

Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales: Diseño de Filtros Digitales

MSc. Renán Rojas G.

Pontificia Universidad Católica del Perú

- Métodos para diseñar sistemas FIR e IIR, de acuerdo a la respuesta deseada en frecuencia. (Magnitud y Fase).

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\Theta\{H(e^{j\omega})\}}.$$

- Filtros \equiv Sistema (enfocándose en su respuesta en frecuencia).
- El diseño de filtros nos permite obtener los coeficientes de un filtro causal FIR o un filtro causal IIR que se aproxime a la respuesta en frecuencia deseada.

Filtros ideales

- Los filtros ideales no son realizables dado que son **no causales**.
- En caso tener una respuesta al impulso de duración infinita, la respuesta del sistema debe ser calculada de manera recursiva.

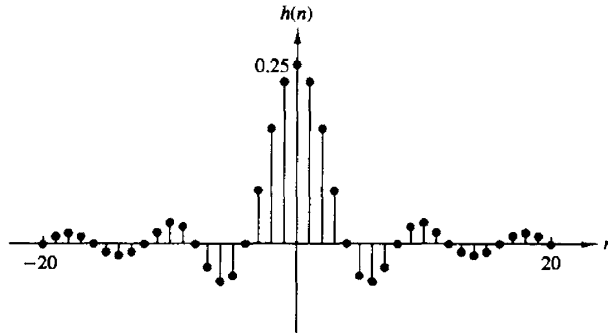


Figura: Filtro pasa-bajos ideal: No causal

- Entonces, es posible enfocarse en sistemas LTI basados en ecuaciones de diferencias:

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Los cuales son causales y físicamente realizables.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}}$$

- A partir de ello, la idea es aproximar las características de un sistema LTI a la respuesta en frecuencia deseada $H_d(e^{j\omega})$ eligiendo apropiadamente sus coeficientes $\{a_k\}; \{b_k\}$

Características de Diseño

- Relajando las características deseadas en frecuencia, es posible obtener aproximaciones basadas en sistemas causales.
 - I. Banda de paso (passband): rango de frecuencia en el cual el filtro no atenúa los componentes frecuenciales de la señal de entrada. el tamaño del rango de frecuencias se denomina ancho de banda.
 - * **No es necesario que la magnitud del filtro $|H(e^{j\omega})|$ en la banda de paso sea constante. Un ligero rizado es favorable.**
 - * δ_1 : **rizado de la banda de paso.**
 - * ω_p : **frecuencia de paso (límite de la banda de paso).**
 - II. Banda de rechazo (stopband): rango de frecuencia en el cual el filtro atenúa los componentes frecuenciales de la señal de entrada.
 - * **No es necesario que la magnitud del filtro $|H(e^{j\omega})|$ en la banda de rechazo sea cero. Un valor pequeño o un pequeño rizado es tolerable.**
 - * δ_1 : **rizado de la banda de rechazo.**
 - * ω_s : **frecuencia de rechazo (límite de la banda de rechazo).**

III. Banda de transición (transition band): El rango de frecuencia entre la banda de paso y la banda de rechazo.

- Ejemplo: diseñar un filtro pasa-bajos con una banda de paso $[0, \omega_p]$ y banda de rechazo $[\omega_s, \pi]$

*Se infiere que la banda de transición está definida en $[\omega_p, \omega_s]$ con un ancho de $\omega_s - \omega_p$.

Usualmente el rango dinámico del filtro en frecuencia se representa en escala logarítmica: $20\log_{10}(|H(e^{j\omega})|)$.

- Entonces, las especificaciones clásicas requeridas para diseñar un filtro son:
 - I. ganancia δ_1
 - II. ganancia δ_2
 - III. frecuencia de paso w_p
 - IV. frecuencia de rechazo w_s
- A partir de esto, es posible elegir $\{a_k\}; \{b_k\}$ de tal manera que la respuesta en frecuencia del filtro sea lo más fiel posible a $H_d(e^{j\omega})$.

Características de Diseño

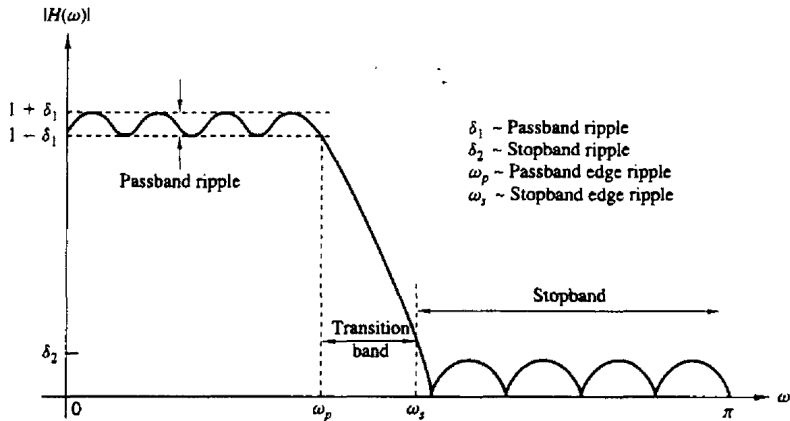


Figura: Características del espectro de magnitud de filtros realizables

Diseño de filtros FIR

- Forma:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x[n-k]; \quad (\text{Basada en una ecuación no recursiva})$$

* $b_k \equiv h[k]$ (**Respuesta al impulso del sistema**).

* Dado que tiene coeficientes finitos: $\{h[0], h[1], \dots, h[M-1]\}$, su respuesta puede ser calculada directamente a partir de la sumatoria de convolución.

- Su respuesta en frecuencia es expresada como:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] z^{-k}$$

- Entonces, el diseño de un filtro FIR consiste en hallar los M coeficientes de $h[n]$ a partir de características del filtro deseado.

1 Método de enventanado

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n]e^{-j\omega n}; \quad \text{Respuesta del filtro deseado}$$

- $h_d[n]$ es por lo general de duración infinita y por lo tanto debe ser truncado a M coeficientes.
- Entonces, un acercamiento inicial es multiplicar $h_d[n]$ por una ventana rectangular:

$$w[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

$$\therefore h[n] \triangleq h_d[n] \cdot w[n]$$

- Efecto de enventanado: producto en espacio de muestras implica convolución en frecuencia. Por lo tanto, $H(e^{j\omega})$ será una versión distorsionada de $H_d(e^{j\omega})$.

■ Efecto de enventanado en frecuencia:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

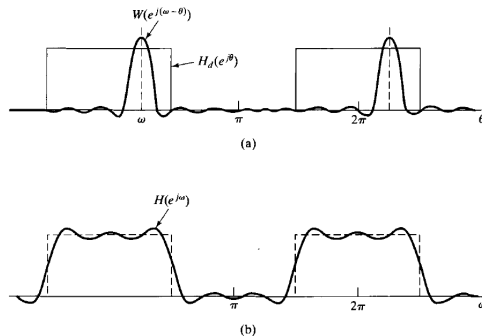


Figura: Convolución en frecuencia debido al producto por una ventana en espacio de muestras.

- Ejemplo: Para el caso de ventana rectangular.

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega(M+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega \frac{M}{2}} \cdot \frac{\sin\left[\frac{\omega(M+1)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\omega}{2}\right]}$$

- Cuyo espectro de magnitud es:

$$|W(e^{j\omega})| = \frac{\left|\sin\left[\frac{\omega(M+1)}{2}\right]\right|}{\left|\sin\left[\frac{\omega}{2}\right]\right|}; \quad -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

FIR: Método de Enventanado

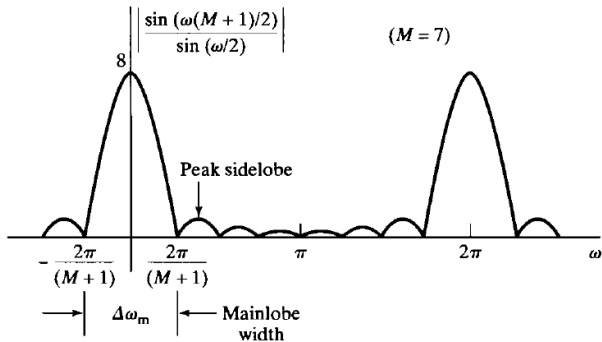


Figura: Espectro de Magnitud de una ventana rectangular ($M = 7$)

- A medida que M crece, el ancho del lóbulo principal decrece. Sin embargo, esto también implica que las amplitudes de los lóbulos secundarios crecen.
- El efecto de los lóbulos laterales al convolucionar es denominado **efecto rizado** (ringing effect). Adicionalmente, el ancho del lóbulo principal genera un suavizado en los bordes del filtro.
- Estos efectos son contrarrestados con diferentes tipos de ventanas.

Rectangular

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Bartlett (triangular)

$$w[n] = \begin{cases} 2n/M, & 0 \leq n \leq M/2, \\ 2 - 2n/M, & M/2 < n \leq M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Hanning

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Hamming

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Figura: Ventanas comúnmente utilizadas

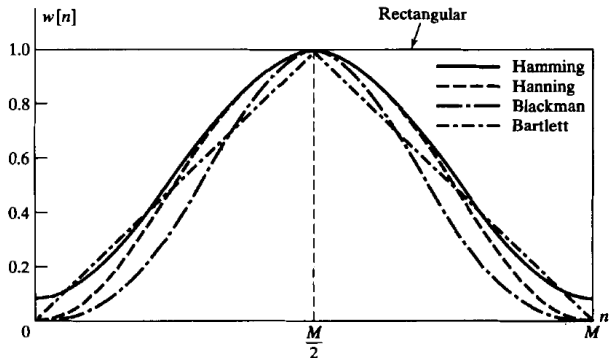
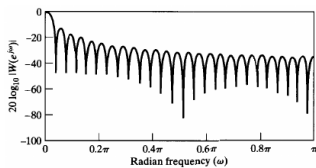
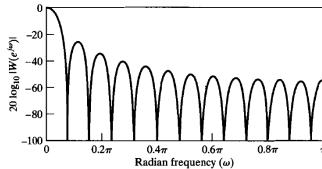


Figura: Ventanas comunmente utilizadas

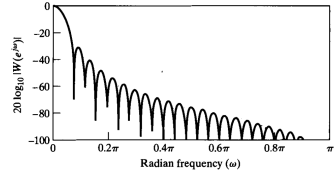
FIR: Método de Enventanado



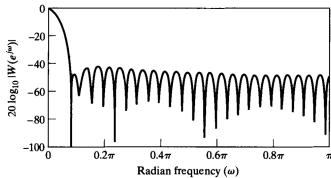
(a) Rectangular



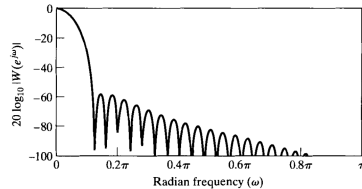
(b) Bartlett



(c) Hamming



(d) Hanning



(e) Blackman

Figura: Espectro de magnitud de ventanas comunmente utilizadas

Type of Window	Peak Side-Lobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Main Lobe	Peak Approximation Error, $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window, β	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	-13	$4\pi/(M+1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

Figura: Comparación de ventanas comunmente utilizadas

2 Muestreo en Frecuencia:

- Especificando la respuesta en frecuencia deseada $H_d(e^{j\omega})$ en un conjunto de frecuencias separadas uniformemente.

$$w_k = \frac{2\pi}{M}(k + \alpha);$$

$$\text{Si } M \text{ impar: } k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2}.$$

$$\text{Si } M \text{ par: } k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1;$$

$$\alpha = 0 \quad \text{o} \quad \frac{1}{2}$$

- A partir de dicha especificación, es posible hallar $h[n]$ de la siguiente forma:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]e^{-j\omega n}$$

$$\therefore H(k + \alpha) \equiv \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j \frac{2\pi(k+\alpha)n}{M}}; \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (1)$$

- Si invertimos (1) de tal forma que permita expresar $h[n]$ en función a $H(k + \alpha)$ obtenemos:

$$h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k + \alpha) e^{j \frac{2\pi(k+\alpha)n}{M}}; \quad n = 0, 1, \dots, M-1$$

- Si $\alpha = 0$, las relaciones se reducen a la DFT e IDFT, correspondientemente.
- Dado que $\{h[n]\}$ es real, $\{H[k + \alpha]\}$ satisface:

$$H(k + \alpha) = H^*(M - k - \alpha)$$

- Esta propiedad de simetría permite reducir a $\frac{M+1}{2}$ las muestras en caso M sea impar y $\frac{M}{2}$ las muestras en caso M sea par.

Diseño de filtros IIR (a partir de filtros analógicos)

- Existen múltiples métodos que permiten el diseño de filtros de duración infinita IIR a partir del diseño de filtros analógicos.
- Un filtro analógico puede ser descrito como el siguiente sistema:

$$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k s^k}$$

- También es posible representarlo a partir de su respuesta al impulso $h(t)$, la cual se relaciona a $H_a(s)$ por:

$$H_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

- La relación entrada / salida del filtro puede ser descrita por una ecuación diferencial:

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

*Recordatorio: $H(s)$ es estable si todos sus polos están en el semiplano izquierdo.

- Entonces, para que la conversión de un filtro analógico a un filtro digital sea coherente, se deben cumplir las siguientes propiedades:

Condiciones para mantener estabilidad en un sistema discreto

- I. El eje $j\Omega$ del plano s debe proyectarse en el círculo unitario en el plano z . Entonces, debe haber una relación directa entre s y z
- II. El semiplano izquierdo del plano s debe ser mapeado en el interior del círculo unitario del plano z . Entonces, un filtro analógico estable será convertido en un filtro discreto estable.

1 Diseño por Invarianza del Impulso

- Diseño a partir de una respuesta al impulso $h[n]$, la cual es una versión muestreada de la respuesta al impulso del filtro analógico correspondiente.

$$h[n] = h_a(nT); \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad T = \frac{1}{F_s}$$

- Entonces, dado un filtro analógico h_a con respuesta en frecuencia $H_a(j\Omega)$, su versión muestreada con periodo uniforme T ($h_a(nT)$) tiene una respuesta en frecuencia $\frac{1}{T}H_a(j\Omega)$ en múltiplos de Ω_s .
- Finalmente, el filtro digital con respuesta al impulso $h[n] \triangleq h_a(nT)$ tiene una respuesta en frecuencia:

$$H(e^{j\omega}) \triangleq \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a(j(\Omega - k \cdot \Omega_s \cdot T)) \Big|_{\Omega = \frac{\omega}{T}}$$

IIR: Invarianza del impulso

- La invarianza del impulso requiere de un T apropiado para evitar aliasing en la respuesta de frecuencia del filtro analógico.
- Es posible diseñar filtros pasa-bajos a partir de este diseño. Sin embargo, el diseño de filtros pasa-altos no es apropiado a partir de él dado que no es posible evitar el efecto aliasing.
- A partir del muestreo de la frecuencia al impulso, el mapeo del plano s y el plano z está dado por la relación entre la transformada z de $h[n]$ y la transformada de laplace de $h_a(t)$:

$$H(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] e^{-sTn} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(s - j\frac{2\pi k}{T})$$

- Entonces, tenemos una relación directa entre variables: $z = e^{sT}$

- Expresando $s = \sigma + j\Omega$ y $z = re^{j\omega}$, entonces:

$$z = re^{j\omega} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\Omega T}$$

$$\therefore r = e^{\sigma T}; \omega = \Omega T.$$

- Si $\sigma < 0$ (semiplano izquierdo en s), entonces $0 < r < 1$ (region interna del círculo unitario en z)
- Si $\sigma > 0$ (semiplano derecho en s), entonces $r > 1$ (region externa del círculo unitario en z)
- Entonces, un sistema analógico estable implica un sistema discreto estable.

- Por otro lado, el mapeo del eje $j\Omega$ en el círculo unitario no es una correspondencia de uno a uno. La relación $\omega = \Omega T$ implica que el intervalo $\frac{(2k-1)\pi}{T} \leq \Omega \leq \frac{(2k+1)\pi}{T}$ se proyecta a $-\pi \leq \omega \leq \pi; \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.
- Esta correspondencia refleja el efecto de muestreo y aliasing del método empleado.

IIR: Invarianza del impulso

- A partir de esta transformación y asumiendo un sistema analógico representado como fracciones parciales:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{s - p_k}$$

$\{c_k\}$: coeficientes de fracciones parciales, $\{p_k\}$: polos del filtro analógico

- Entonces, por la transformada de Laplace:

$$H_a(s) \leftrightarrow h_a(t) = \sum_{k=1}^N c_k e^{p_k t}; \quad t \geq 0.$$

- Luego, muestreamos $h_a(t)$; $t = nT$

$$h[n] = h_a(nT) = \sum_{k=1}^N c_k e^{p_k T n}$$

IIR: Invarianza del impulso

- Entonces, la función de transferencia del sistema IIR diseñado es:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N c_k e^{p_k T n} \right) z^{-n}$$

$$= \sum_{k=1}^N c_k \sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_k T} z^{-1})^n; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_k T} z^{-1})^n = \frac{1}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

$$\therefore H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}; \quad \text{F. de transferencia del filtro discreto diseñado} \quad (2)$$

- Finalmente, la función de transferencia del filtro digital tiene polos en:

$$z_k = e^{p_k T}; \quad k = 1, 2, \dots, N$$

IIR: Invarianza del impulso

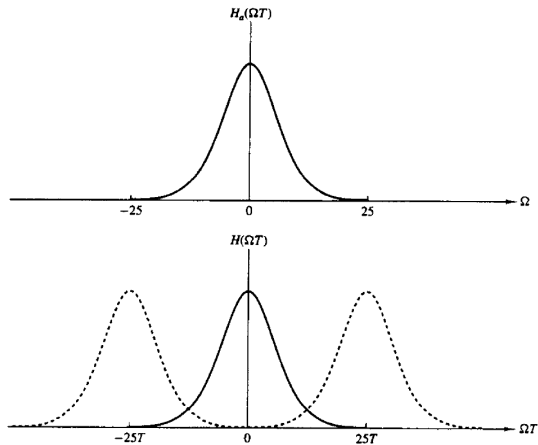


Figura: Relación espectro del filtro analógico y espectro del filtro discreto bajo la condición de aliasing

IIR: Invarianza del impulso

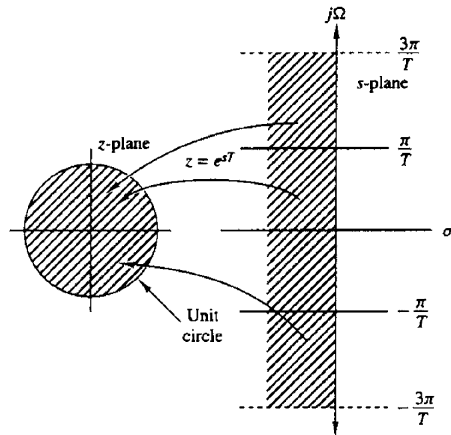


Figura: Redundancia en la proyección del plano s al círculo unitario del plano z

1 Diseño por Transformación Bilineal

- No se restringe únicamente al diseño de filtros pasa-bajos y pasabandas.
- Implica una proyección del eje $j\Omega$ hacia el círculo unitario con relación de uno a uno. Entonces, evita problemas de aliasing.
- Adicionalmente, todo el semiplano de s es mapeado al interior del círculo unitario (y todo el semiplano derecho es mapeado al exterior del círculo unitario).
- Partiendo de un sistema analógico:

$$H(s) = \frac{b}{s + a}$$

- De la regla trapezoidal [Proakis, Ch. 8.3], es posible expresar el filtro digital equivalente como:

$$H(z) = \frac{b}{\frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + a}$$

- Entonces, es posible definir la siguiente relación:

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right); \quad (\text{Transformación Bilineal})$$

* A pesar que la relación se halla para una ecuación diferencial de 1er orden, es demostrable que la relación de mantiene para ecuaciones diferenciales de orden N .

- Si expresamos $z = re^{j\omega}$ y $s = \sigma + j\Omega$

$$\begin{aligned} \therefore s &= \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{2}{T} \frac{re^{j\omega} - 1}{re^{j\omega} + 1} \\ &= \frac{2}{T} \left(\frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2r \cos(\omega)} + j \frac{2r \sin(\omega)}{1 + r^2 + 2r \cos(\omega)} \right) \end{aligned}$$

- Entonces:

$$\sigma = \frac{2}{T} \left(\frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2r \cos(\omega)} \right)$$

$$\Omega = \frac{2}{T} \left(\frac{2r \sin(\omega)}{1 + r^2 + 2r \cos(\omega)} \right)$$

- Si $r < 1$, entonces $\sigma < 0$. Si $r > 1$, entonces $\sigma > 0$
- Adicionalmente, si $r = 1$, entonces $\sigma = 0$ y $\Omega = \frac{2}{T} \cdot \frac{\sin(\omega)}{1 + \cos(\omega)}$. De la misma forma:

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\therefore \omega = 2 \tan^{-1}\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$$

- Esta relación muestra que Ω se mapea a $-\pi \leq \omega \leq \pi$ de manera no lineal.

IIR: Transformación Bilineal

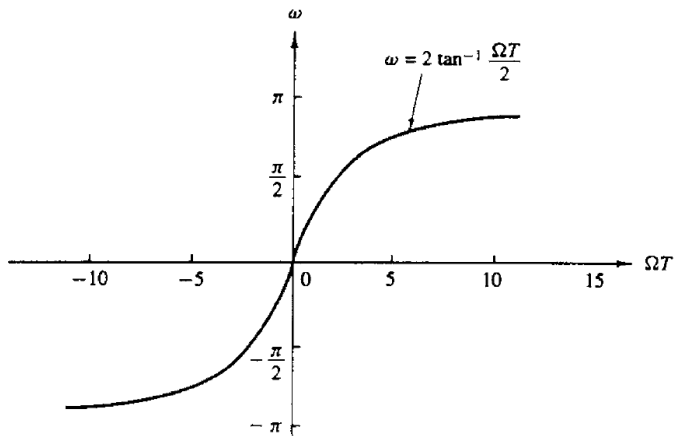


Figura: Proyección de plano s al plano z (sin redundancia)

IIR: Filtros Analógicos comunmente usados

- De lo anterior, se deduce que el diseño de filtros de respuesta al impulso infinita IIR se basa en:
 - I. Diseño de un filtro analógico con respuesta en frecuencia deseada
 - II. Ejecutar la conversión de $H(s)$ a $H(z)$ reservando las características del filtro analógico.
- Filtros Butterworth: filtro basado solo en polos con la siguiente característica en espectro de magnitud:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}}$$

* Donde:

- I. N: orden del filtro
 - II. Ω_c frecuencia de corte. $|H(j\Omega_c)|^2 = -3 \text{ dB}$
 - III. Ω_p frecuencia de paso. $|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2} \text{ dB}$
- Los polos s_k ocurren en un círculo de radio Ω_c en puntos igualmente espaciados:

$$s_k = \Omega_c e^{\frac{j\pi}{2N}(2k+N-1)}; \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1$$

- $|H(j\Omega)|^2$ es monotonamente decreciente en la banda de paso y en la banda de rechazo.
- El orden del filtro N requerido para obtener una atenuación δ_2 en una determinada frecuencia Ω_s se deriva de:

$$|H(\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \delta_2^2$$

- De lo anterior, se concluye que el filtro Butterworth está completamente caracterizado por $\{N, \delta_2, \text{ y el ratio } \frac{\Omega_s}{\Omega_p}\}$

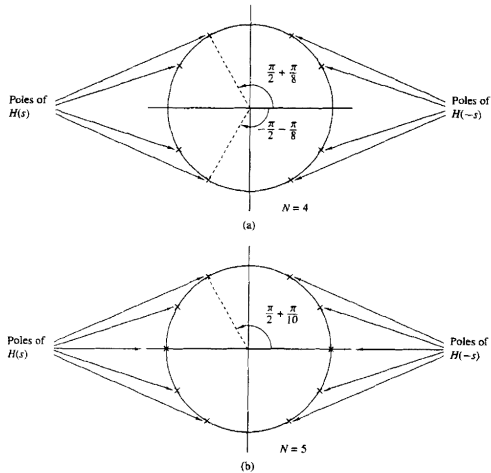


Figura: Ubicación de polos en un filtro analógico Butterworth

IIR: Filtros Butterworth

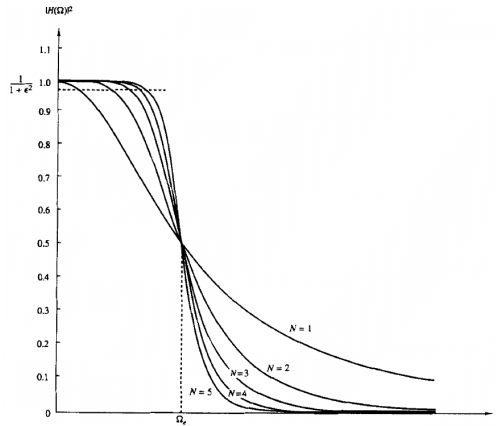


Figura: Espectro de magnitud para filtros Butterworth de diferente orden

- En contraste a los filtros Butterworth y su comportamiento monótono, es posible obtener un filtro de menor orden (usa menos recursos, implementación más simple) al distribuir el error de la aproximación a la respuesta deseada de manera uniforme en la banda de paso y banda de rechazo.
 - * Esto es posible a partir de un diseño que genere un rizado constante en dichas bandas en vez de un comportamiento monótono.
- Entonces:
 - I. Filtros Chebyshev tipo I: rizado constante en la banda de paso y monotonicidad en la banda de rechazo.
 - II. Filtros Chebyshev tipo II: rizado constante en la banda de rechazo y monotonicidad en la banda de paso.

Filtros analógicos: Chebyshev tipo I

- Su espectro de magnitud cumple con la siguiente característica:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$$

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1}(x)); & |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1}(x)); & x > 1; \end{cases} \quad (\text{Polinomio de Chebyshev de orden } N)$$

- * $T_N(x)$ puede ser determinado de manera recursiva:

$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x); \quad n = 1, 2, \dots$$

$$T_0(x) = 1; \quad T_1(x) = x$$

Filtros analógicos: Chebyshev tipo I

■ Propiedades de $T_N(x)$:

I. $|T_N(x)| \leq 1 \quad \forall |x| \leq 1$

II. $T_N(1) = 1 \quad \forall N$

III. Las raíces de $T_N(x)$ ocurren en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$

■ A partir de ello, $T_N^2(0) = 0$ para N impar, y por lo tanto $|H(0)|^2 = 1$

■ De la misma forma, $T_N^2(0) = 1$ para N par, y por lo tanto $|H(0)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2}$

■ A partir de estas propiedades, analizamos la respuesta para $\Omega = \Omega_p$:

$$|H(j\Omega)|^2 = (1 - \delta_1)^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2}$$

* Entonces, ϵ está directamente relacionado con el rizado del filtro diseñado.

Filtros analógicos: Chebyshev tipo I

- Los polos (tipo I) están ubicados en los siguientes puntos del plano complejo: $\{x_k, y_k\}$

$$x_k = r_2 \cos(\phi_k)$$

$$y_k = r_1 \sin(\phi_k)$$

$$\phi_k = \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$r_1 = \Omega_p \frac{\beta^2 + 1}{2\beta}; \quad r_2 = \Omega_p \frac{\beta^2 - 1}{2\beta};$$

$$\beta = \left(\frac{(1 + \epsilon^2)^{1/2} + 1}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{N}}$$

- Es decir, los polos del filtro están ubicados sobre una elipse en el plano complejo con eje mayor r_1 y eje menor r_2 .

Filtros analógicos: Chebyshev tipo I

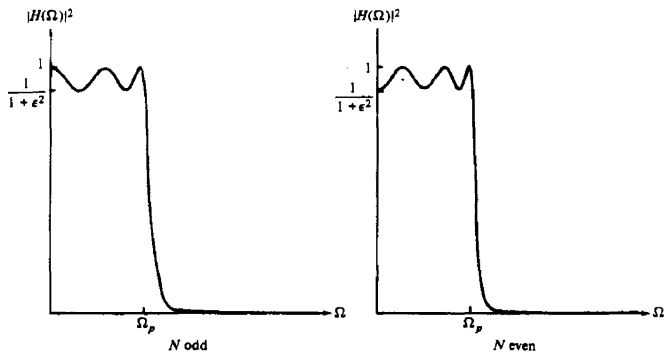


Figura: Espectro de magnitud para filtros Chebyshev Tipo I de orden par e impar

Filtros analógicos: Chebyshev tipo II

- En este caso, la respuesta en frecuencia incluye ceros:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left[\frac{T_N^2(\frac{\Omega_s}{\Omega_p})}{T_N^2(\frac{\Omega_s}{\Omega})} \right]}$$

- En este caso, los ceros están ubicados en le eje imaginario

$$s_k = j \frac{\Omega_s}{\sin(\phi_k)}; \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

- Por otro lado, los polos están ubicados en: $\{v_k, w_k\}$

$$v_k = \frac{\Omega_s x_k}{(x_k^2 + y_k^2)^{1/2}}$$

$$w_k = \frac{\Omega_s y_k}{(x_k^2 + y_k^2)^{1/2}}; \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

Filtros analógicos: Chebyshev tipo II

* En este caso, x_k , y_k están definidos de la misma forma que en el **Tipo I** pero modificando β

$$\beta = \left(\frac{1 + (1 - \delta_2^2)^{1/2}}{\delta_2} \right)^{\frac{1}{N}}$$

- Finalmente, se concluye que los filtros Chebyshev (ambos tipos) pueden ser diseñados a partir de los siguientes parámetros:

* ϵ , δ_2 y el ratio $\frac{\Omega_s}{\Omega_p}$

- Simplificando, podemos determinar el orden el filtro

$$N = \frac{\cosh^{-1}(\frac{\delta}{\epsilon})}{\cosh^{-1}(\frac{\Omega_s}{\Omega_p})}; \quad \delta_2 = \frac{1}{(1 + \delta^2)^{1/2}}$$

Filtros analógicos: Chebyshev tipo II

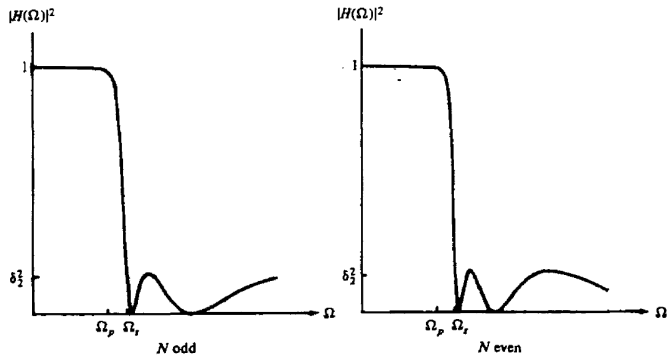


Figure 8.41 Type II Chebyshev filters.

Figura: Espectro de magnitud para filtros Chebyshev Tipo II de orden par e impar

- En general, los filtros **Chebyshev** satisfacen las especificaciones de diseño con menor orden que en el caso de filtros **Butterworth**. Es decir, un filtro **Chebyshev** de orden N tiene una banda de transición más angosta que un filtro **Butterworth** de orden N .

Filtros Wiener

- Sistema que elimine interferencias y preserve la mayor cantidad de información basado en propiedades estocásticas.
- Filtros **Wiener**: sistema óptimo basado en el **error cuadrático medio** entre la respuesta al filtro y la señal deseada.
- **Visto como un problema lineal**, se establece el siguiente modelo:

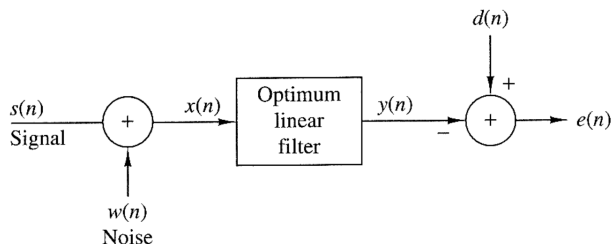


Figura: Modelo de estimación y predicción para filtros Wiener.

Filtrado y predicción a partir de Filtros Wiener

$$x[n] = s[n] + w[n]$$

- $x[n]$: señal de entrada
- $w[n]$: interferencia (ruido)
- $s[n]$: señal libre de ruido
- Adicionalmente: $d[n]$ señal deseada (en función a $s[n]$)
 - 1 Si $d[n] = s[n]$, el problema se define como **filtrado**
 - 2 Si $d[n] = s[n + D]$, $D > 0$, el problema se define como **predicción**
 - 3 Si $d[n] = s[n - D]$, $D > 0$, el problema se define como **suavizado**
- * El curso se enfoca en los casos de **filtrado** y **predicción**.
- Finalmente, $e[n]$: diferencia entre la respuesta del filtro y la señal deseada (error).

- 1 Proceso estacionario en el sentido estricto:** Si las funciones de probabilidad conjunta de un proceso aleatorio $X(t_i)$ y $X(t_i + \tau); i \in \{1; n\}$ son iguales:

$$P(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)) = P(X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \dots, X(t_n + \tau))$$

Entonces, se trata de un proceso **estacionario en el sentido estricto**. En consecuencia:

- I. La probabilidad es independiente del instante de tiempo: P_x .
- II. El valor esperado es constante: m_x
- III. La autocorrelación depende solo de la diferencia de instantes:

$$\begin{aligned}\gamma_{xx}(n, k) &= E\{x[n] \cdot x[k]\}; k = n - l \\ &= E\{x[n] \cdot x[n - l]\} \\ &= \gamma_{xx}(l)\end{aligned}$$

2 Proceso estacionario en el sentido amplio (WSS): Un proceso es estacionario en el sentido amplio si cumple con las siguientes condiciones:

- I. El valor esperado es constante: m_x
- II. La autocorrelación depende solo de la diferencia de instantes:

$$\gamma_{xx}(n, k) = \gamma_{xx}(l)$$

3 Procesos no correlacionados: Dados los procesos no correlacionados X_1 y X_2 :

$$E\{X_1 \cdot X_2\} = E\{X_1\} \cdot E\{X_2\}$$

- 1 $s[n]$, $w[n]$, $d[n]$ tienen media cero y son señales estacionarias en el sentido amplio (**WSS**).
- 2 $s[n]$, $w[n]$ son señales no correlacionadas entre sí.
- 3 $w[n]$ corresponde a **ruido blanco**: $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$. Entonces:

$$\gamma_{ww}(l) = E\{w[n] \cdot w[n-l]\} = \begin{cases} \sigma_w^2; & l = 0 \\ 0; & \text{Otros casos} \end{cases}$$

Diseño del filtro Wiener tipo FIR

- **Estrategia:** Se diseña el filtro óptimo (respuesta al impulso $h[n]$) como aquel que minimice el **error cuadrático medio**.
- **Motivación:** El **error cuadrático medio** corresponde a una **función convexa**, por lo tanto, tiene un mínimo global fácilmente hallado a partir de derivadas.

1 Respuesta al filtro FIR de **orden P**:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{P-1} h[k]x[n-k]$$

2 Error cuadrático medio:

$$\varepsilon = E\{|e[n]|^2\} = E\{|d[n] - y[n]|^2\}$$

3 Finalmente, los coeficientes del filtro óptimo son:

$$h_{\text{opt}} = \underset{h}{\operatorname{argmin}} \quad \varepsilon$$

- Cálculo del error cuadrático medio:

$$\varepsilon = E \left\{ \left| d[n] - \sum_{k=0}^{P-1} h[k]x[n-k] \right|^2 \right\}$$

$$\varepsilon = E \left\{ d^2[n] - 2d[n] \sum_{k=0}^{P-1} h[k]x[n-k] + \left(\sum_{k=0}^{P-1} h[k]x[n-k] \right)^2 \right\},$$

Dado que el valor esperado es una **función lineal**:

$$\varepsilon = E\{d^2[n]\} - 2 \sum_{k=0}^{P-1} h[k] E\{d[n]x[n-k]\} + \sum_{k=0}^{P-1} \sum_{l=0}^{P-1} h[k]h[l] E\{x[n-k]x[n-l]\},$$

Diseño del filtro Wiener tipo FIR

- Expresado en forma matricial:

$$\varepsilon = \gamma_{dd}(0) - 2\mathbf{h}^T \gamma_{\mathbf{d}\mathbf{x}} + \mathbf{h}^T \mathbf{\Gamma}_x \mathbf{h}.$$

- \mathbf{h} : vector de coeficientes del filtro FIR
- $\mathbf{\Gamma}_x$: matriz de autocorrelación de $x[n]$
- $\gamma_{\mathbf{d}\mathbf{x}}$: vector de correlación cruzada entre $d[n]$ y $x[n]$.

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(P-1) \end{pmatrix}_{P \times 1}, \quad \mathbf{\Gamma}_x = \begin{pmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}^*(1) & \gamma_{xx}^*(2) & \cdots & \gamma_{xx}^*(P-1) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}^*(1) & \cdots & \gamma_{xx}^*(P-2) \\ \gamma_{xx}(2) & \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \cdots & \gamma_{xx}^*(P-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{xx}(P-1) & \gamma_{xx}(P-2) & \gamma_{xx}(P-3) & \cdots & \gamma_{xx}(0) \end{pmatrix}_{P \times P}, \quad \gamma_{\mathbf{d}\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \gamma_{dx}(0) \\ \gamma_{dx}(1) \\ \gamma_{dx}(2) \\ \vdots \\ \gamma_{dx}(P-1) \end{pmatrix}_{P \times 1}.$$

Diseño del filtro Wiener tipo FIR

- Cálculo del filtro óptimo (**filtro Wiener**): derivando ε respecto a \mathbf{h} e igualando a cero:

$$\nabla \varepsilon(\mathbf{h}) = \frac{d}{d\mathbf{h}} \gamma_{dd}(0) - \frac{d}{d\mathbf{h}} 2\mathbf{h}^T \gamma_{\mathbf{d}\mathbf{x}} + \frac{d}{d\mathbf{h}} \mathbf{h}^T \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{x}} \mathbf{h} = 0 - 2\gamma_{\mathbf{d}\mathbf{x}} + 2\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{h} = 0;$$

$$\therefore \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{h}_{\text{opt}} = \gamma_{\mathbf{d}\mathbf{x}}. \quad (\text{Ecuaciones de Wiener-Hopf})$$

- Luego, los coeficientes del filtro óptimo (denominado **filtro Wiener**) \mathbf{h}_{opt} son calculados a partir de:

$$\mathbf{h}_{\text{opt}} = \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot \gamma_{\mathbf{d}\mathbf{x}}$$

- El error cuadrático medio correspondiente a \mathbf{h}_{opt} , es decir, el **mínimo error cuadrático medio** es:

$$\varepsilon_{\min} = \gamma_{dd}(0) - 2\mathbf{h}_{\text{opt}}^T \cdot \gamma_{\mathbf{d}\mathbf{x}} + \mathbf{h}_{\text{opt}}^T \cdot \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{h}_{\text{opt}}.$$

- (1) Proakis, J. G. & Manolakis, D. K. (2006), Digital Signal Processing (3rd Edition), Prentice Hall.
- (2) Oppenheim, A.V., Schafer, R. W., & Buck, J.R. (2009), Discrete-Time Signal Processing (3rd Edition), Prentice-Hall.