1 Построение графа группы по образующим и определяющим соотношениям.

2 Теоретические сведения. Описание алгоритма.

Чтобы ввести понятие *определяющих соотношений* группы G, рассмотрим множество, состоящее из всех нетривиальных соотношений группы G, т. е. множество $R_k = I$, k = 1, 2,..., где R_k, — непустое слово. Обозначим это множество через A.

Рассмотрим множество A всех нетривиальных соотношений группы G и выберем в нем, если это возможно, подмножество B, такое, что *соотношения из B влекут за собой все соотношения из множества A*. Это множество B соотношений называется множеством *определяющих соотношений группы G*. Хотя бы одно множество B определяющих соотношений существует (если A непусто), так как в качестве B можно взять все множество A. Однако более интересной и плодотворной оказывается ситуация, когда B является собственным подмножеством множества A (т. е. когда оно не совпадает с A).

ТЕОРЕМА 1. *Если задано множество B соотношений $R_k = I$, где каждое R_k есть непустое слово от заданного множества символов, то существует группа G, для которой B является множеством определяющих соотношений.*

Дадим набросок основной процедуры построения группы при помощи образующих и соотношений.

(1) Зададим множество порождающих символов и множество B соотношений $R_k = I$, где каждое R_k есть непустое слово от заданных символов.

(2) Рассмотрим множество F всех слов от заданных порождающих символов.

(3) Образуем подмножество K, состоящее из всех слов W из F, таких, что равенство $W = I$ есть следствие заданного множества соотношений $R_k = I$. Один из способов «построения» K указан в приведенном ниже замечании.

(4) Разобъем F на классы эквивалентных слов, т. е. таких слов, которые могут быть преобразованы одно в другое с помощью вставки и вычеркивания слов, равных I.

(5) Выберем множество G представляющих слов по одному из каждого класса эквивалентности. Любое такое множество G есть группа [2]), для которой заданные соотношения $R_k = I$ являются определяющими.

Замечание о построении множества . Мы утверждаем, что K есть множество всех произведений (т. е. конечных последовательностей) слов вида $T^{-1}RT$ или $T^{-1}R^{-1}T$, где $R = I$ — соотношение из заданного множества B, а T — произвольное слово из F. Если $R = I$, то ясно, что любое слово описанного вида равно I, так как $T^{-1}IT = I$. Обратно, можно показать, что если V— слово из F и если равенство $V = I$ есть следствие наших соотношений, то V есть произведение сомножителей вида $T^{-1}RT$.

Пример. Задание группы C_3 определяющими соотношениями.
(1) Применим описанную выше процедуру для «отыскания» группы C, задаваемой определяющим со- отношением $r^3 = I$ от одной образующей r. (Мы, конечно, ожидаем, что группа C окажется циклической группой порядка 3.)

(2) В нашем случае множество F всех слов от r состоит из всех конечных произведений символов r и r^{-1}. Ясно, что любое слово T из F можно преобра- зовать к виду r^n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

(3) Чтобы образовать множество K, найдем все слова, «порожденные» словами вида $T^{-1}RT$ или $T^{-1}R^{-1}T$, т. е. слова вида

$$r^{n-1}r^3r^n \text{ или } r^{n-1}r^{-3}r^n \ .$$

Но если удалить из этих слов все стоящие рядом пары взаимно обратных элементов, то мы получим

$$r^3 \text{ и } r^{-3}.$$

Таким образом, множество K включает в себя все произведения степеней элементов r^3 и r^{-3}:

$$K = \{r^n\}, \text{ где n кратно 3.}$$

или

$$K = \{r^n\},\ n \equiv 0(mod 3).$$

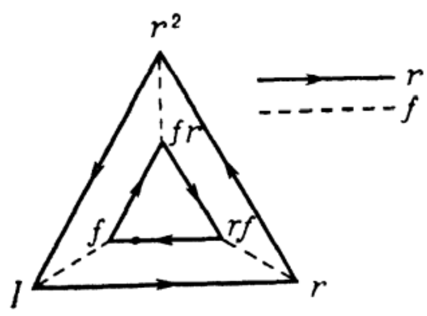
Этими словами из K исчерпываются все слова W, для которых равенство $W = I$ есть следствие из $r^3 = I$.
(4) Преобразуя слова r^n из F путем вставки или вычеркивания слов, для которых $n \equiv 0(mod 3)$, мы замечаем теперь, что множество F делится на три класса:

A: слова r^n, для которых $n \equiv 0(mod 3)$, например $n = 6$;
B: слова r^n, для которых $n \equiv 1(mod 3)$, например $n = 4$;
C: слова r^n, для которых $n \equiv 2(mod 3)$, например $n = —1$,

(5) В качестве представителей этих классов выберем

$$I \text{ из } A\ (n = 0),\ r \text{ из } B,\ r^2 \text{ из } C.$$

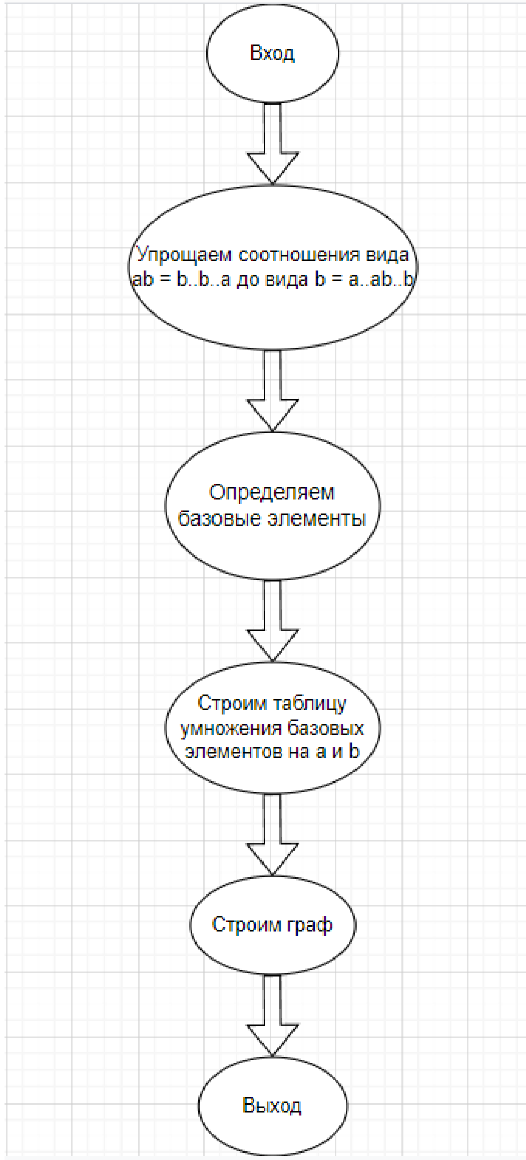
Три представляющих слова I, r, r^2 образуют группу, а именно циклическую группу по- рядка 3 с элементом r в качестве образующей. (Мы должны помнить, что элементу группы соответствует целый класс эквивалентных слов. Например, слово $r^2r^2 =$ r^4 лежит в том же классе, что и слово r, и, следовательно, мы можем сказать, что элемент r^4 есть не что иное, как элемент r.)



Мы видим, что группа G с определяющим соотношением $r^3 = I$, как мы и ожидали, оказалась циклической группой порядка 3.

3 Логическая блок-схема алгоритма

Основные этапы работы алгоритма представлены на рисунке логической блок схемы



4 Описание программы и инструкции по работе с ней

Программа по заданным порождающим символам a и b, и, по определяющим соотношениям строит граф.
Инструкция по работе с ней:
1) Ввести степень a
2) Ввести степень b
3) Вводим равенство, относительно ab
Далее, нажав кнопку «Пуск» , справа от нас появляется наш граф, где один цвет стрелочек - умножения на a, другой - на b.

5 Оценка сложности алгоритма

Наибольшую сложность имеет построение таблицы умножения - $O(n^3)$, что соответствует максимальному числу вложенных циклов в программе – три.

6 Тестовые примеры. Скриншоты программы.

Пример №1. Граф задан следующим представлением: G $= <$ a,b | a$^2 = e, b^2 = e, ab = ba >$
$e \prec a \prec a^{-1} \prec b \prec b^{-1} \prec aa \prec aa^{-1} \prec ab \prec ab^{-1} \prec a^{-1}a \prec a^{-1}a^{-1} \prec a^{-1}b \prec a^{-1}b^{-1} \prec ba \prec ... \prec b^{-1}b{-}1 \prec aaa \prec aaa^{-1} \prec ...$

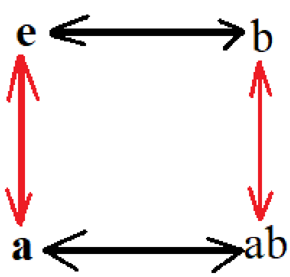
Получившиеся базовые элементы выделяем жирным:

$\mathbf{e} \prec \mathbf{a} \prec a^{-1} = a \prec \mathbf{b} \prec b^{-1} = b \prec a^2 = e \prec aa^{-1} = e \prec \mathbf{ab} \prec ab^{-1} = ab \prec ...$

Построение таблицы:

	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

Построение графа:



Пример №2. Граф задан следующим представлением: G $= <$ a,b | a$^3 = e, b^2 = e, ab = ba^2 >$
$e \prec a \prec a^{-1} \prec b \prec b^{-1} \prec aa \prec aa^{-1} \prec ab \prec ab^{-1} \prec a^{-1}a \prec a^{-1}a^{-1} \prec a^{-1}b \prec a^{-1}b^{-1} \prec ba \prec ... \prec b^{-1}b{-}1 \prec aaa \prec aaa^{-1} \prec ...$

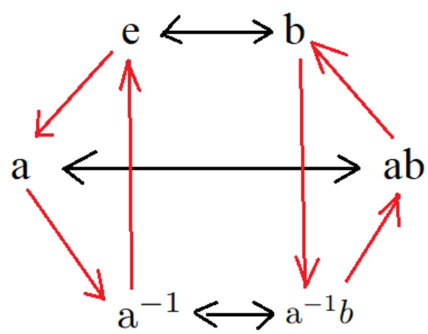
Получившиеся базовые элементы выделяем жирным:

$\mathbf{e} \prec \mathbf{a} \prec \mathbf{a^{-1}} \prec \mathbf{b} \prec b^{-1} = b \prec a^2 = a^{-1} \prec aa^{-1} = e \prec \mathbf{ab} \prec ab^{-1} = ab \prec \mathbf{a^{-1}b}$

Построение таблицы:

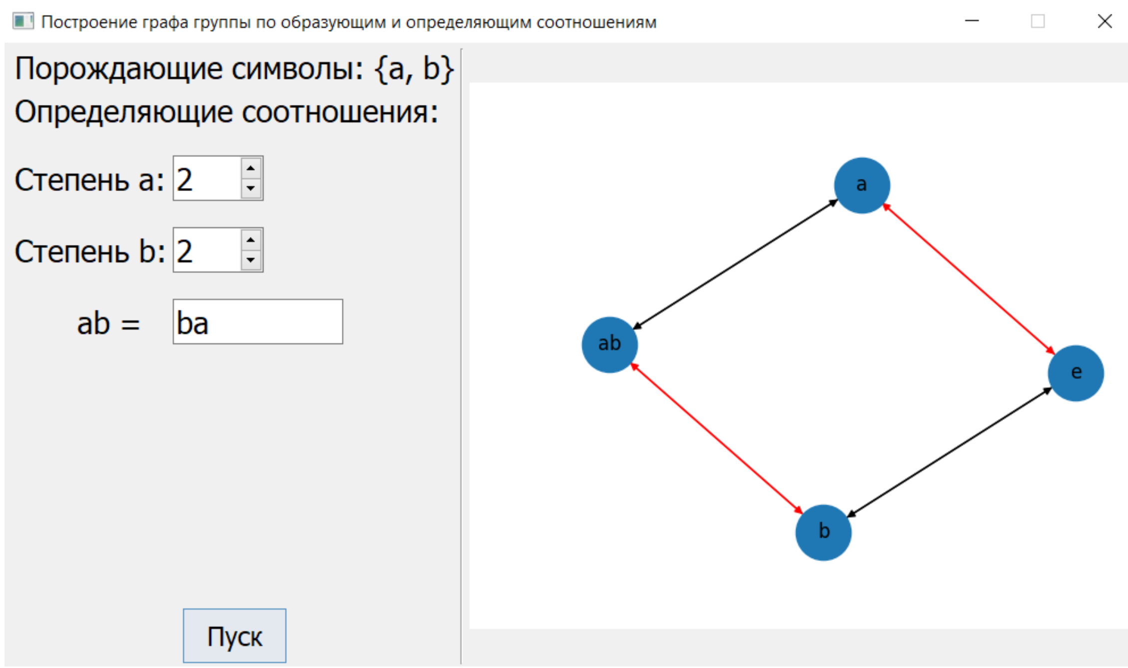
	e	a	a^{-1}	b	ab	a^{-1}b
e	e	a	a^{-1}	b	ab	a^{-1}b
a	a	a^{-1}	e	ab	a^{-1}b	b
a^{-1}	a^{-1}	e	a	a^{-1}b	b	ab
b	b	a^{-1}b	ab	e	a^{-1}	a
ab	ab	b	a^{-1}b	a	e	a^{-1}
a^{-1}b	a^{-1}b	ab	b	a^{-1}	a	e

Построение графа:

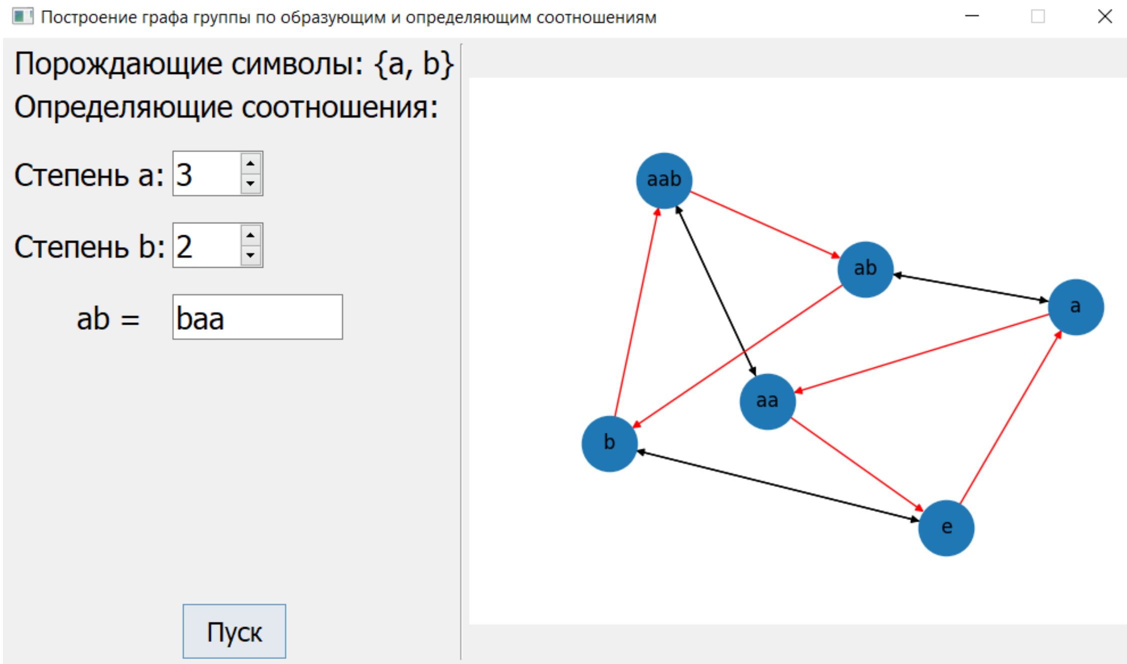


7 Скриншоты программы

Пример №1



Пример №2


Построение графа группы по образующим и определяющим соотношениям
Порождающие символы: {a, b}
Определяющие соотношения:
Степень a: 3
Степень b: 2
ab =
baa
Пуск
aab
ab
a
aa
b
e