

# Extensiones de grupos y teoremas de Hall

Carlos Moya García

Universidad del País Vasco

12 de julio de 2022

- 1 Cohomología
- 2 Extensiones de grupos
- 3 Teoremas de Hall
- 4 Homomorfismo del trasfer

# Complejos de cocadenas

Dada una sucesión de  $R$ -módulos  $C = \{C^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , se define un complejo de cocadenas sobre  $C$  como

$$\dots \rightarrow C^{n-1} \xrightarrow{\partial^{n-1}} C^n \xrightarrow{\partial^n} C^{n+1} \rightarrow \dots$$

donde cada  $\partial^i$  es un homomorfismo de  $R$ -módulos y  $\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0$ .

# Complejos de cocadenas

Dada una sucesión de  $R$ -módulos  $C = \{C^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , se define un complejo de cocadenas sobre  $C$  como

$$\dots \rightarrow C^{n-1} \xrightarrow{\partial^{n-1}} C^n \xrightarrow{\partial^n} C^{n+1} \rightarrow \dots$$

donde cada  $\partial^i$  es un homomorfismo de  $R$ -módulos y  $\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0$ .

Se definen los grupos de  $n$ -cociclos,  $n$ -cobordes como

$$Z^n(C) = \text{Ker}(\partial^n),$$

$$B^n(C) = \text{Im}(\partial^{n-1})$$

y el  $n$ -ésimo grupo de cohomología como

$$H^n(C) = Z^n(C) / B^n(C).$$

# Cohomología de grupos

Sea  $G$  un grupo y  $A$  un  $G$ -módulo. Denotamos por  $C^n$  al conjunto de funciones de  $G^n$  en  $A$ .

Definimos el operador coborde  $\partial^n: C^n \rightarrow C^{n+1}$  como

$$\partial^n f = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_i f$$

donde  $d_i$  viene dado por

$$(d_i f)(g_1, \dots, g_n) = \begin{cases} g_1 \cdot f(g_2, \dots, g_n) & \text{si } i = 0, \\ f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) & \text{si } 0 < i < n, \\ f(g_1, \dots, g_{n-1}) & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Se verifica que  $\partial^{n+1}(\partial^n f) = 0$  y por tanto  $(C, \partial)$  es un complejo de cocadenas.

## Proposición

*Si  $|G| = m < \infty$  o  $|A| = m < \infty$ , entonces  $m \cdot H^n(G, A) = \{0\}$ .*

## Teorema

*Si  $\text{mcd}(|G|, |A|) = 1$ , entonces  $H^n(G, A) = \{0\}$ .*

# Extensiones de grupos

Una extensión de un grupo  $Q$  por un grupo  $N$  es una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1.$$

# Extensiones de grupos

Una extensión de un grupo  $Q$  por un grupo  $N$  es una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1.$$

Decimos que dos extensiones son equivalentes cuando existe un homomorfismo  $f$  que hace al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{\pi} & Q & \longrightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \downarrow f & & \parallel & & \\ 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{\pi'} & Q & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

Necesariamente  $f$  debe ser un isomorfismo de grupos.



# Acción de grupos de una extensión

Una extensión de grupos  $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$  determina por conjugación por elementos de  $E$  una acción de grupos en  $N$   $\alpha: E \rightarrow \text{Aut}(N)$  definida por

$$\alpha(e)(n) = i^{-1}(ei(n)e^{-1}).$$

# Acción de grupos de una extensión

Una extensión de grupos  $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$  determina por conjugación por elementos de  $E$  una acción de grupos en  $N$   $\alpha: E \rightarrow \text{Aut}(N)$  definida por

$$\alpha(e)(n) = i^{-1}(ei(n)e^{-1}).$$

Si  $N$  es abeliano,  $\text{Inn}(N) = 1$  y la extensión define una acción de  $Q$ -módulo en  $N$ . Nos centraremos únicamente en el caso en que  $N$  es abeliano.

# Extensiones que escinden

## Definición

Se dice que una extensión  $1 \rightarrow A \rightarrow E \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$  escinde cuando existe un homomorfismo  $s: Q \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ s = 1_Q$ .

## Teorema

*Una extensión  $1 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow Q \rightarrow 1$  que escinde es equivalente a  $1 \rightarrow A \rightarrow A \rtimes Q \rightarrow Q \rightarrow 1$ .*

# Clasificación de las escisiones

## Definición

Sea  $A$  un grupo abeliano y  $1 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$  una extensión de grupos. Diremos que dos escisiones  $s_1$  y  $s_2$  son  $A$ -conjugadas si existe  $a \in A$  tal que  $s_1(Q)^{i(a)} = s_2(Q)$ .

## Teorema

*Las escisiones salvo  $A$ -conjugación están en biyección con  $H^1(Q, A)$ .*

# Clasificación de las extensiones

$$1 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1 \quad (1)$$

Tomando una sección  $s$  de  $\pi$ , la función  $c: Q \times Q \rightarrow A$  mide cuánto dista  $s$  de ser un homomorfismo

$$s(q_1)s(q_2)s(q_1q_2)^{-1} = i(c(q_1, q_2)).$$

# Clasificación de las extensiones

$$1 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1 \quad (1)$$

Tomando una sección  $s$  de  $\pi$ , la función  $c: Q \times Q \rightarrow A$  mide cuánto dista  $s$  de ser un homomorfismo

$$s(q_1)s(q_2)s(q_1q_2)^{-1} = i(c(q_1, q_2)).$$

$$E = \bigsqcup_{q \in Q} i(A)s(q) = i(A)s(Q)$$

# Clasificación de las extensiones

$$1 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1 \quad (1)$$

Tomando una sección  $s$  de  $\pi$ , la función  $c: Q \times Q \rightarrow A$  mide cuánto dista  $s$  de ser un homomorfismo

$$s(q_1)s(q_2)s(q_1q_2)^{-1} = i(c(q_1, q_2)).$$

$$E = \bigsqcup_{q \in Q} i(A)s(q) = i(A)s(Q)$$

$$i(a_1)s(q_1)i(a_2)s(q_2) = i(a_1 + q_1 \cdot a_2 + c(q_1, q_2))s(q_1q_2)$$

# Clasificación de las extensiones

$$1 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1 \quad (1)$$

Tomando una sección  $s$  de  $\pi$ , la función  $c: Q \times Q \rightarrow A$  mide cuánto dista  $s$  de ser un homomorfismo

$$s(q_1)s(q_2)s(q_1q_2)^{-1} = i(c(q_1, q_2)).$$

$$E = \bigsqcup_{q \in Q} i(A)s(q) = i(A)s(Q)$$

$$i(a_1)s(q_1)i(a_2)s(q_2) = i(a_1 + q_1 \cdot a_2 + c(q_1, q_2))s(q_1q_2)$$

El conjunto  $A \times Q$  con la siguiente operación tiene estructura de grupo y es equivalente a (1) con la inclusión y proyección canónicas

$$(a_1, q_1) * (a_2, q_2) = (a_1 + q_1 \cdot a_2 + c(q_1, q_2), q_1q_2). \quad (2)$$



# Clasificación de las extensiones

## Proposición

*El conjunto  $A \times Q$  con la operación definida en (2) define una extensión de  $Q$  por  $A$  cuando  $c$  es un 2-cociclo.*

## Proposición

*Sea  $1 \rightarrow A \rightarrow E \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$ ,  $s_1$  y  $s_2$  secciones de  $\pi$  y  $c_1$  y  $c_2$  los cociclos asociados. Entonces  $c_1 - c_2$  es un 2-coborde.*

## Teorema

*Las extensiones de  $Q$  por  $A$  salvo equivalencia están en biyección con  $H^2(Q, A)$ .*

## Teorema

*Sean  $A$  y  $Q$  grupos con órdenes coprimos y  $1 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow Q \rightarrow 1$  una extensión. Entonces la extensión escinde y todas las escisiones son conjugadas.*

## Definición

Sea  $G$  un grupo,  $S \leq G$  y  $\pi$  un conjunto de primos. Se dice que  $S$  es un  $\pi$ -subgrupo de Sylow cuando es un  $\pi$ -subgrupo maximal.

# Subgrupos de Hall

## Definición

Sea  $G$  un grupo,  $S \leq G$  y  $\pi$  un conjunto de primos. Se dice que  $S$  es un  $\pi$ -subgrupo de Sylow cuando es un  $\pi$ -subgrupo maximal.

## Definición

Se dice que  $H$  un  $\pi$ -subgrupo de Hall cuando  $|H|$  es producto de primos en  $\pi$  y  $|G : H|$  es coprimo con  $|H|$ . Denotamos al conjunto de  $\pi$ -subgrupos de Hall como  $\text{Hall}_\pi(G)$ .

# Subgrupos de Hall

## Definición

Sea  $G$  un grupo,  $S \leq G$  y  $\pi$  un conjunto de primos. Se dice que  $S$  es un  $\pi$ -subgrupo de Sylow cuando es un  $\pi$ -subgrupo maximal.

## Definición

Se dice que  $H$  un  $\pi$ -subgrupo de Hall cuando  $|H|$  es producto de primos en  $\pi$  y  $|G : H|$  es coprimo con  $|H|$ . Denotamos al conjunto de  $\pi$ -subgrupos de Hall como  $\text{Hall}_\pi(G)$ .

## Definición

Se define el  $\pi$ -núcleo de  $G$ ,  $O_\pi(G)$ , como el subgrupo generado por todos los  $\pi$ -subgrupos normales. Equivalentemente,  $O_\pi(G)$  es la intersección de todos los  $\pi$ -subgrupos de Sylow.

# Subgrupos de Hall

## Propiedades

### Proposición

*Sea  $G$  un grupo,  $N \trianglelefteq G$  y  $H \in \text{Hall}_\pi(G)$ . Entonces  $H \cap N \in \text{Hall}_\pi(N)$  y  $HN/N \in \text{Hall}_\pi(G/N)$ .*

### Proposición

*Sean  $\pi$  y  $\tau$  conjuntos de primos disjuntos y  $H \in \text{Hall}_{\pi'}(G)$  y  $K \in \text{Hall}_{\tau'}(G)$  subgrupos de Hall. Entonces  $H \cap K \in \text{Hall}_{\pi' \cap \tau'}(G)$ .*

## Teorema

*Sea  $G$  un grupo y  $N \trianglelefteq G$  un  $\pi$ -subgrupo de Hall. Entonces  $G$  tiene  $\pi'$ -subgrupos de Hall y todos ellos son conjugados.*

## Teorema

*Sea  $G$  un grupo resoluble. Entonces, para todo conjunto de primos  $\pi$  se tiene*

- $\text{Hall}_{\pi}(G) \neq \emptyset$
- *Todos los  $\pi$ -subgrupos de Hall son conjugados*



## Teorema

*Sea  $G$  un grupo resoluble. Entonces, para todo conjunto de primos  $\pi$  se tiene*

- $\text{Hall}_{\pi}(G) \neq \emptyset$
- *Todos los  $\pi$ -subgrupos de Hall son conjugados*

## Teorema

*Sea  $G$  un grupo tal que para todo conjunto de primos  $\pi$  existen  $\pi$ -subgrupos de Hall. Entonces  $G$  es resoluble.*

# Homomorfismo del transfer

Sea  $G$  un grupo,  $H$  un subgrupo de índice finito  $n$  y  $T = \{t_1, \dots, t_n\}$  representantes de las coclases de  $H$ . Definimos la acción de  $G$  sobre  $T$  por

$$Ht_i g = Ht_{(i)g},$$

# Homomorfismo del transfer

Sea  $G$  un grupo,  $H$  un subgrupo de índice finito  $n$  y  $T = \{t_1, \dots, t_n\}$  representantes de las coclases de  $H$ . Definimos la acción de  $G$  sobre  $T$  por

$$Ht_i g = Ht_{(i)g},$$

de esta forma se tiene

$$t_i g t_{(i)g}^{-1} \in H.$$

# Homomorfismo del transfer

Sea  $G$  un grupo,  $H$  un subgrupo de índice finito  $n$  y  $T = \{t_1, \dots, t_n\}$  representantes de las coclases de  $H$ . Definimos la acción de  $G$  sobre  $T$  por

$$Ht_i g = Ht_{(i)g},$$

de esta forma se tiene

$$t_i g t_{(i)g}^{-1} \in H.$$

Dado  $\theta: H \rightarrow A$  un homomorfismo sobre un grupo abeliano, se define el transfer de  $\theta$  como

$$\tau_{G/H}(g) = \prod_{i=1}^n \theta \left( t_i g t_{(i)g}^{-1} \right)$$

# Homomorfismo del transfer

Sea  $G$  un grupo,  $H$  un subgrupo de índice finito  $n$  y  $T = \{t_1, \dots, t_n\}$  representantes de las coclases de  $H$ . Definimos la acción de  $G$  sobre  $T$  por

$$Ht_i g = Ht_{(i)g},$$

de esta forma se tiene

$$t_i g t_{(i)g}^{-1} \in H.$$

Dado  $\theta: H \rightarrow A$  un homomorfismo sobre un grupo abeliano, se define el transfer de  $\theta$  como

$$\tau_{G/H}(g) = \prod_{i=1}^n \theta \left( t_i g t_{(i)g}^{-1} \right)$$

El transfer es un homomorfismo independiente del transversal.

Dado un elemento  $g \in G$ , las órbitas de la acción de  $g$  sobre las coclases por multiplicación a derecha tienen la siguiente forma

$$\{Hs_i, \dots, Hs_i^{l_i-1}\},$$

donde  $l_i$  es el menor entero tal que  $Hs_i g^{l_i} = Hs_i$ .

Los elementos  $s_i g^j$  para  $i = 1, \dots, k$  y  $j = 0, \dots, l_i - 1$  forman un transversal de  $H$  a  $G$ .

Dado un elemento  $g \in G$ , las órbitas de la acción de  $g$  sobre las coclases por multiplicación a derecha tienen la siguiente forma

$$\{Hs_i, \dots, Hs_i^{l_i-1}\},$$

donde  $l_i$  es el menor entero tal que  $Hs_i g^{l_i} = Hs_i$ .

Los elementos  $s_i g^j$  para  $i = 1, \dots, k$  y  $j = 0, \dots, l_i - 1$  forman un transversal de  $H$  a  $G$ . El transfer con este transversal se escribe como

$$\tau_{G/H}(g) = \prod_{i=1}^k s_i g^{l_i} = \prod_{i=1}^k s_i g^{l_i} s_i^{-1}.$$

# Transfer a un subgrupo

Definimos el transfer de  $G$  a un subgrupo  $H \leq G$  como el transfer a  $\text{Ab}$ :  $H \rightarrow H^{\text{ab}}$

$$\tau_{G/H}(g) = \prod_{i=1}^n \left( t_i g t_{(i)g}^{-1} \right) H'.$$

Es de especial interés el transfer a subgrupos abelianos ya que dan lugar a endomorfismos de grupos.



## Proposición

*Sea  $H \leq G$  un subgrupo central de índice finito  $|G : H| = n$ . Entonces el transfer de  $G$  a  $H$  es*

$$\tau_{G/H}(g) = \prod_{i=1}^k s_i g^{l_i} = g^n.$$

# Transfer al centro y teorema de Schur

## Proposición

*Sea  $H \leq G$  un subgrupo central de índice finito  $|G : H| = n$ . Entonces el transfer de  $G$  a  $H$  es*

$$\tau_{G/H}(g) = \prod_{i=1}^k s_i g^{l_i} = g^n.$$

## Teorema (Schur)

*Sea  $G$  un grupo con centro  $Z(G)$  de índice finito  $n$ . Entonces  $G'$  es finito y  $G'^n = \{1\}$ .*

# Fin

Gracias por su atención