Índice general

Capítulo 1

Extensiones sucio

Definición 1.0.1. Sea A un Q-módulo dado por una acción $\varphi\colon Q \to A$ y $n \in \mathbb{N}$. Un n-cociclo es una función $f\colon Q^n \to A$ tal que $\forall q_1, \dots, q_{n+1} \in Q$ se verifica

$$q_1 \cdot f(q_2, \dots, q_{n+1}) + \left[\sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(q_1, \dots, q_i q_{i+1}, \dots, q_{n+1})\right] + (-1)^{n+1} f(q_1, \dots, q_n) = 0$$

Un n-coborde es una función $f\colon Q^n \to A$ tal que existe una función $\phi\colon Q^{n-1} \to A$ tal que

$$f(q_1, \dots, q_n) = q_1 \cdot \phi(q_2, \dots, q_{n+1}) + \left[\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \phi(q_1, \dots, q_i q_{i+1}, \dots, q_{n+1})\right] + (-1)^{n+1} \phi(q_1, \dots, q_n)$$

Los cociclos y cobordes heredan de A una estructura de grupo abeliano. A estos grupos los denotamos $Z^n_\varphi(Q, A)$ y $B^n_\varphi(Q, A)$ respectivamente.

Proposición 1.0.1. *Demostración.* A partir de las extensiones E_1 y E_2 se construye la extensión del producto directo tomando la inclusión y proyección coordenada a coordenada. El objetivo será utilizar los cociclos c_1 y c_2 para construir una sucesión exacta $1 \to A \xrightarrow{i_3} E_3 \xrightarrow{\pi_3} Q \to 1$ cuyo cociclo asociado sea $c_3 = c_1 + c_2$.

$$1 \to A \times A \xrightarrow{i_1 \times i_2} E_1 \times E_2 \xrightarrow{\pi_1 \times \pi_2} Q \times Q \to 1 \tag{1.1}$$

La sección $s_1 \times s_2$ de $\pi_1 \times \pi_2$ tiene como cociclo asociado

$$(c_1 \times c_2)\colon (Q \times Q) \times (Q \times Q) \to A \times A \tag{1.2}$$
$$((q_{11}, q_{12}), (q_{21}, q_{22})) \mapsto (c_1(q_{11}, q_{12}), c_2(q_{21}, q_{22})) \tag{1.3}$$

Proyectando $A \times A$ sobre A y haciendo la suma de componentes en A movemos $(c_1 \times c_2)((q_{11}, q_{12}), (q_{21}, q_{22}))$ a $c_1(q_{11}, q_{12}) + c_2(q_{21}, q_{22})$. Basta identificar

q_{11} con q_{21} y q_{12} con q_{22} mediante $\Delta\colon Q \to Q\times Q$ definido por $\Delta(q) = (q,q)$. Notese que el morfismo diagonal está definido para las secciones s_1 y s_2, por tanto, para los cociclos estará definido de $Q \times Q$ en $(Q\times Q)\times(Q\times Q)$.

$$Q\times Q \xrightarrow{\Delta} (Q\times Q)\times(Q\times Q) \xrightarrow{c_1\times c_2} A\times A \xrightarrow{+} A \tag{1.4}$$

El cociclo que buscamos es $c_3 = +\circ(c_1\times c_2)\circ\Delta = c_1 + c_2$

Completando el diagrama de Δ y $\pi_1\times\pi_2$ con $i\colon \tilde{E} \to E_1\times E_2$ y $\tilde{\pi}\colon E \to Q$, para $x \in \tilde{E}$ $(\pi_1(i(x)), \pi_2(i(x))) = (\tilde{\pi}(x), \tilde{\pi}(x))$ lo que implica que $\pi_1(i(x)) = \pi_2(i(x))$ y por tanto $i(x) \in E_1 \times_Q E_2$. Lo natural es tomar $\tilde{E} = E_1\times_Q E_2$, i la inclusión y $\tilde{\pi}(e_1,e_2) = \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)$.

$$\begin{tikzcd}
E_1\times E_2 \arrow[r, "\pi_1\times\pi_2"] & Q\times Q \\
\tilde{E} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\tilde{\pi}"] & Q \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Ker}(\tilde{\pi}) = \{(e_1,e_2) \in E_1\times_Q E_2\colon \tilde{\pi}(e_1,e_2) = 0\} = \{(e_1,e_2) \in E_1\times_Q E_2\colon \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2) = 0\} = A\times A$

Por tanto, la sucesión $1 \to A\times A \xrightarrow{\tilde{i}} E_1\times_Q E_2 \xrightarrow{\tilde{\pi}} Q \to 1$ es exacta.

$i_3(a_1+a_2) = \pi(a_1,a_2) = \pi(a_1+a_2, 0) = \pi(0, a_1+a_2)$, para que esté bien definida, tenemos que cocientar $E_1\times_Q E_2$ por $Ker(+) = \{(a_1,a_2) \in A\times A\colon a_1+a_2 = 0\} = \{(a,-a)\colon a\in A\}$

El cociclo correspondiente a la extensión es por tanto $c_1 + c_2$ y por la proposición 2.2.4 la suma está bien definida en clases de extensiones equivalentes. $\square$

Capítulo 2

Extensiones de grupos

Definición 2.0.1. Una sucesión de grupos G_i y homomorfismos f_i

$$G_0 \xrightarrow{f_1} G_1 \xrightarrow{f_2} G_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_n} G_n \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

se dice que es exacta si $\operatorname{Ker}(f_{i+1}) = \operatorname{Im}(f_i)$. Diremos que es una sucesión exacta corta cuando es de la forma

$$1 \to G_1 \xrightarrow{f_2} G_2 \xrightarrow{f_3} G_3 \to 1 \tag{2.1}$$

Observación 2.0.1. Una sucesión exacta corta como (2.1) es equivalente a decir que f_2 es inyectiva, f_3 sobreyectiva y $G_2/f_2(G_1) \cong G_3$

Demostración. $\operatorname{Ker}(f_2) = \operatorname{Im}(f_1) = \{1\} \implies f_2$ es inyectiva.

$\operatorname{Im}(f_3) = \operatorname{Ker}(f_4) = G_3 \implies f_3$ es sobreyectiva.

$\operatorname{Ker}(f_3) = \operatorname{Im}(f_2) \cong G_1 \implies G_2/f_2(G_1) \cong G_3$ por el Primer Teorema de Isomorfía. □

Definición 2.0.2. Una extensión de un grupo Q por un grupo N es una sucesión exacta corta

$$1 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1 \tag{2.2}$$

Decimos que otra extensión $1 \to N \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{\pi'} Q \to 1$ es equivalente si existe un homomorfismo $f \colon E \to E'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i'"] & E' \arrow[r, "\pi'"] & Q \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Observación 2.0.2. Dos extensiones equivalentes son isomorfas.

Demostración. Sea $x_2 \in E$ tal que $f(x_2) = 1$, por la conmutatividad de f, $\pi(x_2) = \pi'(f(x_2)) = \pi'(1) = 1$. $x_2 \in \mathrm{Ker}(\pi) = Im(i)$, por tanto existe $x_1 \in N$ tal que $i(x_1) = x_2$, utilizando que $f \circ i = i'$, $i'(x_1) = f(i(x_1)) = 1$ y como i es inyectiva, x_2 es único y f es inyectiva.

Sea $x_2' \in E'$, como π es sobreyectiva existe $x_2 \in E$ tal que $\pi'(x_2') = \pi(x_2) = \pi'(f(x_2))$. Por tanto, $x_2' f(x_2)^{-1} \in \mathrm{Ker}(\pi') = Im(i')$ y existe $x_1 \in N$ tal que $f(i(x_1)) = i'(x_1) = x_2' f(x_2)^{-1}$, $x_2' = f(i(x_1)x_2)$ y f es sobreyectiva. □

Observación 2.0.3. Ser una equivalencia de extensiones es más débil que ser un isomorfismo, como se ve en el siguiente ejemplo.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathbb{Z}_3 \arrow[r, "\times 3"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}_9 \arrow[r, "\times 1"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z}_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{Z}_3 \arrow[r, "\times 3"] & \mathbb{Z}_9 \arrow[r, "\times 2"] & \mathbb{Z}_3 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Demostración. Un automorfismo f de $\mathbb{Z}_9$ viene dado por $f(x) = kx$ con $x \in \mathbb{Z}_9$ y $k \in \mathbb{Z}_9^\times = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

Para que el diagrama conmute a la derecha, $(\times 2 \circ f)(x) = 2kx = x \mod 3$, $k \equiv 2 \mod 3 \implies k = 2, 5, 8$

Por otro lado, para que conmute a la izquierda, $(f \circ \times 3)(x) = 3kx = 3x \mod 9$, por lo que $k = 1, 4, 8$.

Por tanto, no existe un isomorfismo f que haga al diagrama conmutativo y las extensiones no son equivalentes. □

Proposición 2.0.1. *La equivalencia de extensiones es una relación de equivalencia.*

Demostración. (i) Reflexiva: E es equivalente a sí misma tomando $f = 1_E$

(ii) Simétrica: Si $f\colon E_1 \to E_2$ es una equivalencia, por la Observación (2.0.2), $f^{-1}\colon E_2 \to E_1$ es una equivalencia.

(iii) Transitiva: Si $f\colon E_1 \to E_2$ y $g\colon E_2 \to E_3$ son equivalencias, $g \circ f \circ i_1 = g \circ i_2 = i_3$ y $\pi_1 \circ g \circ f = \pi_2 \circ f = \pi_3$ entonces $g \circ f\colon E_1 \to E_3$ es una equivalencia.

□

Observación 2.0.4. Una extensión (2.2) determina, por conjugación por elementos de E, un homomorfismo $\alpha\colon E \to \mathrm{Aut}(N)$ definido por

$$\alpha(g)(n) = n^g = g^{-1}ng$$

Entonces, $\alpha(N) = \mathrm{Inn}(N)$ y α induce un homomorfismo $\tilde{\alpha}\colon E/N \to \mathrm{Out}(N)$

$$\tilde{\alpha}(gN) = \overline{\alpha(g)}$$

El homomorfismo $\tilde{\alpha}$ se conoce como el kernel abstracto de la extensión.

Fijando una sección s de π, para todo $q \in Q$, la conjugación por $s(q)$ determina un automorfismo $\varphi(s(q))$ de N definido por $\varphi(s(q))(n) = \alpha(s(q))(n)$. Notese que la función $\varphi\colon Q \to \mathrm{Aut}(N)$ no es necesariamente un homomorfismo de grupos, pero sí lo es salvo automorfismos internos. En particular, si la sección s es un homomorfismo o el grupo de automorfismos internos de N es trivial, como se estudia en las secciones 2.1 y 2.2, entonces φ sí es un homomorfismo y podremos hablar de la acción de la extensión.

Observación 2.0.5. Dos extensiones E y E' equivalentes vienen dadas por una misma acción de Q en N. Por ello, para estudiar las extensiones salvo equivalencia podemos fijar una acción $\varphi\colon Q \to \mathrm{Aut}(N)$ y estudiar las extensiones que dan lugar a esa acción.

Demostración. $f\left(i(n)^{s(q)}\right) = f(i(n))^{f(s(q))} = i'(n)^{s'(q)}$ □

Definición 2.0.3. Denotamos por $\mathrm{Ext}_{\varphi}(Q, N)$ a las clases de extensiones equivalentes que dan lugar a la acción φ de Q en N.

2.1. Extensiones separables

Definición 2.1.1. Sea $\pi\colon A \to B$ un homomorfismo de grupos, una sección s de π es una inversa a la derecha de π, esto es, $s\colon B \to A$ tal que $\pi \circ s = 1_B$.

Definición 2.1.2. Decimos que una extensión $1 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ es separable cuando existe una sección $s\colon Q \to E$ de π que es un homomorfismo.

Teorema 2.1.1. *Una extensión* $1 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ *es separable sí y solo sí* E *es equivalente a* $1 \to N \to Q \ltimes_{\varphi} N \to Q \to 1$*, donde* $\varphi\colon Q \to \mathrm{Aut}(N)$ *es una acción de grupos de* Q *en* N*.*

Demostración. Si E es separable, existe una sección $s\colon Q \to E$ que es homomorfismo. s es inyectiva porque es una inversa por la derecha de π y, por tanto, $Q \cong s(Q) \leq E$. $\pi(i(N)) = \{1\}$ y $s(q) \in i(N) \iff q = 1$, por lo que $s(Q) \cap i(N) = 1_E$ y E es isomorfo a un producto semidirecto externo de Q por N.

En la otra dirección, definiendo para $n \in N,\ q \in Q\ i(n) = (1_Q, n)$ y $\pi((n, q)) = qN$ □

Teorema 2.1.2. *Una extension* $1 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ *separable es equivalente*

2.1.1. Clasificación de las escisiones

Para clasificar las escisiones consideraremos la extensión separable canónica

$$1 \to A \xrightarrow{i} Q \ltimes A \xrightarrow{\pi} Q \to 1 \tag{2.4}$$

Proposición 2.1.3. *Las escisiones de* (2.4) *son homomorfismos de la forma* $s(q) = (q, c(q))$ *donde* $c\colon Q \to A$ *es un* 1*-cociclo.*

Demostración. Una sección s de π tiene la forma $s(q) = (q, c(q))$ donde c es una función $c\colon Q \to A$. Imponiendo que la sección sea un homomorfismo

$$\begin{aligned} s(q_1)s(q_2) &= (q_1q_2, c(q_1)\cdot q_2 + c(q_2)) \\ s(q_1q_2) &= (q_1q_2, c(q_1q_2)) \end{aligned}$$

la función c tiene que verificar la ecuación de un 1-cociclo para que s sea una escisión.

$$c(q_1q_2) = c(q_1)\cdot q_2 + c(q_2) \tag{2.5}$$

□

Definición 2.1.3. Dos escisiones s_1 y s_2 se dice que son A-conjugadas si existe un $a \in A$ tal que $s_1(q) = s_2(q)^{i(a)}$ para todo $q \in Q$

Proposición 2.1.4. *Sean* s_1 *y* s_2 *dos escisiones y* c_1 *y* c_2 *los* 1*-cociclos asociados. Entonces* s_1 *y* s_2 *son* A*-conjugadas si* c_1 *y* c_2 *se diferencian en un* 1*-coborde.*

Demostración. Si existe un $a \in A$ tal que $s_1(q) = s_2(q)^{i(a)}$ para todo $q \in Q$,

$$\begin{aligned} (q, c_1(q)) &= (1, -a)(q, c_2(q))(1, a) \\ &= (q, -a\cdot q + c_2(q) + a) \end{aligned}$$

La diferencia entre c_1 y c_2 verifica la ecuación de un 1-coborde

$$c_2(q) - c_1(q) = a\cdot q - a \tag{2.6}$$

□

Teorema 2.1.5. *Sea* E *una extensión separable de* Q *por* A*. Entonces, las clases de escisiones* A*-conjugadas están en correspondencia uno a uno con los elementos de* $H^1(Q, A)$

2.2. Extensiones con núcleo abeliano

A continuación estudiaremos el caso en que N es un grupo abeliano que a partir de ahora denotaremos por A.

Por la Observación 2.0.4, como $\mathrm{Inn}(A)$ es trivial, la acción de Q en A es un homomorfismo de grupos, lo que hace a A un Q-módulo.

$$1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1 \tag{2.7}$$

$$\varphi\colon Q \to Aut(A) \tag{2.8}$$

Para estudiar esta extensión, consideramos una sección de π, esto es, una función $s\colon Q \to E$ tal que $\pi \circ s = id$. Como $Q \cong E/i(A)$, dados $g, h \in Q$, $\pi\left(s(g)s(h)s(gh)^{-1}\right) = 1_Q$ por ser π homomorfismo. Por tanto, $s(gh)$ y $s(g)s(h)$ distan en un elemento de $i(A)$ y podemos definir una función $c\colon Q \times Q \to A$ que mide cuánto dista s de ser un homomorfismo:

$$s(g)s(h) = s(gh)i\left(c(g,h)\right) \tag{2.9}$$

Podemos recuperar la extensión (2.7) a partir de la acción φ que hemos fijado y de la función c. Como $E = \bigcup\limits_{q\in Q} s(q)i(A) = s(Q)i(A)$ es una unión disjunta, podemos expresar unívocamente cada elemento de E como un producto de elementos de $s(Q)$ e $i(A)$. Es decir, tenemos una biyección $Q \times A \to E$. A partir del producto en E, podemos definir una operación de grupo en $Q \times A$, que denotaremos por E_c. Dados $a_1, a_2 \in A$, $q_1, q_2 \in Q$ tenemos:

$$\begin{aligned} s(q_1)i(a_1)s(q_2)i(a_2) &= s(q_1)s(q_2)i(a_1 \cdot q_2)i(a_2) \\ &= s(q_1q_2)i(c(q_1,q_2) + a_1 \cdot q_2 + a_2) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Por tanto, la operación en E_c viene dada por:

$$(q_1, a_1)(q_2, a_2) = (q_1q_2, c(q_1, q_2) + a_1 \cdot q_2 + a_2) \tag{2.11}$$

Notese que este producto no depende directamente de la sección s escogida. Por ello, supondremos que la sección s es normalizada

$$s(1) = 1 \tag{2.12}$$

de donde obtenemos que

$$c(1, q) = 0 = c(q, 1) \tag{2.13}$$

De esta forma el isomorfismo $f\colon E \to E_c$ viene dado por $q \in Q$, $a \in A$ $s(q)i(a) \mapsto (q, a)$. La inclusión de A a E_c y la proyección a Q son las canónicas, haciendo a la extensión E_c equivalente a (2.7).

Proposición 2.2.1. *Sea φ una acción de Q en A y $c\colon Q \times Q \to A$ una función que verifica la condición de normalización* (2.13)*. Entonces, la operación* (2.11) *define una extensión de Q por A cuando c es un 2-cociclo.*

Demostración. Para ver que la funcion define una operación de grupo comprobamos la asociatividad y la existencia de identidad e inversos.

Imponiendo que $[(q_1, a_1)(q_2, a_2)](q_3, a_3) = (q_1, a_1)[(q_2, a_2)(q_3, a_3)]$ llegamos a la siguiente condición que garantiza que la operación sea asociativa

$$c(q_1, q_2) \cdot q_3 - c(q_1, q_2q_3) + c(q_1q_2, q_3) - c(q_2, q_3) = 0 \tag{2.14}$$

Identidad: $(1, 0)$
Sea $(q, a) \in Q \times A$,
$(1, 0)(q, a) = (q, c(1, q) + 0 \cdot q + a) = (q, a)$
$(q, a)(1, 0) = (q, c(q, 1) + a \cdot 1 + 0) = (q, a)$
Inverso de $(q, a) \in Q \times A$: $(q^{-1}, -c(q, q^{-1}) - a \cdot q)$

A continuación, comprobamos que la inclusión de A a $A \times Q$ y la proyección a Q definen homomorfismos y hacen a la sucesión exacta.

$i(a_1)i(a_2) = (1, a_1)(1, a_2) = (1, c(1, 1) + a_1 \cdot 1 + a_2) = (1, a_1 + a_2) = i(a_1 + a_2)$
$\pi((q_1, a_1)(q_2, a_2)) = \pi((q_1q_2, -)) = q_1q_2 = \pi((q_1, -))\pi((q_2, -))$
$\pi(i(a)) = \pi(1, a) = 1$ □

Proposición 2.2.2. *Sea E una extensión de Q por A y s, s' dos secciones de Q a E y c, c' los cociclos asociados a s y s'. Entonces, c y c' se diferencian en un 2-coborde. Esto es, la extensión E determina la clase $[c] \in H^2_\varphi(Q, A)$.*

Demostración. La diferencia de s y s' es una función $e\colon Q \to A$, $s'(q) = s(q)i(e(q))$

$$\begin{aligned} s'(gh)i(c'(g, h)) &= s'(g)s'(h) \\ &= s(g)i(e(g))s(h)i(e(h)) \\ &= s(g)s(h)i(e(g) \cdot h + e(h)) \\ &= s(gh)i(c(g, h) + e(g) \cdot h + e(h)) \end{aligned} \tag{2.15}$$

De donde obtenemos $c'(g, h) - c(g, h) = e(g) \cdot h + e(h) - e(gh)$. □

Hemos visto en 2.2.1 que una extensión de Q por A viene dada por un 2-cociclo normalizado y en 2.2.2 que dos extensiones son equivalentes cuando los 2-cociclos se diferencian en un 2-coborde. Por tanto, queda demostrado el siguiente teorema.

Teorema 2.2.3. *Sea A un Q-módulo dado por una acción $\varphi\colon Q \to Aut(A)$. Entonces, las extensiones equivalentes de Q por A están en correspondencia uno a uno con los elementos del segundo grupo de cohomología.*

$$\mathrm{Ext}_\varphi(Q, A) \cong H^2_\varphi(Q, A)$$

Observación 2.2.1. El producto semidirecto se corresponde con el elemento neutro de $H^2(Q, A)$.

Demostración. Por el Teorema 2.1.1, si una sección es un homomorfismo, el 2-cociclo asociado a ésta es trivial. $\square$

Proposición 2.2.4. *Sean $[E_1], [E_2] \in Ext(Q, A)$ dos extensiones y $[c_1], [c_2] \in H^2(Q, A)$ sus cociclos asociados, podemos definir la suma $[E_1]+[E_2]$ como la clase de extensiones equivalentes asociada a $[c1 + c2] \in H^2(Q, A)$. Es decir, $Ext_\varphi(Q, A)$ tiene una estructura de grupo abeliano heredada de $H^2(Q, A)$.*

Proposición 2.2.5. *Dada una extensión $1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ y un homomorfismo $\alpha\colon Q' \to Q$, existe una extensión $1 \to A \to E' \to Q' \to 1$ única salvo equivalencia que hace al siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r] & E \arrow[r] & Q \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[u, equal] & E' \arrow[r] \arrow[u] & Q' \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & 1
\end{tikzcd}$$

Proposición 2.2.6. *Dada una extensión $1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ y un homomorfismo $\beta\colon A \to A'$, existe una extensión $1 \to A' \to E' \to Q \to 1$salvo equivalencia que hace al siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & E \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & N \arrow[r] & E' \arrow[r] & Q \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Teorema 2.2.7. *Podemos expresar la suma de extensiones anterior a partir de las extensiones $1 \to A \xrightarrow{i_j} E_j \xrightarrow{\pi_j} Q \to 1$, para $j = 1, 2$, como muestra el siguiente diagrama conmutativo. La última fila se conoce como la suma de Baer de las extensiones E_1 y E_2.*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \times A \arrow[r, hook, "i_1 \times i_2"] & E_1 \times E_2 \arrow[r, two heads, shift left, "\pi_1 \times \pi_2"] & Q \times Q \arrow[l, hook', shift left, "s_1 \times s_2"] \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & A \times A \arrow[u, equal] \arrow[r, hook, "\tilde{i}"] \arrow[d, two heads, "+"'] & E_1 \times_Q E_2 \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, two heads, shift left, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, two heads, "\pi_{\mathrm{Ker}(+)}"'] & Q \arrow[l, hook', shift left, "\tilde{s}"] \arrow[u, hook, "\Delta"'] \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r, hook, "i_3"] & \frac{E_1 \times_Q E_2}{\mathrm{Ker}(+)} \arrow[r, two heads, shift left, "\pi_3"] & Q \arrow[l, hook', shift left, "s_3"] \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Lema 2.2.8. *Sea Q un grupo y A un grupo abeliano tal que* $\operatorname{mcd}(|Q|,|A|) = 1$. *Entonces $H^n(Q,A)$ es trivial para todo $i \in \mathbb{N}$*

Demostración. Sean $|Q| = q$ y $|A| = a$. Sea c un n-cociclo

$$c(q_1,\dots,q_n)\cdot q_{n+1} + \left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^i c(q_1,\dots,q_iq_{i+1},\dots,q_{n+1})\right] + (-1)^{n+1}c(q_1,\dots,q_n) = 0$$

Haciendo el producto en $q_1 \in Q$

$$\tilde{c}(q_2,\dots,q_n)\cdot q_{n+1} + \left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \tilde{c}(q_2,\dots,q_iq_{i+1},\dots,q_{n+1})\right] + |Q|(-1)^{n+1}\tilde{c}(q_1,\dots,q_n) = 0$$

Multiplicando por $k \equiv (-1)^{n+1}|Q|^{-1} \mod |A|$

$$\tilde{c}(q_1,\dots,q_n) = k\tilde{c}(q_2,\dots,q_n)\cdot q_{n+1} + \left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^i k\tilde{c}(q_2,\dots,q_iq_{i+1},\dots,q_{n+1})\right] \tag{2.16}$$

□

Teorema 2.2.9. *Sea G un grupo finito y sea $N \trianglelefteq G$ abeliano, $|N| = n$ y $|G : N| = m$ con* $\operatorname{mcd}(n,m) = 1$. *Entonces G contiene subgrupos de orden m y dos cualesquiera son conjugados.*

Demostración. Tomamos una sección s y su 2-cociclo asociado c.

$$c(q_1,q_2)\cdot q_3 - c(q_1,q_2q_3) + c(q_1q_2,q_3) - c(q_2,q_3) = 0 \tag{2.17}$$

Definimos la función $\tilde{c}(x) = \sum_{t\in Q} c(t,x)$ y hacemos la suma en $q_1 \in Q$

$$mc(q_2,q_3) = \tilde{c}(q_2)\cdot q_3 + \tilde{c}(q_3) - \tilde{c}(q_2q_3) \tag{2.18}$$

Como $\operatorname{mcd}(m,n) = 1$, existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $km \equiv 1 \mod n$. Multiplicando por k llegamos a

$$c(q_2,q_3) = k\tilde{c}(q_2)\cdot q_3 + k\tilde{c}(q_3) - k\tilde{c}(q_2q_3) \tag{2.19}$$

Por tanto, c verifica la ecuación de un coborde para la función $k\tilde{c}$ y $H^2(Q,N)$ es trivial. Por la Observación 2.2.1, G es un producto semidirecto de Q por N.

Para ver que dos subgrupos cualesquiera son conjugados, cogemos s una escisión de G y a su 1-cociclo asociado.

$$a(q_1q_2) = a(q_1)\cdot q_2 + a(q_2) \tag{2.20}$$

Haciendo la suma en $q_1 \in Q$ y multiplicando por k

$$a(q_2) = k\tilde{a} - k\tilde{a} \cdot q_2 \tag{2.21}$$

vemos que a verifica la ecuación de un 1-coborde para la función $k\tilde{a}$ y $H^1(Q, N)$ es trivial. Por el Teorema 2,1,5, todas las escisiones son N-conjugadas y por tanto son conjugadas. $\square$

2.2.1. Extensiones centrales

Un caso particular de (2.7) es cuando la acción de Q en A es trivial