



ZIENTZIA
ETA TEKNOLOGIA
FAKULTATEA
FACULTAD
DE CIENCIA
Y TECNOLOGÍA

50 URTE
AÑOS
1968 - 2018
Biba Zientzia!
Ciencia Viva

Los números de Fibonacci y de Bernoulli, un ejemplo de documento escrito con el estilo TFG.sty

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas

Josu Sangroniz Gómez

Trabajo dirigido por
Josu Sangroniz Gómez

Leioa, 1 de septiembre de 2013

Índice general

Introducción	v
1. Los números de Fibonacci: un ejemplo del área de Álgebra	1
1.1. La sucesión de Fibonacci	1
1.2. Una fórmula explícita para los números de Fibonacci	2
2. Los números de Bernoulli: un ejemplo del área de Análisis	5
2.1. Los números de Bernoulli	5
2.2. La suma de las n primeras potencias p -ésimas	6
2.3. El desarrollo en serie de potencias de la función tangente . . .	9
2.4. Números de Fibonacci y números de Bernoulli	11
A. Ejercicios resueltos	13
A.1. Ejercicios del Capítulo 1	13
A.2. Ejercicios del Capítulo 2	15
B. Los 81 primeros números de Bernoulli	17
C. Ars Conjectandi	19
Bibliografía	21

Introducción

Este documento tiene como finalidad dar un ejemplo sencillo de uso del estilo LaTeX TFG.sty para la elaboración del Trabajo Fin de Grado (TFG) en el Grado en Matemáticas de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la UPV/EHU. Aunque tiene el formato y la estructura que se pide a este trabajo, no puede considerarse propiamente un ejemplo de TFG del grado de Matemáticas: le faltaría para ello una mayor extensión, tanto de los contenidos teóricos como de los ejercicios resueltos que se incluyen. A pesar de ello espero que sea útil como ayuda para aprender los fundamentos del sistema LaTeX y como modelo de redacción del trabajo.

Se han incluido únicamente dos capítulos, en el primero de los cuales predominan las técnicas algebraicas y, en el segundo, las analíticas. De esta forma pueden encontrarse abundantes ejemplos de cómo escribir en LaTeX matrices, fórmulas simples y complejas (que requieren varias líneas), tablas, gráficas, notas a pie de página, referencias cruzadas y bibliográficas, etc. Con seguridad, llegado el momento de redactar su trabajo, el alumno se dará cuenta de que estos ejemplos son en ocasiones insuficientes. En tales casos una consulta rápida a un buen manual (o, mejor aún, a un compañero TeXperto) le sacarán del apuro.

Por lo demás este texto es un ejemplo real de documento matemático. El tema que trata es asequible a cualquiera que haya cursado el primer curso del grado y, en algún momento puntual, parte de segundo. Se trata de introducir dos familias de números bien conocidas que tienen la sorprendente propiedad de aparecer inesperadamente en contextos que aparentemente nada tienen que ver con su definición. Hablamos de los números de Fibonacci y de Bernoulli. Son dos de las muchas familias de números notables que hay en matemáticas (números combinatorios, de Euler, Lucas, Catalan, Stirling, Bell, ...) y están relacionados con muchas de ellas, es más, ¡los mismos números de Fibonacci y de Bernoulli están relacionados entre ellos!

En el Capítulo 1 se definen los números de Fibonacci y el objetivo principal es obtener una fórmula explícita para ellos. Se usa un método que es generalizable a cualquier sucesión de números definida mediante una relación de recurrencia y que se basa en el cálculo de las potencias de una matriz de dos formas distintas: directamente, dando origen a matrices en las que aparecen los números de la sucesión, y diagonalizándola primero (o calculando

su forma canónica de Jordan cuando no sea posible la diagonalización).

En el Capítulo 2 se introducen los números de Bernoulli y se estudian dos problemas, sin conexión aparente, en los que surgen de forma inesperada: las fórmulas para la suma de las n primeras potencias p -ésimas (éste es el motivo que llevó a su introducción) y el desarrollo en serie de potencias de la función tangente.

Capítulo 1

Los números de Fibonacci: un ejemplo del área de Álgebra

En este capítulo damos una fórmula explícita para los números de la sucesión de Fibonacci* como aplicación de la teoría de diagonalización de matrices.

1.1. La sucesión de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci es una sucesión bien conocida, incluso en ámbitos ajenos a las matemáticas.

Definición 1.1.1. La *sucesión de Fibonacci* $\{F_n\}$ es la sucesión de números definida por los valores iniciales $F_1 = F_2 = 1$ y por la relación de recurrencia

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{para } n > 2. \quad (1.1)$$

Sus primeros términos son por lo tanto:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

Observamos que los números de Fibonacci, al menos los primeros, crecen con cierta rapidez y no es difícil dar una explicación a este hecho. En efecto, la sucesión de Fibonacci es claramente creciente, por lo tanto, si $n > 2$,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \geq 2F_{n-2}.$$

Iterando esta desigualdad obtenemos que $F_{2k} \geq 2^{k-1}$ y $F_{2k-1} \geq 2^{k-1}$, es decir, $F_n \geq 2^{\lceil n/2 \rceil - 1}$, donde $\lceil \cdot \rceil$ denota la función techo ($\lceil x \rceil$ es el menor entero mayor o igual que x).

* Leonardo de Pisa, *Fibonacci*, Pisa, 1170-1250.

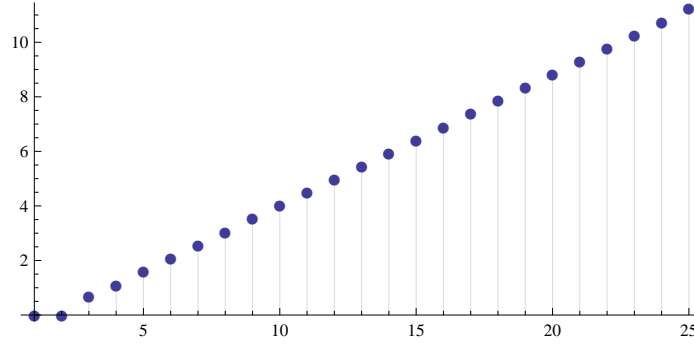


Figura 1.1: Los puntos $(n, \log F_n)$ para $n = 1, \dots, 25$.

La gráfica de la Figura 1.1 muestra los puntos $(n, \log F_n)$ para $n = 1, \dots, 25$. El aspecto de esta gráfica sugiere fuertemente que los números de Fibonacci crecen exponencialmente. En efecto, salvo para los primeros valores, los puntos parecen estar sobre una recta, digamos la de ecuación $y = ax + b$, lo cual quiere decir que $\log F_n \approx an + b$, esto es $F_n \approx A \cdot B^n$ para algunas constantes A y B . Nótese que, ciertamente, se trata de una aproximación pero en ningún caso de una igualdad. Si fuera así se tendría que F_n/F_{n-1} sería constante (igual a B), lo que claramente es falso. En todo caso debería tenerse que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n/F_{n-1} = B$. Confirmaremos este hecho al final del capítulo.

1.2. Una fórmula explícita para los números de Fibonacci

Nótese que si definimos $F_0 = 0$, la fórmula de recurrencia (1.1) junto con los valores iniciales $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ determinan también los números de la sucesión de Fibonacci F_n .

Consideremos ahora la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 \\ F_1 & F_2 \end{pmatrix}$.

Un sencillo argumento inductivo prueba que

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}, \text{ para todo } n \geq 1. \quad (1.2)$$

La idea es calcular ahora A^n explícitamente diagonalizando primero la matriz A .

Teorema 1.2.1. *Sea A la matriz definida anteriormente. Entonces $A = PDP^{-1}$, donde*

$$D = \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & -1/\Phi \end{pmatrix} \quad y \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \Phi & -1/\Phi \end{pmatrix},$$

siendo $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, la razón áurea.

Demostración. Sea f el endomorfismo lineal de \mathbb{R}^2 cuya matriz asociada respecto de la base canónica es A . Su polinomio característico es $x^2 - x - 1$, cuyas raíces son $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ y $-\frac{1}{\Phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. El subespacio propio asociado al valor propio Φ es $\langle (1, \Phi) \rangle$ y el asociado $-\frac{1}{\Phi}$ es $\langle (1, -\frac{1}{\Phi}) \rangle$, luego respecto de la base $\{(1, \Phi), (1, -\frac{1}{\Phi})\}$ la matriz asociada a f es la matriz D del enunciado y la matriz de cambio de base de la base canónica a ésta es P . Se sigue pues que $D = P^{-1}AP$, que es la relación deseada. \square

Corolario 1.2.2. Para todo $n \geq 1$,

$$F_n = \frac{\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}} = \left[\frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} \right],$$

donde $[x]$ denota el número entero más próximo al número real x .

Demostración. Para la primera igualdad basta tener en cuenta que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} &= A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \Phi & -1/\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^n & 0 \\ 0 & (-1/\Phi)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\Phi & -1 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \Phi^{n-1} - (-1/\Phi)^{n-1} & \Phi^n - (-1/\Phi)^n \\ \Phi^n - (-1/\Phi)^n & \Phi^{n+1} - (-1/\Phi)^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para la segunda igualdad basta notar que, por la primera fórmula que acabamos de demostrar,

$$\left| F_n - \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}\Phi^n} < \frac{1}{2} \quad (1.3)$$

para todo $n \geq 1$, luego efectivamente F_n es el número entero más próximo a $\Phi^n/\sqrt{5}$. \square

Observaciones. (i) Es fácil expresar cualquier sucesión $\{x_n\}$ de números reales (o complejos) que cumpla la relación de recurrencia (1.1) en función de los números de Fibonacci. En efecto, cualquier sucesión $\{\alpha F_n + \beta F_{n+1}\}$ cumple (1.1). Si además sus valores iniciales son x_1 y x_2 , tendrá que ser la sucesión $\{x_n\}$. Basta tomar entonces α y β con $\alpha + \beta = x_1$ y $\alpha + 2\beta = x_2$, de donde resulta $\alpha = 2x_1 - x_2$ y $\beta = -x_1 + x_2$; en resumen,

$$x_n = (2x_1 - x_2)F_n + (-x_1 + x_2)F_{n+1} = x_2F_{n-1} + x_1F_{n-2}, \quad n > 2.$$

- (ii) En realidad el método que hemos utilizado puede usarse con cualquier sucesión definida por recurrencia, al menos si el cuerpo sobre el que se trabaja es algebraicamente cerrado. La idea es encontrar una matriz adecuada A cuyas potencias vengan dadas por los términos de la sucesión y calcular dichas potencias diagonalizando la matriz. Incluso si A no es diagonalizable, se puede calcular su forma canónica de Jordan, cuyas potencias se pueden obtener con el binomio de Newton. Para más detalles véase el Ejercicio 3 en el Apéndice A.

Del Corolario 1.2.2 se obtiene inmediatamente el resultado observado al final de la Sección 1.1.

Corolario 1.2.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi.$

Demostración. Es inmediato de (1.3):

$$\begin{aligned} \left| \frac{F_n}{F_{n-1}} - \Phi \right| &= \left| \frac{F_n - \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} - \Phi F_{n-1}}{F_{n-1}} \right| \leq \left| \frac{F_n - \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}}{F_{n-1}} \right| + \Phi \left| \frac{\frac{\Phi^{n-1}}{\sqrt{5}} - F_{n-1}}{F_{n-1}} \right| \\ &< \frac{1}{2F_{n-1}} + \frac{\Phi}{2F_{n-1}}, \end{aligned}$$

que evidentemente tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$. \square

En el Ejercicio 2 se da una demostración alternativa a este corolario que no utiliza la fórmula explícita para F_n .

Capítulo 2

Los números de Bernoulli: un ejemplo del área de Análisis Matemático

Cualquiera que haya estudiado un primer curso de Cálculo conoce los desarrollos en serie de potencias de las funciones seno y coseno. No es tan conocido, y tampoco tan fácil, encontrar el desarrollo en serie de potencias de la función tangente. Éste será nuestro objetivo. Sorprendentemente los coeficientes que aparecen tienen relación con muchos otros resultados en contextos que nada tienen que ver con la función tangente, tales como las fórmulas para sumar potencias de números consecutivos. La mayor parte de este capítulo se basa en [4, Capítulo 27].

2.1. Los números de Bernoulli

La función de variable compleja

$$f(z) = \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

es analítica en todo el plano complejo (su desarrollo en serie de potencias es $1 + z/2! + z^2/3! + \dots$) y es no nula en el círculo $|z| < 2\pi$, por tanto la función $g(z) = 1/f(z)$ también es analítica en este círculo y puede desarrollarse como serie de potencias alrededor de 0 (serie que tendrá radio de convergencia igual a 2π). Podemos escribir entonces

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} z^k. \quad (2.1)$$

Definición 2.1.1. Los números b_k que aparecen en (2.1) se llaman *números de Bernoulli*^{*}.

Como

$$z = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} z^k \right) \left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \right),$$

el coeficiente de z^n en la derecha es 1 para $n = 1$ y cero para $n > 1$, es decir

$$b_0 = 1 \quad \text{y} \quad 0 = \sum_{\substack{k+i=n \\ k \geq 0, i \geq 1}} \frac{b_k}{k!} \frac{1}{i!} = n! \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k, \quad \text{para } n > 1,$$

de donde resulta la fórmula por recurrencia que, junto con el valor inicial $b_0 = 1$, permite calcular los números de Bernoulli:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0, \quad \text{para } n > 1. \quad (2.2)$$

Notar que de aquí se sigue que los números de Bernoulli b_n son números racionales, un hecho que no es inmediato de su definición.

2.2. La suma de las n primeras potencias p -ésimas

Los números de Bernoulli fueron introducidos originalmente por Jacob Bernoulli para dar una fórmula explícita para la suma de las n primeras potencias p -ésimas de los números naturales: $S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$.

Comenzamos por un resultado que tiene interés en sí mismo puesto que permite calcular $S_p(n)$ a partir de $S_j(n)$ para $j < p$.

Proposición 2.2.1. Sea $p \geq 0$. Entonces

$$S_p(n) = \frac{(n+1)^{p+1} - 1}{p+1} - \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n).$$

Demostración. Por la fórmula del binomio de Newton, para $i \geq 2$,

$$i^{p+1} = ((i-1) + 1)^{p+1} = \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} (i-1)^j.$$

^{*} Jacob Bernoulli, Basilea, 1654-1705.

$S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$	
p	$S_p(n)$
1	$\frac{1}{2}n(n+1)$
2	$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
3	$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
4	$\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$
5	$\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$

 Tabla 2.1: Las primeras fórmulas para $S_p(n)$.

Sumando en i desde 2 hasta $n+1$ resulta que

$$\begin{aligned}
 S_{p+1}(n+1) &= 1 + \sum_{i=2}^{n+1} i^{p+1} = 1 + \sum_{i=2}^{n+1} \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} (i-1)^j \\
 &= 1 + \sum_{j=0}^{p+1} \sum_{i=2}^{n+1} \binom{p+1}{j} (i-1)^j = 1 + \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} S_j(n) \\
 &= 1 + S_{p+1}(n) + (p+1)S_p(n) + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n).
 \end{aligned}$$

Basta ahora despejar $S_p(n)$ y tener en cuenta que $S_{p+1}(n+1) - S_{p+1}(n) = (n+1)^{p+1}$. \square

Utilizando esta fórmula por recurrencia y el valor inicial $S_0(n) = n$ podemos calcular las primeras fórmulas de $S_p(n)$. En la Tabla 2.1 damos estas fórmulas para $p \leq 5$.

De la proposición anterior se sigue también mediante un sencillo argumento inductivo que $S_p(n)$ viene dado por un polinomio en n de grado $p+1$ y, más aún, que su término principal es $\frac{n^{p+1}}{p+1}$. En realidad este hecho es fácilmente explicable: la función $f(x) = x^p$ es convexa para $p \geq 1$. La suma $S_p(n)$ no es más que el área sombreada en la Figura 2.1, situada entre las gráficas de las funciones $f(x) = (x+1)^p$ y $g(x) = x^p$. Es claro entonces que

$$\int_0^n x^p dx < S_p(n) < \int_0^n (x+1)^p dx,$$

es decir

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} < S_p(n) < \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \cdots.$$

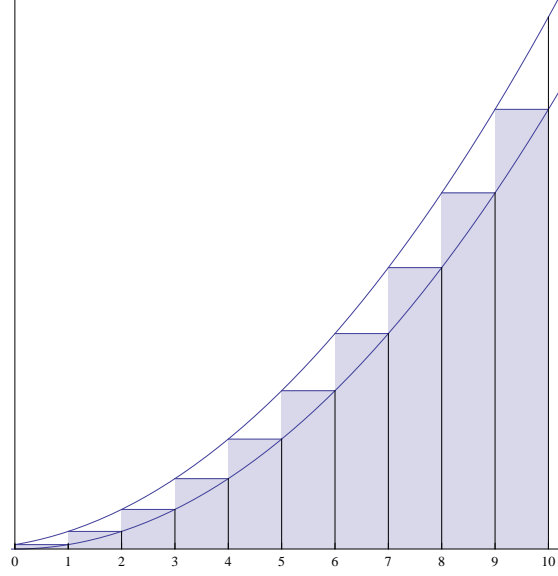


Figura 2.1: Las funciones $f(x) = (x+1)^p$ y $g(x) = x^p$.

A continuación damos la fórmula explícita para $S_p(n)$. En el Apéndice C reproducimos una página del libro de J. Bernoulli *Ars Conjectandi*, publicado en 1713, en la que se pueden ver las fórmulas de $S_p(n)$ para $p \leq 10$. Bernoulli continúa diciendo que, en vista de estas fórmulas, cualquiera puede continuar la tabla. Necesitaremos el siguiente resultado técnico.

Lema 2.2.2. Si $0 \leq k \leq j \leq p$,

$$\frac{1}{j+1} \binom{p+1}{j} \binom{j+1}{k} = \frac{1}{j-k+1} \binom{p+1}{p-j+k+1} \binom{p-j+k+1}{k}.$$

Demostración. La parte de la izquierda es igual a

$$\frac{1}{j+1} \frac{(p+1)!}{j!(p-j+1)!} \frac{(j+1)!}{k!(j-k+1)!} = \frac{1}{j-k+1} \frac{(p+1)!}{(j-k)!(p-j+k+1)!} \frac{(p-j+k+1)!}{k!(p-j+1)!},$$

que es justamente la parte de la derecha. \square

Teorema 2.2.3. Sea $p \geq 1$. Entonces

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} b_k (n+1)^{p-k+1}. \quad (2.3)$$

Demostración. Razonamos por inducción sobre p , comprobándose de forma inmediata el caso $p = 1$. Si $p \geq 2$, aplicando la Proposición 2.2.1, la hipótesis

inductiva y el lema anterior, resulta que

$$\begin{aligned}
 S_p(n) &= \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} - \frac{n+1}{p+1} - \frac{1}{p+1} \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) \\
 &= \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} - \frac{n+1}{p+1} - \frac{1}{p+1} \sum_{\substack{1 \leq j \leq p-1 \\ 0 \leq k \leq j}} \frac{1}{j+1} \binom{p+1}{j} \binom{j+1}{k} b_k (n+1)^{j-k+1} \\
 &= \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} \sum_{\substack{0 \leq j \leq p-1 \\ 0 \leq k \leq j}} \frac{1}{j+1} \binom{p+1}{j} \binom{j+1}{k} b_k (n+1)^{j-k+1} \\
 &= \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} \sum_{\substack{0 \leq j \leq p-1 \\ 0 \leq k \leq j}} \frac{1}{j-k+1} \binom{p+1}{p-j+k+1} \binom{p-j+k+1}{k} b_k (n+1)^{j-k+1}.
 \end{aligned}$$

A continuación hacemos el cambio de índice de sumación $h = p - j + k$. Como j varía entre k y $p-1$, h varía entre $k+1$ y p o, si se prefiere, h varía de 1 a p y k de 0 a $h-1$. Así tenemos que

$$\begin{aligned}
 S_p(n) &= \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} \sum_{\substack{1 \leq h \leq p \\ 0 \leq k \leq h-1}} \frac{1}{p-h+1} \binom{p+1}{h+1} \binom{h+1}{k} b_k (n+1)^{p-h+1} \\
 &= \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} \sum_{h=1}^p \frac{1}{p-h+1} \binom{p+1}{h+1} \left(\sum_{k=0}^{h-1} \binom{h+1}{k} b_k \right) (n+1)^{p-h+1}.
 \end{aligned}$$

De (2.2) deducimos que $\sum_{k=0}^{h-1} \binom{h+1}{k} b_k = -\binom{h+1}{h} b_h = -(h+1)b_h$. Como además $\frac{h+1}{p-h+1} \binom{p+1}{h+1} = \binom{p+1}{h}$ concluimos que

$$\begin{aligned}
 S_p(n) &= \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{p+1} \sum_{h=1}^p \binom{p+1}{h} b_h (n+1)^{p-h+1} \\
 &= \frac{1}{p+1} \sum_{h=0}^p \binom{p+1}{h} b_h (n+1)^{p-h+1},
 \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. \square

Observación. Si se prefiere, la fórmula (2.3) también se puede expresar como un polinomio en n sin más que notar que

$$\begin{aligned}
 S_p(n) &= n^p + S_p(n-1) = n^p + \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} b_k n^{p-k+1} \\
 &= \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{1}{p+1} \sum_{k=2}^p \binom{p+1}{k} b_k n^{p-k+1}.
 \end{aligned}$$

2.3. El desarrollo en serie de potencias de la función tangente

Es inmediato comprobar que

$$g(z) = \frac{z}{e^z - 1} = -\frac{z}{2} + \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} \quad \text{y} \quad \frac{e^{-z} + 1}{e^{-z} - 1} = -\frac{e^z + 1}{e^z - 1},$$

lo que significa que $g(z) = -z/2 + h(z)$, donde $h(z) = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$ es una función par. Las potencias impares en el desarrollo en serie de potencias de $h(z)$ tienen por tanto coeficientes nulos, es decir, $b_1 = -1/2$ y $b_n = 0$ para todo número impar $n > 1$.

Resulta entonces que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} z^{2n} = g(z) + \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}}. \quad (2.4)$$

Recordemos que

$$\operatorname{ctg} z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}},$$

entonces, sustituyendo z por $2iz$ en (2.4) queda:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b_{2n}}{(2n)!} 2^{2n} z^{2n} = iz \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = z \operatorname{ctg} z,$$

de donde resulta el desarrollo en serie de Laurent de la función cotangente alrededor de 0:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{b_{2n}}{(2n)!} 2^{2n} z^{2n-1}. \quad (2.5)$$

Finalmente, se tiene que $\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg} z - 2 \operatorname{ctg} 2z$ (ver el Ejercicio 4 en el Apéndice A) así que, sin más que usar (2.5), se obtiene el desarrollo en serie de potencias de la función tangente.

Teorema 2.3.1. *La función tangente tiene el siguiente desarrollo en serie de potencias alrededor del cero:*

$$\operatorname{tg} z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{b_{2n}}{(2n)!} 2^{2n} (2^{2n} - 1) z^{2n-1}.$$

Como corolario inmediato podemos calcular el valor de las derivadas sucesivas de la función tangente en el cero, un resultado muy difícil de obtener (si no imposible) por derivación directa.

Corolario 2.3.2. *Sea $f(x) = \operatorname{tg} x$. Entonces, si $k \geq 1$,*

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{(k+1)/2} \frac{b_{k+1}}{k+1} 2^{k+1} (2^{k+1} - 1).$$

Demostración. Basta tener en cuenta que el desarrollo del Teorema 2.3.1 no es más que la serie de McLaurin de la función tangente y, por tanto,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k+1)/2} \frac{b_{k+1}}{(k+1)!} 2^{k+1} (2^{k+1} - 1) x^k.$$

El resultado se sigue igualando los coeficientes de x^k . □

2.4. Números de Fibonacci y números de Bernoulli

Los números de Fibonacci y de Bernoulli estudiados en este trabajo, así como muchas de sus generalizaciones y polinomios asociados, están relacionados mediante numerosas fórmulas. Sólo daremos una de ellas, pueden encontrarse muchas otras en [1] y en sus referencias.

Teorema 2.4.1. *Para todo $n \geq 0$ se cumple que*

$$\Phi^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\sqrt{5})^k \frac{F_{n-k+1}}{n-k+1} b_k.$$

Demostración. La fórmula a demostrar puede reescribirse como

$$\sum_{\substack{i+k=n+1 \\ k \geq 0, i \geq 1}} \frac{F_i}{i!} \frac{(-\sqrt{5})^k b_k}{k!} = \frac{\Phi^n}{n!}.$$

La suma de la izquierda no es más que el coeficiente de z^{n+1} en el desarrollo en serie de potencias del producto

$$\left(\sum_{i \geq 1} \frac{F_i}{i!} z^i \right) \left(\sum_{k \geq 0} \frac{(-\sqrt{5})^k b_k}{k!} z^k \right).$$

La segunda serie de potencias en este producto es la de la función $\frac{-\sqrt{5}z}{e^{-\sqrt{5}z} - 1}$ mientras que la primera define la función $F(z) = \frac{e^{\Phi z} - e^{(-1/\Phi)z}}{\sqrt{5}}$ (esto se pue-

de comprobar directamente a partir de la fórmula explícita para los números de Fibonacci o, mejor aun, viendo por derivación directa de la serie que $F'' - F' - F = 0$ y resolviendo esta ecuación diferencial con los valores iniciales $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$).

Finalmente observamos que

$$\frac{e^{\Phi z} - e^{(-1/\Phi)z}}{\sqrt{5}} \frac{-\sqrt{5}z}{e^{-\sqrt{5}z} - 1} = \frac{z(e^{\Phi z} - e^{(-1/\Phi)z})}{1 - e^{-(\Phi + \frac{1}{\Phi})z}} = ze^{\Phi z},$$

que al desarrollar en serie de potencias tiene como coeficiente de z^{n+1} el término deseado $\frac{\Phi^n}{n!}$. \square

Apéndice A

Ejercicios resueltos

A.1. Ejercicios del Capítulo 1

Ejercicio 1. Demostrar la fórmula de Cassini:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad n \geq 2.$$

Solución. Basta tomar determinantes en (1.2). Alternativamente, se puede razonar por inducción:

$$\begin{aligned} D_n &= F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = F_{n-1}(F_n + F_{n-1}) - F_n(F_{n-1} + F_{n-2}) \\ &= F_{n-1}^2 - F_nF_{n-2} = -D_{n-1}. \end{aligned}$$

Como $D_2 = 1$, es claro que $D_n = (-1)^n$. □

Ejercicio 2. Demostrar que la sucesión $\{F_n/F_{n-1}\}$ es convergente y que su límite es Φ .

Solución. Es fácil demostrar que si la sucesión es convergente su límite l tiene que ser Φ . En efecto, si $n \geq 3$,

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1} + F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{F_{n-1}/F_{n-2}}.$$

Tomando límites obtenemos la ecuación $l = 1 + 1/l$, es decir, $l^2 - l - 1 = 0$ y, necesariamente, $l = \Phi$ (la otra raíz es $-1/\Phi < 0$, luego no puede ser límite de la sucesión dada, que es de términos positivos).

Para demostrar que la sucesión es convergente, demostramos que es de Cauchy. En primer lugar

$$\left| \frac{F_n}{F_{n-1}} - \frac{F_{n+1}}{F_n} \right| = \left| \frac{F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}}{F_{n-1}F_n} \right| = \frac{1}{F_{n-1}F_n} \leq \frac{1}{n(n-1)}, \quad n \geq 6,$$

donde, en la segunda igualdad hemos utilizado la fórmula del Ejercicio 1 y, para la desigualdad, que $F_n \geq n$ para $n \geq 5$. Entonces, si $n < m$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F_n}{F_{n-1}} - \frac{F_m}{F_{m-1}} \right| &= \left| \frac{F_n}{F_{n-1}} - \frac{F_{n+1}}{F_n} + \cdots + \frac{F_{m-1}}{F_{m-2}} - \frac{F_m}{F_{m-1}} \right| \\ &\leq \sum_{i=n}^{m-1} \frac{1}{i(i-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{m-1}, \end{aligned}$$

que es tan pequeño como se desee si n y m son suficientemente grandes. \square

Ejercicio 3. Sea $\{x_n\}$ una sucesión que satisface la relación de recurrencia $x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2}$ para $n \geq 3$. Expresar x_n en función de los dos primeros valores x_1 y x_2 .

Solución. Sea $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$. Observamos que, si $n \geq 3$,

$$C \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ 4x_{n-1} - 4x_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix},$$

por tanto

$$\begin{pmatrix} x_{n-1} & x_n \\ x_n & x_{n+1} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_{n-2} & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_n \end{pmatrix} = \cdots = C^{n-2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Por otro lado, podemos calcular C^{n-2} explícitamente si conocemos su forma canónica de Jordan. El polinomio característico de C es $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ y, si f es el endomorfismo de \mathbb{R}^2 con matriz asociada respecto de la base canónica C , el subespacio propio de f correspondiente al valor propio 2 es $\langle (1, 2) \rangle$. De hecho $(f - 2\text{id})(0, 1) = (1, 2)$ (id es el endomorfismo identidad), por tanto se cumple que $P^{-1}CP = J$, donde

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} C^{n-2} &= (PJP^{-1})^{n-2} = PJ^{n-2}P^{-1} = P(2I_2 + H)^{n-2}P^{-1} \\ &= P(2^{n-2}I_2 + (n-2)2^{n-3}H)P^{-1} = \begin{pmatrix} -(n-3)2^{n-2} & (n-2)2^{n-3} \\ -(n-2)2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde naturalmente I_2 denota la matriz identidad 2×2 y $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Nótese que $(2I_2 + H)^{n-2}$ puede calcularse mediante la fórmula del binomio de Newton, que se simplifica notablemente dado que $H^2 = 0$. Ahora, de (A.1), se obtiene que

$$x_n = -(n-2)2^{n-1}x_1 + (n-1)2^{n-2}x_2 = 2^{n-2}(-2(n-2)x_1 + (n-1)x_2).$$

\square

Observación. El método utilizado en este ejercicio se puede usar con cualquier sucesión definida mediante una fórmula de recurrencia lineal. La idea es, dada la fórmula de recurrencia $x_n = c_1x_{n-1} + \dots + c_kx_{n-k}$, $n > k$, considerar la matriz $k \times k$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & \dots & -c_{k-1} & -c_k \end{pmatrix},$$

(se llama *matriz compañera* del polinomio $x^k - c_1x^{k-1} - \dots - c_k$). Razonando como en el ejercicio, resulta que C^{n-k} relaciona una matriz construida a partir de x_1, \dots, x_{k+1} con otra similar que involucra $x_{n-k+1}, \dots, x_n, \dots, x_{n+k-1}$. Calculando C^{n-k} a través de su forma canónica de Jordan se obtiene el valor explícito de x_n en función de los valores iniciales x_1, \dots, x_k . Sobre cómo es en general la forma canónica de Jordan de la matriz compañera de un polinomio puede consultarse [3, Teorema 4.3, Corolario 4.4].

A.2. Ejercicios del Capítulo 2

Ejercicio 4. Demostrar que $\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg} z - 2 \operatorname{ctg} 2z$.

Solución.

$$\operatorname{ctg} 2z = \frac{1}{\operatorname{tg} 2z} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 z}{2 \operatorname{tg} z} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} z - \frac{1}{2} \operatorname{tg} z.$$

El resultado se sigue sin más que despejar $\operatorname{tg} z$. □

Ejercicio 5. Demostrar que $\operatorname{csc} z = \operatorname{ctg} \frac{z}{2} - \operatorname{ctg} z$ y deducir el desarrollo en serie de Laurant de la función cosecante alrededor de cero.

Solución.

$$\operatorname{ctg} z - \operatorname{ctg} 2z = \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{2 \sin z \cos z} = \frac{1}{2 \sin z \cos z} = \operatorname{csc} 2z.$$

Ahora basta cambiar z por $z/2$. Usando esta fórmula y (2.5) queda

$$\operatorname{csc} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{b_{2n}}{(2n)!} (2^{2n} - 2) z^{2n-1}.$$

□

Apéndice B

Los 81 primeros números de Bernoulli

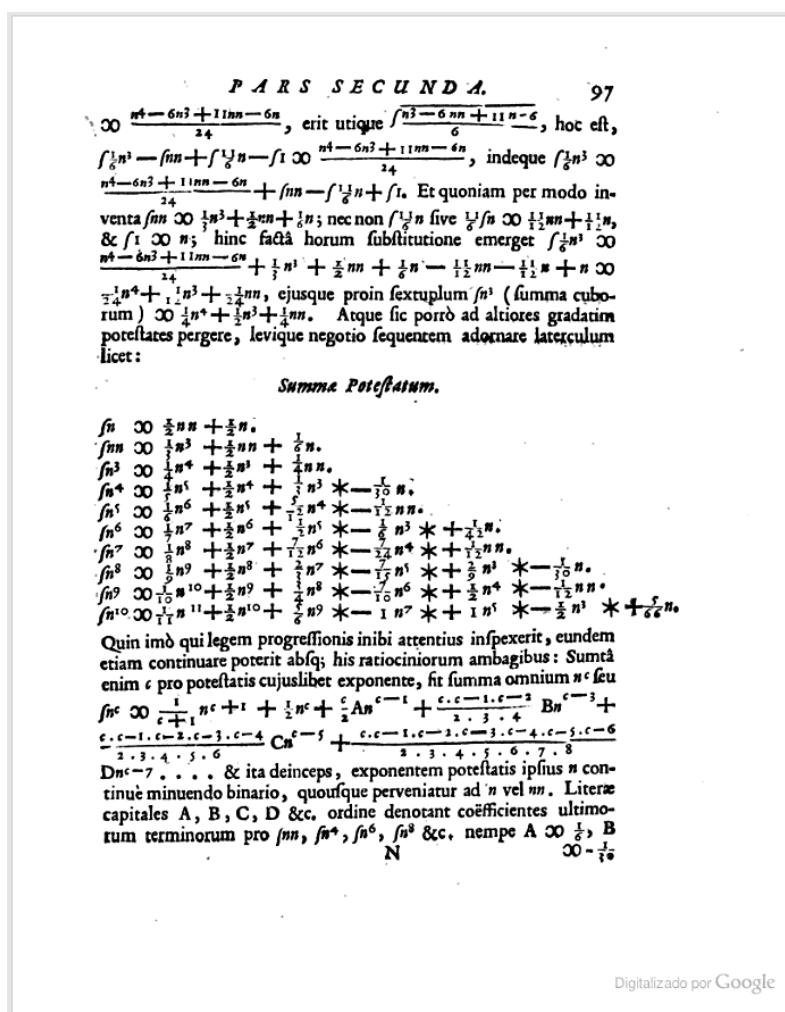
Éstos son los primeros 81 números de Bernoulli calculados con el sistema GAP [2]:

```
gap> List([0..80],Bernoulli);
[ 1, -1/2, 1/6, 0, -1/30, 0, 1/42, 0, -1/30, 0, 5/66, 0,
-691/2730, 0, 7/6, 0, -3617/510, 0, 43867/798, 0, -174611/330,
0, 854513/138, 0, -236364091/2730, 0, 8553103/6, 0,
-23749461029/870, 0, 8615841276005/14322, 0, -7709321041217/510,
0, 2577687858367/6, 0, -26315271553053477373/1919190, 0,
2929993913841559/6, 0, -261082718496449122051/13530, 0,
1520097643918070802691/1806, 0, -27833269579301024235023/690, 0,
596451111593912163277961/282, 0,
-5609403368997817686249127547/46410, 0,
495057205241079648212477525/66, 0,
-801165718135489957347924991853/1590, 0,
29149963634884862421418123812691/798, 0,
-2479392929313226753685415739663229/870, 0,
84483613348880041862046775994036021/354, 0,
-1215233140483755572040304994079820246041491/56786730, 0,
12300585434086858541953039857403386151/6, 0,
-106783830147866529886385444979142647942017/510, 0,
1472600022126335654051619428551932342241899101/64722, 0,
-78773130858718728141909149208474606244347001/30, 0,
1505381347333367003803076567377857208511438160235/4686, 0,
-5827954961669944110438277244641067365282488301844260429/140100870, 0,
34152417289221168014330073731472635186688307783087/6, 0,
-24655088825935372707687196040585199904365267828865801/30, 0,
414846365575400828295179035549542073492199375372400483487/3318,
0, -4603784299479457646935574969019046849794257872751288919656867/230010]
```


Apéndice C

Ars Conjectandi

Página del libro *Ars Conjectandi* de J. Bernoulli donde aparecen las fórmulas de $S_p(n)$ para $p \leq 10$.



Bibliografía

- [1] P. F. Byrd, New relations between Fibonacci and Bernoulli numbers, *Fibonacci Quat.* **13** (1975), 59-69.
- [2] The GAP Group, GAP Groups, Algorithms and Programming, Version 4.4.12, 2008 (<http://www.gap-system.org>).
- [3] T. W. Hungerford, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [4] M. Spivak, *Calculus*, 3^a ed., Reverté, Barcelona, 2012.

