# IEE239 - Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales
## Laboratorio 02 - Prueba de Entrada
## 19 de setiembre del 2017

Horario: 08M2.
Duración: 20 minutos.
Puntaje: 5 puntos
Está prohibido el uso de material adicional.
La evaluación es estrictamente personal.

1. *(2 puntos)* La frecuencia de muestreo más comun para aplicaciones de audio es de 44kHz. Un ejemplo de sistema de muestreo para estos casos se muestra en la Figura 1.

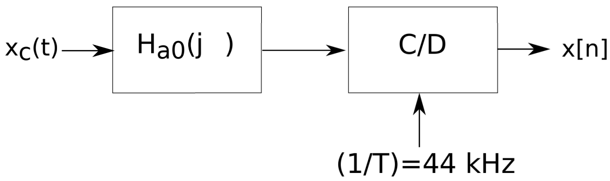


Figura 1: Filtro antialiasing con muestreador ideal

a. Proponga un sistema discreto (compuesto por upsamplers, downsamplers y/o filtros antialiasing) que permita reducir la frecuencia de muestreo de la señal discretizada $x[n]$ a 8 kHz sin pérdida de información. Asumir que la señal continua $x(t)$ tiene una frecuencia máxima de 3.5 kHz.
**Sol:**
Considerando que:

$$\frac{I}{D}(44 \text{ kHz}) = 8 \text{ kHz} \Longrightarrow I = 2, D = 11. \quad (1)$$

Se empleará una interpolaciòn seguida de una decimación . La interpolación estará compuesta de un upsampler de factor $I = 2$, seguida de un filtro pasabajo antialias de frecuencia de corte $w_c = \pi/2$. La subsiguiente decimación estará compuesta por un filtro antialias de frecuencia de corte $w_c = \pi/11$, seguido de un downsampler de factor $D = 11$. *Nota: Tambien es válido sustituir los dos filtros antialias contiguos por el filtro equivalente correpondiente (en este caso, el de menor frecuencia de corte).*

b. En algunas aplicaciones, se usa el sistema de sobremuestreo mostrado en la Figura 2 para discretizar señales de audio. Asumiendo que $H(e^{jw})$ es un filtro pasabajos ideal con frecuencia de corte $\pi/4$, y $H_{a1}(j\Omega)$ esta dado por

$$H_{a1}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_p \\ 0, & |\Omega| > \Omega_s \end{cases} \quad (2)$$

tal que $0 < \Omega_p \leq \Omega_s < \infty$. Hallar las especificaciones mínimas del filtro antialias $H_{a1}(j\Omega)$ (mínimo valor de $\Omega_p$ y máximo valor de $\Omega_s$) tal que el sistema sea equivalente al de la Figura 1.

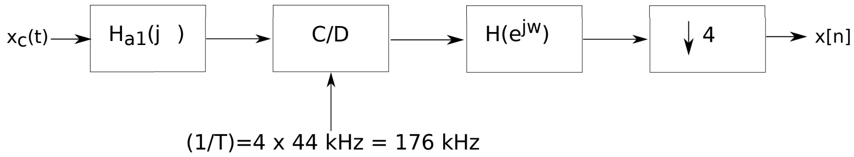


Figura 2: Esquema alternativo de sobremuestreo

**Sol:**

Se debe cumplir que:

- La region $|\Omega| \leq \Omega_p$ debe mapearse a $|w| \leq \pi/4$:

$$\Omega_p T = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \Omega_p = 44\pi$$

- No debe generarse aliasing en la región $|\Omega| \leq \Omega_p$ durante el muestreo:

$$\frac{2\pi}{T} - \Omega_s = \Omega_p \Longrightarrow \Omega_s = 2\pi(4 \cdot 44) - 44\pi = 308\pi$$

2. *(3 puntos)* Se tienen dos secuencias finitas positivas $x[n]$ y $y[n]$ de longitud 256, tal que

$$\begin{aligned} x[n] &> 0, \qquad 0 \leq n \leq 255 \\ y[n] &> 0, \qquad 0 \leq n \leq 255 \\ x[n] = y[n] &= 0, \qquad \text{otro caso} \end{aligned}$$

Sea $r[n]$ la convolución *lineal* de $x[n]$ con $y[n]$, $R(e^{jw})$ denota la transformada de Fourier de $r[n]$. $R_s[k]$ denotará 128 muestras igualmente espaciadas de $R(e^{jw})$, es decir:

$$R_s[k] = R(e^{jw})|_{w=2\pi k/128}, \tag{3}$$

a. ¿Cual es la duración de $r[n]$?

**Sol:**

Por definición de convolucion lineal, la duración de $r[n]$ será $256 + 256 - 1 = 511$

b. Expresar $R_s[k]$ en función de $x[n]$ y $y[n]$ desde los dos enfoques posibles (espacio de muestras y dominio de frecuencia), expresando el número de muestras que emplee para DFTs y/o DFTs inversas. ¿Se presenta el fenómeno de aliasing en el cálculo de $R_s[k]$? ¿Se pierde información con respecto a $R(e^{jw})$? Explique.

**Sol:**

Puesto que se ha definido

$$R_s[k] = R(e^{j(2\pi k/128)})$$

entonces

$$R_s[k] = X(e^{j(2\pi k/128)})Y(e^{j(2\pi k/128)}) = X[k]Y[k]$$

donde $X[k]$ e $Y[k]$ son las DFT de $x[n]$ e $y[n]$ respectivamente, muestreadas en frecuencia con 128 muestras igualmente espaciadas.

Calculando la DFT inversa de $R_s[k]$ se obtiene:

$$r_s[n] = \begin{cases} \sum_{r=-\infty}^{\infty} r[n-128r], & 0 \leq n \leq 127 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

De lo cual se puede observar que $R_s[k]$ implica aliasing en el tiempo para r[n].

3. Demostrar la propiedad de desplazamiento en frecuencia (abajo expresada) empleando la definición de la DFT.

$$x[n]e^{j2\pi ln/N} \longleftrightarrow X((k-l))_N \tag{4}$$

**Sol:**

La DFT de N puntos de x esta dada por:

$$X[k] = X(e^{jw})|_{w=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

Calculando la DFT de la expresion de interés se tiene:

$$X_{desp}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{j\frac{2\pi ln}{N}}e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi(k-l)n}{N}} = X[k-l] \tag{5}$$