Procesamiento de Señales e Imágenes Digitales: Series y Transformada de Fourier

MSc. Renán Rojas G.

Pontificia Universidad Católica del Perú

I. **Relación entre la Transformada de Fourier en tiempo continuo y la transformada de Laplace**

1. Dada la señal $x_c(t)$ y la variable compleja $s = \sigma + j\Omega$:

$$X_c(s)\Big|_{s=\sigma+j\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_c(t)e^{-(\sigma+j\Omega)t}dt.$$

   Entonces, $X_c(s)$ puede interpretarse como la **transformada de Fourier en tiempo continuo** de $x_c(t)e^{-\sigma t}$.

2. Si $X_c(s)$ converge para Re$\{s\} = 0$, la **transformada de Fourier en tiempo continuo** corresponde a la **transformada de Laplace** evaluada en el eje imaginario $(\sigma = 0)$:

$$X_c(s)\Big|_{s=j\Omega} = X_c(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_c(t)e^{-j\Omega t}dt.$$

   * *Si $X_c(s)$ no incluye a Re$\{s\} = 0$ en su* **región de convergencia**, *entonces $X_c(j\Omega)$ no existe.*

II. Relación entre la Transformada de Fourier en tiempo discreto y la transformada Z

1. Dada la secuencia $x[n]$ y la variable compleja $z = re^{j\omega}$:

$$X(z)\Big|_{z=re^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x[n]r^{-n}\right)e^{-j\omega n}.$$

   Entonces, $X(z)$ puede interpretarse como la **transformada de Fourier en tiempo discreto** de $x[n]r^{-n}$.

2. Si $X(z)$ converge para $|z| = 1$, la **transformada de Fourier en tiempo discreto** corresponde a la **transformada Z** evaluada en el círculo unitario $(r = 1)$:

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}.$$

** Si $X(z)$ no incluye a $|z| = 1$ en su* **región de convergencia**, *entonces $X(e^{j\omega})$ no existe.*

I. Descripción

- La representación de señales basada en *series y transformada de Fourier* se caratceriza por propiedades importantes que permiten reducir la complejidad de problemas analíticos y desarrollar conceptos bajo el dominio de frecuencia.
- Ya que la *serie de Fourier* corresponde a muestras de la *transformada de Fourier*, muchas de las propiedades para señales periódicas parten del caso en el cual su periodo es evaluado en el límite cuando tiende a infinito.
- Existe una gran similitud entre las propiedades para señales en tiempo continuo y en tiempo discreto. Esto implica que las demostraciones para ambos escenarios son casi idénticas.
- Adicionalmente, existe un gran conjunto de pares de transformación conocidos, los cuales permiten examinar señales y su interacción con sistemas de forma simple a partir del concepto de análisis en frecuencia.
- Las tablas de propiedades y pares de transformación conocidos de la representación de Fourier incluyen un resumen de las expresiones más relevantes.

II. **Serie de Fourier en tiempo continuo**

Ejemplo 1

Determinar la *serie de Fourier en tiempo continuo* de la señal:

$$x_c(t) = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 4\sin\left(\frac{5\pi}{4}t\right).$$

Luego, determinar su transformada de *Fourier en tiempo continuo*.

Solución: A partir de la identidad de *Euler*:

$$x_c(t) = 2 + \left[\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{3}t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{3}t}\right] + \left[\frac{2}{j}e^{j\frac{5\pi}{4}t} - \frac{2}{j}e^{-j\frac{5\pi}{4}t}\right].$$

La señal $x_c(t)$ está compuesta por cuatro exponenciales complejas. Analizando la relación entre sus frecuencias angulares y verificando si corresponden a armónicas:

$$\frac{2\pi}{3} = k_1\Omega_0, \quad \frac{5\pi}{4} = k_2\Omega_0, \quad \frac{1}{k_1}\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{k_2}\frac{5\pi}{4}.$$

Ya que Ω_0 está definido como el mayor valor posible (el menor valor T_p en el que todas las exponenciales complejas sean periódicas), $\{k_1, k_2\}$ corresponden a los valores:

$$k_1 = 8, \quad k_2 = 15, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{24}\frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (T_p = 24 \text{ s}).$$

Expresando $x_c(t)$ en función a Ω_0:

$$x_c(t) = 2 + \left[\frac{1}{2}e^{j8\left(\frac{2\pi}{24}\right)t} + \frac{1}{2}e^{-j8\left(\frac{2\pi}{24}\right)t}\right] + \left[\frac{2}{j}e^{j15\left(\frac{2\pi}{24}\right)t} - \frac{2}{j}e^{-j15\left(\frac{2\pi}{24}\right)t}\right].$$

Por lo tanto, a partir de la *ecuación de síntesis*:

$$c_0 = 2, \qquad c_8 = \frac{1}{2}, \qquad c_{-8} = \frac{1}{2},$$
$$c_{15} = -2j, \qquad c_{-15} = 2j, \qquad c_k = 0, \text{ otros casos.}$$

Por otro lado, de la forma general de la transformada de Fourier en tiempo continuo para señales periódicas:

$$
\begin{aligned}
X_c(j\Omega) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(\Omega - k\Omega_0) \\
&= 4\pi + \pi\delta\left[\Omega - 8\left(\frac{2\pi}{24}\right)\right] + \pi\delta\left[\Omega + 8\left(\frac{2\pi}{24}\right)\right] \\
&- 4\pi j\delta\left[\Omega - 15\left(\frac{2\pi}{24}\right)\right] + 4\pi j\delta\left[\Omega + 15\left(\frac{2\pi}{24}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2

A partir de la propiedad de derivación en tiempo continuo, determinar la serie de Fourier de la señal $x_c(t)$ de periodo $T_p = 2$ s:

$$x_c(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ 2-t, & t \in [1,2] \end{cases}.$$

Solución: Ya que $X_c(t)$ es una función derivable, su derivada de primer orden corresponde a:

$$\frac{d}{dt}x_c(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1] \\ -1, & t \in [1,2] \end{cases}.$$

Calculando su transformada de Fourier:

$$
\begin{aligned}
a_k = \mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}x_c(t)\right\} &= \frac{1}{2}\int_1^2 -e^{-j\pi tk}dt + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-j\pi tk}dt \\
&= \frac{1}{j\pi k}[1-(\underbrace{e^{-j\pi k}}_{=(-1)^k, k\in\mathbb{Z}})] = \frac{1}{j\pi k}\left[1-(-1)^k\right].
\end{aligned}
$$

Luego, por la propiedad de derivación en tiempo *(Tabla 1)*, la serie de Fourier $x_c(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} c_k$ corresponde a:

$$
\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}x_c(t)\right\} = jk\Omega_0 c_k = \frac{1}{j\pi k}\left[1-(-1)^k\right], \quad \Omega_0 = \pi.
$$

Finalmente:

$$
c_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}\left[(-1)^k - 1\right].
$$

Ejemplo 3

Determinar la serie de Fourier de la señal $x_c(t)$ a partir de:

a. Propiedad de producto de la serie de Fourier en tiempo continuo.

b. expansión de términos.

$$x_c(t) = \cos(4\pi t)\sin(4\pi t).$$

Solución:

a. Considerar las siguientes series de Fourier:

$$a_k = \mathcal{F}\{\cos(4\pi t)\} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k \in \{-1, 1\} \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases},$$

$$b_k = \mathcal{F}\{\sin(4\pi t)\} = \begin{cases} -\frac{j}{2}, & k = 1 \\ \frac{j}{2}, & k = -1 \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases}.$$

Entonces, por la propiedad de producto *(Tabla 1)*:

$$\mathcal{F}\{\cos(4\pi t)\sin(4\pi t)\} = \underbrace{\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}}_{a_k * b_k}$$

$$= \begin{cases} -\frac{j}{4}, & k = 2 \\ \frac{j}{4}, & k = -2 \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases}.$$

b. A partir de la identidad de *Euler*:

$$x_c(t) = \left[\frac{1}{2}e^{j4\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j4\pi t}\right]\left[-\frac{j}{2}e^{j4\pi t} + \frac{j}{2}e^{-j4\pi t}\right]$$

$$= -\frac{j}{4}e^{j8\pi t} + \frac{j}{4}e^{-j8\pi t}.$$

Entonces, de la ecuación de síntesis y asumiendo $\Omega_0 = 4\pi$:

$$c_k = \begin{cases} -\frac{j}{4}, & k = 2 \\ \frac{j}{4}, & k = -2 \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases}.$$

III. Serie de Fourier en tiempo discreto

Ejemplo 4

Determinar la serie de Fourier de la secuencia:

$$x_p[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{7}n\right),$$

Solución: A partir de la identidad de *Euler*:

$$x_p[n] = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}n} + \frac{\sqrt{3}}{2j}e^{j\frac{\pi}{7}n} - \frac{\sqrt{3}}{2j}e^{-j\frac{\pi}{7}n}$$

Analizando si las exponenciales son armónicamente relacionadas:

$$\frac{\pi}{3} = \omega_0 k_1, \quad \frac{\pi}{7} = \omega_0 k_2, \quad \frac{1}{k_1}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{k_2}\frac{\pi}{7}.$$

Ya que ω_0 está definido como el mayor valor posible (el menor valor N en el que todas las exponenciales complejas sean periódicas), $\{k_1, k_2\}$ corresponden a los valores:

$$k_1 = 7, \quad k_2 = 3, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{42}\frac{\text{rad}}{\text{muestra}} \quad (N = 42).$$

Entonces, $x[n]$ puede ser expresado a partir de ω_0:

$$x_p[n] = \frac{1}{2}e^{j7\left(\frac{2\pi}{42}\right)n} + \frac{1}{2}e^{-j7\left(\frac{2\pi}{42}\right)n} + \frac{\sqrt{3}}{2j}e^{j3\left(\frac{2\pi}{42}\right)n} - \frac{\sqrt{3}}{2j}e^{-j3\left(\frac{2\pi}{42}\right)n}$$

1. Entonces, a partir de la ecuación de síntesis:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 42r + 7, r \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2}, & k = 42r - 7 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}j, & k = 42r + 3 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}j, & k = 42r - 3 \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases} .$$

Una forma alternativa de expresar la periodicidad corresponde a describir el intervalo $< N >$ centrado en $k = 0$:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 7 \\ \frac{1}{2}, & k = -7 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}j, & k = 3 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}j, & k = -3 \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases} , \quad c_{k+42} = c_k .$$

Ejemplo 5

Dada la secuencia $x_p[n]$ de periodo N cuya serie de Fourier corresponde a la secuencia c_k, determinar la serie de Fourier de las siguientes expresiones en función a c_k:

a. $x_p[n-n_0], n_0 \in \mathbb{Z}$.

b. $(-1)^n x_p[n]$.

Solución:

a. A partir de la propiedad de desplazamiento en el tiempo (*Tabla 2*):

$$x_p[n-n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0} c_k.$$

De forma alternativa, a partir de la *ecuación de análisis*:

$$\mathcal{F}\{x_p[n-n_0]\} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x_p[n-n_0]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad \text{cambio de variable: } \hat{n} = n - n_0$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{\hat{n}=<N>} x_p[n]e^{-j\frac{2\pi k}{N}(\hat{n}+n_0)}$$

$$= e^{-j\frac{2\pi k}{N}n_0}\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{\hat{n}=<N>} x_p[\hat{n}]e^{-j\frac{2\pi k}{N}\hat{n}}}_{c_k} = e^{-j\frac{2\pi k}{N}n_0}c_k.$$

b. Ya que $n \in \mathbb{Z}$:

$$(-1)^n = e^{j\pi n} = e^{j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}n}.$$

Entonces, por la propiedad de desplazamiento en frecuencia (*Tabla 2*):

$$\mathcal{F}\{e^{j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}n}x_p[n]\} = c_{k-\frac{N}{2}}.$$

De forma alternativa, a partir de la *ecuación de síntesis*:

$$\mathcal{F}\{e^{j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}n}x_p[n]\} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\underbrace{e^{j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}n}x_p[n]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}}_{x_p[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-\frac{N}{2})n}}$$

$$= c_{k-\frac{N}{2}}.$$

Ejemplo 6

Dadas las secuencias $x[n]$ e $y[n]$ e periodo $N = 8$, determinar la secuencia $z[n]$ correspondiente a la convolución periódica de ambas:

$$z_p[n] = \sum_{r=<N>} x_p[r] y_p[n-r],$$

$$x_p[n] = \sin(\frac{3\pi}{4} n),$$

$$y_p[n] = \begin{cases} 1, & n \in \{0, 1, \ldots, 3\} \\ 0, & n \in \{4, 5, \ldots, 7\} \end{cases}, \quad y_p[n+8] = y_p[n].$$

Solución: Antes de usar la propiedad de convolución periódica (*Tabla 2*), se incluye su demostración. Dada α_k la serie de Fourier de $x_p[n]$ y β_k la serie de Fourier de $y_p[n]$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\{z_p[n]\} &= \frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\left(\sum_{r=<N>} x_p[r]y_p[n-r]\right)e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} && \text{cambio en orden de sumatorias}\\
&= \frac{1}{N}\sum_{r=<N>} x_p[r]\left(\sum_{n=<N>} y_p[n-r]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}\right) && \text{cambio de variable: } \hat{n} = n - r\\
&= \sum_{r=<N>} x_p[r]\left(\frac{1}{N}\sum_{\hat{n}=<N>} \underbrace{y_p[\hat{n}]e^{-j\frac{2\pi k}{N}(\hat{n}+r)}}_{y_p[\hat{n}]e^{-j\frac{2\pi k}{N}\hat{n}}e^{-j\frac{2\pi k}{N}r}}\right) && \text{multiplicando por } \frac{N}{N}\\
&= \frac{N}{N}\sum_{r=<N>} x_p[r]e^{-j\frac{2\pi k}{N}r}\alpha_k\\
&= N\beta_k\alpha_k
\end{aligned}
$$

Luego, para las secuencias de interés:

$$\alpha_k = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{3} e^{-j\frac{2\pi k}{8}n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 8r, r \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{8}\left(\frac{1-e^{-j\frac{2\pi k}{8}4}}{1-e^{-j\frac{2\pi k}{8}}}\right), & \text{otros casos} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 8r, r \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{8}e^{-j\frac{3\pi k}{8}}\frac{\sin(\frac{\pi k}{2})}{\sin(\frac{\pi k}{8})}, & \text{otros casos} \end{cases}$$

$$= \left\{\underset{\uparrow}{\frac{1}{2}}, \frac{1}{8} - 0{,}3018j, 0, \frac{1}{8} - 0{,}0518j, 0, \frac{1}{8} + 0{,}0518j, 0, \frac{1}{8} - 0{,}3018j\right\}, \quad \alpha_{k+8} = \alpha_k.$$

$$\beta_k = \begin{cases} -\frac{j}{2}, & k = 8r+3, r \in \mathbb{Z} \\ \frac{j}{2}, & k = 8r-3 \end{cases}.$$

Entonces, aplicando producto en frecuencia:

$$c_k = \mathcal{F}\{y[n]\} = \Big\{\underset{\uparrow}{0}, 0, 0, -0{,}2071 - 0{,}5j, 0, -0{,}2071 + 0{,}5j, 0, 0\Big\}, \quad c_{k+8} = c_k.$$

IV. Transformada de Fourier en tiempo continuo

Ejemplo 7

Determinar la *transformada de Fourier en tiempo continuo* de:

$$x_c(t) = e^{-2(t-1)}u(t-1).$$

Solución: a partir de pares de trasnformación conocidos (*Tabla 4*):

$$e^{-2t}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2 + j\Omega}.$$

Entonces, expresando $x_c(t)$ a partir de una función auxiliar y usando la propiedad de desplazamiento (*Tabla 3*):

$$
\begin{aligned}
x_c(t) &= \hat{x}_c(t-1), \quad \hat{x}_c(t) = e^{-2t}u(t). \\
X_c(j\Omega) &= \hat{X}_c(j\Omega)e^{-j\Omega} \\
&= \frac{e^{-j\Omega}}{2+j\Omega}.
\end{aligned}
$$

De forma alternativa, a partir de la definición de transformada de Fourier:

$$
\begin{aligned}
X_c(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-1)}u(t-1)e^{-j\Omega t}dt \\
&= \int_{1}^{+\infty} e^{-2(t-1)}e^{-j\Omega t}dt \\
&= \frac{e^{2}(e^{-2-j\Omega})}{2+j\Omega} = \frac{e^{-j\Omega}}{2+j\Omega}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 8

Determinar la transformada de Fourier en tiempo-continuo de:

$$x_c(t) = 1 + \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$$

Solución: A partir de la identidad de *Euler*:

$$x_c(t) = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}e^{j(6\pi t + \frac{\pi}{8})}}_{\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{8}}e^{j6\pi t}} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{-j(6\pi t + \frac{\pi}{8})}}_{\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{8}}e^{-j6\pi t}}.$$

Luego, aplicando la propiedad de *linealidad* de la Transformada de Fourier en tiempo continuo (*Tabla 3*):

$$\mathcal{F}\{x_c(t)\} = \mathcal{F}\{1\} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{8}}\mathcal{F}\{e^{j6\pi t}\} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{8}}\mathcal{F}\{e^{-j6\pi t}\}.$$

1. Los tres términos son armónicos con una frecuencia angular $\Omega_0 = 6\pi$ ($T_p = \frac{1}{3}$ s). De la transformada de Fourier de exponenciales complejas (*Tabla 4*):
   I. $e^{j6\pi(0)} = 1 \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\Omega)$.
   II. $e^{j6\pi(1)} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\Omega - 6\pi)$.
   III. $e^{j6\pi(-1)} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\Omega + 6\pi)$.

   Finalmente:

$$X_c(j\Omega) = 2\pi\delta(\Omega) + \pi e^{j\frac{\pi}{8}} 2\pi\delta(\Omega - 6\pi) + \pi e^{-j\frac{\pi}{8}} \delta(\Omega + 6\pi).$$

Ejemplo 9

A partir de la ecuación de síntesis, determinar $x_c(t)$ si se sabe que:

$$|X_c(j\Omega)| = 2\{u(\Omega + 3) - u(\Omega - 3)\},$$
$$\angle X_c(j\Omega) = -\frac{3}{2}\Omega + \pi.$$

Solución: la transformada de Fourier en tiempo continuo de $x_c(t)$ puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} X_c(j\Omega) &= |X_c(j\Omega)|e^{j\angle X_c(j\Omega)} \\ &= 2\{u(\Omega+3) - u(\Omega-3)\}e^{j(-\frac{3}{2}\Omega+\pi)}. \end{aligned}$$

Luego, aplicando la ecuación de síntesis:

$$\begin{aligned} x_c(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_c(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-3}^{3} \underbrace{e^{j(-\frac{3}{2}\Omega+\pi)}}_{e^{-j\frac{3}{2}\Omega}e^{j\pi}} e^{j\Omega t}d\Omega \\ &= -\frac{6}{\pi}\text{sinc}\left[3\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Ejemplo 10

Dado el sistema LTI causal con función de transferencia:

$$H_c(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega + 3},$$

Determinar la secuencia de entrada al sistema a partir de la *propiedad de convolución* si se sabe que la salida corresponde a:

$$y_c(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t).$$

Solución: Antes de usar la propiedad de convolución de la *transformada de Fourier en tiempo continuo*, se incluye su demostración. Considerar la señal:

$$\begin{aligned} y_c(t) &= x_c(t) * h_c(t) \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x_c(\tau)h_c(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Luego, a partir de la *ecuación de análisis*:

$$
\begin{aligned}
Y_c(j\Omega) &= \int_{t=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x_c(\tau) h_c(t-\tau) d\tau \right) e^{-j\Omega t} dt. \qquad \text{Cambio de orden de integrales} \\
&= \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x_c(\tau) \underbrace{\left(\int_{t=-\infty}^{+\infty} h_c(t-\tau) e^{-j\Omega t} dt \right)}_{H_c(j\Omega)e^{-j\Omega\tau}} d\tau \\
&= X_c(j\Omega) H_c(j\Omega).
\end{aligned}
$$

2. Para la señal de interés, usando la propiedad de linealidad (*Tabla 3*):

$$
\begin{aligned}
Y_c(j\Omega) &= \mathcal{F}\{e^{-3t}u(t)\} - \mathcal{F}\{e^{-4t}u(t)\} \\
&= \frac{1}{3+j\Omega} - \frac{1}{4+j\Omega} \\
&= \frac{1}{(3+j\Omega)(4+j\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Luego, por la propiedad de convolución:

$$\begin{aligned} X_c(j\Omega) &= \frac{Y_c(j\Omega)}{H_c(j\Omega)} \\ &= \frac{1}{4+j\Omega} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$x_c(t) = e^{-4t}u(t).$$

V. **Transformada de Fourier en tiempo discreto**

Ejemplo 11

Determinar la transformada de Fourier de la secuencia:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|}.$$

Solución: Expresando la secuencia como una función por partes:

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}, & n \geq 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-(n-1)}, & n < 1 \end{cases}.$$

Luego, a partir de la *ecuación de análisis*:

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{-(n-1)} e^{-j\omega n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)} e^{-j\omega n}, \quad \text{aplicando cambios de variable}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\hat{n}=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)^{\hat{n}} + e^{-j\omega}\sum_{\tilde{n}=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^{\tilde{n}}, \quad \text{usando la serie geométrica}\\
&= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}} + \frac{e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}, \quad \text{a partir de la identidad de } \textit{Euler}\\
&= \frac{\frac{3}{4}e^{-j\omega}}{\frac{5}{4}-\cos(\omega)}.
\end{aligned}
$$

De forma alternativa, es posible aplicar pares de transformación conocidos (*Tabla 4*) para obtener el espectro de $x[n]$. Expresando la secuencia a partir de escalones unitarios:

$$x[n] = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)} u[n-1]}_{\alpha[n-1]} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{-(n-1)} u[-n]}_{2\alpha[-n]}.$$

Analizando el espectro de la secuencia auxiliar $\alpha[n]$:

$$\alpha(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

Luego, por *linealidad*, *desplazamiento en tiempo* e *inversión en tiempo* (*Tabla 5*):

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \mathcal{F}\{\alpha[n-1]\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{\alpha[-n]\} \\ &= \frac{e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}} \\ &= \frac{\frac{3}{4}e^{-j\omega}}{\frac{5}{4}-\cos(\omega)}. \end{aligned}$$

Ejemplo 12

Determinar la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia:

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{4}\right).$$

Solución: a partir de la identidad de *Euler*, se expresa la secuencia a partir de exponenciales complejas armónicamente relacionadas con $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$ $(N = 6)$:

$$x[n] = \underbrace{-\frac{j}{2}e^{j\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4}\right)}}_{-\frac{j}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\left(\frac{\pi}{3}n\right)}} + \underbrace{\frac{j}{2}e^{-j\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4}\right)}}_{\frac{j}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j\left(\frac{\pi}{3}n\right)}}.$$

Luego, a partir de la propiedad de linealidad (*Tabla 5*):

$$X(e^{j\omega}) = -\frac{j}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\mathcal{F}\left\{e^{j\left(\frac{\pi}{3}n\right)}\right\} + \frac{j}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\mathcal{F}\left\{e^{-j\left(\frac{\pi}{3}n\right)}\right\}.$$

De la transformada de Fourier para exponenciales complejas (Tabla 6):

I. $\mathcal{F}\left\{e^{j\left(\frac{\pi}{3}n\right)}\right\} = 2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - \frac{2\pi}{6} - 2\pi l)$

II. $\mathcal{F}\left\{e^{-j\left(\frac{\pi}{3}n\right)}\right\} = 2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega + \frac{2\pi}{6} - 2\pi l)$

Por lo tanto, el espectro de frecuencia de $x[n]$ corresponde a:

$$X(e^{j\omega}) = -j\pi e^{j\frac{\pi}{4}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{6} - 2\pi l\right) + j\pi e^{-j\frac{\pi}{4}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{6} - 2\pi l\right).$$

Una expresión alternativa para el espectro corresponde al intervalo $\omega \in [-\pi, \pi]$:

$$X(e^{j\omega}) = -j\pi e^{j\frac{\pi}{4}} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{6}\right) + j\pi e^{-j\frac{\pi}{4}} \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{6}\right), \quad X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega}).$$

Ejemplo 13

Un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ recibe la secuencia de entrada:

$$x[n] = (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

Determinar la secuencia de salida $y[n]$.

Solución: a partir de la propiedad de linealidad y derivación en frecuencia (*Tabla 5*), el espectro de la secuencia de entrada $X(e^{j\omega})$ corresponde a:

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \mathcal{F}\left\{n\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\right\} + \mathcal{F}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\right\} \\
&= j\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right\} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \\
&= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2}
\end{aligned}
$$

A partir de la propiedad de convolución (*Tabla 5*):

$$
\begin{aligned}
Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \\
&= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.
\end{aligned}
$$

Aplicando fracciones parciales:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{-2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{-3}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2} + \frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

1. Finalmente, a partir de pares de transformación de la *transformada de Fourier en tiempo discreto*:

$$y[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 3(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

.

1. **Motivación**

   Es imposible almacenar $X(e^{j\omega})$ ya que implica información infinita. Representar el espectro de frecuencia de $x[n]$ como un **conjunto finito de muestras** $X[k]$ permite su uso en sistemas numéricos y es la base de implementaciones eficientes para múltiples algoritmos de procesamiento de señales.

2. **Definición**

   Considerar una secuencia causal de L muestras de duración $x[n]$ y a su transformada de Fourier en tiempo-discreto (*DTFT*) $X(e^{j\omega})$, donde $\omega \in \mathbb{R}$ representa al dominio de frecuencia contínua en radianes por muestra. Entonces, la secuencia de duración finita $X[k]$

Transformada Discreta de Fourier (*Discrete Fourier Transform*) II

correspondiente a N muestras uniformemente espaciadas de $X(e^{j\omega})$ se denomina **Transformada discreta de Fourier** (*DFT*):

$$
\begin{aligned}
X[k] = \underset{N}{\mathrm{DFT}}\{x[n]\} &\triangleq X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}, k \in \{0, 1, \ldots, N-1\} \\
&= \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{j\frac{2\pi k}{N}n}, k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

3. **Tomar muestras de la transformada de Fourier en tiempo discreto**
   a. Dada la secuencia causal $x[n]$ de L muestras de duración y su espectro $X(e^{j\omega})$, se define $X_p[k]$ como la secuencia de **duración infinita** compuesta por muestras de su espectro espaciadas uniformemente $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$, donde $N \in \mathbb{Z}^+$.

$$
X_p[k] \triangleq X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}, k \in \mathbb{Z}.
$$

Ya que $X(e^{j\omega})$ es de periodo 2π, entonces $X_p[k]$ será una secuencia de periodo N y contiene valores únicos en el intervalo $k \in \{0, \ldots, N-1\}$.

b. De lo anterior, es posible obtener una expresión alternativa para $X[k]$:

$$X[k] = \begin{cases} X_p[k] & , k \in \{0, 1, \ldots, N-1\} \\ 0 & , \text{otros casos} \end{cases} .$$

En otras palabras, $X[k]$ corresponde al periodo de $X_p[k]$ en el intervalo $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$.

c. Del concepto de **Series de Fourier en tiempo discreto** (*DTFS*), se sabe que una secuencia $x_p[n]$ de periodo N tiene un espectro de frecuencia c_k que corresponde a muestras de la envolvente $X(e^{j\omega})$:

$$c_k = \mathcal{F}\{x_p[n]\} = \frac{1}{N} X(e^{j\omega})\Big|_{\omega = \frac{2\pi k}{N}} .$$

Transformada Discreta de Fourier (*Discrete Fourier Transform*) IV

Entonces, $X_p[k]$ corresponde al espectro de frecuencia de $x_p[n]$ escalado por un factor N:

$$X_p[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} = Nc_k.$$

Por lo tanto, a partir de la **ecuación de síntesis**:

$$x_p[n] = \sum_{k=<N>} \underbrace{\frac{1}{N}X_p[k]}_{c_k} e^{j\frac{2\pi k}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{k=<N>}\left(\sum_{\hat{n}=-\infty}^{+\infty} x[\hat{n}]e^{-j\frac{2\pi k}{N}\hat{n}}\right)e^{j\frac{2\pi k}{N}n} \tag{2}$$

$$= \sum_{\hat{n}=-\infty}^{+\infty} x[\hat{n}]\underbrace{\left(\frac{1}{N}\sum_{k=<N>} e^{-j\frac{2\pi k}{N}(n-\hat{n})}\right)}_{p[n-\hat{n}]} = x[n] * \underbrace{\left(\frac{1}{N}\sum_{k=<N>} e^{j\frac{2\pi k}{N}n}\right)}_{p[n]}.$$

A partir de la serie geométrica:

$$p[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n-rN], r \in \mathbb{Z}.$$

Esto implica que $x_p[n]$ corresponde a la versión de $x[n]$ con periodo N.

$$x_p[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n - rN] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n - rN]. \tag{3}$$

d. Basándose en (2) y (3), es posible obtener la secuencia de duración finita $x[n]$ a partir de N muestras de su espectro $X[k]$ mediante la expresión denominada **transformada discreta de Fourier inversa** (*DFT inversa*):

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p[k] e^{j\frac{2\pi k}{N} n}, n \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

I. Si $N \geq L$, las componentes de $x_p[n]$ no se superponen entre sí y la relación entre $x[n]$ y $x_p[n]$ es:

$$x_p[n] = x[((n))_N],$$

donde $((n))_N$ corresponde a la operación n `modulo` N. De la misma forma:

$$x[n] = \begin{cases} x_p[n] & , n \in \{0, 1, \ldots, N-1\} \\ 0 & , \text{otros casos} \end{cases}.$$

II. Si $N < L$, las componentes de $x_p[n]$ se superponen entre sí, por lo que la secuencia original $x[n]$ no se preserva.

Ejemplo 14

Determinar $X[k]$, la transformada discreta de Fourier de $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\}$. Luego, determinar su transformada inversa y verificar si es posible recuperar la secuencia original:

a. $N = 5$

b. $N = 3$

Solución: la *DTFT* de $x[n]$, de $L = 4$ muestras de longitud, corresponde a:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{0}^{3} x[n]e^{-j\omega n} = 1 + 2e^{-j\omega} + 3e^{-j2\omega} + 4e^{-j3\omega}.$$

Entonces, para a), la secuencia de duración infinita $X_p[k]$ corresponde a:

$$\begin{aligned} X_p[k] &= X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{5}} \\ &= 1 + 2e^{-j\frac{2\pi k}{5}} + 3e^{-j2\frac{2\pi k}{5}} + 4e^{-j3\frac{2\pi k}{5}}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Luego, su *DFT* de 5 puntos corresponde a:

$$\begin{aligned} X[k] = \underset{N=5}{\text{DFT}}\{x[n]\} &= \begin{cases} X_p[k] & , k \in \{0, 1, \dots, 4\} \\ 0 & , \text{otros casos} \end{cases} . \\ &= 1 + 2e^{-j\frac{2\pi k}{5}} + 3e^{-j2\frac{2\pi k}{5}} + 4e^{-j3\frac{2\pi k}{5}}, k \in \{0, 1, \dots, 4\}. \end{aligned}$$

Adicionalmente, de (3) se sabe que $X_p[k]$ corresponde a la secuencia $x_p[n]$ de periodo 5:

$$
\begin{aligned}
x_p[n] &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n-5r] \\
&= \{\ldots, \underbrace{1,2,3,4,0}_{k=-1}, \underbrace{\underset{\uparrow}{1},2,3,4,0}_{k=0}, \underbrace{1,2,3,4,0}_{k=1}, \ldots\}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $x[n]$ puede ser recuperada a partir de $\mathsf{DFT}^{-1}\{X[k]\}$ como:

$$
\begin{aligned}
\underset{N=5}{\mathsf{DFT}^{-1}}\{X[k]\} &= \begin{cases} x_p[n] & , n \in \{0,1,\ldots,4\} \\ 0 & , \text{otros casos} \end{cases} \\
&= \{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\} \\
&= x[n].
\end{aligned}
$$

Transformada Discreta de Fourier (*Discrete Fourier Transform*) IX

Para b), la secuencia de duración infinita $X_p[k]$ corresponde a:

$$\begin{aligned} X_p[k] &= X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{3}}, k \in \mathbb{Z} \\ &= 1 + 2e^{j\frac{2\pi k}{3}} + 3e^{j2\frac{2\pi k}{3}} + 4\underbrace{e^{j3\frac{2\pi k}{3}}}_{=1}, k \in \mathbb{Z} \\ &= 5 + 2e^{j\frac{2\pi k}{3}} + 3e^{j2\frac{2\pi k}{3}}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dado que el número de muestras en frecuencia N es menor a la duración de $x[n]$, existen términos en $X_p[k]$ que se superponen. Luego, de (3) se sabe que $X_p[k]$ corresponde a la secuencia $x_p[n]$ de periodo 3:

$$\begin{aligned} x_p[n] &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n-3r] \\ &= \{\dots, \underbrace{5, 2, 3}_{k=-1}, \underbrace{\underset{\uparrow}{5}, 2, 3}_{k=0}, \underbrace{5, 2, 3}_{k=1}, \dots\} \end{aligned}$$

Luego, su *DFT* de 3 puntos corresponde a:

$$X[k] = \underset{N=3}{\mathsf{DFT}}\{x[n]\} = \begin{cases} X_p[k] & , k \in \{0,1,2\} \\ 0 & , \text{otros casos} \end{cases}.$$
$$= 5 + 2e^{-j\frac{2\pi k}{5}} + 3e^{-j2\frac{2\pi k}{5}}, k \in \{0,1,2\}.$$

Por lo tanto, su inversa corresponde a:

$$\underset{N=3}{\mathsf{DFT}}^{-1}\{X[k]\} = \begin{cases} x_p[n] & , n \in \{0,1,\ldots,2\} \\ 0 & , \text{otros casos} \end{cases}$$
$$= \{\underset{\uparrow}{5}, 2, 3\}$$
$$\neq x[n],$$

lo cual indica que la secuencia original no es preservada en el espectro muestreado para $N = 3$.

e. El ejemplo anterior ilustra la condición para que la *DFT* sea característica de una secuencia arbitraria $x[n]$. El espectro discreto $X[k]$ permite recuperar $x[n]$ solo si $N \geq L$. Cuando esto no se cumple, las repeticiones en $x_p[n]$ se superponen entre sí y alteran la secuencia en espacio de muestras. A este fenómeno se le conoce como **Aliasing en tiempo**.

4. **Resumen**

a. Notación:

$$x[n] = \underset{N}{\mathsf{DFT}}^{-1}\{X[k]\},$$

$$X[k] = \underset{N}{\mathsf{DFT}}\{x[n]\},$$

$$x[n] \underset{N}{\overset{\mathsf{DFT}}{\longleftrightarrow}} X[k].$$

b. Muestreo en frecuencia:

$$X_p[k] \triangleq X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}, k \in \mathbb{Z}.$$

c. Transformada discreta de Fourier inversa:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_p[k]e^{j\frac{2\pi k}{N}n}, n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

d. Transformada discreta de Fourier:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}, k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

e. Versiones periódicas:

$$x_p[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n - rN] = x[((n))_N],$$

$$X_p[k] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X[k - rN] = X[((k))_N].$$

Señal $x[n]$ de duración finita:

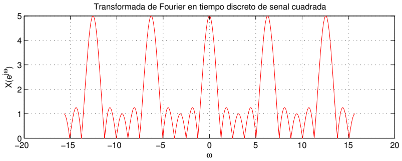
$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases}$$

Transformada discreta de Fourier de $x[n]$

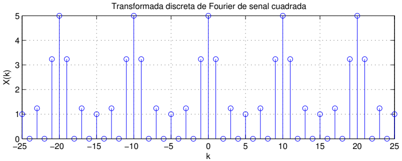
$$X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} (1) e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$= \begin{cases} \frac{1-e^{-j\frac{2\pi k}{N}L}}{1-e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} = e^{-j(\frac{\pi k}{N})(L-1)} \frac{\sin(\frac{\pi k}{N}L)}{\sin(\frac{\pi k}{N})}, & k \text{ no es múltiplo de } N \\ L, & k \text{ es múltiplo de } N \end{cases}$$

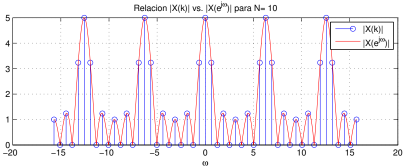
- Relación entre $X[k]$ y $X(e^{j\omega})$ para $L = 5$ y $N = 10$. La transformada discreta de Fourier corresponde a muestras de la transformada de Fourier en tiempo discreto separadas $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$.



(a) $|X(e^{j\omega})|$



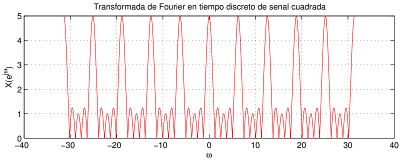
(b) $|X(k)|$



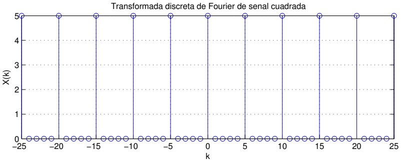
(c) $|X(k)|$ vs. $|X(e^{j\omega})|$

Ejemplo Transformada Discreta de Fourier

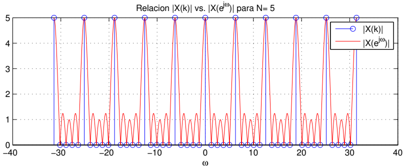
- Relación entre $X[k]$ y $X(e^{j\omega})$ para $L = 5$ y $N = 5$. La transformada discreta de Fourier corresponde a muestras de la transformada de Fourier en tiempo discreto separadas $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$.



(a) $|X(e^{j\omega})|$



(b) $|X(k)|$



(c) $|X(k)|$ vs. $|X(e^{j\omega})|$

Concepto básico de señales periódicas

La discretización del espectro al calcular la DFT $X[k]$ implica que la señal en espacio corresponde a una versión periódica de la señal original, denotada como $x_p[n]$:

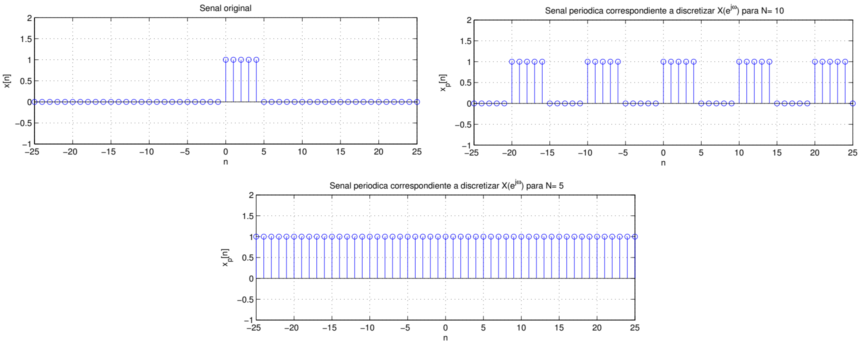


Figura 3: Efecto de periodicidad de la DFT.

- Es posible expresar la **DFT** directa e inversa como *operaciones matriz-vector*

$$W_N \triangleq e^{-j2\pi\frac{1}{N}},$$

$$\therefore \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, N-1\},$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \quad n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

$$\mathbf{X_N} = \mathbf{W_N} \cdot \mathbf{x_N}$$

$$\mathbf{x_N} = \frac{1}{N} \mathbf{W_N}^* \cdot \mathbf{X_N}$$

$$\mathbf{W_N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}, \mathbf{x_N} = \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix}, \mathbf{X_N} = \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix}.$$

1. **Desplazamiento circular**

   La **DFT** de N puntos correspondiente a una secuencia $x[n]$ de longitud $L \leq N$ es equivalente a la **serie de Fourier** (escalada por un factor N) de la secuencia periódica $x_p[n]$ de periodo N:

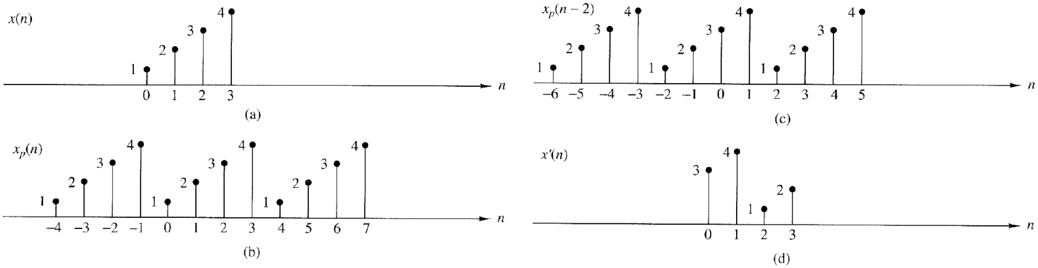
$$x_p[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[n - l \cdot N].$$

   De igual manera, la **DFT** de N puntos de $\hat{x}[n] = x[((n-k))_N]$ (secuencia desplazada k elementos de forma circular) corresponde a la *serie de Fourier* (escalada por un factor N) de la secuencia periódica $\hat{x}_p[n]$:

$$\hat{x}_p[n] = x_p[n-k] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[n - k - l \cdot N],$$

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} \hat{x}_p[n], & n \in \{0, 1, \ldots, N-1\} \\ 0; & \text{otros casos} \end{cases} = x[((n-k))_N]m \quad n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

Finalmente, $x[n]$ y $\hat{x}[n]$ se componen de los mismos elementos pero desplazados circularmente.



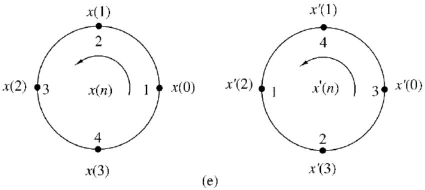


Figura 4: Desplazamiento circular

2. **Producto en frecuencia de la DFT y convolución circular**
   a. Considerar las secuencias de duración finita menor a N $\{x[n], h[n]\}$ con *transformadas de Fourier en tiempo discreto* $\{X(e^{j\omega}), H(e^{j\omega})\}$ y *transformadas discretas de Fourier* $\{X[k], H[k]\}$, respectivamente.

Propiedades de la DFT IV

b. Ya que $\{X_p[k], H_p[k]\}$ corresponden a muestras de $\{X(e^{j\omega}), H(e^{j\omega})\}$ y las secuencias $\{x_p[n], h_p[n]\}$ son de periodo N, existe una diferencia entre multiplicar dos espectros en dominio de frecuencia continuo $\{X(e^{j\omega}), H(e^{j\omega})\}$ y sus versiones discretas $\{X_p[k], H_p[k]\}$. De la propiedad de convolución, la nueva relación corresponde a:

$$\underset{N}{\mathrm{DFT}}^{-1}\{X[k]H[k]\} = \sum_{k=<N>} x_p[k]h_p[n-k], \quad n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[((n-k))_N], \quad n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$$

$$= x[n] \, \text{Ⓝ} \, h[n]. \quad n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$$

A esta operación se le denomina **convolución circular de N puntos**.

c. De forma general, para un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ y secuencia de entrada $x[n]$, la secuencia de salida $y[n]$ puede ser calculada a partir del producto de transformadas discretas de Fourier para un número de muestras $N \geq P + Q - 1$, donde P y Q corresponden a la duración de la respuesta al impulso y la secuencia de entrada, respectivamente:

$$Y[k] = X(k)H[k] \xleftrightarrow[N]{\text{DFT}} y[n] = x[n] \, \text{Ⓝ} \, h[n].$$

Al igual que la *convolución lineal* $(y[n] = x[n] * h[n])$, la convolución circular cumple con la propiedad conmutativa:

$$x[n] \, \text{Ⓝ} \, h[n] = h[n] \, \text{Ⓝ} \, x[n].$$

Propiedades de la DFT

Property	Time Domain	Frequency Domain
Notation	$x(n),\ y(n)$	$X(k),\ Y(k)$
Periodicity	$x(n) = x(n+N)$	$X(k) = X(k+N)$
Linearity	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$
Time reversal	$x(N-n)$	$X(N-k)$
Circular time shift	$x((n-l))_N$	$X(k)e^{-j2\pi kl/N}$
Circular frequency shift	$x(n)e^{j2\pi ln/N}$	$X((k-l))_N$
Complex conjugate	$x^*(n)$	$X^*(N-k)$
Circular convolution	$x_1(n) \circledN x_2(n)$	$X_1(k)X_2(k)$
Circular correlation	$x(n) \circledN y^*(-n)$	$X(k)Y^*(k)$
Multiplication of two sequences	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{N}X_1(k) \circledN X_2(k)$
Parseval's theorem	$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n)$	$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$

Figura 5: Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier

Referencias

(1) Proakis, J. G. & Manolakis, D. K. (2006), Digital Signal Processing (4th Edition), Prentice Hall.

(2) Oppenheim, A.V., Schafer, R. W., & Buck, J.R. (2009), Discrete-Time Signal Processing (3rd Edition), Prentice-Hall.

(3) Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., & Nawab, S. H. (1983). Signals and systems (2nd Edition). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.