IEE239 - Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales
Laboratorio 02 - Ejercicios Propuestos

1. Considerar la señal continua:

$$x(t) = 7t^2 \cos(25\pi t)$$

   a. Considerando que la señal es registrada durante el intervalo [0;2] (segundos), generar las siguientes señales discretas:

      - $x_1[n]$: muestrear $x(t)$ con 2000 muestras
      - $x_2[n]$: muestrear $x(t)$ con $f_s = 2$ KHz
      - $x_3[n]$: muestrear $x(t)$ con un intervalo de 100 ms entre cada muestra

      Graficar las señales obtenidas en espacio de muestras y mostrar el espectro de magnitud correspondiente a cada una. ¿Se logro recuperar la información de frecuencia en los tres casos? Explique.

      Solución:

      Periodos de muestreo para cada señal:

      - $x_1[n]$: $T_s = \frac{tiempo}{\#muestras} = \frac{2}{2000}$
      - $x_2[n]$: $T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{2000}$
      - $x_3[n]$: $T_s = 0.1$

```
Tf=2;
% --- Vectores de tiempo discreto  --- %
t1=0:Tf/2000:Tf-Tf/2000;
t2=0:1/2000:Tf-1/2000;
t3=0:0.1:Tf-0.1;
% --- Generacion en espacio de muestras--- %
x1=7*sqrt(t1).*cos(25*pi*t1);
x2=7*sqrt(t2).*cos(25*pi*t2);
x3=7*sqrt(t3).*cos(25*pi*t3);

% --- Calculo del espectro de magnitud --- %
Y1=abs(fftshift(fft(x1))); % Espectro de magnitud en el rango ...
    {-2\pi Fs, +2\pi Fs}
Fs=1000;
w1= 2* pi* ( 0: length( Y1)- 1)/ length( Y1); % Dominio de ...
    frecuencia: ubicaciones analizadas del espectro de acuerdo ...
    a rutina fft()
w1= Fs/( 2* pi)* unwrap( fftshift( w1)- 2* pi); % Re-expresando ...
    dominio de frecuencia para que sea coherente con X_v

Y2=abs(fftshift(fft(x2)));
Fs=2000;
w2= 2* pi* ( 0: length( Y2)- 1)/ length( Y2);
```

```
        w2= Fs/( 2* pi)* unwrap( fftshift( w2)- 2* pi);

        Y3=abs(fftshift(fft(x3)));
        Fs=10;
        w3= 2* pi* ( 0: length( Y3)- 1)/ length( Y3);
        w3= Fs/( 2* pi)* unwrap( fftshift( w3)- 2* pi);


        % --- descripcion grafica --- %
        figure;
        subplot(2,3,1);
        plot(t1,x1);title('x1 en espacio de muestras');
        subplot(2,3,2);
        plot(t2,x2);title('x2 en espacio de muestras');
        subplot(2,3,3);
        plot(t3,x3);title('x3 en espacio de muestras');

        subplot(2,3,4);
        plot(w1,Y1);title('Espectro de magnitud de x1');
        subplot(2,3,5);
        plot(w2,Y2);title('Espectro de magnitud de x2');
        subplot(2,3,6);
        plot(w3,Y3);title('Espectro de magnitud de x3');
```

b. Considerar ahora una señal continua $y(t)$:

$$y(t) = \begin{cases} 1, & t < 0.4 \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases} \tag{1}$$

Generar la señal discreta $y[n]$ muestreando $y(t)$ en el intervalo [0;2] a 2 KHz (frec.de muestreo). Se le pide:

i. Calcular la convolución lineal de $x_2[n]$ con $y[n]$ mediante el comando **conv()**.
ii. Repetir el calculo anterior, esta vez desde el dominio de la frecuencia.
iii. Graficar y comparar los resultados obtenidos en i. y ii., y comparar con la convolución circular (comando **cconv()**).

Solución:

Analíticamente se tiene:

- Conv. lineal: $x_2[n] * y[n] = \sum_{m=-M}^{M} x_2[m]y[n-m]$
- Conv. en frecuencia: $x_2[n] * y[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X_2[k]\dot{Y}[k]\}$
- Conv. circular: $x_2[n] \text{N} y[n] = \sum_{m=0}^{N-} x_2[m]y[n-m, \text{modulo N}]$

```
% --- generacion de vector y--- %%
t_y = 0 : 1/2000 : Tf - 1/2000;
y = double(t_y < 0.4);

% --- convolucion lineal --- %
conv_lin = conv(y, x2);

% --- convolucion en frecuencia --- %
N = length(y);  M = length(x2);
l = N + M - 1; % Puesto que la dimension de una convolucion lineal es N ...
    + M - 1, , es importante que las DTFs a multiplicar sean obtenidas ...
    con esa misma dimension
```

```
Y = fft(y, l);
X2 = fft(x2, l);
conv_freq = ifft(Y.*X2);

% ---- convolucion circular ---- %
conv_circ = cconv(y, x2, l);
```

Comprobar que el resultado en los tres casos es el mismo calculando la norma (comando **norm()**) de la diferencia entre cualquiera de los resultados.

Sugerencia: Probar a alterar el valor de l a algun otro valor dentro del rango $[N; N+M-1]$. Podrá observar que los resultados obtenidos mediante la multiplicación en frecuencia y la convolución circular se mantienen iguales entre ellos (teorema de la convolucion circular), sin embargo difieren de lo obtenido mediante la convolución lineal.

c. Implementar el desplazamiento circular de la señal $y[n]$ siguiendo el enfoque frecuencial. Utilizar para ello la relación $x((n-l))_N \iff X(k)e^{-j2\pi kl/N}$, desplazando la señal 400 muestras. Graficar y comparar en espacio de muestras la señal original y la señal desplazada.

Solución:

```
% ---- desplazamiento circular ---- %
w2=w2*2*pi/Fs; % escalar el vector de frecuencia de Y2 a frecuencia angular

e=exp(-400*i*w2); %componente exponencial a multiplicar en frecuencia
Y2=(fftshift(fft(x2))); %puesto que se busca operar sobre la DFT de x2 ...
    en lugar de graficarla, no se emplea el comando abs() (a diferencia ...
    del inciso a.)
Y2_s=Y2.*e;

x2_s=ifft(ifftshift(Y2_s), 'symmetric');

plot(x2_s);
```

2. Considerar el sistema discreto representado por la función de transferencia siguiente:

$$G(z) = \frac{1 - bz^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

a. Leer la señal discreta de duración 10 segundos almacenada en el archivo **x.mat** [1]. Indicar la frecuencia de muestreo y el número de muestras.

Solución:

```
% ---- lectura de datos ---- %
load 'x.mat'
t = 10;                      % duracion
num_muestras = length(x);  % numero de muestras
fs = num_muestras/t;       % frecuencia de muestreo
figure;
stem(x); % grafica de la senal en el tiempo
xlabel('muestras'); ylabel('amplitud');
```

[1] El archivo está almacenado en la carpeta /laboratorio/lab02/propuestos02/.

b. Para el valor $a = 2$ y $b = 0.25$, mostrar el diagrama de ceros y polos de G. ¿El sistema es estable? Justificar.

Solución:
La función de transferencia del sistema para los valores señalados es:

$$H(z) = \frac{1 - 0.25z^{-1}}{1 - 2z^{-1}}$$

Esta solo tiene 1 polo y 1 cero donde el primero está ubicado en $z_p = 2$ y por lo tanto está fuera de $|z| < 1$. Por lo tanto el sistema es inestable.

```
% ---- evaluacion de G ---- %
a = 2;
b = 0.25;

g_num = [1,-b]; % B(Z)
g_den = [1,-a]; % A(Z)

figure;
subplot(2,1,1); impz(g_num,g_den,100); % respuesta al impulso
subplot(2,1,2); zplane(g_num,g_den);   % diagrama de ceros y polos
```

c. Considerar el sistema representado por la función de transferencia $H(z)$:

$$H(z) = \frac{kG(z)}{1 + kG(z)}$$

Para los valores indicados en el inciso anterior, calcular el rango de valores de k tal que el sistema H sea estable. Sea k_{min} el mínimo valor positivo de k que realiza un sistema H estable, mostrar el diagrama de ceros y polos de H (usar función **zplane**) y su respuesta al impulso (usar función **impz**) para $k = 3.75k_{min}$.

Solución:
Reemplazando la función de transferencia $G(z)$ en la expresión de $H(z)$:

$$H(z) = \frac{k - bkz^{-1}}{(k+1) - (a + bk)z^{-1}}$$

Si el sistema H es estable, su polo z_p debe ubicarse dentro de $|z| < 1$. Luego:

$$\left|\frac{a + bk}{k + 1}\right| < 1$$

Resolviendo la desigualdad anterior, se obtiene el rango de valores de k para que el sistema H sea estable:

$$k > \frac{a-1}{1-b} \vee k < -\frac{a+1}{b+1}$$

Reemplazando los valores de a y b en las expresiones anteriores, se tiene:

$$k > 1.33 \vee k < -2.4$$

Luego, el mínimo valor positivo que realiza un sistema H estable es $k_{min} = 1.33$, entonces:

$$k = 3.75k_{min} = 5$$

Finalmente, la función de transferencia del sistema es:

$$H(z) = \frac{5 - 1.25z^{-1}}{6 - 3.25z^{-1}}$$

```
% --- evaluacion de H --- %
k = 5;

h_num = [k,-k*b];      % B(z)
h_den = [k+1,-k*b-a]; % A(z)

figure;
subplot(2,1,1); impz(h_num,h_den,100); % respuesta al impulso
subplot(2,1,2); zplane(h_num,h_den);   % diagrama de ceros y polos
```

d. Calcular la respuesta de los sistemas G y H para la señal leída en el apartado a. Mostrar ambas señales en una misma ventana rotuladas adecuadamente (usar comandos **filter** y **stem**). ¿Corresponden las gráficas obtenidas con los diagramas obtenidos en los incisos b y c?

Solución:

```
% --- respuesta de los sistemas G y H --- %
y_g = filter(g_num,g_den,x); % respuesta de G
y_h = filter(h_num,h_den,x); % respuesta de H

figure;
subplot(2,1,1); stem(y_g); % grafica de la respuesta en el tiempo
xlabel('muestras'); ylabel('respuesta de G');
subplot(2,1,2); stem(y_h); % grafica de la respuesta en el tiempo
xlabel('muestras'); ylabel('respuesta de H');
```

e. Para recuperar la señal ingresada al sistema H, se define el sistema inverso H_{inv} de manera que su función de transferencia cumple con:

$$H(z)H_{inv}(z) = 1$$

Calcular de manera analítica la función de transferencia $H_{inv}(z)$ y mostrar su diagrama de cerlos y polos. ¿El sistema inverso H_{inv} es estable?

Solución:
Se tiene:

$$H_{inv}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{6 - 3.25z^{-1}}{5 - 1.25z^{-1}}$$

Luego, el polo de H_{inv} se ubica en $z_p = \frac{1.25}{5} = 0.25 < 1$. Por lo tanto, el sistema es estable.

```
% --- evaluacion de Hinv --- %
hinv_num = h_den; % B(z)
hinv_den = h_num; % A(z)
```

```

figure;
subplot(2,1,1); impz(hinv_num,hinv_den,100); % respuesta al impulso
subplot(2,1,2); zplane(hinv_num,hinv_den);   % diagrama de polos y ceros
```

f. Debido a un defecto en diseño de H_{inv}, se tiene un sistema M que matiene el valor de los ceros respecto de H_{inv} pero cuyos polos son los polos originales de H_{inv} desplazados en dirección radial un 5% del radio de la circunferencia que los contiene alejándose del origen del plano Z. Calcular la funcion de transferencia $M(z)$ y mostrar su diagrama de ceros y polos. ¿Este sistema es estable?

Solución:
Se tiene que el polo del sistema H_{inv} se ubica en $z_p = 0.25$, entonces, está contenido en la cicunferencia de ecuación $|z| = 0.25$. Si este se aleja un 5% del radio de esta circunferencia en dirección radial, entonces, el polo de M se ubica en:

$$z_p^M = z_p + 0.05z_p = 0.2625$$

Como el polo de M se encuentra dentro del círculo limitado por la circunferencia unitaria, el sistema es estable.

```
% --- evaluacion de M --- %
m_num = [k+1,-k*b-a];   % A(z)
m_den = [k,-1.05*k*b]; % B(z)

figure;
subplot(2,1,1); impz(m_num,m_den,100); % respuesta al impulso
subplot(2,1,2); zplane(m_num,m_den);   % diagrama de polos y ceros
```

g. Se define el sistema en cascada:

$$R(z) = H(z)M(z)$$

Graficar la respuesta del sistema R ante la entrada leída en el apartado a y rotular adecuadamente. ¿Es posible recuperar la señal ingresada a $H(z)$ usando el sistema R?

Solución:
Se tiene:

$$R(z) = H(z)M(z) = \left[\frac{5 - 1.25z^{-1}}{6 - 3.25z^{-1}}\right]\left[\frac{6 - 3.25z^{-1}}{5 - 1.3125z^{-1}}\right] = \frac{5 - 1.25z^{-1}}{5 - 1.3125z^{-1}}$$

```
% --- respuesta del sistema R --- %
r_num = h_num;
r_den = m_den;

y_r = filter(r_num,r_den,x); % respuesta de G

figure;
subplot(2,1,1); stem(x); % senal de entrada
xlabel('muestras'); ylabel('amplitud de entrada');
subplot(2,1,2); stem(y_r); % grafica de la respuesta en el tiempo
xlabel('muestras'); ylabel('amplitud de salida');
```

Se puede comprobar gráficamente que las señales de entrada y salida del sistema son parecidas, sin embargo, hay presencia de distorsión, esto puede comprobarse numéricamente calculando el error relativo:

```
>> error_relativo = norm(x - y_r)/norm(x)

error_relativo =

    0.0169
```

3. Sea la siguiente señal en tiempo continuo:

$$x(t) = 0.5^t \cos^3(2\pi f t)u(t)$$

a. Considerando $f = 200$ Hz. ¿Cuál es la mínima frecuencia de muestreo que se puede utilizar para discretizar la señal? Indicar los valores de frecuencia fundamental y frecuencia de muestreo mínima.

b. Discretizar la señal considerando que desde $t = 0$ se toman 800 muestras con frecuencia de muestreo f_s igual a 8 veces el valor de la frecuencia de muestreo mínima calculada en el apartado anterior. Graficar la señal discretizada en el tiempo.

c. Considerar el filtro con respuesta impulsiva siguiente:

$$h[n] = \left(\frac{u[n] - u[n-100]}{10}\right) sinc\left(\frac{\pi}{20}n\right)$$

Este filtro forma parte del siguiente sistema de cambio de tasa de muestreo:

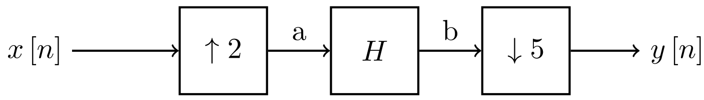

Figure 1: Sistema 1

Calcular la respuesta del sistema $y[n]$ para la señal discreta $x[n]$ y graficar la salida y las señales en los puntos a y b indicados en la figura en una sola ventana. Usar los comandos **upsample**, **filter** y **downsample**.

d. Considerar sistema de cambio de tasa de muestreo siguiente:

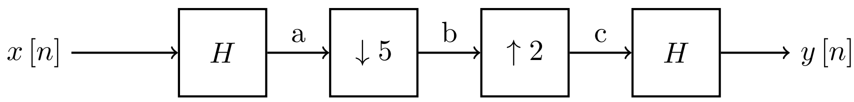

Figure 2: Sistema 2

Calcular la respuesta del sistema $y[n]$ para la señal discreta $x[n]$ y graficar la salida y las señales en los puntos a, b y c indicados en la figura en una sola ventana. ¿Encuentra alguna diferencia entre las salidas de los sistemas 1 y 2? Usar los comandos **upsample**, **filter** y **downsample**.

4. Dada la señal en tiempo continuo:

$$x(t) = \frac{\cos(25\pi(t-2.5))^3}{(25\pi(t-2.5))^3} \quad (2)$$

a. Disctretizar la señal considerando un tiempo de muestreo de 2 segundos y una frecuencia de muestreo de 1 KHz.

b. Realizar un downsample de factor 4 a la señal generada. Graficar el espectro de magnitud de la señal obtenida.

c. Repetir el paso anterior, esta vez precediendo a la operacion de downsample con un filtro antialias (usar para ello el comando **decimate()**). Graficar el espectro de magnitud obtenido.

d. De forma análoga a los dos pasos anteriores, realice un upsample de factor 4 a la señal, y luego repita el proceso añadiendo un filtro pasabajo posterior (comando **interp()**). Graficar el espectro de magnitud obtenido en ambos casos, y comentar las diferencias bservadas