<30/05/18>

IEE239

DFT2D, Análisis en frecuencia

1) DFT: demostraciones

A) Desplazamiento en frecuencia:

$$g(x,y) = f(x,y)\, e^{j2\pi\left(\frac{u_0 x}{M} + \frac{v_0 y}{N}\right)}$$

$$g(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{j2\pi\left(\frac{u_0 x}{M} + \frac{v_0 y}{N}\right)} \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left[\frac{\overbrace{(u-u_0)}^{\text{en lugar de } u} x}{M} + \frac{\overbrace{(v-v_0)}^{\text{en lugar de } v} y}{N}\right]}$$

desplazamiento

$$= F(u-u_0, v-v_0)$$

* Por definición:

$$g(u,v) = F(u-u_0, v-v_0)$$

b) Periodicidad $(k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$:

$$F(u+k_1 M, v+k_2 N) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left[\frac{(u+k_1M)x}{M} + \frac{(v+k_2N)y}{N}\right]}$$

$$\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}$$

. periodo M, N
$x \quad y$

$$= F(u,v)$$

c) Propiedad de convolución:

$$g(x,y) = f(x,y) * w(x,y)$$

$$= \sum_{s=0}^{M-1} \sum_{t=0}^{N-1} f(s,t) \cdot w(x-s, y-t)$$

$$\therefore g(x,y) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left(\sum_{s=0}^{M-1} \sum_{t=0}^{N-1} f(s,t)\, w(x-s, y-t) \right) \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

CAMBIO EN [illegible]

$$= \sum_{s=0}^{M-1}\sum_{t=0}^{N-1} f(s,t) \cdot \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} w(x-s, y-t)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$\hat{x} = x - s$

$\hat{y} = y - t$

Condición de DFT $\longrightarrow$ N muestras consecutivas

$$\sum_{\hat{x}=-s}^{M-1-s}\sum_{\hat{y}=-t}^{N-1-t} w(\hat{x},\hat{y})\, e^{-j2\pi\left(\frac{u(\hat{x}+s)}{M}+\frac{v(\hat{y}+t)}{N}\right)}$$

$\hat{x} = \langle M \rangle \; ; \; \hat{y} = \langle N \rangle$

$$= \sum_{s=0}^{M-1}\sum_{t=0}^{N-1} f(s,t) \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{us}{M}+\frac{vt}{N}\right)} \cdot W(u,v)$$

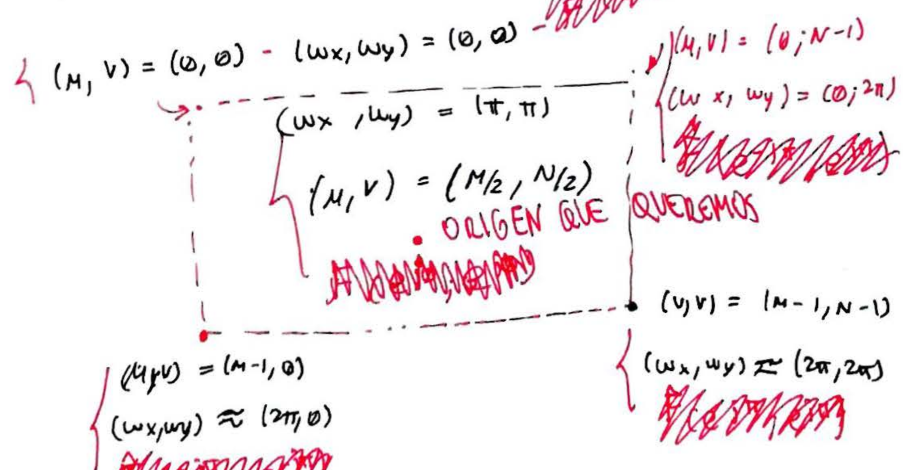
$$= F(u,v) \cdot W(u,v)$$

d) Desplazamiento hacia el centro.

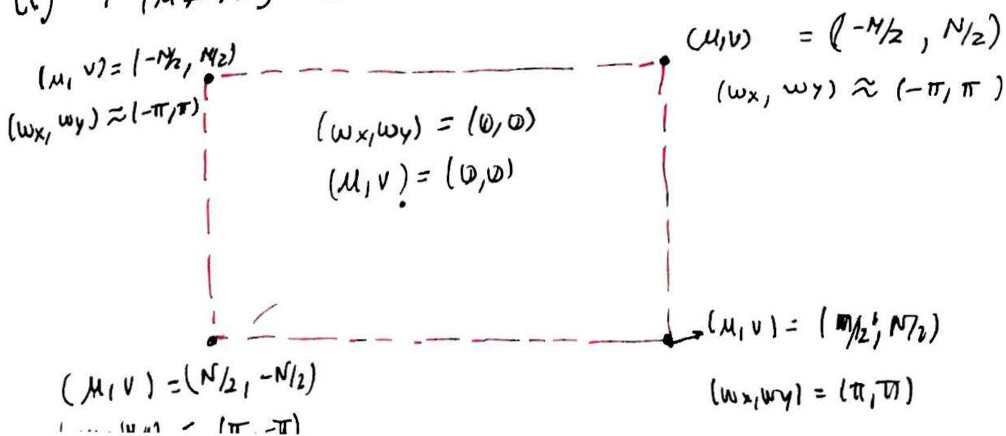
$$\underbrace{f(x,y) \cdot (-1)^{x+y}}_{e^{j2\pi(M/2 + N/2)}} \xleftrightarrow{F} \underbrace{F(u - M/2 \; ; \; v - N/2)}_{\text{espectro con origen en el centro de la imagen}}$$

$\frac{x}{M}$ $\quad \frac{y}{N}$

i) $F(u,v) \triangleq F(e^{j\omega x} \; ; \; e^{j\omega y})$



ii) $F(u - M/2)$ (versión centrada)



... en espacio y producto en frecuencia.
(Wraparound error)

Ej:

$\xrightarrow{}$ Imagen $\qquad\qquad \xrightarrow{}$ refleja la imagen

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; W(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad W(-x,-y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A) Convolución en espacio de muestras

$$g_1(x,y) = f(x,y) * W(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$(2+2-1) \times (2+2-1)$

$P+N-1$

* Dimensiones

$$(3+3-1) \times (3+3-1)$$

Imagen

Impulso.

$\boxed{\text{KERNEL = respuesta al impulso}}$

B) PRODUCTO EN FRECUENCIA:

* EJ: $M=3$, $N=3$

* DESCOMPOSICIÓN EN IMPULSOS UNITARIOS

señal $\Rightarrow f(x,y) = \delta(x,y) + \delta(x,y-1) + \delta(x-1,y) + \delta(x-1,y-1)$

señal $\Rightarrow W(x,y) = \delta(x,y) - \delta(x-1,y-1)$

* APLICAR DFT 2D:

Fourier $\Rightarrow F(u,v) = 1 + e^{-j\frac{2\pi v}{3}} + e^{-j\frac{2\pi u}{3}} + e^{-j2\pi\left(\frac{u}{3}+\frac{v}{3}\right)}$

Fourier $\Rightarrow W(u,v) = 1 - e^{-j2\pi\left(\frac{u}{3}+\frac{v}{3}\right)}$

$$\therefore \; g(u,v) = F(u,v) \cdot W(u,v)$$

$$= 1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}v} + e^{-j\frac{2\pi u}{3}} + e^{-j2\pi\left(\frac{u+v}{3}\right)}$$

$$- e^{-j2\pi\left(\frac{u+v}{3}\right)} - e^{j2\pi\left(\frac{u+2v}{3}\right)}$$

$$- e^{-j2\pi\left(\frac{2u+v}{3}\right)} - e^{j2\pi\left(\frac{2u}{3}+\frac{2v}{3}\right)}$$

* Inversión por serie de potencias:

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Zero-padding $\longrightarrow \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{1,2,3,4,0,0,0,0\}$

Aumentar N $\longrightarrow$ DFT $\{1,2,3,4\}$ $\longrightarrow \{1,2,3,4,0,0,0,0\}$
N=8

II.- ... frecuencias II

1) Función de transferencia máscara gaussiana (3x3)

$$g(x,y) = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}\{4\delta(x,y) + 2\delta(x+1,y)$$
$$+2\delta(x-1,y) + 2\delta(x,y+1)$$
$$+2\delta(x,y-1) + \delta(x+1,y+1)$$
$$+\delta(x+1,y-1) + \delta(x-1,y-1)$$
$$+\delta(x-1,y+1)$$

$$\therefore\ g(u,v) = \frac{1}{16}\{4 + 2e^{j\frac{2\pi u}{M}} + 2e^{-j\frac{2\pi u}{M}}$$
$$+ 2e^{j\frac{2\pi v}{N}} + 2e^{-j\frac{2\pi v}{N}}$$
$$+ \cancel{2}e^{j2\pi\left(\frac{u}{M}+\frac{v}{N}\right)} + e^{-j2\pi\left(-\frac{u}{M}+\frac{v}{N}\right)}$$
$$+ e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}+\frac{v}{N}\right)} + e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}+\frac{v}{N}\right)}\}$$

$$= \frac{1}{16}\{4 + 4\cos\left(\frac{2\pi u}{M}\right) + 4\cos\left(\frac{2\pi v}{N}\right)$$
$$+ 2\cos\left(2\pi\left(\frac{u}{M}+\frac{v}{N}\right)\right) +$$
$$2\cos\left(2\pi\left(\frac{u}{M}-\frac{v}{N}\right)\right)\}$$

2) Función de transferencia Máscara Laplaciana

$$h(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(u,v) = -4 + e^{j\frac{2\pi u}{M}} + e^{-j\frac{2\pi v}{N}} + e^{j\frac{2\pi v}{N}} + e^{-j\frac{2\pi v}{N}}$$

$$= 4 + 2\cos\left(\frac{2\pi u}{M}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi v}{N}\right)$$

II.- Análisis en frecuencias II

1) Función de transferencia máscara gaussiana (3x3)

$$g(x,y) = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}\{ 4\delta(x,y) + 2\delta(x+1,y) + 2\delta(x-1,y) + 2\delta(x,y+1) + 2\delta(x,y-1) + \delta(x+1,y+1) + \delta(x+1,y-1) + \delta(x-1,y-1) + \delta(x-1,y+1)$$

$$\therefore g(u,v) = \frac{1}{16}\{ 4 + 2e^{j\frac{2\pi u}{M}} + 2e^{-j\frac{2\pi u}{M}} + 2e^{j\frac{2\pi v}{N}} + 2e^{-j\frac{2\pi v}{N}} + e^{j2\pi\left(\frac{u}{M}+\frac{v}{N}\right)} + e^{-j2\pi\left(-\frac{u}{M}+\frac{v}{N}\right)} + e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}+\frac{v}{N}\right)} + e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}+\frac{v}{N}\right)}\}$$

$$= \frac{1}{16}\{ 4 + 4\cos\left(\frac{2\pi u}{M}\right) + 4\cos\left(\frac{2\pi v}{N}\right) + 2\cos\left(2\pi\left(\frac{u}{M}+\frac{v}{N}\right)\right) + 2\cos\left(2\pi\left(\frac{u}{N}-\frac{v}{N}\right)\right)\}$$

2) Función de transferencia Máscara Laplaciana

$$h(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(u,v) = -4 + e^{j\frac{2\pi u}{M}} + e^{-j\frac{2\pi v}{N}} + e^{j\frac{2\pi v}{N}} + e^{-j\frac{2\pi v}{N}}$$

$$= 4 + 2\cos\left(\frac{2\pi u}{M}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi v}{N}\right)$$

3) Expresión analítica de la función de transferencia del Laplaciano

* Concepto previo: $\frac{\partial f}{\partial t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\Omega_k \, \mathcal{F}(\Omega_t, \Omega_z)$

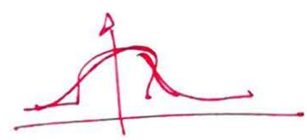
* Demostración:

$$f(t,z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\Omega_t, \Omega_z) \cdot e^{j(\Omega_t \cdot t + \Omega_z \cdot z)} \, d\Omega_t \, d\Omega_z$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} j\Omega_t \, \mathcal{F}(\Omega_t, \Omega_z) \cdot e^{j(\Omega_t \cdot t + \Omega_z \cdot z)} \, d\Omega_t \, d\Omega_z \quad \rightarrow \triangleq \hat{\mathcal{F}}(\Omega_t, \Omega_z)$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\Omega_t \cdot \mathcal{F}(\Omega_t, \Omega_z)$$

$g_\sigma(x,y) = g_\sigma(x)\, g_\sigma(y)$ $\qquad \frac{1}{4}\{1, 2, 1\}$



Distribución gaussiana → siempre separable.

De la misma forma:

$$\frac{\partial f}{\partial z} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\Omega_z \, \mathcal{F}(\Omega_t, \Omega_z)$$

Finalmente:

$$\nabla^2 f(t,z) = \frac{\partial f^2}{\partial t^2} + \frac{\partial f^2}{\partial z^2}$$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

$$[(j\Omega_t)^2 + (j\Omega_z)^2]\, \mathcal{F}(\Omega_t, \Omega_z)$$

$$= \underbrace{-[\Omega_t^2 + \Omega_z^2]}_{H(\Omega_t, \Omega_z)} \cdot \mathcal{F}(\Omega_t, \Omega_z)$$

$$\therefore \nabla^2_{x,y} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} -(\Omega_t^2 + \Omega_z^2)$$

* Notacion de gonzalez

$\Omega = 2\pi f$, es pectro centrado

$$-4\pi^2 \left[\left(f_1 - \frac{P}{2}\right)^2 + \left(f_2 - \frac{Q}{2}\right)^2 \right] F\left(f_1 - \frac{P}{2} ; f_2 - \frac{Q}{2}\right)$$

$$-4\pi^2 \left[\left(u - P/2\right)^2 + \left(u - Q/2\right)^2 \right] F\left(u - P/2 ; v - Q/2\right)$$

4) HIGH BOOST. FILTERING EN FRECUENCIA

$$g(x,y) = f(x,y) + k\{f(x,y) - h_{LP}(x,y) * f(x,y)\}$$

$$g(u,v) = F(u,v) + k\{F(u,v) - H_{LP}(u,v)\,F(u,v)\}$$

$$= F(u,v) + k\{F(u,v) \cdot \underbrace{(1 - H_{LP}(u,v))}_{H_{HP}(u,v)}\}$$

$$= F(u,v) \cdot \underbrace{\{1 + k\,H_{HP}(u,v)\}}_{H(u,v)}$$

Gaussiana $\rightarrow$ no genera oscilaciones
Banda ancha. (transicion suave)
$\hookrightarrow$ efecto adverso nunca deseado

Butterwor.. $\rightarrow$ cercano al filtro ideal y cercano al gaussiano.
es el más flexible.
permite mover y ver que tan suave.