Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales: Análisis de Sistemas LTI

MSc. Renán Rojas G.

Pontificia Universidad Católica del Perú

Propiedades de la convolución

a. Conmutativa:

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n];$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k].$$

b. Identidad y Desplazamiento

$$x[n] * \delta[n] = x[n];$$

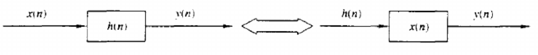
$$x[n] * \delta[n-k] = x[n-k].$$

c. Asociativa

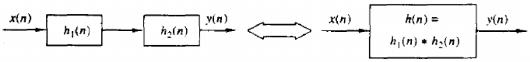
$$\left[x[n] * h_1[n]\right] * h_2[n] = x[n] * \left[h_1[n] * h_2[n]\right].$$

d. Distributiva

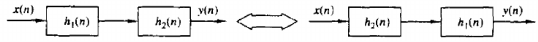
$$x[n] * \left[h_1[n] + h_2[n]\right] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n].$$



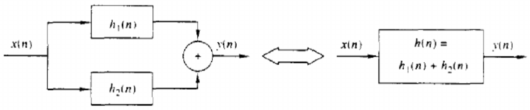
(a) conmutativa



(b) asociativa



(c) asociativa y conmutativa



(d) distributiva

Figura : Propiedades de la convolución.

Sistemas LTI causales

- Un **Sistema LTI causal** genera una respuesta $y[n]$ que solo depende de muestras de la entrada para $n \leq 0$.
- Esto implica una condición directa en la respuesta al impulso del sistema: $h[n] = 0, \quad n < 0$

$$\therefore y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]x[n-k], \quad \forall n.$$

- Es conveniente identificar secuencias de la siguiente forma:
  I. **Secuencia causal:** $y[n] = 0, \quad n < 0$
  II. **Secuencia no causal:** $y[n] \neq 0, \quad n < 0 \wedge n \geq 0$

  Ello implica que de tratarse de secuencias que representan la respuesta al impulso de un sistema, el sistema es causal o no causal, respectivamente.

Sistemas LTI causales

- Si $x[n]$ es causal:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k].$$

- La respuesta de un **sistema causal** a una **entrada causal** es una secuencia causal.

Sistemas LTI causales

- Estabilidad de Sistemas LTI (**BIBO** estable):
  Es **BIBO** estable si para $|x[n]| \leq M_x < \infty, \quad \forall n$, se obtiene $|y[n]| \leq M_y < \infty$.

- Analizando la respuesta del sistema:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \cdot |x[n-k]|.$$

- Usando $|x[n]| \leq M_x$:

$$|y[n]| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

- Por lo tanto, la condición suficiente y necesaria (**sí y solo sí**) para que la salida esté acotada es

$$S_n \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty, \quad \text{(Respuesta al impulso absolutamente sumable).}$$

Sistemas FIR e IIR

- **De duración finita (FIR):** (Finite Impulse Response)
- **De duración infinita (IIR):** (Infinite Impulse Response)

1. **FIR**: asumiendo un sistema causal:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k], \quad \text{(Salida en función a las últimas } M \text{ muestras.)}$$

2. **IIR**: asumiendo un sistema causal:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k], \quad \text{(Salida en función a todas las muestras ingresadas.)}$$

Sistemas Descritos como Ecuaciones de Diferencias

- FIR implementable en funciones finitas. Entonces, es posible calcular directamente $y[n]$ a partir de convolución.
- IIR requiere operaciones infinitas! No es implementable directamente como convolución pero sí como **ecuacion diferencial**.
- Ej: Media acumulada

$$y[n] = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x[k], \quad n \geq 0;$$

$$(n+1)y[n] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k] + x[n], \quad n \geq 0;$$

$$\therefore y[n] = \frac{n}{n+1} y[n-1] + \frac{1}{n+1} x[n], \quad n \geq 0;$$

- Esto permite hacer el cálculo **recursivamente** y con elementos finitos.

Sistemas Descritos como Ecuaciones de Diferencias

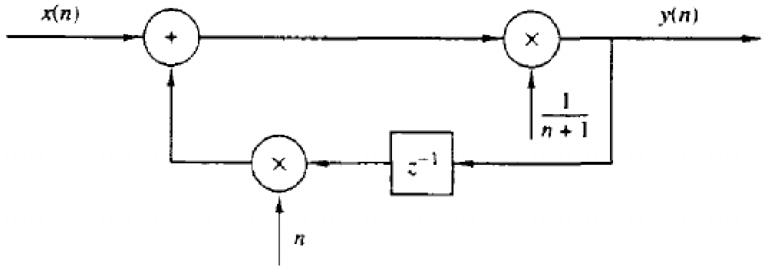


Figura : Diagrama recursivo de media acumulada.

Sistemas Descritos como Ecuaciones de Diferencias

- **Sistemas Recursivos Causales:** Sistemas cuya operación es aplicada tanto a muestras anteriores y actual de la entrada como a muestras anteriores de la salida.

$$y[n] = F\big[y[n-1], ..., y[n-N], x[n], x[n-1], ..., x[n-M]\big].$$

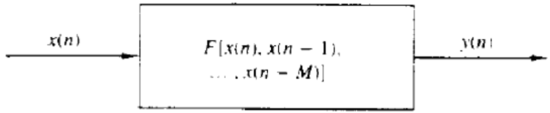
- **Sistemas No Recursivos Causales:** Sistemas cuya operación es aplicada unicamente a muestras anteriores y actual de la entrada.

$$y[n] = F\big[x[n], x[n-1], ..., x[n-M]\big].$$

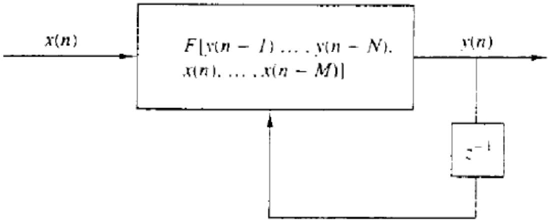
- Ej: Un sistema FIR Causal puede ser calculado de manera no recursiva a partir de una implementación directa de convolución.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k]$$

Sistemas Descritos como Ecuaciones de Diferencias



(a) No recursivo



(b) Recursivo

Figura : Formas básicas de sistemas causales y realizables

Sistemas Descritos como Ecuaciones de Diferencias

- **Forma General de Sistemas Recursivos Causales**:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

ó

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k], \quad a_0 = 1.$$

- Suma ponderada de valores de entrada pasados y actuales, y suma ponderada de valores de salida pasados.

- **Caso particular: Sistemas LTI basados en Ec. Diferenciales de Coeficientes Constantes**

  Ejemplo elemental:

$$y[n] = a \cdot y[n-1] + x[n];$$

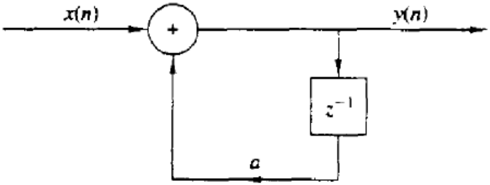


Figura : LTI basado en Ec. diferencial con coeficiente constante.

Sistemas Descritos como Ecuaciones de Diferencias

- Operando:

$$y[n] = a^{n+1}y[-1] + \sum_{k=0}^{n} a^k x[n-k] \quad n \geq 0.$$

- Respuesta para el sistema causal en reposo (condiciones iniciales cero, **zero state**): $y[n] = 0 \quad n < 0.$

$$\begin{aligned} y_{zs}[n] &= \sum_{k=0}^{n} a^k x[n-k], \quad n \geq 0, \\ &= x[n] * (a^n u[n]). \end{aligned}$$

- Respuesta para la entrada cero (**zero input**): $x[n] = 0, \quad \forall n.$

$$y_{zi}[n] = a^{n+1}y[-1].$$

- Finalmente: $y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n].$

- **Condiciones de linealidad para la forma General:**
  1. La respuesta total de un sistema LTI basado en Ec. diferenciales de coeficientes constantes es igual a la suma de la respuesta a la entrada nula y la respuesta para el sistema en reposo

     $$y[n] = y_{\mathsf{zi}}[n] + y_{\mathsf{zs}}[n].$$

  2. La respuesta en estado cero cumple con las propiedades de aditividad y escalamiento.
  3. La respuesta a la entrada cero cumple con las propiedades de aditividad y escalamiento.
- Es facilmente demostrable que un sistema LTI basado en Ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes es **lineal e invariante en el tiempo**.
- Es facilmente demostrable que el **Ejemplo elemental** es **BIBO** estable. Sin embargo, para la forma general, la demostración requiere de un analisis de mayor complejidad.

- **Estructuras para la realización de sistemas LTI**

  Recordatorio: Ecuación de diferencias lineales con coeficientes constantes:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k], \quad a_0 = 1.$$

(Ecuación de orden N)

Implementación de Sistemas Discretos en el Tiempo

- Consideremos un sistema de primer orden:

$$y[n] = -a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1].$$

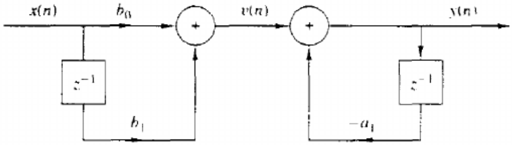
a. **Forma directa I**
Puede interpretarse como 2 sistemas **LTI**

$$v[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1], \quad \text{No recursivo;}$$
$$y[n] = -a_1 y[n-1] + v[n], \quad \text{Recursivo.}$$

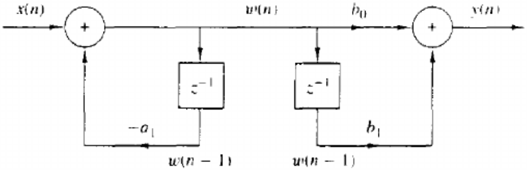
b. **Forma directa II**
Sin embargo, es posible modificar la interconexión de estos dos sistemas para obtener una realización alternativa.

$$w[n] = -a_1 w[n-1] + x[n];$$
$$y[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1].$$

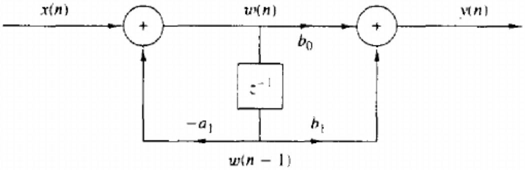
Luego, los elementos de retardo pueden fusionarse (más eficiente).



(a) Forma directa I



(b) Estructura intermedia



(c) Forma directa II

Figura : Realización de forma directa I y forma directa II.

Implementación de Sistemas Discretos en el Tiempo

- Generalizando:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k].$$

a. **Forma directa I**

$$v[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k], \quad \text{(No recursiva)}$$

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + v[n], \quad \text{(Recursiva)}$$

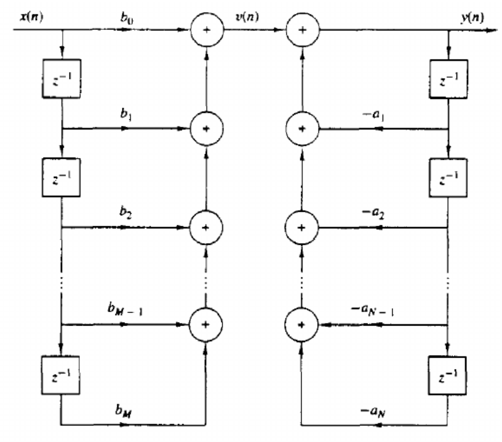
b. **Forma directa II**

$$w[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k w[n-k] + x[n];$$

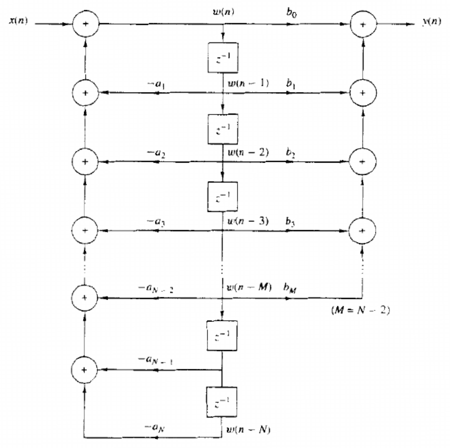
$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k w[n-k].$$

- Se requiere de $M + N + 1$ multiplicaciones y $\max\{M, N\}$ elementos de retardo.
- **Forma directa II es conocida como Forma Canónica**
  Requiere del mínimo número de elementos de retardo.

Implementación de Sistemas Discretos en el Tiempo



(a) Forma directa I



(b) Forma directa II

Figura : Caso general: Realización de forma directa I y forma directa II.

- Caso especial: Sistema **Moving Average** (MA)
  Sistema donde $a_k = 0, \quad k = 1, ..., N$

$$\therefore y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k], \quad \text{(No recursivo y \textbf{LTI}).}$$

Es un sistema **FIR** con

$$h_k[n] = \begin{cases} b_k = \frac{1}{M+1}, & 0 \le k \le M \\ 0, & \text{otros} \end{cases}$$

- Caso especial: Sistema Puramente Recursivo
  Sistema donde $M = 0$

$$\therefore y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + b_0 x[n], \quad \text{Recursivo.}$$

- **Realización de sistemas FIR recursivos y no recursivos**

  Recordatorio: Los sistemas **FIR** siempre son realizables como sistemas no-recursivos. Sin embargo, esto no descarta el hecho de que también puedan realizarse recursivamente.

  Ej: Sistema MA

$$y[n] = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x[n-k], \quad \text{(FIR, no recursivo).}$$

  Respuesta al impulso: $h[n] = \frac{1}{M+1}, \quad 0 \leq n \leq M$

Implementación de Sistemas Discretos en el Tiempo

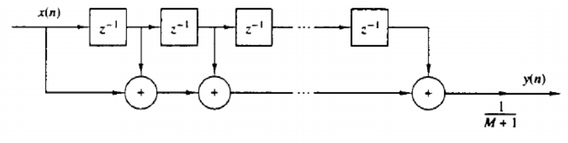
- Expresandolo de manera alternativa:

$$y[n] = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x[n-1-k] + \frac{1}{M+1}\big(x[n] - x[n-1-M]\big)$$

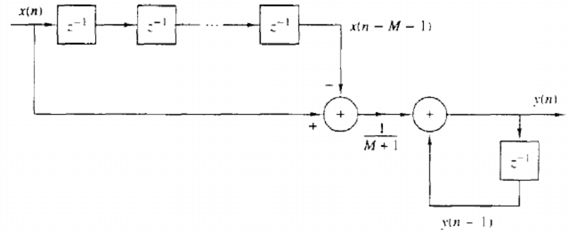
$$y[n] = y[n-1] + \frac{1}{M+1}\big(x[n] - x[n-1-M]\big), \quad \text{(FIR, recursivo)}$$

- Finalmente, **FIR** e **IIR** son características generales que diferencian los tipos de sistemas **LTI**. Por otro lado, **Recursivo** y **No recursivo** son descripciones de las estructuras para la realización del sistema.

Implementación de Sistemas Discretos en el Tiempo



(a) MA no recursivo



(b) MA recursivo

Figura : Realizaciones de MA

- A diferencia de la Convolución, el objetivo de calcular la Correlación entre dos señales es medir su **grado de semejanza**.

  Ej: **Radar**:

  - $x[n]$: versión muestreada de la señal transmitida. $y[n]$: versión muestreada de la señal recibida.
  - Si hay un un objeto cerca, $y[n]$ será una versión retardada de la señal transmitida.

    $$y[n] = \alpha x[n-D] + w[n].$$

    α: factor de atenuación, D: retardo de ida y vuelta. $w[n]$: ruido aditivo.
  - Se requiere comparar $y[n]$ y $x[n]$ para determinar si hay algún objeto y calcular su distancia a partir del retardo D.

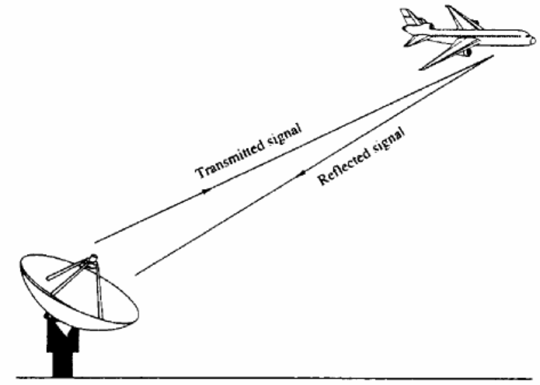


Figura : Transmisión / recepción de radar

Correlación Cruzada y Autocorrelación

a. Correlación Cruzada:
Dadas dos secuencias reales $x[n], y[n]$ de energía finita, la correlación cruzada es:

$$r_{xy}[l] \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-l], \quad l \in \mathbb{Z};$$

ó

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+l]y[n], \quad l \in \mathbb{Z}.$$

El índice xy o yx indica la dirección de desplazamiento de una secuencia respecto a la otra

$$xy :\leftarrow x \quad y \rightarrow \quad \Big| \quad yx :\leftarrow y \quad x \rightarrow .$$

- Si invertimos las señales:

$$r_{yx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n+l]x[n].$$

- Finalmente, podemos concluir que:

$$r_{xy}[l] = r_{yx}[-l].$$

- Es decir, ambas tienen la misma información pero reflejada.

- Relación con Convolución:

$$r_{xy}[l] = x[l] * y[-l].$$

La ausencia de reflexión en la correlación hace que no sea una operación conmutativa.

b. Autocorrelación:
En el caso especial que $y[n] = x[n]$, tenemos la autocorrelación de $x[n]$:

$$r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n-l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+l]x[n], \quad l \in \mathbb{Z};$$

Si $x[n]$ e $y[n]$ son secuencias causales de longitud N (cero para $n < 0 \wedge n \geq N$):

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=i}^{N-|k|-1} x[n]y[n-l];$$

$$r_{xx}[l] = \sum_{n=i}^{N-|k|-1} x[n]x[n-l].$$

$i = l,\ k = 0$ para $l \geq 0$
$i = 0,\ k = l$ para $l < 0$

c. Propiedades de Autocorrelación y Correlación Cruzada:

$$|r_{xy}[l]| \leq (r_{xx}[0] r_{yy}[0])^{\frac{1}{2}} = (E_x E_y)^{\frac{1}{2}}.$$

Para señales $x[n], y[n]$ de energía finita.
En el caso especial que $y[n] = x[n]$:

$$|r_{xx}[l]| \leq r_{xx}[0] = E_x.$$

Es decir, la secuencia de autocorrelación alcanza su valor máximo para un retardo de cero.

Adicionalmente, puesto que el cambio de escala es irrelevante al correlacionar señales (la forma no varia, solo la amplitud), se suele normalizar entre $\{-1, 1\}$.

- Autocorrelación normalizada

$$\rho_{xx}[l] = \frac{r_{xx}[l]}{r_{xx}[0]};$$

- Correlación Cruzada normalizada

$$\rho_{xy}[l] = \frac{r_{xy}[l]}{(r_{xx}[0]r_{yy}[0])^{\frac{1}{2}}}.$$

Esta representación es independiente frente a cambios de escala.

d. Finalmente, dado que $r_{xx}[l] = r_{xx}[-l]$, basta con calcular $r_{xx}[l], \quad l \geq 0$ para conocer su respuesta $\forall l$.

Referencias

(1) Proakis, J. G. & Manolakis, D. K. (2006), Digital Signal Processing (4th Edition), Prentice Hall.