eman ta zabal zazu

UPV EHU

ZIENTZIA ETA TEKNOLOGIA FAKULTATEA
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

50 URTE AÑOS 1968 - 2018
Biba Zientzia!
Ciencia Viva

Extensiones de grupos y teoremas de Hall

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas

Carlos Moya García

Trabajo dirigido por
Jon González Sánchez

Leioa, 24 de junio de 2022

Índice general

Introducción

El problema de las extensiones de grupos trata de determinar, dados dos grupos N y Q, cuáles son todos los grupos E que tienen un subgrupo normal isomorfo a N y cociente E/N isomorfo a Q. En este trabajo se estudiará el caso en que N es un grupo abeliano para eventualmente concluir que hay una biyección entre el segundo grupo de cohomología $H^2(Q, N)$ y las clases de extensiones equivalentes de Q por N.

Por otro lado, se estudiarán los grupos de acuerdo a la existencia de ciertos subgrupos. Se definirán los π-subgrupos de Hall como una generalización de los subgrupos de Sylow, cuyo orden es múltiplo de primos del conjunto π y cuyo índice no es divisible por ningún primo de π. Se verá que estos subgrupos comparten muchas semejanzas con los subgrupos de Sylow y se probará para grupos resolubles un resultado análogo al primer y segundo teorema de Sylow, que garantiza la existencia de subgrupos de Hall y que todos ellos son conjugados.

El trabajo estará estructurado de la siguiente forma: se comenzará dando una introducción a los complejos de cocadenas y a la cohomología de grupos. Se probarán diversos resultados que serán necesarios para la clasificación de las extensiones con subgrupo normal abeliano. Una vez caracterizadas a través de la cohomología de grupos, se hará uso del Teorema de Schur-Zassenhaus para demostrar en el Teorema de Hall que todos los π-subgrupos de Hall son conjugados. Seguidamente, daremos un teorema recíproco que caracteriza a los grupos resolubles mediante la existencia de π-subgrupos de Hall para todo subconjunto de primos π. Finalmente introduciremos el homomorfismo del transfer, una herramienta muy útil para el estudio de la resolubilidad de los grupos entre otras cosas.

Capítulo 1

Cohomología

Introduccion

Comenzamos repasando las definiciones y algunas propiedades de los módulos y de las sucesiones exactas.

1.1. G-módulos

Definición 1.1.1. Sea G un grupo. Un G-módulo izquierdo es un grupo abeliano A junto a una acción de grupo a izquierda $\varphi\colon G \times A \to A$, que escribiremos como $\varphi(g, a) = g \cdot a$, compatible con la operación de grupo de A. Es decir, para todo $g, g_1, g_2 \in G$ y $a, a_1, a_2 \in A$ se verifica

(i) $1 \cdot a = a$

(ii) $g_1 \cdot (g_2 \cdot a) = (g_1 g_2) \cdot a$

(iii) $g \cdot (a_1 + a_2) = g \cdot a_1 + g \cdot a_2$

Se sigue de (iii) que $g \cdot 0 = 0$ y que $g \cdot (-a) = -g \cdot a$ para todo $g \in G$ y $a \in A$.

Definición 1.1.2. Dados dos G-módulos A y B, un homomorfismo de G-módulos o G-homomorfismo es una función $f\colon A \to B$ que verifica

(i) $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$

(ii) $f(g \cdot a) = g \cdot f(a)$

Denotamos por $\mathrm{Hom}_G(A, B)$ al conjunto de G-homomorfismos de A a B.

1.2. Anillos de grupos

Dado un grupo G definimos el anillo $\mathbb{Z}[G]$ como el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por los elementos de G. Es decir, un elemento en $\mathbb{Z}[G]$ es una suma finita

$$\sum_{g\in G} a_g g$$

donde $g \in G$, $a_g \in \mathbb{Z}$ y $a_g = 0$ para casi todo $g \in G$.

Definimos el producto en $\mathbb{Z}[G]$ de la siguiente forma

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{h\in G} b_h h\right) = \sum_{g,h\in G} a_g b_h gh,$$

y la suma como

$$\sum_{g\in G} a_g g + \sum_{g\in G} b_g g = \sum_{g\in G} (a_g + b_g) g.$$

Con estas operaciones, $\mathbb{Z}[G]$ tiene estructura de anillo con unidad al que llamamos anillo de grupo integral de G. Notese que este anillo será conmutativo si y solo si G es abeliano.

Observación 1.2.1. Una estructura de G-módulo sobre un grupo abeliano A extiende de manera única a un $\mathbb{Z}[G]$-módulo por linealidad. Esto es, dado un elemento de $\mathbb{Z}[G]$ definimos la acción sobre $a \in A$ como

$$\left(\sum_{g\in G} b_g g\right) \cdot a = \sum_{g\in G} b_g (g \cdot a) \in A.$$

Recíprocamente, a partir de una estructura de $\mathbb{Z}[G]$-módulo en A, esta da una acción de G en A restringiendo la acción al subgrupo G de $\mathbb{Z}[G]$.

De igual manera, un homomorfismo de G-módulos extiende a un homomorfismo de $\mathbb{Z}[G]$-módulos. Por ello, a partir de ahora hablaremos indistintamente de G y $\mathbb{Z}[G]$-módulos.

1.3. Sucesiones exactas

Definición 1.3.1. Una sucesión de grupos G_i y homomorfismos f_i

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

se dice que es exacta en G_n si $\mathrm{Im}(f_{n-1}) = \mathrm{Ker}(f_n)$. Diremos que es la sucesión es exacta si lo es para todo G_n.

Diremos que es una sucesión exacta corta cuando es de la forma

$$1 \to G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \to 1 \tag{1.1}$$

Observación 1.3.1. La definición de sucesión exacta corta dice que f_2 es inyectiva, f_3 sobreyectiva y $G_2/\operatorname{Im}(f_2) \cong G_3$.

Observemos que el recíproco también es cierto. Dados dos grupos G y H y $f\colon G \to H$ un epimorfismo, se puede construir la sucesión exacta corta $1 \to \operatorname{Ker}(f) \xrightarrow{i} G \xrightarrow{f} H \to 1$. De igual manera, si $N \trianglelefteq G$, entonces $1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/N \to 1$ es una sucesión exacta corta.

Proposición 1.3.1 (Lema corto de los cinco)**.** *Si las filas del siguiente diagrama conmutativo son exactas y g y h son isomorfismos entonces f es un isomorfismo.*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "g"] & B_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "f"] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 1 \\
1 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "i_2"'] & B_2 \arrow[r, "\pi_2"'] & C_2 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Demostración. Para verlo, demostramos que f es inyectiva y sobreyectiva.

Comenzamos viendo que f es inyectiva. Sea $x \in \operatorname{Ker}(f)$, por la conmutatividad del diagrama, $h(\pi_1(x)) = \pi_2(f(x)) = \pi_2(1) = 1$. Entonces, $\pi_1(x) \in \operatorname{Ker}(h) = \{1\}$ y $x \in \operatorname{Ker}(\pi_1)$, por tanto existe $\tilde{x} \in A_1$ tal que $i_1(\tilde{x}) = x$, de nuevo por conmutatividad, $i_2(g(\tilde{x})) = f(i_1(\tilde{x})) = f(x) = 1$ y como i_2 y g son inyectivas, $\tilde{x} = 1$ y $x = i_1(\tilde{x}) = 1$.

Ahora vemos la sobreyectividad. Sea $x \in B_2$, como π_1 y h son sobreyectivas existe $x_1 \in B_1$ tal que $\pi_2(x) = h(\pi_1(x_1)) = \pi_2(f(x_1))$. Por tanto, $xf(x_1)^{-1} \in \operatorname{Ker}(\pi_2) = \operatorname{Im}(i_2)$ y existe $\tilde{x} \in A_2$ tal que $i_2(\tilde{x}) = xf(x_1)^{-1}$. Usando que g es isomorfismo, $i_2(\tilde{x}) = f(i_1(g^{-1}(\tilde{x})))$. Despejando $x = f(i_1(g^{-1}(\tilde{x}))x_1)$, obtenemos que f es sobreyectiva. $\square$

1.4. Complejos de cadenas

Antes de tratar el caso de la cohomología de grupos, introducimos en general los complejos de cadenas y cocadenas.

Sea R un anillo con unidad. Un R-módulo graduado es una sucesión de R-módulos $C = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Diremos que los elementos del R-módulo C_n tienen grado n. Definimos una aplicación de grado r entre dos R-módulos graduados C y C' como una sucesión de homomorfismos de R-módulos $f = \{f_n\colon C_n \to C'_{n+r}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Un complejo de cadenas sobre R es el par (C, d) donde C es un R-módulo graduado y $d\colon C \to C$ una aplicación de grado -1 llamado operador de borde que verifica $d_n \circ d_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, escrito sin subíndices como $d^2 = 0$. Equivalentemente, el operador de borde verifica $\operatorname{Im}(d_{n+1}) \subseteq \operatorname{Ker}(d_n)$.

$$\cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to \cdots \tag{1.2}$$

Definimos los n-ciclos y n-bordes como $Z_n(C) = \mathrm{Ker}(d_n)$ y $B_n(C) = \mathrm{Im}(d_{n+1})$ respectivamente. Asimismo, definimos el n-ésimo grupo de homología del complejo C como $H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)}$. El complejo de cadenas C será exacto si y solo si $H_n(C) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Así, los grupos de homología miden cómo de lejos está el complejo de ser exacto.

En el caso en que el operador d tenga grado 1 en vez de -1, se dirá que (C, d) es un complejo de cocadenas y d un operador de coborde. Se escribirá todo con superíndices y con el prefijo *co-* para distinguirlo de un complejo de cadenas. De manera análoga definimos los n-cociclos, n-cobordes y el n-ésimo grupo de cohomología como $Z^n(C) = \mathrm{Ker}(d^n)$, $B^n(C) = \mathrm{Im}(d^{n-1})$ y $H^n(C) = \frac{Z^n(C)}{B^n(C)}$.

Notese que no hay ninguna diferencia esencial entre complejos de cadenas y cocadenas y siempre podemos pasar de uno a otro cambiando los índices $C^n = C_{-n}$. En la práctica, para que no sean equivalentes, se suele requerir que los complejos de cadenas verifiquen $C_n = 0$ para todo $n > 0$ y los complejos de cocadenas $C^n = 0$ para $n < 0$.

1.5. Cohomología de grupos

Ahora nos centraremos en la cohomología de grupos. Para comenzar, fijaremos un Q-módulo A y definiremos unos grupos abelianos a partir de Q y A sobre los que construiremos un operador coborde. Los resultados principales de esta sección probarán que el operador define un complejo de cocadenas y que la cohomología de este es trivial cuando Q y A tienen órdenes coprimos.

Definición 1.5.1. Sea A un G-módulo con acción φ y sea $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por $C^n_\varphi(G, A)$ al conjunto de funciones de G^n a A. Este conjunto junto con la operación $(f + g)(g_1, \ldots, g_n) = f(g_1, \ldots, g_n) + g(g_1, \ldots, g_n)$ para $f, g \in C^n$ y la acción de G dada por $(g \cdot f)(g_1, \ldots, g_n) = g \cdot f(g_1, \ldots, g_n)$ para $f \in C^n$ y $g \in G$ hacen a $C^n_\varphi(G, A)$ un G-módulo. A los elementos de $C^n_\varphi(G, A)$ los llamaremos n-cocadenas. A menudo escribiremos C^n cuando esté claro de qué G-módulo estamos hablando.

Definición 1.5.2. Dado $n \in \mathbb{N}$, el operador coborde $\partial^n \colon C^n \to C^{n+1}$ se define como

$$\partial^n f = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_i f$$

donde el operador d_i viene dado por

$$(d_i f)(g_1, \ldots, g_n) = \begin{cases} g_1 \cdot f(g_2, \ldots, g_n) & \text{si } i = 0, \\ f(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_n) & \text{si } 0 < i < n, \\ f(g_1, \ldots, g_{n-1}) & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Diremos que ∂f es el coborde de f.

Lema 1.5.1. *Sea $f \in C^{n-1}$, entonces para todo $i = 0, \dots, n+1$ y $j = i, \dots, n$*

$$d_i d_j f = d_{j+1} d_i f. \tag{1.3}$$

Demostración. Para simplificar los calculos, extendemos $(g_1, \dots, g_{n+1})$ a $(g_0, \dots, g_{n+3})$ con $g_0 = g_{n+2} = g_{n+3} = 1$. Definimos la operación de d_i sobre la tupla como $d_i(g_0, \dots, g_{n+3}) = (g_0, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+3})$. La tupla obtenida tras aplicar d_i y d_j, se aplicará a f actuando el primer elemento a la izquierda con la acción de G-módulo en A y omitiendo los dos últimos elementos (o actuándolos a la derecha con acción trivial). Así tenemos la siguiente forma de calcular $d_i(d_j f)$

$$f \cdot (\tilde{g}_0, \dots, \tilde{g}_{n+1}) = \tilde{g}_0 \cdot f(\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{n-1}), \tag{1.4}$$
$$f \cdot (d_j(d_i(g_0, \dots, g_{n+3}))) = d_i(d_j f)(g_1, \dots, g_{n+1}). \tag{1.5}$$

De esta forma, reducimos los casos frontera a un mismo caso homogéneo que estudiaremos a continuación.

- Caso $j = i$:

$$\begin{aligned} d_i(d_i(g_0, \dots, g_{n+3})) &= d_i(g_0, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+3}) \\ &= (g_0, \dots, g_i g_{i+1} g_{i+2}, \dots, g_{n+3}) \\ &= d_i(g_0, \dots, g_{i+1} g_{i+2}, \dots, g_{n+3}) \\ &= d_i(d_{i+1}(g_0, \dots, g_{n+3})). \end{aligned}$$

- Caso $j \geq i + 1$:

$$\begin{aligned} d_j(d_i(g_0, \dots, g_{n+3})) &= d_j(g_0, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+3}) \\ &= (g_0, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{j+1} g_{j+2}, \dots, g_{n+3}) \\ &= d_i(g_0, \dots, g_{j+1} g_{j+2}, \dots, g_{n+3}) \\ &= d_i(d_{j+1}(g_0, \dots, g_{n+3})). \end{aligned}$$

Usando (1.5), hemos probado el resultado. □

Teorema 1.5.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $\partial^{n+1} \partial^n = 0$, lo que hace a (C, ∂) un complejo de cocadenas.*

Demostración. Para probarlo separaremos la siguiente suma en dos triangulos, $j < i$ y $j \geq i$, aplicaremos el Lema 1.5.1 al segundo y finalmente reescribiremos los índices del sumatorio. Sea $f \in C^n$

$$\begin{aligned}
\partial^{n+1}(\partial^n f) &= \sum_{i=0}^{n+2}(-1)^i d_i(\partial^n f) = \sum_{i=0}^{n+2}\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^{i+j} d_i(d_j f) \\
&= \sum_{0\le j<i\le n+2}(-1)^{i+j} d_i(d_j f) + \sum_{0\le i\le j\le n+1}(-1)^{i+j} d_i(d_j f) \\
&= \sum_{0\le j<i\le n+2}(-1)^{i+j} d_i(d_j f) + \sum_{0\le i\le j\le n+1}(-1)^{i+j} d_{j+1}(d_i f) \\
&= \sum_{0\le j<i\le n+2}(-1)^{i+j} d_i(d_j f) + \sum_{0\le j<i\le n+2}(-1)^{i+j-1} d_i(d_j f) \\
&= \sum_{0\le j<i\le n+2}(-1)^{i+j}(d_i(d_j f) - d_i(d_j f)) = 0.
\end{aligned}$$

□

Definición 1.5.3. La proposición anterior nos permite definir los grupos de n-cobordes y n-cociclos como

$$B^n_\varphi(G, A) = \operatorname{Im}(\partial^{n-1}),$$
$$Z^n_\varphi(G, A) = \operatorname{Ker}(\partial^n).$$

Con ellos podemos definir entonces el n-ésimo grupo de cohomología como

$$H^n_\varphi(G, A) = \frac{Z^n_\varphi(G, A)}{B^n_\varphi(G, A)} = \frac{\operatorname{Im}(\partial^{n-1})}{\operatorname{Ker}(\partial^n)}. \tag{1.6}$$

Dado $f \in Z^n(G, A)$, denotaremos su clase de equivalencia por $[f] \in H^n(G, A)$. Diremos que dos cociclos que pertenecen a la misma clase son cohomólogos.

Observación 1.5.1. $C^0(G, A)$ es el conjunto de funciones de $G^0 = 1$ a A que es naturalmente isomorfo a A. El complejo de cocadenas (C, ∂) puede extenderse a la izquierda con un 0

$$0 \xrightarrow{\partial^{-1}} A \xrightarrow{\partial^0} C^1(G, A) \xrightarrow{\partial^1} C^2(G, A) \xrightarrow{\partial^2} \cdots$$

lo que permite definir el grupo de cohomología H^0 como $\operatorname{Ker}(\partial^0)/\operatorname{Im}(\partial^{-1}) = \{a \in A \ : \ g \cdot a = a \ \forall g \in G\} = A^G$.

Observación 1.5.2. Sea G un grupo y A un G-módulo de exponente m, esto es, m es el máximo común divisor de los órdenes de los elementos de A. Entonces, como las cocadenas toman valores en A, $mH^n(G, A) = \{0\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema 1.5.3. *Sea G un grupo finito de orden m y A un G-módulo. Entonces $mH^n(G, A) = \{0\}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.*

Demostración. Sea $c \in Z^n(Q, A)$

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (d_i c)(g_1, \ldots, g_{n+1}) = 0. \tag{1.7}$$

Definiendo $\tilde{c}(g_1, \ldots, g_{n-1}) = \sum_{g_n \in G} c(g_1, \ldots, g_n)$ y haciendo la suma en (1.7) para cada $g_{n+1} \in G$ obtenemos que

$$\sum_{g_{n+1} \in G} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (d_i c)(g_1, \ldots, g_{n+1}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (d_i \tilde{c})(g_1, \ldots, g_n) + (-1)^{n+1} mc(g_1, \ldots, g_n) = 0.$$

Despejando se obtiene que mc es un coborde

$$mc = (-1)^n \partial \tilde{c} \in B^n(G, A).$$

□

Teorema 1.5.4. *Sea A un G-módulo con* $\operatorname{mcd}(|G|, |A|) = 1$*. Entonces* $H^n(G, A) = \{0\}$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}^+$*.*

Demostración. Por la Observación 1.5.2 y el Lema 1.5.3, todo $[c] \in H^n(G, A)$ tiene orden divisible por $|A|$ y $|G|$, y por tanto divide al máximo común divisor de ambos y $[c]$ es trivial. □

1.6. Cociclos normalizados y H^2

En esta sección daremos un isomorfismo entre el segundo grupo de cohomología y un grupo más pequeño en el que los 2-cociclos verifican cierta condición de normalización que definiremos a continuación. Este isomorfismo será de gran ayuda para simplificar la clasificación de extensiones en el siguiente capítulo.

Definición 1.6.1. Un 2-cociclo $c \in Z^2(G, A)$ se dice que es normalizado cuando para todo $g \in G$

$$c(1, g) = 0 = c(g, 1).$$

Observemos que la suma de dos cociclos normalizados es también un cociclo normalizado. Definimos los grupos de cociclos y cobordes normalizados como $Z^2_N(G, A)$ y $B^2_N(G, A)$ respectivamente.

Proposición 1.6.1. $c \in Z^2_N(G, A)$ *si y solo si* $c(1, 1) = 0$*.*

Demostración. La implicación a la derecha viene de la definición. Para la implicación no trivial, tomamos $c \in Z^2(G, A)$ tal que $c(1, 1) = 0$. Evaluando $\partial^2 c$ en $(1, 1, g) \in G^3$

$$1 \cdot c(1, g) - c(1, g) + c(1, g) - c(1, 1) = c(1, g) = 0.$$

De igual manera, evaluando en $(g, 1, 1) \in G^3$

$$g \cdot c(1, 1) - c(g, 1) + c(g, 1) - c(g, 1) = -c(g, 1) = 0.$$

□

Lema 1.6.2. *Todo* 2*-cociclo* $c \in Z^2(G, A)$ *es cohomólogo a un* 2*-cociclo normalizado.*

Demostración. Tomamos una función $\phi \colon G \to A$ tal que $\phi(1) = -c(1, 1)$ y construímos el 2-coborde b de ϕ

$$b(g_1, g_2) = (\partial^1 \phi)(g_1, g_2) = q_1 \cdot \phi(g_2) - \phi(g_1 g_2) + \phi(g_1).$$

De la igualdad anterior, se deduce que b verifica $b(1, 1) = \phi(1) = -c(1, 1)$ y por tanto el cociclo $\tilde{c} = c + b$ es un 2-cociclo normalizado. □

Teorema 1.6.3. *Dado un grupo G y A un G-módulo, se tiene el siguiente isomorfismo entre los grupos de cohomología*

$$H^2_N(G, A) = \frac{Z^2_N(G, A)}{B^2_N(G, A)} \cong \frac{Z^2(G, A)}{B^2(G, A)} = H^2(G, A). \tag{1.8}$$

Demostración. Por el Lema 1.6.2, tenemos el siguiente epimorfismo

$$\begin{aligned} \Phi \ : \ Z^2_N(G, A) &\twoheadrightarrow H^2(G, A) \\ c \ &\mapsto [c]. \end{aligned}$$

El kernel de Φ es precisamente la intersección de $Z^2_N(G, A)$ y $B^2(G, A)$, esto es, $B^2_N(G, A)$. Aplicando el Primer Teorema de Isomorfía, se sigue el resultado. □

Capítulo 2

Extensiones de grupos

El objetivo de este capítulo es estudiar todas las formas de construir un grupo E a partir de dos grupos Q y N, de tal forma que E tenga un subgrupo normal isomorfo a N y cuyo cociente sea isomorfo a Q. Para ello, definiremos una relación de equivalencia sobre el conjunto de extensiones y daremos una clasificación usando los grupos de cohomología H^1 y H^2 (Teoremas 2.3.3 y 2.4.3) cuando el grupo N es abeliano. El caso general se puede encontrar en [Bro82, IV, §6] y [Mac95, IV, §8] e involucra el grupo de cohomología H^3. Después demostraremos el caso abeliano del Teorema de Schur-Zassenhaus que será necesario en el siguiente capítulo. Por último, nuevamente recurriremos a la cohomología para clasificar las extensiones con grupo E abeliano.

2.1. Equivalencia de extensiones

Definición 2.1.1. Una extensión de un grupo Q por un grupo N es una sucesión exacta corta

$$1 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1. \tag{2.1}$$

Al grupo N lo llamaremos kernel de la extensión, al grupo Q el cociente de la extensión y a E el grupo central de la extensión.

Decimos que otra extensión $1 \to N \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{\pi'} Q \to 1$ es equivalente si existe un homomorfismo $f\colon E \to E'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i'"] & E' \arrow[r, "\pi'"] & Q \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

El interés está en clasificar todas las extensiones de Q por N. La equivalencia de extensiones captura la idea de que los grupos centrales se construyen a partir de N y Q esencialmente de la misma forma, ya que N y Q se incluyen y proyectan de la misma manera.

A continuación se dan unos ejemplos conocidos de extensiones de grupos.

Ejemplo 2.1.1. El grupo diédrico $D_{2n} = \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1,\ a^b = a^{-1} \rangle$ es una extensión de $C_2 = \langle b \rangle$ por $C_n = \langle a \rangle$.

Ejemplo 2.1.2. El grupo alternado A_n se define como el kernel del homomorfimo del signo $\mathrm{sgn}\colon S_n \to \{1, -1\}^{\times}$ que manda una permutación a 1 si es producto de un número par de transposiciones, y a -1 si es un número impar. Por tanto, S_n es una extensión de C_2 por A_n.

$$1 \to A_n \xrightarrow{i} S_n \xrightarrow{sgn} C_2 \to 1.$$

Ejemplo 2.1.3. Siguiendo el ejemplo anterior, dado un cuerpo $\mathbb{K}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, el grupo especial lineal $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ es el grupo de las matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$ con determinante 1. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ es precisamente el kernel del homomorfismo determinante $\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^{\times}$. Así, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ es una extensión de $\mathbb{K}^{\times}$ por $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

$$1 \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{i} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\det} \mathbb{K}^{\times} \to 1.$$

Ejemplo 2.1.4. Dados dos grupos G y H, se construye la extensión trivial $1 \to G \xrightarrow{i} G \times H \xrightarrow{\pi} H \to 1$ con $G \times H$ el producto directo e i y π la inclusión y proyección canónicas.

Ejemplo 2.1.5. Más generalmente, dados dos grupos G y N y una acción de grupos $\varphi\colon G \to Aut(N)$, el producto semidirecto $N \rtimes_{\varphi} G$ es una extensión de G por N.

Observación 2.1.1. Por la Proposición 1.3.1, dos extensiones equivalentes $1 \to N \xrightarrow{i_j} E_j \xrightarrow{\pi_j} Q \to 1$ para $j = 1, 2$ dan lugar a grupos centrales isomorfos.

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco no es cierto, y por tanto la equivalencia de extensiones es más fuerte que tener grupos centrales isomorfos.

Ejemplo 2.1.6. Las extensiones $1 \to \mathbb{Z}_3 \xrightarrow{\times 3} \mathbb{Z}_9 \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}_3 \to 1$ para $n = 1, 2$ no son equivalentes.

Demostración. Lo probamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $f\colon \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_9$ que haga a las dos extensiones equivalentes. Un automorfismo f de $\mathbb{Z}_9$ viene dado por $f(x) = kx$ con $x \in \mathbb{Z}_9$ y $k \in \mathbb{Z}_9^{\times} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

Para que $\pi_2 \circ f = \pi_1$, $(\times 2 \circ f)(x) = 2kx = x \mod 3$, $k \equiv 2 \mod 3$, por lo que $k = 2, 5, 8$.

Por otro lado, para que $f \circ i_1 = i_2$, $(f \circ \times 3)(x) = 3kx = 3x \mod 9$, por lo que $k = 1, 4, 7$.

Por tanto, no existe un isomorfismo f que haga al diagrama conmutativo y las extensiones no son equivalentes. □

Proposición 2.1.1. *La equivalencia de extensiones es una relación de equivalencia.*

Demostración. (i) Reflexiva: E es equivalente a E tomando $f = 1_E$.

(ii) Simétrica: Si $f\colon E_1 \to E_2$ es una equivalencia, por la Observación (2.1.1), $f^{-1}\colon E_2 \to E_1$ es una equivalencia.

(iii) Transitiva: Si $f\colon E_1 \to E_2$ y $g\colon E_2 \to E_3$ son equivalencias, $g \circ f \circ i_1 = g \circ i_2 = i_3$ y $\pi_1 \circ g \circ f = \pi_2 \circ f = \pi_3$, entonces $g \circ f\colon E_1 \to E_3$ es una equivalencia.

□

El estudio de las extensiones lo haremos haciendo uso de secciones, que se definen a continuación. La idea será tomar una sección y tratar de construir extensiones equivalentes definiendo una operación de grupo sobre el producto $N \times Q$.

Definición 2.1.2. Sea $\pi\colon A \to B$ un homomorfismo de grupos, una sección s de π es una inversa a la derecha de π, esto es, $s\colon B \to A$ tal que $\pi \circ s = 1_B$. Notese que s no es necesariamente un homomorfismo de grupos.

Observación 2.1.2. Una extensión $1 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ determina, por conjugación por elementos de E, un homomorfismo $\alpha\colon E \to \mathrm{Aut}(N)$ definido por

$$\alpha(g)(n) = {}^{g}i(n) = gi(n)g^{-1}.$$

Entonces, $\alpha(N) = \mathrm{Inn}(N)$ y α induce un homomorfismo

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}\colon E/i(N) &\to \mathrm{Out}(N) \\ gi(N) &\mapsto \overline{\alpha(g)}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

El homomorfismo $\tilde{\alpha}$ se conoce como el kernel abstracto de la extensión. Fijando una sección s de π, para todo $q \in Q$, la conjugación por $s(q)$ determina un automorfismo $\varphi(q)$ de N definido por $\varphi(q)(n) = \alpha(s(q))(n)$.

Notese que la función $\varphi\colon Q \to \mathrm{Aut}(N)$ no es necesariamente un homomorfismo de grupos, pero sí lo es salvo automorfismos internos. En particular, si la sección s es un homomorfismo o el grupo de automorfismos internos de N es trivial, como se estudia en las secciones 2.2 y 2.4 respectivamente, entonces φ sí es un homomorfismo y podremos hablar de la acción de grupos de la extensión.

Observación 2.1.3. Dos extensiones E y E' equivalentes dan lugar a un mismo kernel abstracto.

Demostración. $f\left(i(n)^{s(q)}\right) = i'(n)^{s'(q)}$ □

Por ello, para estudiar las extensiones salvo equivalencia procederemos de la siguiente forma.

(i) Determinar todas las acciones externas de Q en N que dan lugar a una extensión de grupos de Q por N (una acción externa no siempre da lugar a una extensión de grupos, ver [Mac95, IV, Lema 8.3]).

(ii) Para cada acción, construir todas las extensiones de Q por N que dan lugar a esa acción.

(iii) Ver cuáles de ellas son equivalentes.

Definición 2.1.3. Sean Q y N grupos y φ una acción externa de Q en N. Denotamos por $\mathrm{Ext}_\varphi(Q,N)$ al conjunto de clases de extensiones equivalentes de Q por N que dan lugar a la acción externa φ.

2.2. Extensiones que escinden

Definición 2.2.1. Decimos que una extensión $1 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ escinde cuando existe una sección $s\colon Q \to E$ de π que es un homomorfismo.

Teorema 2.2.1. *Una extensión $1 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ que escinde es equivalente a $1 \to N \to N \rtimes_\varphi Q \to Q \to 1$, donde $\varphi\colon Q \to \mathrm{Aut}(N)$ es una acción de grupos de Q en N.*

Demostración. Si E escinde, existe una sección $s\colon Q \to E$ que es homomorfismo. s es inyectiva porque es una inversa por la derecha de π y, por tanto, $Q \cong s(Q) \leq E$. Por ser una sucesión exacta, $s(q) \in i(N)$ sí y solo sí $q = 1_Q$, por lo que $s(Q) \cap i(N) = 1_E$ y E es isomorfo a un producto semidirecto externo de Q por N.

El isomorfismo $f\colon N \rtimes Q \to E$ viene dado por $f(n,q) = i(n)s(q)$. Para ver que es un homomorfismo, se comprueba que la operación de grupo en E es compatible con la del producto semidirecto.

Sean $(n_1,q_1),(n_2,q_2) \in N \times Q$

$$i(n_1)s(q_1)i(n_2)s(q_2) = i(n_1)i(n_2)^{q_1}s(q_1)s(q_2) = i(n_1n_2^{q_1})s(q_1q_2).$$

Esto prueba que $f(n_1,q_1)f(n_2,q_2) = f((n_1,q_1)(n_2,q_2))$.

Para ver que las extensiones son equivalentes, se toman la inclusión i' y proyección π' canónicas de $N \rtimes Q$ y se verifica trivialmente que $i = f \circ i'$ y $\pi = \pi' \circ f$. □

2.3. Clasificación de las escisiones

Hemos visto que las extensiones que escinden son únicas salvo equivalencia. A continuación tomaremos la escisión canónica

$$1 \to A \xrightarrow{i} A \rtimes Q \xrightarrow{\pi} Q \to 1 \tag{2.4}$$

y daremos una clasificación de las escisiones de la extensión cuando A es abeliano.

Definición 2.3.1. Diremos que dos escisiones s_1 y s_2 son A-conjugadas si existe un $a \in A$ tal que $s_1(q) = s_2(q)^{i(a)}$ para todo $q \in Q$.

Proposición 2.3.1. *Las escisiones de* (2.4) *son homomorfismos de la forma* $s(q) = (c(q), q)$ *donde* $c\colon Q \to A$ *es un* 1*-cociclo.*

Demostración. Una sección s de π tiene la forma $s(q) = (c(q), q)$ donde c es una función $c\colon Q \to A$. Imponiendo que la sección sea un homomorfismo

$$\begin{aligned} s(q_1)s(q_2) &= (c(q_1) + q_1 \cdot c(q_2), q_1q_2), \\ s(q_1q_2) &= (c(q_1q_2), q_1q_2). \end{aligned}$$

La función c tiene que verificar la ecuación de un 1-cociclo para que s sea una escisión.

$$q_1 \cdot c(q_2) - c(q_1q_2) + c(q_1) = 0. \tag{2.5}$$

□

Proposición 2.3.2. *Sean* s_1 *y* s_2 *dos escisiones y* c_1 *y* c_2 *los* 1*-cociclos asociados. Entonces* s_1 *y* s_2 *son* A*-conjugadas si* c_1 *y* c_2 *se diferencian en un* 1*-coborde.*

Demostración. Si existe un $a \in A$ tal que $s_1(q) = s_2(q)^{i(a)}$ para todo $q \in Q$,

$$\begin{aligned} (c_1(q), q) &= (-a, 1)(c_2(q), q)(a, 1) \\ &= (-a + c_2(q) + q \cdot a, q). \end{aligned}$$

La diferencia entre c_1 y c_2 es el coborde de la función constante a

$$c_1(q) - c_2(q) = q \cdot a - a = (\partial^0 a)(q). \tag{2.6}$$

□

Las proposiciones 2.3.1 y 2.3.2 prueban el siguiente teorema.

Teorema 2.3.3. *Sea* Q *un grupo,* A *un* Q*-módulo y* E *una extensión de* Q *por* A*. Entonces, las clases de escisiones* A*-conjugadas están en correspondencia uno a uno con los elementos de* $H^1(Q, A)$*.*

2.4. Extensiones con kernel abeliano

A continuación estudiaremos el caso en que N es un grupo abeliano que a partir de ahora denotaremos por A.

Por la Observación 2.1.2, como $\mathrm{Inn}(A)$ es trivial, $Out(A) = Aut(A)$ y la acción de Q en A es un homomorfismo de grupos, lo que hace a A un Q-módulo. Dada una sección $s\colon Q \to E$, la acción de un elemento $q \in Q$ en un elemento $a \in A$ viene dada por

$$q \cdot a = {}^{s(q)}i(a). \tag{2.7}$$

A partir de ahora, fijaremos una acción de Q en A y estudiaremos todas las extensiones que dan lugar a dicha acción.

$$1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1, \tag{2.8}$$
$$\varphi\colon Q \to Aut(A). \tag{2.9}$$

Para estudiar esta extensión, consideramos una sección s de π, que en el caso de Q infinito se puede asegurar que existe asumiendo el axioma de elección. Como $Q \cong E/i(A)$, dados $g, h \in Q$, $\pi\left(s(g)s(h)s(gh)^{-1}\right) = 1_Q$ por ser π homomorfismo. Por tanto, $s(gh)$ y $s(g)s(h)$ distan en un elemento de $i(A)$ y podemos definir una función $c\colon Q \times Q \to A$ que mide cuánto dista s de ser un homomorfismo

$$s(g)s(h) = i\left(c(g,h)\right)s(gh). \tag{2.10}$$

Podemos recuperar la extensión (2.8) a partir de la acción φ que hemos fijado y de la función c. Como

$$E = \bigsqcup_{q \in Q} i(A)s(q) = i(A)s(Q)$$

es una unión disjunta, podemos expresar unívocamente cada elemento de E como un producto de elementos de $i(A)$ y $s(Q)$. Es decir, tenemos una biyección $A \times Q \to E$. A partir del producto en E, podemos definir una operación de grupo en $A \times Q$, que denotaremos por E_c. Dados $(a_1, q_1), (a_2, q_2) \in A \times Q$ tenemos:

$$\begin{aligned} i(a_1)s(q_1)i(a_2)s(q_2) &= i(a_1)i(q_1 \cdot a_2)s(q_1)s(q_2) \\ &= i(a_1 + q_1 \cdot a_2 + c(q_1, q_2))s(q_1 q_2). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Por tanto, la operación en E_c viene dada por:

$$(a_1, q_1)(a_2, q_2) = (a_1 + q_1 \cdot a_2 + c(q_1, q_2), q_1 q_2). \tag{2.12}$$

Dado que la sección la podemos escoger de manera arbitraria, podemos suponer que la sección s es normalizada para facilitar los cálculos. Es decir,

$$s(1) = 1. \tag{2.13}$$

De aquí obtenemos que c verifica la siguiente condición de normalización

$$c(1, q) = 0 = c(q, 1). \tag{2.14}$$

De esta forma, el isomorfismo $f\colon E_c \to E$ viene dado por $f(a, q) = i(a)s(q)$. La inclusión de A a E_c y la proyección a Q son las canónicas, haciendo a la extensión E_c equivalente a (2.8).

Proposición 2.4.1. *Sea φ una acción de Q en A y $c\colon Q \times Q \to A$ una función que verifica la condición de normalización* (2.14)*. Entonces, la operación* (2.12) *define una extensión de Q por A cuando c es un* 2*-cociclo normalizado.*

Demostración. Para ver que la funcion define una operación de grupo comprobamos la asociatividad y la existencia de identidad e inversos.

(i) Asociatividad. Imponiendo que para todo $(a_i, q_i) \in A \times Q$ con $i = 1, 2, 3$

$$[(a_1, q_1)(a_2, q_2)](a_3, q_3) = (a_1, q_1)[(a_2, q_2)(a_3, q_3)]$$

llegamos a que c verifica la ecuación de un 2-cociclo normalizado

$$q_1 \cdot c(q_2, q_3) - c(q_1q_2, q_3) + c(q_1, q_2q_3) - c(q_1, q_2) = 0. \tag{2.15}$$

(ii) Identidad. Comprobamos que $(0, 1)$ es la identidad de E_c. Sea $(a, q) \in A \times Q$,

$$\begin{aligned} (0, 1)(a, q) &= (0 + 1 \cdot a + c(1, q), q) = (a, q), \\ (a, q)(0, 1) &= (a + q \cdot 0 + c(q, 1), q) = (a, q). \end{aligned}$$

(iii) Inverso. Se comprueba utilizando (2.15) que el inverso de $(a, q) \in A \times Q$ es $(-q^{-1} \cdot a - c(q^{-1}, q), q^{-1})$.

Finalmente, comprobamos que la inclusión i y proyección π canónicas de $A \times Q$ son homomorfismos y hacen a la sucesión exacta.

$$\begin{gathered} i(a_1)i(a_2) = (a_1 + 1 \cdot a_2 + c(1, 1), 1) = (a_1 + a_2, 1) = i(a_1 + a_2), \\ \pi((a_1, q_1)(a_2, q_2)) = \pi(-, q_1q_2) = q_1q_2 = \pi(a_1, q_1)\pi(a_2, q_2), \\ \pi(i(a)) = \pi(a, 1) = 1. \end{gathered}$$

□

Proposición 2.4.2. *Sea E una extensión de Q por A, s_1 y s_2 dos secciones normalizadas de Q a E y c_1, c_2 los cociclos asociados a s_1 y s_2. Entonces, c_1 y c_2 se diferencian en un* 2*-coborde normalizado y la extensión E determina la clase $[c_1] \in H^2_\varphi(Q, A)$.*

Demostración. La diferencia de s_1 y s_2 define una función $e\colon Q \to A$ por $s_2(q) = i(e(q))s_1(q)$. Cambiando la sección s_2 por s_1 en (2.10)

$$\begin{aligned} i(c_2(g,h))s_2(gh) &= s_2(g)s_2(h) \\ &= i(e(g))s_1(g)i(e(h))s_1(h) \\ &= i(e(g) + g \cdot e(h))s_1(g)s_1(h) \\ &= i(e(g) + g \cdot e(h) + c_1(g,h))s_1(gh) \\ &= i(e(g) + g \cdot e(h) - e(gh) + c_1(g,h))s_2(gh) \end{aligned}$$

obtenemos que la diferencia de c_2 y c_1 es el coborde de e

$$(c_2 - c_1)(g,h) = g \cdot e(h) - e(gh) + e(g) = (\partial^1 e)(g,h). \tag{2.16}$$

Además, por ser c_1 y c_2 cociclos normalizados

$$(c_2 - c_1)(1,1) = e(1) = 0,$$

de donde deducimos que $c_2 - c_1$ es un coborde normalizado. □

Hemos visto en 2.4.1 que un 2-cociclo normalizado da lugar a una extensión de Q por A y en 2.4.2 que dos extensiones son equivalentes cuando los 2-cociclos normalizados son cohomólogos. La elección de cociclos normalizados es valida y clasifica todas las extensiones ya que como se ha visto en el Teorema 1.6.3, el segundo grupo de cohomología es isomorfo al segundo grupo de cohomología normalizado.

Queda demostrado el siguiente teorema.

Teorema 2.4.3. *Sea A un Q-módulo dado por una acción $\varphi\colon Q \to Aut(A)$. Entonces, las extensiones salvo equivalencia de Q por A están en correspondencia uno a uno con los elementos del segundo grupo de cohomología.*

$$\mathrm{Ext}_\varphi(Q,A) \cong H^2_\varphi(Q,A).$$

Observación 2.4.1. El producto semidirecto se corresponde con el elemento neutro de $H^2(Q,A)$.

Demostración. Por el Teorema 2.2.1, si una sección es un homomorfismo, el 2-cociclo asociado a esta es trivial. □

Proposición 2.4.4. *Sean $[E_1], [E_2] \in Ext(Q,A)$ dos extensiones y $[c_1], [c_2] \in H^2(Q,A)$ sus cociclos asociados, podemos definir la suma $[E_1]+[E_2]$ como la clase de extensiones equivalentes asociada a $[c1 + c2] \in H^2(Q,A)$. Es decir, $Ext_\varphi(Q,A)$ tiene una estructura de grupo abeliano heredada de $H^2(Q,A)$.*

En el Apéndice B se da otra forma de construir la suma anterior sin el uso de cociclos y se estudian algunas propiedades de H^2.

2.5. Teorema de Schur-Zassenhaus. Caso abeliano

Teorema 2.5.1. *Sea G un grupo finito y sea $A \trianglelefteq G$ abeliano, $|A| = n$ y $|G : A| = m$ con $\mathrm{mcd}(n, m) = 1$. Entonces G contiene subgrupos de orden m y dos cualesquiera son conjugados.*

Demostración. Llamemos $Q = G/A$. Por el Teorema 1.5.4, $H^2(Q, A)$ es trivial y por la Observación 2.4.1, G es un producto semidirecto de Q por A. Esto prueba la parte de existencia.

Para la conjugación, cualquier subgrupo $\tilde{Q}$ de G de orden m, al ser $\mathrm{mcd}(n, m) = 1$, tiene intersección trivial con A y la proyección de G sobre G/A es inyectiva. Por tanto, $\tilde{Q}$ es una escisión de G. De nuevo, por el Teorema 1.5.4, $H^1(Q, A)$ es trivial y por el Teorema 2.3.3 todas las escisiones de la extensión G son A-conjugadas y por tanto conjugadas. □

2.6. Extensiones centrales y abelianas

En esta sección introduciremos las extensiones centrales y daremos una caracterización de cúando el grupo intermedio de una extensión es abeliano.

Definición 2.6.1. Decimos que una extension $1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ es una extensión central cuando $i(A) \leq Z(E)$.

Diremos que es abeliana cuando el grupo central E de la extensión es abeliano. No debe confundirse con una extensión con núcleo abeliano.

Proposición 2.6.1. *Una extensión $1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ es central si y solo si la acción es trivial.*

Demostración. Sea una sección $s\colon Q \to E$, la acción de Q en A viene dada por conjugación $q \cdot a = {}^{s(q)}i(a)$ que es trivial si y solo si ${}^{s(q)}i(a) = i(a)$. Como la acción de q no depende de la sección s, $i(a)$ está en el centro y la extensión es central. □

A partir de ahora consideraremos que Q es abeliano y la acción de Q en A es trivial.

Definición 2.6.2. Sea $c \in Z^2(Q, A)$ un 2-cociclo. Decimos que c es un 2-cociclo simétrico cuando para todo $q_1, q_2 \in Q$

$$c(q_1, q_2) = c(q_2, q_1).$$

Claramente la suma de dos cociclos simétricos también es simétrica. Denotaremos a los subgrupos de 2-cociclos y 2-cobordes simétricos como $Z^2(Q, A)_s$ y $B^2(Q, A)_s$ respectivamente.

Teorema 2.6.2. *Una extensión* $1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ *es abeliana si y solo si es una extensión central,* Q *es abeliano y todo cociclo asociado a la extensión es simétrico.*

Demostración. Supongamos que E es abeliano. Entonces la extensión es central y cualquier subgrupo y cociente de E es abeliano, en particular Q. Sean $q_1, q_2 \in Q$, entonces

$$c(q_1, q_2) = s(q_1)s(q_2)s(q_1q_2)^{-1} = s(q_2)s(q_1)s(q_2q_1)^{-1} = c(q_2, q_1).$$

Supongamos ahora que c es un cociclo simétrico y A y Q son abelianos. Entonces la operación en E_c descrita en 2.12 viene dada por

$$\begin{aligned}(a_1, q_1)(a_2, q_2) &= (a_1 + a_2 + c(q_1, q_2), q_1q_2)\\ &= (a_2 + a_1 + c(q_2, q_1), q_2q_1)\\ &= (a_2, q_2)(a_1, q_1)\end{aligned}$$

y E es abeliano. □

Proposición 2.6.3. *Todo 2-coborde es simétrico. Por tanto,* $B^2(Q, A)_s = B^2(Q, A)$.

Demostración. Sea $\phi \in C^1(Q, A)$ una 1-cocadena. Entonces

$$(\partial^1\phi)(q_1, q_2) = \phi(q_2) - \phi(q_1q_2) + \phi(q_1) = (\partial^1\phi)(q_2, q_1).$$

□

Corolario 2.6.4. *Sea* $c \in Z^2(Q, A)_s$ *un 2-cociclo simétrico. Entonces,* $c' \in [c]$ *es también un 2-cociclo simétrico.*

Demostración. $c' = c+b$ para algún $b \in B^2(Q, A) = B^2(Q, A)_s \leq Z^2(Q, A)_s$. $Z^2(Q, A)_s$ es un subgrupo y por tanto c' es simétrico. □

Por tanto, las clases de cociclos simétricos están bien definidas y tiene sentido hablar de $H^2(Q, A)_s$, el subgrupo de clases de cociclos simétricos. Por lo visto en los teoremas 2.4.3 y 2.6.2, las extensiones abelianas están clasificadas salvo equivalencia por $H^2(Q, A)_s$.

Teorema 2.6.5. *Sea* Q *abeliano y* A *un* Q*-módulo trivial. Entonces, las extensiones abelianas salvo equivalencia están en biyección con los elementos de* $H^2(Q, A)_s$.

$$\mathrm{Ext}_{Ab}(Q, A) \cong H^2(Q, A)_s.$$

Capítulo 3

Teoremas de Hall

En este capítulo se expone una generalización de los subgrupos de Sylow dada por Hall, en la que el orden de los subgrupos es coprimo con el índice. Estos subgrupos no tienen porqué existir, pero cuando se da el caso, estos comparten muchas similitudes con los subgrupos de Sylow y como veremos, la existencia de estos da información sobre la resolubilidad del grupo.

3.1. Subgrupos de Hall

Comenzaremos definiendo los subgrupos de Hall y viendo algunas propiedades que serán necesarias para probar los resultados principales del capítulo.

Definición 3.1.1. Sea G un grupo y π un conjunto no vacío de primos. Llamamos π-subgrupo de G a un subgrupo cuyo orden es un π-número, esto es, un número que es producto de primos de π. Definimos un π-subgrupo de Sylow como un π-subgrupo maximal y al conjunto de los π-subgrupos de Sylow lo denotaremos por $\mathrm{Syl}_\pi(G)$.

Definición 3.1.2. Un π-subgrupo H de G decimos que es un π-subgrupo de Hall si $|H|$ es un π-número y $|G:H|$ es un π'-número, es decir, un número que no es divisible por ningún primo de π. Denotaremos por $\mathrm{Hall}_\pi(G)$ al conjunto de los π-subgrupos de Hall de G.

Claramente los π-subgrupos de Hall son π-subgrupos de Sylow, pero mientras que estos últimos siempre existen, la existencia de los subgrupos de Hall no está garantizada. A continuación se dan dos ejemplos de grupos, uno en los que no siempre existen subgrupos de Hall, y otro en el que sí existen.

Ejemplo 3.1.1. En A_5 no hay π-subgrupos de Hall para $\pi = \{2,5\}, \{3,5\}$. Por reducción al absurdo, si A_5 tuviese un subgrupo H de índice menor que 5, la acción sobre las coclases bien a derecha o a izquierda inducirían un homomorfismo de A_5 sobre $S_{A_5/H} \cong S_{|A_5:H|}$. Como A_5 es simple y la acción no es trivial, el homomorfismo debería ser inyectivo pero esto es imposible ya que $|A_5| = 60 > n!$ para $n \leq 4$.

En general, se puede probar que un grupo G simple no abeliano no puede tener subgrupos propios de índice menor que 5.

Ejemplo 3.1.2. Todo grupo de orden $p^a q^b$ con p y q primos tiene subgrupos de Hall porque los subgrupos de Hall propios son subgrupos de Sylow. El caso más pequeño no trivial que tiene subgrupos de Hall para todo conjunto de primos es $|G| = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, por ejemplo $D_{30} = \langle x, y \mid x^{15} = y^2 = 1,\ x^y = x^{-1} \rangle$.

A continuación se muestra la rejilla de subgrupos de Hall de D_{30}. Estos subgrupos no son los únicos, pero como se verá al final del capítulo, en un grupo resoluble son todos conjugados.

$$\begin{tikzcd}
 & D_{30} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
D_6 = \langle x^5, y \rangle \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & D_{10} = \langle x^3, y \rangle \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & C_{15} = \langle x \rangle \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\
C_2 = \langle y \rangle \arrow[dr, dash] & C_3 = \langle x^5 \rangle \arrow[d, dash] & C_5 = \langle x^3 \rangle \arrow[dl, dash] \\
 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Definición 3.1.3. Al subgrupo generado por todos los π-subgrupos normales de G lo denotamos por $\mathrm{O}_\pi(G)$. Este subgrupo es a su vez un π-subgrupo ya que si $H, K \trianglelefteq G$, $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$ es un π-número. Además es el único π-subgrupo normal maximal de G y por tanto es característico en G.

Observación 3.1.1. Un π-subgrupo de Hall normal N de un grupo G es característico porque $N = \mathrm{O}_\pi(G)$.

Proposición 3.1.1. *Sea G un grupo y π un conjunto de primos. Entonces, $\mathrm{O}_\pi(G)$ es la intersección de todos los π-subgrupos de Sylow de G.*

Demostración. Sea $M = \mathrm{O}_\pi(G)$ y $S \in \mathrm{Syl}_\pi(G)$, entonces MS es un π-subgrupo. Por maximalidad de S, se sigue que $M \leq MS = S$. Por otro lado, la intersección de todos los π-subgrupos de Sylow es un subgrupo característico y por tanto está contenida en M. $\square$

Proposición 3.1.2. *Sea G un grupo finito, $N \trianglelefteq G$ y $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. Entonces $H \cap N \in \mathrm{Hall}_\pi(N)$ y $HN/N \in \mathrm{Hall}_\pi(G/N)$.*

Demostración. Basta comprobar que $|H \cap N|$ y $|HN/N|$ son π-números y que $|N : H \cap N|$ y $|G/N : HN/N|$ son π'-números.

$H \cap N$ es un subgrupo de H y por tanto $|H \cap N|$ es un π-número. Por ser N normal, HN es un subgrupo y $|N : H \cap N| = |HN : H|$ divide a $|G : H|$ que es un π'-número. Por tanto, $H \cap N \in \mathrm{Hall}_\pi(N)$.

$|HN : N| = |H : H \cap N|$ es un π-número y $\left|\frac{G}{N} : \frac{HN}{N}\right| = |G : HN|$ divide a $|G : H|$ por lo que es un π'-número y $HN/N \in \mathrm{Hall}_\pi(G/N)$. $\square$

3.2. Teorema de Schur-Zassenhaus

Lema 3.2.1 (Argumento de Frattini)**.** *Sea G un grupo finito, $N \trianglelefteq G$ y $P \in \mathrm{Syl}_p(N)$, entonces $G = \mathrm{N}_G(P)N$.*

Demostración. Sea $g \in G$. Por la normalidad de N, $P^g \leq N$ y por el Segundo Teorema de Sylow existe un $n \in N$ tal que $P^g = P^n$. Conjugando por n^{-1} se tiene que $P^{gn^{-1}} = P$, es decir, $gn^{-1} \in \mathrm{N}_G(P)$ y por tanto $g \in \mathrm{N}_G(P)n \subseteq \mathrm{N}_G(P)N$. $\square$

Teorema 3.2.2 (Schur-Zassenhaus)**.** *Sea G un grupo finito y $N \trianglelefteq G$ un subgrupo de Hall, es decir, $|N| = n$ y $|G : N| = m$ con $\mathrm{mcd}(n, m) = 1$. Entonces G contiene subgrupos de orden m y son conjugados.*

Equivalentemente, la extensión $1 \to N \to G \to G/N \to 1$ escinde y G es isomorfo a un producto semidirecto externo de G/N por N.

Demostración. El caso N abeliano ya ha sido demostrado en el Teorema 2.5.1. Basta demostrar la existencia y la conjugación en el caso general.

(i) Existencia. Lo demostramos por inducción fuerte sobre el orden de G. Podemos tomar como caso base C_p, que como es abeliano se cumple el resultado. Para el caso general, tomemos un primo p que divida a n y $P \in \mathrm{Syl}_p(N)$. Sean $L = \mathrm{N}_G(P)$ y $C = \mathrm{Z}(P)$. Como C es característico en P y $P \trianglelefteq L$, tenemos que $C \trianglelefteq L$. Por el argumento de Frattini, $G = LN$. Observamos que $|L : N \cap L| = |LN : N| = m$ y que $N \cap L \trianglelefteq L$ por el Segundo Teorema de Isomorfía.

El subgrupo C es no trivial ya que es el centro de un p-subgrupo. Aplicando inducción sobre el grupo L/C, existe $H/C \leq L/C$ de orden m y volviendo a G por el Teorema de Correspondencia, existe un subgrupo H de índice m en C. Aplicando el caso abeliano a C y H se concluye que existe un subgrupo $Q \leq H$ de orden m.

(ii) Conjugación (Caso N resoluble). Sean Q_1 y Q_2 subgrupos de G de orden m. Como N es resoluble $N' \neq N$, $N' \operatorname{car} N \trianglelefteq G$ y por tanto, $N' \trianglelefteq G$. Aplicando el caso abeliano a N/N' y G/N', Q_1N'/N' y Q_2N'/N' son conjugados. Por tanto, existe $g_1 \in G$ tal que $Q_1^{g_1} \leq Q_2N'$. $Q_1^{g_1}$ y Q_2 son subgrupos de orden m en Q_2N', aplicando inducción sobre la longitud derivada de N se llega a $Q_1^{g_d} \leq Q_2N^{(d)} = Q_2$.

(iii) Conjugación (Caso G/N resoluble). Lo demostramos por inducción sobre el orden de G. Sean π el conjunto de divisores primos de m y H y K dos π-subgrupos de Hall.

Si $\mathrm{O}_\pi(G) = 1$, tomamos un subgrupo normal minimal L/N de G/N, que existe por ser G/N resoluble. Este es un p-subgrupo elemental abeliano para algún $p \in \pi$. Por la Proposición 3.1.2, $H \cap L, K \cap L \in \mathrm{Hall}_\pi(L) = \mathrm{Syl}_p(L)$. Aplicando el Segundo Teorema de Sylow, existe un $g \in L$ tal que $H \cap L = (K \cap L)^g = K^g \cap L$. $H \cap L \trianglelefteq H$ y $K^g \cap L \trianglelefteq K^g$, por tanto, $H \cap L \trianglelefteq \langle H, K^g \rangle = J$. J no puede ser todo G porque $H \cap L$ sería un π-subgrupo normal no trivial, lo que contradice que $\mathrm{O}_\pi(G)$ sea trivial. Entonces $|J| < |G|$ y aplicando inducción se sigue que H y K^g son conjugados en $J < G$.

Si $\mathrm{O}_\pi(G) \neq 1$, por la Proposición 3.1.1 $\mathrm{O}_\pi(G) \trianglelefteq H \cap K$ y pasando al cociente, $G/\mathrm{O}_\pi(G) = 1$ por lo que $H/\mathrm{O}_\pi(G)$ y $K/\mathrm{O}_\pi(G)$ son conjugados.

(iv) Conjugación (Caso general). Por el Teorema de Feit-Thompson, todos los grupos de orden impar son resolubles, y como m y n son coprimos, m o n es impar y G/N o N es resoluble. □

Observación 3.2.1. El Teorema de Feit-Thompson (ver [FT63]) solo es necesario para probar la conjugación si no se sabe a priori si N o G/N son resolubles.

3.3. Teoremas de Hall

Teorema 3.3.1 (Hall)**.** *Sea G un grupo finito resoluble. Entonces para todo conjunto de primos π existen π-subgrupos de Hall y todos ellos son conjugados.*

Demostración. Lo demostramos por inducción sobre el orden de G. Basta probar que todo π-subgrupo de Sylow S es también un π-subgrupo de Hall. Si $R = \mathrm{O}_\pi(G) \neq 1$, por la Proposición 3.1.1 $R \leq S$ y pasando al cociente S/R es un π-subgrupo de Hall de G/R por inducción. $|G : S| = |G/R : S/R|$ es un π'-número y por tanto $S \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. Sea S_2 otro π-subgrupo de Hall, por inducción existe $g \in G$ tal que $S^g/R = S_2/R$ y $S^g = S_2$ por el Teorema de Correspondencia.

Si $R = 1$, como G es resoluble existe un subgrupo normal minimal M de G y es un p-subgrupo elemental abeliano. Entonces M está contenido en $R' = \mathrm{O}_{\pi'}(G)$. SR'/R' es un π-subgrupo de Hall por inducción y por tanto $S \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. Si S_2 es otro π-subgrupo de Hall, por inducción existe $g \in G$ tal que $S^gR'/R' = S_2R'/R'$. Se sigue que $S^gR' = S_2R'$ y por tanto $S^g \leq S_2R'$. Tenemos que $R' \trianglelefteq S_2R'$ y podemos aplicar el Teorema 3.2.2 para concluir que S y S_2 son conjugados en S_2R' y por tanto también lo son en G. □

Observación 3.3.1. La condición de resolubilidad se puede rebajar a π-separabilidad, en la que únicamente se pide que los factores de la serie de composición de G sean π-grupos o π'-grupos. Bajo esta hipótesis, bien $\mathrm{O}_\pi(G)$ u $\mathrm{O}_{\pi'}(G)$ es no trivial y se sigue que existen π-subgrupos de Hall.. La π-separabilidad se explica más en detalle en [Rob96, 9, π-Separable Groups].

Lema 3.3.2. *Sea G un grupo finito y H, K p' y q'-subgrupos de Hall respectivamente, p y q primos distintos. Entonces $|G : H \cap K| = |G : H|\,|G : K|$, es decir, $H \cap K$ es un $\{p, q\}'$-subgrupo de Hall.*

En general, para H y K π' y τ'-subgrupos de Hall con $\pi \cap \tau = \emptyset$ se tiene la misma igualdad y $H \cap K$ es un $(\pi \cup \tau)'$-subgrupo de Hall.

Demostración. Por la formula del producto de subgrupos

$$|H : H \cap K| = |HK : K| \leq |G : K|\,.$$

Multiplicando por $|G : H|$

$$|G : H|\,|H : H \cap K| = |G : H \cap K| \leq |G : H|\,|G : K|\,.$$

Por otro lado, como $p \neq q$, $\mathrm{mcd}(|G : H|\,, |G : K|) = 1$ y tanto $|G : H|$ como $|G : K|$ dividen a $|G : H \cap K|$, tenemos que $|G : H|\,|G : K|$ divide a $|G : H \cap K|$ y $|G : H|\,|G : K| \leq |G : H \cap K|$. □

El recíproco del Teorema 3.3.1 también es cierto. Es decir, un grupo G en el que existen π-subgrupos de Hall para todo conjunto de primos π es resoluble. Por el lema anterior, es suficiente comprobar que existen p'-subgrupos de Hall y el resto de subgrupos de Hall provienen de la intersección de estos.

Teorema 3.3.3 (Hall)**.** *Sea G un grupo finito tal que para todo primo p existe un p'-subgrupo de Hall. Entonces G es resoluble.*

Demostración. Lo demostramos por reducción al absurdo. Si el resultado es falso, existe un grupo G de orden mínimo para el que no se cumple. Sea $N \trianglelefteq G$ y H un p'-subgrupo de Hall, por la Proposición 3.1.2, $H \cap N$ y HN/N son p'-subgrupos de Hall de N y G/N respectivamente. Por minimalidad de G, N y G/N son resolubles. Esto implicaría que G es resoluble y por tanto, G no puede tener subgrupos normales propios y debe simple.

Sea $|G| = p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$ con $a_i > 0$ y p_i primos distintos. Por el Teorema de Burnside $n > 2$ ya que sino G sería resoluble. Sea G_i un p_i'-subgrupo de Hall, es decir, $|G : G_i| = p_i^{a_i}$. Tomemos $H = \bigcap_{i=3}^n G_i$, por el Lema 3.3.2, $|H| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} < |G|$ y H es resoluble por minimalidad de G. Tomamos N un subgrupo normal minimal de H, entonces N es un p-grupo elemental abeliano donde $p = p_1$ o p_2. Sin perdida de generalidad, supongamos que es p_1.

Por el lema, $|H \cap G_2| = p_1^{a_1}$ y $H \cap G_2$ es un p_1-subgrupo de Sylow de G, de igual manera, $H \cap G_1$ es un p_2-subgrupo de Sylow. Un p-subgrupo normal está contenido en todos los p-subgrupos de Sylow y, por tanto, $N \leq H \cap G_2 < G$. Podemos escribir $G = (H \cap G_1)G_2$ ya que $\mathrm{mcd}(|H \cap G_1|, |G_2|) = 1$. La clausura normal de N, $N^G = N^{(H \cap G_1)G_2} = N^{G_2} \leq G_2 < G$ es un subgrupo normal propio de G, lo que contradice la hipótesis de que G sea simple.

$\square$

Capítulo 4

Transfer

Sea G un grupo y H un subgrupo de G de índice finito n. Dado un homomorfismo $\theta\colon H \to A$ sobre un grupo abeliano, el transfer permite definir un homomorfismo de G sobre A.

Para ello tomamos $\{t_1, \ldots, t_n\}$ un conjunto de representantes de las coclases a derecha de H en G. La multiplicación a derecha de las coclases Ht_i por elementos de G nos define una acción

$$\begin{aligned} G/H \times G &\to G/H \\ (Ht_i, g) &\mapsto Ht_i g = Ht_{(i)g}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $i \mapsto (i)g$ es una permutación de S_n. Se tiene entonces que $t_i g t_{(i)g}^{-1} \in H$ para todo $g \in G$ y esto nos da una forma natural de definir una función sobre G haciendo el producto siguiente que llamaremos pre-transfer de G a H.

$$P_{G/H}(g) = \prod_{i=1}^{n} t_i g t_{(i)g}^{-1}. \tag{4.2}$$

El pre-transfer no es en general independiente del transversal ni un homomorfismo de grupos. Estos dos problemas se pueden solucionar componiendo el pre-transfer con un homomorfismo sobre un grupo abeliano.

4.1. Homomorfismo del transfer

Definición 4.1.1. Sea G un grupo, H un subgrupo de G de índice finito n, $\{t_1, \ldots, t_n\}$ un transversal a derecha de H a G y $\theta\colon H \to A$ un homomorfismo sobre un grupo abeliano A. El transfer de θ se define como la composición de θ con el pre-transfer $P_{G/H}$

$$\begin{aligned} \tau_{G/H}\colon G &\to A \\ g &\mapsto \prod_{i=1}^{n} \theta\left(t_i g t_{(i)g}^{-1}\right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Proposición 4.1.1. *El transfer $\tau_{G/H}\colon G \to A$ es un homomorfismo que no depende de la elección del transversal.*

Demostración. Sean $\{t_1, \ldots, t_n\}$ y $\{s_1, \ldots, s_n\}$ dos transversales tales que $s_i = h_i t_i$ con $h_i \in H$. Entonces, para todo $g \in G$

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} \theta\left(s_i g s_{(i)g}^{-1}\right) &= \prod_{i=1}^{n} \theta\left(h_i t_i g t_{(i)g}^{-1} h_{(i)g}^{-1}\right)\\ &= \prod_{i=1}^{n} \theta\left(t_i g t_{(i)g}^{-1}\right) \theta\left(h_i h_{(i)g}^{-1}\right)\\ &= \prod_{i=1}^{n} \theta\left(t_i g t_{(i)g}^{-1}\right).\end{aligned}$$

De donde deducimos que el transfer no depende de la elección del transversal.

Para ver que es un homomorfismo, cogemos $x, y \in G$

$$\begin{aligned}\theta^*(xy) &= \prod_{i=1}^{n} \theta\left(t_i xy t_{(i)xy}^{-1}\right)\\ &= \prod_{i=1}^{n} \theta\left((t_i x t_{(i)x}^{-1})(t_{(i)x} y t_{(i)xy}^{-1})\right)\\ &= \prod_{i=1}^{n} \theta\left(t_i x t_{(i)x}^{-1}\right) \theta\left(t_{(i)x} y t_{(i)xy}^{-1}\right)\\ &= \theta^*(x)\theta^*(y).\end{aligned}$$

Por lo tanto el transfer es un homomorfismo, como queríamos demostrar. □

Observación 4.1.1. Sea G un grupo y $\tau\colon G \to A$ un homomorfismo sobre un grupo abeliano A. Entonces, $G' \leq \operatorname{Ker}(\tau)$ y por tanto τ factoriza de forma única a través de la abelianización de G. Es decir, existe un único homomorfismo $\tilde{\tau}\colon G^{\mathrm{ab}} \to A$ que hace al siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] & A \\ G^{\mathrm{ab}} \arrow[ur, "\exists ! \tilde{\tau}"'] & \end{tikzcd}$$

4.2. Cálculo del transfer

En ocasiones, dado un $x \in G$ se puede calcular el transfer de manera eficiente con una buena elección de los representantes de las coclases. El elemento

x actúa sobre las coclases $\{Ht_1, \ldots, Ht_n\}$ por multiplicación a derecha permutándolas. Las órbitas bajo esta acción tienen la siguiente forma

$$\left\{Hs_i, \ldots, Hs_i^{l_i-1}\right\} \tag{4.4}$$

con l_i el menor entero positivo tal que $Hs_i x^{l_i} = Hs_i$.

Se tiene entonces que los elementos $s_i x^j$ con $i = 1, \ldots, k$, $j = 0, \ldots, l_i - 1$ y k el número de órbitas forman un transversal de H a G. Además, por el teorema de la Órbita-Estabilizador (ver [Rob96, 1.6.1]), se tiene que $l_i \bigm| |G|$.

Lema 4.2.1. *Si $\{s_1, \ldots, s_k\}$ son representantes de las coclases de las órbitas de la acción de x, entonces*

$$\tau(x) = \prod_{i=1}^{k} \theta({}^{s_i}x^{l_i}). \tag{4.5}$$

Demostración. Miramos la contribución de la órbita de s_i al transfer de x.

$$\prod_{j=0}^{l_i-1} \theta(s_i x^j x (s_i x^j)^{-1}) = \prod_{j=0}^{l_i-1} \theta(s_i x s_i^{-1}) = \theta(s_i x s_i^{-1})^{l_i} = \theta({}^{s_i}x^{l_i}).$$

Multiplicando las contribuciones de todas las órbitas se llega al resultado. □

4.3. Transfer a un subgrupo

Nos centramos a continuación en el caso en que θ es la abelianización del subgrupo H, es decir, $\theta \colon H \to H^{\mathrm{ab}} = H/H'$. En este caso, denotaremos al transfer por $\tau_{G/H} \colon G \to H^{\mathrm{ab}}$ y diremos que $\tau_{G/H}$ es el transfer de G a H.

Ejemplo 4.3.1. Si G es abeliano y $H \leq G$ con $|G : H| = n < \infty$, el transfer de G a H es $g \mapsto g^n$.

Demostración. Sea $\{t_1, \ldots, t_n\}$ un transversal de H. Entonces para todo $g \in G$

$$\prod_{i=1}^{n} t_i g (t_{(i)g})^{-1} = g^n \prod_{i=1}^{n} t_i (t_{(i)g})^{-1} = g^n.$$

□

Proposición 4.3.1. *Sea G un grupo y $H \leq K \leq G$ tal que $|G : H|$ es finito. Entonces, el transfer de G a H es $\tau_{G/H} = \tilde{\tau}_{K/H} \circ \tau_{G/K} = \tilde{\tau}_{K/H} \circ \tilde{\tau}_{G/K} \circ \mathrm{Ab}$.*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "P_{G/K}"] \arrow[d, "\mathrm{Ab}"] \arrow[dr, "\tau_{G/K}"] & K \arrow[r, "P_{K/H}"] \arrow[d, "\mathrm{Ab}"] \arrow[dr, "\tau_{K/H}"] & H \arrow[d, "\mathrm{Ab}"] \\
G^{ab} \arrow[r, "\tilde{\tau}_{G/K}"] & K^{ab} \arrow[r, "\tilde{\tau}_{K/H}"] & H^{ab}.
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sean $\{g_1, \dots, g_n\}$ y $\{k_1, \dots, k_m\}$ transversales a derecha de K a G y de H a K respectivamente. Entonces

$$G = \bigsqcup_{i=1}^{n} Kg_i = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m} Hk_jg_i$$

y $\{k_jg_i \ : \ i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots m\}$ es un transversal de H a G.

Miramos como actúa un elemento g en la coclase Hk_jg_i.

$$Hk_jg_ig = Hk_jg_ig(g_{(i)g}^{-1}g_{(i)g}) = Hk_j(g_igg_{(i)g}^{-1})g_{(i)g} = Hk_{(j)g_igg_{(i)g}^{-1}}g_{(i)g}. \quad (4.6)$$

Evaluando $\tilde{\tau}_{K/H} \circ \tau_{G/K}$ en g y utilizando (4.6) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_{K/H} \circ \tau_{G/K}(g) &= \tilde{\tau}_{K/H}\left(\prod_{i=1}^{n} K'g_igg_{(i)g}^{-1}\right) \\
&= \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} H'k_jg_igg_{(i)g}^{-1}k_{(j)g_igg_{(i)g}^{-1}}^{-1} \\
&= \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} H'k_jg_ig(k_{(j)g_igg_{(i)g}^{-1}}g_{(i)g})^{-1} \\
&= \tau_{G/H}(g).
\end{aligned}$$

□

Proposición 4.3.2. *Sea G un grupo y $H \leq G$ de índice finito n. Sea $\tau_{G/H}$ el transfer de G a H. Entonces $(i \circ \tilde{\tau}_{G/H})(gG') = g^nG'$ donde i es la inclusión de H^{ab} en G^{ab} definida por $i(hH') = hG'$.*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "\tau_{G/H}"] & \\
G^{ab} \arrow[r, shift right, "\tilde{\tau}_{G/H}"'] & H^{ab} \arrow[l, shift right, "i"']
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $\{t_1, \dots, t_n\}$ un transversal de H y $\tau_{G/H}$ el transfer de G a H.

$$\begin{aligned}(i \circ \tilde{\tau}_{G/H})(gG') &= i(\prod_{i=1}^{n} t_i g t_{(i)g}^{-1} H') \\ &= \prod_{i=1}^{n} i(t_i g t_{(i)g}^{-1} H') \\ &= \prod_{i=1}^{n} t_i g t_{(i)g}^{-1} G' \\ &= g^n \prod_{i=1}^{n} t_i t_{(i)g}^{-1} G' = g^n G'.\end{aligned}$$

□

4.3.1. Transfer al centro

Proposición 4.3.3. *Sea G un grupo y H un subgrupo central de G de índice $|G : H| = n$. Entonces, el transfer de G a H es $\tau_{G/H}(g) = g^n$.*

Demostración. ${}^{s_i}g^{l_i} \in H \leq Z(G)$ y conjugando por s_i se llega a $g^{l_i} \in Z(G)$. Finalmente

$$\prod_{i=1}^{k} {}^{s_i}g^{l_i} = \prod_{i=1}^{k} g^{l_i} = g^n. \tag{4.7}$$

□

Lema 4.3.4 (Schreier)**.** *Sea G un grupo finitamente generado y H un subgrupo de G de índice finito n. Entonces H es finitamente generado.*

Demostración. Sea X un sistema generador finito de G y $T = \{1 = t_1, \ldots, t_n\}$ un transversal normalizada de H a G. Definimos la función $\tau_i(g) = t_i g t_{(i)g}^{-1} \in H$ como en (4.1), de esta forma $t_i g = \tau_i(g) t_{(i)g}$. Demostramos por inducción en k que todo producto $x = x_1 \cdots x_k$ con $x_i \in \langle X \rangle = G$ se puede escribir de la forma $x = u_1 \cdots u_k t_i$ con $u_j \in Y = \{\tau_i(x) : i = 1, \ldots, n,\ x \in X \cup X^{-1}\}$ y $t_i \in T$.

Para el caso base, $k = 1$, tenemos $x = x_1 = t_1 x_1 = \tau_1(x_1) t_{(1)x_1}$.

Supongamos ahora que todo $y = y_1 \cdots y_k$ con $y_1, \ldots, y_k \in \langle X \rangle$ se puede escribir como $y = u_1 \cdots u_k t_i$ con $u_1 \ldots, u_k \in Y$ y $t_i \in T$. Sea $x = x_1 \cdots x_{k+1} \in \langle X \rangle$, aplicando la hipótesis de inducción a $x_1 \cdots x_k$

$$x = u_1 \cdots u_k t_i x_{k+1} = u_1 \cdots u_k \tau_i(x_{k+1}) t_{(i)x_{k+1}}.$$

Y queda probado el resultado.

Tomando ahora $h = x_1 \cdots x_k \in H$ y aplicando el resultado, se tiene que $h = u_1 \cdots u_k t_i$ y dado que $t_i = (u_1 \cdots u_k)^{-1} h \in H$, debe ser $t_i = t_1 = 1$.

□

Teorema 4.3.5 (Schur). *Sea G un grupo y $Z(G)$ de índice finito n, entonces G' es finito y $G'^n = \{1\}$.*

Demostración. Sea $C = Z(G)$ y $\{Cg_1, \ldots, Cg_n\}$ las coclases a derecha de C en G. Sean $c_i g_i, c_j g_j \in G$, entonces $[c_i g_i, c_j, g_j] = [g_i, g_j]$ y G' está finitamente generado. Por el Segundo Teorema de Isomorfía $\frac{G'}{G' \cap C} = \frac{G'C}{C}$ es finito y por la Proposición 4.3.4, $G' \cap C$ está finitamente generado. El transfer de G a C viene dado por $x \mapsto x^n$ y como G' está contenido en el kernel, $G'^n = \{1\}$, en particular, $(G' \cap C)^n = \{1\}$. Por el teorema de clasificación de grupos abelianos finitamente generados, $G' \cap C$ es finito y como $|G' : G' \cap C|$ es finito se deduce que G' es finito. $\square$

Apéndice A

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1. Estudiar las extensiones salvo equivalencia de $\mathbb{Z}_p$ por $\mathbb{Z}_p$.

Solución. Los grupos de orden p^2 son abelianos y por tanto la extensión es central y tiene acción trivial. Observamos que si $[c] \in H^2(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$, $p[c] = [0]$, por lo que $H^2(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ es un p-grupo abeliano de exponente p, es decir, isomorfo a $\mathbb{Z}_p^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Contando el número de extensiones veremos que $0 < k < 2$ y por tanto, el número de extensiones equivalentes debe ser p.

(Extensiones isomorfas a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$).

$$1 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{i} \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_p \to 1.$$

La proyección $\pi \colon \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ viene dada por las imágenes de los generadores $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$. Como π es sobreyectiva, $\pi(e_1)$ o $\pi(e_2)$ es distinto de la identidad, supongamos que $e_1 \notin \operatorname{Ker}(\pi)$. Entonces $\langle e_1 \rangle$ es una escisión de π y la extensión es trivial, por lo que se corresponde con el elemento neutro de H^2 y es única salvo equivalencia.

(Extensiones isomorfas a $\mathbb{Z}_{p^2}$).

$$1 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{i_n} \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{\pi_n} \mathbb{Z}_p \to 1.$$

$\mathbb{Z}_{p^2}$ es cíclico y $\mathbb{Z}_p$ debe incluirse en el único subgrupo de $\mathbb{Z}_{p^2}$ de orden p.

Hay $p - 1$ formas de incluir $\mathbb{Z}_p$ en $\langle p \rangle \leq \mathbb{Z}_{p^2}$ que se corresponden con los distintos automorfismos de $\langle p \rangle$. Las inclusiones i_n vienen dadas por $i_n(x) = pnx \mod p^2$ donde $n = 1, \ldots, p - 1$.

Las proyecciones π_n vienen dadas por la imagen del $1 \in \mathbb{Z}_{p^2}$, que puede mandarse a cualquier elemento no trivial de $\mathbb{Z}_p$ y por tanto hay $p - 1$ proyecciones distintas definidas por $\pi_n(1) = n \mod p$ para $n = 1, \ldots, p-1$.

En total, hay $(p - 1)^2$ formas de componer las i_n y π_n. Sumando la extensión trivial dan un total de $p^2 - 2p + 2$, que es menor que p^2 y mayor que 1 para todo primo p.

(Representantes de las extensiones y cociclos asociados). La primera extensión es única salvo equivalencia y podemos tomar la inclusión en la primera coordenada $i(x) = (x, 0)$ y la proyección en la segunda $\pi(x, y) = y$. El cociclo asociado c_0 es trivial ya que la extension escinde.

Para la segunda extensión podemos fijar la inclusión i_1 para simplificar cálculos. Sean $n, m \in \{1, \dots, p-1\}$ distintos y tomemos las proyecciones π_m y π_n. Supongamos que existe un homomorfismo f que haga al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathbb{Z}_p \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}_{p^2} \arrow[r, "\pi_m"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{Z}_p \arrow[r, "i_1"] & \mathbb{Z}_{p^2} \arrow[r, "\pi_n"] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Por un lado, $f(i_1(1)) = i_1(1) = p$ y por tanto $f(p) = p$. Por otro lado, $\pi_n(f(1)) = \pi_m(1) = m$ y $f(1) \in \pi_n^{-1}(m) = n^{-1}m + \langle p \rangle$. Esto es absurdo ya que $f(p) = pf(1) = pn^{-1}m \neq p$ pero $n \neq m$. Esto prueba que las extensiones $(\mathbb{Z}_{p^2}, i_1, \pi_n)$ son inequivalentes para todo $n = 1, \dots, p-1$.

Una sección de π_n es s_n definida por $s_n(x) = n^{-1}x \mod p = \overline{n^{-1}x} \in \{0, \dots, p-1\}$. En efecto, $\pi_n(s_n(x)) = \pi_n(\overline{n^{-1}x}) = nn^{-1}x = x$ para $x = 0, \dots, p-1$. El cociclo asociado a esta sección es

$$c_n(x, y) = i_1^{-1}(s_n(x) + s_n(y) - s_n(x+y)) = \frac{\overline{n^{-1}x} + \overline{n^{-1}y} - \overline{n^{-1}(x+y)}}{p}.$$

Como H^2 es cíclico, podemos tomar c_1, cuya expresión es sencilla, y generar el resto de los cociclos con él

$$c_1(x, y) = \frac{\overline{x} + \overline{y} - \overline{x+y}}{p} = \begin{cases} 0 & \text{si } x + y < p, \\ 1 & \text{si } x + y \geq p. \end{cases}$$

$$c_n(x, y) = nc_1(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x + y < p, \\ n & \text{si } x + y \geq p. \end{cases}$$

□

Apéndice B

Suma de Baer y propiedades functoriales de H^2

En este apéndice se introduce la suma de Baer de extensiones de grupos. Se probará que esta suma de extensiones es equivalente a la vista en la Proposición 2.4.4, se darán algunas propiedades functoriales de H^2 y relaciones entre ambas. Para este apéndice se usan nociones de teoría de categorías en los que no se entrará en detalle, se recomienda consultar [Rie16, §1.1, §1.3 y §3.1].

Definición B.0.1. Dados dos homomorfismos de grupos $B \xrightarrow{f} A \xleftarrow{g} C$, se define el pullback de f y g como el triple (P, b, c) donde P es un grupo y $b\colon P \to B$ y $c\colon P \to C$ son homomorfismos de grupos que hacen al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "c"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

y verifica la siguiente propiedad universal. Dado otro triple (D, b', c') que hace al cuadrado conmutativo, existe un único homomorfismo $h\colon D \to P$ que hace al siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dashed, "\exists! h"] \arrow[drr, bend left, "c'"] \arrow[ddr, bend right, "b'"'] & & \\
& P \arrow[r, "c"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[d, "g"] \\
& B \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

Definición B.0.2. El pushout se define de manera dual como el triple (P, b, c) que completa al diagrama $B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} C$ y verifica la siguiente propiedad universal. Dado otro triple (D, b', c') que completa al diagrama, existe un único homomorfismo $h\colon P \to D$ que hace al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "f"] & C \arrow[d, "c"] \arrow[ddr, bend left, "c'"] & \\
B \arrow[r, "b"'] \arrow[drr, bend right, "b'"'] & P \arrow[dr, dashed, "\exists! h"'] & \\
& & D
\end{tikzcd}$$

Lema B.0.1. *Dada una extensión* $1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ *y un homomorfismo* $\alpha\colon Q' \to Q$*, existe una extensión* $1 \to A \to E_1 \to Q' \to 1$ *única salvo equivalencia que hace al siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "\pi"] & Q \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_1"] \arrow[u, equal] & E_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[u, "\alpha_*"] & Q' \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & 1
\end{tikzcd}$$

Demostración. Tomamos E_1 el pullback de π y α. El homomorfismo $0\colon A \to Q'$ completa al diagrama $1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ y lo hace conmutativo. Por la propiedad universal del pullback, existe un homomorfismo de grupos $i_1\colon A \to E_1$ y $1 \to A \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{\pi_1} Q' \to 1$ es una extensión de grupos.

Sea $1 \to A \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{\pi_2} Q' \to 1$ otra extensión que hace al diagrama conmutativo. De nuevo, por la propiedad universal del pullback, existe $f\colon E_2 \to E_1$ que hace al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, equal] & E_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\tilde{\alpha}_*"'] \arrow[dd, bend left, "f"] & Q' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dd, bend left, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "\pi"] & Q \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_1"] \arrow[u, equal] & E_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[u, "\alpha_*"] & Q' \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & 1
\end{tikzcd}$$

y f es una equivalencia de extensiones. □

Lema B.0.2. *Dada una extensión* $1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ *y un homomorfismo* $\beta\colon A \to A'$*, existe una extensión* $1 \to A' \to E_1 \to Q \to 1$ *única salvo equivalencia que hace al siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\beta"] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta_*"] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i_1"] & E_1 \arrow[r, "\pi_1"] & Q \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Demostración. Tomamos E_1 el pushout de i y β. El homomorfismo $0\colon A' \to Q$ completa al diagrama $1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ y lo hace conmutativo. Por la propiedad universal del pushout, existe un homomorfismo $\pi_1\colon E_1 \to Q$ que hace al diagrama conmutativo y $1 \to A' \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{\pi_1} Q \to 1$ es una extensión de grupos.

Para probar que es única salvo equivalencia, tomamos otra extensión $1 \to A' \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{\pi_2} Q \to 1$ y por la propiedad universal del pushout, existe $f\colon E_1 \to E_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i_2"] & E_2 \arrow[r, "\pi_2"] & Q \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[u, "\beta"'] \arrow[d, "\beta"] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[u, "\tilde{\beta}_*"'] \arrow[d, "\beta_*"] & Q \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i_1"] \arrow[uu, equal, bend left] & E_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[uu, bend left, "f"] & Q \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

y E_1 y E_2 son extensiones equivalentes. □

Observación B.0.1. El homomorfismo $\beta\colon A \to A'$ es necesariamente un homomorfismo de Q-módulos. Dadas s y s_1 secciones de π y π_1 respectivamente, y $a \in A$ y $q \in Q$ se tiene

$$\beta(q{\cdot}a) = (i_1^{-1}{\circ}\beta_*{\circ}i)(a{\cdot}q) = (i_1^{-1}{\circ}\beta_*)({}^{s(q)}i(a)) = i_1^{-1}({}^{s_1(q)}i_1(\beta(a))) = q{\cdot}\beta(a).$$

Observación B.0.2. Los homomorfismos $\alpha\colon Q' \to Q$ y $\beta\colon A \to A'$ determinan a partir de la extensión $1 \to A \to E \to Q \to 1$, una única extensión salvo equivalencia de Q' por A y Q por A' respectivamente. Por tanto, inducen funciones sobre las clases de extensiones equivalentes o, por el Teorema 2.4.3, sobre los segundos grupos de cohomología

$$\begin{aligned}
H^2(\alpha, A)\colon H^2(Q, A) &\to H^2(Q', A) \\
[E] &\mapsto [\alpha_*(E)] = [E'], \\
H^2(Q, \beta)\colon H^2(Q, A) &\to H^2(Q, A') \\
[E] &\mapsto [\beta_*(E)] = [E'].
\end{aligned}$$

Estas funciones preservan la composición de homomorfismos y el homomorfismo identidad, es decir, dados $f_1\colon Q'' \to Q'$, $f_2\colon Q' \to Q$, $g_1\colon A \to A'$ y $g_2\colon A' \to A''$, se verifica

$$\begin{aligned}
H^2(f_2 \circ f_1, A) &= H^2(f_1, A) \circ H^2(f_2, A), \\
H^2(Q, g_2 \circ g_1) &= H^2(Q, g_2) \circ H^2(Q, g_1), \\
H^2(1_Q, A) &= 1_{H^2(Q,A)}, \\
H^2(Q, 1_A) &= 1_{H^2(Q,A)}.
\end{aligned}$$

y por tanto $H^2(-, A)$ es un functor contravariante de la categoría de grupos a la categoría de grupos abelianos y $H^2(Q, -)$ es un functor covariante de la categoría de Q-módulos a la categoría de grupos abelianos.

Teorema B.0.3. *Dadas dos extensiones* $1 \to A \xrightarrow{i_j} E_j \xrightarrow{\pi_j} Q \to 1$, *para* $j = 1, 2$, *podemos expresar la suma de extensiones dada por la estructura aditiva de* $H^2(Q, A)$ *descrita en la Proposición 2.4.4 con el siguiente diagrama conmutativo. La última fila se conoce como la suma de Baer de las extensiones* E_1 *y* E_2.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \times A \arrow[r, hook, "i_1 \times i_2"] \arrow[d, equal] & E_1 \times E_2 \arrow[r, two heads, shift left, "\pi_1 \times \pi_2"] & Q \times Q \arrow[l, hook, shift left, "s_1 \times s_2"] \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & A \times A \arrow[r, hook, "\tilde{i}"] \arrow[d, two heads, "\nabla"'] & E_1 \times_Q E_2 \arrow[r, two heads, "\tilde{\pi}"] \arrow[u, "\Delta_*"] \arrow[d, two heads, "\nabla_*"'] & Q \arrow[r] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r, hook, "i_3"] & E_1 + E_2 \arrow[r, two heads, shift left, "\pi_3"] & Q \arrow[l, hook, shift left, "s_3"] \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

donde

$$\begin{aligned}
\nabla(a_1, a_2) &= a_1 + a_2, \\
\Delta(q) &= (q, q), \\
E_1 \times_Q E_2 &= \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 \ : \ \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\}, \\
E_1 + E_2 &= E_1 \times_Q E_2 / \{(i_1(a), -i_2(a)) \ : \ a \in A\}.
\end{aligned}$$

Demostración. A partir de las extensiones E_1 y E_2 se construye la extensión del producto directo tomando la inclusión y proyección coordenada a coordenada

$$1 \to A \times A \xrightarrow{i_1 \times i_2} E_1 \times E_2 \xrightarrow{\pi_1 \times \pi_2} Q \times Q \to 1. \tag{B.1}$$

El objetivo será utilizar los cociclos c_1 y c_2 asociados a las extensiones E_1 y E_2 respectivamente para construir una sucesión exacta $1 \to A \xrightarrow{i_3} E_3 \xrightarrow{\pi_3} Q \to 1$ cuyo cociclo asociado sea $c_3 = c_1 + c_2$.

La sección $s_1 \times s_2$ de $\pi_1 \times \pi_2$ tiene como cociclo asociado

$$\begin{aligned}
(c_1 \times c_2) \colon (Q \times Q) \times (Q \times Q) &\to A \times A \\
((q_{11}, q_{12}), (q_{21}, q_{22})) &\mapsto (c_1(q_{11}, q_{12}), c_2(q_{21}, q_{22})).
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Proyectando $A \times A$ sobre A haciendo la suma de componentes movemos $(c_1 \times c_2)((q_{11}, q_{12}), (q_{21}, q_{22}))$ a $c_1(q_{11}, q_{12}) + c_2(q_{21}, q_{22})$. Ahora identificando q_{11} con q_{21} y q_{12} con q_{22} mediante la inclusión diagonal $\Delta \colon Q \to Q \times Q$, el cociclo asociado a la ultima fila es $c_3 = \nabla \circ (c_1 \times c_2) \circ \Delta = c_1 + c_2$

$$Q \times Q \xrightarrow{\Delta} (Q \times Q) \times (Q \times Q) \xrightarrow{c_1 \times c_2} A \times A \xrightarrow{\nabla} A. \tag{B.3}$$

A continuación, probamos que los grupos centrales hacen al diagrama conmutativo. Para la fila central, definimos las funciones de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \tilde{\imath}(a_1, a_2) &= (i_1(a_1), i_2(a_2)), \\ \Delta_*(e_1, e_2) &= (e_1, e_2), \\ \tilde{\pi}(e_1, e_2) &= \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2). \end{aligned}$$

Se verifica trivialmente que conmuta con la fila superior y que la fila es exacta

$$\begin{gathered} (\Delta_* \circ \tilde{\imath})(a_1, a_2) = (i_1(a_1), i_2(a_2)) = (i_1 \times i_2)(a_1, a_2), \\ (\Delta \circ \tilde{\pi})(e_1, e_2) = (\pi_1(e_1), \pi_1(e_1)) = (\pi_1(e_1), \pi_2(e_2)) = ((\pi_1 \times \pi_2) \circ \Delta_*)(e_1, e_2), \\ (\tilde{\pi} \circ \tilde{\imath})(a_1, a_2) = \pi_1(i_1(a_1)) = \pi_2(i_2(a_2)) = 1. \end{gathered}$$

Para la fila inferior, definimos las funciones

$$\begin{aligned} i_3(a) &= \overline{(i_1(a), 1)} = \overline{(1, i_2(a))}, \\ \nabla_*(e_1, e_2) &= \overline{(e_1, e_2)}, \\ \pi_3(\overline{(e_1, e_2)}) &= \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2). \end{aligned}$$

π_3 está bien definida ya que $\pi_1(e_1) = \pi_1(e_1 i_1(a))$ para todo $a \in A$.

De nuevo, estas funciones hacen conmutativas las filas central e inferior y esta última es exacta

$$\begin{gathered} (i_3 \circ \nabla)(a_1, a_2) = \overline{(i_1(a_1 + a_2), 1)} = \overline{(i_1(a_1), i_2(a_2))} = (\nabla_* \circ \tilde{\imath})(a_1, a_2), \\ (\pi_3 \circ \nabla_*)(e_1, e_2) = \overline{(e_1, e_2)} = \pi_1(e_1) = \tilde{\pi}(e_1, e_2), \\ (\pi_3 \circ i_3)(a) = \pi_3(\overline{(i_1(a), 1)}) = \pi_1(i_1(a)) = 1. \end{gathered}$$

Por los Lemas B.0.1 y B.0.2, estas extensiones son únicas salvo equivalencia y la suma de Baer está bien definida y coincide con la suma de extensiones dada anteriormente.

□

Corolario B.0.4. *Los functores $\alpha_* = H^2(\alpha, A)$ y $\beta_* = H^2(Q, \beta)$ son homomorfismos de grupos, es decir, para todo par de extensiones $1 \to A \to E_i \to Q \to 1$, $i = 1, 2$ se tiene*

$$\begin{aligned} \alpha_*(E_1 + E_2) &= \alpha_*(E_1) + \alpha_*(E_2), \\ \beta_*(E_1 + E_2) &= \beta_*(E_1) + \beta_*(E_2), \end{aligned}$$

lo que hacen a H^2 un functor aditivo.

Demostración. Lo probamos para α_*, para β_* se hace de manera análoga usando el lema B.0.2. Basta mirar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& 1 \arrow[rr] & & A\times A \arrow[rr, "i_1'\times i_2'"] \arrow[dl, equal] \arrow[dd, equal] & & \alpha_*(E_1)\times\alpha_*(E_2) \arrow[rr, "\pi_1'\times\pi_2'"] \arrow[dl, "\alpha_*\times\alpha_*"'] & & Q'\times Q' \arrow[rr] \arrow[dl, "\alpha\times\alpha"'] & & 1 \\
1 \arrow[rr] & & A\times A \arrow[rr, "i_1\times i_2"] \arrow[dd, equal] & & E_1\times E_2 \arrow[rr, "\pi_1\times\pi_2"] & & Q\times Q \arrow[rr] & & 1 & \\
& 1 \arrow[rr] & & A\times A \arrow[rr, "\tilde{\imath}'"] \arrow[dl, equal] \arrow[dd, "\nabla"] & & \alpha_*(E_1)\times_{Q'}\alpha_*(E_2) \arrow[rr, "\tilde{\pi}'"] \arrow[uu, "\Delta_*'"'] \arrow[dl, "\alpha_*"'] \arrow[dd, "\nabla_*"] & & Q' \arrow[rr] \arrow[uu, "\Delta'"'] \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dd, equal] & & 1 \\
1 \arrow[rr] & & A\times A \arrow[rr, "\tilde{\imath}"] \arrow[dd, "\nabla"] & & E_1\times_Q E_2 \arrow[rr, "\tilde{\pi}"] \arrow[uu, "\Delta_*"] \arrow[dd, "\nabla_*"] & & Q \arrow[rr] \arrow[uu, "\Delta"] \arrow[dd, equal] & & 1 & \\
& 1 \arrow[rr] & & A \arrow[rr, "i'"] \arrow[dl, equal] & & \alpha_*(E_1)+\alpha_*(E_2) \arrow[rr, "\pi'"] \arrow[dl, "\alpha_*"'] & & Q' \arrow[rr] \arrow[dl, "\alpha"'] & & 1 \\
1 \arrow[rr] & & A \arrow[rr, "i"] & & E_1+E_2 \arrow[rr, "\pi"] & & Q \arrow[rr] & & 1 &
\end{tikzcd}$$

El plano frontal y trasero son las sumas de Baer E_1+E_2 y $\alpha_*(E_1)+\alpha_*(E_2)$ respectivamente, y por el Lema B.0.1 la fila superior frontal conmuta con la trasera porque está definida componente a componente. Las filas centrales conmutan observando que $\Delta, \Delta', \Delta_*$ y Δ_*' son inyectivas y definiendo α_* como $\Delta_*^{-1} \circ (\alpha_* \times \alpha_*) \circ \Delta_*'$. Por último, las filas inferiores son cocientes de las filas centrales y definimos α_* como el homomorfismo inducido por el α_* de la fila central.

La flecha $\alpha_*\colon \alpha_*(E_1) + \alpha_*(E_2) \to E_1 + E_2$ dice que $\alpha_*(E_1 + E_2) = \alpha_*(E_1) + \alpha_*(E_2)$.

□

Bibliografía

[Bro82] Kenneth S. Brown. *Cohomology of Groups*, volume 87. Springer New York, 1982.

[FT63] Walter Feit and John G. Thompson. Solvability of groups of odd order. *Pacific Journal of Mathematics*, 13(3):775–1029, 1963.

[Mac95] Saunders MacLane. *Homology*, volume 114. Springer Berlin Heidelberg, 1995.

[Rie16] Emily Riehl. *Category theory in context*. Dover Publications, Mineola, NY, 2016.

[Rob96] Derek Robinson. *A Course in the Theory of Groups*, volume 80. Springer New York, 1996.