IEE239 - Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales
Laboratorio 1 - Ejercicios Propuestos
Primer Semestre 2017

1. La señal de correlación $R_{x,y}[m]$ de dos señales $x[n]$ y $y[n]$ es una importante herramienta en el procesamiento de señales e imágenes, pues indica qué "tan similares" son las dos señales en cuestión. La correlación para señales en tiempo discreto viene dada por:

$$R_{x,y}[n] = \sum_m x[m]y[n+m] \tag{1}$$

a. La ecuación (1) es bastante similar a la convolución $h[m]$ de $x[n]$ e $y[n]$, la cual viene dada por

$$h[n] = \sum_m x[m]y[n-m] \tag{2}$$

¿Cómo podría implementar el cálculo de $R_{x,y}[n]$ usando la convolución?

Solución:

Supóngase que se quiere calcular la correlación entre $x[n]$ e $y[n]$, si consideramos la función reflejada de $y[n]$ dada por $z[n] = y[-n]$ y calculamos la convolución entre $x[n]$ y $z[n]$ tenemos:

$$h[n] = \sum_m x[m]z[n-m] \tag{3}$$

Dado que $z[n] = y[-n]$

$$h[n] = \sum_m x[m]y[n+m] = R_{x,y}[n] \tag{4}$$

Entonces la correlación de $x[n]$ e $y[n]$ se puede calcular tomando la convolución de $x[n]$ y la versión reflejada de $y[n]$.

b. Calcular manualmente la correlación entre las siguientes señales:

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 5\delta[n-3]$$
$$y[n] = 4\delta[n] + 8\delta[n-1]$$

Solución:

$$\begin{aligned}
R_{x,y}[-1] &= \textstyle\sum_m x[m]y[m+1] = (1)(8) + (0)(8) + (3)(0) + (5)(0) = 8 \\
R_{x,y}[0] &= \textstyle\sum_m x[m]y[m] = (1)(4) + (2)(8) + (3)(0) + (5)(0) = 20 \\
R_{x,y}[1] &= \textstyle\sum_m x[m]y[m-1] = (1)(0) + (2)(4) + (3)(8) + (5)(0) = 32 \\
R_{x,y}[2] &= \textstyle\sum_m x[m]y[m-2] = (1)(0) + (2)(0) + (3)(4) + (5)(8) = 52 \\
R_{x,y}[3] &= \textstyle\sum_m x[m]y[m-3] = (1)(0) + (2)(0) + (3)(0) + (5)(4) = 20
\end{aligned}$$

los demás valores de $R_{x,y}[n]$ son cero.

c. Use la función `conv` para genera la correlación de las dos señales anteriores en Matlab. Compare sus resultados con la función `xcorr`, la cual genera la correlación entre dos señales (*Nota*: un vector `a` en matlab se puede reflejar tomando `a(end:-1:1)`).

Solución: Solución en el código adjunto. Notar que `xcorr` genera ceros adicionales a los que se obtienen con `xcorr`. Si observamos la variable `lags` notaremos que `xcorr` empieza a calular desde $n = -3$. Sin embargo, los valores de $n = -3$ y $n = -2$ son cero. `conv` por el contrario empieza el cálculo desde $n = -1$. Fuera de esta discrepancia, los dos resultados en Matlab y nuestro cálculo manual coinciden.

d. Ahora usaremos la función de correlación para comprobar la presencia de tonos (señales sinusoidales de una frencuencia dada) en alguna otra señal multitono. Para ello:

I. Lea la señal `mixed.wav` usando la función `audioread`. La señal es una mezcla de un tono de 400 Hz y otro de 200 Hz corrompida con ruido blanco gaussiano.

II. Genera tres tonos de 2000 muestras de frecuencias 400 Hz, 200 Hz y 100 Hz. Usar la misma frecuencia de muestreo que la señal leída en el paso anterior.

III. Use `xcorr` para correlacionar cada tono con la señal leída. Obtenga el máximo valor de las correlaciones calculadas. Se asumirá que si la correlación máxima supera el valor de 20 entonces el tono en cuestión está presente en la señal ¿Concuerda los resultados con la descripción de la parte I?

Solución: Solución en el código adjunto.

2. Sea el sistema LTI mostrado en la Figura 1:

a. Generar las siguientes secuencias y graficarlas usando el comando **stem()**.

$$h_1[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n+2] + 3\delta[n+3]$$

$$h_2[n] = h_1[-n]$$

$$h_3[n] = 13\delta[n] + 7\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 7\delta[n+1] + 2\delta[n+2]$$

$$h_4[n] = \delta[n+2] + \delta[n-2]$$

Usar el comando **conv()** para hallar $h[n]$ y **stem()** para graficar el procedimiento que siguió para hallarlo. Tener en cuenta el dominio de cada secuencia y analice por teoría el dominio que debe tener la convolución. **Nota**: la función **conv**(vector1,vector2,'forma') realiza la operación de convolución en MATLAB. El tercer argumento hace referencia a una sección de la convolución obtenida. Por defecto, este es 'full', manteniendo el tamaño completo de la convolución.

b. Si se aplica una entrada $x[n] = 0{,}5\delta[n-1] + \delta[n-2] + 1{,}5\delta[n-3] + 2\delta[n-4]$ al sistema total, determinar la expresión de $y[n]$ e incluirla en los comentarios.

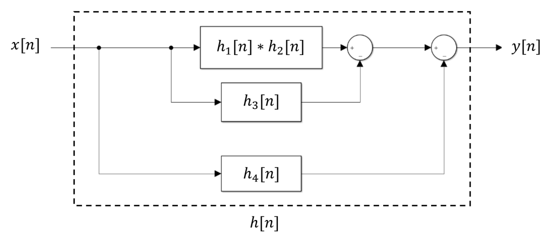

Figura 1: Sistema LTI.

c. Modificar el tercer argumento a *'full'-'same'* y hallar la convolución de $x[n]$ con $h[n]$. Graficar $x[n]$, $h[n]$ y $y[n]$ para los tres casos. Para 'same', considerar la parte central (del mismo tamaño de la entrada $x[n]$) de la convolución completa.

Solución: Solución en el código adjunto.

3. A continuación, se demostrarán propiedades básicas de sistemas en tiempo discreto:

a. Demostrar si los siguientes sistemas en tiempo discreto son lineales e invariantes en el tiempo. Resolver a mano.

$$T_1\{x[n]\} = \cos(x[n]),$$

$$T_2\{x[n]\} = x[n]\cos(w_0 n).$$

b. Implementar las propiedades demostradas en el inciso para ambas expresiones. Considerar que $x[n] = u_r[n]$ (rampa unitaria), $w_0 = \pi$ y $n \in \{0, ..., 20\}$. Para linealidad, implementar escalamiento y aditividad, es decir:

$$\begin{aligned} T\{a \cdot x[n]\} &= a \cdot T\{x[n]\}, \\ T\{x_1[n] + x_2[n]\} &= T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\}, \end{aligned}$$

respectivamente, donde $a = 2$. Para invarianza en el tiempo[1], demostrar:

$$T\{x[n-k]\} = y[n-k]$$

Considerar $k = 3$. Usar la función **stem()**.

c. Dado el sistema de la Figura 2:

I. Determinar la ecuación de diferencias que describe al sistema e incluirla en los comentarios. Considerar sistema en reposo.

II. A partir del resultado anterior, implementar la respuesta al impulso del sistema para $n \in \{1, ..., 200\}$. Utilizar la función **for()**. Graficar lo obtenido usando **stem()**. De lo observado, podría tratarse de un sistema FIR o IIR? Justificar su respuesta.

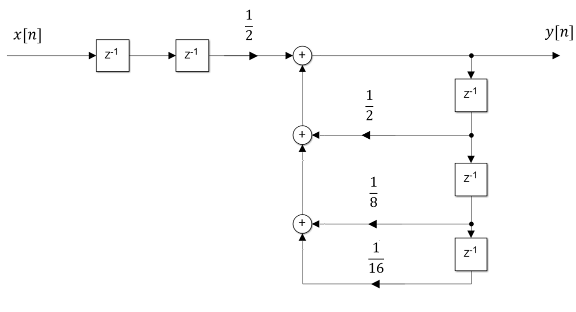

Figura 2: Sistema LTI.

d. En música, una nota está determinada por la vibración de una frecuencia, es decir, una sinusoidal a determinada frecuencia. La tabla 1 indica algunas frecuencias para ciertas notas. Asimismo, estas tienen una duración en las que son escuchadas.

Por ejemplo, para generar la nota G: $G[n] = \cos(2\pi \cdot 392(n/F_s))$. Cada nota puede tener una distinta duración temporal. Por ejemplo:

[1] Crear el desplazamiento concatenando ceros al vector de interés. Usar **zeros()**.

Nota	G	A	B	C	D
Frecuencia (Hz)	392.0	440.0	493.88	523.25	587.33

Cuadro 1: Notas musicales.

- G $\rightarrow n \in \{0, ..., 2000\}$.
- g $\rightarrow n \in \{0, ..., 4000\}$.
- gg $\rightarrow n \in \{0, ..., 8000\}$.

I. Generar la siguiente secuencia: 'G-G-A-g-C-bb-G-G-A-g'. Para ello, definir $F_s = 8000$ Hz. Utilizar el comando **sound**(secuencia,F_s) para escuchar la secuencia generada.

II. Modificar la frecuencia de muestreo para los casos $F_s = \{4000, 1000\}$ Hz y la secuencia respectiva (si $F_s = 2000$ Hz, la nueva secuencia debería tomar 1 muestra cada 4 de la original). Escuche nuevamente la secuencia. ¿Qué espera como salida según el principio de Nyquist?.

III. La función **xcorr()** es la autocorrelación cruzada y es una métrica de la similitud entre dos secuencias. Con la secuencia original, utilizar esta función para encontrar el número de veces que se repite la nota 'bb'. Para ello, hallar el máximo de la correlación cruzada con la función **max()** y encontrar el número de la muestra para ese máximo. Luego dividir por F_s para obtener el tiempo.

Solución: Solución en el código adjunto.

4. Se cuenta con un conjunto de señales en tiempo contínuo $s_k(t) = e^{j16\pi kt}$, donde $k \in \mathbb{Z}$. A partir de ello, se pide realizar el siguiente procedimiento:

a. Obtener la expresión matemática de su versión en tiempo discreto $s_k[n]$ para una frecuencia de muestreo $F_s = 64$ Hz e incluirla en los comentarios. Cuál es el periodo de cada secuencia obtenida? Expresarlo en función de k.

b. Generar las secuencias $s_k[n], n \in \{0, \ldots, 15\}$ para 4 casos particulares: $k \in \{0, 2, 4, 6\}$. Luego, describir gráficamente las componentes real e imaginaria de cada una de ellas. Usar **real()**, **imag()**, **stem()** y rotular adecuadamente las gráficas.

c. De acuerdo a la **identidad de Euler**, las componentes real e imaginaria de cada exponencial compleja corresponden a funciones sinusoidales. Para verificar esto, obtener las expresiones matemáticas de dichas componentes para $s_6[n]$ e incluirlas en los comentarios. Luego, generar dichas secuencias para $n \in \{0, \ldots, 15\}$ y describirlas gráficamente. Usar **stem()**. Finalmente, verificar que las componentes obtenidas en los incisos a. y b. para la secuencia de interés son equivalentes.

d. Demostrar la siguiente relación: $s_{k+N}[n] = s_k[n]$. Según ello, la familia de exponenciales complejas $s_k[n]$ está compuesta por N secuencias únicas, las cuales corresponden a $k \in \{0, \ldots, N-1\}$. Para otros valores de k, las secuencias obtenidas corresponden a Alias de aquellas en el intervalo establecido. Para verificar esto, generar las componentes reales de las secuencias $\{s_{-3}[n], s_0[n], s_5[n], s_8[n]\}$ e identificar cuáles de ellas guardan relación. Justificar claramente a qué se debe ello.

e. Se cuenta con el sistema recursivo descrito en la Figura 3. Identificar los coeficientes de la ecuación de diferencias del sistema $a = \{a_0, a_1, \ldots, a_N\}$ y $b = \{b_0, b_1, \ldots, b_M\}$ *(Nota: por convención, $a_0 = 1$)*. Luego, determinar la ecuación de diferencias del sistema e incluirla en los comentarios.

f. Generar la secuencia $x[n] = \text{Re}\{s_1[n]\}$ para $n \in \{0, \ldots, 15\}$, donde el operador Re{} obtiene la componente real de la secuencia, y describirla gráficamente. Usar **stem()**. Luego, obtener $y[n] \triangleq T\{x[n]\}$, la salida del sistema de interés ante la entrada $x[n]$ y describirla gráficamente. Usar **filter()**.

g. Determinar si se trata de un sistema **invariante en el tiempo**. Para ello, generar $x[n-D]$ e $y[n-D]$, un retardo de $D = 5$ muestras en $x[n]$ e $y[n]$, respectivamente, concatenando D ceros a las secuencias de interés. Usar **zeros()**. Describir gráficamente las secuencias con retardo. Luego, asumiendo sistema en reposo, obtener $T\{x[n-D]\}$, la respuesta del sistema ante la entrada retardada y describir gráficamente el resultado. Usar **filter()** y **stem()**.

h. Comparar $y[n-D]$ vs. $T\{x[n-D]\}$. Ambas salidas son iguales? Probar el comportamiento para al menos tres diferentes valores de D. De acuerdo a lo observado, se podría tratar de un sistema invariante en el tiempo? Justificar claramente su respuesta.

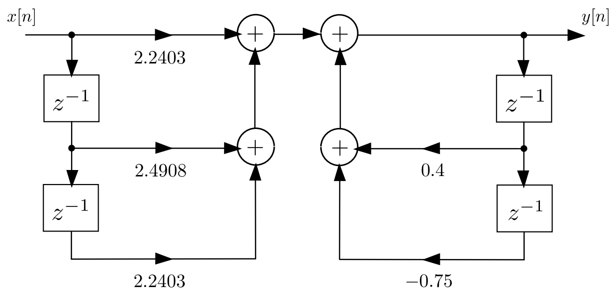

Figura 3: Sistema en tiempo discreto.

Solución: Solución en el código adjunto.