IEE239 - Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales
Laboratorio 1 - Solución de la Prueba de Entrada
Segundo Semestre 2017

Martes, 29 de agosto del 2017

- **Horario 08M1**
- Duración: 20 minutos.
- Mostrar claramente su procedimiento en cada pregunta. Justificar adecuadamente sus respuestas.
- Está terminantemente prohibido el uso de material adicional y calculadora.
- La evaluación es **estrictamente** personal.

1. *(1.5 puntos)* Dado el siguiente sistema en tiempo discreto, determinar si se trata de un sistema: (i) BIBO estable, (ii) Invariante en el tiempo.

$$T_1\{x[n]\} = x[n](g[n] + g[n-1]); \quad \text{donde } g[n] = 1 + e^{j\pi n}.$$

Solución:

i. BIBO estable:

$$\begin{aligned} T_1\{x[n]\} =& x[n]\big[1 + (-1)^n + 1 + (-1)^{n-1}\big] \\ =& 2x[n] \end{aligned}$$

Entonces, para $|x[n]| \leq M_x < \infty$:

$$|y[n]| = 2|x[n]| \leq 2M_x < \infty$$

Por lo tanto, se trata de un sistema BIBO estable.

ii. Invariante en el tiempo:

$$\begin{aligned} y[n-n_0] =& 2x[n-n_0]. \\ x_d[n] \triangleq& x[n-n_0] \\ T_1\{x_d[n]\} =& 2x_d[n] \\ =& 2x[n-n_0]. \end{aligned}$$

Entonces, $T_1\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0]$. Se trata de un sistema invariante en el tiempo.

2. *(2 puntos)* Dado el sistema LTI en tiempo discreto cuya respuesta al impulso corresponde a:

$$h[n] = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n];$$

A partir de convolución, determinar la respuesta del sistema ante la siguiente entrada:

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

Solución:

$$\begin{aligned} y[n] =& \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 5\Big(-\frac{1}{2}\Big)^k u[k]\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n-k} u[n-k] \\ =& 5\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^k\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n-k} u[n-k], \quad u[n-k] = \begin{cases} 1, & k \leq n \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases}. \end{aligned}$$

Entonces, se analizan 2 casos:

i. $y[n] = 0, \quad n < 0$

ii. Para $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} y[n] =& 5\sum_{k=0}^{n}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^k\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n-k} = 5\Big(\frac{1}{3}\Big)^n \cdot \sum_{k=0}^{n}\Big(-\frac{3}{2}\Big)^k \\ =& 5\Big(\frac{1}{3}\Big)^n \cdot \frac{1-\big(-\frac{3}{2}\big)^{n+1}}{1-\big(-\frac{3}{2}\big)}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$y[n] = \bigg[2\Big(\frac{1}{3}\Big)^n + 3\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\bigg]u[n]$$

3. *(1.5 puntos)* Dada la siguiente señal en tiempo contínuo:

$$x_c(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi t}{2}\right);$$

a) Determinar su periodo fundamental T_p. Mostrar claramente su procedimiento.

b) Obtener su versión en tiempo discreto $x[n] \triangleq x_c(nT_s)$, donde $T_s = 2s$. Se genera Aliasing? Justificar claramente su respuesta.

Solución:

a. Re-expresando la frecuencia angular de cada término:

$$x_c(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{8}t\right) + \sin\left(\frac{2\pi \cdot 6}{8}t\right).$$

Se trata de dos secuencias armónicamente relacionadas con $T_p = 8$ s (en conjunto, ambas forman un periodo en 8 s).

b. Analizando la secuencia $x[n]$

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \sin(3\pi n).$$

La frecuencia normalizada del segundo término no está incluida en el rango fundamental ($|\omega| > \pi$). Por lo tanto, la secuencia sufre del efecto Aliasing.