

Assignment

1. 已知 3×3 矩阵 A 有特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$, 对应特征向量分别为:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

请将向量 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 重写为 A 的特征向量的线性组合

并且计算 $A^k \beta$

2. 向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 A^{-1} 的一个特征向量

已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 求 k

3. 已知 3×3 矩阵 A 拥有特征值 $\lambda_1=2, \lambda_2=-2, \lambda_3=1$, 对应特征向量分别为:

$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 求 A

4. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ 和对角矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & b & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ 相似

求 a 和 b 的值。

5. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & a \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 可以对角化,

- 求出 a 的值;
- 求出 满足对角化公式 $\Lambda = P^{-1}AP$ 的可逆矩阵 P

6. 某地区的网络服务供应被两家公司A和B所垄断。其服务协议为每年年底重新续约或者另选公司签约。调查显示，当前选择A公司的客户下一年有10%会选择B公司，剩下的继续续约A公司。另一方面，B公司的客户下一年有15%会转投A公司，剩下的继续续约B公司。

- a) 建立恰当数学模型，描述每一年和前一年市场份额的关系；
- b) 预测一下经过足够长时期以后两家的市场份额是什么，以及为何此市场份额是一个稳定数值，以及如何收敛到此数值的。

7. 补充一道2022年1月的期末考试原题：

1. 设 A 是三阶矩阵， α_1, α_2 分别是矩阵 A 的特征值 $-1, 1$ 的特征向量，向量 α_3 满足

$$A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3,$$

(1) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 (5 分);

(2) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 $P^{-1}AP$ (5 分) .