PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IEE239 - PROCESAMIENTO DE SEÑALES E IMÁGENES DIGITALES

Examen 1
(Segundo semestre 2017)

Indicaciones generales:

- Puntaje total: 20 puntos.
- Duración: 3 horas.
- La presentación, la ortografía y la gramática influirán en la calificación.
- Indicar claramente el procedimiento seguido en cada pregunta.
- Se permite el uso de tablas de transformadas y calculadoras **no programables**.
- **La evaluación es estrictamente personal**.

Cuestionario:

Pregunta 1 (4 puntos)

Se sabe que el filtro digital de respuesta al impulso infinita $h[n]$ fue diseñado a partir del método de **invarianza del impulso**, con $T = 1$s y basándose en el siguiente sistema analógico:

$$H_c(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 1.5}.$$

a) Establecer Ω_c del filtro analógico y graficar de su espectro de magnitud para $[-10, +10]$ rad/s. Según su ganancia, de qué tipo de filtro se trata?

b) Hallar $H(z)$ para el valor T propuesto. Cuál es la frecuencia de corte del filtro digital? Se genera aliasing? Justificar claramente su respuesta.

c) Hallar la ecuación de diferencias **correctamente simplificada** del sistema diseñado.

Pregunta 2 (4 puntos)

Dada la señal $x(t)$ y la señal $\tilde{x}(t)$ descrita en la Figura 1:

$$x(t) = u(t-1) - 2u(t-2) + u(t-3).$$

a) Determinar $X(j\Omega)$ **correctamente simplificada**.

b) Expresar la serie de Fourier de $\tilde{x}(t)$ **en función de** $X(j\Omega)$.

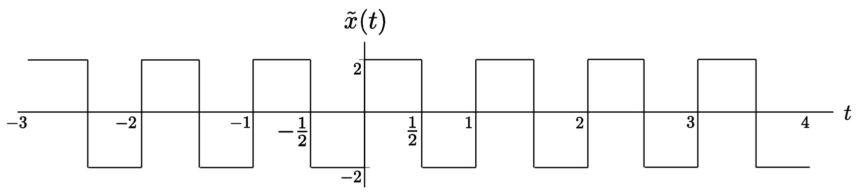


Figura 1: Señal periódica en tiempo contínuo.

Pregunta 3 (4 puntos)
El sistema global descrito en la Figura 2 está basado en 3 subsistemas implementados de forma recursiva. La estructura de cada subsistema está descrita en la Figura 3.

a) Determinar la función de transferencia del sistema global, sus posibles regiones de convergencia y sus correspondientes respuestas al impulso.
b) Para cada posible respuesta al impulso, determinar las siguientes características: (i) BIBO estabilidad y (ii) causalidad.
c) Asumiendo sistema BIBO estable, determinar la respuesta del sistema *y[n]* ante la siguiente secuencia de entrada:

$$x[n] = (0.5)^n u[n] - \frac{2}{7}(0.5)^{(n-1)} u[n-1].$$

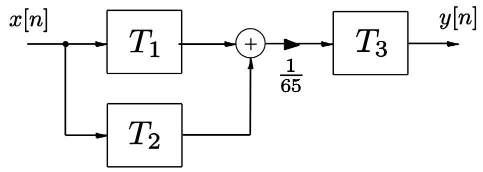
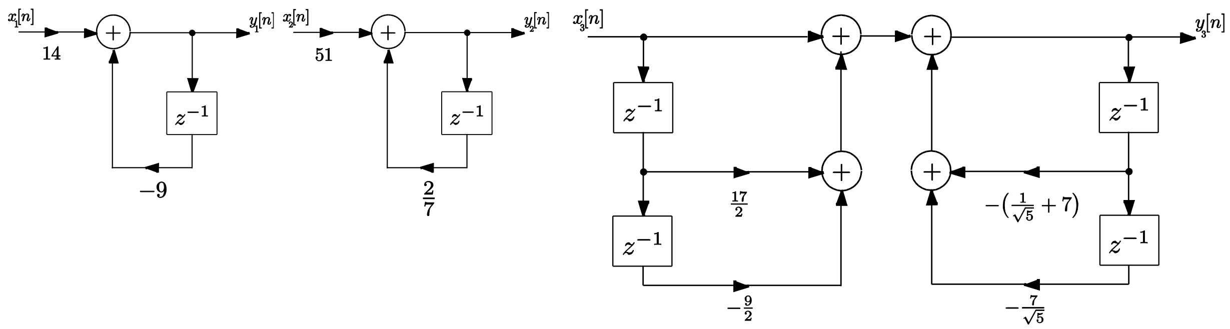


Figura 2: Sistema global.



(a) Subsistema T_1 (b) Subsistema T_2 (c) Subsistema T_3

Figura 3: Subsistemas en forma recursiva.

Pregunta 4 (4 puntos)
Se cuenta con el sistema descrito en la Figura 4 para $1/T = 10$ KHz, la señal en tiempo continuo cuyo espectro es descrito en la Figura 5 y la siguiente función de transferencia:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0.2\pi \leq |\omega| \leq 0.6\pi \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases}.$$

a) Describir gráficamente $X(e^{j\omega})$, $R(e^{j\omega})$, $V(e^{j\omega})$, e $Y(e^{j\omega})$ para $\omega \in [-2\pi, 2\pi]$.
b) Describir gráficamente $Y_c(j\Omega)$ para $\Omega \in [\frac{-10\pi}{4T}, \frac{10\pi}{4T}]$.
c) Expresar $y_c(t)$ en función de $x_c(t)$. Es posible modelar al sistema global como un sistema LTI en tiempo contínuo? Justificar claramente su respuesta.

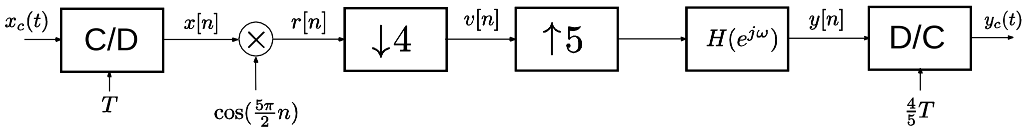


Figura 4. Sistema discreto.

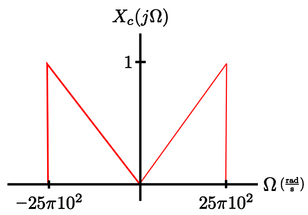


Figura 5. Espectro de señal de entrada.

<u>Pregunta 5</u> (4 puntos)

Dada la secuencia $x[n] = \{\underline{1} \quad 0 \quad 13 \quad 5 \quad 0 \quad 5 \quad 13 \quad 0\}$:

a) **A partir de la definición de DFT**, hallar la secuencia $X(k)$ para $N = 8$.

b) Demostrar la siguiente propiedad de la DFT de N puntos, donde $x_p[n+N] = x_p[n]$:

$$F^{-1}\{X(k) \cdot W_N^{-ak}\} = x_p[n-a];$$

c) Hallar la DFT de $\hat{x}[n] = \{\underline{0} \quad 5 \quad 13 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 13 \quad 5\}$ para $N = 8$ usando el algoritmo FFT Radix-2 descrito en la Figura 6. Mostrar claramente su procedimiento.

d) Cuál es la relación entre la demostración del inciso b) y el resultado del inciso c)?

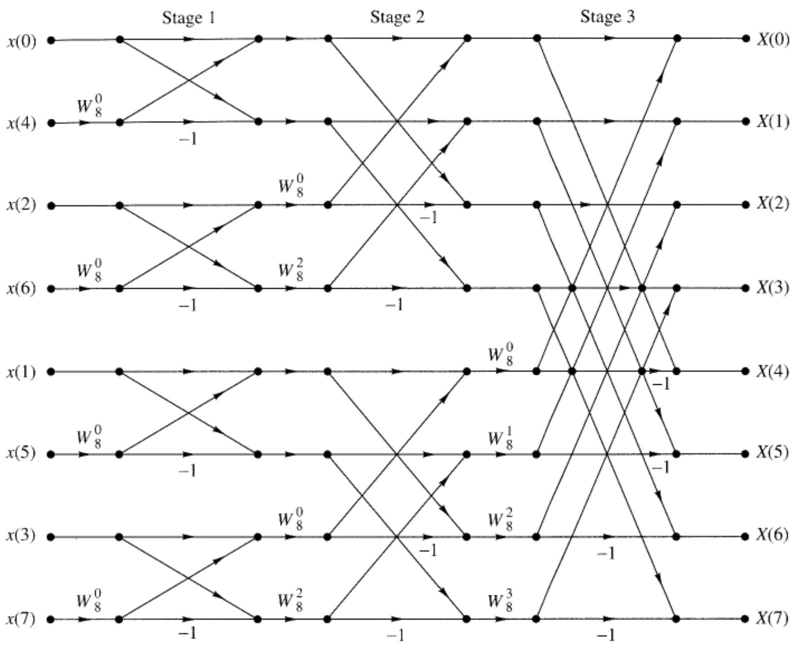


Figura 6: Diezmado temporal descrito a partir de bloques elementales.

Profesor del curso: Renán Rojas G.

San Miguel, 12 de octubre del 2017.

Funciones útiles:

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$c_k = \frac{1}{T_p} X_c\left(j\frac{2\pi k}{T_p} \right)$$

$$c_k = \frac{1}{N} X\left(e^{\frac{j2\pi k}{N}} \right)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi k\frac{n}{N}}$$

$$x_p[n] = \sum_{n=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi k\frac{n}{N}}$$

$$\left| H_c(j\Omega) \right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^{2N}}$$

$$p_k = \Omega_c \exp\left[j\frac{\pi}{2N}(2k+N-1) \right],$$
$$k \in \{0;2N-1\}$$

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{N} \left\{ \frac{c_k}{s-p_k} \right\}$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \left\{ \frac{c_k}{1-\exp(p_k \cdot T)z^{-1}} \right\}$$