IEE239 - Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales
Laboratorio 1 - Solución de la Prueba de Entrada
Primer Semestre 2018

Martes, 27 de marzo del 2018

- **Horario 08M1**
- Duración: 20 minutos.
- Mostrar claramente su procedimiento en cada pregunta. Justificar adecuadamente sus respuestas.
- Está terminantemente prohibido el uso de material adicional y calculadora.
- La evaluación es **estrictamente** personal.

1. *(1.5 puntos)* Dado el siguiente sistema en tiempo discreto, determinar si se trata de un sistema: (i) BIBO estable, (ii) causal, (iii) invariante en el tiempo.

$$T\{x[n]\} = x[n^2 - 2].$$

Solución:

i. **BIBO estable:** asumiendo una secuencia de entrada acotada:

$$|x[n]| \leq M_x < +\infty, \forall n \in \mathbb{Z},$$

se analiza si la respuesta del sistema también lo es:

$$|y[n]| = |T\{x[n]\}| = |x[n^2 - 2]|. \tag{1}$$

Realizando el cambio de variable $\hat{n} = n^2 - 2$ en (1), se obtiene que la norma de la respuesta del sistema equivale a $|x[\hat{n}]|$. Luego, ya que $\hat{n} \in \mathbb{Z}$, la premisa indica lo siguiente:[1]

$$|x[\hat{n}]| \leq M_x < +\infty.$$

Por lo tanto, la secuencia de salida será acotada para una secuencia de entrada acotada. Se trata de un sistema BIBO estable:

$$|y[n]| = |x[n^2 - 2]| \leq M_x < +\infty.$$

ii. **Causal:** Considerar el caso $n = -2$. Analizando la secuencia de salida en dicha posición:

$$y[-2] = x[(-2)^2 - 2] = x[2]$$

Por lo tanto, dado que existen muestras en la secuencia de salida que dependen de muestras futuras de la secuencia de entrada, se trata de un sistema no causal.

[1] Informalmente, el cambio de variable se puede entender como un cambio en el dominio de la secuencia. Al alterar unicamente las posiciones, los valores extremos de la función evaluada no sufren cambios.

iii. **Invariante en el tiempo:** considerar la secuencia con desfase $x_d[n]$:

$$x_d[n] \triangleq x[n-n_0], n_0 \in \mathbb{Z}.$$

De la expresión analítica, la respuesta ante la entrada $x[n]$ corresponde a $y[n] = T\{x[n]\} = x[n^2-2]$. Entonces, la salida desfasada un número de muestras n_0 corresponde a:

$$y[n-n_0] = x[(n-n_0)^2 - 2] \tag{2}$$

Nuevamente de la expresión analítica, la respuesta ante $x_d[n]$ corresponde a:

$$T\{x_d[n]\} = x_d[(n)^2 - 2] = x[n^2 - 2 - n_0]. \tag{3}$$

Dado que (2) y (3) no son iguales para todo n_0, el sistema es variante en el tiempo.

2. *(2 puntos)* Determinar la respuesta del sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ ante la entrada $x[n]$:

$$h[n] = 4^n u[-n], \qquad\qquad x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

Solución:

La secuencia $y[n]$ es expresable a partir de la sumatoria de convolución:

$$\begin{aligned} y[n] = h[n] * x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 4^k u[-k]\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k} u[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{0} 4^k \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k} u[n-k] \end{aligned}$$

Analizando el término $u[n-k]$, es posible separar la sumatoria en 2 casos:

- **Caso i:** $n > 0$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{0} 4^k \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

Realizando un cambio de variable: $\hat{k} = -k$ y usando la serie geométrica de duración infinita:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{\hat{k}=0}^{+\infty} 4^{-\hat{k}} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+\hat{k}} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \sum_{\hat{k}=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^{\hat{k}} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{1+\frac{1}{8}} \\ &= \frac{8}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

- **Caso ii:** $n \leq 0$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} 4^k \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

Realizando un cambio de variable: $\hat{k} = -(k-n)$ y usando la serie geométrica de duración infinita:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} 4^{-\hat{k}+n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-(-\hat{k}+n)} \\ &= 4^n \sum_{k=-\infty}^{n} \left(-\frac{1}{8}\right)^{\hat{k}} \\ &= 4^n \frac{1}{1+\frac{1}{8}} \\ &= \frac{8}{9} 4^n. \end{aligned}$$

Finalmente:

$$y[n] = \begin{cases} \frac{8}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & , n > 0 \\ \frac{8}{9} 4^n & , n \leq 0 \end{cases}$$

3. *(1.5 puntos)* Determinar si alguna de las siguientes expresiones es periódica. En caso sea así, determinar su **periodo fundamental**. Caso contrario, justificar por qué no lo es.

$$x_c(t) = e^{j\left(\frac{t}{5}-1\right)}, \qquad x[n] = \cos\left(\frac{n}{8} - \pi\right).$$

Solución:

i. Dado que $x_c(t)$ es una exponencial compleja en tiempo contínuo de amplitud constante, se sabe que cumple con la propiedad de periodicidad. Su periodo fundamental T_p se obtiene a partir de su frecuencia angular Ω_0:

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \frac{2\pi}{T_p} = \frac{1}{5} \text{ rad/s}, \\ T_p &= \frac{1}{10\pi} \text{ s}. \end{aligned}$$

ii. Dado que $x[n]$ es una sinusoidal en tiempo discreto de amplitud constante, se tratará de una secuencia periódica si su frecuencia f_0 pertenece a los números racionales. Analizando su frecuencia angular ω_0:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 2\pi f_0 = \frac{1}{8} \text{ rad/muestra}, \\ f_0 &= \frac{1}{16\pi} \text{ ciclos/muestra}. \end{aligned}$$

Dado que $f_0 \notin \mathbb{Q}$, no existe un periodo fundamental N que satisfaga la relación $x[n+N] = x[n]$. Por lo tanto, se trata de una secuencia no periódica.