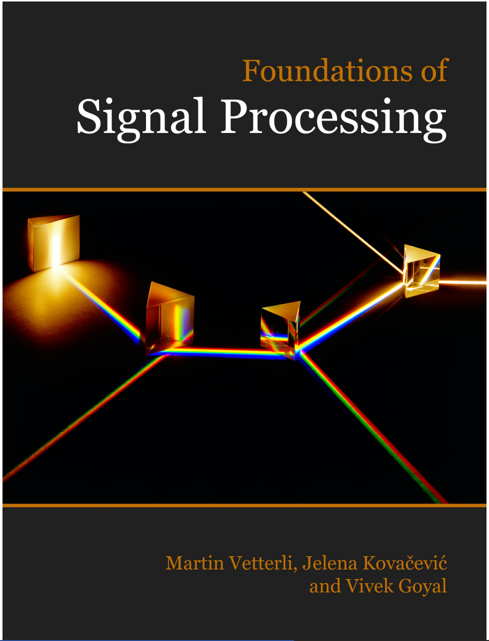
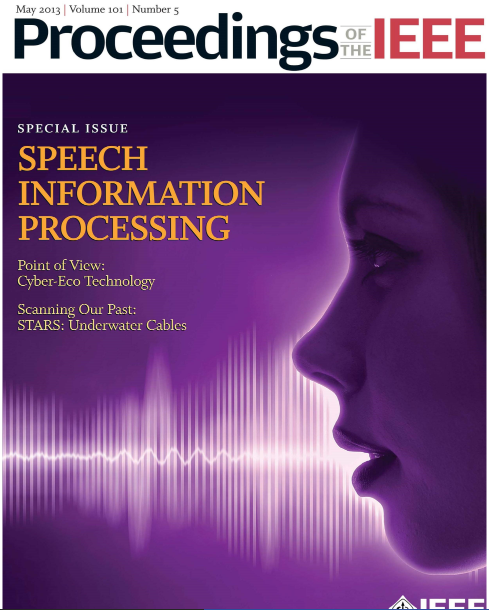
Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales: Señales y Sistemas Discretos

MSc. Renán Rojas G.

Pontificia Universidad Católica del Perú


Foundations of
Signal Processing
Martin Vetterli, Jelena Kovačević
and Vivek Goyal


May 2013 | Volume 101 | Number 5
Proceedings OF THE IEEE
SPECIAL ISSUE
SPEECH
INFORMATION
PROCESSING
Point of View:
Cyber-Eco Technology
Scanning Our Past:
STARS: Underwater Cables

Definiciones Básicas

- **Señal:** Magnitud física que varia con el tiempo, espacio u otras variables independientes.

Ejemplo

$$s_1(t) = 20t^2, \quad s_2(x, y) = 3x + 2xy + 10y^2.$$

t: tiempo. x, y: coordenadas de un plano.

- Existen señales cuya relación con variables es desconocida o muy compleja.

Ejemplo: Aproximación a una señal de voz

$$\sum_{i=1}^{N} A_i(t) \sin(2\pi F_i + \Theta_i(t)).$$

- Existen señales naturales y artificiales que contienen **información de interés**. Ej: Electrocardiograma, imágenes de ultrasonido, señales espaciales, etc.

Definiciones Básicas

- **Sistema:** Medio físico con el cual se generan señales.
  La generación de señales está asociada a un **sistema** y su respuesta a un determinado **estímulo** (señal inicial).
- **Estímulo + sistema = fuente de la señal**

Ejemplos de sistemas

Ej 1:	La voz se genera al pasar aire por las cuerdas vocales.
Ej 2:	Las imágenes se obtienen al exponer una película fotográfica a una escena.

- De manera general (artificial y natural), un **sistema** es un dispositivo que realiza operaciones sobre una señal inicial.

Definiciones Básicas

- **Procesamiento de Señales:** Obtener una señal resultante a partir de un determinado sistema sobre una señal inicial.

$$\textbf{Señal resultante} = \textbf{Operación(señal inicial)}$$

- **Procesamiento de Señales Digitales:** Efectuar operaciones sobre una señal digital, basándose en un sistema representado por operaciones matemáticas (**sistema**: software + hardware).

Figura: Procesamiento de señales.

Procesamiento Digital de Señales: Elementos Básicos

- **Convertidor Analógico Digital (A/D):** Obtiene una señal discreta tanto en dominio como en rango (es decir, una **señal digital**) a partir de su versión continua.
- **Procesador de Señales Digitales:** Combinación Software + Hardware que efectua las operaciones sobre una **señal digital inicial** y genera una **señal digital resultante**.
- **Convertidor Digital Analógico (D/A):** En casos en los que la salida debe ser analógica, se utiliza dicho elemento para pasar la **señal digital resultante** a su representación analógica.
  Ejemplo: Sistemas de comunicación de voz.

Ventajas del tratamiento digital sobre el analógico

1. **Reconfigurabilidad del sistema:**
   - *Digital*: Reprogramación de software (**simple**).
   - *Analógico*: Rediseño total del sistema.
2. **Control sobre el nivel de precisión:**
   - *Digital*: cambio de párametros en el programa de software (**simple**).
   - *Analógico*: reemplazo de componentes.
3. **Almacenamiento de información:**
   - *Digital*: Capacidad de almacenamiento de gran cantidad de datos, robustez ante ruido.
   - *Analógico*: Información infinita! imposible almacenar todos los datos, sensibilidad ante ruido.

Procesamiento Digital de Señales: Elementos Básicos

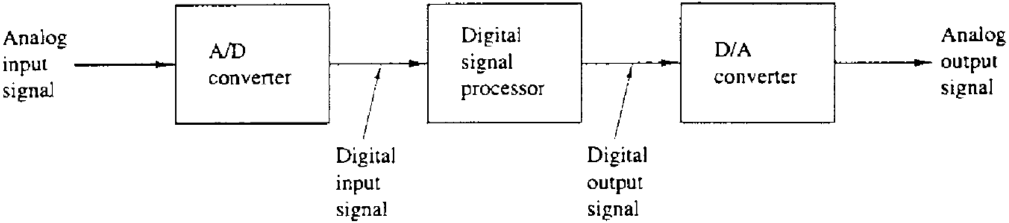


Figura: Bloques del procesamiento de señales digitales.

Clasificación de las Señales

1. **Señal contínua en el tiempo** Definida en todo instante de tiempo.

$$x(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

   a. rango de amplitud continuo ($x(t)$ puede tomar infinitos valores).
   b. rango de amplitud discreto ($x(t)$ puede tomar un conjunto finito de valores).

2. **Señal discreta en el tiempo** Definida en instantes específicos de tiempo.

$$x[n], \quad n \in A, \quad A \subset \mathbb{Z}.$$

   a. rango de amplitud continuo ($x[n]$ puede tomar infinitos valores).
   b. rango de amplitud discreto ($x[n]$ puede tomar un conjunto finito de valores).

Señal discreta en el tiempo y de rango discreto: **Señal digital**.

Clasificación de las Señales

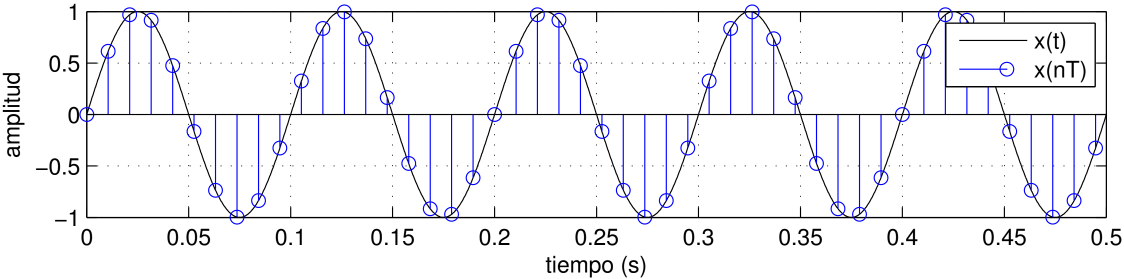


Figura: Señal en tiempo contínuo $x_c(t)$ vs. señal en tiempo discreto $x[n] = x_c(n \cdot T)$. Ambas señales de rango continuo.

3. **Señal determinística:** representada por una expresión matemática explícita. Es posible conocer sus valores pasados, presentes y futuros.
   Ejemplo: Posición de un vehículo dada su posición inicial y velocidad (Ecuación lineal).
4. **Señal aleatoria:** con evolución en el tiempo no predecible (**Incertidumbre**).
   Ejemplo: Número de veces que una moneda muestra sello en diez intentos (Distribución binomial).

- Analisis de señales periódicas y sus propiedades respecto al dominio del tiempo.
- Dos casos esenciales: señales **Sinusoidales** y señales **Exponenciales Complejas Armónicamente Relacionadas**.

1. **Señales sinusoidales contínuas en el tiempo:**

$$x(t) = A\cos(\Omega t + \Theta), \quad \Omega = 2\pi F, \quad F : \text{frecuencia (Hz)}.$$

Propiedades

a. Periodicidad: $x(t + \frac{1}{F}) = x(t)$.

b. Múltiples señales sinusoidales con diferentes frecuencias son diferentes entre sí.

Concepto de Frecuencia

- Estas propiedades también son aplicables a **señales exponenciales complejas**

Identidad de Euler

$$Ae^{j(\Omega t+\theta)} = A\cos(\Omega t+\Theta) + jA\sin(\Omega t+\Theta),$$

$$A\cos(\Omega t+\Theta) = \frac{A}{2}e^{j(\Omega t+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\Omega t+\theta)}, \quad A\sin(\Omega t+\Theta) = \frac{A}{2j}e^{j(\Omega t+\theta)} - \frac{A}{2j}e^{-j(\Omega t+\theta)}$$

- Por conveniencia matemática, la frecuencia de una señal puede ser positiva o negativa.

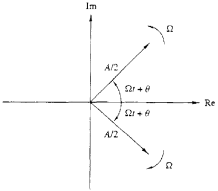


Figura: Frecuencias positivas y negativas.

Concepto de Frecuencia

2 Señales sinusoidales discretas en el tiempo:

$$x[n] = A\cos(\omega n + \Theta), \quad \omega = 2\pi f, \quad f : \text{frecuencia (ciclos/muestra)}.$$

Propiedades

a. Una señal sinusoidal es periódica solo si su frecuencia es racional.

$$x[n+N] = x[n], \quad N \in \mathbb{Z}^+ : \text{Periodo fundamental}.$$

Periodo fundamental: valor mínimo para que la igualdad se cumpla.

b. Señales sinusoidales con frecuencias separadas un múltiplo de 2π son idénticas.
Cualquier secuencia discreta con $|\omega| > \pi$ es idéntica a una sinusoidal con un determinado $|\omega| \leq \pi$.

$$-\pi \leq \omega \leq \pi : \quad \text{Frecuencias únicas } (\textbf{Rango Fundamental}).$$

$$|\omega| > \pi : \quad \text{Réplicas de las frecuencias únicas } (\textbf{Alias}).$$

Propiedades (cont.)

c. La tasa máxima de oscilación de una señal sinusoidal se alcanza cuando $|\omega| = \pi$

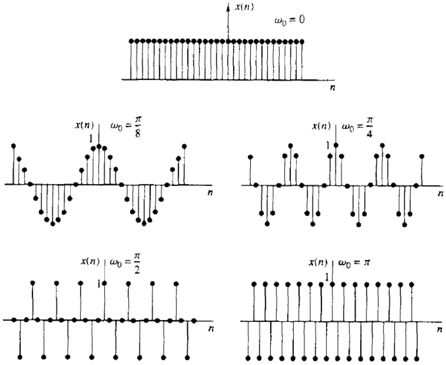


Figura: Tasas de oscilación de una señal sinusoidal discreta en función de su frecuencia.

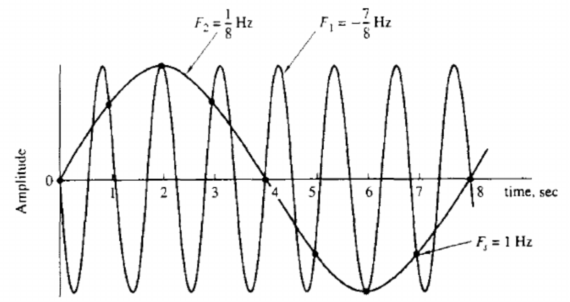


Figura: Aliasing: Dos sinusoidales continuas de diferente frecuencia dan la misma señal al ser discretizadas.

3 Señales exponenciales complejas armónicamente relacionadas contínuas en el tiempo:

$$s_k(t) = e^{jk\Omega_0 t}, \quad \Omega_0 = 2\pi F_0, \quad F_0 : \text{frecuencia fundamental (Hz)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Propiedades

a. Cada $s_k(t)$ está caracterizada por una frecuencia kF_0 (conjunto de señales s_k **armónicamente relacionado** a la frecuencia fundamental F_0).

b. Dado que cada señal s_k tiene periodo $\frac{1}{kF_0}$, todas las señales del conjunto son periódicas para T=$\frac{1}{F_0}$.

c. $s_{k_1}(t) \neq s_{k_2}(t)$ si $k_1 \neq k_2$.

4. **Señales exponenciales complejas armónicamente relacionadas discretas en el tiempo:**

$$s_k[n] = e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = 2\pi f_0, \quad f_0 : \text{Frecuencia fundamental (ciclos/muestra)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Propiedades

a. Asumiendo un periodo entero de N muestras, $f_0 = \frac{1}{N}$:

$$s_k[n] = e^{j\frac{2\pi k}{N}n}.$$

Por lo tanto, solo hay N señales exponenciales complejas armónicamente relacionadas. El resto son réplicas (**Alias**).

$$s_{k+N}[n] = e^{j\frac{2\pi(k+N)}{N}n} = e^{j2\pi n} s_k[n] = s_k[n].$$

Conversión analógica/digital

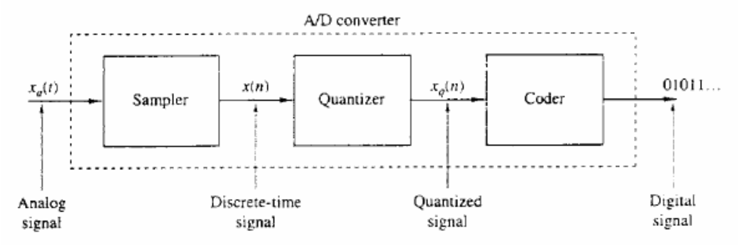


Figura: Convertidor A/D.

1. **Muestreo**: obtener **muestras** de la señal continua en el tiempo para obtener una señal discreta en el tiempo. Típicamente, las muestras son obtenidas en intervalos de muestreo constante (**periodo de muestreo**).

$$x[n] \triangleq x(n \cdot T), \quad T\text{: } \textbf{periodo de muestreo}$$

Conversión analógica/digital

2. **Cuantificación**: Dada $x[n]$ discreta en el tiempo, continua en rango:

$$(-\infty < x[n] < +\infty),$$

se obtiene una representación discreta en rango $x_q[n]$.
Ej: **(Sistema computacional de 8 bits)**
   - Posibles valores: $2^8 = 256$
   - Valores seleccionados: $\{0, 255\}$
   - $x[n_0] = 167{,}45 \longrightarrow x_q[n_0] = 167$
   - $x[n_1] = 5{,}73 \longrightarrow x_q[n_1] = 6$
   - etc.

3. **Codificación:** Se representa $x_q[n]$ mediante una secuencia binaria de bits a partir de cierto código numérico.

Conversión digital/analógica

- Dada la señal $x_q[n]$, el proceso de conversión a señal analógica consiste en la interpolación de los valores de las muestras.
  a. Interpolación mediante escalones (*zero-order hold*)
  b. Interpolación lineal
  c. Interpolación cuadrática, etc.

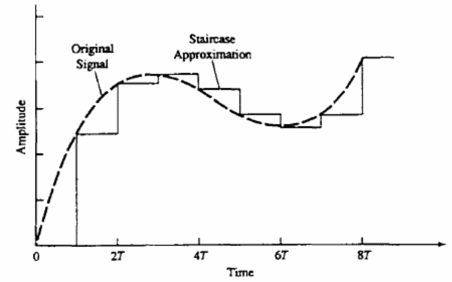


Figura: Conversión D/A a partir de interpolador *zero-order hold*

Muestreo

- Tipo de muestreo de interés: **muestreo periódico**:

$$x[n] = x(n \cdot T); \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$F_s = \frac{1}{T} : \text{Frecuencia de muestreo};$$

- Para señales periódicas, F_s da una relación directa entre Ω de la versión continua $x(t)$ y ω de la versión discreta $x[n]$:

$$\omega = \frac{\Omega}{F_s}; \quad \therefore f = \frac{F}{F_s}$$

- Dado que $-\pi \leq \omega \leq \pi$ es el **rango fundamental**, F debe cumplir cierta condición para no ser un **Alias**:

$$\frac{-F_s}{2} \leq F \leq \frac{F_s}{2}$$

Muestreo

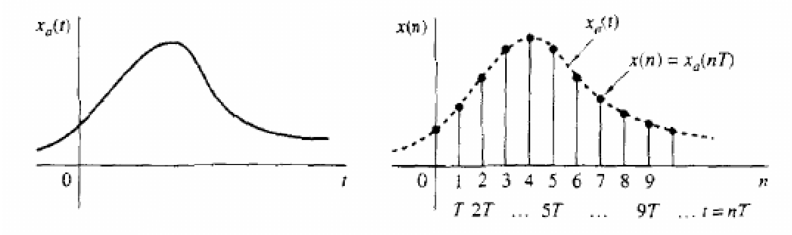


Figura: Muestreo periódico.

Muestreo

- En caso la condición no se cumpla, se dice que la señal discreta resultante es afectada por el efecto **Aliasing**.
- Entonces, dada una señal compuesta por una o más señales periódicas y un muestreo a frecuencia F_s, es posible obtener su versión discreta libre de ambiguedad si su frecuencia más alta F_{max} cumple con la siguiente condición:

$$F_{\text{max}} \leq \frac{F_s}{2}.$$

Teorema de muestreo (Teorema de Nyquist)

- Dada una señal analógica cuyo contenido en frecuencia no exceda un valor máximo F_{max}, es posible obtener una señal digital sin ambiguedades debido a la inclusión de **Alias** (efecto **Aliasing**) al satisfacer la siguiente condición:

$$F_s > F_N \triangleq 2 \cdot F_{\text{max}}; \quad (F_N : \text{frecuencia de Nyquist})$$

- Formalmente, el **Teorema de muestreo** establece:
  Dada una señal analógica $x(t)$ con $F_{max} = B$ y su versión digital $x[n]$ muestreada con $F_s > 2F_{\text{max}}$, es posible recuperar de forma exacta $x(t)$ usando la siguiente función de interpolación:

$$g(t) = \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt};$$

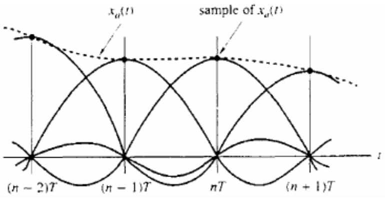


Figura: Interpolación ideal

- Luego,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]g(t - n \cdot T);$$

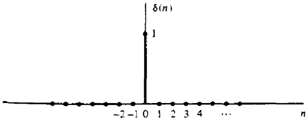
Interpolación ideal. Debido a su compejidad, usualmente se usan métodos más prácticos.

- Señales básicas que constituyen un papel importante en el estudio sobre sistemas y señales discretas.
- **Impulso Unitario**

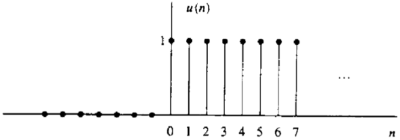
$$\delta[n] \triangleq \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , \text{otros casos} \end{cases}$$

- **Escalón Unitario**

$$u[n] \triangleq \begin{cases} 1 & , n \geq 0 \\ 0 & , \text{otros casos} \end{cases}$$



(a) Impulso unitario



(b) Escalón unitario

- **Rampa Unitaria**

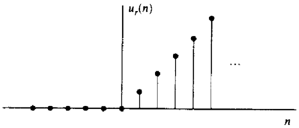
$$u_r[n] \triangleq \begin{cases} n & , n \geq 0 \\ 0 & , \text{otros casos} \end{cases}$$

- **Exponencial**

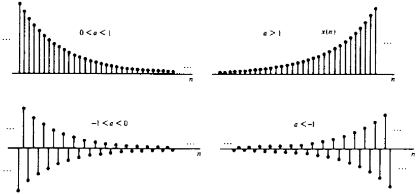
$$x[n] = a^n$$

- Si $a \in \mathbb{C}$: $a = re^{j\theta}$

$$x[n] = r^n e^{j\theta n} = r^n[\cos(\theta n) + j\sin(\theta n)]$$



(a) Rampa unitaria



(b) Exponencial

Clasificación de Señales

1. **Señales de energía:** dada la energía E de una señal $x[n]$:

$$E \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2,$$

Si E es finita $(0 < E < +\infty)$, entonces $x[n]$ es una **señal de energía**.

2. **Señales de potencia:** dada la potencia P de una señal $x[n]$:

$$P \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E_N; \quad E_N = \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2,$$

Si P es finita y distinta de cero, entonces $x[n]$ es una **señal de potencia**.

Clasificación de Señales

3. **Señal periódica:** $x[n+N] = x[n]; \quad \forall n.$
   N es el menor valor entero que satisfaga la igualdad.
   Si $\nexists N$, la señal se define como **no periódica**.

4. **Señal simétrica:** función **par** $(x[n] = x[-n])$

5. **Señal asimétrica:** función **impar** $(-x[n] = x[-n])$

Sistemas discretos en el tiempo

- Formas de expresar un sistema discreto:

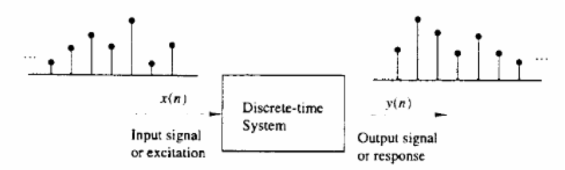
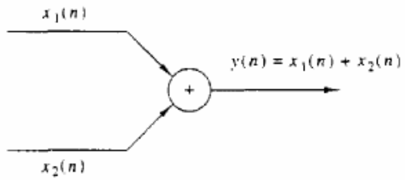


Figura: Diagrama de procesamiento digital de señales.

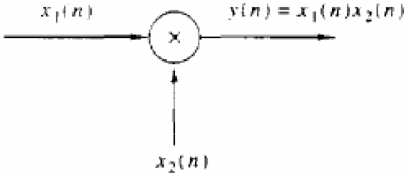
$$x[n] \xrightarrow{T} y[n]$$

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

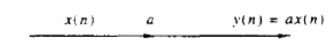
- **Diagrama de bloques: bloques básicos**
  1. Sumador



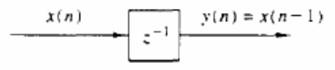
  2. Multiplicador



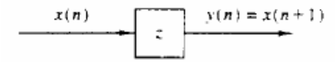
3. Multiplicador por una constante



4. Retardo unitario



5. Adelanto unitario



Clasificación de sistemas discretos

a. **Estáticos:** (sin memoria) no depende de muestras de entrada pasadas ni futuras.
Ej:

$$y[n] = n \cdot x[n] + b \cdot x^3[n].$$

b. **Dinámicos:** (con memoria) depende de muestras de entrada pasadas y futuras.
Ej:

$$y[n] = x[n] + 3 \cdot x[n-1]; \quad \text{(memoria finita)}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} x[n-k]; \quad \text{(memoria infinita)}$$

c. **Invariante en el tiempo:** el efecto de un desfase en la entrada es únicamente un desfase en la salida de la misma magnitud.

$$x[n-k] \xrightarrow{T} y[n-k]; \quad \forall k.$$

Si existe al menos un valor k que no satisface esta condición, la señal se denomina **variante en el tiempo**.

- d. **Lineal:** satisface el **principio de superposición**:

$$T\{a_1 \cdot x_1[n] + a_2 \cdot x_2[n]\} = a_1 \cdot T\{x_1[n]\} + a_2 \cdot T\{x_2[n]\}.$$

Donde:

$$T\{a_1 \cdot x_1[n]\} = a_1 \cdot T\{x_1[n]\}; \quad \text{(Propiedad de escalamiento)};$$

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\}; \quad \text{(Propiedad de aditividad)}.$$

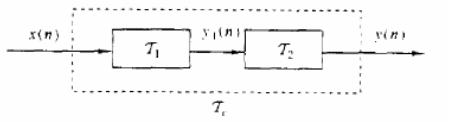
e. **Causal:** $y[n]$ solo depende de entradas actuales y pasadas:

$$\{x[n], x[n-1], x[n-2], ...\}.$$

Si no se cumple dicha condición, el sistema se denomina **no causal**.

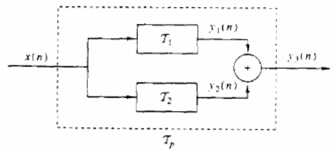
f. **BIBO estable:** (Bounded Input, Bounded Output) Si para una entrada acotada $(|x[n]| \leq M_x < +\infty)$ se obtiene una salida acotada $(|y[n]| \leq M_y < +\infty), \quad \forall n.$

- **Interconexión de sistemas discretos en el tiempo:**
  3. Cascada (serie)



$$y_1[n] = T_1\{x[n]\}; \quad y[n] = T_2\{y_1[n]\} = T_2\{T_1\{x[n]\}\};$$

  4. Paralelo



$$y_1[n] = T_1\{x[n]\}; \quad y_2[n] = T_2\{x[n]\}; \quad y_3[n] = T_1\{x[n]\} + T_2\{x[n]\};$$

- **Sistemas LTI:** linear time invariant.
- **Análisis por descomposición de la señal de entrada en señales elementales**

$$x[n] = c_0 \cdot x_k(0) + c_1 \cdot x_k(1) + c_2 \cdot x_k(2) + \dots$$

Por linealidad, Las respuestas al sistema de cada **señal elemental** se suman para obtener la **señal resultante**.
El tipo de señal elemental a usar es elegido de manera que sus respuestas al sistema sean fáciles de calcular.

Sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI o SLIT)

- **Procedimiento:**
  1. Descomponer $x[n]$ en señales elementales

$$x[n] = \sum_k c_k x_k[n].$$

  2. Obtener una expresión para la señal resultante

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\left\{\sum_k c_k x_k[n]\right\},$$

  3. Aprovechar la linealidad del sistema

$$y[n] = \sum_k c_k T\{x_k[n]\} = \sum_k c_k y_k[n].$$

- **Señales elementales clásicas**

  1. **Suma de secuencias de impulsos unitarios:**

     $$x_k[n] = \delta[n-k].$$

     Aplicable a señales en general.

  2. **Suma de exponenciales armónicamente relacionadas:**

     $$x_k[n] = e^{j\omega_k n}; \quad k = \{0, 1, ..., N-1\}; \quad \omega_k = (\frac{2\pi}{N}k).$$

     Conveniente para señales de entrada con periodo N.

Respuestas de sistemas LTI a entradas arbitrarias: Convolución

- **Definición:** La descomposición de $x[n]$ en una suma ponderada de impulsos permite conocer su respuesta ante sistemas LTI en reposo.
  Sistema en reposo: sistema que no ha sido excitado anteriormente por alguna entrada ($y[n]$ depende unicamente de $x[n]$ actual).
- **Respuesta del sistema al impulso unitario:** $h[n] \triangleq T\{\delta[n]\}$.
  Adicionalmente, la respuesta del sistema al impulso unitario para $n = k$ se define como $h[n, k]$:

$$h[n, k] = T\{\delta[n - k]\};$$

- Entonces, $x[n]$ puede ser expresada como una suma de impulsos unitarios:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n - k],$$

Respuestas de sistemas LTI a entradas arbitrarias: Convolución

- A partir de ello, $y[n]$ puede ser facilmente calculada. A partir de la propiedad de **linealidad**:

$$y[n] = T\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\},$$

$$\therefore \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n,k].$$

- Luego, a partir de la propiedad de **invarianza en el tiempo**:

$$h[n] = T\{\delta[n]\}; \quad \therefore \quad h[n,k] = T\{\delta[n-k]\} = h[n-k].$$

- Finalmente:

$$y[n] = x[n] * h[n] \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]; \quad \textbf{Suma de Convolución}$$

Lo que indica que el sistema **LTI** está completamente caracterizado por su **respuesta al impulso unitario** $h[n]$.

Referencias

(1) Proakis, J. G. & Manolakis, D. K. (2006), Digital Signal Processing (4th Edition), Prentice Hall.