Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales: Transformada Z

MSc. Renán Rojas G.

Pontificia Universidad Católica del Perú

Motivación

- Rol para transformadas discretas similar al rol de la transformada de **Laplace** para sistemas continuos.
- Análisis de señales y sistemas más simple: convolución en t equivale a producto en z.
- Caracterización de sistemas LTI a partir de polos y ceros.

Transformada Z

- La transformada Z proporciona una representación alternativa compacta de la señal vista en t basada en una **combinación lineal**.
- **Transformada directa:**

$$X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}; \quad z \in \mathbb{C};$$

$$X(z) = Z\{x[n]\}; \quad x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z).$$

- Dado que es una serie infinita de potencias, existe solo para valores z para los que la serie $X(z)$ converge.

$$|X(z)| < \infty.$$

- **Región de Convergencia:** (ROC) conjunto de valores z para los que la serie $X(z)$ converge (**a un valor finito**).

Transformada Z

- Es posible expresar $z = re^{j\theta}$; $|z| = r$; $\sphericalangle z = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}\{z\}}{\text{Re}\{z\}}\right) = \theta$

$$\therefore X(z)\Big|_{z=re^{j\theta}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\theta n}$$

- Entonces, la condición para la **ROC** se expresa:

$$|X(z)| < \infty;$$

$$|X(z)| = \Big|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\theta n}\Big| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]r^{-n}e^{-j\theta n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]r^{-n}\right|.$$

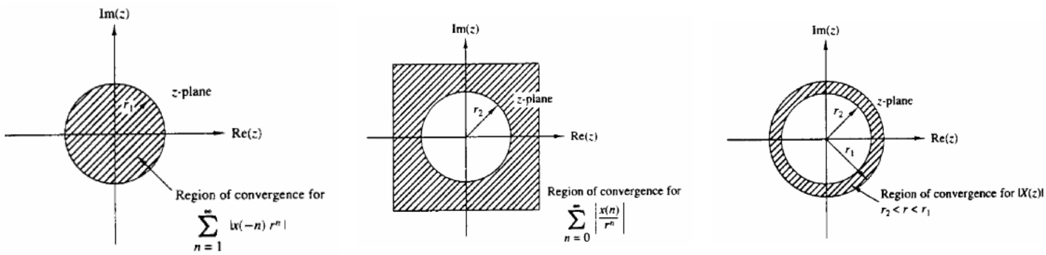
- Es decir, $|X(z)|$ es finito si $x[n]r^{-n}$ es absolutamente sumable.

- La desigualdad es facilmente expresable como:

$$|X(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x[-n]r^n| + \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x[n]}{r^n}\right|,$$

- Si $|X(z)|$ converge en alguna región del plano complejo, ambas sumatorias son finitas en dicha región.
- Entonces, para que se converga es necesario lo siguiente:
  1. Existe r_1 lo suficientemente pequeño para que $\sum_{n=1}^{\infty} |x[-n]r_1^n|$ sea absolutamente sumable.
  2. Existe r_2 lo suficientemente grande para que $\sum_{n=0}^{\infty} |\frac{x[n]}{r_2^n}|$ sea absolutamente sumable.
  3. $r_1 > r_2$, de tal manera que exista una región en común (región anular $r_2 < r < r_1$).

Región de convergencia



(a) Región de convergencia para la componente anticausal.

(b) Región de convergencia para la componente causal.

(c) Intersección de regiones de convergencia.

Figura : Region de convergencia para $X(z)$ y su componente causal y anticausal.

- Para que una secuencia $x[n]$ sea completamente descrita (libre de ambiguedades) en el plano z, es necesario conocer tanto $X(z)$ como su **ROC**.

  Ej 1:

$$x[n] = \alpha^n u[n] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}; \quad \text{ROC: } |z| > |\alpha|;$$

$$x[n] = -\alpha^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}; \quad \text{ROC: } |z| < |\alpha|;$$

- Dado que la transformada Z de ambas es la misma, la ambiguedad solo es resuelta si se especifica la **ROC** de cada una.
- Finalmente, la señal causal $\alpha^n u[n]$ tiene una **ROC** correspondiente al exterior del círculo de determinado radio r_2, mientras que la señal anticausal $-\alpha^n u[-n-1]$ tiene una **ROC** correspondiente al interior de un círculo de determinado radio r_1.

Transformada Z

Ej 2:

$$x[n] = a^n u[n] + b^n u[-n-1] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} - \frac{1}{1-bz^{-1}}; \quad \text{ROC: } |a| < |z| < |b|;$$

I. $a^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}; \quad$ ROC: $|z| > |a|$;
II. $b^n u[-n-1] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-bz^{-1}}; \quad$ ROC: $|z| < |b|$;
III. $\therefore$ ROC: $|a| < |z| < |b|$

- La señal bilateral de duración infinita tiene una transformada Z con **ROC** correspondiente a una región anular en el plano complejo.
- Finalmente, la **ROC** depende tanto de su duración (finita o infinita) así como si es causal, anticausal, bilateral, etc.

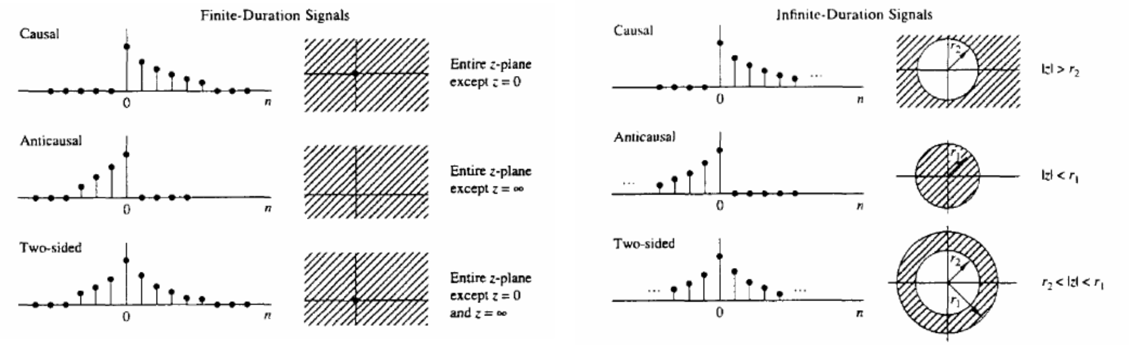


Figura : Familias de señales características y sus correspondientes ROC.

Transformada Z inversa

- Hallar $x[n]$ a partir de $X(z)$

$$\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \oint_C \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{n-1-k}dz.$$

- Dado que es una serie convergente y aplicando el **teorema de la integral de Cauchy**:

$$Z^{-1}\{X(z)\} \triangleq x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)z^{n-1}dz.$$

- Para $X(z)$ descrito como fracciones, existen métodos más sencillos para hallar $x[n]$. **Es en dichos métodos alternativos que se enfoca este capítulo.**

Propiedades de la transformada Z

1. La combinación de varias transformadas Z da un **ROC** resultante de, al menos, la intersección de los **ROC** individuales.
2. **Linealidad:**

$$x_1[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z);$$
$$x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z);$$
$$\therefore a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} a_1X_1(z) + a_2X_2(z).$$

3. **Desplazamiento temporal:**

$$x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z);$$
$$x[n-k] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-k}X(z).$$

La **ROC** de $z^{-k}X(z)$ es la misma que la de $X(z)$ excepto para $z = 0$ si $k > 0$ y $z = \infty$ si $k < 0$.

Propiedades de la transformada Z

4. **Cambio de escala en el dominio Z:**

   Si
   $$x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z); \quad \text{ROC: } r_1 < |z| < r_2;$$
   Entonces
   $$a^n x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(a^{-1}z); \quad \text{ROC: } |a|r_1 < |z| < |a|r_2.$$
   Para a real o compleja.

5. **Inversión temporal:**

   Si
   $$x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z); \quad \text{ROC: } r_1 < |z| < r_2;$$
   Entonces
   $$x[-n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z^{-1}); \quad \text{ROC: } \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1};$$

Propiedades de la transformada Z

6. **Derivación en el dominio z**

   Si
   $$x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z);$$
   Entonces
   $$nx[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}; \quad \text{(Misma ROC)}$$

7. **Convolución de dos secuencias:**

   Si
   $$x_1[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z);$$
   $$x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z);$$
   Entonces
   $$x[n] = x_1[n] * x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z).$$
   La **ROC** resultante es al menos la intersección de las **ROC** de $X_1(z)$, $X_2(z)$.

La propiedad de **convolución de dos secuencias** nos permite hallar la respuesta del sistema a entradas arbitrarias en tres pasos:

I. Dadas $x[n]$, $h[n]$, hallar $X(z)$, $H(z)$
II. Multiplicar las dos transformadas Z: $Y(z) = X(z) \cdot H(z)$
III. Hallar la transformada inversa $y[n] = Z^{-1}\{Y(z)\}$

8. **Correlación de dos secuencias:**

Dado que $x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z) \cdot X_2(z)$ y $r_{x_1 x_2}[n] = x_1[n] * x_2[-n]$,

$$\therefore r_{x_1 x_2}[n] \xleftrightarrow{z} R_{x_1 x_2}(z) = X_1(z) \cdot X_2(z^{-1})$$

La **ROC** de $R_{x_1 x_2}(z)$ es al menos la intersección de las regiones de convergencia de $X_1(z)$, $X_2(z^{-1})$.

9. **Teorema del valor inicial:**

   Si $x[n]$ es causal, entonces:

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z).$$

Propiedades de la transformada Z

TABLE 3.2 PROPERTIES OF THE Z-TRANSFORM

Property	Time Domain	z-Domain	ROC
Notation	$x(n)$ $x_1(n)$ $x_2(n)$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	ROC: $r_2 < \|z\| < r_1$ ROC_1 ROC_2
Linearity	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	At least the intersection of ROC_1 and ROC_2
Time shifting	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	That of $X(z)$, except $z = 0$ if $k > 0$ and $z = \infty$ if $k < 0$
Scaling in the z-domain	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$\|a\|r_2 < \|z\| < \|a\|r_1$
Time reversal	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} < \|z\| < \frac{1}{r_2}$
Conjugation	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	ROC
Real part	$\text{Re}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	Includes ROC
Imaginary part	$\text{Im}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}[X(z) - X^*(z^*)]$	Includes ROC
Differentiation in the z-domain	$nx(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$r_2 < \|z\| < r_1$
Convolution	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	At least, the intersection of ROC_1 and ROC_2
Correlation	$r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$	$R_{x_1x_2}(z) = X_1(z)X_2(z^{-1})$	At least, the intersection of ROC of $X_1(z)$ and $X_2(z^{-1})$
Initial value theorem	If $x(n)$ causal	$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$	
Multiplication	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$	At least $r_{1l}r_{2l} < \|z\| < r_{1u}r_{2u}$
Parseval's relation	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2^*(1/v^*)v^{-1}dv$		

Figura : Propiedades de la transformada Z.

TABLE 3.3 SOME COMMON Z-TRANSFORM PAIRS

	Signal, $x(n)$	z-Transform, $X(z)$	ROC
1	$\delta(n)$	1	All z
2	$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3	$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
4	$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
5	$-a^n u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
6	$-na^n u(-n-1)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
7	$(\cos\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
8	$(\sin\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
9	$(a^n\cos\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
10	$(a^n\sin\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Figura : Pares comunes de transformada Z.

Transformadas Z racionales

- Si $X(z)$ es representable por un racional, entonces:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ... + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_N z^{-N}}.$$

- Si $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, es posible representar $X(z)$ sin potencias negativas:

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0}{a_0} z^{(-M+N)} \cdot \frac{(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2)...(z - p_N)}.$$

$$\therefore X(z) = G \cdot z^{(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^{M}(z - z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z - p_k)}; \quad G = \frac{b_0}{a_0}.$$

- Entonces, $X(z)$ tiene N **polos** en $z = p_1, p_2, ..., p_N$ y M **ceros** en $z = z_1, z_2, ..., z_M$. Además, $X(z)$ tiene:

  $|N - M|$ ceros en $z = 0$ si $N > M$ ó
  $|N - M|$ polos en $z = 0$ si $N < M$.

Diagrama de polos y ceros

- Es posible representar gráficamente $X(z)$ mediante un diagrama de polos y ceros en el plano complejo.
- En el plano complejo se incluye:
    1. la posición de los polos descrita por $\times$.
    2. la posición de los ceros descrita por $\circ$
    3. el número de polos o ceros descrito por un número al lado del símbolo.

Diagrama de polos y ceros

Ej: $x[n] = a^n u[n], \quad a > 0 \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}};$ ROC: $|z| > a$

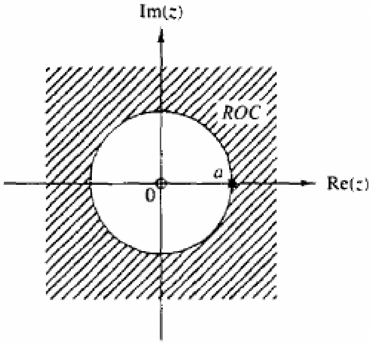


Figura : Diagrama de polos y ceros para la secuencia $x[n] = a^n u[n]$

Diagrama de polos y ceros

- De manera análoga, es posible determinar $x[n]$ a partir de la ubicación de sus polos y ceros.

  Ej: hallar $x[n]$ dado que su transformada Z está caracterizada por:

  I. 2 **ceros** en $z_1 = 0$ y $z_2 = r \cdot cos(\omega_0)$
  II. 2 **polos** en $p_1 = r \cdot e^{j\omega_0}$ y $p_2 = r \cdot e^{-j\omega_0}$

$$\therefore X(z) = G\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z-p_1)(z-p_2)} = G\frac{z^2 - r\cdot\cos(\omega_0)z}{z^2 - 2r\cdot cos(\omega_0)z + r^2}$$

- El escalar $G = \frac{b_0}{a_0}$ no puede ser determinado con la información de polos y ceros unicamente.

- A partir de la tabla de pares:

$$X(z) \overset{z}{\longleftrightarrow} x[n] = G \cdot r^n \cos(\omega_0 n) u[n]; \quad |z| > |r|.$$

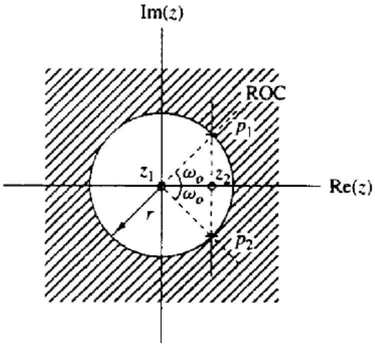


Figura : Diagrama de polos y ceros.

Posición de polos y comportamiento en el tiempo de señales causales

Asumiendo $x[n]$ real y causal, analizemos el comportamiento de acuerdo a la ubicación de los polos de $X(z)$.

1. Si una señal tiene una $X(z)$ con un polo, este polo tiene que ser real. La única señal que cumple con esto es la **exponencial real**.

$$x[n] = a^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}; \quad \text{ROC: } |z| > |a|$$

Cero en $z_1 = 0$, **polo** en $p_1 = a$ (real).

$x[n]$ es:

- I. Decreciente si el polo está dentro del círculo unitario
- II. Constante si está sobre el círculo unitario
- III. Creciente si está sobre el círculo unitario

Posición de polos y comportamiento en el tiempo de señales causales

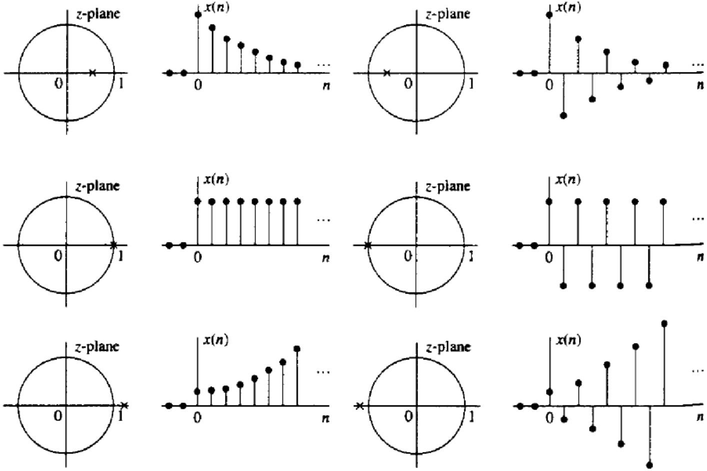


Figura : Comportamiento en el tiempo de una señal causal de un polo real.

2. $X(z)$ con polo real doble tiene la forma:

$$x[n] = n \cdot a^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}; \quad \text{ROC: } |z| > |a|$$

Polo real doble sobre el círculo unitario de lugar a una señal no acotada.

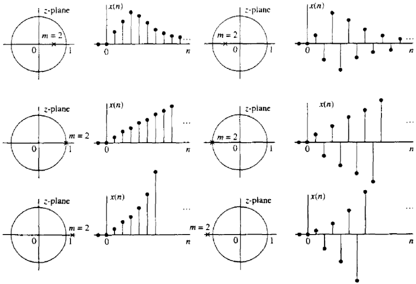


Figura : Comportamiento en el tiempo de una señal causal de un polo real doble.

Posición de polos y comportamiento en el tiempo de señales causales

3. $X(z)$ con un par de polos conjugados compuestos corresponden a una sinusoidal ponderada exponencialmente:

$$X(z) = \frac{1 - rz^{-1}\cos(\omega_0)}{1 - 2rz^{-1}\cos(\omega_0) + r^2 z^{-2}}; \quad \text{ROC: } |z| > |r| \xleftrightarrow{z} x[n] = a^n \cos(\omega_0 n) u[n];$$

4. Si $r > 1$: amplitud creciente
5. Si $r = 1$: amplitud constante
6. Si $r < 1$: amplitud decreciente

Posición de polos y comportamiento en el tiempo de señales causales

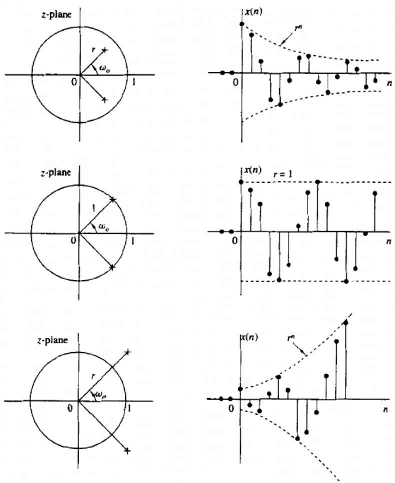


Figura : Comportamiento en el tiempo de una señal causal de dos polos complejos conjugados.

Posición de polos y comportamiento en el tiempo de señales causales

- **Relevancia en sistemas LTI:** De manera general, si se asume que un sistema **LTI** es causal, entonces su respuesta al impulso $h[n]$ cumple con las propiedades anteriores, dadas las respectivas caracteristicas de su transformada Z $H(z)$.
- Por ejemplo, de las propiedades anteriores se deduce que si $H(z)$ no incluye a círculo unitario, el sistema no es **BIBO** estable (es inestable).

Función de transferencia de un sistema LTI

- Por la propiedad de convolución de la transformada Z, podemos relacionar:

$$y[n] = x[n] * h[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} Y(z) = X(z) \cdot H(z).$$

- Entonces, si conocemos $x[n]$, $y[n]$, podemos hallar $X(z)$ y $H(z)$ para luego determinar $h[n]$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \overset{z}{\longleftrightarrow} h[n].$$

- $H(z)$ y $h[n]$ son descripciones equivalentes de un sistema en dos dominios. $H(z)$ se denomina **función de transferencia**.

Función de transferencia de un sistema LTI

- Dado un sistema descrito mediante una ecuación de diferencias de coeficientes constantes:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k];$$

$$y[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} Y(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k Y(z) z^{-k} + \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k}.$$

$$Y(z)\left(1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right) = X(z)\left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right).$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}.$$

- Por lo tanto, este tipo de sistema tiene una **función de transferencia** racional.

Función de transferencia de un sistema LTI

Casos particulares:

1. $a_k = 0; \quad 1 \leq k \leq N$: sistema de solo ceros (sistema **FIR**)

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k};$$

2. $b_k = 0; \quad 1 \leq k \leq M$: sistema de solo polos (sistema **IIR**)

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}}; \quad a_0 = 1.$$

La forma general se denomina **sistema de polos y ceros**.

Inversión de la transformada Z

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz; \quad \text{(integración en la ROC).}$$

- Tres métodos para hallarla:
  1. **Integración de contorno** *[Proakis 3.4.1]*
  2. Expansión en una serie de términos en función a z y z^{-1}
  3. Expansión en fracciones simples y búsqueda en una tabla

1. **El método basado en integración no es de interés en este capítulo**.
2. Dada $X(z)$ con su correspondiente **ROC**, podemos expandir $X(z)$ en una serie de potencias:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot z^{-n};$$

   la cual converge en una determinada **ROC**. Entonces, por definición: $x[n] = c_n$.
3. Es posible expresar:

$$X(z) = \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z) + ... + \alpha_k X_k(z);$$

   donde $X_1(z), X_2(z), ..., X_k(z)$ son expresiones cuyas transformadas inversas $x_1[n], x_2[n], ..., x_k[n]$ pueden encontrarse en tablas de parejas de transformadas.

$$\therefore x[n] = \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] + ... + \alpha_k x_k[n].$$

Inversión de la transformada Z

Método **3** particularmente util si $X(z)$ es expresada en forma racional:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + ... + a_N z^{-N}}.$$

- $X(z)$ racional puede ser **propia** $(M < N)$ o **impropia** $(M \geq N)$. En caso sea impropia, siempre se puede expresar como la **suma de un polinomio** y una **fracción parcial propia**:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = C_0 + C_1 z^{-1} + ... + C_{M-N} z^{-(M-N)} + \frac{B_1(z)}{A(z)}.$$

Luego, la transformada inversa del polinomio puede ser determinada por pares de transformación conocidos y la transformada inversa de la fracción parcial **propia** $\left(\frac{B_1(z)}{A(z)}\right)$ puede ser determinada por su descomposición en **fracciones parciales**.

Descomposición en fracciones parciales

- Dada una expresión racional propia basada en potencias negativas (z^{-1}) $X(z)$ expresada de manera alternativa como:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} \cdot \left(\frac{z^N}{z^N}\right) = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \ldots + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N}.$$

Es posible obtener una expresión racional propia basada en potencias positivas (z):

$$z^{-1}X(z) = \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + \ldots + b_M z^{N-M-1}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N}.$$

Inversión de expresiones racionales

- Luego, dado que $z^{-1}X(z)$ es una expresión racional propia, podemos expresarla como una suma de **fracciones parciales**:

  1. **Fracciones parciales para polos diferentes:**

$$z^{-1}X(z) = \frac{A}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)} = \frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2} + ... + \frac{A_N}{z-p_{N_1}}.$$

$A_k, k \in \{1, N\}$ es obtenido evaluando:

$$A_k = (z-p_k) \cdot z^{-1}X(z)\Big|_{z=p_k}.$$

Luego, $x[n]$ es hallada por la propiedad de **desplazamiento temporal**:

$$z^{-k}X(z) \overset{z}{\longleftrightarrow} x[n-k];$$

2. **Fracciones parciales para polos de órden múltiple:**
Dada la expresión racional propia $z^{-1}X(z)$ con pólos de orden múltiple:

$$z^{-1}X(z) = \frac{A}{(z-p_1)^{l_1}(z-p_2)^{l_2}\cdots(z-p_N)^{l_N}};$$

Su expansión en fracciones parciales está dada por:

$$\begin{aligned} z^{-1}X(z) = & \left(\frac{A_1^{(1)}}{z-p_1} + \frac{A_1^{(2)}}{(z-p_1)^2} + \ldots + \frac{A_1^{(l_1)}}{(z-p_1)^{l_1}}\right) + \\ & \left(\frac{A_2^{(1)}}{z-p_2} + \frac{A_2^{(2)}}{(z-p_2)^2} + \ldots + \frac{A_2^{(l_2)}}{(z-p_2)^{l_2}}\right) + \cdots + \\ & \left(\frac{A_N^{(1)}}{z-p_N} + \frac{A_N^{(2)}}{(z-p_N)^2} + \ldots + \frac{A_N^{(l_N)}}{(z-p_N)^{l_N}}\right). \end{aligned}$$

Donde los coeficientes $A_k^{(i)}$ pueden ser obtenidos solucionando un sistema de ecuaciones o a partir de derivación respecto a z.

Referencias

(1) Proakis, J. G. & Manolakis, D. K. (2006), Digital Signal Processing (4th Edition), Prentice Hall.