två dimensioner (det vill säga med $\varphi = p$) på formen

$$\nabla^2 \varphi = f \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi(x, y) = f(x, y), \quad (48)$$

som både säkerställer massans kontinuitet och ger ett samband mellan tryck, hastighet och densitet som kan användas för att lösa ekvationssystemet.

B Von Neumann-stabilitetsanalys av bakåtdifferens och första ordningens central differens

För en rigorösare analys medelst Fourierserieutveckling av felet i olika diskretiseringsscheman demonstreras först att felet satisfierar samma diskretiserade ekvation som en numerisk lösning. Om u_i^n är det beräknade värdet i punkten i vid tiden n och om \bar{u}_i^n är den exakta analytiska lösningen så gäller

$$u_i^n = \bar{u}_i^n + \varepsilon_i^n, \quad (49)$$

där ε_i^n är felet. Den diskretiserade lösningen är linjär. Per definition satisfierar u_i^n den diskretiserade ekvationen, vilket i kombination med linjäritet medför att även ε_i^n satisfierar den, och påvisar samma stabilitetsbeteenden. Givet periodiska randvillkor (det vill säga inte i alla fall för modellen) kan vi utveckla variationen kring ε över intervallets längd L (i modellen motsvaras detta av Δx eller Δy) som

$$\varepsilon(x) = \sum_{m=1}^M A_m e^{ik_m x} \quad (50)$$

med A_m som felets tidsberoende amplitud, $k_m = \frac{\pi m}{L}$ och $M = \frac{L}{\Delta x}$. Ett rimligt antagande med experimentellt stöd är att A_m varierar exponentiellt med tiden, vilket låter oss skriva

$$\varepsilon(x, t) = \sum_{m=1}^M e^{at} e^{ik_m x}. \quad (51)$$

Eftersom den diskreta ekvationen är linjär är det utan inskränkning nog att betrakta ett godtyckligt element i serien

$$\varepsilon_m(x, t) = e^{at} e^{ik_m x}. \quad (52)$$

Då vi undersöker bakåtdifferensen och den centrala differensen skriver vi ut värden för felet

i de relevanta punkterna enligt

$$\mathcal{E}_i^n = e^{at} e^{ik_m x} \quad (53a)$$

$$\mathcal{E}_i^{n+1} = e^{a(t+\Delta t)} e^{ik_m x} \quad (53b)$$

$$\mathcal{E}_{i+1}^n = e^{at} e^{ik_m(x+\Delta x)} \quad (53c)$$

$$\mathcal{E}_{i-1}^n = e^{at} e^{ik_m(x-\Delta x)}. \quad (53d)$$

Innan vidare beräkningar etableras utvidgningsfaktorn

$$G \equiv \frac{\mathcal{E}_i^{n+1}}{\mathcal{E}_i^n},$$

där stabilitetskravet $|G| \leq 1$ förhindrar ohindrad utvidgning av fel i stabila lösningar. Det kravet motsvarar

$$\frac{e^{a(t+\Delta t)} e^{ik_m x}}{e^{at} e^{ik_m x}} \leq 1 \iff e^{a\Delta t} \leq 1. \quad (54)$$

Vi undersöker nu bakåtdifferensen som ges av $u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}$. Om vi ersätter rätt termer i ekvationen med feltermer får vi

$$G = 1 + \sigma \left(1 - \frac{e^{at} e^{ik_m(x-\Delta x)}}{e^{at} e^{ik_m x}} \right) = 1 + \sigma (1 - e^{-ik_m \Delta x}), \quad (55)$$

där $\sigma = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ brukar kallas Courant-numret. Då $\sigma < 0$ måste $e^{-ik_m \Delta x}$, som alltid är positiv, vara större än 1 för stabilitet. Detta är inte bra, eftersom värdet på $e^{-ik_m \Delta x}$ minskar med minskande Δx . Vi kan alltså inte med BD ha en ovillkorligt stabil och konsistent lösning samtidigt. Det samma kommer att gälla för FD i och med att FD och BD kan ses som ekvivalenta varianter av samma schema skiftat i sidled.

Den centrala differensen bestäms av $u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}$, vilket motsvarar

$$\begin{aligned} G &= 1 + \frac{\sigma}{2} \left(\frac{e^{at} e^{ik_m(x+\Delta x)} - e^{at} e^{ik_m(x-\Delta x)}}{e^{at} e^{ik_m x}} \right) = 1 + \frac{\sigma}{2} (e^{ik_m \Delta x} - e^{-ik_m \Delta x}) \\ &= 1 + \frac{\sigma}{2} (2i \sin(k_m \Delta x)) = 1 + i\sigma \sin(k_m \Delta x). \end{aligned} \quad (56)$$

Vi ser att $|G| = 1$ om och endast om den imaginära delen är 0. Enligt definitionen av k_m är detta bara sant för $m = 0$.

Det ska poängteras att vi här har undersökt felet i varianter på de diskretiseringsscheman som används i modellen, och att de ej är exakt identiska. Schemornas tillkortakommanden belyses förhoppningsvis ändå tillräckligt.