# IEE239 - Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales
# Laboratorio 5 - Prueba de Entrada
## Primer Semestre 2018

Martes, 19 de junio del 2018

- **Horario 08M2**
- Duración: 20 minutos.
- Mostrar claramente su procedimiento en cada pregunta. Justificar adecuadamente sus respuestas.
- Está terminantemente prohibido el uso de material adicional y calculadora.
- La evaluación es **estrictamente** personal.

1. *(2 puntos)* Dada la matriz $f(x,y)$ que denota una imagen de entrada, y un sistema cuya respuesta al impulso esta dada por $g(x,y)$:

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad g(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

calcular $r(x,y)$, la respuesta del sistema ante la entrada $f(x,y)$, a partir del producto en frecuencia considerando que el número de muestras de la DFT es $M=3$ y $N=3$.

**Solución :**

- $$F(u,v) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{3}+\frac{vy}{3})} = 1e^{-j2\pi(\frac{u0}{3}+\frac{v0}{3})} + 3e^{-j2\pi(\frac{u1}{3}+\frac{u0}{3})} + 0e^{-j2\pi(\frac{u2}{3}+\frac{u0}{3})} +$$
$$2e^{-j2\pi(\frac{u0}{3}+\frac{v1}{3})} + 4e^{-j2\pi(\frac{u1}{3}+\frac{u1}{3})} + 0e^{-j2\pi(\frac{u2}{3}+\frac{u1}{3})} +$$
$$0e^{-j2\pi(\frac{u0}{3}+\frac{v2}{3})} + 0e^{-j2\pi(\frac{u1}{3}+\frac{u2}{3})} + 0e^{-j2\pi(\frac{u2}{3}+\frac{u2}{3})}$$

$$F(u,v) = 1 + 3e^{-j2\pi(\frac{u}{3})} + 2e^{-j2\pi(\frac{v}{3})} + 4e^{-j2\pi(\frac{u}{3}+\frac{u}{3})}$$

- $$G(u,v) = 2e^{-j2\pi(\frac{u0}{3}+\frac{v0}{3})} + 1e^{-j2\pi(\frac{u1}{3}+\frac{v1}{3})} = 2 + 1e^{-j2\pi(\frac{u}{3}+\frac{v}{3})}$$

- $$H(u,v) = F(u,v)G(u,v) = 2 + 6e^{-j2\pi(\frac{u}{3})} + 4e^{-j2\pi(\frac{v}{3})} + 8e^{-j2\pi(\frac{u}{3}+\frac{v}{3})} + 1e^{-j2\pi(\frac{u}{3}+\frac{v}{3})} +$$
$$3e^{-j2\pi(\frac{2u}{3}+\frac{v}{3})} + 2e^{-j2\pi(\frac{u}{3}+\frac{2v}{3})} + 4e^{-j2\pi(\frac{2u}{3}+\frac{2v}{3})}$$

$$H(u,v) = 2 + 6e^{-j2\pi(\frac{u}{3})} + 4e^{-j2\pi(\frac{v}{3})} + 9e^{-j2\pi(\frac{u}{3}+\frac{v}{3})} + 3e^{-j2\pi(\frac{2u}{3}+\frac{v}{3})} + 2e^{-j2\pi(\frac{u}{3}+\frac{2v}{3})} +$$
$$4e^{-j2\pi(\frac{2u}{3}+\frac{2u}{3})}$$

Por tablas :

- $h(x,y) = 2\delta(x,y) + 6\delta(x-1,y) + 4\delta(x,y-1) + 9\delta(x-1,y-1) + 3\delta(x-2,y-1) + 2\delta(x-1,y-2) + 4\delta(x-2,y-2)$

$$h(x,y) = \begin{bmatrix} \underline{2} & 4 & 0 \\ 6 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2. *(2 puntos)* Demostrar la DFT de las siguientes funciones discretas :

a. $f(x,y) = 1 \longleftrightarrow \mathcal{F}(u,v) = MN\delta(u,v)$

**Solución:**

- $f(x,y) = \frac{1}{MN}\sum\limits_{u=0}^{M-1}\sum\limits_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} = \sum\limits_{u=0}^{M-1}\sum\limits_{v=0}^{N-1} \delta(u,v)e^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$

  $f(x,y) = \delta(0,0)e^{j2\pi(\frac{0x}{M}+\frac{0y}{N})} + \delta(1,0)e^{j2\pi(\frac{x}{M}+\frac{0y}{N})} + ... + \delta(M-1,N-1)e^{j2\pi(\frac{(M-1)x}{M}+\frac{(N-1)y}{N})}$

  $f(x,y) = 1$

b. $f(x,y) = \sin(2\pi u_0 x/M + 2\pi v_0 y/N) \longleftrightarrow \mathcal{F}(u,v) = \frac{MN}{2j}[\delta(u-u_0, v-v_0) - \delta(u+u_0, v+v_0)]$

**Solución:**

**Alternativa 1:**

- $f(x,y) = \sin(2\pi\frac{u_0x}{M} + 2\pi\frac{v_0y}{N}) = \frac{1}{2j}e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})} - \frac{1}{2j}e^{-j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})}$
- $F(u,v) = \frac{1}{2j}\sum\limits_{x=0}^{M}\sum\limits_{y=0}^{M} e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})}e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} - \frac{1}{2j}\sum\limits_{x=0}^{M}\sum\limits_{y=0}^{M} e^{-j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})}e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$

  $= \frac{1}{2j}[\mathcal{F}\{(1)e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})}\} - \mathcal{F}\{(1)e^{-j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})}\}]$

  $= \frac{MN}{2j}[\delta(u-u_0, v-v_0) - \delta(u+u_0, v+v_0)]$

**Alternativa 2:**

- $\mathcal{F}(u,v) = \frac{MN}{2j}\delta(u-u_0, v-v_0) - \frac{MN}{2j}\delta(u+u_0, v+v_0)$

Aplicando la transformada inversa al igual que en el inciso (a) junto con cambio de variable o tablas:

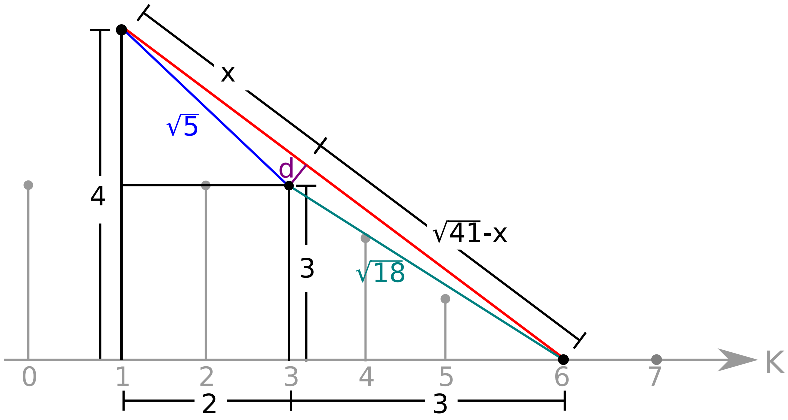
- $f(x,y) = \frac{1}{2j}e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})} - \frac{1}{2j}e^{-j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})} = \sin(2\pi\frac{u_0x}{M} + 2\pi\frac{v_0y}{N})$

3. *(1 punto)* Dada las siguiente imagen $f(x,y)$ , cuyo histograma $h(k)$ de 8 bins ($k \in \{0;7\}$) tiene una distribución unimodal.

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

determinar de forma analítica la distancia a la recta perpendicular del método de Rosin para el punto $k = 3$ del histograma.

**Solución:**




**Alternativa 1:**

$k_1 = 1, \quad h_{max} = 4$
$k_2 = 3, \quad h_2 = 3$
$k_{empty} = 6, \quad r = \sqrt{5}$

- $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{h_{max}}{k_{empty}-k_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = 38{,}66$
- $\beta = 90 - \alpha = 51{,}34$
- $\beta - \theta = \tan^{-1}\left(\frac{k_2-k_1}{h_{max}-h_2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = 63{,}43$
  $\theta = -12{,}09$
- $d = r\sin(\theta) = \sqrt{5}\sin(12{,}09) = 0{,}468$

**Alternativa 2:**

- $x^2 + d^2 = 5 \qquad \ldots \quad (1)$
- $(\sqrt{41} - x)^2 + d^2 = 18 \qquad \ldots \quad (2)$

- $(2) - (1): \quad (\sqrt{41} - x)^2 - x^2 = 13$
  $41 - 2\sqrt{41}x = 13$
  $x = \frac{14}{\sqrt{41}}$

- $(1): \quad \left(\frac{14}{\sqrt{41}}\right)^2 + d^2 = 5 \quad \rightarrow \quad d = 0{,}468$