第一章

1. 使用矩阵工具求解线性系统/判断解的存在性或者唯一性（步骤见下一页）；
2. 主要技巧：高斯消元（包括向下消元化阶梯形以及向上消元化为最简形）；
3. 如果带有未知参数，则尽量在不让未知参数出现位置扩散的情况下化为阶梯型，然后再根据矩阵的秩讨论参数取值；
4. 如果系数矩阵A是方阵，也可以利用**第二章**知识：矩阵的可逆/不可逆来讨论解的存在性/唯一性；进一步，可以用A的行列式来判定是否可逆（A可逆则齐次系统只有零解，A可逆则非齐次系统$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$只有唯一解$\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$
5. 应用模型：基于线性方程组的应用题，应根据实际情况考虑整数、非负等限制，无限解有时候会变成有限多解；

求解线性系统的基本步骤

1. 写出原系统对应的增广矩阵B（非齐次）或者系数矩阵A（齐次系统），这两个矩阵大小分别为 $m\times n$ 和$\mathrm{m}\times(n+1)$；
2. 高斯消元法的**第一阶段**，利用向下消元（从第二行开始逐步向下，不断把上面某一行的若干倍加到下面某一行，消除最左边的一个非零数），完成后化为行梯形阵（不唯一，但形状唯一），此时即可判断：
   I. 是否有解(非齐次)　方法：$\mathrm{R}(A) = \mathrm{R}(B)$?（数首元个数）
   II. 解是否唯一 方法：首元个数是否等于n?
   III. 如果有无数多解，有多少个自由变量？方法：n-$\mathrm{R}(A)$
3. 若有解，高斯消元法的**第二阶段**，利用向上消元（从倒数第二行开始，不断把下面某一行的若干倍加到上面某一行，消除首元上面的非零数），完成后化为最简形（**非常重要，有解的系统都要化成最简形！**）
   I. 若有唯一解，则最简形直接对应着解；
   II. 若有无数多解，选择$\mathrm{R}(A)$个首元列对应的未知量为先导未知量，剩下的n-$\mathrm{R}(A)$个未知量为自由未知量，移项把先导未知量放在等号左边，自然就得到解（即：把所有的先导未知量写成自由未知量的函数）

第二章

- 矩阵的加法、数乘、转置运算都很直观也很简单，不赘述；
- 乘法要熟练（左行对右列）；
- 行列式的计算：
  1. 用定义推出的特殊行列式计算方法（对角、三角）；
  2. 运用行化简或者列化简变成特殊矩阵或者造出较多的“0”在某行/某列，方便降阶（注意等价不等于行列式相等，要把产生的系数写在前面）；
  3. 按照行/列进行降阶展开；
  4. 上面技巧综合应用，例如“**赶鸭子法**”（为什么要“赶”，赶完以后怎么做？），按照有利方向，逐步化简；
- 行列式的性质和应用（判断矩阵的可逆性，克莱默法则），行列式常用规则：乘积矩阵的行列式等于各行列式之积

第二章（续）

- 伴随矩阵A^*的定义和定义求法（主要用于算逆矩阵）；
- 伴随矩阵的最重要公式：$AA^*=A^*A=|A|E$，常用于矩阵方程化简；由此公式，也可以推出A和A^*行列式的关系，特征值的关系等；
- 逆矩阵，给出某个等式成立证明另一个矩阵表达式可逆，多直接使用定义去证明(推出要证明的矩阵表达式乘以某个矩阵等于E）；
- 可逆矩阵的性质（见下页）
- 逆矩阵的计算：
  1. 伴随矩阵法（注意前面要乘以行列式分之一，余子式有正负号，余子式排列是转置的），二阶直接记住公式；
  2. 带着E一起行化简法
  3. 分块对角矩阵的分块求法
- 求解矩阵方程组（注意同乘以某个逆矩阵时需保证其确实可逆），可能包含伴随矩阵，A可逆时，A^*可以看做是逆矩阵的倍乘: $A^*=|A|A^{-1}$
- 应用模型，可逆矩阵的应用

以下命题为等价命题（一真全真，一假全假）

a. A 是可逆矩阵;

b. A 的行列式不为零;

c. A 行等价于n阶单位矩阵E;

d. A 有 n 个非零首元（注：化成阶梯型）；

e. 齐次方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 只有零解;

f. $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 解空间是0维的

g. A 中的各列/行组成线性无关组;

h. 线性变换 $\mathbf{x}\rightarrow A\mathbf{x}$ 是一对一变换;

i. 方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 存在唯一解$\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$;

j. A的列/行向量组都张成空间 $\mathbb{R}^n$;

k. A的列空间维数是n;

l. 线性变换 $\mathbf{x}\rightarrow A\mathbf{x}$ 将 $\mathbb{R}^n$ 满射 $\mathbb{R}^n$.

m. 存在唯一的一个n×n 矩阵 C 满足 $CA=E$;

n. 存在唯一的一个 n×n 矩阵 D 满足 $AD=E$ （注：D和C相等）；

o. A^T 也是一个可逆矩阵（所有结论行/列可以互换）；

p. A的秩=列秩=行秩=n;

q. A的行向量组和列向量组的都自成为自身的极大无关组;

r. A的行向量组和列向量组都是$\mathbb{R}^n$的一套基;

s. A的特征值不包含0;

还可以继续补充……

第三章

- 向量的加法、数乘、以及两者的综合：线性组合运算；
- 从向量的线性组合角度去理解第一章的线性方程组：$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 求的$\mathbf{x}$其实就是A里面各列向量组合成$\mathbf{b}$的系数；
- 线性无关（相关）的定义（**本章核心**），此类证明基本都是**紧扣定义式**（例如，证明某向量组线性无关就设他们组合起来等于**0**，然后证明所有的系数都必须取0）；
- 线性相关/无关的简单的一些判定定理、推论；
- 理解向量组的极大无关组（某个向量组最大的线性无关向量子集，同时又是最小的能够线性组合得到组内所有向量的子集）；
- 一组（一个的推广）向量可由另一组向量线性表达的判定方式（增广矩阵行化简看秩数），本质上是矩阵方程$A\mathbf{x}=B$有解；
- 极大无关组求法（p129），向量组为列拼成矩阵，行化简，找到首元列位置，对应的**原始矩阵（未经过行化简）同位置上**的列向量们即所求；
- 矩阵的秩，列向量组的秩，行向量组的秩，三秩数值相等但意义不同，求法一样，一般都是用上面的方法；

第三章（续）

- 理解向量空间的定义；
- 理解张成（生成）空间；
- 理解空间的基的定义，基的三大特性，维数的定义（p133)；
- 理解坐标的定义（p134)，掌握坐标的求法（本质还是求解$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$）；
- 理解齐次方程组和非齐次方程组解的结构构成：
  1. $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 解空间由$n\text{-}R(A)$个向量（基础解系）生成；
  2. $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解是对应$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解再加上一个$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$的特解；
- 掌握齐次方程组和非齐次方程组结构解的求法：除了书上方法，也可以在**本ppt第二页**基础上，把自由变量看作系数，将解重新表达为若干个向量的线性组合即可，如果是非齐次系统，后面还会带有一个不带自由系数的常向量；
- 应用模型：
  1. 配药问题（某个或者某几个向量可以由指定向量组线性表达吗？）
  2. 线性变换在图形中的应用（常见的伸缩、剪切、旋转、翻转变换及其对应矩阵），平移不是线性变换，但是如果扩充为3x3即引入**齐次坐标**，则也可以变成线性变换。

第四章

- 方阵的特征值、特征向量定义。相关的性质推导、证明，基本都基于定义式： $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 其中A为方阵，λ为数，α为非零向量；注：一个方阵可以有多个特征值，每个特征值可以有多个对应特征向量；
- 下表应会自己推导：

注：本两列为A可逆时

矩阵	A	kA	A^m	A^{-1}	A^*	E	前者的线性组合	A^T
特征值	λ	$k\lambda$	λ^m	$1/\lambda$	$\frac{\lvert A\rvert}{\lambda}$	1	对应线性运算结果	λ
特征向量	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	包括$\boldsymbol{\alpha}$的任何	$\boldsymbol{\alpha}$	不确定
行列式	$\lvert A\rvert$	$k^n\lvert A\rvert$	$\lvert A\rvert^m$	$1/\lvert A\rvert$	$\lvert A\rvert^{n-1}$	1	不确定	$\lvert A\rvert$

注：n为A的阶数

第四章（续1）

- 特征值和特征向量的求法：
  - 特征值：求解特征方程 $|A\text{-}\lambda E|=0$，这是一个关于λ的n次方程，可能有重根，其某个重根的重根数即为对应特征空间维数的上限；
  - 特征向量：对于每一个求出来的 λ_i，求出齐次系统 $(A\text{-}\lambda_i E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系，其由不多于λ_i重根数个向量$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\ldots$构成；
- 特征值和特征向量的一些性质：
  1. 特征值之和（重根需要算多次）等于主对角线之和（即“迹”）；
  2. 特征值之积等于$|A|$；
  3. 来自不同特征值的特征向量互相线性无关；
  4. 实对称矩阵的特征值为实数，且一定可以对角化；

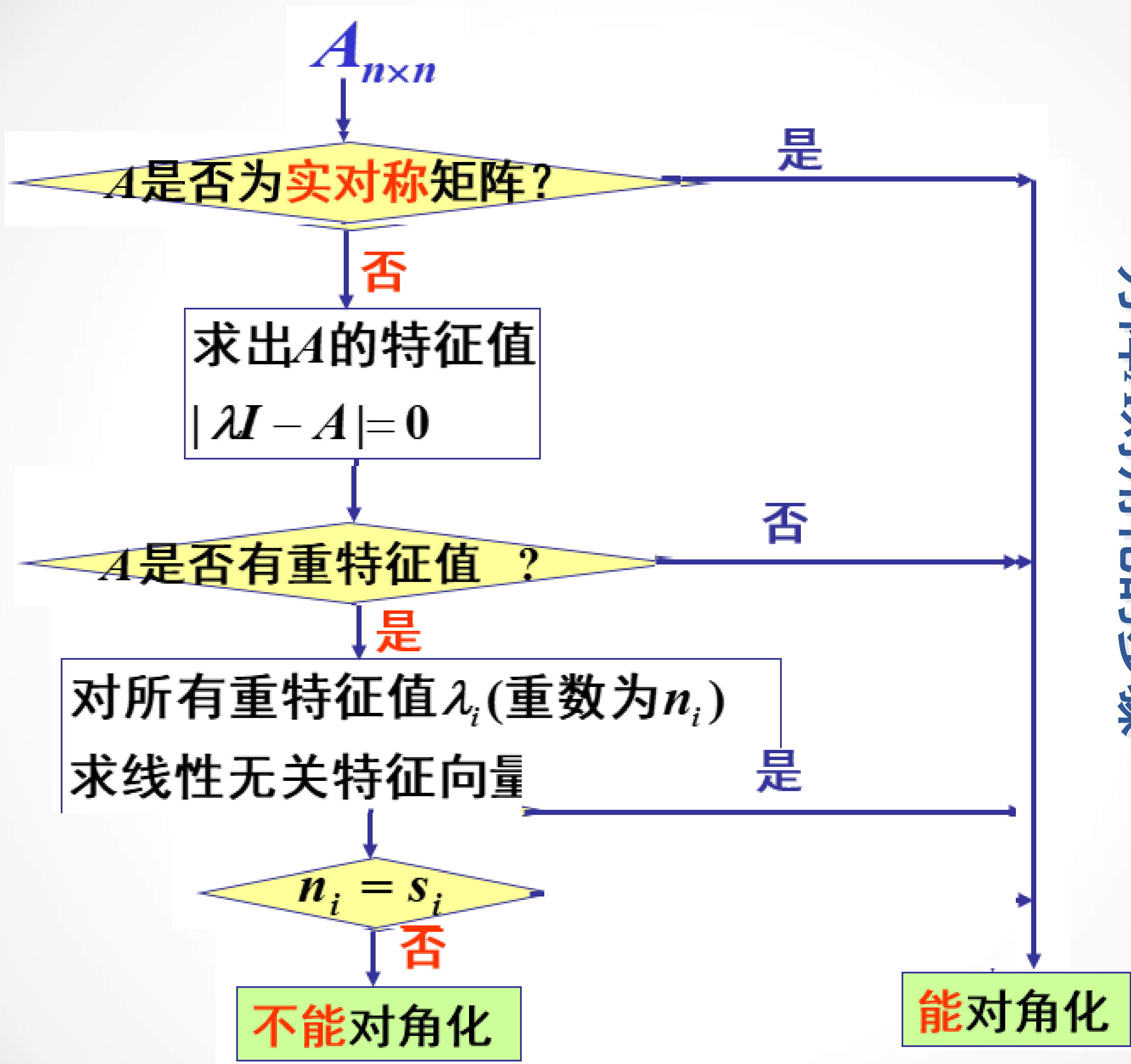
第四章（续2）

- 相似矩阵定义：存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$ (或者其等价形式：$AP=PB$、$P^{-1}A=BP^{-1}$、$A=PBP^{-1}$），称A和B相似。
- A和B相似，则（A和B相似必要条件）：
  - $|A|=|B|$;
  - A^m和B^m相似;
  - $| A-\lambda E |=| B-\lambda E |$;
  - A和B的特征值相等，行列式相等（特征值之积），迹（特征值之和）也相等;
- 可对角化条件：能够找到 n 个线性无关的特征向量组，从而构成可逆矩阵 P；这其实就是要求每一个特征值 λ_i 对应的$(A-\lambda_i E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系向量个数（即特征空间维数)，都和λ_i 的重根数相等，而不能是小于;
- 所以关键是那些重根的特征值所对应的特征空间维数！

第四章（续3）

- $P^{-1}AP=\Lambda$对角化的结果：由特征值构成对角线的对角矩阵Λ;
- 对角化的相似变换矩阵：由n个线性无关特征向量为列构成的可逆矩阵P（排列要和构成对角矩阵的特征值对应）；
- 对角化判断步骤（下页）
- 对角化用途：
  1. 根据特征值和特征向量反求矩阵A;
  2. 计算A的幂;
- 应用模型：**动态演化模型**（正确写出状态转移矩阵，计算特征值和特征向量，预测系统长期以后的状态趋势）

方阵A对角化的步骤



$A_{n\times n}$
A是否为实对称矩阵?
是
否
求出A的特征值
$|\lambda I - A| = 0$
A是否有重特征值 ?
否
是
对所有重特征值λ_i(重数为n_i)
求线性无关特征向量
是
$n_i = s_i$
否
不能对角化
能对角化

第五章

- 熟悉定义，根据矩阵写出二次函数，根据二次函数写出矩阵
  $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$，其中$A$是一个对称矩阵, $\mathbf{x}$是列向量，A的秩数就是二次型秩数
- 当 $f(\mathbf{x})$ 只有平方项没有交叉项的时候，对应A为对角矩阵，称为标准型
- 所以化标准型，从线性代数的角度来看，可以看做对角化的特例：正交对角化，（步骤见下页）即使用一个正交矩阵C(也是可逆的)，经过换元$\mathbf{x}=C\mathbf{y}$, 使得：
  $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} \rightarrow f(\mathbf{y})=(C\mathbf{y})^{\mathrm{T}}AC\mathbf{y} = \mathbf{y}C^{\mathrm{T}}AC\mathbf{y}$, 其中$C^{\mathrm{T}}AC=\Lambda$ 为一个对角矩阵
  C是正交矩阵可以保证$C^{T}=C^{-1}$，这就和**第四章**的对角化统一起来了
- 因此，引入了正交的概念，两个向量正交定义为两个向量内积为零，即$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$
- 内积是欧氏空间里定义向量长度、夹角、距离的基础，熟练掌握内积的计算；
- 一个向量组两两正交，则为正交向量组，不含零向量的正交向量组线性无关，因此可以成为一套正交基，当长度也都为1的时候，可以形成单位正交基；
- 正交基的好处：坐标方便求，（坐标）系数 $k_i=\dfrac{(\beta,\ \alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$
- 每行/每列都是单位正交向量组成的方阵是正交矩阵，满足：$C^{T}=C^{-1}$
- 一套普通的基，可以通过格拉姆-施密特方法化为单位正交基（理解并掌握步骤）

化二次型为标准型的步骤

二次型矩阵A是实对称矩阵，任何实对称矩阵A均可对角化：

1. 利用特征方程$|A-\lambda E|=0$，求出A的所有的特征值；
2. 求特征向量，对于A的每个特征值λ，求出齐次线性方程组$(A-\lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$的基础解系；
3. 不同特征值的特征向量已经互相正交，但如果某个特征值是重根，则意味着同一个特征值下存在多个（线性无关但一般不正交的）特征向量，因此需要并使用格拉姆-施密特方法将同一重根下的特征向量正交化；
4. 将这n个两两正交的特征向量全部单位化；
5. 以这n个两两正交的单位特征向量为列向量构成正交矩阵C,这时$C^{-1}AC=C^{T}AC=\Lambda$,其中对角方阵Λ的元素（特征值）排列顺序依次与C的列向量的排列顺序相对应；

正交对角化的结果：对角矩阵Λ由A的特征值构成，换元矩阵（代表着可逆线性变换）C 由经过单位正交化的特征向量构成（排列和特征值必须对应），对应二次型标准型的**平方项系数**也就是A的**特征值**；

第五章（续）

- 惯性定理（p213)、正定、负定、不定的概念
- 利用特征值都为正或者霍尔维茨定理判定矩阵的正定
- 应用模型：向量的“距离”在工程中的应用

写在后面：

1. 这个知识点只是本书知识点的纲要和索引，不能代替书本、课件和练习题；
2. 不能保证覆盖100%的考点；
3. 即便知道哪些重要、哪些要考，自己不真正掌握知识和技能，也是无用的，请抓紧时间、认真复习；

--和你们一样纠结、惶恐的老师