IEE239 - Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales
Laboratorio 5 - Solución de la Prueba de Entrada
Primer Semestre 2018

Martes, 12 de junio del 2018

- **Horario 08M1**
- Duración: 20 minutos.
- Mostrar claramente su procedimiento en cada pregunta. Justificar adecuadamente sus respuestas.
- Está terminantemente prohibido el uso de material adicional y calculadora.
- La evaluación es **estrictamente** personal.

1. *(1 punto)* Dada la definición del *Laplaciano*:

$$\nabla^2\{f(t,z)\} \triangleq \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{d^2 f}{dz^2},$$

demostrar que su función de transferencia corresponde a la siguiente expresión, para $\Omega_x = 2\pi u$, $\Omega_y = 2\pi v$:

$$\nabla^2_{u,v} = -4\pi^2(u^2+v^2).$$

<u>Solución:</u>

A partir de la definición de transformada de Fourier inversa:

$$\begin{aligned}
&f(t,z) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(j\Omega_x, j\Omega_y)\\
&f(t,z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\Omega_x=-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_y=-\infty}^{+\infty} F(j\Omega_x, j\Omega_y) e^{j(\Omega_x t + \Omega_x z)} d\Omega_x d\Omega_y,
\end{aligned}$$

la derivada de primer orden respecto a t corresponde a:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f(t,z) &= \frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\Omega_x=-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_y=-\infty}^{+\infty} F(j\Omega_x, j\Omega_y) e^{j(\Omega_x t + \Omega_x z)} d\Omega_x d\Omega_y\right\}\\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\Omega_x=-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_y=-\infty}^{+\infty} F(j\Omega_x, j\Omega_y) \frac{d}{dt}\left\{e^{j(\Omega_x t + \Omega_x z)}\right\} d\Omega_x d\Omega_y\\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\Omega_x=-\infty}^{+\infty}\int_{\Omega_y=-\infty}^{+\infty} \underbrace{j\Omega_x F(j\Omega_x, j\Omega_y)}_{\hat{F}(j\Omega_x, j\Omega_y)} e^{j(\Omega_x t + \Omega_x z)} d\Omega_x d\Omega_y.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{d}{dt}f(t,z) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \hat{F}(j\Omega_x, j\Omega_y) = j\Omega_x F(j\Omega_x, j\Omega_y).$$

Del par de transformación anterior se obtiene la siguiente función de transferencia para el Laplaciano:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\frac{d^2 f}{dt^2}+\frac{d^2 f}{dz^2}\right\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{d^2 f}{dt^2}\right\}+\mathcal{F}\left\{\frac{d^2 f}{dz^2}\right\}\\ &= (j\Omega_x)^2 F(j\Omega_x, j\Omega_y) + (j\Omega_y)^2 F(j\Omega_x, j\Omega_y)\\ &= \underbrace{-(\Omega_x^2+\Omega_y^2)}_{H(j\Omega_x, j\Omega_y)} F(j\Omega_x, j\Omega_y).\end{aligned}$$

Finalmente, la función de transferencia se puede expresar a partir de (u, v) como:

$$H(u,v) = -4\pi^2(u^2+v^2).$$

2. *(2 puntos)* Dado el sistema cuya `DFT 2D` para $M = N = 32$ corresponde a $H(u, v)$, determinar $g(x, y)$, su respuesta ante la imagen $f(x, y)$ a partir de producto en frecuencia:[1,2]

$$\begin{aligned}H(u,v) &= \begin{cases}1, & |u| \in \{0,1,\dots,7\}, |v| \in \{0,1,\dots,7\}\\ 0, & \text{otros casos}\end{cases},\\ f(x,y) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{8}y\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}x+\frac{3\pi}{8}y\right).\end{aligned}$$

Solución:

Considerando la relación $1 \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} MN\delta(u, v)$, para $M = N = 32$:

$$\begin{aligned}F(u,v) =& \text{DFT}\left\{\frac{1}{2}e^{j\left(\frac{2\pi(4)}{32}x+\frac{2\pi(2)}{32}y\right)}+\frac{1}{2}e^{-j\left(\frac{2\pi(4)}{32}x+\frac{2\pi(2)}{32}y\right)}\right.\\ &\left.-\frac{j}{2}e^{j\left(\frac{2\pi(12)}{32}x+\frac{2\pi(6)}{32}y\right)}+\frac{j}{2}e^{-j\left(\frac{2\pi(12)}{32}x+\frac{2\pi(6)}{32}y\right)}\right\}.\end{aligned}$$

Luego, por la propiedad de desplazamiento:

$$\begin{aligned}F(u,v) =& \frac{32^2}{2}\delta(u-4, v-2)+\frac{32^2}{2}\delta(u+4, v+2)\\ &-j\frac{32^2}{2}\delta(u-12, v-6)+j\frac{32^2}{2}\delta(u+12, v+6).\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando producto en frecuencia, la propiedad de producto del impulso unitario e invirtiendo:

$$\begin{aligned}g(x,y) &= \text{IDFT}\big\{F(u,v)H(u,v)\big\}\\ &= \text{IDFT}\left\{\frac{32^2}{2}\delta(u-4, v-2)H(4,2)+\frac{32^2}{2}\delta(u+4, v+2)H(-4,-2)\right.\\ &\left.-j\frac{32^2}{2}\delta(u-12, v-6)H(12,6)+j\frac{32^2}{2}\delta(u+12, v+6)H(-12,-6)\right\}\\ &= \text{IDFT}\left\{\frac{32^2}{2}\delta(u-4, v-2)+\frac{32^2}{2}\delta(u+4, v+2)\right\}\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{8}y\right).\end{aligned}$$

[1] Sugerencia: usar la relación $1 \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} MN\delta(u, v)$.

[2] Tener presente que la DFT 2D es de periodo (M, N).

3. *(2 puntos)* Dada la imagen $f(x,y)$ con resolución de intensidad infinita, determinar las siguientes características:

   a. $|\nabla f(1,1)|$ y $\angle \nabla f(1,1)$ a partir de la definición de derivada de primer order por *forward difference*.

   b. $\nabla^2 f(3,2)$. Considerar solo derivadas en filas y columnas y asumir *zero-padding*.

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \underline{11} & -7 & -1 & -10 \\ 1 & 16 & 6 & 3 \\ -10 & -4 & -5 & -1 \\ -5 & 5 & -10 & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Solución:</u>

a. Por *forward difference*, la gradiente $\nabla\{f(x,y)\} = \left\{\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}\right\}$ corresponde a la siguiente expresión:

$$\nabla\{f(x,y)\} = \big\{f(x+1,y) - f(x,y), f(x,y+1) - f(x,y)\big\}.$$

Analizando para el elemento $(1,1)$ y obteniendo la magnitud y fase[3]:

$$\begin{aligned} \nabla\{f(1,1)\} &= \{-20,-10\} \\ |\nabla\{f(1,1)\}| &= \sqrt{(-20)^2 + (-10)^2} = 22{,}36 \\ \angle\{\nabla\{f(1,1)\} &= \tan^{-1}\left\{\frac{-10}{-20}\right\} = -2{,}6779 \text{ rad.} \end{aligned}$$

b. El filtro Laplaciano reflejado en ambos ejes y la región de 3×3 de la imagen de interés centrada en $(3,2)$, asumiendo zero-padding, corresponden a:

$$\nabla^2(-x,-y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \underline{-4} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_{3,2}(x,y) = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -1 \\ 5 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la convolución corresponde a:

$$\nabla^2 f(3,2) = 40 + 5 - 5 - 1 = 39.$$

[3]Tener en consideración que el signo de cada componente de $\nabla f(x,y)$ es importante para determinar el cuadrante del ángulo.