IEE239 - Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales
Laboratorio 3 - Prueba de Entrada
Segundo Semestre 2017

Martes, 3 de octubre del 2017

- **Horario 08M2**
- Duración: 20 minutos.
- Mostrar claramente su procedimiento en cada pregunta. Justificar adecuadamente sus respuestas.
- Está terminantemente prohibido el uso de material adicional y calculadora.
- La evaluación es **estrictamente** personal.

1. *(2.5ptos)* Se tiene el sistema analógico estable $H_a(s) = \dfrac{s}{s+a}$ y se pide:

   a) Calcular el valor de a para que la frecuencia de corte de $H_a(s)$ sea $\Omega_c = 10$ rad/s.

   b) Calcular T para que la frec. digital ω_c sea $\dfrac{\pi}{5}$ rad/s usando **transformación bilineal**[1].

   Solución:

   a) Para que el sistema $H_a(s)$ tenga frecuencia de corte $(-3db)$ en $\Omega_c = 10$ rad/s debemos reemplazar $s = j\Omega$ y calcular la función de magnitud del sistema:

   $$H_a(j\Omega) = \frac{j\Omega}{a + j\Omega}$$

   $$|H_a(j\Omega_c)| = \frac{|\Omega_c|}{(a^2 + \Omega_c^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

   Despejando se obtiene $\Omega_c = \pm a$, y dado que $H_a(s)$ es estable la solución es $\Omega_c = a = 10$rad/s.

   b) Reemplazando Ω por $\Omega_c = 10$rad/s y ω por $\omega_c = \dfrac{\pi}{5}$ en la ecuación de transformación bilineal obtenemos:

[1] Transformación bilineal: $\Omega = \dfrac{2}{T}\tan(\dfrac{\omega}{2})$.

$$10 = \frac{2}{T}\tan(\frac{\pi/5}{2})$$

Despejando el valor de T obtenemos $T = 0.2\tan(\frac{\pi}{10})$, según la Figura 2: $\tan(\frac{\pi}{10}) \approx 0.3$ (tambien pudo haber usado la aproximación $\tan(x) \approx x$ para x pequeño). Finalmente $T = 0.2 * 0.3 = 0.06\text{s}$.

2. *(2.5ptos)* Se tiene el sistema analógico $H(s)$ cuyo diagrama de polos y ceros se muestra en la Figura 1:

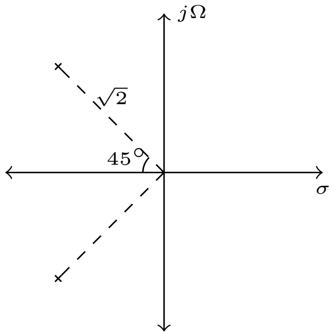

Figura 1: Diagrama de polos y ceros de $H(s)$.

a) Calcular la función de transferencia $H_a(s)$.

b) Usar el **método de invarianza del impulso**[2] para calcular la función de transferencia $H_d(z)$.

Solución:

a) Según la Figura 1 hay dos polos ubicados en los puntos $-1 \pm j$ por lo que éstos serían $s_{1,2} = -1 \pm j$, entonces:

$$H_a(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

b) Para usar el método de invarianza al impulso $H_a(s)$ debe tener la forma $\sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{s - p_k}$ donde c_k son los ceros, p_k los polos y N el orden del sistema.

Entonces resolviendo:

---

[2] $H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{s - p_k} \rightarrow H(z) = T\sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$.

$$H_a(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{-0.5j}{s - (-1 + j)} + \frac{0.5j}{s - (-1 - j)}$$

Ahora utilizando el método de invarianza del impulso obtenemos:

$$H_d(z) = T\frac{-0.5j}{1 - e^{T(-1+j)}z^{-1}} + T\frac{0.5j}{1 - e^{T(-1-j)}z^{-1}}$$

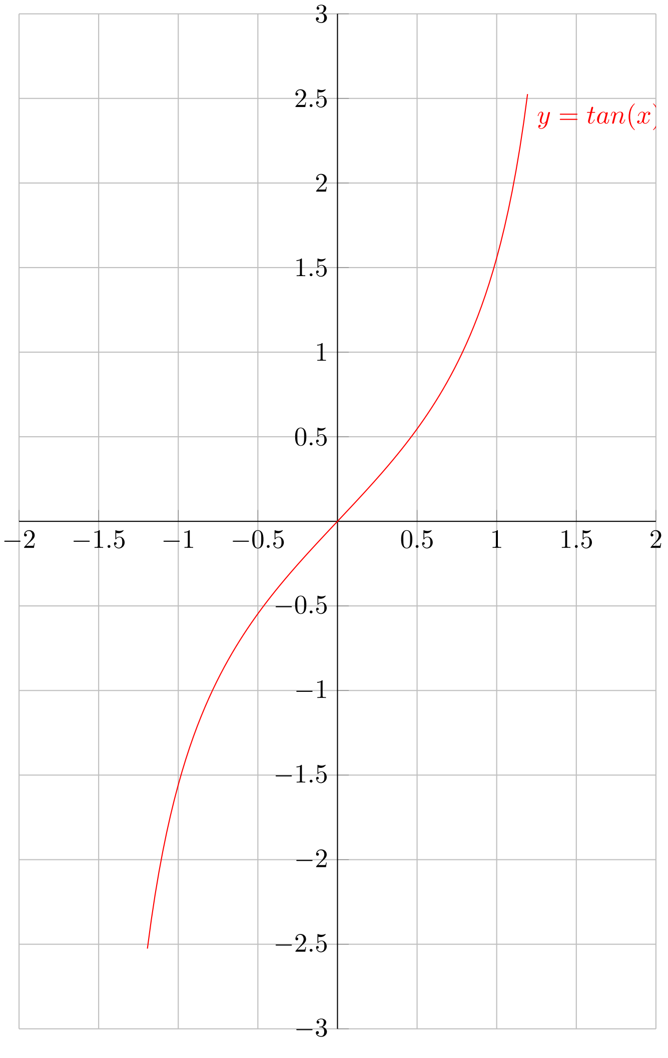

Figura 2: Función $y = \tan(x)$.