

Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales: Mejora de Imágenes en el Dominio Espacial

MSc. Renán Rojas G.

Pontificia Universidad Católica del Perú

Categorías

- Manipulación directa de píxeles en una imagen.
- Dos categorías:
 - I. Transformaciones de intensidad
 - II. Filtrado espacial



(a) Imagen original



(b) Transformación de intensidad
(negativo)



(c) Transformación espacial
(highboost filtering)

Figura 1 : Manipulación directa de píxeles

Transformaciones de intensidad

- Dada una imagen de entrada $f(x, y)$ y una imagen resultante $g(x, y) = T\{f(x, y)\}$, la intensidad resultante en el punto (x, y) **basada en transformaciones de intensidad** depende de la intensidad del mismo punto en la entrada y el tipo de transformación T .
- Tipos de transformación:

I. **Negativo de imágenes:** resaltar detalles blancos o grises en regiones oscuras.

$$g(x, y) = (L - 1) - f(x, y); \quad f \in [0; L - 1].$$

II. **Transformaciones logarítmicas:** extender el rango de bajas intensidades y reducir el rango de altas intensidades.

$$g(x, y) = c \cdot \log(1 + f(x, y)); \quad \text{Restricción general: } f(x, y) \geq 0$$

* **Transformación logarítmica invertida:** efecto inverso.

$$f(x, y) = c \cdot \log(1 + g(x, y));$$

III. Transformaciones Gamma (γ): manipulación de contraste de propósito general

$$g(x, y) = c \cdot f(x, y)^\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

* Ejemplo: corrección gamma en dispositivos de tubos de rayos catódicos (**CRT**).

IV. Transformaciones lineales por partes: múltiples transformaciones lineales para determinados rangos de intensidad.

a. **Contrast Stretching**: expansión del contraste en rangos de intensidad determinados.

$$T\{\cdot\} = \begin{cases} T_0 & f \in [0, S_1[\\ T_1 & f \in [S_1, S_2[\\ \vdots & \vdots \\ T_{N-1} & f \in [S_{N-1}, S_L] \end{cases}$$

Usualmente T monótona.

- * Si $(s_1 = r_1)$ y $(s_2 = r_2) \rightarrow T$: Identidad (sin cambios)
- * Si $(s_1 = 0)$, $(s_2 = L - 1)$ y $(r_1 = r_2 = a) \rightarrow T$: Umbralización

b. **Intensity level slicing:** resaltar determinados rangos de intensidad.

- * **Método 1:** intensidades de interés \rightarrow intensidad s_0 ; resto \rightarrow intensidad s_1 , $s_0 > s_1$
- * **Método 2:** intensidades de interés \rightarrow intensidad s_0 ; resto \rightarrow mantiene intensidad original.

c. **Bit-plane slicing:** determinar el contenido de información de cada bit que compone la intensidad de un pixel y mantener aquellos más dominantes (**compresión de imágenes**).

Transformaciones de intensidad

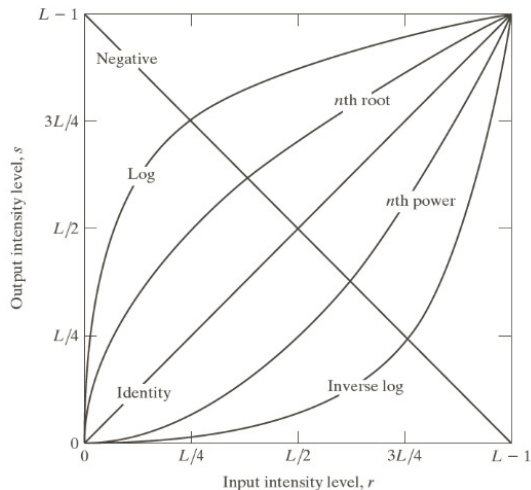
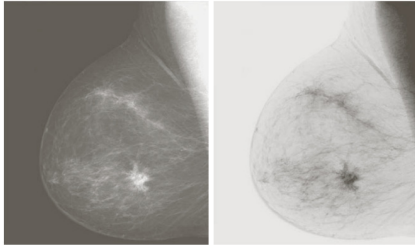


FIGURE 3.3 Some basic intensity transformation functions. All curves were scaled to fit in the range shown.

Figura 2 : Transformaciones de intensidad básicas

Transformaciones de intensidad



(a) Negativo de imagen

FIGURE 3.4
(a) Original digital mammogram.
(b) Negative image obtained using the negative transformation in Eq. (3.2-1). (Courtesy of G.E. Medical Systems.)

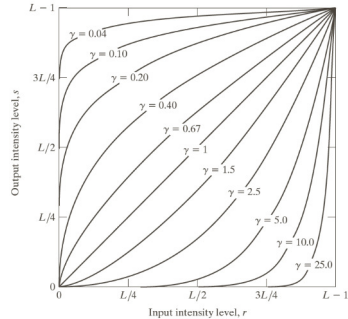


FIGURE 3.6 Plots of the equation $s = cr^\gamma$ for various values of γ ($c = 1$ in all cases). All curves were scaled to fit in the range shown.

(b) Transformaciones Gamma

Figura 3 : Transformaciones de intensidad: negativo y Gamma

Transformaciones de intensidad

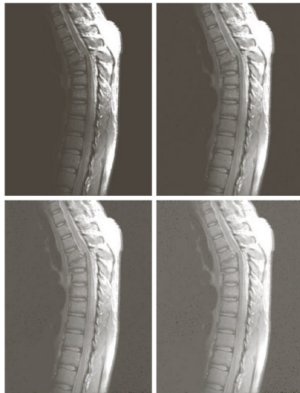


FIGURE 3.8
(a) Magnetic resonance image (MRI) of a fractured human spine.
(b)–(d) Results of applying the transformation in Eq. (3.2-3) with $c = 1$ and $\gamma = 0.6, 0.4$, and 0.3 , respectively. (Original image courtesy of Dr. David R. Pickens, Department of Radiology and Radiological Sciences, Vanderbilt University Medical Center.)

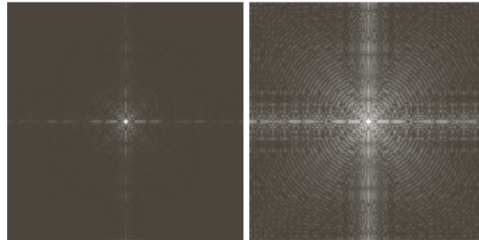


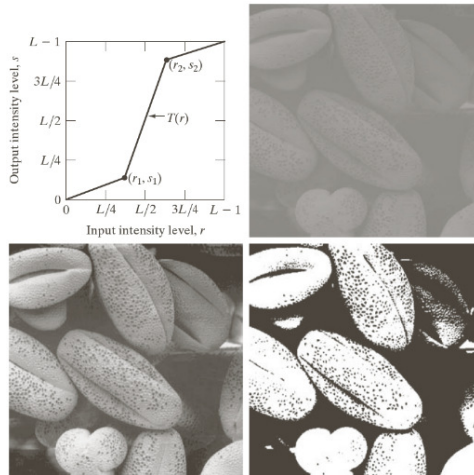
FIGURE 3.5
(a) Fourier spectrum.
(b) Result of applying the log transformation in Eq. (3.2-2) with $c = 1$.

(a) Transformación Gamma vista en el espacio de muestras

(b) Transformación logarítmica vista en frecuencia

Figura 4 : Transformación Gamma; Transformación logarítmica

Transformaciones de intensidad



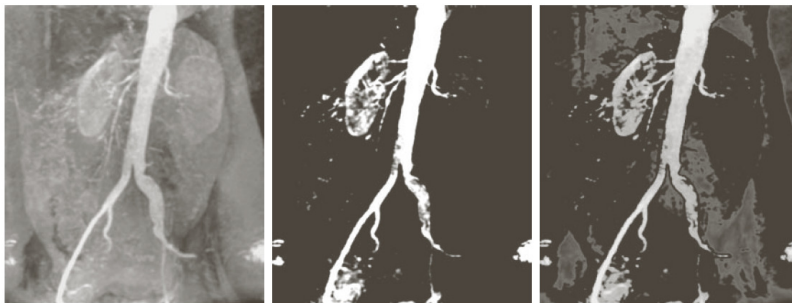
a b
c d

FIGURE 3.10

Contrast stretching.

(a) Form of transformation function. (b) A low-contrast image. (c) Result of contrast stretching. (d) Result of thresholding. (Original image courtesy of Dr. Roger Heady, Research School of Biological Sciences, Australian National University, Canberra, Australia.)

Figura 5 : Transformaciones lineales por partes



a b c

FIGURE 3.12 (a) Aortic angiogram. (b) Result of using a slicing transformation of the type illustrated in Fig. 3.11(a), with the range of intensities of interest selected in the upper end of the gray scale. (c) Result of using the transformation in Fig. 3.11(b), with the selected area set to black, so that grays in the area of the blood vessels and kidneys were preserved. (Original image courtesy of Dr. Thomas R. Gest, University of Michigan Medical School.)

Figura 6 : Intensity level slicing

Transformaciones de intensidad



FIGURE 3.14 (a) An 8-bit gray-scale image of size 500×1192 pixels. (b) through (i) Bit planes 1 through 8, with bit plane 1 corresponding to the least significant bit. Each bit plane is a binary image.

Figura 7 : Bit-plane slicing

Transformaciones de intensidad

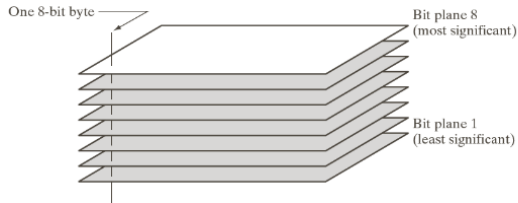


FIGURE 3.13
Bit-plane
representation of
an 8-bit image.

(a) Representación de planos de bits



a b c

FIGURE 3.15 Images reconstructed using (a) bit planes 8 and 7; (b) bit planes 8, 7, and 6; and (c) bit planes 8, 7, 6, and 5. Compare (c) with Fig. 3.14(a).

(b) Reconstrucción basada en planos de bits

Figura 8 : Bit-plane slicing

- Dada una imagen f con intensidades $\in [0; L - 1]$, el **histograma** h de f muestra la distribución de intensidades en el dominio espacial.

$$h(r) = \text{número de píxeles con intensidad } r; \quad r \in [0; L - 1]$$

* **Histograma normalizado:**

$$h_N(r) = \frac{h(r)}{M \cdot N}; \quad r \in [0; L - 1]$$

* $M \cdot N$: número total de píxeles.

- **Ecualización de histograma:** un histograma puede ser visto como una **función de distribución de probabilidad (pdf)** y los niveles de intensidad de una imagen como **variables aleatorias**.

Procesamiento de histogramas

Entonces, por probabilidades, dada una variable aleatoria r , una transformación T y una variable aleatoria resultante $s = T(r)$, es posible hallar la **pdf** de s si se conoce la **pdf** de r y T a partir de:

$$P_s(s) = P_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right|$$

■ Transformación de interés:

$$s = T(r) = (L - 1) \int_0^r P_r(w) dw \quad (\text{función de distribución acumulativa});$$

■ Propiedades:

- T estrictamente monótona para $0 \leq r \leq L - 1$.
- $0 \leq T(r) \leq L - 1$ para $0 \leq r \leq L - 1$.

■ Entonces:

$$\frac{ds}{dr} = \frac{dT(r)}{dr} = (L - 1) \frac{d}{dr} \left[\int_0^r P_r(\omega) d\omega \right] = (L - 1) P_r(r)$$

Procesamiento de histogramas

- Reemplazando:

$$P_s(s) = P_r(r) \left| \frac{1}{(L-1)P_r(r)} \right| = \frac{1}{L-1}, \quad 0 \leq s \leq L-1$$

- Es decir, la transformación basada en la **función de distribución acumulativa (cdf)** da como resultado una **distribución uniforme** (*“equalization”* \equiv *igualización*).
- Para variables discretas (imágenes digitales):

$$P_r(r_k) = \frac{h(r_k)}{MN}, \quad k \in [0; L-1]; \quad (\text{Histograma Normalizado})$$

$$\therefore s_k = T(r_k) = (L-1) \sum_{j=0}^k P_r(r_j) \quad (\text{Función de distribución acumulativa})$$

- Finalmente:

$$s_k = \frac{(L-1)}{MN} \sum_{j=0}^k h(r_j) \quad (\text{Ecualización de señales discretas});$$

r : imagen inicial

r_j : niveles de intensidad de r (L niveles)

s : imagen resultante

s_k : niveles de intensidad de s

Procesamiento de histogramas

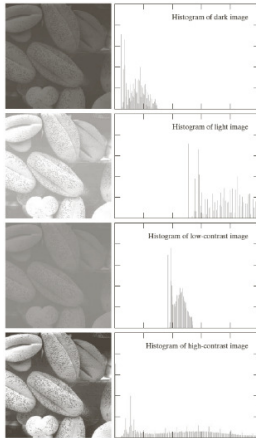


FIGURE 3.16 Four basic image types: dark, light, low contrast, high contrast, and their corresponding histograms.

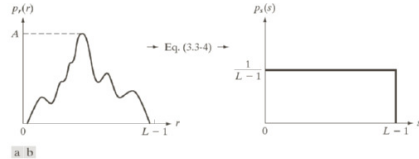


FIGURE 3.18 (a) An arbitrary PDF. (b) Result of applying the transformation in Eq. (3.3-4) to all intensity levels, r . The resulting intensities, s , have a uniform PDF, independently of the form of the PDF of the r 's.

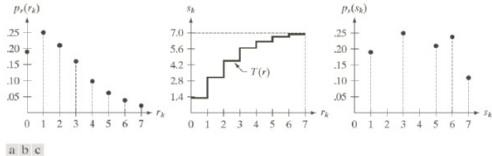


FIGURE 3.19 Illustration of histogram equalization of a 3-bit (8 intensity levels) image. (a) Original histogram. (b) Transformation function. (c) Equalized histogram.

Figura 9 : Histograma de intensidad

Procesamiento de histogramas

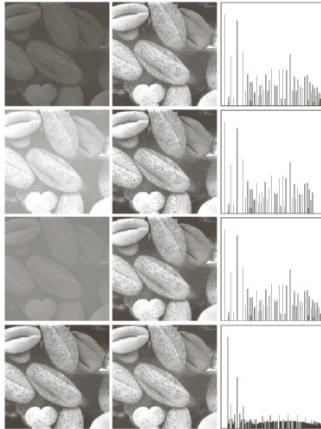


FIGURE 3.20 Left column: images from Fig. 3.16. Center column: corresponding histogram-equalized images. Right column: histograms of the images in the center column.

Figura 10 : Ecualización de histograma

- Dada una imagen de entrada $f(x, y)$ y una imagen resultante $g(x, y) = T\{f(x, y)\}$, la intensidad resultante en el punto (x, y) depende de: (1) una **vecindad** del punto (x, y) en la imagen de entrada y (2) una operación sobre dichos puntos (**filtro**).
 - * Tipos de operación: lineal y no lineal
 - * (Ej: *filtro promedio: lineal / filtro mediano: no lineal*)

■ Operaciones lineales: correlación y convolución espacial.

- I. **Convolución:** representación de la respuesta $g(x, y)$ de un sistema lineal $w(x, y)$ ante una determinada señal de entrada $f(x, y)$

$$g(x, y) = f(x, y) * w(x, y) = \sum_{s=0}^{S-1} \sum_{t=0}^{T-1} f(s, t) w(x - s, y - t);$$

$$= \sum_{s=0}^{S-1} \sum_{t=0}^{T-1} w(s, t) f(x - s, y - t);$$

* Filtrado espacial \rightarrow Convolución.

- II. **Correlación:** Contrastar señales. La correlación da un valor máximo al operar funciones similares.

$$\begin{aligned}g(x, y) &= f(x, y) \star w(x, y) = \sum_{s=0}^{S-1} \sum_{t=0}^{T-1} f(s, t) w(s - x, t - y); \\&= \sum_{s=0}^{S-1} \sum_{t=0}^{T-1} w(s, t) f(s + x, t + y); \\&= f(x, y) * w(-x, -y);\end{aligned}$$

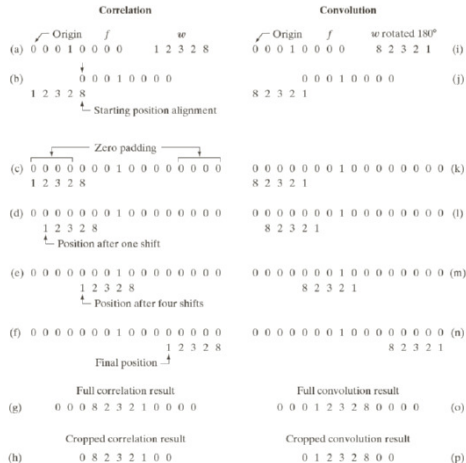


FIGURE 3.29 Illustration of 1-D correlation and convolution of a filter with a discrete unit impulse. Note that correlation and convolution are functions of *displacement*.

Figura 11 : Correlación y convolución en una dimensión

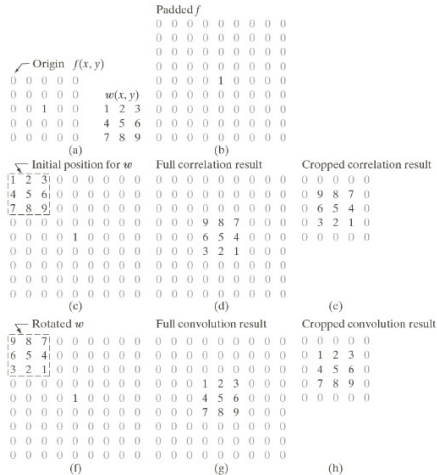


FIGURE 3.30
Correlation (middle row) and convolution (last row) of a 2-D filter with a 2-D discrete, unit impulse. The 0s are shown in gray to simplify visual analysis.

Figura 12 : Correlación y convolución en dos dimensiones

- **Filtros para el suavizado de imágenes (smoothing filters):** Usado para difuminar (eliminar detalles, unir regiones no conectadas) y reducir determinados tipos de ruido.

- I. **Filtro promedio:** lineal

- Efectivo ante ruido aditivo con distribución Gaussiana ($\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$)

$$w(x, y) = \frac{1}{MN} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- II. **Filtro Gaussiano:** lineal. Aproximación discreta de una distribución Gaussiana.

- Propiedad: suaviza sin crear artefactos.

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

III. Filtro mediano: no lineal

$$g(x, y) = \text{mediana}\{N_{(x,y)}^{A \times B}\} \quad N_{(x,y)}^{A \times B} : \text{vecindad de } (x, y) \text{ de tamaño } A \times B;$$

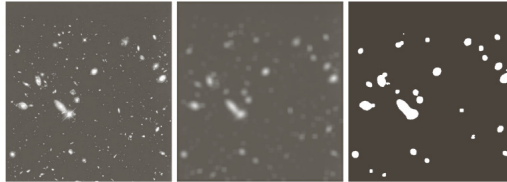
- Efectivo ante ruido Sal y Pimienta (Salt and Pepper)
- *Ruido Sal y Pimienta*: Una porción de los elementos de la imagen es distorsionada. Dichos elementos toman el menor valor posible (l_{\min} / negro / **pimienta**) o el mayor valor posible (l_{\max} / blanco / **sal**).



FIGURE 3.33 (a) Original image, of size 500×500 pixels. (b)–(f) Results of smoothing with square averaging filter masks of sizes $m = 3, 5, 9, 15, 25, 35, 45, \text{ and } 55$, respectively. The black squares at the top are of sizes 3, 5, 9, 15, 25, 35, 45, and 55 pixels, respectively; their borders are 25 pixels apart. The letters at the bottom range in size from 10 to 24 points, in increments of 2 points; the large letter at the top is 60 points. The vertical bars are 5 pixels wide and 100 pixels high; their separation is 20 pixels. The diameter of the circles is 25 pixels, and their borders are 15 pixels apart; their intensity levels range from 0% to 100% black in increments of 20%. The background of the image is 10% black. The noisy rectangles are of size 50×120 pixels.

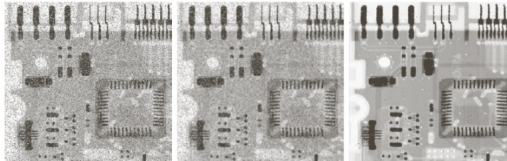
a b
c d
e f

Figura 13 : Suavizado de imágenes.



a b c

FIGURE 3.34 (a) Image of size 528×485 pixels from the Hubble Space Telescope. (b) Image filtered with a 15×15 averaging mask. (c) Result of thresholding (b). (Original image courtesy of NASA.)



a b c

FIGURE 3.35 (a) X-ray image of circuit board corrupted by salt-and-pepper noise. (b) Noise reduction with a 3×3 averaging mask. (c) Noise reduction with a 3×3 median filter. (Original image courtesy of Mr. Joseph E. Pascente, Lixi, Inc.)

Figura 14 : Suavizado de imágenes.

- **Filtros para mejora de bordes (Sharpening Filters):** resaltar transiciones de intensidad y cambios de estructura.

I. **Derivadas en señales discretas:** existen múltiples definiciones de derivadas basadas en **diferencias finitas**. Las de interés para el curso son las siguientes:

a. **Derivada de primer orden:**

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{derivada basada en } \mathbf{Forward\ difference});$$

h mínimo = 1, entonces:

$$f'(x) = f(x+1) - f(x);$$

b. **Derivada de segundo orden:**

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \frac{h}{2}) - f(x - \frac{h}{2})}{h} \quad (\text{derivada basada en } \mathbf{Central\ difference});$$

h mínimo = 1, entonces:

$$f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x);$$

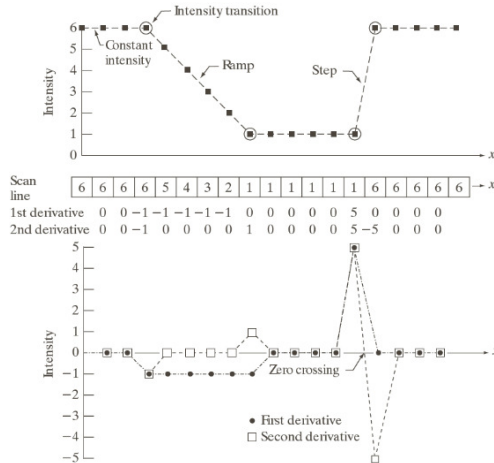


FIGURE 3.36
Illustration of the first and second derivatives of a 1-D digital function representing a section of a horizontal intensity profile from an image. In (a) and (c) data points are joined by dashed lines as a visualization aid.

Figura 15 : Derivadas espaciales basadas en diferencias finitas

c. **Propiedades de derivadas basadas en diferencias finitas:**

$\frac{df}{dx}$: 0 en regiones planas, $\neq 0$ en cambios de intensidad (escalones), $\neq 0$ en rampas. Genera bordes gruesos en discontinuidades.

$\frac{d^2f}{dx^2}$: 0 en regiones planas, $\neq 0$ en cambios de intensidad (escalones), 0 en rampas. **Cruces por cero** en cambios fuertes (**Zero-crossing**).

II. **Laplaciano:** Máscara basada en derivadas de segundo orden. Resalta discontinuidades y minimiza regiones planas.

$$\nabla^2 f = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2}$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y)$$

$$\frac{d^2 f}{dy^2} = f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y)$$

* Alternativa: Laplaciano incluyendo derivadas diagonales:

$$\nabla^2 f = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dxdy} + \frac{d^2 f}{dydx}$$

* Ejemplo de uso: Preservar regiones planas y resaltar bordes:

$$g(x, y) = f(x, y) - c[\nabla^2 f(x, y)]$$

III. **Unsharp masking / Highboost Filtering:** Resaltar bordes a partir de una máscara suavizada basándose del siguiente procedimiento:

- a. Suavizar la imagen original: $\hat{f}(x, y)$
- b. Restar la imagen suavizada de la original: $g_{\text{mask}}(x, y) = f(x, y) - \hat{f}(x, y)$
- c. Sumar la máscara con la imagen original: $g(x, y) = f(x, y) + k \cdot g_{\text{mask}}(x, y)$
 - * $k = 1$: **Unsharp masking**; $k > 1$: **Highboost filtering**

- IV. **Gradiente:** Máscaras basadas en la magnitud de la gradiente, la cual indica la dirección con el cambio de intensidad más fuerte en un determinado punto (x_0, y_0) .

$$\nabla f = \left(\frac{df}{dx}; \frac{df}{dy} \right)^T$$

* Magnitud de la gradiente

$$|\nabla f| = \left(\frac{df}{dx}^2 + \frac{df}{dy}^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (\text{Representación isotrópica})$$

$$|\nabla f| = \left| \frac{df}{dx} \right| + \left| \frac{df}{dy} \right|; \quad (\text{Representación no isotrópica})$$

* Fase de la gradiente:

$$\angle \nabla f = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{\left(\frac{df}{dy} \right)}{\left(\frac{df}{dx} \right)} \right\}$$

0	1	0	1	1	1
1	-4	1	1	-8	1
0	1	0	1	1	1

0	-1	0	-1	-1	-1
-1	4	-1	-1	8	-1
0	-1	0	-1	-1	-1

a	b
c	d

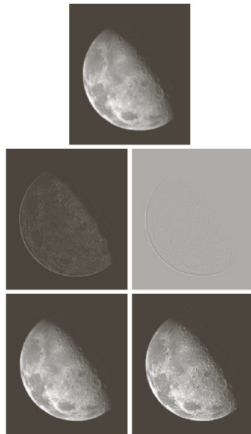
FIGURE 3.37

(a) Filter mask used to implement Eq. (3.6-6).

(b) Mask used to implement an extension of this equation that includes the diagonal terms. (c) and (d) Two other implementations of the Laplacian found frequently in practice.

Figura 16 : Máscaras de Laplaciano

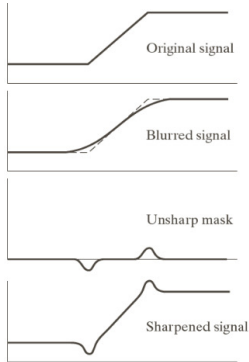
Filtrado espacial



(a) Laplaciano

a
b c
d c

FIGURE 3.38
(a) Blurred image of the North Pole of the moon.
(b) Laplacian without scaling.
(c) Laplacian with scaling.
(d) Image sharpened using the mask in Fig. 3.37(a). (e) Result of using the mask in Fig. 3.37(b). (Original image courtesy of NASA.)



a
b
c
d

FIGURE 3.39 1-D illustration of the mechanics of unsharp masking. (a) Original signal. (b) Blurred signal with original shown dashed for reference. (c) Unsharp mask. (d) Sharpened signal, obtained by adding (c) to (a).

(b) Unsharp masking / Highboost Filtering

Figura 17 : Filtrado espacial: Laplaciano; Unsharp masking / Highboost Filtering

Filtrado espacial

z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6
z_7	z_8	z_9

-1	0
0	1

0	-1
1	0

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

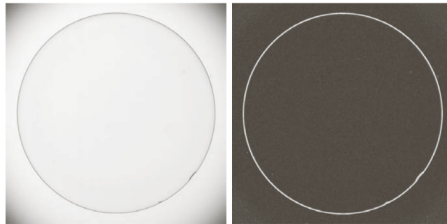
-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

(a) Máscaras de gradientes

a	
b	c
d	e

FIGURE 3.41

A 3×3 region of an image (the z s are intensity values).
(b)–(c) Roberts cross gradient operators.
(d)–(e) Sobel operators. All the mask coefficients sum to zero, as expected of a derivative operator.



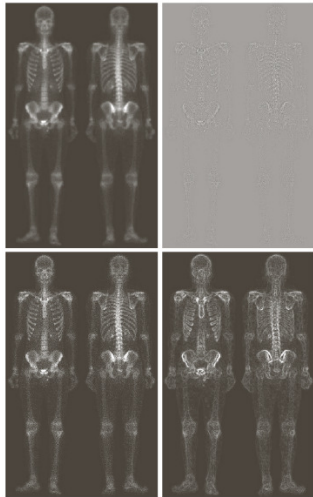
a	b
1	1
1	2
1	3
1	4
1	5
1	6
1	7
1	8
1	9
1	10
1	11
1	12
1	13
1	14
1	15
1	16
1	17
1	18
1	19
1	20
1	21
1	22
1	23
1	24
1	25
1	26
1	27
1	28
1	29
1	30
1	31
1	32
1	33
1	34
1	35
1	36
1	37
1	38
1	39
1	40
1	41
1	42
1	43
1	44
1	45
1	46
1	47
1	48
1	49
1	50
1	51
1	52
1	53
1	54
1	55
1	56
1	57
1	58
1	59
1	60
1	61
1	62
1	63
1	64
1	65
1	66
1	67
1	68
1	69
1	70
1	71
1	72
1	73
1	74
1	75
1	76
1	77
1	78
1	79
1	80
1	81
1	82
1	83
1	84
1	85
1	86
1	87
1	88
1	89
1	90
1	91
1	92
1	93
1	94
1	95
1	96
1	97
1	98
1	99
1	100
2	1
2	2
2	3
2	4
2	5
2	6
2	7
2	8
2	9
2	10
2	11
2	12
2	13
2	14
2	15
2	16
2	17
2	18
2	19
2	20
2	21
2	22
2	23
2	24
2	25
2	26
2	27
2	28
2	29
2	30
2	31
2	32
2	33
2	34
2	35
2	36
2	37
2	38
2	39
2	40
2	41
2	42
2	43
2	44
2	45
2	46
2	47
2	48
2	49
2	50
2	51
2	52
2	53
2	54
2	55
2	56
2	57
2	58
2	59
2	60
2	61
2	62
2	63
2	64
2	65
2	66
2	67
2	68
2	69
2	70
2	71
2	72
2	73
2	74
2	75
2	76
2	77
2	78
2	79
2	80
2	81
2	82
2	83
2	84
2	85
2	

FIGURE 3.42

(a) Optical image of contact lens (note defects on the boundary at 4 and 5 o'clock).
(b) Sobel gradient.
(Original image courtesy of Pete Sites, Perceptics Corporation.)

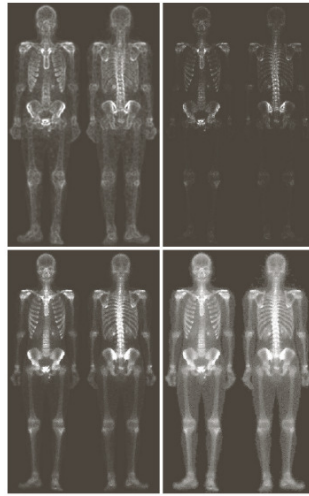
(b) Aplicación de gradientes

Figura 18 : Filtrado espacial basado en gradientes



a b
c d

FIGURE 3.43
(a) Image of whole body bone scan.
(b) Laplacian of (a). (c) Sharpened image obtained by adding (a) and (b). (d) Sobel gradient of (a).



e f
g h

FIGURE 3.43
(Continued)
(e) Sobel image smoothed with a 5×5 averaging filter. (f) Mask image formed by the product of (c) and (e). (g) Sharpened image obtained by the sum of (a) and (f). (h) Final result obtained by applying a power-law transformation to (g). Compare (g) and (h) with (a). (Original image courtesy of G.E. Medical Systems.)

Figura 19 : Combinación de métodos espaciales

(1) Capítulo 3

Gonzalez, Rafael C. & Woods, Richard E. (2006), Digital Image Processing, 3rd Edition, Prentice-Hall Inc.

<http://www.imageprocessingplace.com/>