Apuntes de Matemática 2

Facultad de Informática
U.N.L.P.

Año 2021

Índice general

Capítulo 2

Límites

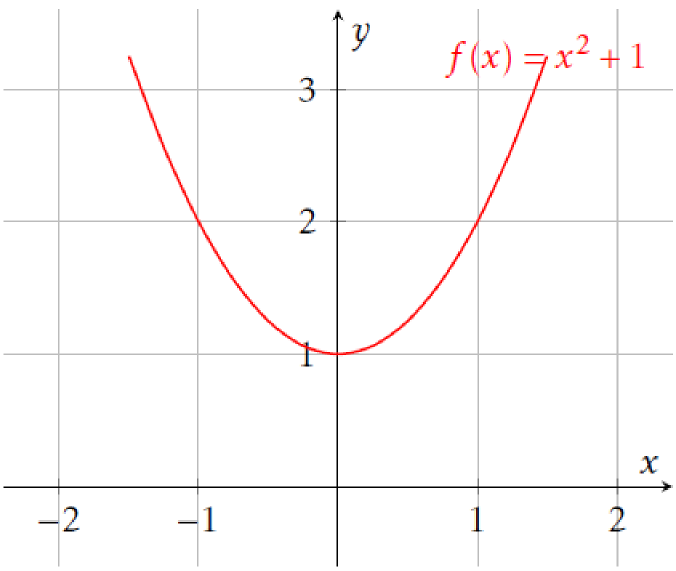
En este capítulo desarrollaremos el concepto de límite de una función, una de las nociones fundamentales del cálculo. A partir de esto, podremos analizar el comportamiento de una función tanto alrededor de un punto, como cuando los valores de x del dominio aumentan indefinidamente. Esto nos permitirá tener una idea más aproximada de la representación gráfica de una función. También la noción de limite nos llevará a definir los conceptos de continuidad, derivabilidad e integración que se verán más adelante.

Muchos de estos temas se utilizan, en informática, por ejemplo para calcular el orden de un algoritmo.

2.1. Hacia el concepto de limite

Comenzaremos con una idea intuitiva del estudio del comportamiento de una función alrededor de un punto.

Ejemplo 1: En el siguiente gráfico se muestra parte de la función $f(x) = x^2 + 1$



Luego si calculamos algunos valores que toma la función para valores menores a 1 pero cada vez más cercanos a 1 , veremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1\\ f(0{,}5) &= 1{,}25\\ f(0{,}75) &= 1{,}56\\ f(0{,}80) &= 1{,}64\\ f(0{,}90) &= 1{,}81\\ f(0{,}95) &= 1{,}90\\ f(0{,}99) &= 1{,}98\\ f(0{,}999) &= 1{,}998 \end{aligned}$$

Lo que podemos observar aquí es, que si tomamos valores de x menores a 1 pero cada vez más cercanos a 1 , los resultados de sus imágenes son cada vez más cercanos a 2.
Esto puede entenderse como que mientras x se acerca al valor 1, por izquierda, los valores de $f(x)$ se acercan al valor 2, y puede simbolizarse de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 1^-} x^2+1=2$$

Esto se lee : *el límite cuando x tiende a* 1, *por izquierda, de* x^2+1 *es igual a 2*.

Este límite puede calcularse sencillamente, por ser una función polinómica , reemplazando directamente la variable en la fórmula de la función [1], es decir:

$$\lim_{x\to 1^-} x^2+1=1^2+1=2.$$

En muchos otros casos tendremos que modificar previamente la expresión antes de reemplazar la variable.

Sigamos adelante con el mismo Ejemplo. Ahora, si calculamos algunos valores que toma la función para valores mayores a 1 pero cada vez más cercanos a 1 , veremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(2) &= 5\\ f(1{,}5) &= 3{,}25\\ f(1{,}25) &= 2{,}56\\ f(1{,}2) &= 2{,}44\\ f(1{,}1) &= 2{,}21\\ f(1{,}05) &= 2{,}10\\ f(1{,}01) &= 2{,}02\\ f(1{,}001) &= 2{,}002 \end{aligned}$$

Si tomamos valores de x mayores a 1 pero cada vez más cercanos a 1 , los resultados de sus imágenes son cada vez más cercanos a 2.
Esto puede entenderse como que mientras x se acerca al valor 1, por derecha, los valores de $f(x)$ se acercan al valor 2, y se simboliza de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 1^+} x^2+1=2$$

Esto se lee: *el límite cuando x tiende a* 1, *por derecha, de* x^2+1 *es igual a 2*.

Aquí, podemos hacer lo mismo que antes, reemplazar directamente en la fórmula de la función, es decir

$$\lim_{x\to 1^+} x^2+1=1^2+1=2.$$

[1] Veremos más adelante por qué se puede hacer esto.

En este caso en particular, casualmente tanto los límites por izquierda y por derecha coinciden en su resultado pero no sucede en todos los casos.

A estos límites, tanto al límite por izquierda como al límite por derecha, los llamamos **límites laterales**.

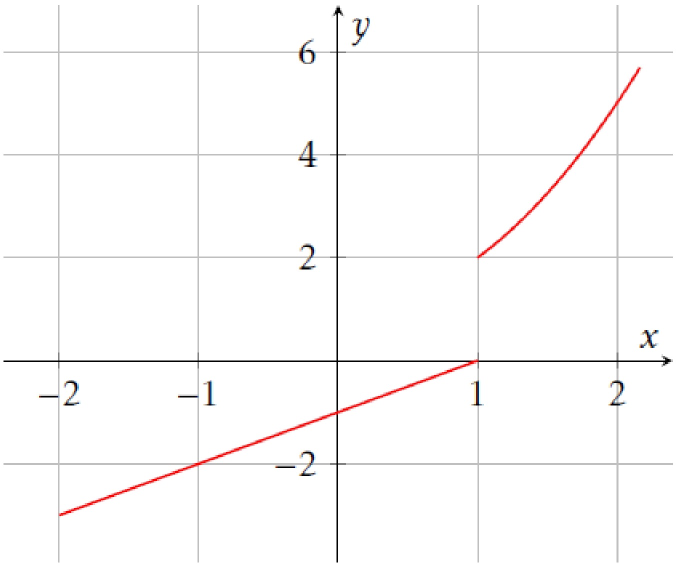
En este ejemplo, podemos decir que, el límite cuando x tiende a 1 de (x^2+1) es 2, es decir que, si no se hace mención alguna a si el límite es por izquierda o por derecha, se entiende que ambos límites laterales coinciden. Puede simbolizarse así:

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 1 = 2$$

Veamos otro Ejemplo.

Ejemplo 2: Qué sucede ahora con el límite cuando $x \to 1$ para la función $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x < 1 \\ x^2+1 & si \quad x \geq 1 \end{cases} .$$



En este caso la función está definida por partes, con fórmulas diferentes para los casos en que $x < 1$ o en que $x \geq 1$. Calculemos los límites laterales.

El límite de $f(x)$ cuando $x \to 1$ por izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x - 1 \; .$$

Al calcular el límite cuando $x \to 1$ por izquierda, debemos tener en cuenta que estamos tomando valores de $x < 1$ por lo que la fórmula de la función será $f(x) = x - 1$.

Este límite puede calcularse simplemente reemplazando la variable en la fórmula.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x - 1 = 1 - 1 = 0$$

El límite de $f(x)$ cuando $x \to 1$ por derecha:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 + 1.$$

Al calcular el límite cuando $x \to 1$ por derecha, debemos tener en cuenta que estamos tomando valores de $x \geq 1$ por lo que la fórmula de la función será $f(x) = x^2 + 1$.

Este límite puede calcularse simplemente reemplazando la variable en la fórmula.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$

Concluimos que como los límites laterales no coinciden, el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to 1$ no existe.

Ejemplo 3: Consideremos la función racional

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

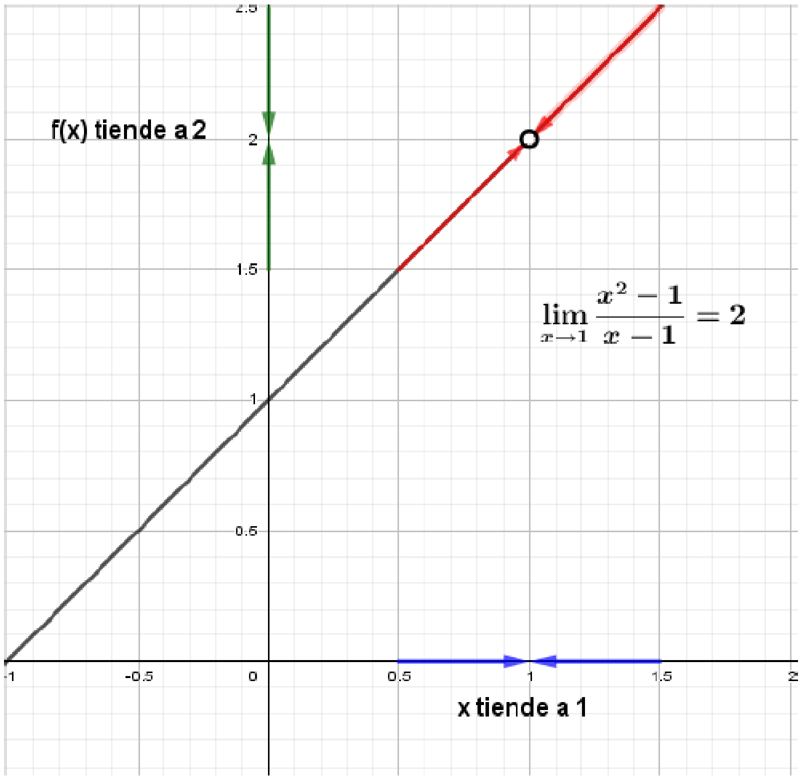
Observemos que **la función g no está definida para** $x = 1$ (es decir que no existe $g(1)$), pero si para cualquier otro número real. Entonces nos podríamos preguntar cómo se comporta la función cuando x toma valores próximos a 1.
Para responder a esta pregunta calculamos los valores de $g(x)$ para valores de x cercanos a 1.

$$\begin{aligned}
g(0{,}75) &= \quad 1{,}75 \\
g(0{,}90) &= \quad 1{,}90 \\
g(0{,}99) &= \quad 1{,}99 \\
g(0{,}999) &= \quad 1{,}999 \\
g(1) & \quad\; \text{no existe} \\
g(1{,}001) &= \quad 2{,}001 \\
g(1{,}01) &= \quad 2{,}01 \\
g(1{,}1) &= \quad 2{,}1 \\
g(1{,}25) &= \quad 2{,}25
\end{aligned}$$

A partir de estos datos , no es difícil de concluir que a medida de que x toma valores cada vez más próximos a 1 (tanto por valores mayores como por menores), $g(x)$ toma valores cada vez más próximos a 2. Entonces,

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Observemos gráficamente la información que nos brinda el calculo del limite anterior:



La noción de límite ,tal como la describimos en los ejemplos, está destinada a comunicar el comportamiento de una función cerca de algún punto de interés, pero en realidad no en ese punto. Más adelante veremos que podemos determinar limites haciendo operaciones algebraicas.

Ahora, vamos a formalizar los conceptos que vimos en los ejemplos anteriores.

2.2. Definiciones

En las siguientes definiciones consideramos x_0 y L números reales y $f(x)$ una función.

Definición 1
Se dice que el límite por izquierda a x_0 es

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L,$$

si puede aproximar los valores de $f(x)$ a L tanto como quiera, escogiendo una x lo bastante cerca de x_0 pero menor que x_0. Y se lee *el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a x_0 por la izquierda es igual a L.*

Definición 2
Se dice que el límite por derecha a x_0 es

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L,$$

si puede aproximar los valores de $f(x)$ a L tanto como quiera, escogiendo una x lo bastante cerca de x_0 pero mayor que x_0. Y se lee *el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a x_0 por la derecha es igual a L.*

Definición 3
Se dice que el límite cuando x tiende a x_0 es L , y se escribe:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \text{ si y solo si } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

En otras palabras, un limite existe si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como se desee) escogiendo x lo bastante cerca de x_0 (tanto por valores mayores como por menores), pero no igual a x_0.

Ejemplo 4: a) Si f es la función identidad, entonces para cualquier valor de x_0

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0$$

(b) Si f es la función constante, (función con el valor constante c), entonces para cualquier valor de x_0,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} c = c$$

2.3. Propiedades Algebraicas de los limites

Para calcular límites de funciones, que son a su vez combinaciones aritméticas de funciones con límites conocidos, utilizamos varias reglas sencillas.

Sean, L, M, k y x_0 números reales,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = M$$

entonces,

1. Propiedad de la suma/diferencia:	$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = L \pm M$
2. Propiedad del multiplo por una constante:	$\lim_{x\to x_0} k f(x) = k \lim_{x\to x_0} f(x) = k L$
3. Propiedad del producto:	$\lim_{x\to x_0} f(x).g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x). \lim_{x\to x_0} g(x) = L.M$
4. Propiedad del cociente:	$\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{L}{M}, \qquad M \neq 0$
5. Propiedad de la potencia:	$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x\to x_0} f(x)]^n = [L]^n$, n entero positivo
6. Propiedad de la raíz:	$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{L} = [L]^{1/n}$, n entero positivo

Importante:

1. **Todas estas propiedades son válidas si los limites de las funciones existen.**

2. **La propiedad del cociente no se puede utilizar cuando el limite del denominador es 0. Veremos más adelante como resolver este tipo de limites.**

3. **En la siguiente sección se mostrarán herramientas que permitan solucionar los limites de la forma $\frac{0}{0}$.**

Ejemplo 5: Calcular los siguientes limites utilizando propiedades y el Ejemplo 4.

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(2x^2-3x+4)$ *b*) $\lim\limits_{x\longrightarrow -2}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$.

$$
\begin{aligned}
a)\ \lim_{x\to 0}(2x^2-3x+4) &= \lim_{x\to 0}(2x^2)-\lim_{x\to 0}(3x)+\lim_{x\to 0}(4) \quad \text{(prop. 1)}\\
&= 2\lim_{x\to 0}(x^2)-3\lim_{x\to 0}(x)+\lim_{x\to 0}(4) \quad \text{(prop. 2)}\\
&= 2(\lim_{x\to 0}x)^2-3\lim_{x\to 0}(x)+\lim_{x\to 0}(4) \quad \text{(prop.5)}\\
&= 2(0)^2-3(0)+4 \quad \text{(Ejemplo 4)}\\
&= 0-0+4=4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} &= \frac{\lim\limits_{x\to -2}(x^3+2x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -2}(5-3x)} \quad \text{(prop. 4)}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to -2}x^3+2\lim\limits_{x\to -2}x^2-\lim\limits_{x\to -2}1}{\lim\limits_{x\to -2}5-3\lim\limits_{x\to -2}x} \quad \text{(prop. 1 y 2)}\\
&= \frac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)} \quad \text{(prop. 5)}\\
&= \frac{-8+8-1}{5+6}=-\frac{1}{11}
\end{aligned}
$$

Importante: Propiedad de sustitución directa
Si f es un polinomio o una función racional y x_0 está en el dominio de f, entonces

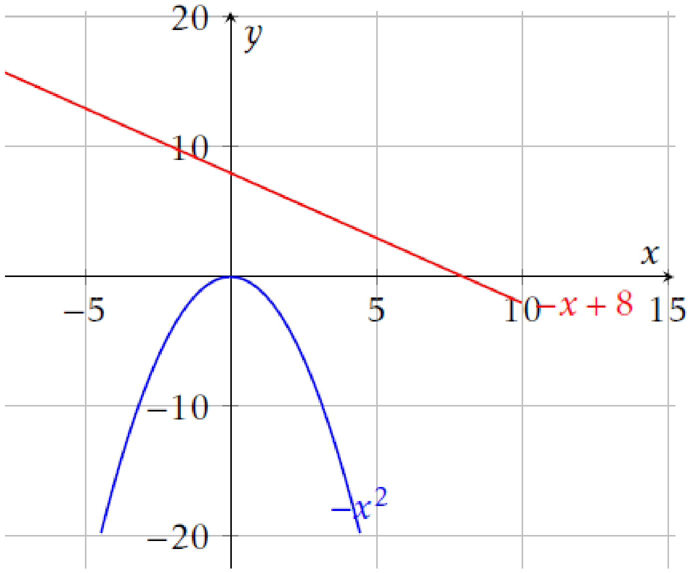
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Las funciones con esta propiedad de sustitución directa se llaman continuas en x_0 y esas características se estudiarán en el próximo capítulo.

Ejemplo 6:

(a) Sean $f(x)=-x+8$ y $g(x)=-x^2$, calcular $\lim\limits_{x\to -5}f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2}g(x)$.

Primero observemos sus gráficas:



De aquí, se obtiene que: $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = \lim\limits_{x \to -5} -x + 8 = 13$ y $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \lim\limits_{x \to 2} -x^2 = -4$.

(b) Para $f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x \geq 2 \\ 8 & si \quad x < 2 \end{cases}$, hallar el $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, si existe.

Esta función está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. En $x = 2$ la función cambia su forma, con lo cual debemos analizar los limites laterales.

Por un lado, el limite por derecha es $\lim\limits_{x \to 2^+} x^3 = 8$, y el limite por izquierda es $\lim\limits_{x \to 2^-} 8 = 8$.

Como los limites laterales coinciden , $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 8$.

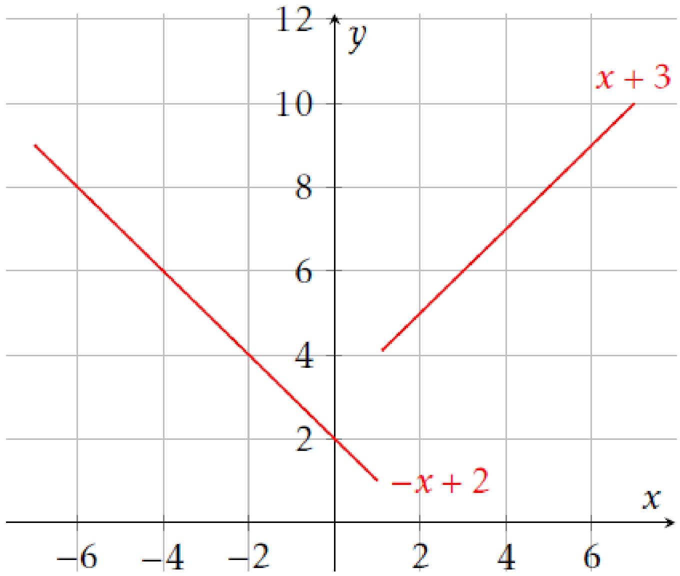
La siguiente es la gráfica de f.

(c) Sea h dada por,

$$h(x) = \begin{cases} x+3 & si \quad x > 1 \\ -x+2 & si \quad x \leq 1 \end{cases}$$

Hallar $\lim_{x \to 1} h(x)$.

Como en el item b), se trata de una función a trozos. Gráficamente, podemos observar que $\lim_{x \to 1} h(x)$ no existe.



Ahora veamos analíticamente, es decir, haciendo las cuentas.

$\lim_{x \to 1^+} x+3 = 4 \quad$ y $\quad \lim_{x \to 1^-} -x+2 = 1$.

Los limites laterales no coinciden, entonces $\lim_{x \to 1} h(x)$ no existe.

2.3.1. Ejercicios

1. Calcular los límites de las siguientes funciones, si existen.

   a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x > 2 \\ 1 & si \quad x \leq 2 \end{cases}$. Calcular $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ y $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.

   b) Sea g la función valor absoluto, $g(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

   Calcular $\lim_{x \to 0^+} g(x)$ y $\lim_{x \to 0^-} g(x)$. Qué puede concluir respecto al $\lim_{x \to 0} g(x)$?.

c) Dada $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & si \quad x > 4 \\ \\ 8 - 2x & si \quad x < 4 \end{cases}$. Calcular $\lim_{x \to 4} h(x)$.

d) Sea $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x} & si \quad x \leq 0 \\ \\ x^2 & si \quad x > 0 \end{cases}$. Calcular $\lim_{x \to 0} f_2(x)$, y $\lim_{x \to -1} f_2(x)$.

2. Calcular los siguientes limites utilizando propiedades.

i) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x+2}{x+3}$ ii) $\lim_{x \to 1} x^3 + 5x^2 + 10$

iii) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$ iv) $\lim_{x \to \pi} sen(x - \pi)$

v) $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x^2 + 2}}{x}$ vi) $\lim_{x \to 1} ln\left(\dfrac{2}{x^3 + 1}\right)$

vii) $\lim_{x \to 0} \dfrac{ln(x+1)}{e^x}$ viii) $\lim_{x \to 0} 3\, cos(x^2)(1+x)^4$

ix) $\lim_{x \to 3} |x - 3|$ x) $\lim_{x \to 3} \dfrac{|x-3|}{x}$

2.4. Limites indeterminados

No todos los límites se pueden evaluar por sustitución directa. Algunos casos ocurren cuando:

1. la expresión en el límite incluye una división y solamente el denominador tiende a 0,
2. la expresión en el límite incluye una división y al mismo tiempo tanto el numerador como el denominador tienden a 0.

En esta sección nos ocuparemos de lo segundo.

Ejemplo 7:
Trabajaremos con la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ y queremos averiguar el valor de $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Lo primero que observamos es que $x = 1$ no está en el dominio de la función, sin embargo eso no es un problema, ya que el límite trabaja con lo que sucede alrededor de ese punto, es decir con valores muy cercanos a $x = 1$, que en este caso si forman parte del dominio. Al calcular los límites del numerador y del denominador por separado vemos que:

$$\lim_{x \to 1} x - 1 = 0 \quad y \quad \lim_{x \to 1} x^2 - 1 = 0.$$

Así que $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$ no puede determinarse en forma directa.

A este tipo de limites se los llama **limites indeterminados**. Cabe aclarar que cuando el límite sea indeterminado no significa que el límite no exista, sino que debemos hacer algo para poder calcularlo.

La idea para resolver este tipo de limites es modificar algebraicamente la expresión, sin modificar el resultado, para que luego pueda calcularse el límite. A este proceso en el cual modificamos la expresión para poder calcular un límite indeterminado le decimos usualmente salvar la indeterminación.

A continuación desarrollaremos algunas técnicas específicas para salvar algunas indeterminaciones.

En este ejemplo se puede factorizar [2] la expresión del denominador para luego simplificar.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1} \quad \text{para} \;\; x \neq \pm 1$$

Luego podemos calcular el límite con la expresión simplificada,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 8: Determinar el limite $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$.

Si queremos determinar el límite utilizando las propiedades, nos encontramos con el problema que al evaluar la función en $x = 2$, tanto el numerador como el denominador dan 0, pero a diferencia del ejemplo anterior el numerador no es un polinomio.

La técnica para salvar esta indeterminación es multiplicar (al numerador y al denominador) por el conjugado de la expresión que tiene el radical,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right) \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2}{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

2.4.1. Ejercicios

1. Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & si \quad x \neq 1 \\ 3 & si \quad x = 1 \end{cases}$$

Calcular $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

2. Calcular, si existen, los siguientes limites.

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2+x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$ iv) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$

v) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ vi) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

[2] Buscar y repasar todos los casos de factoreo.

2.5. Limites que involucran al infinito: Asíntotas

2.5.1. Limites infinitos

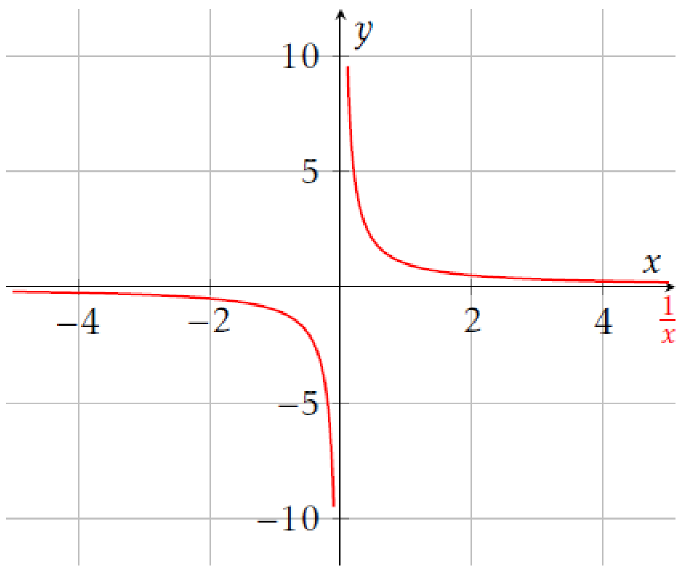
Ahora nos ocupamos de aquellos límites donde la expresión incluye una división y solamente el denominador tiende a 0.

Ejemplo 9: Determinar el limite $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$.

Debido a que f es una función racional para la cual $x = 0$ no pertenece a su dominio, no podemos utilizar las propiedades algebraicas del límite para resolver nuestro problema. Por lo que no tenemos otra alternativa (por ahora) que analizar en forma rudimentaria el comportamiento de $f(x)$ a medida que x se aproxima a 0:

x	-0,1	-0,01	-0,001	$\longrightarrow$	0	0,001	0,01	0,1
$f(x)$	-10	-100	-1000	$\longrightarrow$	..	1000	100	10

Si observamos la tabla, no es difícil de concluir que conforme x se aproxima a 0 , $\frac{1}{x}$ se hace cada vez más grande. De hecho al ver la representación gráfica de la función confirmamos dicha conjetura.



Como los valores de $f(x)$ se hacen cada vez más grandes positivamente cuando x tiende a cero por derecha y se hacen cada vez más grandes negativamente cuando x tiende a cero por izquierda y no se aproximan a un número fijo, la conclusión es que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ **no existe**, es decir que no da un número real.

Pero este comportamiento de los valores de $f(x)$ cuando x tiende a 0, requiere nuestra atención y una notación especial.

En los casos en que los valores de $f(x)$ aumenten indefinidamente, si se escoge x lo bastante cerca de 0 por derecha o por izquierda, lo indicaremos como

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

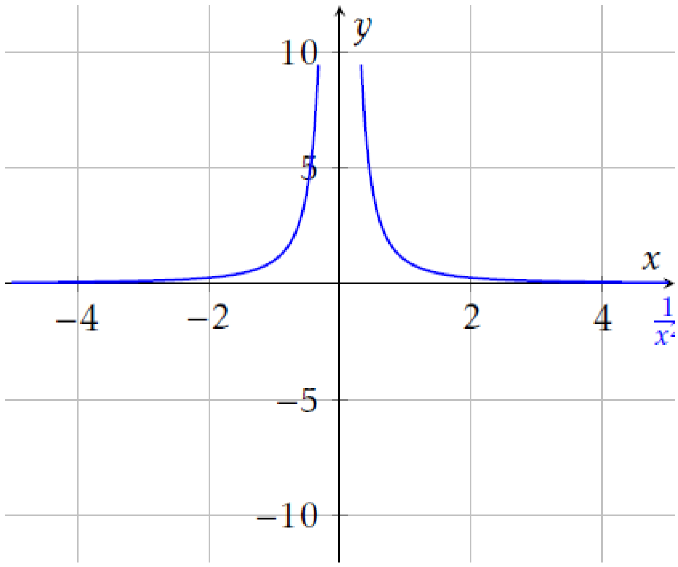
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Esta notación no significa que consideremos ∞ como un número, ni tampoco que exista el límite.

Gráficamente, esto dice que la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ se acerca a la línea vertical $x = 0$, cuando $x \to 0$. Cuando esto ocurre, decimos que la recta $x = 0$ es una *asíntota vertical*.

Ejemplo 10: Determinar el limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}.$$



Aquí podemos ver que el límite no existe, pero también que hay una asíntota vertical en $x = 0$, donde $\dfrac{1}{x^2} \to \infty$ cuando $x \to 0$ desde cualquier lado.

Definición 5
Sea $f(x)$ una función definida en ambos lados de x_0, excepto posiblemente en x_0. Entonces

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes (tan grandes como uno quiera) haciendo que x se acerque suficientemente a x_0, pero que no sea igual que x_0.

Definición 6
Sea $f(x)$ una función definida en ambos lados de x_0, excepto posiblemente en x_0. Entonces

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes y negativos, haciendo que x se acerque suficientemente a x_0, pero que no sea igual que x_0.

Definición 7
La recta $x = x_0$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si por lo menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

Ejemplo 11: Calcular $\lim_{x \to 5} \dfrac{1}{(x-5)^3}$.

Como $x \to 5$, el denominador se acerca a 0, mientras el numerador se acerca a 1. Específicamente,

$$\text{cuando}\, x \to 5^+, \quad (x-5)^3 \to 0 \quad \text{y} \quad (x-5)^3 > 0.$$

Indicamos a donde tiende cada factor de la siguiente manera,

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{\overbrace{1}^{\to +1}}{\underbrace{(x-5)^3}_{\to 0^+}} = +\infty$$

.

Del mismo modo, cuando $x \to 5^-, \quad (x-5)^3 \to 0 \quad \text{y} \quad (x-5)^3 < 0,$

$$\lim_{x \to 5^-} \frac{\overbrace{1}^{\to +1}}{\underbrace{(x-5)^3}_{\to 0^-}} = -\infty$$

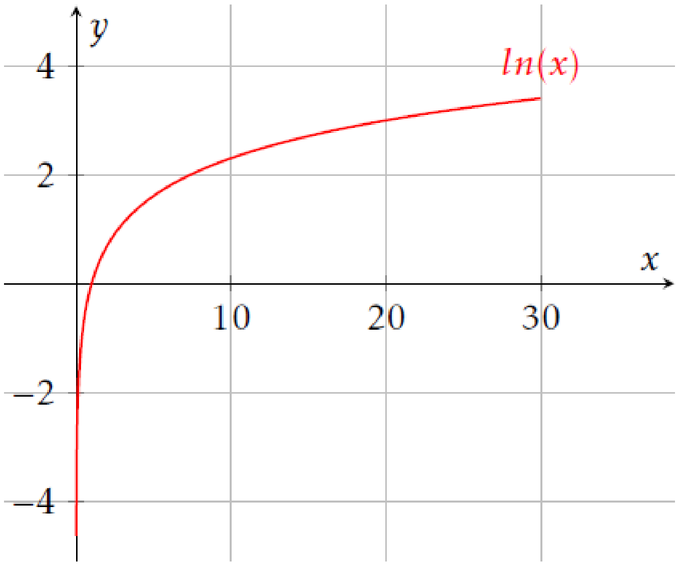
.

Finalmente, diremos que $\lim_{x \to 5} \dfrac{1}{(x-5)^3}$ no existe, pero también diremos que existe una asíntota vertical en $x = 5$.

Ejemplo 12:

Si $f(x) = ln(x)$ calculemos ahora $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.
Tengamos presente que el dominio de la función logarítmo natural son los números reales positivos. En este caso no podemos hacer ningún tipo de simplificación así que estudiaremos el límite observando una tabla de valores.

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,0000001	0,00000001
$f(x)$	-2,3	-4,6	-6.9	-9,2	-11,5	-13,8	-16,11	-18,4



Si seguimos tomando valores de x lo suficientemente cercano a cero vemos como $f(x)$ se hace cada vez más grande negativamente. Con lo cual podemos concluir que:

$$\lim_{x \to 0^+} ln(x) = -\infty$$

Y estaríamos en presencia de una asíntota vertical en $x = 0$.

2.5.2. Limites al infinito

También nos interesa examinar el comportamiento de las funciones a medida que x aumenta indefinidamente (simbolizado como $x \to \infty$) o cuando x disminuye indefinidamente (simbolizado como $x \to -\infty$). Veamos el comportamiento de las funciones conocidas:

1. Funciones constantes:

$$\lim_{x \to +\infty} k = k \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} k = k.$$

2. Función identidad:

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} x = -\infty.$$

3. Funciones racionales: Si consideramos la funicón $f(x) = \frac{1}{x}$, podemos ver que cuando tomamos valores muy altos de x el resultado de la cuenta $\frac{1}{x}$ es muy chico, es decir que si $x \to \infty$ entonces $\frac{1}{x} \to 0$. A este comportamiento lo escribiremos como,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Similarmente,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Observemos que la gráfica de f (ver la figura del Ejemplo 9), parece acercarse a la línea horizontal $y = 0$, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$. En este caso, llamamos $y = 0$ una *asíntota horizontal*.

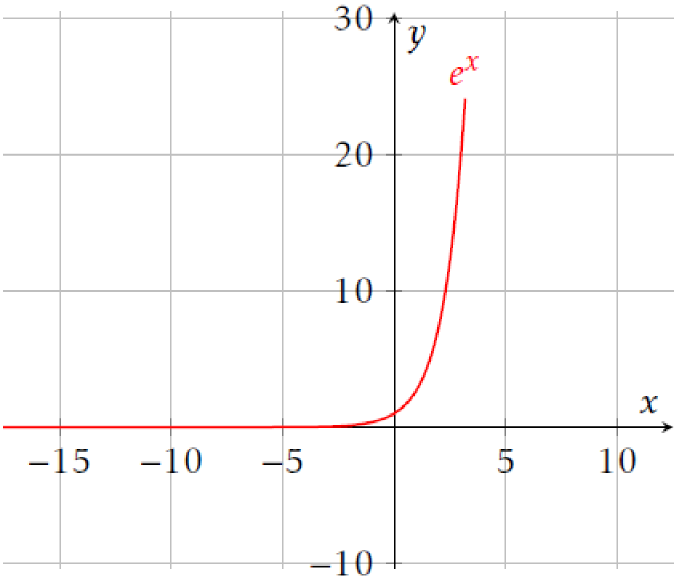
En general, si t es un número racional ($t > 0$),

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^t} = 0.$$

4. Funciones exponenciales:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

.



Hay una asíntota horizontal en $y = 0$ (solamente hacia $-\infty$)

5. Funciones logarítmicas:

$$\lim_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty.$$

En este caso no tomamos $\lim_{x \to -\infty} ln(x)$ porque la función no está definida para esos valores.

Definición 8
Sea $f(x)$ una función definida en algún intervalo (a, ∞) . Entonces

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \ \text{ ó } \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden acercar arbitrariamente a L para x lo suficientemente grande o tender a $\pm\infty$.

Definición 9
Sea $f(x)$ una función definida en algún intervalo $(a, -\infty)$. Entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \ \text{ ó } \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden acercar arbitrariamente a L para x lo suficientemente chico o tender a $\pm\infty$.

Definición 10
La recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$, si se verifica al menos una de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

Importante: Las propiedades de limites vistas , también valen para limites al infinito, siempre que los limites involucrados existan.

Ejemplo 13: Calcular $\lim_{x\to+\infty} 5 + \frac{1}{x}$.

Como ambos limites existen, puedo aplicar suma de limites,

$$\lim_{x\to+\infty} 5 + \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} 5 + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 5 + 0 = 5$$

Ejemplo 14: Limite de funciones polinómicas Calcular $\lim_{x\to+\infty} x^3 - 2x^2 + 3$.

En este caso no se puede utilizar propiedades de los límites, porque

$$\lim_{x\to+\infty} \overbrace{x^3}^{\to+\infty} \overbrace{-2x^2}^{\to-\infty} +3, \quad \text{es una indeterminación.}$$

En esta situación vemos una resta de infinitos la cual no puede resolverse automáticamente como si fuesen números. La idea para salvar esta indeterminación es sacar factor común, considerando al término de grado mayor, en este caso x^3, es decir

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 - 2x^2 + 3 = \lim_{x\to+\infty} x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{3}{x^3}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}\right).$$

Como $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^3} = 0$, se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} \overbrace{x^3}^{\to+\infty} \overbrace{\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}\right)}^{\to1} = +\infty$$

En general, para cualquier polinomio de grado $n > 0$, ($p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$) se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} p_n(x) = \begin{cases} \infty, & si \quad a_n > 0 \\ -\infty & si \quad a_n < 0 \end{cases}.$$

Ejemplo 15: Limites de cociente de polinomios. Calcular los siguientes limites:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x-7}{4x+3}$.

En este caso también hay indeterminación, porque $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\overbrace{5x-7}^{+\infty}}{\underbrace{4x+3}_{+\infty}}$. Para salvar esta indetermina-ción se hace algo similar al ejemplo anterior: se saca como factor común el término de mayor grado en el numerador y también en el denominador, es decir

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x-7}{4x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{5x}{x}-\frac{7}{x}\right)}{x\left(\frac{4x}{x}+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(5-\frac{7}{x}\right)}{x\left(4+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\left(5-\frac{7}{x}\right)}^{\to 5}}{\underbrace{\left(4+\frac{3}{x}\right)}_{\to 4}} = \frac{5}{4}.$$

(Tener en cuenta que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{7}{x} = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$.)

b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{5x^4+2x^2}{-x^2-6}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{5x^4+2x^2}^{+\infty}}{\underbrace{-x^2-6}_{\to-\infty}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(\frac{5x^4}{x^4}+\frac{2x^2}{x^4}\right)}{x^2\left(\frac{-x^2}{x^2}-\frac{6}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(5+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(-1-\frac{6}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\overbrace{x^2}^{\to+\infty}\overbrace{\left(5+\frac{2}{x^2}\right)}^{\to 5}}^{\to+\infty}}{\underbrace{\left(-1-\frac{6}{x^2}\right)}_{\to-1}} = -\infty.$$

c) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-x-2}{5x^3+4x-1}$,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-x-2}{5x^3+4x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(\frac{3x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(\frac{5x^3}{x^3}+\frac{4x}{x^3}-\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(5+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{\left(3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}^{\to 3}}{\underbrace{\underbrace{x^3}_{\to-\infty}\underbrace{\left(5+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}_{\to 5}}_{\to-\infty}} = 0.$$

d) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x-x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{4x-1}}$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-\sqrt{x}}{\sqrt{4x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{3x}{x}-\frac{x^{1/2}}{x}\right)}{\sqrt{x\left(\frac{4x}{x}-\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{1}{x^{1/2}}\right)}{\sqrt{x\left(4-\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{1}{x^{1/2}}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{\left(4-\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{1}{x^{1/2}}\right)}{x^{1/2}\sqrt{\left(4-\frac{1}{x}\right)}} =$$

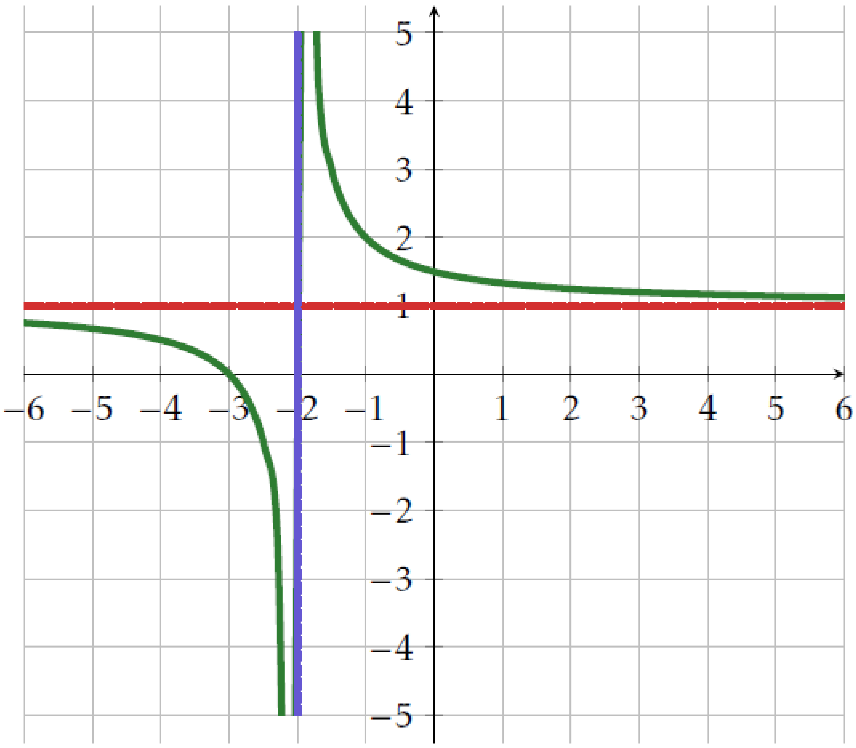
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{x^{1/2}}^{\to+\infty}\overbrace{\left(3-\frac{1}{x^{1/2}}\right)}^{\to 3}}{\underbrace{\sqrt{\left(4-\frac{1}{x}\right)}}_{\to\sqrt{4}}} = +\infty.$$

Del Ejemplo 15 se puede obtener una regla general para el comportamiento de cualquier función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$*, con* $p(x)$ *polinomio de grado* $n > 0$ *y* $q(x)$ *de grado* $m > 0$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0} = \begin{cases} \infty, & si \quad n > m \\ \frac{a_n}{b_m}, & si \quad n = m \\ 0 & si \quad n < m \end{cases}.$$

Ejemplo 16: Determinar las asíntotas verticales y horizontales de $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$.

Como podemos ver en el gráfico siguiente la curva verde es la función en cuestión, la línea punteada roja es la asíntota horizontal $y = 1$, y la línea punteada azul es la asíntota vertical $x = -2$. Verifiquemos esto analíticamente luego del gráfico.



La función $f(x)$ tiene $Dom = \mathbb{R} - \{-2\}$, con lo cual $x = -2$ es candidato a asíntota vertical, para verificar eso, tomemos los límites por derecha y por izquierda a ese valor.

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{\overbrace{x+3}^{\to 1}}{\underbrace{x+2}_{\to 0^+}} = +\infty \quad y \quad \lim_{x\to -2^-} \frac{\overbrace{x+3}^{\to 1}}{\underbrace{x+2}_{\to 0^-}} = -\infty$$

Como los límites cumplen con la Definición 7 entonces en $x = -2$ hay una **Asíntota Vertical**.

Para analizar las asíntotas horizontales tomemos los límites a $\pm\infty$ y veamos si tienden a un valor $L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1+3/x)}{x(1+2/x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{1+3/x}^{\to 1}}{\underbrace{1+2/x}_{\to 1}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+3/x)}{x(1+2/x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{1+3/x}^{\to 1}}{\underbrace{1+2/x}_{\to 1}} = 1$$

Como los límites cumplen con la Definición 10 entonces en $y = 1$ hay una **Asíntota Horizontal**.

2.5.3. Ejercicios

1. Determinar el comportamiento de los siguientes limites.

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2+x}$ b) $\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{2-x}$

   c) $\lim_{x\to 3} \frac{x}{x-3}$ d) $\lim_{x\to -2} \frac{x}{|x+2|}$

2.

   a) $\lim_{x\to-\infty} x - 3x^4$ b) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{5}{x} - \frac{3}{x}\right)$

   c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+3x-1}$ d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2}$

   e) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x-3}{x^3-x^2-6x-2}$ f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-2x^2}{\sqrt{x^4-6x}}$

3. Calcular las asíntotas verticales y horizontales, si existen, de las funciones dadas a continuación:

   a) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

   b) $g(x) = \frac{4x^2+2x-2}{3x-1}$

c) $h(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4x+4}$

d) $k(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-1} & si \quad x < 2 \\ 3x^3 - 2x & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

4. Utilizar GeoGebra para verificar gráficamente el comportamiento de las funciones de los Ejemplos 11) y 15).

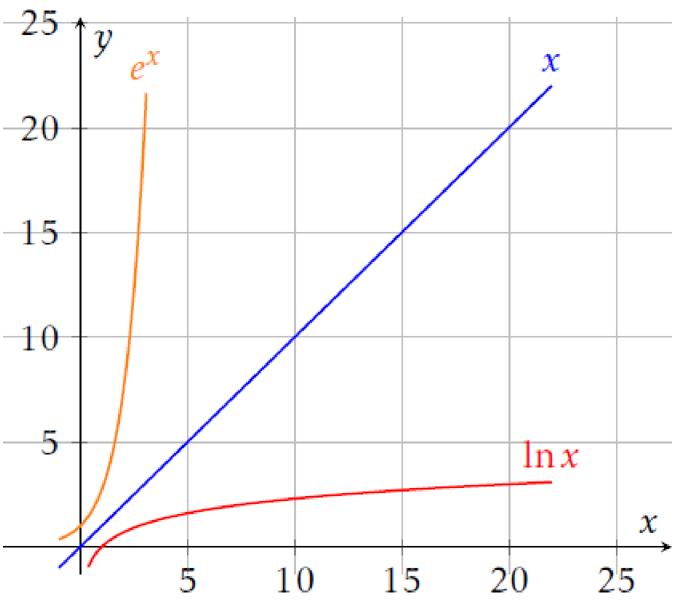
2.6. Limites especiales: Orden de magnitud

Estudiaremos a través del orden de magnitud el comportamiento en el infinito de un cociente de funciones que involucran funciones exponenciales, polinómicas y logarítmicas. Mostraremos cómo comparar las razones de crecimiento de funciones cuando aumenta x.

En el siguiente gráfico puede observarse que las funciones exponenciales crecen muy rápido, mientras que las logarítmicas lo hacen muy lentamente. A este comportamiento lo denotamos:

$$e^x >> x^\alpha >> ln(x) \quad \text{cuando} \quad x \longrightarrow +\infty$$

.



Como rápido y lento son conceptos relativos, el crecimiento de estas funciones las compararemos con el de las funciones potencia de exponente positivo (x^α, $\alpha > 0$).

Sea $\alpha > 0$, se tiene:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.$

  Esto nos dice que el crecimiento de una función exponencial es más rápido que el de cualquier potencia de x y lo indicamos de la siguiente manera: $e^x >> x^\alpha$ cuando $x \longrightarrow +\infty$.

  Como consecuencia de este limite podemos obtener que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0.$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\alpha}}{ln(x)} = +\infty.$

  Aquí el crecimiento de la función potencia es más rápido que el de $ln(x)$ ($x^{\alpha} >> ln(x)$ cuando $x \to +\infty$).

  Entonces, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x^{\alpha}} = 0.$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{ln(x)} = +\infty.$

  El crecimiento de la función exponencial es más rápido que el de $ln(x)$ ($e^{x} >> x^{\alpha}$ cuando $x \to +\infty$).

  Así, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{e^{x}} = 0.$

Ejemplo 17

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{e^x} = 0$, porque $e^x >> x^4$ cuando $x \to +\infty$ (orden de magnitud).

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2\left(\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2}\dfrac{1}{\underbrace{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}_{\to 1}} = +\infty$, porque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$, por orden de magnitud.

c) Limite con cambio de variable: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 ln(x)$

   Si hacemos el cambio de variable $y = \dfrac{1}{x}$ podemos observar que cuando $x \to 0^+$ entonces $y \to \infty$. Observemos que si $y = \dfrac{1}{x}$, entonces $x = \dfrac{1}{y}$ y reemplazando este cambio en el límite que nos interesa calcular nos quedaría:

   $$\lim_{x\to 0^+} x^2 ln(x) = \lim_{y\to\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^2 ln\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to\infty} \frac{ln(1/y)}{y^2}$$

   Antes de seguir hagamos una observación: $ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = ln(1) - ln(y) = 0 - ln(y) = -ln(y)$

   Entonces:

   $$\lim_{y\to\infty} \frac{ln(1/y)}{y^2} = \lim_{y\to\infty} \frac{-ln(y)}{y^2} = 0$$ pues $y^2 >> ln(x)$ cuando $x \to +\infty$ (orden de magnitud).

2.6.1. Ejercicios

Calcular los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln^2(x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+2x+1}{e^x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,ln(x)$