# IEE239 - Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales
# Laboratorio 05 - Solución Prueba de Entrada
## Segundo Semestre 2017

1. *(2 puntos)* A partir de la definición de **segunda derivada a partir de diferencia central**, determinar la máscara $3 \times 3$ de la función Laplaciano $\nabla^2 f(x, y)$.

$$\frac{d^2 f[n]}{d^2 n} = f[n-1] - 2f[n] + f[n+1]$$

Asimismo, calcular su DFT 2D correctamente simplificada para $(M, N) = (6, 6)$. Mostrar claramente su procedimiento.
**Solución:**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x} &= f(x-1,y) - 2f(x,y) + f(x+1,y) \\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y} &= f(x,y-1) - 2f(x,y) + f(x,y+1) \\
\nabla^2 f(x,y) &= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y} \\
&= f(x-1,y) + f(x+1,y) + f(x,y-1) + f(x,y+1) - 4f(x,y) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Calculando la DFT:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(x,y) &= \delta(x-1,y) + \delta(x+1,y) + \delta(x,y-1) + \delta(x,y+1) - 4\delta(x,y) \\
\text{DFT}(\nabla^2 f(x,y)) &= e^{-j2\pi(\frac{u}{6})} + e^{j2\pi(\frac{u}{6})} + e^{-j2\pi(\frac{v}{6})} + e^{j2\pi(\frac{u}{6})} - 4 \\
&= 2\cos(\frac{\pi u}{3}) + 2\cos(\frac{\pi v}{3}) - 4
\end{aligned}$$

2. *(2 puntos)* Se tiene la siguiente matriz $A$ de $5 \times 5$:

$$\begin{bmatrix} \underline{0} & 0 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 0 & 0 \\ 255 & 255 & 255 & 255 & 255 \\ 0 & 0 & 255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y el kernel $h$ de $3 \times 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \underline{0} & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a. Calcular $A * h$.
**Solución:**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 255 & 0 & -255 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 765 & 0 & -765 & 0 & 0 \\ 255 & 255 & 765 & 0 & -765 & -255 & -255 \\ 510 & 510 & 510 & 0 & -510 & -510 & -510 \\ 255 & 255 & 765 & 0 & -765 & -255 & -255 \\ 0 & 0 & 765 & 0 & -765 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 0 & -255 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. ¿Qué función realiza el filtro?
**Solución:** Detecta bordes en la dirección vertical.

c. ¿Qué procedimiento seguiría si también se desea detectar líneas en la dimensión $x$.
**Solución:** Utilizaría el kernel de sobel en la dimensión $x$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

d. ¿Cuántas muestras en frecuencia (zero-padding en espacio) se requieren para realizar la operación $A(u,v) \cdot H(u,v)$?
**Solución:** Se necesitan $M + N - 1$ muestras donde $M = 5$, $N = 3$.

3. (*1 punto*) Demostrar la propiedad de traslación:

$$f(x - x_0, y - y_0) \leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(\frac{wx_0}{M} + \frac{vy_0}{N})}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned}
\mathrm{DFT}(f(x - x_0, y - y_0)) &= \sum_{<M>}\sum_{<N>} f(x - x_0, y - y_0)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \\
\hat{x} &= x - x_0 \\
&= \sum_{<M>}\sum_{<N>} f(\hat{x}, \hat{y})e^{-j2\pi(\frac{u(x+x_0)}{M} + \frac{v(y+y_0)}{N})} \\
&= \sum_{<M>}\sum_{<N>} f(\hat{x}, \hat{y})e^{-j2\pi(\frac{u\hat{x}}{M} + \frac{v\hat{y}}{N})}e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N})} \\
&= F(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N})}
\end{aligned}$$