Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales: Análisis en Frecuencia

MSc. Renán Rojas G.

Pontificia Universidad Católica del Perú

1. **Representación de señales periódicas a partir de exponenciales complejas armónicamente relacionadas**

- Considerar una señal periódica $x_c(t)$ de periodo fundamental T_p y frecuencia fundamental $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$:

$$x_c(t) = x_c(t + T_p), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Algunos ejemplos simples de este tipo de expresiones son:

Ejemplo 1: *sinusoidales*

$$x_c(t) = \cos(\Omega_0 t) = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 (t)} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 (t)}.$$

Ejemplo 2: *exponenciales complejas*

$$x_c(t) = e^{j\Omega_0 t}.$$

Serie de Fourier en tiempo continuo (*Continuous-time Fourier Series*) II

- Existe además un conjunto de señales caracterizadas por un mismo periodo (a pesar de tener distintos periodos fundamentales) denominadas *exponenciales complejas armónicamente relacionadas*:

$$s_k(t) = e^{jk\Omega_0 t}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- De forma general, cualquier señal periódica es expresable a partir de una *combinación lineal* de exponenciales complejas armónicamente relacionadas. A esta representación se le denomina **ecuación de síntesis**:

$$x_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t}, \quad c_k \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

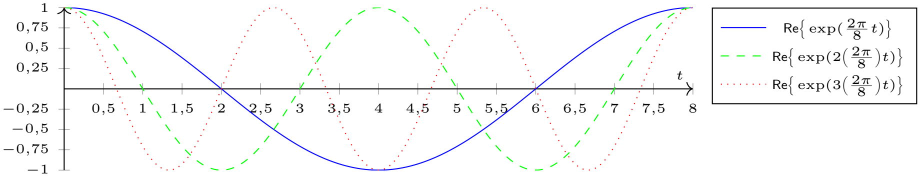
Especificamente:

a. El término de la serie para $k = 0$ es constante: $c_0 e^{j\cdot 0\cdot\Omega_0 t} = c_0$.

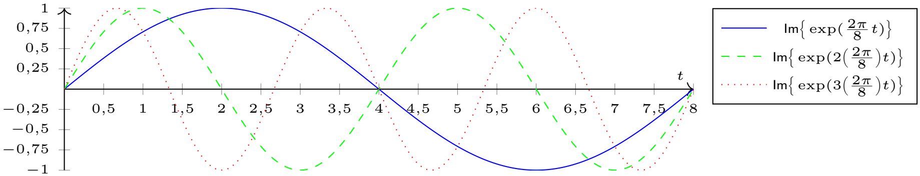
b. Los términos de la serie para $k \in \{-1, +1\}$ son de periodo fundamental T_p y se denominan *primeras componentes armónicas* o *componentes fundamentales*.

c. Los términos de la serie para $k \in \{-2, +2\}$ son de periodo fundamental $\frac{T_p}{2}$ y se denominan *segundas componentes armónicas*.

d. En general, los términos N-ésimos de la serie son de periodo fundamental $\frac{T_p}{N}$ y se denominan *N-ésimas componentes armónicas*.



(a) Componentes reales.



(b) Componentes imaginarias.

Figura 1: Exponenciales complejas armónicamente relacionadas $s_k(t)$ para $T_p = 8$ s.

- La representación de una señal periódica a partir de (1) se denomina **Representación en Series de Fourier** y la secuencia de coeficientes c_k se denomina **(coeficientes de la) Serie de Fourier** o **coeficientes espectrales**.

Ejemplo 1

Dada la señal $x_c(t)$ en su representación por *Series de Fourier en tiempo continuo*:

$$x_c(t) = \sum_{k=-3}^{3} c_k e^{j2\pi kt},$$

cuyos coeficientes corresponden a $c_k = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \underset{\uparrow}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$, simplificar su expresión.

Solución: del argumento de la exponencial compleja, se sabe que $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p} = 2\pi(\frac{\text{rad}}{\text{s}})$. Por lo tanto $T_p = 1$s. Entonces, expandiendo la sumatoria:

$$x_c(t) = 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}).$$

Finalmente, aplicando la identidad de Euler:

$$x_c(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t),$$

donde la frecuencia fundamental de la señal resultante es $T = 1$ s.

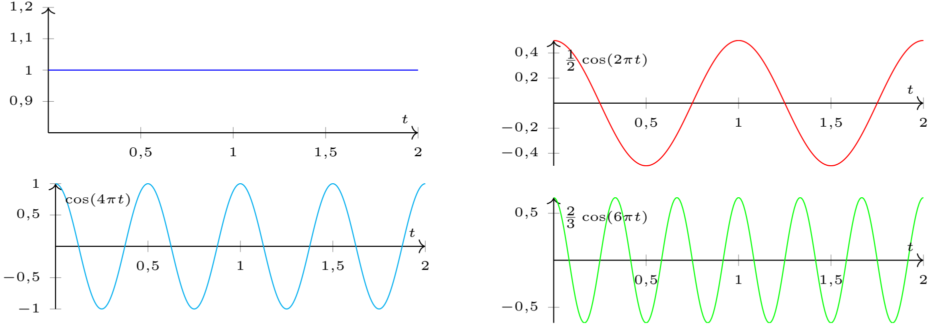


Figura 2: términos de $x_c(t)$.

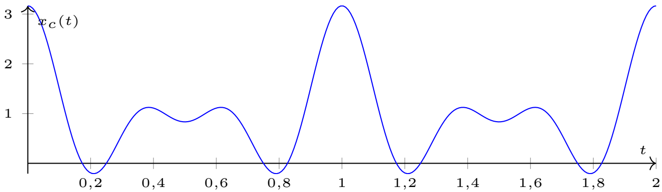


Figura 3: $x_c(t)$.

2. **Obtención de los coeficientes de la Serie de Fourier en Tiempo Contínuo**
   - Dado que las exponenciales complejas de (1) conforman una **base ortonormal**, es posible obtener la serie de Fourier c_k a partir de $x_c(t)$. La expresión resultante es denominada **ecuación de análisis**:

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x_c(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt, \qquad (2)$$

   - **Demostración de la Ecuación de Análisis**

Dada la relación propuesta por (1), se multiplica ambos miembros por $e^{-j\hat{k}\Omega_0 t}$, $\hat{k} \in \mathbb{Z}$:

$$x_c(t)e^{-j\hat{k}\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t} e^{-j\hat{k}\Omega_0 t}.$$

Luego, se integra ambos miembros en un intervalo T_p:

$$\begin{aligned}\int_{T_p} x_c(t)e^{-j\hat{k}\Omega_0 t}dt &= \int_{T_p} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t} e^{-j\hat{k}\Omega_0 t}dt.\\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \left(\int_{T_p} e^{jk\Omega_0 t} e^{-j\hat{k}\Omega_0 t}dt \right).\end{aligned}$$

Analizando la integral del segundo miembro y expresando su argumento en forma cartesiana:

$$\int_{T_p} e^{jk\Omega_0 t} e^{-j\hat{k}\Omega_0 t} dt = \int_{T_p} \cos[(k-\hat{k})\Omega_0 t] dt + j \int_{T_p} \sin[(k-\hat{k})\Omega_0 t] dt.$$

$$= \begin{cases} T_p & k = \hat{k} \\ 0 & k \neq \hat{k} \end{cases}.$$

Finalmente,

$$\int_{T_p} x_c(t) e^{-j\hat{k}\Omega_0 t} dt = T_p c_{\hat{k}}$$

$$c_{\hat{k}} = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x_c(t) e^{-j\hat{k}\Omega_0 t} dt$$

Ejemplo 2

Determinar la serie de Fourier de $x_c(t) = \sin(\Omega_0 t)$.

Solución: Aplicando la identidad de Euler:

$$x_c(t) = \frac{1}{2j}e^{j\Omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\Omega_0 t}.$$

Luego, asociando la expresión a la **ecuación de síntesis**:

$$x_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j\Omega_0 kt},$$

donde los coeficientes de la serie de Fourier corresponden a la secuencia:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} & , k = 1 \\ -\frac{1}{2j} & , k = -1 \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases} = \frac{1}{2j}\delta[k-1] - \frac{1}{2j}\delta[k+1] = -\frac{1}{2}j\delta[k-1] + \frac{1}{2}j\delta[k+1].$$

Luego, siendo c_k una secuencia compleja, es posible expresarla de forma exponencial a partir de su **espectro de magnitud** $|c_k|$ y su **espectro de fase** $\angle c_k$:

$$c_k = |c_k| e^{j\angle c_k}, \quad \angle c_k \triangleq \operatorname{tg}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{Im}\{c_k\}}{\mathrm{Re}\{c_k\}}\right\}.$$

Luego, para $x_c(t)$, el espectro de magnitud $|c_k|$ y espectro de fase $\angle c_k$ corresponden a:

$$|c_k| = \begin{cases} \frac{1}{2} & , k = \{-1, 1\} \\ 0 & , \text{ otros casos} \end{cases}, \quad \angle c_k = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & , k = 1 \\ \frac{\pi}{2} & , k = -1 \\ 0 & , \text{ otros casos} \end{cases}$$

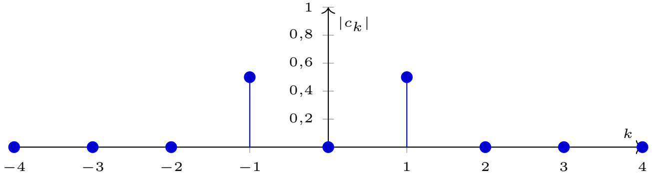


Figura 4: Espectro de magnitud $|c_k|$ para el ejemplo 2.

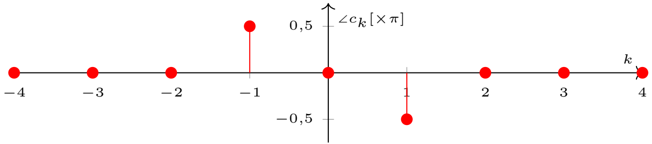


Figura 5: Espectro de fase $\angle c_k$ para el ejemplo 2.

Ejemplo 3

Dada la señal $x_c(t)$, determinar su serie de Fourier c_k:

$$x_c(t) = 1 + \sin(\Omega_0 t) + 2\cos(\Omega_0 t) + \cos(2\Omega_0 t + \frac{\pi}{4}).$$

Solución: $x_c(t)$ es una señal de periodo fundamental Ω_0. Luego, por la identidad de Euler:

$$x_c(t) = 1 + \left[\frac{1}{2j}e^{j\Omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\Omega_0 t}\right] + \left[e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}\right] + \underbrace{\left[\frac{1}{2}e^{j(2\Omega_0 t + \frac{\pi}{4})} + \frac{1}{2}e^{-j(2\Omega_0 t + \frac{\pi}{4})}\right]}_{=\left[\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j2\Omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j2\Omega_0 t}\right]}.$$

Serie de Fourier en tiempo continuo (*Continuous-time Fourier Series*) XIV

Finalmente, asociando la expresión resultante a la **ecuación de síntesis**:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= 1, & c_1 &= 1 + \frac{1}{2j}, & c_{-1} &= 1 - \frac{1}{2j}, \\
c_2 &= \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}, & c_{-2} &= \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}, & c_k &= 0, \quad |k| > 2.
\end{aligned}
$$

$$
c_k = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j), 1 + \frac{1}{2}j, \underset{\uparrow}{1}, 1 - \frac{1}{2}j, \frac{\sqrt{2}}{4}(1+j) \right\}.
$$

Para graficar su espectro, aplicamos ambas definiciones a c_k. Su espectro de magnitud corresponde a:

$$
|c_k| = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} & , k = \{-1, 1\} \\ \frac{1}{2} & , k = \{-2, 2\} \\ 0 & , \text{otros casos.} \end{cases} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \underset{\uparrow}{1}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} \right\}.
$$

De forma similar, su espectro de fase corresponde a:

$$\angle c_k = \begin{cases} 0 & ,k=0 \\ \tan^{-1}\left\{\frac{0{,}5}{1}\right\} & ,k=1 \\ \tan^{-1}\left\{\frac{-0{,}5}{1}\right\} & ,k=-1 \\ \frac{\pi}{4} & ,k=2 \\ -\frac{\pi}{4} & ,k=-2 \\ 0 & ,\text{otros casos} \end{cases} = \left\{-\frac{\pi}{4}, 0{,}4636, \underset{\uparrow}{0}, -0{,}4636, \frac{\pi}{4}\right\}\text{rad.}$$

Serie de Fourier en tiempo continuo (*Continuous-time Fourier Series*) XVI

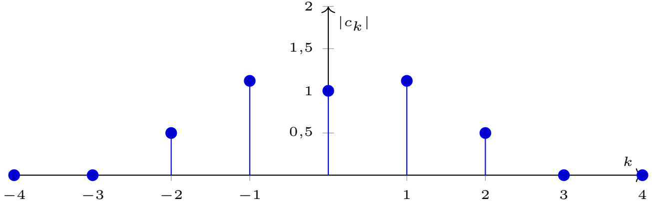


Figura 6: Espectro de magnitud $|c_k|$ para el ejemplo 3.

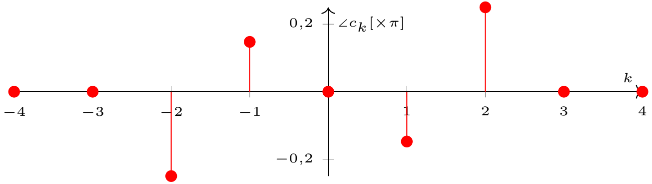


Figura 7: Espectro de fase $\angle c_k$ para el ejemplo 3.

Ejemplo 4

Determinar la serie de Fourier del pulso cuadrado de periodo T_p:

$$x_c(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < T_1 \\ 0 & , T_1 < |t| < \frac{T_p}{2} \end{cases},$$

Solución: en este caso, no es posible determinar la secuencia directamente a partir de la identidad de Euler, dado que su expresión original no está en funcion a sinusoidales. Aplicando directamente la **ecuación de análisis**:

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x_c(t) e^{j\Omega_0 kt} dt, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$$

Dado que $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$ y un periodo es diferente de 0 solo en el intervalo $[-T_1, T_1]$:

$$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{-T_1}^{T_1} \underbrace{x_c(t)}_{=1} e^{j\Omega_0 kt}dt = \frac{2}{\Omega_0 k T_p}\left[\frac{e^{j\Omega_0 kT_1} - e^{-j\Omega_0 kT_1}}{2j}\right] = \frac{\sin(\Omega_0 kT_1)}{\pi k}.$$

Para expresar c_k de forma simple, se hace uso de la función **Seno Cardinal**:

Definición: Seno Cardinal

$$\mathsf{sinc}(x) \triangleq \frac{\sin(x)}{x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

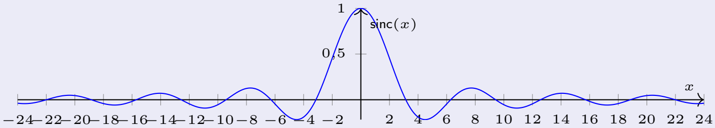


Figura 8: Seno cardinal sinc(x).

- A partir de la función seno cardinal y dándole la forma a c_k:

$$c_k = \frac{\frac{2T_1}{T_p}\sin\left(\frac{2\pi}{T_p}kT_1\right)}{\frac{2\pi}{T_p}kT_1} = \frac{2T_1}{T_p}\mathsf{sinc}\left(\frac{2\pi}{T_p}kT_1\right).$$

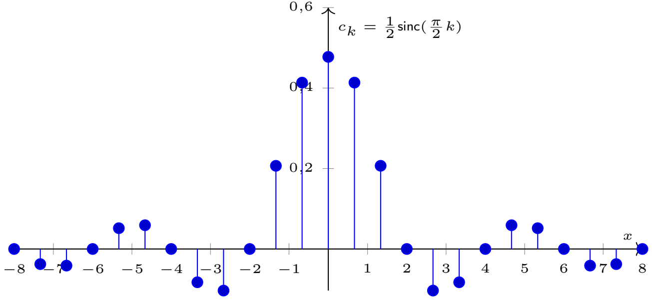


Figura 9: Serie de Fourier del ejemplo 4 para $T_p = 4T_1$.

Dado que el seno cardinal es una secuencia de duración infinita (y por lo tanto c_k también lo es), el pulso periódico requiere de una combinación lineal de *infinitas exponenciales complejas armónicamente relacionadas*.

3. **Resumen**
   a. Notación:

$$\begin{aligned} c_k &= \mathcal{F}\{x_c(t)\}, \\ x_c(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{c_k\}, \\ x_c(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} c_k. \end{aligned}$$

   b. Ecuación de Síntesis:

$$x_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

   c. Ecuación de Análisis:

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x_c(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt.$$

1. **Representación de secuencias periódicas a partir de exponenciales complejas armónicamente relacionadas**
   - Similar al caso en tiempo continuo, considerar una secuencia de periodo fundamental N y frecuencia fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$:

   $$x[n] = x[n+N], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

   - Algunos ejemplos simples de este tipo de secuencias son:

   Ejemplo 1 *sinusoidales*

   $$x[n] = cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}.$$

   Ejemplo 2 *exponenciales complejas*

   $$x[n] = e^{j\omega_0 n}.$$

Serie de Fourier en tiempo discreto (*Discrete-time Fourier Series*) II

- Existe además un conjunto de señales caracterizadas por un mismo periodo (a pesar de tener distintos periodos fundamentales) denominadas *exponenciales complejas armónicamente relacionadas*:

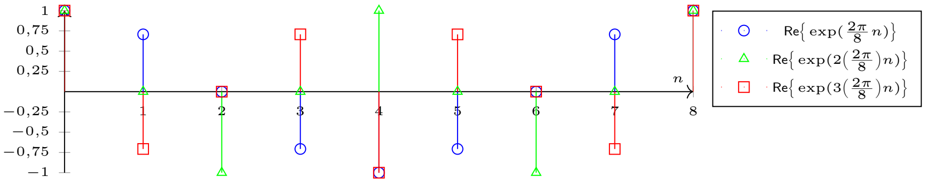
$$s_k[n] = e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- De forma general, cualquier señal periódica es expresable a partir de una *combinación lineal* de exponenciales complejas armónicamente relacionadas.

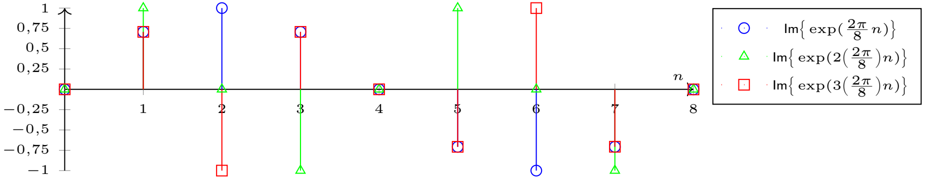
  A diferencia del caso en tiempo continuo, $s_k[n]$ se caracteriza por tener solo N secuencias distintas entre sí (el resto son *Alias*). Por lo tanto, la combinación lineal se basa únicamente en N exponenciales complejas y se denomina **ecuación de síntesis**:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} c_k e^{jk\omega_0 n}, \quad c_k \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

  donde $< N >$ indica la cualquier intervalo consecutivo de N enteros (Por ejemplo, $\{0, \ldots, N-1\}, \{4, \ldots, N-3\}$, etc.).



(a) Componentes reales.



(b) Componentes imaginarias.

Figura 10: Exponenciales complejas armónicamente relacionadas $s_k[n]$ para $N = 8$ muestras.

- La representación de una señal periódica a partir de (3) se denomina **Representación en Series de Fourier** y la secuencia de coeficientes c_k se denomina **(coeficientes de la) Serie de Fourier** o **coeficientes espectrales**.

2. **Obtención de los coeficientes de la Serie de Fourier en Tiempo Discreto**
   - Dado que las exponenciales complejas de (3) conforman una **base ortonormal**, es posible obtener la serie de Fourier c_k a partir de $x[n]$. La expresión resultante es denominada **ecuación de análisis**:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}. \tag{4}$$

- **Demostración:** Dada la *ecuación de síntesis*, se multiplica ambos miembros por $e^{-j\hat{k}\omega_0 n}$, $\hat{k} \in \mathbb{Z}$:

$$x[n]e^{-j\hat{k}\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{jk\omega_0 n} e^{-j\hat{k}\omega_0 n}.$$

Luego, se suma ambos miembros en un periodo fundamental, denotado como $\langle N \rangle$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]e^{-j\hat{k}\omega_0 n} &= \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{jk\omega_0 n} e^{-j\hat{k}\omega_0 n}. \\ &= \sum_{k=\langle N \rangle} c_k \left(\sum_{n=\langle N \rangle} e^{jk\omega_0 n} e^{-j\hat{k}\omega_0 n} \right). \end{aligned}$$

Analizando la sumatoria del segundo miembro y expresando su argumento en forma cartesiana:

$$\sum_{n=\langle N\rangle} e^{jk\omega_0 n} e^{-j\hat{k}\omega_0 n} = \sum_{n=\langle N\rangle} \cos[(k-\hat{k})\omega_0 n] + j \sum_{n=\langle N\rangle} \sin[(k-\hat{k})\omega_0 n].$$

$$= \begin{cases} N & k = \hat{k} \\ 0 & k \neq \hat{k} \end{cases}.$$

Finalmente,

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-j\hat{k}\omega_0 n} = N c_{\hat{k}}$$

$$c_{\hat{k}} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-j\hat{k}\omega_0 n}.$$

De esta expresión, se puede deducir que c_k, la **Serie de Fourier** de $x[n]$ con periodo fundamental N, es también una secuencia periódica con el mismo periodo fundamental: $c_{k+N} = c_k$.

$$\begin{aligned} c_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-j(k+N)\omega_0 n} &= \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-j(k)\frac{2\pi}{N}n}e^{-j(N)\frac{2\pi}{N}n} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-j(k)\frac{2\pi}{N}n} \\ &= c_k. \end{aligned}$$

Esto implica que la serie de Fourier de una secuencia periódica c_k existe para todo entero k, pero solo es necesario un conjunto de N muestras consecutivas para obtener $x[n]$.

Ejemplo 5

Determinar la serie de Fourier de $x[n] = \sin(\omega_0 n)$.

Solución: Aplicando la identidad de Euler:

$$x[n] = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 n} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 n}.$$

Luego, asociando la expresión a la **ecuación de síntesis:**

$$x[n] = \sum_{k=<N>} c_k e^{jk\omega_0 n}, \quad c_k \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Es necesario definir un intervalo de N muestras consecutivas para (5).

a. Para un intervalo de N muestras consecutivas centrado en $k = 0$, los coeficientes de la serie de Fourier de $x[n]$ corresponden a:

$$c_1 = \frac{1}{2j} = -\frac{1}{2}j, \qquad c_{-1} = -\frac{1}{2j} = \frac{1}{2}j, \qquad c_k = 0, \text{ otros casos dentro del intervalo.}$$

b. Para un intervalo de N muestras consecutivas centrado en $k = N$, es util expresar de forma alternativa $x[n]$. Dado que $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 n} - \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n} \\ &= \frac{1}{2j}e^{j(N+1)\omega_0 n} - \frac{1}{2j}e^{j(N-1)\omega_0 n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los coeficientes de la serie de Fourier de $x[n]$ corresponden a:

$$c_{N+1} = \frac{1}{2j} = -\frac{1}{2}j, \qquad c_{N-1} = -\frac{1}{2j} = \frac{1}{2}j, \qquad c_k = 0, \text{otros casos dentro del intervalo.}$$

c. En general, la secuencia $x[n]$ es expresable como:

$$x[n] = \frac{1}{2j}e^{j(rN+1)\omega_0 n} - \frac{1}{2j}e^{j(rN-1)\omega_0 n}, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, los coeficientes son de periodo N y es posible considerar cualquier intervalo de N muestras consecutivas. Analizando además el espectro de magnitud $|c_k|$ y espectro de fase $\angle c_k$ de la serie de Fourier:

$$c_k = \begin{cases} -\frac{1}{2}j & , k = rN+1 \\ \frac{1}{2}j & , k = rN-1 \\ 0 & , \text{otros casos} \end{cases}.$$

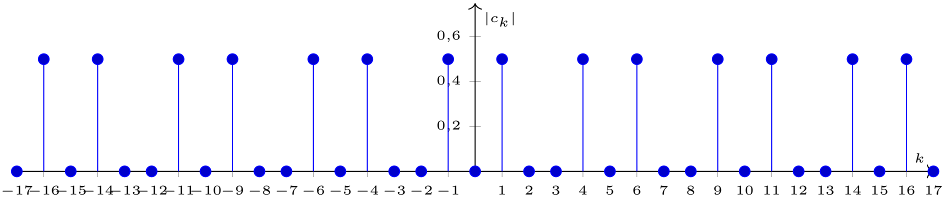


Figura 11: Espectro de magnitud $|c_k|$ para $N = 5$ del ejemplo 5.

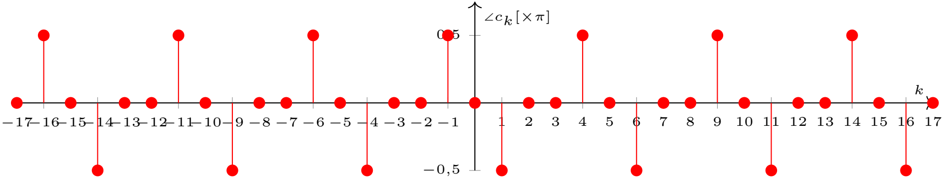


Figura 12: Espectro de fase $\angle c_k$ para $N = 5$ del ejemplo 5.

Ejemplo 6:

Determinar la serie de Fourier de la secuencia $x[n]$ de periodo fundamental N:

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right).$$

Solución: Aplicando la identidad de Euler:

$$x[n] = 1 + \left[\frac{1}{2j}e^{j\frac{2\pi n}{N}} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{2\pi n}{N}}\right] + \left[\frac{3}{2}e^{j\frac{2\pi n}{N}} + \frac{3}{2}e^{-j\frac{2\pi n}{N}}\right] + \underbrace{\left[\frac{1}{2}e^{j(\frac{4\pi n}{N}+\frac{\pi}{2})} + \frac{1}{2}e^{-j(\frac{4\pi n}{N}+\frac{\pi}{2})}\right]}_{=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{4\pi n}{N}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j\frac{4\pi n}{N}}}.$$

Luego, asociando la expresión resultante a la **ecuación de síntesis** para un intervalo de N muestras consecutivas centrado en $k = 0$:

$$c_0 = 1, \qquad c_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j, \qquad c_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j,$$

$$c_2 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}, \qquad c_{-2} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}, \qquad c_k = 0, \text{ otros casos dentro del intervalo.}$$

Finalmente, dentro del intervalo $< N >$, su espectro de magnitud y espectro de fase son:

$$|c_k| = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} & , k \in \{-1, 1\} \\ \frac{1}{2} & , k \in \{-2, 2\} \\ 0 & , \text{otros casos} \end{cases}, \quad \angle c_k = \begin{cases} 0 & , k = 0 \\ \mathrm{tg}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right\} & , k = 1 \\ \mathrm{tg}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right\} & , k = -1 \\ \frac{\pi}{2} & , k = 2 \\ -\frac{\pi}{2} & , k = -2 \\ 0 & , \text{otros casos} \end{cases}.$$

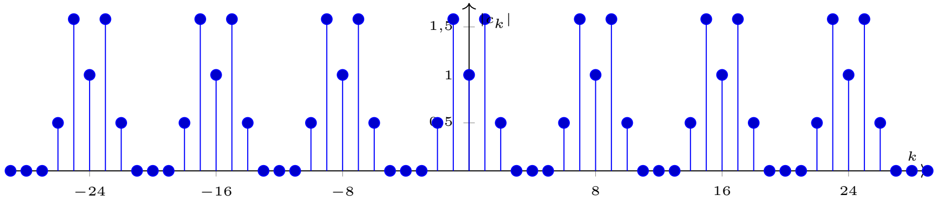


Figura 13: Espectro de magnitud $|c_k|$ para $N = 8$ del ejemplo 6.

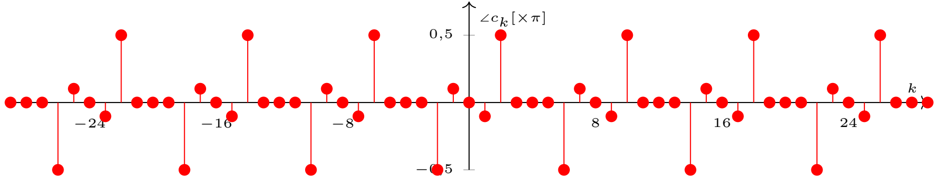
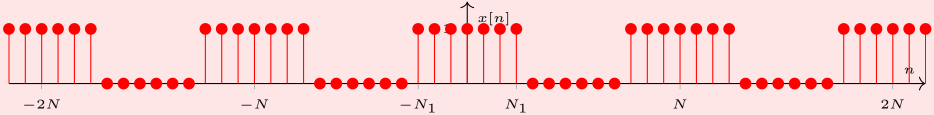


Figura 14: Espectro de fase $\angle c_k$ para $N = 8$ del ejemplo 6.

Ejemplo 7:

Determinar la serie de Fourier del pulso cuadrado en tiempo discreto de periodo N:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & , |n| \leq N_1 \\ 0 & , \text{otros casos} \end{cases}, \quad x[n] = x[n+N].$$



Solución: ya que la secuencia no es facilmente expresable a partir de sinusoidales, se usa la **ecuación de análisis**. Considerando N muestras consecutivas en centradas en $k=0$ y la frecuencia fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$:

$$c_k = \sum_{<N>} x[n]e^{-j\omega_0 kn} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} \underbrace{x[n]}_{=1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Luego, aplicando un cambio de variable: $\hat{n} = n + N_1$:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{\hat{n}=0}^{2N_1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(\hat{n}-N_1)} = e^{j\frac{2\pi}{N}N_1}\sum_{\hat{n}=0}^{2N_1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k\hat{n}}.$$

Aplicando la serie geométrica de duración finita:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{N} e^{j\frac{2\pi}{N}kN_1} & , \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = 1}_{k=rN, \quad r\in\mathbb{Z}} \\ \frac{1}{N} e^{j\frac{2\pi}{N}kN_1} \left[\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}(2N_1+1)}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}}}\right] & , \text{ otros casos} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{N}(2N_1+1) & , k = rN, \quad r \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{N} \frac{\sin\left[\frac{2\pi k}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin(\frac{\pi k}{N})} & , \text{ otros casos} \end{cases}$$

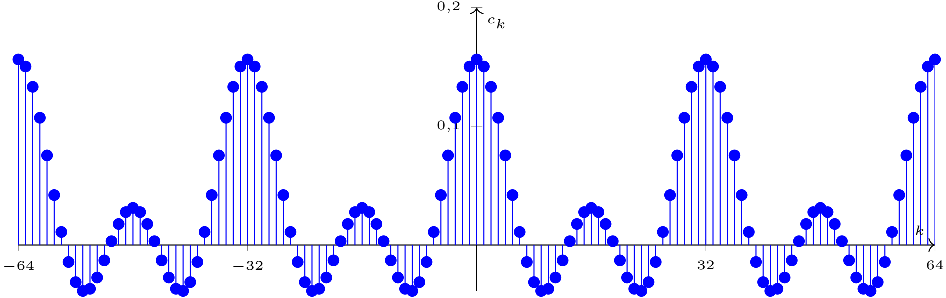


Figura 15: Serie de Fourier c_k del ejemplo 7 para $N = 32$ y $N_1 = 2$.

1. **Señales en tiempo continuo de periodo infinito**

- Una señal no periódica $x(t)$ puede considerarse como *una señal periódica* $x_c(t)$ *cuyo periodo fundamental* T_p *tiende a un valor muy grande*. Entonces, es posible representar a $x(t)$ a partir de exponenciales complejas:

$$x(t) \triangleq \lim_{T_p \to \infty} x_c(t).$$

- Considerar la señal no periódica $x(t)$ y la señal periódica $x_c(t)$ descrita en la Figura 16:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < T_1 \\ 0 & , \text{otros casos} \end{cases}.$$

De sus expresiones, $x(t)$ puede representarse como la señal $x_c(t)$ para $T_p \to \infty$.

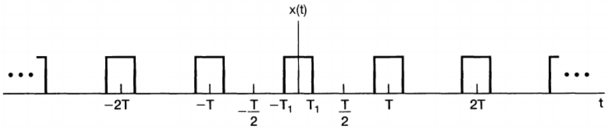


Figura 16: Señal $x_c(t)$ de periodo T_p.

- Se sabe que la representación en series de Fourier de $x_c(t)$ es:

$$x_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j\Omega_0 kt}, \quad c_k = \frac{2\sin(k\Omega_0 T_1)}{k\Omega_0 T_p}.$$

De forma alternativa, c_k es expresable como muestras escaladas y uniformemente espaciadas de una función contínua en frecuencia o *envolvente* $X(j\Omega)$, tal como muestra la Figura 17:

$$c_k = \frac{1}{T_p} X(j\Omega)\bigg|_{\Omega = k\Omega_0}, \quad X(j\Omega) \triangleq \frac{2\sin(\Omega T_1)}{\Omega}.$$

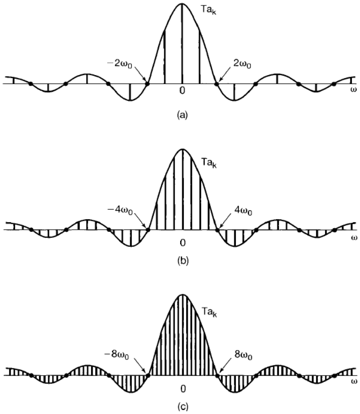


Figure 4.2 The Fourier series coefficients and their envelope for the periodic square wave in Figure 4.1 for several values of T (with T_1 fixed): (a) $T = 4T_1$; (b) $T = 8T_1$; (c) $T = 16T_1$.

Figura 17: Series de Fourier de $x_c(t)$ para diferentes valores de T_p.

- Ya que la distancia entre elementos de c_k corresponde a $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$, esta se reduce si T_p aumenta. Entonces, para $T_p \to \infty$, la distancia entre elementos tiende a 0 y c_k se aproxima a la envolvente $X(j\Omega)$.

2. **Representación de Fourier para Señales no periódicas**

- De forma general, para una señal $x_c(t)$ de periodo muy grande, su serie de Fourier es calculable a partir de la ecuación de análisis:

$$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2} x_p(t)e^{-j\Omega_0 kt}dt.$$

- Dado que $T_p \to \infty$:

$$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{-\infty}^{\infty} x_p(t)e^{-j\Omega_0 kt}dt.$$

- Si se define la envolvente $X(j\Omega)$ como:

$$X(j\Omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t)e^{-j\Omega t}dt,$$

entonces, una expresión alternativa para la Serie de Fourier corresponde a:

$$c_k = \frac{1}{T_p} X(j\Omega)\Big|_{\Omega = k\Omega_0},$$

y su representación en series de Fourier se expresa como:

$$x_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{T_p} X(jk\Omega_0)}_{c_k} e^{j\Omega_0 kt}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\Omega_0)e^{j\Omega_0 kt}\Omega_0$$

- Finalmente, para $T_p \to \infty$, $\Omega_0 \to 0$. Por lo tanto, $k\Omega_0$ tiende a un dominio continuo denotado por Ω y el espaciamiento Ω_0 se considera un diferencial $d\Omega$. Según ello, la sumatoria se convierte en una integral y se denomina **Transformada de Fourier inversa**:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

- De forma similar, la envolvente se denomina **Transformada de Fourier**:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t) e^{-j\Omega t} dt.$$

- Dado que la transformada de Fourier $X(j\Omega)$ es una función compleja ($\in \mathbb{C}$), es posible expresarla en forma exponencial a partir de su **espectro de magnitud** y su **espectro de fase**:

$$X(j\Omega) = |X(j\Omega)| e^{j\angle X(j\Omega)}, \quad \angle X(j\Omega) \triangleq \operatorname{tg}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{Im}\{X(j\Omega)\}}{\mathrm{Re}\{X(j\Omega)\}}\right\}.$$

3. **Resumen**

   a. Notación:

$$X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\},$$
$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\Omega)\},$$
$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega).$$

   b. Transformada de Fourier inversa:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega, \quad \Omega \in \mathbb{R}.$$

   c. Transformada de Fourier:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt.$$

Transformada de Fourier en tiempo continuo para señales periódicas I

- Es necesaria una representación de **señales periódicas** basada en la **transformada de Fourier** para analizar operaciones entre señales periódicas y no periódicas.
- Para señales periódicas, también es posible asumir un periodo infinito.
- La **Transformada de Fourier** de una señal periódica se obtiene directamente de su **serie de Fourier**.
- **Señal elemental de interés:** $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$.

$$e^{j\Omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} c_k = \delta(k-1)$$

- Luego, es demostrable que su **transformada de Fourier** es:

$$e^{j\Omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega) = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$$

- Demostración:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$= e^{j\Omega_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-\Omega_0)d\Omega$$

$$\therefore x(t) = e^{j\Omega_0 t}$$

Transformada de Fourier en tiempo continuo para señales periódicas

De forma general, la **transformada de Fourier** de una señal periódica se obtiene del resultado anterior ya que la **serie de Fourier** es una suma ponderada de exponenciales complejas:

$$X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

- **Ejemplo: Tren de impulsos de periodo** T**:** $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta(t)e^{-j\Omega(0)}dt$$

Transformada de Fourier en tiempo continuo para señales periódicas IV

$$\therefore c_k = \frac{1}{T}$$

- Luego, su **transformada de Fourier** es:

$$X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

1. **Secuencias de periodo infinito**

- Similar al caso en tiempo continuo, una secuencia no periódica puede representarse como una secuencia de un periodo muy grande. Entonces, es posible extender el concepto de representación en exponenciales complejas a este tipo de secuencias:

$$x[n] \triangleq \lim_{N \to \infty} x_p[n].$$

- Considerar la secuencia no periódica $x[n]$ y la secuencia $x_p[n]$ de periodo fundamental N mostrada en la Figura 18:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & , |n| \leq N_1 \\ 0 & , \text{otros casos} \end{cases}.$$

La secuencia $x[n]$ puede ser representada como $x_p[n]$ para un periodo funcamental $N \to \infty$.

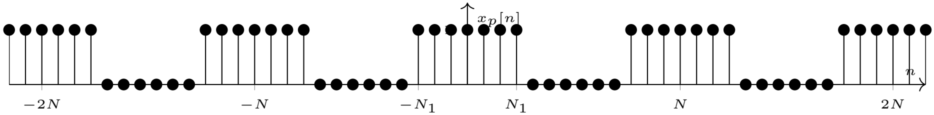


Figura 18: Secuencia $x_p[n]$ de periodo N.

2. Representación de Fourier para señales no periódicas
   - De forma general, para una secuencia $x_p[n]$ de periodo muy grande, su serie de Fourier es calculable a partir de la ecuación de análisis:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-j\omega_0 kn}$$

Dado que la secuencia es diferente de cero solo en el intervalo $\{-N_1, \ldots, N_1\}$, es posible extender los indices de sumatoria de su serie de Fourier:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega_0 kn}.$$

- Los coeficientes c_k pueden ser representados como muestras escaladas de una función contínua o **envolvente** $X(e^{j\omega})$:

$$c_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=k\omega_0}, \qquad X(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}.$$

Cabe recalcar que la envolvente es de periodo 2π:

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$$

- De la definición anterior, $x[n]$ es expresado como:

$$x[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})}_{c_k} e^{j\omega_0 kn}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(e^{jk\omega_0}) e^{j\omega_0 kn} \omega_0$$

Finalmente, ya que ω_0 tiende a 0 para un periodo N grande, $k\omega_0$ se convierte en un dominio continuo ω y ω_0 en un diferencial. Por lo tanto, la sumatoria se convierte en una integral y se denomina **transformada de Fourier inversa**:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Donde la integral se hace en cualquier intervalo 2π ya que $X(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ es de periodo 2π.

- De forma similar, la envolvente se denomina **Transformada de Fourier**:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}.$$

- Dado que la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ es una función compleja ($\in \mathbb{C}$), es posible expresarla en forma exponencial a partir de su **espectro de magnitud** y su **espectro de fase**:

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}, \quad \angle X(e^{j\omega}) \triangleq \mathrm{tg}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}}{\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}}\right\}.$$

3. **Resumen**

a. Notación:

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \mathcal{F}\{x[n]\}, \\
x[n] &= \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}, \\
x[n] &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}).
\end{aligned}
$$

b. Transformada de Fourier inversa:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

c. Transformada de Fourier:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}.$$

- Similar al caso en tiempo continuo, la Serie de Fourier de una secuencia periódica puede interpretarse como un tren de impulsos en un dominio de frecuencia continuo. De esta forma, podemos expresar secuencias periódicas bajo el concepto de **transformada de Fourier**.
- Considerar la secuencia $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$cuya serie de Fourier corresponde a:

$$c_k = \mathcal{F}\{x[n]\} = \begin{cases} 1 & , k = rN, \quad r \in \mathbb{Z} \\ 0 & , \text{otros casos.} \end{cases}$$

Luego, su transformada de Fourier corresponde a:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

- **Demostración:** Si aplicamos la transformada de Fourier inversa:

$$
\begin{aligned}
x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \underbrace{\sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)}_{X(e^{j\omega})} e^{j\omega n} d\omega \\
&= \int_{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{j(\omega_0+2\pi l)n}}_{e^{j\omega_0 n}} \delta(\omega-\omega_0-2\pi l) d\omega \\
&= e^{j\omega_0 n} \underbrace{\int_{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-\omega_0-2\pi l) d\omega}_{1} \\
&= e^{j\omega_0 n}
\end{aligned}
$$

.

Transformada de Fourier en tiempo discreto para señales periódicas

De forma general, la **transformada de Fourier** en tiempo discreto de una secuencia periódica se obtiene del resultado anterior ya que la **serie de Fourier** es una combinación lineal de exponenciales complejas:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

1. **Integral de Convolución**: Dado un sistema LTI en tiempo continuo, su respuesta ante una entrada arbitraria $x(t)$ es calculable a partir de la convolución entre su respuesta al impulso $h(t)$ y la señal de entrada

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

2. **Propiedad de convolución en tiempo continuo**: El resultado de convolucionar dos señales en tiempo continuo $x(t)$ y $h(t)$ equivale a la transformada inversa de Fourier del producto de sus espectros de frecuencia $X(j\Omega)$ y $H(j\Omega)$, respectivamente.

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\Omega) = X(j\Omega) \cdot H(j\Omega).$$

Demostración de la propiedad de convolución:

$$\begin{aligned}Y(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\Omega t}dt\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)e^{-j\Omega t}dt\right]d\tau\end{aligned}$$

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)e^{-j\Omega t}dt\right] = H(j\Omega)e^{-j\Omega\tau}; \quad \text{(Propiedad de Desplazamiento)}$$

$$= H(j\Omega)\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{j\Omega\tau}d\tau$$

$$\therefore Y(j\Omega) = X(j\Omega)\cdot H(j\Omega).$$

3. **Propiedad de multiplicación en tiempo continuo**: El resultado de multiplicar dos señales en tiempo continuo $s(t)$ y $p(t)$ equivale a la transformada inversa de Fourier de la convolución de sus espectros de frecuencia $S(j\Omega)$ y $P(j\Omega)$, respectivamente.

$$
\begin{aligned}
r(t) = s(t) \cdot p(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} R(j\Omega) =& \frac{1}{2\pi}\Big[S(j\Omega) * P(j\Omega)\Big] \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\Theta)P(j(\Omega - \Theta))d\Theta
\end{aligned}
$$

4 **Simetría del espectro de señales reales en tiempo continuo**:

El espectro de frecuencia de $x(t) \in \mathbb{R}$ es conjugado simétrico:

$$c_k = c_{-k}^*; \quad \text{Simetría para serie de Fourier}$$

$$X(j\Omega) = X^*(-j\Omega); \quad \text{Simetría para transformada de Fourier}$$

Ello implica que su **espectro de magnitud** es una función par y su **espectro de fase** es una función impar:

$$|c_k| = |c_{-k}|, \qquad |X(j\Omega)| = |X(-j\Omega)|.$$

$$\angle c_{-k} = -\angle c_k, \qquad \angle X(-j\Omega) = -\angle X(j\Omega).$$

1. **Procedimiento para obtener una señal discreta en el tiempo $x[n]$ a partir de $x_c(t)$**

   1. **Modulación de tren de impulsos**: dado el tren de impulsos $s(t)$:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

Se obtiene la señal modulada $x_s(t)$:

$$x_s(t) = x_c(t) \cdot s(t) = x_c(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

La transformada de Fourier del tren de impulsos está definida como:

$$s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k \cdot \Omega_s); \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

Entonces, por la propiedad de multiplicación en tiempo continuo:

$$x_s(t) = x_c(t) \cdot s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega)$$

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\Omega - k \cdot \Omega_s))$$

Por lo tanto, $X_s(j\Omega)$ consiste en repeticiones periódicas de $X_c(j\Omega)$ desplazadas múltiplos de Ω_s.

Asumiendo $x(t)$ real, existe un valor de Ω_s mínimo para evitar el traslape de repeticiones **(Aliasing)**.

2. **Conversión de tren de impulsos a secuencia discreta**: se obtiene $x[n]$ cuyo dominio es el espacio de muestras y no contiene información del periodo de muestreo.

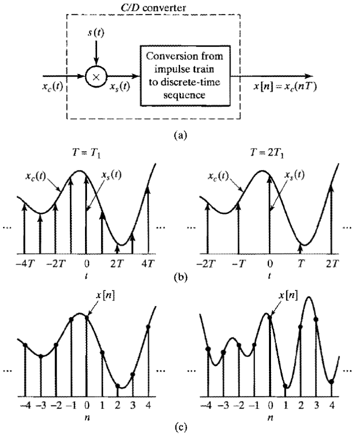
3. **Normalización de frecuencia:** Mientras que el espectro de $x_s(t)$ está en función a Ω, El espectro de $x[n]$ está en función a frecuencia normalizada $\omega = \Omega \cdot T = \frac{\Omega}{F_s}$.

   Entonces, la relación entre espectros de frecuencia se denota como:

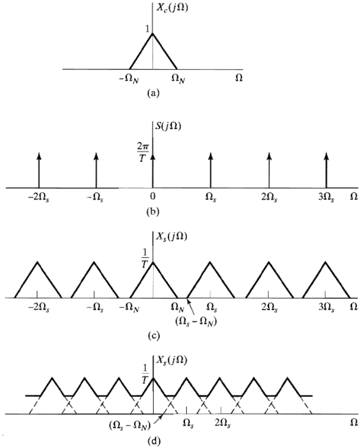
$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = X_s(j\Omega)\Big|_{\Omega=\frac{\omega}{T}}$$

$$\therefore X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - k \cdot \frac{2\pi}{T}\right)\right)$$

4 **Efecto de normalización de frecuencia**: $\omega = 2\pi$ representa $\Omega = \Omega_s$



(a) Secuencia $x[n] = x_c(nT)$ a partir de un conversor analógico/digital ideal.



(b) Relación entre $X_c(j\Omega)$ y $X_s(j\Omega)$.

i. Dada una señal $x_c(t)$ con espectro $X_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \Omega_{\text{max}}$, si se obtiene una señal muestreada $x[n]$ con $F_s \geq 2\Omega_{\text{max}}$, entonces las repeticiones en la señal muestreada no se traslapan (no hay efecto **Aliasing**).

ii. Entonces, el espectro de la señal muestreada $X(e^{j\omega})$ es idéntico al espectro de la señal analógica $X(j\Omega)$ en el rango de frecuencia fundamental $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

iii. Por el contrario, si $F_s < 2\Omega_{\text{max}}$, se genera un traslape en el rango de frecuencia fundamental.

iv. Sin aliasing en la versión discreta $x[n]$, es posible reconstruir $x_c(t)$

v. **Notación:**
   - Espectro de $x(t)$ según *Oppenheim*: $X(j\Omega)$; *Proakis*: $X(F)$.
   - Espectro de $x[n]$ según *Oppenheim*: $X(e^{j\omega})$; *Proakis*: $\{X(f), X(F)\}$.

1. **Conversión de secuencia discreta a tren de impulsos**

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta(t - nT)$$

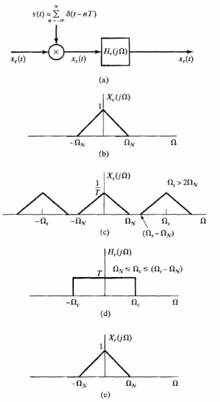
2. **Convolución con filtro de interpolación ideal**

$$h_r(t) = \frac{\sin\{\frac{\pi}{T}t\}}{\frac{\pi}{T}t}; \quad x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]h_r(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\left(\frac{\sin\{\frac{\pi}{T}(t - nT)\}}{\frac{\pi}{T}(t - nT)}\right)$$

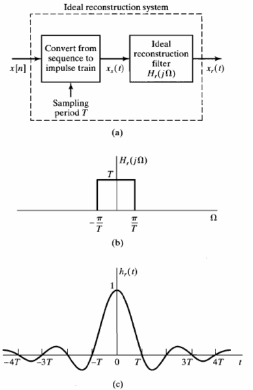
El espectro del sistema $H_r(j\Omega)$ corresponde a un **filtro pasabajos ideal** de ganancia T y frecuencia de corte $\frac{\pi}{T}$:

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases}.$$

Entonces, $h_r(t)$ es un sistema continuo que elimina réplicas en frecuencia fuera del **rango fundamental**.



(c) Filtro pasabajos ideal $h_r(t)$.



(d) Conversor digital/analógico ideal.

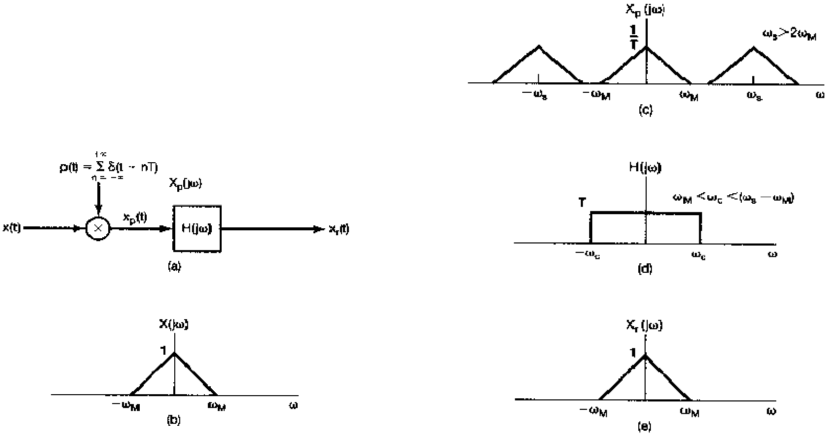


Figura 19: Reconstrucción perfecta de la señal continua para muestreo libre de Aliasing.

- Una señal puede ser discretizada, procesada de forma digital y el resultado convertido nuevamente a tiempo continuo. Entonces, un sistema de procesamiento en tiempo discreto puede reemplazar a un sistema de procesamiento en tiempo continuo.

Figura 20: Sistema de procesamiento discreto en el tiempo.

1. Conversor analógico a digital: Genera la señal discreta $x[n] = x_a(nT)$; $\quad T = \frac{1}{F_s}$ a partir de la entrada continua $x_a(t)$.

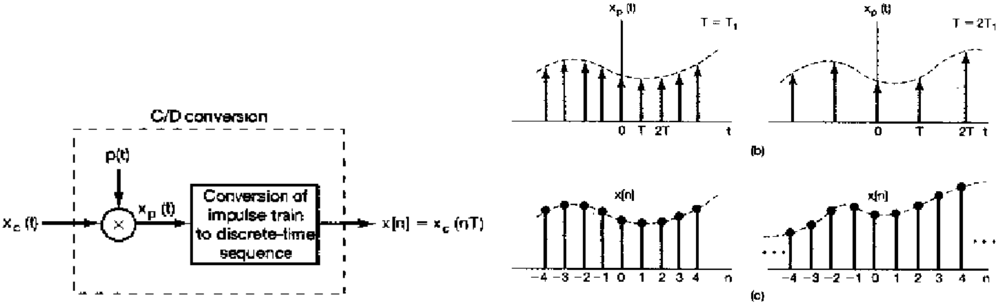


Figura 21: Convertidor analógico a digital.

2. Conversor digital a analógico: Una vez hallada la $y[n]$ (la respuesta del **sistema discreto de interés** a la entrada $x[n]$), genera la señal continua $y_a(t)$ al eliminar la periodicidad de la señal discreta (**filtro pasabajos ideal**).

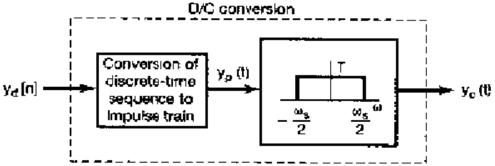


Figura 22: Convertidor digital a analógico.

3. Finalmente, el sistema de procesamiento discreto en el tiempo puede ser modelado de manera global como un sistema continuo:

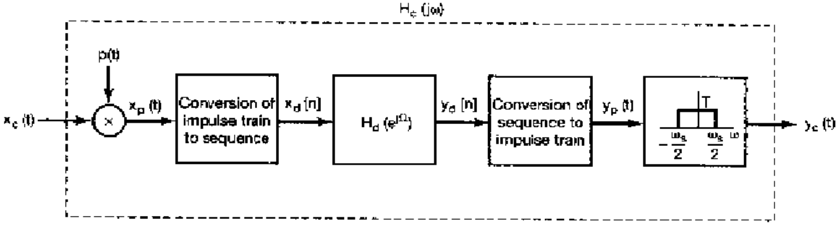


Figura 23: Sistema continuo usando procesamiento discreto.

Motivación:

Dada una señal discreta $x[n]$ muestreada a $F_x = \frac{1}{T_x}$, es posible cambiar su frecuencia de muestreo a partir de operaciones en tiempo discreto?

a. *Alternativa 1:* convertir $x[n]$ a $y(t)$ a partir de una *conversión de digital a analógico* y tomar muestras del resultado a $F_y = \frac{1}{T_y}$.

Dado el filtro de reconstrucción $g(t)$ y el tren de impulsos modulado $\hat{x}_s(t)$, la señal reconstruida $\hat{x}(t)$ corresponde a:

$$\hat{x}(t) = \underbrace{\left(\sum_{\hat{n}=-\infty}^{+\infty} x(\hat{n}T_x)\delta(t-\hat{n}T_x)\right)}_{\hat{x}_s(t)} * g(t),$$

$$= \sum_{\hat{n}=-\infty}^{+\infty} x(\hat{n}T_x)g(t-\hat{n}T_x). \tag{6}$$

Cambio de tasa de muestreo II

Luego, la secuencia obtenida bajo la nueva frecuencia de muestreo correspondería a:

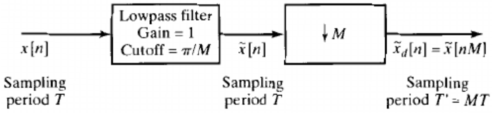
$$y[n] \triangleq \hat{x}(nT_y) = \sum_{\hat{n}=-\infty}^{+\infty} x(\hat{n}T_x) \cdot g(nT_y - \hat{n}T_x).$$

Esto permite obtener $y[n]$ muestreada a $F_y = \frac{1}{T_y}$ a partir de $x[n]$ muestreada a $F_x = \frac{1}{T_x}$.

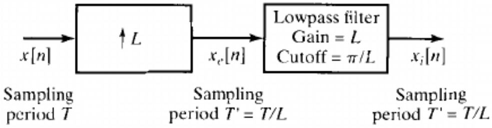
b. *Alternativa 2:* procesamiento enteramente discreto.

- **Submuestreo (Downsampling)**: reducir la frecuencia de muestreo F_x por un factor entero D.
- **Sobremuestreo (Upsampling)**: aumentar la frecuencia de muestreo F_x por un factor entero I.

Cambio de tasa de muestreo III



(a) filtro pasabajos + downsampling



(b) upsampling + filtro pasabajos

Figura 24: Bloques básicos para el cambio de tasa de muestreo.

1. Reducir F_x por un factor entero D. De (6) y la relación $T_y = DT_x$:

$$y(n \underbrace{T_y}_{DT_x}) = \sum_{\hat{n}=-\infty}^{+\infty} x(\hat{n}T_x) g(nDT_x - \hat{n}T_x);$$

   Dado que el filtro de interpolación ideal $g(t)$ se desplaza en incrementos de DT_x, $y(n \cdot T_y)$ toma 1 de cada D muestras de $x(nT_x)$. Entonces, se cumple la siguiente relación:

$$y[n] = x[nD].$$

2. La secuencia submuestreada $y[n]$ se caracteriza por el siguiente espectro de frecuencia:

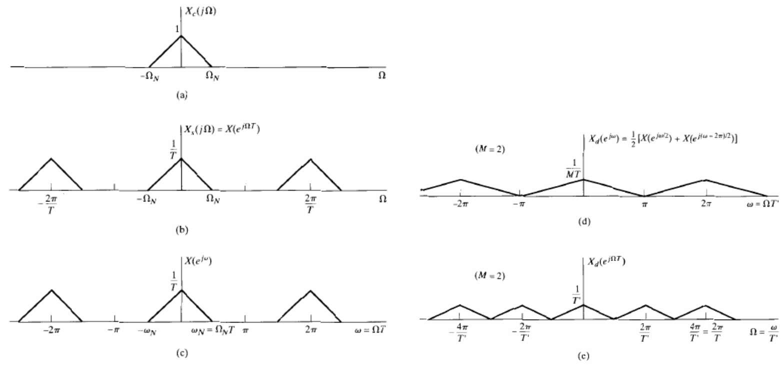
$$y[n] = x[nD] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{D} - \frac{2\pi i}{D}\right)}\right).$$

3. Es posible que al reducir la frecuencia de muestreo a $\frac{F_x}{D}$ se genere **aliasing**. Considerando el dominio de frecuencia angular Ω de la señal $x_c(t)$ y el dominio de frecuencia normalizada $\omega_x = \Omega T_x$ de la secuencia $x[n]$, entonces el dominio de frecuencia normalizada ω_y de la secuencia $y[n]$ corresponde a:

$$\begin{aligned} \omega_y &= \Omega T_y \\ &= \Omega (D T_x) \\ &= D\omega_x. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se asegura que el contenido en frecuencia de $y[n]$ está incluido en el rango fundamental ($|\omega_y| \leq \pi$) solo si el contenido en frecuencia de $x[n]$ está incluido en $|\omega_x| \leq \frac{\pi}{D}$.

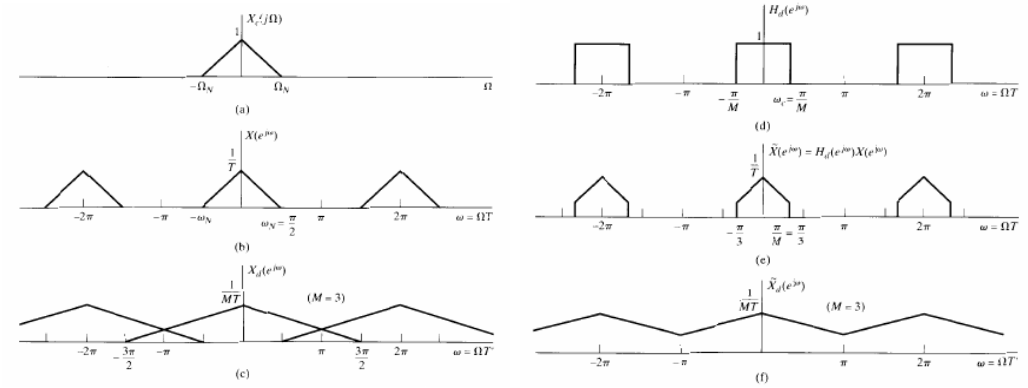
Submuestreo *(Downsampling)* III



(a) (b)

Figura 25: Downsampling sin aliasing

1. El proceso de limitar el ancho de banda de $x[n]$ a $|\omega_x| = \frac{\pi}{D}$ y luego aplicar un *submuestreo* de factor D se conoce como **Diezmado (Decimation)**.
2. Proceso de *Diezmado*:
   a.
   $$v[n] = x[n] * h_D[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) \cdot H_D(e^{j\omega}), \quad H_D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{D} \\ 0, & \text{otros} \end{cases}.$$
   b.
   $$y[n] = v[nD].$$
3. De la relación $\omega_y = D\omega_x$, se sabe que el intervalo $|w_x| \leq \frac{\pi}{D}$ se proyecta a $|w_y| \leq \pi$.



(a) (b)

Figura 26: Diezmado

1. Aumentar F_s por un factor entero I. De (6) y la relación $T_y = \frac{T_x}{I}$:

$$y(n\underbrace{T_y}_{\frac{T_x}{I}}) = \sum_{\hat{n}=-\infty}^{+\infty} x(\hat{n}T_x)g\left(n\frac{T_x}{I} - \hat{n}T_x\right);$$

   Dado que $g(t)$ se desplaza en incrementos de $\frac{T_x}{I}$, $y(nT_y)$ incluye $I-1$ nuevas muestras entre cada elemento de $x(nT_x)$. Entonces, se cumple la siguiente relación:

$$y[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{I}], & n = rI, \quad r \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases}.$$

2. La secuencia sobremuestreada $y[n]$ se caracteriza por el siguiente espectro de frecuencia:

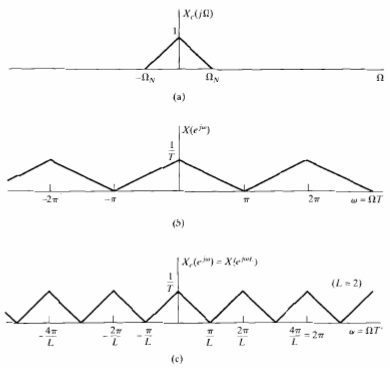
$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega I}).$$

3. Dado que $X(e^{j\omega})$ presenta repeticiones cada $2\pi\ \frac{\text{ciclos}}{\text{muestra}}$, $Y(e^{j\omega})$ incluirá repeticiones dentro del rango fundamental para $I \geq 2$. Considerando el dominio de frecuencia angular Ω de la señal $x_c(t)$ y el dominio de frecuencia normalizada $\omega_x = \Omega T_x$ de la secuencia $x[n]$, entonces el dominio de frecuencia normalizada ω_y de la secuencia $y[n]$ corresponde a:

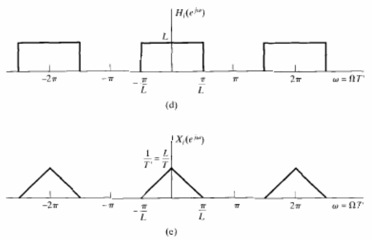
$$\begin{aligned}\omega_y &= \Omega T_y \\ &= \Omega\left(\frac{T_x}{I}\right) \\ &= \frac{\omega_x}{I}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el contenido en frecuencia de $y[n]$ en el rango fundamental $(|\omega_y| \leq \pi)$ incluye al contenido en frecuencia de $x[n]$ en $|\omega_x| \leq \pi I$.

1. El proceso de sobremuestrear con factor I y luego limitar las componentes en frecuencia al intervalo $|\omega_y| = \frac{\pi}{I}$ para eliminar repeticiones se denomina **Interpolación (Interpolation)**.
2. Proceso de *Interpolación*:
   a.
$$v[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{I}], & n = rI, \quad r \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases}.$$
   b.
$$y[n] = v[n] * h_I[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} V(e^{j\omega}) \cdot H_I(e^{j\omega}), \quad H_I(e^{j\omega}) = \begin{cases} I, & |\omega| \leq \frac{\pi}{I} \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases}.$$



(a)



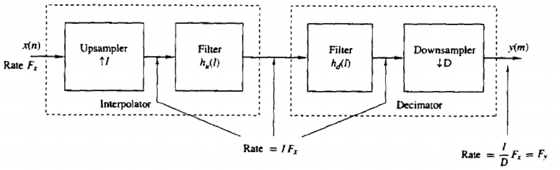
(b)

Figura 27: Interpolación

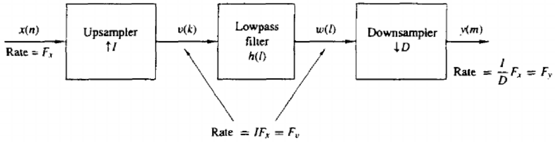
1. Es posible modificar la frecuencia de muestreo por un factor racional $F_y = \frac{I}{D} F_x$ a partir del siguiente esquema:
   a. Interpolar $x[n]$ por un factor I.
   b. Diezmar la secuencia resultante por un factor D.

   Esto se logra conectando en cascada ambos sistemas.
2. Bajo esta estructura, $H_I(e^{j\omega})$ y $H_D(e^{j\omega})$ son sistemas en serie que afectan a la secuencia de entrada $x[n]$. Por lo tanto, pueden ser reemplazados por:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} I, & |\omega| \leq \text{mín}\{\frac{\pi}{D}; \frac{\pi}{I}\} \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases} .$$



(a) Sistema con ambos filtros



(b) Sistema con el filtro de menor ancho de banda

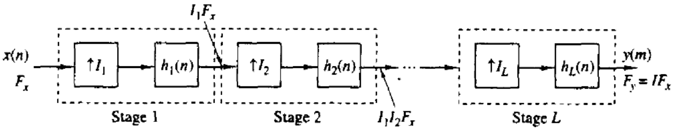
Figura 28: Sistema de sobremuestreo y submuestreo en cascada

1. Dado un factor racional con valores $\{I, D\}$ altos, es posible cambiar la tasa de muestreo a partir de un sistema multietapa:

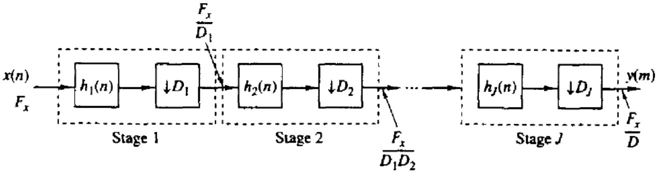
$$T_y = \frac{\prod_{i=0}^{N} D_i}{\prod_{j=0}^{M} I_j} \cdot T_x$$

   - *Ejemplo:* Para $T_y = \frac{63}{130} \cdot T_x$, el cambio de tasa se puede lograr a partir de:
     a. $D_0 = 7,\ D_1 = 3,\ D_2 = 3$
     b. $I_0 = 13,\ I_1 = 5,\ I_2 = 2.$

2. **Notación:**
   - Factor de downsampling según *Oppenheim*: M; *Proakis*: D.
   - Factor de upsampling según *Oppenheim*: L; *Proakis*: I.



(a) Sobremuestreo multietapa



(b) Submuestreo multietapa

Figura 29: Sistemas multietapa de cambio de tasa de muestreo

Referencias

(1) Proakis, J. G. & Manolakis, D. K. (2006), Digital Signal Processing (4th Edition), Prentice Hall.

(2) Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., & Nawab, S. H. (1983). Signals and Systems (2nd Edition). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.