Informe Laboratorio: Análisis Numérico
Práctica No. 8

Daniel Delgado
Código: 2182066
Grupo: B2
Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática
Universidad Industrial de Santander

18 de febrero de 2021

1. Introducción

La diferenciación numérica es una de las partes fundamentales en cuanto se refiere al desarrollo de diferentes problemas matemáticos. Algunos de estos problemas están relacionados con los modelos de ecuaciones diferenciales y derivaciones parciales. En este sentido, la compresión de algunas de las técnicas de diferenciación numérica tiene gran relevancia en cuanto al desarrollo matemático se refiere.

La compresión de las diferentes maneras de realizar diferenciaciones numéricas, al igual que el desarrollo de la algoritmia relacionada, son los principales temas a a tratar durante el desarrollo del presente informe, así como la resolución de los problemas propuestos a manera de pregunta orientadora del componente práctico del mismo.

2. Desarrollo

2.1. Aplicando

1. Aproximaciones

   a) Para realizar la aproximación de la segunda derivada de cos(x) con $h = 0.01$ para $x = 1$, necesitamos realizar el siguiente cálculo:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \frac{4\varepsilon}{h^2} + \frac{h^2 f^{(4)(c)}}{12}$$

$$f''(1) = \frac{\cos(1+0.05) - 2\cos(1) + \cos(1-0.05)}{0.05^2} + \frac{4\times10^{-9}}{0.05^2} + \frac{0.05^2\cos(0)}{12}$$

$$f''(1) = \frac{\cos(1.05) - 2\cos(1) + \cos(0.95)}{0.05^2} + \frac{4\times10^{-9}}{0.05^2} + \frac{0.05^2}{12}$$

Ejecutando en una terminal de MatLab con `format long` para realizar la aproximación:

```
val = (cos(1.05)-2*cos(1)+cos(0.95))/(0.05^2)

val =

-0.540189752267617

err = 4*10^(-9)/(0.05^2) + (0.05^2)/12

```

```
    err =

    2.099333333333334e-04
```

Sumando estos valores, obtendremos la aproximación correspondiente:

$$f''(1) = -0.539979818934283$$

b) De igual manera, para realizar la aproximación de la segunda derivada de $\cos(x)$ con $h = 0.01$ para $x = 1$, se realiza el siguiente cálculo:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \frac{4\varepsilon}{h^2} + \frac{h^2 f^{(4)(c)}}{12}$$

$$f''(1) = \frac{\cos(1+0.01) - 2\cos(1) + \cos(1-0.01)}{0.01^2} + \frac{4 \times 10^{-9}}{0.01^2} + \frac{0.01^2 \cos(0)}{12}$$

$$f''(1) = \frac{\cos(1.01) - 2\cos(1) + \cos(0.99)}{0.01^2} + \frac{4 \times 10^{-9}}{0.01^2} + \frac{0.01^2}{12}$$

Que al ejecutar en una terminal de MatLab con el mismo formato anterior, da como resultado:

```
    val = (cos(1.01)-2*cos(1)+cos(0.99))/(0.01^2)

    val =

    -0.540297803365286

    err = 4*10^(-9)/(0.01^2) + (0.01^2)/12

    err =

    4.833333333333333e-05
```

Sumando estos valores, obtendremos la aproximación correspondiente:

$$f''(1) = -0.540249470031953$$

c) Ahora, para realizar la aproximación de la segunda derivada con la versión alterna de la ecuación, tenemos que realizar el siguiente proceso:

$$f''(x) = \frac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)}{12h^2} + \frac{12\varepsilon}{3h^2} + \frac{h^4 f^{(6)}(c)}{90}$$

$$f''(1) =$$

$$\frac{-\cos(1+2(0.1)) + 16\cos(1+0.1) - 30\cos(1) + 16\cos(1-0.1) - \cos(1-2(0.1))}{12(0.1)^2} + \frac{12 \times 10^{-9}}{3(0.1)^2} + \frac{-(0.1)^4 \cos(0)}{90}$$

$$f''(1) = \frac{-\cos(1.2)) + 16\cos(1.1) - 30\cos(1) + 16\cos(0.9) - \cos(0.8))}{12(0.1)^2} + \frac{12 \times 10^{-9}}{3(0.1)^2} + \frac{(0.1)^4}{90}$$

Aplicando el formato `long` a la terminal, y ejecutando para obtener el resultado respectivo, nos da como resultado:

```
    val = (-cos(1.2)+16*cos(1.1)-30*cos(1)+16*cos(0.9)-cos(0.8))/(12*(0.1^2))

    val =

    -0.540301706068029

    err = 12*10^(-9)/(3*0.1^2)+((0.1)^4)/90

    err =

    1.511111111111111e-06
```

Sumando estos valores, obtendremos la aproximación correspondiente:

$$f''(1) = -0.540300194956918$$

d) Ahora, partiendo de cada uno de los resultados obtenidos, podemos realizar la comparación respecto al valor real, o aproximado de manera directa por MatLab. Como primera medida, tenemos que calcular la segunda derivada para la función $\cos(x)$.

$$f(x) = \cos(x),$$
$$f'(x) = -\sin(x),$$
$$f''(x) = -\cos(x)$$

Entonces, ejecutando en una terminal de MatLab:

```
-cos(1)

ans =

-0.540302305868140
```

A partir de este valor, podemos calcular el error relativo para cada uno de los valores calculados anterior mente:

$$Er_a = \left|\frac{-0.539979818934283 - (-0.540302305868140)}{-0.540302305868140}\right| \times 100 = 0.059686388592917\,\%$$
$$Er_b = \left|\frac{-0.540249470031953 - (-0.540302305868140)}{-0.540302305868140}\right| \times 100 = -0.009778939607168\,\%$$
$$Er_c = \left|\frac{-0.540300194956918 - (-0.540302305868140)}{-0.540302305868140}\right| \times 100 = -3.906907668384156 \times 10^{-4}\,\%$$

Entonces, ya con estos valores, podemos observar que, de los resultados aproximados, el que presenta el menor error relativo, es el tercer valor Er_c con un error de tan solo el $-3.906907668384156 \times 10^{-4}\,\%$. Es decir que, para este caso, es este valor que presenta mayor precisión en el cálculo de la aproximación.

2. Diferenciación numérica

Dada una función $f''(x)$, se nos pide realiza una aproximación para $x = -3.5$ con $h = 0.05$. Para realizar esto, se nos da una tabla con diferentes valores y la propiedad para esta función que dice $f''(x) = f''(-x + 0.5)$. Finalmente, se nos recuerda que, para $f''(x) \approx \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2}$.

De manera inicial, es identificar los valores, que se van a emplear para realizar el cálculo de la aproximación. El primer valor que podemos tomar es f_0 que, para este caso, sería $f''(-3.5)$. Partiendo de la propiedad de la función, tenemos que:

$$f_0 \rightarrow -3.5 = -x + 0.5 \rightarrow -3.5 - 0.5 = -x \rightarrow 4 = x$$

Teniendo este valor definido, podemos realizar el remplazo dentro de la ecuación dada para así realizar la aproximación de $f''(-3.5)$:

$$f_0 = f(4) = 0.629492$$
$$f_1 = f(4.05) = 0.610192$$
$$f_2 = f(4.1) = 0.592710$$
$$f_3 = f(4.15) = 0.577125$$

$$f''(-3.5) \approx \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2} = \frac{2(0.629492) - 5(0.610192) + 4(0.592710) - 0.577125}{0.05^2}$$

Que, ejecutando en una terminal de MatLab:

```
(2*(0.629492)-5*(0.610192)+4*(0.592710)-0.577125)/(0.05^2)

ans =

0.695600000000018
```

$$f''(x) \approx 0.695600000000018$$

2.2. Implementando

Para realizar el siguiente punto, fue necesario modificar la función dada `difflim(f,x,toler)`, y modificarla en para convertirla en `difflim(f,x,toler,h1)`. Las modificaciones realizadas pueden verse en las líneas 3, 4 y 111 en los cuales los valores fueron cambiados para poder calcular las aproximaciones de la mejor manera posible.

```
1  function [L,n]= difflim(f,x,toler,h1)
2  
3  max1=150000;
4  h=h1;
5  H(1)=h;
6  D(1)=(feval(f,x+h)-feval(f,x-h))/(2*h);
7  E(1)=0;
8  R(1)=0;
9  
10 for n=1:2
11     h = h-1e-10;
12     H(n+1)=h ;
13     D(n+1)=(feval(f,x+h)-feval(f,x-h))/(2*h);
14     E(n+1)=abs (D(n+1)-D(n));
15     R(n+1)=2*E(n+1)*(abs(D(n+1))+abs(D(n))+eps);
16 end
17 
18 n=2;
19 
20 while ((E(n)>E(n+1))&&(R(n)>toler))&&n<max1
21     h=h/10;
22     H(n+2)=h ;
23     D(n+2)=(feval(f,x+h)-feval(f,x-h))/(2*h);
24     E(n+2)=abs(D(n+2)-D(n+1)) ;
25     R(n+2)=2*E(n+2)*(abs(D(n+2))+abs(D(n+1))+eps);
26     n=n+1;
27 end
28 
29 n=length (D)-1;
30 L=[H' D' E'];
```

Esta función, permitiría realizar las aproximaciones respectivas para cada uno de los literales dados.

a) $f(x) = 60x^{4}5 - 32x^{3}3 + 233x^{5} - 47x^{2} - 77$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Para esta primera función, se ejecutó en una terminal de Matlab los siguientes comandos:

```
f1 = @(x) (60*x^(45))-(32*x^(33))+(233*x^(5))-(47*x^(2))-77;
x1 = 1/sqrt(3);
[L,n] = difflim(f1,x1,0,1e-4);
apr = L(n,2)
err = L(n,3)
```

Tras esto, se obtuvieron los valores `apr = 75.1735` y `err = 5.2580e-13`.

b) $f(x) = \tan\left(\cos\left(\dfrac{\sqrt{5}+\sin(x)}{1+x^2}\right)\right)$, $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{3}$

El mismo proceso fue desarrollado para el segundo literal. En una terminal se ejecutó lo siguiente:

```
f2 = @(x) tan(cos((sqrt(5)+sin(x))/(1+x^2)));
x2 = (1+sqrt(5))/3;
[L,n] = difflim(f2,x2,0,1e-1);
apr = L(n,2)
err = L(n,3)
```

Tras esto, se obtuvieron los valores `apr = 1.2291` y `err = 9.8477e-13`.

c) $f(x) = \sin(x^3 - 7x^2 + 6x + 8)$, $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

El mismo proceso fue desarrollado para el último literal. En una terminal se ejecutó lo siguiente:

```
f3 = @(x) sin((x^3)-(7*x^2)+(6*x)+8);
x3 = (1 - sqrt(5)) / 2;
[L,n] = difflim(f3,x3,0,1e-4);
aprox = L(n,2)
error = L(n,3)
```

Tras esto, se obtuvieron los valores `apr = 2.9655` y `err = 6.3949e-13`.

3. Anexos

difflim.m

```

function [L,n]= difflim(f,x,toler,h1)

%Input - f is the function input as a string ‘f’
% - x is the differentiation point
% - toler is the desired tolerance
% - d is the value for h
% Output - L = [H’ D’ E’] : H is the vector of step sizes
% D is the vector of approximate derivatives
% E is the vector of error bounds
% - n is the coordinate of the "best approximation"
% NUMERICAL METHODS: MATLAB Program
% ( c ) 1999 by John H. Mathews and Kurtis D. Fink
% To accompany the textbook:
% NUMERICAL METHODS Using MATLAB,
% by John H. Mathews and Kurtis D. Fink
% ISBN 0 132700425 , (c) 1999
% PRENTICE HALL, INC.
% Upper Saddle River , NJ 07458

max1=150000;
h=h1;
H(1)=h;
D(1)=(feval(f,x+h)-feval(f,x-h))/(2*h);
E(1)=0;
R(1)=0;

for n=1:2
    h = h-1e-10;
    H(n+1)=h ;
    D(n+1)=(feval(f,x+h)-feval(f,x-h))/(2*h);
    E(n+1)=abs (D(n+1)-D(n));
    R(n+1)=2*E(n+1)*(abs(D(n+1))+abs(D(n))+eps);
end

n=2;

while ((E(n)>E(n+1))&&(R(n)>toler))&&n<max1
    h=h/10;
    H(n+2)=h ;
    D(n+2)=(feval(f,x+h)-feval(f,x-h))/(2*h);
    E(n+2)=abs(D(n+2)-D(n+1)) ;
    R(n+2)=2*E(n+2)*(abs(D(n+2))+abs(D(n+1))+eps);
    n=n+1;
end

n=length (D)-1;
L=[H’ D’ E’];
```