Markow

- Macierz przejścia: $P = [p_{ij}]$, gdzie $p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$.
- Wiersze macierzy sumują się do 1.
- Rozkład X_t reprezentowany przez wektor $\pi(t)$: $\pi(t)_s = P(X_t = s)$. Wtedy $\pi(t+1) = \pi(t)M$ i ogólniej $\pi(t+s) = \pi(t)M^s$.
- $M^s_{a,b}$ - prawdopodobieństwo przejścia z a do b w s krokach.
- $f_{a,b}(s)$ - prawdopodobieństwo pierwszego przejścia z a do b w s krokach.
- $f_{a,b}$ - prawdopodobieństwo pierwszego przejścia z a do b.
- $p_{a,b}(s)$ - prawdopodobieństwo przejścia z a do b.
- **Stan powracający** - $f_{a,a} = 1$. **Stan chwilowy** - nie powracający.
- a jest powracający $\iff \sum_{n=1}^{\infty} p_{a,a}^{(n)} = +\infty$.
- Stan b jest osiągalny z $a \iff p_{a,b} > 0$. Oznaczamy $b \in A(a)$.
- Stany a i b się komunikują $\iff a \in A(b) \wedge b \in A(a)$.
- W skończonym łańcuchu Markowa dla każdego stanu a istnieje stan powracający b osiągalny z a.
- Klasa to spójna silna składowa. Każda klasa składa się z samych stanów powracających lub chwilowych.
- Łańcuch jest **nieredukowalny**, jeśli składa się z jednej klasy powracającej.
- Stan a jest okresowy, jeśli istnieje $d > 1$ (okres a), że jeśli $p_{a,a}(k) > 0$ dla pewnego k, to $d|k$. Stan nieokresowy nazywamy nieokresowym. Łańcuch bez stanów okresowych nazywamy nieokresowym.
- **Twierdzenie Ergodyczne**: Jeśli łańcuch jest nieokresowy i nieredukowalny, to istnieje wektor π, że:

  1. suma współrzędnych $= 1$,
  2. $\pi = \pi P$,
  3. $\lim_{n\to\infty} p_{a,b}(n) = \pi_b$.

  Wektor spełniający 1 i 2 to **rozkład stacjonarny**, a 1,2,3 **graniczny** łańcucha.

Rozkład jednostajny $Unif([a, b])$

- Gęstość: $f(z) = \frac{1}{b-a}$ dla $z \in [a, b]$, 0 wpp.
- Dystrybuanta: $F(z) = \frac{z-a}{b-a}$ dla $z \in [a, b]$, 0 wpp.
- $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Rozkład wykładniczy $X \sim$ Exp(θ)

- Dystrybuanta: $F(z) = 1 - e^{-\theta z}$ dla $z \geq 0$, 0 wpp.
- Brak pamięci: $P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$.
- **Suma n-zmiennych wykładniczych**: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ niezależne o tym samym rozkładzie: $f_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(z) = \frac{\theta^n}{(n-1)!} z^{n-1} e^{-\theta z}$.

Rozkład normalny/Gaussa $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- Dystrybuanta: $\Phi(z) = F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Jeśli $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, to $cX + a \sim \mathcal{N}(c\mu + a, c^2\sigma^2)$.
- Suma: Jeśli $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ są niezależne, to $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
- **Suma n-zmiennych jednostajnych**: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ niezależne o tym samym rozkładzie: $f_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(z) = \frac{\theta^n}{(n-1)!} z^{n-1} e^{-\theta z}$.

Własności rozkładów

- $EX = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$, o ile funckaj $tf_X(t)$ jest całkowalna z modułem na $\mathbb{R}$.
- $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t$, o ile funkcja $g(t)f_X(t)$ jest całkowalna z modułem na $\mathbb{R}$.
- **Twierdzenie DeMoivre'a-Laplace'a**: Niech S_n będzie liczbą sukcesów w n niezależnych próbach z prawdopodobieństwem sukcesu p. Wówczas, dla każdego $a < b$: $P(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b) \to \Phi(b) - \Phi(a)$
- **Niezależność zmiennych losowych**: X, Y niezależne $\iff F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$
- **Suma niezależnych zmiennych losowych**: X, Y niezależne $\implies f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(z-t)\,\mathrm{d}t$
- **Prawdopodobieństwo całkowite**: $P(X \in A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X \in A | Y = y) f_Y(y)\,\mathrm{d}t$

Niezależność zdarzeń

- **Niezależność skończonej rodziny**: Rodzina zdarzeń niezależnych, każde o $P(A) < 1$, nie pokrywa całej przestrzeni zdarzeń.
- Jeśli X, Y są niezależne, f, g dowolne funkcje, to $f(X)$ i $g(Y)$ są niezależne.

Rozkład dwumianowy ($X \sim$ Binom(n, p))

- Kształt: $P(X = k)$ rośnie dla $k \leq \lfloor (n + 1)p \rfloor$, potem maleje.
- Granica: Jeśli $n \to \infty, p \to 0, np = \lambda$, to $\mathrm{Binom}(n, p) \to \mathrm{Pois}(\lambda)$.
- Suma: $\mathrm{Binom}(n_1, p) + \mathrm{Binom}(n_2, p) \sim \mathrm{Binom}(n_1 + n_2, p)$.

Rozkład Poissona ($X \sim$ Pois(λ))

- Kształt: $P(X = k)$ rośnie dla $k \leq \lfloor \lambda \rfloor$, potem maleje.
- Suma: $\mathrm{Pois}(\lambda_1) + \mathrm{Pois}(\lambda_2) \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
- Warunkowe: Dla $X, Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1, \lambda_2)$:

$$P(X = k \mid X+Y = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k}.$$

Rozkład geometryczny ($X \sim$ Geom(p))

- Brak pamięci: $P(X = n \mid X > m) = P(X = n - m)$.
- Własność definiująca: Zmienna X przyjmująca wartości 1, 2 … o brakującej pamięci ma rozkład geometryczny.
- Minimum: Jeśli $X \sim \mathrm{Geom}(p), Y \sim \mathrm{Geom}(q)$ niezależne, to $\min(X, Y) \sim \mathrm{Geom}(1 - (1 - p)(1 - q))$.

Inne własności

- **Granica Poissona**: Jeśli $n \to \infty$, $p \to 0$, i $np = \lambda$, to: $\text{Binom}(n, p) \to \text{Pois}(\lambda)$
- **Rozkład warunkowy Poissona**: Dla X, Y niezależnych zmiennych o rozkładzie Poissona, rozkład $X \mid X + Y = n$ jest dwumianowy: $P(X = k \mid X + Y = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$
- **Wartość oczekiwana z funkcji generującej momenty**: $\mathbb{E}[X] = M'_X(0)$, gdzie $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$.
- **Wartość oczekiwana z funkcji tworzącej prawdopodobieństwa** $g_X(t) = \mathbb{E}[t^X]$: $\mathbb{E}[X] = \lim_{t\to 1^-} g'_X(t)$, a dla funkcji $g_X(t)$ zbieżnych na całej prostej rzeczywistej: $\mathbb{E}[X] = g'_X(1)$
- **Wariancja z funkcji tworzącej prawdopodobieństwa**: Jeśli X ma skończoną wartość oczekiwaną i wariancję, to: $\mathbb{E}[X^2] = \lim_{t\to 1^-} \left(g'_X(t) + g''_X(t)\right)$, a wariancja wynosi: $\text{Var}(X) = \lim_{t\to 1^-} \left(g'_X(t) + g''_X(t) - (g'_X(t))^2\right)$.
- **Wartość oczekiwana i wariancja z funkcji generującej prawdopodobieństwa**: Jeśli $g_X(t)$ oraz $g'_X(t)$ są zbieżne na całej prostej rzeczywistej, to: $\mathbb{E}[X^2] = g'_X(1) + g''_X(1)$,, a wariancja wynosi: $\text{Var}(X) = g'_X(1) + g''_X(1) - (g'_X(1))^2$.