

Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales: Mejora de Imágenes en el Dominio de Frecuencia

MSc. Renán Rojas G.

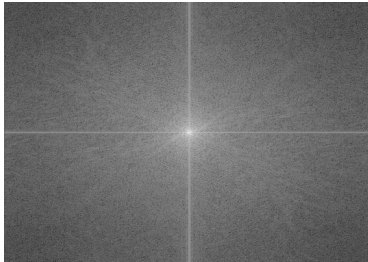
Pontificia Universidad Católica del Perú

Análisis en Frecuencia de Imágenes

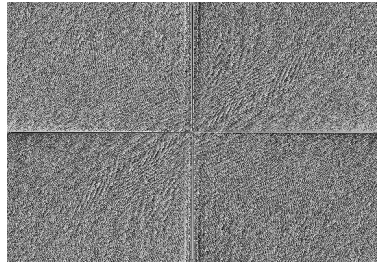
- Descomposición de señales bidimensionales en exponenciales complejas armónicamente relacionadas.



(a) Imagen original



(b) Espectro de Magnitud



(c) Espectro de Fase

Figura 1: Análisis en Frecuencia

■ Impulso unitario en 2D: caso continuo

$$\delta(t, z) = \begin{cases} +\infty & t = z = 0 \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

* Propiedades:

1. Integración

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} \int_{z=-\infty}^{+\infty} \delta(t, z) dt dz = 1.$$

2. Producto

$$f(t, z) \cdot \delta(t - t_0, z - z_0) = f(t_0, z_0) \delta(t - t_0, z - z_0).$$

3. Convolución

$$f(t, z) * \delta(t - t_0, z - z_0) = f(t - t_0, z - z_0).$$

■ Impulso unitario en 2D: caso discreto

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y = 0 \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

* Propiedades:

1. Sumatoria

$$\sum_{x=-\infty}^{+\infty} \sum_{y=-\infty}^{+\infty} \delta(x, y) = 1.$$

2. Producto

$$f(x, y)\delta(x - x_0, y - y_0) = f(x_0, y_0)\delta(x - x_0, y - y_0).$$

3. Convolución

$$f(x, y) * \delta(x - x_0, y - y_0) = f(x - x_0, y - y_0).$$

Transformada de Fourier 2D en Tiempo Continuo

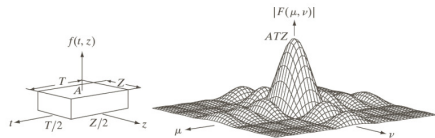
Ecuación de Síntesis (Transformada Inversa)

$$f(t, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\Omega_t=-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega_z=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\Omega_t, \Omega_z) e^{j(\Omega_t \cdot t + \Omega_z \cdot z)} d\Omega_t d\Omega_z; \quad \Omega = 2\pi f \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right).$$

Ecuación de Análisis (Transformada Directa)

$$\mathcal{F}(\Omega_t, \Omega_z) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \int_{z=-\infty}^{+\infty} f(t, z) e^{-j(\Omega_t \cdot t + \Omega_z \cdot z)} dt dz.$$

Transformada de Fourier 2D en Tiempo Continuo



a b

FIGURE 4.13 (a) A 2-D function, and (b) a section of its spectrum (not to scale). The block is longer along the t -axis, so the spectrum is more “contracted” along the μ -axis. Compare with Fig. 4.4.

Figura 2: Espectro de Magnitud de una señal bidimensional

■ Acerca de Notación (Gonzalez)

$$f(t, z) = \int_{u=-\infty}^{+\infty} \int_{v=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(u, v) e^{j2\pi(ut+vz)} du dv \quad (\text{Transformada Directa});$$

$$\mathcal{F}(u, v) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \int_{z=-\infty}^{+\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(ut+vz)} dt dz \quad (\text{Transformada Inversa});$$

Transformada de Fourier 2D en Tiempo Discreto

Ecuación de Síntesis (Transformada Inversa)

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\omega_x=-\infty}^{+\infty} \int_{\omega_y=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega_x, \omega_y) e^{j(\omega_x \cdot x + \omega_y \cdot y)} d\omega_x d\omega_y;$$
$$\omega = \Omega T = 2\pi \frac{f}{f_s} \left(\frac{\text{rad}}{\text{muestra}} \right).$$

Ecuación de Análisis (Transformada Directa)

$$\mathcal{F}(\omega_x, \omega_y) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \sum_{y=-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j(\omega_x \cdot x + \omega_y \cdot y)}.$$

■ Muestreo en 2D: tren de impulsos bidimensional

$$S_{\Delta t \Delta z}(t, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - m\Delta t, z - n\Delta z)$$

■ Muestreo en 2D

$$f(t, z) \cdot S_{\Delta t \Delta z}(t, z)$$

■ Función limitada en banda:

Dado un intervalo determinado por $[-u_{\max}, +u_{\max}]$; $[-v_{\max}, +v_{\max}]$, $f(t, z)$ es limitada en banda si:

$$F(u, v) = 0, \quad |u| \geq u_{\max}, |v| \geq v_{\max}$$

Muestreo Bidimensional

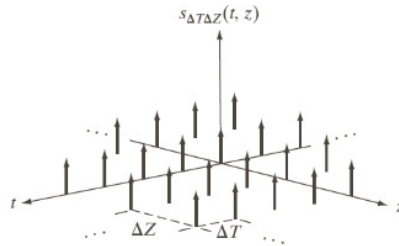
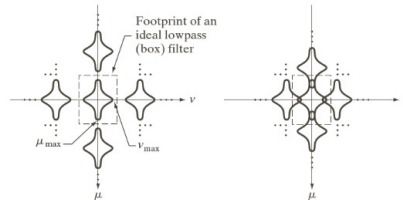


FIGURE 4.14
Two-dimensional
impulse train.



a b
FIGURE 4.15
Two-dimensional
Fourier transforms
of (a) an over-
sampled, and
(b) under-sampled
band-limited
function.

Figura 3: Muestreo y Aliasing

- Teorema de muestreo 2D (**Criterio de Nyquist**): Dados los *periodos de muestreo* $(\Delta t, \Delta z)$, una imagen con frecuencias máximas (u_{\max}, v_{\max}) puede ser recuperada sin distorsiones si se cumple con la siguiente condición:

$$\frac{1}{\Delta t} > 2 \cdot u_{\max} \quad \wedge \quad \frac{1}{\Delta z} > 2 \cdot v_{\max}.$$

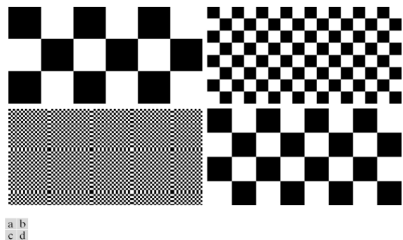


FIGURE 4.16 Aliasing in images. In (a) and (b), the lengths of the sides of the squares are 16 and 6 pixels, respectively, and aliasing is visually negligible. In (c) and (d), the sides of the squares are 0.9174 and 0.4798 pixels, respectively, and the results show significant aliasing. Note that (d) masquerades as a “normal” image.

Figura 4: Efecto Aliasing en imágenes.

Transformada de Discreta de Fourier 2D

■ Muestreo en Frecuencia

$$\omega_x = \frac{2\pi u}{M}; \quad \omega_y = \frac{2\pi v}{N}; \quad u \in [0; M - 1], v \in [0; N - 1]$$

Transformada Inversa

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \mathcal{F}(u, v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}.$$

Transformada Directa

$$\mathcal{F}(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}.$$

Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier 2D

	Spatial Domain [†]		Frequency Domain [†]
1)	$f(x, y)$ real	\Leftrightarrow	$F^*(u, v) = F(-u, -v)$
2)	$f(x, y)$ imaginary	\Leftrightarrow	$F^*(-u, -v) = -F(u, v)$
3)	$f(x, y)$ real	\Leftrightarrow	$R(u, v)$ even; $I(u, v)$ odd
4)	$f(x, y)$ imaginary	\Leftrightarrow	$R(u, v)$ odd; $I(u, v)$ even
5)	$f(-x, -y)$ real	\Leftrightarrow	$F^*(u, v)$ complex
6)	$f(-x, -y)$ complex	\Leftrightarrow	$F(-u, -v)$ complex
7)	$f^*(x, y)$ complex	\Leftrightarrow	$F^*(-u, -v)$ complex
8)	$f(x, y)$ real and even	\Leftrightarrow	$F(u, v)$ real and even
9)	$f(x, y)$ real and odd	\Leftrightarrow	$F(u, v)$ imaginary and odd
10)	$f(x, y)$ imaginary and even	\Leftrightarrow	$F(u, v)$ imaginary and even
11)	$f(x, y)$ imaginary and odd	\Leftrightarrow	$F(u, v)$ real and odd
12)	$f(x, y)$ complex and even	\Leftrightarrow	$F(u, v)$ complex and even
13)	$f(x, y)$ complex and odd	\Leftrightarrow	$F(u, v)$ complex and odd

[†]Recall that x, y, u , and v are *discrete* (integer) variables, with x and u in the range $[0, M - 1]$, and y and v in the range $[0, N - 1]$. To say that a complex function is *even* means that its real *and* imaginary parts are even, and similarly for an odd complex function.

TABLE 4.1 Some symmetry properties of the 2-D DFT and its inverse. $R(u, v)$ and $I(u, v)$ are the real and imaginary parts of $F(u, v)$, respectively. The term *complex* indicates that a function has nonzero real and imaginary parts.

Figura 5: Propiedades de simetría de la DFT 2D

■ Traslación

$$f(x, y)e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N})} \longleftrightarrow \mathcal{F}(u - u_0, v - v_0);$$

$$f(x - x_0, y - y_0) \longleftrightarrow \mathcal{F}(u, v)e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N})};$$

■ Rotación

Coordenadas polares: $x = r \cdot \cos(\theta)$, $y = r \cdot \sin(\theta)$, $u = \omega \cdot \cos(\rho)$, $v = \omega \cdot \sin(\rho)$

Entonces:

$$f(r, \theta + \theta_0) \longleftrightarrow \mathcal{F}(\omega, \rho + \theta_0)$$

Es decir, una rotación de θ_0 en f causa una rotación de θ_0 en \mathcal{F} .

■ Periodicidad

$$\mathcal{F}(u, v) = \mathcal{F}(u + k_1 \cdot M, v) = \mathcal{F}(u, v + k_2 \cdot N) = \mathcal{F}(u + k_1 \cdot M, v + k_2 \cdot N);$$

$$f(x, y) = f(x + k_1 \cdot M, y) = f(x, y + k_2 \cdot N) = f(x + k_1 \cdot M, y + k_2 \cdot N);$$

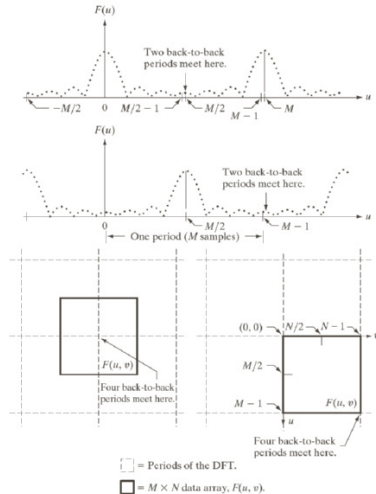
$$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

■ Desplazamiento hacia el centro

Dadas M, N muestras, centrar \mathcal{F} en $(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$

$$f(x, y)e^{-j2\pi\left[\left(\frac{M}{2}\right)\frac{x}{M} + \left(\frac{N}{2}\right)\frac{y}{N}\right]} = f(x, y)(-1)^{(x+y)} \longleftrightarrow \mathcal{F}\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right)$$

Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier 2D



a
b
c d

FIGURE 4.23

Centering the Fourier transform.

(a) A 1-D DFT showing an infinite number of periods.

(b) Shifted DFT obtained by multiplying $f(x)$ by $(-1)^x$ before computing $F(u)$.

(c) A 2-D DFT showing an infinite number of periods. The solid area is the $M \times N$ data array, $F(u, v)$, obtained with Eq. (4.5-15). This array consists of four quarter periods.

(d) A Shifted DFT obtained by multiplying $f(x, y)$ by $(-1)^{x+y}$ before computing $F(u, v)$. The data now contains one complete, centered period, as in (b).

Figura 6: Centrado de la DFT 2D

Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier 2D

Name	Expression(s)
1) Discrete Fourier transform (DFT) of $f(x, y)$	$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$
2) Inverse discrete Fourier transform (IDFT) of $F(u, v)$	$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$
3) Polar representation	$F(u, v) = F(u, v) e^{j\phi(u, v)}$
4) Spectrum	$ F(u, v) = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$ $R = \text{Real}(F); \quad I = \text{Imag}(F)$
5) Phase angle	$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$
6) Power spectrum	$P(u, v) = F(u, v) ^2$
7) Average value	$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = \frac{1}{MN} F(0, 0)$

(Continued)

TABLE 4.2

Summary of DFT definitions and corresponding expressions.

Figura 7: Resumen: definiciones de la DFT 2D

Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier 2D

Name	Expression(s)
8) Periodicity (k_1 and k_2 are integers)	$F(u, v) = F(u + k_1M, v) = F(u, v + k_2N)$ $= F(u + k_1M, v + k_2N)$ $f(x, y) = f(x + k_1M, y) = f(x, y + k_2N)$ $= f(x + k_1M, y + k_2N)$
9) Convolution	$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$
10) Correlation	$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m, n)h(x + m, y + n)$
11) Separability	The 2-D DFT can be computed by computing 1-D DFT transforms along the rows (columns) of the image, followed by 1-D transforms along the columns (rows) of the result. See Section 4.11.1.
12) Obtaining the inverse Fourier transform using a forward transform algorithm.	$MNf^*(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v)e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$ <p>This equation indicates that inputting $F^*(u, v)$ into an algorithm that computes the forward transform (right side of above equation) yields $MNf^*(x, y)$. Taking the complex conjugate and dividing by MN gives the desired inverse. See Section 4.11.2.</p>

TABLE 4.2
(Continued)

Figura 8: Resumen: definiciones de la DFT 2D

Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier 2D

Name	DFT Pairs
1) Symmetry properties	See Table 4.1
2) Linearity	$af_1(x, y) + bf_2(x, y) \Leftrightarrow aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$
3) Translation (general)	$f(x, y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$ $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}$
4) Translation to center of the frequency rectangle, $(M/2, N/2)$	$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$ $f(x - M/2, y - N/2) \Leftrightarrow F(u, v)(-1)^{u+v}$
5) Rotation	$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$ $x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \varphi \quad v = \omega \sin \varphi$
6) Convolution theorem [†]	$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$ $f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$

(Continued)

TABLE 4.3

Summary of DFT pairs. The closed-form expressions in 12 and 13 are valid only for continuous variables. They can be used with discrete variables by sampling the closed-form, continuous expressions.

Figura 9: Pares conocidos de la DFT 2D

Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier 2D

Name	DFT Pairs
7) Correlation theorem [†]	$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v) H(u, v)$ $f^*(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$
8) Discrete unit impulse	$\delta(x, y) \Leftrightarrow 1$
9) Rectangle	$\text{rect}[a, b] \Leftrightarrow ab \frac{\sin(\pi ua)}{(\pi ua)} \frac{\sin(\pi vb)}{(\pi vb)} e^{-j\pi(ua+vb)}$
10) Sine	$\sin(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow$ $j \frac{1}{2} [\delta(u + Mu_0, v + Nv_0) - \delta(u - Mu_0, v - Nv_0)]$
11) Cosine	$\cos(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow$ $\frac{1}{2} [\delta(u + Mu_0, v + Nv_0) + \delta(u - Mu_0, v - Nv_0)]$
<p>The following Fourier transform pairs are derivable only for continuous variables, denoted as before by t and z for spatial variables and by μ and ν for frequency variables. These results can be used for DFT work by sampling the continuous forms.</p>	
12) Differentiation (The expressions on the right assume that $f(\pm\infty, \pm\infty) = 0$.)	$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(t, z) \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m (j2\pi\nu)^n F(\mu, \nu)$ $\frac{\partial^m f(t, z)}{\partial t^m} \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m F(\mu, \nu); \frac{\partial^n f(t, z)}{\partial z^n} \Leftrightarrow (j2\pi\nu)^n F(\mu, \nu)$
13) Gaussian	$A 2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(t^2+z^2)} \Leftrightarrow A e^{-(\mu^2+\nu^2)/2\sigma^2}$ (A is a constant)

TABLE 4.3
(Continued)

[†] Assumes that the functions have been extended by zero padding. Convolution and correlation are associative, commutative, and distributive.

Figura 10: Pares conocidos de la DFT 2D

$$\mathcal{F}(u, v) = |\mathcal{F}(u, v)|e^{j\angle\mathcal{F}(u, v)}$$

■ Espectro de Magnitud:

$$|\mathcal{F}(u, v)| = \left\{ \text{Real}^2\{\mathcal{F}(u, v)\} + \text{Imag}^2\{\mathcal{F}(u, v)\} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

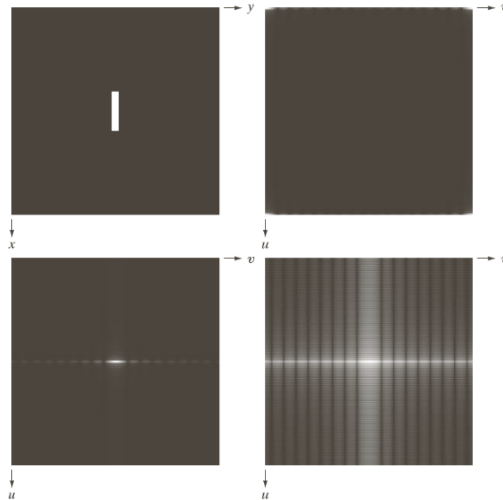
$$\angle\mathcal{F}(u, v) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Imag}\{\mathcal{F}(u, v)\}}{\text{Real}\{\mathcal{F}(u, v)\}} \right\}$$

$\angle\mathcal{F}(u, v)$ debe ser correctamente localizado en los cuatro cuadrantes.

■ Componente DC de una imagen:

$$\mathcal{F}(0, 0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

Espectro de Magnitud y Espectro de Fase



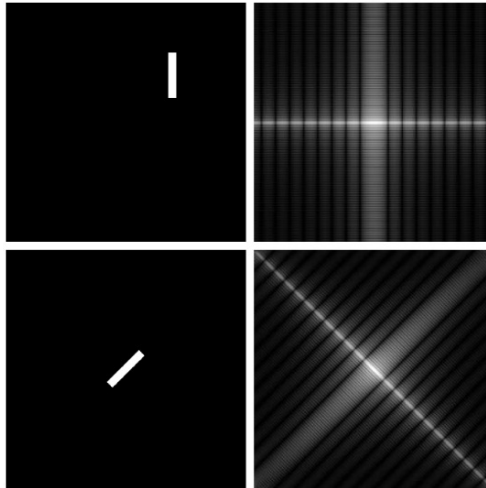
a b
c d

FIGURE 4.24

(a) Image.
(b) Spectrum showing bright spots in the four corners.
(c) Centered spectrum.
(d) Result showing increased detail after a log transformation. The zero crossings of the spectrum are closer in the vertical direction because the rectangle in (a) is longer in that direction. The coordinate convention used throughout the book places the origin of the spatial and frequency domains at the top left.

Figura 11: Espectro de Magnitud

Espectro de Magnitud y Espectro de Fase



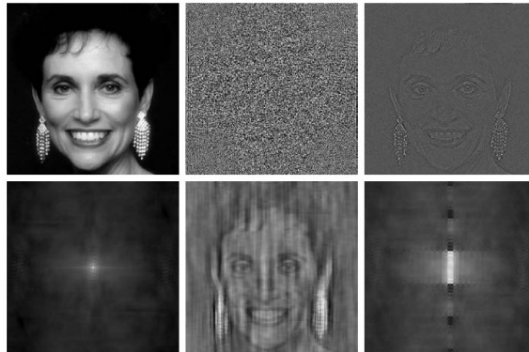
a b
c d

FIGURE 4.25

(a) The rectangle in Fig. 4.24(a) translated, and (b) the corresponding spectrum. (c) Rotated rectangle, and (d) the corresponding spectrum. The spectrum corresponding to the translated rectangle is identical to the spectrum corresponding to the original image in Fig. 4.24(a).

Figura 12: Espectro de Magnitud desplazado y rotado

Espectro de Magnitud y Espectro de Fase



a b c
d e f

FIGURE 4.27 (a) Woman. (b) Phase angle. (c) Woman reconstructed using only the phase angle. (d) Woman reconstructed using only the spectrum. (e) Reconstruction using the phase angle corresponding to the woman and the spectrum corresponding to the rectangle in Fig. 4.24(a). (f) Reconstruction using the phase of the rectangle and the spectrum of the woman.

Figura 13: Información del espectro de magnitud y espectro de fase

■ Propiedad de Convolución

$$f(x, y) * h(x, y) = \mathcal{F}(u, v) \cdot \mathcal{H}(u, v).$$

■ Propiedad de Multiplicación

$$f(x, y) \cdot h(x, y) = \mathcal{F}(u, v) * \mathcal{H}(u, v).$$

■ Zero-Padding:

Agregar parches de ceros a las fronteras de la imagen con dos propósitos específicos:

- Definir operaciones de convolución en sus límites.
- Aumentar la muestras en frecuencia al analizar una imagen usando la DFT (Aumentar N , $N \geq L$, entonces: $\frac{2\pi}{N}$ disminuye!)

- El trabajar con la **DFT** (tomar muestras de la **DTFT**) se genera un efecto en el espacio de muestras que convierte a las señales **no-periodicas** en **señales periódicas** (*teoría de Transformada Discreta de Fourier*).
- Al analizar imágenes (señales bidimensionales finitas) a partir de la **DFT**, se obtiene en espacio de muestras una representación circular en ambas dimensiones con periodo M para x y N para y (**Wrap-around**).
- Esto hace que el producto en frecuencia basado en la **DFT** sea en realidad una convolución circular (*teoría de Transformada Discreta de Fourier*).
- Entonces, para N cercano a la longitud de la señal L , el resultado de convolución en los bordes incluirá en su cálculo componentes de las replicas vecinas (**Wrap-around Error**).

Detalles de Periodicidad / Wrap-around Error

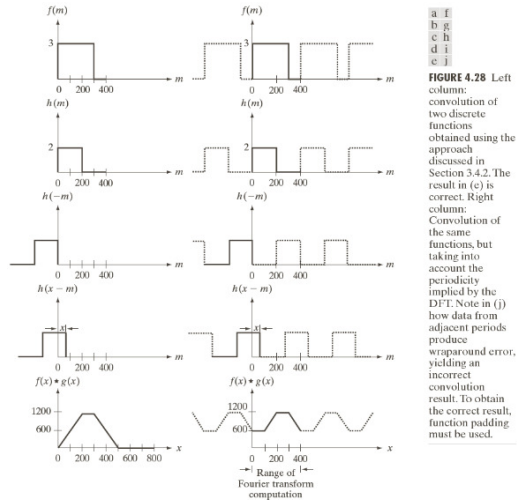


Figura 14: Wrap-Around Error



FIGURE 4.32 (a) A simple image. (b) Result of blurring with a Gaussian lowpass filter without padding. (c) Result of lowpass filtering with padding. Compare the light area of the vertical edges in (b) and (c).

Figura 15: Wrap-Around Error

■ Solución:

Dados $f(x) \in \mathbb{R}^A$ y $h(x) \in \mathbb{R}^B$, si agregamos un **zero-padding** tal que ambas señales obtengan $P \geq A + B - 1$ elementos, la periodicidad de la **DFT** no afecta el resultado.

■ **Ejemplo:** $A, B = 400$, entonces $P = 799$ asegura un resultado libre de errores por periodicidad.

■ Pasos para el filtrado en el dominio de frecuencia

- 1 Dada una imagen $f \in \mathbb{R}^{M \times N}$, generar un zero-padding $f_p \in \mathbb{R}^{P \times Q}$ (Típicamente $P = 2M$, $Q = 2N$)
- 2 Hallar \mathcal{F}_p centrada en $\{\frac{P}{2}; \frac{Q}{2}\} \longleftrightarrow f_p(x, y) \cdot (-1)^{x+y}$
- 3 Crear un filtro simétrico \mathcal{H} centrado en $\{\frac{P}{2}; \frac{Q}{2}\}$ y obtener $\mathcal{G}_p(u, v) = \mathcal{F}_p(u, v) \cdot \mathcal{H}_p(u, v)$
- 4 Hallar $g_p(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{G}_p(u, v)\} \cdot (-1)^{x+y}$ y recortar el zero-padding para hallar $g(x, y)$.

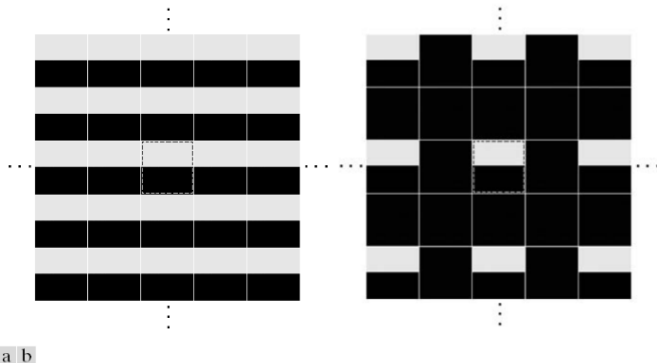
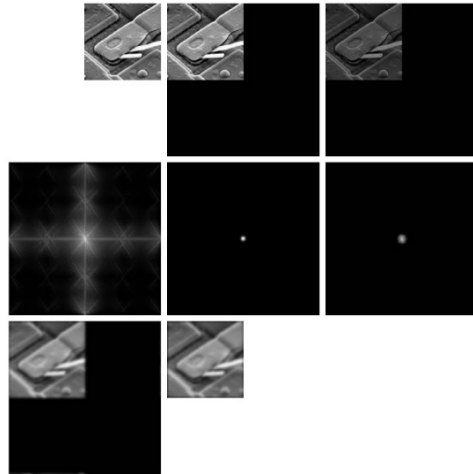


FIGURE 4.33 2-D image periodicity inherent in using the DFT. (a) Periodicity without image padding. (b) Periodicity after padding with 0s (black). The dashed areas in the center correspond to the image in Fig. 4.32(a). (The thin white lines in both images are superimposed for clarity; they are not part of the data.)

Figura 16: Zero-Padding



a	b	c
d	e	f
g	h	

FIGURE 4.36

(a) An $M \times N$ image, f .
 (b) Padded image, f_p of size $P \times Q$.
 (c) Result of multiplying f_p by $(-1)^{x+y}$.
 (d) Spectrum of F_p . (e) Centered Gaussian lowpass filter, H , of size $P \times Q$.
 (f) Spectrum of the product HF_p .
 (g) g_p , the product of $(-1)^{x+y}$ and the real part of the IDFT of HF_p .
 (h) Final result, g , obtained by cropping the first M rows and N columns of g_p .

Figura 17: Procedimiento para evitar distorsiones por Wrap-Around Error

■ Separabilidad

Puede ser representada como dos transformaciones 1D independientes

$$\mathcal{F}(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi u \frac{x}{M}} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi v \frac{y}{N}}$$

■ Cálculo de la transformada inversa a partir de la transformada directa

(**Conjugada compleja:** dado un número complejo $f = a - jb = Ae^{j\theta}$, su conjugada compleja se define como $f^* = a + jb = Ae^{-j\theta}$)

- 1 Calcular la transformada directa de $\mathcal{F}^*(u, v)$:

$$\sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \mathcal{F}^*(u, v) e^{-j2\pi(u \frac{x}{M} + v \frac{y}{N})} = MN f^*(x, y)$$

- 2 Obtener la conjugada compleja de $MN f^*(x, y)$ y escalar por $\frac{1}{MN}$. Entonces, conseguimos $f(x, y)$.

Filtrado en el dominio de la frecuencia

- Es posible obtener la respuesta de un sistema a una imagen de entrada operando directamente en **frecuencia**.
- dado el problema $g(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$, podemos expresar la relación en frecuencia:

$$\mathcal{G}(u, v) = \mathcal{F}(u, v) \cdot \mathcal{H}(u, v)$$

- Finalmente, podemos hallar la inversa del resultado

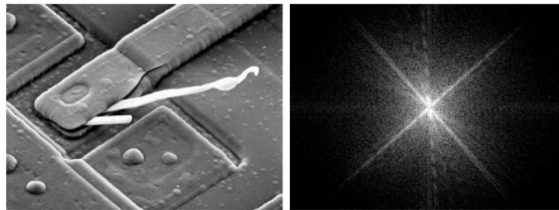
$$g(x, y) \longleftrightarrow \mathcal{G}(u, v)$$

Típicamente, las transformadas están centradas:

$$f(x, y) \cdot (-1)^{(x+y)} \longleftrightarrow \mathcal{F}\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right)$$

- * Producto con filtro pasa bajos: imagen suavizada.
- * Producto con filtro pasa altos: detalles con altas frecuencias resaltados, detalles con bajas frecuencias atenuados.

Filtrado en el dominio de la frecuencia



a b

FIGURE 4.29 (a) SEM image of a damaged integrated circuit. (b) Fourier spectrum of (a). (Original image courtesy of Dr. J. M. Hudak, Brockhouse Institute for Materials Research, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada.)

Figura 18: Transformada Discreta de Fourier 2D

Filtrado en el dominio de la frecuencia

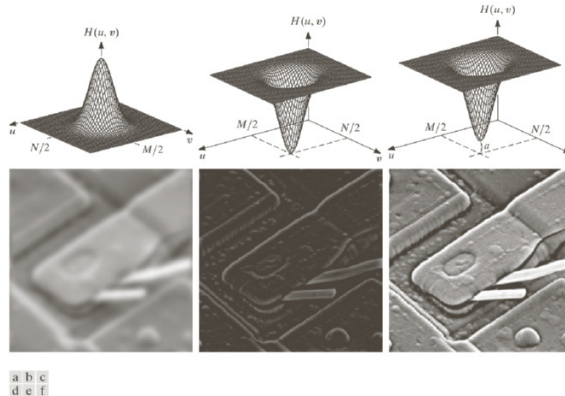


FIGURE 4.31 Top row: frequency domain filters. Bottom row: corresponding filtered images obtained using Eq. (4.7-1). We used $a = 0.85$ in (c) to obtain (f) (the height of the filter itself is 1). Compare (f) with Fig. 4.29(a).

Figura 19: Filtrado en frecuencia

(1) Capítulo 4

Gonzalez, Rafael C. & Woods, Richard E. (2006), Digital Image Processing, 3rd Edition, Prentice-Hall Inc.

<http://www.imageprocessingplace.com/>