Extensiones de grupos y teoremas de Hall

Carlos Moya García

Universidad del País Vasco

7 de julio de 2022

Índice

Complejos de cocadenas

Dada una sucesión de R-módulos $C = \{C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, se define un complejo de cocadenas sobre C como

$$\cdots \to C^{n-1} \xrightarrow{\partial^{n-1}} C^n \xrightarrow{\partial^n} C^{n+1} \to \cdots$$

donde cada ∂^i es un homomorfismo de R-módulos y $\partial^{i+1} \circ \partial^i = 0$.

Se definen los grupos de n-cociclos, n-cobordes como

$$Z^n(C) = \mathrm{Ker}(\partial^n),$$
$$B^n(C) = \mathrm{Im}(\partial^{n-1})$$

y el n-ésimo grupo de cohomología como

$$H^n(C) = Z^n(C)/B^n(C).$$

Cohomología de grupos

Sea G un grupo y A un G-módulo. Denotamos por C^n al conjunto de funciones de G^n en A.
Definimos el operador coborde $\partial^n \colon C^n \to C^{n+1}$ como

$$\partial^n f = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_i f$$

donde d_i viene dado por

$$(d_i f)(g_1, \ldots, g_n) = \begin{cases} g_1 \cdot f(g_2, \ldots, g_n) & \text{si } i = 0, \\ f(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_n) & \text{si } 0 < i < n, \\ f(g_1, \ldots, g_{n-1}) & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Se verifica que $\partial^{n+1}(\partial^n f) = 0$ y por tanto (C, ∂) es un complejo de cocadenas.

Cohomología de grupos

1-coborde

$$(\partial^0 a)(g) = g \cdot a - a$$

1-cociclo

$$(\partial^1 f)(g_1, g_2) = g_1 \cdot f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1) = 0$$

2-coborde

$$(\partial^1 f)(g_1, g_2) = g_1 \cdot f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1)$$

2-cociclo

$$(\partial^2 f)(g_1, g_2, g_3) = g_1 \cdot f(g_2, g_3) - f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3) - f(g_1, g_2) = 0$$

Proposición

Si $|G| = m < \infty$ *o* $|A| = m < \infty$, *entonces* $m \cdot H^n(G, A) = \{0\}$.

Teorema

Si $\mathrm{mcd}(|G|, |A|) = 1$, *entonces* $H^n(G, A) = \{0\}$.

Extensiones de grupos

Una extensión de un grupo Q por un grupo N es una sucesión exacta corta

$$1 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1.$$

Decimos que dos extensiones son equivalentes cuando existe un homomorfismo f que hace al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i'"] & E' \arrow[r, "\pi'"] & Q \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Necesariamente f debe ser un isomorfismo de grupos.

Extensiones que escinden

Definición

Se dice que una extensión $1 \to N \to E \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ escinde cuando existe un homomorfismo $s\colon Q \to E$ tal que $\pi \circ s = 1_Q$.

Teorema

Una extensión $1 \to N \to E \to Q \to 1$ *que escinde es equivalente a* $1 \to N \to N \rtimes Q \to Q \to 1$.

Definición

Sea A un grupo abeliano y $1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ un extensión de grupos. Diremos que dos escisiones s_1 y s_2 son A-conjugadas si existe $a \in A$ tal que $s_1(Q)^{i(a)} = s_2(Q)$.

Teorema

Las escisiones salvo A-conjugación están en biyección con $H^1(Q, A)$.

Clasificación de las extensiones

$$1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1 \tag{1}$$

$$s(q_1)s(q_2)s(q_1q_2)^{-1} = i(c(q_1, q_2))$$

$$E = \bigsqcup_{q \in Q} i(A)s(q) = i(A)s(Q)$$

$$i(a_1)s(q_1)i(a_2)s(q_2) = i(a_1 + q_1 \cdot a_2 + c(q_1, q_2))s(q_1q_2)$$

El conjunto $A \times Q$ con la siguiente operación tiene estructura de grupo y es equivalente a (1) con la inclusión y proyección canónicas

$$(a_1, q_1) * (a_2, q_2) = (a_1 + q_1 \cdot a_2 + c(q_1, q_2), q_1q_2). \tag{2}$$

Clasificación de las extensiones

Proposición

El conjunto $A \times Q$ *con la operación definida en* (2) *define una extensión de* Q *por* A *cuando* c *es un 2-cociclo.*

Proposición

Sea $1 \to A \to E \xrightarrow{\pi} Q \to 1$, s_1 *y* s_2 *secciones de* π *y* c_1 *y* c_2 *los cociclos asociados. Entonces* $c_1 - c_2$ *es un 2-coborde.*

Teorema

Las extensiones de Q *por* A *salvo equivalencia están en biyección con* $H^2(Q, A)$.

Teorema de Schur-Zassenhaus

Teorema

Sean A *y* Q *grupos con órdenes coprimos y* $1 \to A \to E \to Q \to 1$ *una extensión. Entonces la extensión escinde y todas las escisiones son conjugadas.*

Subgrupos de Hall

Definición

Sea G un grupo, $S \leq G$ y π un conjunto de primos. Se dice que S es un π-subgrupo de Sylow cuando es un π-subgrupo maximal.

Definición

Se dice que H un π-subgrupo de Hall cuando $|H|$ es producto de primos en π y $|G : H|$ es coprimo con $|H|$. Denotamos al conjunto de π-subgrupos de Hall como $\mathrm{Hall}_\pi(G)$.

Definición

Se define el π-núcleo de G, $\mathrm{O}_\pi(G)$, como el subgrupo generado por todos los π-subgrupos normales. Equivalentemente, $\mathrm{O}_\pi(G)$ es la intersección de todos los π-subgrupos de Sylow.

Proposición

Sea G un grupo, $N \trianglelefteq G$ y $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. Entonces $H \cap N \in \mathrm{Hall}_\pi(N)$ y $HN/N \in \mathrm{Hall}_\pi(G/N)$.

Proposición

Sean π y τ conjuntos de primos disjuntos y $H \in \mathrm{Hall}_{\pi'}(G)$ y $K \in \mathrm{Hall}_{\tau'}(G)$ subgrupos de Hall. Entonces $H \cap K \in \mathrm{Hall}_{\pi' \cap \tau'}(G)$.

Teorema de Schur-Zassenhaus

Teorema

Sea G un grupo y $N \trianglelefteq G$ un π-subgrupo de Hall. Entonces G tiene π'-subgrupos de Hall y todos ellos son conjugados.

$$1 \to N \to G \to G/N \to 1$$

Sea $p \in \pi$ y $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Por el Argumento de Frattini se tiene $|N_G(P) : N \cap N_G(P)| = \pi'(G)$. Como $Z(P) \neq 1$ se aplica inducción en el cociente y existe una escisión $H/Z(P)$

$$1 \to \frac{N \cap N_G(P)}{Z(P)} \to \frac{N_G(P)}{Z(P)} \to \frac{H}{Z(P)} \to 1.$$

Aplicando el caso abeliano a $Z(P)$ y H se obtiene el π'-subgrupo de Hall Q

$$1 \to Z(P) \to H \to Q \to 1$$

Teoremas de Hall

Teorema

Sea G un grupo resoluble. Entonces, para todo conjunto de primos π se tiene

- $\mathrm{Hall}_\pi(G) \neq \emptyset$
- *G actúa transitivamente por conjugación sobre los π-subgrupos de Hall*

Teorema

Sea G un grupo tal que para todo conjunto de primos π existen π-subgrupos de Hall. Entonces G es resoluble.

Homomorfismo del transfer

Sea G un grupo, H un subgrupo de índice finito n y $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ representantes de las coclases de H. Definimos la acción de G sobre T por

$$Ht_i g = Ht_{(i)g},$$

de esta forma se tiene

$$t_i g t_{(i)g}^{-1} \in H.$$

Dado $\theta\colon H \to A$ un homomorfismo sobre un grupo abeliano, se define el transfer de θ como

$$\tau_{G/H}(g) = \prod_{i=1}^{n} \theta\left(t_i g t_{(i)g}^{-1}\right)$$

El transfer es un homomorfismo independiente del transversal.

Dado un elemento $x \in G$, las órbitas de la acción de x sobre las coclases por multiplicación a derecha tienen la siguiente forma

$$\left\{Hs_i, \ldots, Hs_i^{l_i-1}\right\},$$

donde l_i es el menor entero tal que $Hs_ix^{l_i} = Hs_i$.
Los elementos s_ix^j para $i = 1, \ldots k$ y $j = 0, \ldots, l_i - 1$ forman un transversal de H a G. El transfer con este transversal se escribe como

$$\tau_{G/H}(x) = \prod_{i=1}^{k} {}^{s_i}x^{l_i} = \prod_{i=1}^{k} s_ix^{l_i}s_i^{-1}.$$

Transfer a un subgrupo

Definimos el transfer de G a un subgrupo $H \leq G$ como el transfer a $\mathrm{Ab}\colon H \to H^{\mathrm{ab}}$

$$\tau_{G/H}(g) = \prod_{i=1}^{n} \left(t_i g t_{(i)g}^{-1} \right) H'.$$

Es de especial interés el transfer a subgrupos abelianos ya que dan lugar a endomorfismos de grupos.

Transfer al centro y teorema de Schur

Proposición

Sea $H \leq G$ un subgrupo central de índice finito $|G : H| = n$. Entonces el transfer de G a H es

$$\tau_{G/H}(g) = \prod_{i=1}^{k} {}^{s_i}x^{l_i} = x^n.$$

Teorema (Schur)

Sea G un grupo con centro $Z(G)$ de índice finito n. Entonces G' es finito y $G'^n = \{1\}$.

Fin

Gracias por su atención