

5) Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_2 + 4x_3 = 14 \end{cases}$$

Rozwiąż go za pomocą metody SOR.

5. Rozwiązywanie równań nieliniowych

Tematyka ćwiczenia obejmuje wybrane metody rozwiązywania równania nieliniowego. Zaprezentowano metody: bisekcji, sycznych (Newtona), regula falsi i siecznych. W opis każdej z metod przedstawiono jej charakterystykę, warunki zbieżności oraz algorytm.

5.1. Wprowadzenie

W rozdziale tym zajmujemy się metodami przyblizonego rozwiązywania równań nieliniowych. Metody te opierają się na twierdzeniu Bolzano-Cauchego:

Twierdzenie 5.1 Jeżeli funkcja $f(x)$ określona i ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$, przyjmuje na końcach tego przedziału wartości różnych znaków, to wewnątrz przedziału $[a, b]$ istnieje co najmniej jeden pierwiastek równania $f(x) = 0$.

Dla większości spotykanych w praktyce równań nieliniowych nie istnieją dokładne metody wyznaczania pierwiastków. Pozostaje nam wówczas jedynie rozwiązanie przybliżone poszukiwane z określona dokładnością.

Metody przybliżone wyznaczania pierwiastków są metodami iteracyjnymi. Zatem w celu znalezienia pierwiastków funkcji $f(x)$ rozwiązujemy równanie postaci $f(x) = 0$. W przedziale $[a, b]$ izolacji pierwiastka konstruujemy ciąg x_n kolejnych przybliżeń pierwiastka (gdzie $f(\alpha) = 0$). Innymi słowy, ciąg x_n jest zbieżny do α .

Aby ciąg był zbieżny, jego wyrazy muszą spełniać nierówność (5.1) dla dostatecznych dużych n .

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq C |\alpha - x_n|^p \quad (5.)$$

gdzie:

α – pierwiastek,

x_n – n -te przybliżenie pierwiastka,

C – stała zależna od funkcji f (lub jej pochodnych),

p – wykładnik zbieżności.

Im mniejsza jest stała C oraz im większy jest wykładnik zbieżności p , tym ciąg kolejnych przybliżeń x_n jest szybciej zbieżny do α . Jeżeli $p = 1$, dana metoda iteracyjna jest zbieżnościowo, natomiast jeśli $p > 1$, mówimy o zbieżności nadmiarowej.

Przy poszukiwaniu pierwiastków funkcji, w każdej iteracji sprawdzamy, czy nie natrafiliśmy już na miejsce zerowe, tzn. czy $f(x_n) = 0$. W zależności od warunków zadania może nas satysfakcyjnie uzyskanie zera z określonym przybliżeniem $\tilde{\varepsilon}$:

gdzie $|f(x_n)|$ – wartość funkcji w n -tym kroku.

Stosowane też są następujące kryteria zakończenia iteracji:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon, \quad \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < \varepsilon$$

gdzie ε oznacza przyjętą dokładność obliczeń.

Najczęściej stosuje się kombinację powyższych warunków. Ponadto, przy tworzeniu algorytmu warto również pamiętać o spręcywaniu maksymalnej dopuszczalnej liczby iteracji jako dodatkowym warunku stopu.

Przedstawmy teraz cztery podstawowe metody numerycznego rozwiązywania równań nielinowych: bisekcji, stycznych, regula falsi oraz sęcznych¹⁴.

5.2. Metoda bisekcji (połowienia)

Na początek rozważmy metodę bisekcji (*bisection*). W metodzie bisekcji iteracyjnie szukamy miejsca zerowego przez zauważanie przedziału izolacji pierwiastka. Dzielimy przedział na połowy. Jeśli środek przedziału nie jest szukanym miejscem zerowym, to dzielimy znów na połowy ten podprzedział, którego wartości funkcji na krańcach są przeciwnych znaków.

Podziły kontynuujemy do momentu znalezienia pierwiastka z odpowiednią dokładnością. Zatem niech dana będzie funkcja $f(x)$ oraz przedział domknięty $[a, b]$. Gwarancją zbieżności metody jest spełnienie w przedziale izolacji $[a, b]$ następujących założeń:

- 1) Funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$.
- 2) Na końcach przedziału $[a, b]$ wartości funkcji $f(x)$ przyjmują przeciwe znaki, czyli zachodzi $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Przyjmujemy zatem $x_0 = a$ i $y_0 = b$, a następnie konstruujemy ciągi $\{x_k\}_k$, $\{y_k\}_k$, $\{z_k\}_k$:

$$\begin{cases} z_k = \frac{y_k + x_k}{2} \\ x_{k+1} = x_k, y_{k+1} = z_k & \text{jeśli } f(x_k)f(z_k) < 0 \\ x_{k+1} = z_k, y_{k+1} = y_k & \text{jeśli } f(x_k)f(z_k) > 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Ciągi $\{x_k\}_k$, $\{y_k\}_k$ są monotoniczne i ograniczone, zatem są zbieżne. Stąd mamy zagwarantowane znalezienie miejsca zerowego α . Konstrukcję ciągów kończymy gdy $|f(z_k)| < \tilde{\varepsilon}$, wówczas $\alpha = z_k$, lub gdy $y_k - x_k < \varepsilon$, wówczas $\alpha = \frac{y_k + x_k}{2} = \tilde{\varepsilon}$, gdzie $\tilde{\varepsilon}, \varepsilon$ oznaczają zadanie przybliżenia.

Można wstępnie oszacować maksymalną liczbę iteracji, po których wykonaniu zostanie obliczony wynik z zadaną tolerancją¹⁵ (5.3). W każdym bowiem kroku zmniejszamy długość przedziału o połowę, zatem w n -tym kroku pierwiastek leży w przedziale o długości $\frac{|b-a|}{2^n}$. Wyznaczenie n jest przedstawione poniżej.

$$\Delta = |\alpha - x_n| \leqslant \frac{|b-a|}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow 2^n > \frac{|b-a|}{\varepsilon} \Rightarrow n > \log_2\left(\frac{|b-a|}{\varepsilon}\right) \quad (5.3)$$

gdzie:

Δ – błąd bezwzględny,

ε – dokładność obliczeń,

n – szacowana maksymalna liczba iteracji.

Dla przykładu rozważmy przedział $[a, b]$, gdzie $a = 0$ oraz $b = 2.5$. Dla tolerancji $\varepsilon = 10^{-6}$ otrzymujemy wartość $n \geq 21.253$.

Reasumując, możemy stwierdzić, że metodę bisekcji charakteryzują następujące cechy:

- prostota,
- liniowa zbieżność ($p = 1$, $C = 0,5$ patrz równanie (5.1)),
- mały nakład obliczeń na poszczególne iteracje,
- możliwość wstępnego oszacowania maksymalnej liczby iteracji.

Algorytm metody bisekcji

1. Przyjmij dane wejściowe: $f(x)$ – badana funkcja, ε – dokładność z jaką będzie wyznaczany pierwiastek.
2. Dobierz odpowiedni przedział $[a, b]$ izolacji pierwiastka, w którym funkcja spełnia założenia (1)–(2).
3. Wyznacz środek przedziału $z_1 = \frac{a+b}{2}$.
4. Sprawdź, czy środek przedziału z_k jest szukanym miejscem zerowym:

$$|f(z_k)| < \tilde{\varepsilon}.$$

Jeżeli warunek jest spełniony, to zakończ obliczenia i przyjmij z_k jako przybliżenie pierwiastka. W przeciwnym przypadku przejdź do następnego kroku.

5. Wybierz podprzedział $[x_{k+1}, y_{k+1}]$, w którym znajduje się pierwiastek.
Jeżeli $f(x_k)f(z_k) < 0$, to przyjmij $x_{k+1} = x_k$, $y_{k+1} = z_k$. Jeżeli $f(x_k)f(z_k) > 0$, to przyjmij $x_{k+1} = z_k$, $y_{k+1} = y_k$.

¹⁴Istnieje wiele innych metod poszukiwania miejsc zerowych równań nieliniowych, np. hybrydowa metoda Brenta [1].

¹⁵Wprowadzenie tego oszacowania jest związane z kryterium zbieżności iteracji do zakończenia działania algorytmu (czyli opisanego wcześniej kryterium $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$). Najczęściej stosuje się jednak w praktyce kryterium błędu wartości funkcji $f(x)$, stąd w większości przypadków możemy mówić jedynie o wstępnych oszacowaniach liczb iteracji.

6. Sprawdź warunek $y_k - x_k < \varepsilon$. Jeżeli jest on spełniony, to zakończ obliczenia i przyjmij $\frac{x_k + y_k}{2}$ jako przybliżenie pierwiastka. W przeciwnym przypadku przejdź do następnego kroku.

7. Wyznacz środek podprzedziału $z_k = \frac{x_k + y_k}{2}$ i przejdź do kroku 4.

5.3. Metoda stycznych (Newtona)

Metoda Newtona (*Newton-Raphson*) opiera się na wyznaczaniu stycznych do wykresu badanej funkcji $f(x)$ w kolejnych punktach przybliżeń.

Niech dana będzie funkcja $f(x)$ oraz przedział domknięty $[a, b]$. Gwarancją zbieżności metody jest spełnienie w przedziale izolacji $[a, b]$ następujących warunków:

- Funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$.

2) Pierwsza i druga pochodna funkcji $f(x)$ istnieją i są ciągłe w przedziale domkniętym $[a, b]$.

- Na końcach przedziału $[a, b]$ wartości funkcji $f(x)$ przyjmują przeciwnie znaki, czyli zachodzi $f(a) \cdot f(b) < 0$.

- Pierwsza i druga pochodna mają stały znak w całym w przedziale $[a, b]$ (co oznacza, że w przedziale nie ma ekstremów lokalnych i punktów przegięcia).

Dodatkowo powinien być spełniony warunek wyboru odpowiedniego punktu startowego:

- punktem startowym obliczeń jest ten koniec przedziału $[a, b]$, w którym funkcja $f(x)$ przyjmuje ten sam znak co jej druga pochodna, czyli zachodzi $f'(x_0)f''(x_0) > 0$, gdzie $x_0 = a \vee x_0 = b$,

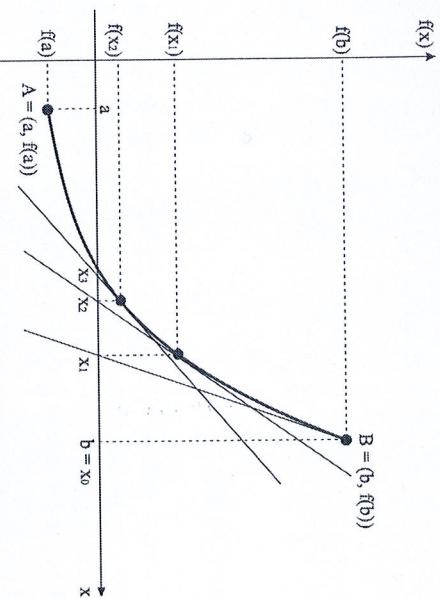
Zatem na początek należy dobrać przedział $[a, b]$ izolacji pierwiastka (tzn. spełniający ww. założenia 1)–4)). Pierwszą styczną wyznacza się w punkcie startowym. Rozważmy przykład przedstawiony na rysunku 5.1. Punktem startowym jest punkt B i w nim prowadzimy pierwszą styczną, której równanie jest postaci:

$$y - f(b) = f'(b)(x - b) \quad (5.4)$$

Styczna ta przecina oś odciętych w x_1 . W związku z tym, pierwszym przybliżeniem pierwiastka jest:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \quad (5.5)$$

Następną styczną prowadzimy w punkcie $(x_1, f(x_1))$. Cykl budowania kolejnych stycznych powtarzamy aż do momentu, kiedy osiągniemy żądaną dokładność pierwiastka.



Rys. 5.1. Graficzna interpretacja metody stycznych

Kryterium zakończenia obliczeń stanowi najczęściej warunek $|f(x_n)| < \tilde{\varepsilon}$ lub przekroczenie maksymalnej dopuszczalnej liczby iteracji.

Metodę Newtona charakteryzują następujące cechy:

- wykładnik zbieżności jest równy: $p = 2$, czyli metoda jest lokalnie zbieżna kwadratowo,
- stała $C = -0.5 \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$ (patrz równanie (5.1)),
- jest najszybciej zbieżną metodą spośród prezentowanych,
- wymaga największego nakładu obliczeniowego na poszczególną iterację (konieczna jest duża wiedza o funkcji i kosztowe obliczanie pochodnej).

W niektórych przypadkach metoda Newtona mimo niespełnienia założenia (3) lub (4) okazuje się zbieżna. Zatem może nawet czasem służyć do szukania pierwiastków o parzystej krotności.

Algorytm metody stycznych (Newtona)

- Przyjmij dane wejściowe: $f(x)$ – badana funkcja, $f'(x)$ – pierwsza pochodna badanej funkcji, $f''(x)$ – druga pochodna badanej funkcji, ε – dokładność z jaką będzie wyznaczany pierwiastek.
- Dobierz odpowiedni przedział $[a, b]$ izolacji pierwiastka, w którym funkcja spełnia założenia 1)–4).
- Wybierz punkt startowy obliczeń, tzn. ten koniec przedziału $[a, b]$, dla którego zachodzi $f'(x_0)f''(x_0) > 0$, gdzie $x_0 = a$ lub $x_0 = b$.
- Wyznacz kolejne przybliżenie pierwiastka x_k :

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \quad (5.6)$$

5. Sprawdź czy x_k jest szukanym miejscem zerowym:

$$|f(x_k)| < \varepsilon$$

Jeżeli warunek jest spełniony, to zakończ obliczenia i przyjmij x_k jako przybliżenie pierwiastka. W przeciwnym przypadku zwiększk o jeden i przejdź do kroku 4.

5.4. Regula falsi

Istnieją różne wersje metody *regula falsi* (z łac. falszywa liniowość). W niniejszym rozdiale omówimy tzw. metodę z unieruchomionym punktem.

Niech dana będzie funkcja $f(x)$ oraz przedział domknięty $[a, b]$. Gwarancją zbieżności metody jest spełnienie w przedziale izolacji $[a, b]$ następujących warunków:

- 1) Funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$.
- 2) Pierwsza i druga pochodna funkcji $f(x)$ istnieją i są ciągłe w przedziale domkniętym $[a, b]$.
- 3) Na końcach przedziału $[a, b]$ wartości funkcji $f(x)$ przyjmują przeciwnie znaki, czyli zachodzi $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- 4) Pierwsza i druga pochodna mają stały znak w całym w przedziale $[a, b]$ (w przedziale nie ma ekstremów lokalnych i punktów przegięcia).

Metoda *regula falsi* polega na prowadzeniu cięciw przez określone punkty w odpowiednio dobranym przedziale $[a, b]$ izolacji pierwiastka. Kolejne wyznaczane proste (cięciwy) są liniową interpolacją funkcji $f(x)$. Pierwsza wyznaczana cięciwa łączy krańce przedziału, czyli punkty $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$ oraz jest następującej postaci:

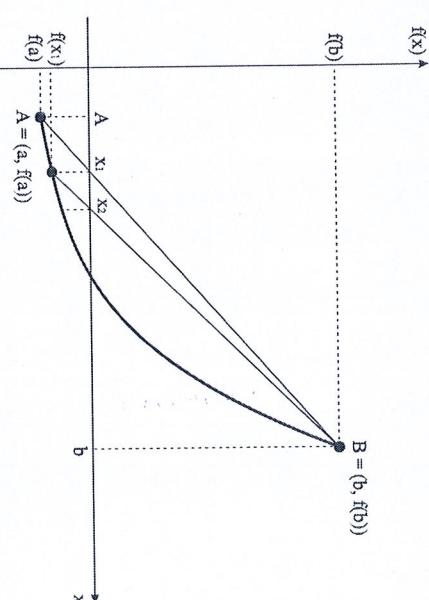
$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \quad (5.7)$$

Punkt x_1 przecięcia cięciwy z osią X jest pierwszym przybliżeniem pierwiastka:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} \cdot (b - a) \quad (5.8)$$

W kolejnym kroku wybieramy ten z punktów A i B , którego rzędna ma przeciwny znak niż wartość funkcji w punkcie x_1 . Tak wybrany punkt oznaczmy jako $X_0(x_0, f(x_0))$. Zatem zachodzi nierówność $f(x_0)f(x_1) < 0$. Punkt X_0 zostaje „unieruchomiony”, tzn. wszystkie cięciwy w kolejnych iteracjach będą z niego prowadzone. W związku z tym następna cięciwa budowana jest poprzez połączenie punktu X_0 z $X_1(x_1, f(x_1))$. Punkt przecięcia cięciwy X_0, X_1 z osią OX wyznacza nam kolejne przybliżenie x_2 szukanego pierwiastka (rys. 5.2). Analogicznie wykonujemy kolejne iteracje. Ogólny wzór na przybliżenie pierwiastka w n -tej iteracji jest następujący:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_0) - f(x_{n-1})} \cdot (x_0 - x_{n-1}) \quad (5.9)$$



Rys. 5.2. Graficzna interpretacja szukania pierwiastka metodą *regula falsi* z unieruchomionym punktem B

Cykł obliczeń jest powtarzany aż do momentu, kiedy osiągniemy żądaną dokładność przybliżenia szukanego pierwiastka $|f(x_n)| < \tilde{\varepsilon}$. Metodę *regula falsi* charakteryzuje następujące cechy:

- jest wolniej zbieżna od metody siecznych,

– jej współczynnik zbieżności p zawiera się w przedziale $[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$,

– jest lokalnie wolniej zbieżna, kiedy pierwiastek α leży blisko unieruchomionego końca przedziału.

Algorytm metody *regula falsi*

1. Przyjmij dane wejściowe: $f(x)$ – badana funkcja, $f'(x)$ – pierwsza pochodna badanej funkcji, $f''(x)$ – druga pochodna badanej funkcji, ε – dokładność z jaką będzie wyznaczany pierwiastek.
2. Dobierz odpowiedni przedział $[a, b]$ izolacji pierwiastka, w którym funkcja spełnia założenia 1)-4).
3. Wyznacz pierwsze przybliżenie pierwiastka:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} \cdot (b - a) \quad (5.10)$$

Jeżeli warunek jest spełniony, to zakończ obliczenia i przyjmij x_1 jako przybliżenie pierwiastka. W przeciwnym przypadku przejdź do następnego kroku.

5. Wybierz punkt, z którego będą wyznaczane kolejne cięwi, tzn. ten koniec przedziału $[a, b]$, dla którego zachodzi $f(x_1)f(x_0) < 0$, gdzie x_1 – pierwsze przybliżenie pierwiastka, $x_0 = a$ lub $x_0 = b$.

6. Wyznacz kolejne przybliżenie pierwiastka x_k :

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f(x_0) - f(x_{k-1})} \cdot (x_0 - x_{k-1}) \quad (5.11)$$

7. Sprawdź czy x_k jest szukanym miejscem zerowym:

$$|f(x_k)| < \varepsilon$$

Jeżeli warunek jest spełniony, to zakończ obliczenia i przyjmij x_k jako przybliżenie pierwiastka. W przeciwnym przypadku zwiększą k o jeden i przejdź do kroku 6.

5.5. Metoda siecznych

Metoda siecznych (*secant*) jest podobna do metody regula falsi. Różni się ona tym, że nie wymagamy, aby funkcja $f(x)$ była różnych znaków w punktach wyznaczających kolejną sieczną. Do wyznaczenia kolejnego przybliżenia pierwiastka używa się dwóch poprzednich przybliżeń, co oznacza zwiększenie efektywności stosowanej metody.

Niech dana będzie funkcja $f(x)$ oraz przedział domknięty $[a, b]$. Gwarancją zbieżności metody jest spełnienie w przedziale izolacji $[a, b]$ następujących warunków:

- 1) Funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$.
- 2) Pierwsza i druga pochodna funkcji $f(x)$ istnieją i są ciągłe w przedziale domkniętym $[a, b]$.
- 3) Na końcach przedziału $[a, b]$ wartości funkcji $f(x)$ przyjmują przeciwe znaki, czyli zachodzi $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- 4) Pierwsza i druga pochodna mają stały znak w całym w przedziale $[a, b]$ (co oznacza, że w przedziale nie ma ekstremów lokalnych i punktów przegięcia).

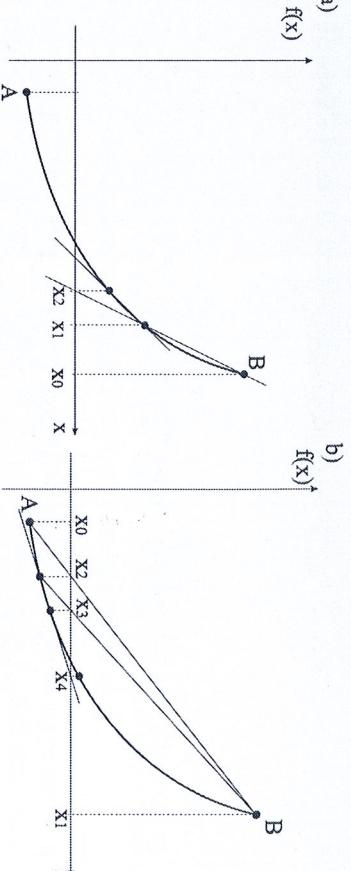
Zatem w przedziale $[a, b]$ izolacji pierwiastka wybieramy dwa punkty $X_0(x_0, f(x_0))$ i $X_1(x_1, f(x_1))$, przez które prowadzimy pierwszą sieczną.

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) \quad (5.12)$$

Punkt przecięcia tej siecznej z osią $0X$ wyróżnia pierwsze przybliżenie x_2 szukanego pierwiastka. Następną sieczną prowadzimy przez punkty X_1, X_2 uzyskując przybliżenie x_3 . Kolejne iteracje prowadzimy analogicznie (rys. 5.3). Stąd ogólny wzór na przybliżenie pierwiastka w n -tej iteracji jest następujący:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \cdot (x_{n-1} - x_n)$$

(5.13)



Rys. 5.3. Dwa różne przypadki poszukiwania pierwiastków metodą siecznych

Należy zwrócić uwagę, że równanie (5.13) podobne jest do równania (5.6) metody stycznych (Newtona). W metodzie siecznych iloraz różnicowy (korzystający z dwóch poprzednich punktów), zastępuje pochodną z metody stycznych (liczoną w punkcie z poprzedniej iteracji z równania (5.6)). Innymi słowy zamiast stycznych, tworzone są kolejne sieczne.

Metodę siecznych charakteryzuje następujące cechy:

- jest zbieżna ponadliniowo (ze współczynnikiem zbieżności równym $p = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \approx 1.618$, patrz równanie (5.1)),
- jest nieco wolniej zbieżna niż metoda Newtona, ale wymaga mniejszego nakładu obliczeniowego na iterację (nie ma konieczności wyliczania pochodnej funkcji),
- jest szybsza od metody regula falsi.

Poniższy algorytm opisuje przypadek metody siecznych, w którym punktami początkowymi są końce przedziału izolacji pierwiastka.

Algorytm metody siecznych

1. Przyjmij dane wejściowe: $f(x)$ – badana funkcja, $f'(x)$ – pierwsza pochodna badanej funkcji, $f''(x)$ – druga pochodna badanej funkcji, ε – dokładność z jaką będzie wyróżniany pierwiastek.
2. Dobierz odpowiedni przedział $[a, b]$ izolacji pierwiastka, w którym funkcja spełnia założenia 1)–4).
3. Wybierz odpowiednio punkty początkowe obliczeń $X_0(x_0, f(x_0)), X_1(x_1, f(x_1))$: x_1 to ten koniec przedziału $[a, b]$, dla którego zachodzi warunek $f(x_1)f''(x_1) > 0$, natomiast x_0 to drugi koniec przedziału.
4. Wyznacz kolejne przybliżenie pierwiastka x_k :

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f(x_{k-2}) - f(x_{k-1})} \cdot (x_{k-2} - x_{k-1}) \quad (5.14)$$

5. Sprawdź czy x_k jest szukanym miejscem zerowym:

$$|f(x_k)| < \varepsilon$$

Jeżeli warunek jest spełniony, to zakończ obliczenia i przyjmij x_k jako przybliżenie pierwiastka. W przeciwnym przypadku zwiększ k o jeden i przejdź do kroku 4.

Uwaga:

W praktyce mogą wystąpić sytuacje, w których nie da się przed uruchomieniem metody iteracyjnej sprawdzić jej warunków zbieżności. Przykładowo, nie mamy wystarczających informacji o funkcji i jej pochodnych lub sprawdzenie warunków jest zbyt kosztowne obliczeniowo. W tych przypadkach możemy spróbować zastosować daną metodę, nie mamy jednak gwarancji, że otrzymamy prawidłowe rozwiązanie. Należy wówczas z uwagą przeprowadzać proces obliczeniowy, sprawdzając zbieżność ciągu kolejnych rozwiązań.

5.6. Przykład

Dany jest wielomian zapisany w postaci iloczynowej $f(x) = (x+1)(x-1)^4$ oraz przedziały $[-1, 5; -0, 75]$ i $[0; 1, 5]$. Pierwiastkiem tego wielomianu są: $x_0 = -1$ i $x_1 = 1$, przy czym x_1 jest pierwiastkiem poczwórnym. Sprawdź czy podane przedziały są przedziałami izolacji pierwiastków dla metod bisekcji, siecznych, stycznych oraz regula falsi.

Przykład ten pokazuje, że nie w każdym przypadku możemy zastosować metody iteracyjne szukania miejsc zerowych. W naszym przykładzie rozważamy bardzo prostą funkcję (wielomian piątego stopnia), dla której wyznaczenie analitycznie miejsc zerowych nie stanowi kłopotu, natomiast występują problemy z numerycznym wyznaczeniem jednego z pierwiastków.

Rozwiązanie:

Metoda bisekcji

Na początek przypomnijmy warunki wystarczające zbieżności metody bisekcji:

- 1) Funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$,
- 2) Na końcach przedziału $[a, b]$ wartości funkcji $f(x)$ przyjmują przeciwnie znaki, czyli zachodzi $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Sprawdzony teraz kolejno powyższe warunki:

Ad 1) Funkcja jest określona i ciągła na całym \mathbb{R} jako wielomian. Zatem w szczególności jest ciągła na obu zadanych przedziałach.

Ad 2) W przedziale $[-1, 5; -0, 75]$ iloczyn odpowiednich wartości funkcji wynosi:

$$\begin{aligned} f(-1,5)f(0,75) &= (-1,5+1)(-1,5-1)^4(-0,75+1)(-0,75-1)^4 = \\ &= (-0,5)(-2,5)^4(0,25)(-1,75)^4 < 0. \end{aligned}$$

W przedziale $[-1,5; 0]$ iloczyn odpowiednich wartości funkcji wynosi:

$$f(0)f(1,5) = (1)(1)^4(2,5)(0,5)^4 > 0.$$

Zatem przedziałem izolacji pierwiastka jest przedział $[-1,5; -0,75]$. Natomiast funkcja w przedziale $[0; 1,5]$ nie spełnia warunków zbieżności metody bisekcji.

Pozostałe trzy metody: metoda stycznych, regula falsi oraz metoda siecznych mają takie same warunki wystarczające zbieżności. Zatem rozważmy je wspólnie.

Metody: stycznych, regula falsi oraz siecznych

Przypomnijmy warunki wystarczające zbieżności tych trzech metod:

1. Funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$.
2. Pierwsza i druga pochodna funkcji $f(x)$ istnieją i są ciągłe w przedziale domkniętym $[a, b]$.
3. Na końcach przedziału $[a, b]$ wartości funkcji $f(x)$ przyjmują przeciwnie znaki, czyli zachodzi $f(a) \cdot f(b) < 0$.
4. Pierwsza i druga pochodna mają stały znak w całym w przedziale $[a, b]$ (w przedziale nie ma ekstremów lokalnych i punktów przecięcia).

Przypomnijmy, że przy metodzie bisekcji zostały już sprawdzone warunki ciągłości funkcji (spełniony w obu przedziałach) oraz przeciwnych znaków na końcach przedziałów (nie założen metod: Newtona, siecznych i regula falsi). Pozostały nam tylko do sprawdzenia warunki (2) i (4) w przedziale $[-1,5; -0,75]$:

Ad 2) Istnieją pierwsza i druga pochodna oraz są ciągłe, ponieważ funkcja jako wielomian 5. stopnia jest funkcją klasy C^5 .

Ad 4) Aby móc sprawdzić ten warunek, musimy na początek wyznaczyć wzory na pierwszą i drugą pochodną funkcji $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(x+1)(x-1)^3 + 1(x-1)^4 = 5(x-1)^3(x+\frac{3}{5}) \\ f''(x) &= 3(x-1)^2(5x+3) + 5(x-1)^3 = 20(x-1)^2(x+\frac{1}{5}) \end{aligned}$$

Ze względu na to, że pierwsza pochodna ma potrójne miejsce zerowe w 1 oraz pojedyncze w $-\frac{3}{5}$, możemy w łatwy sposób określić znak tej funkcji:

$$sgn(f'(x)) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, -\frac{3}{5}) \\ 0, & x = -\frac{3}{5} \\ -1, & x \in (-\frac{3}{5}, 1) \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

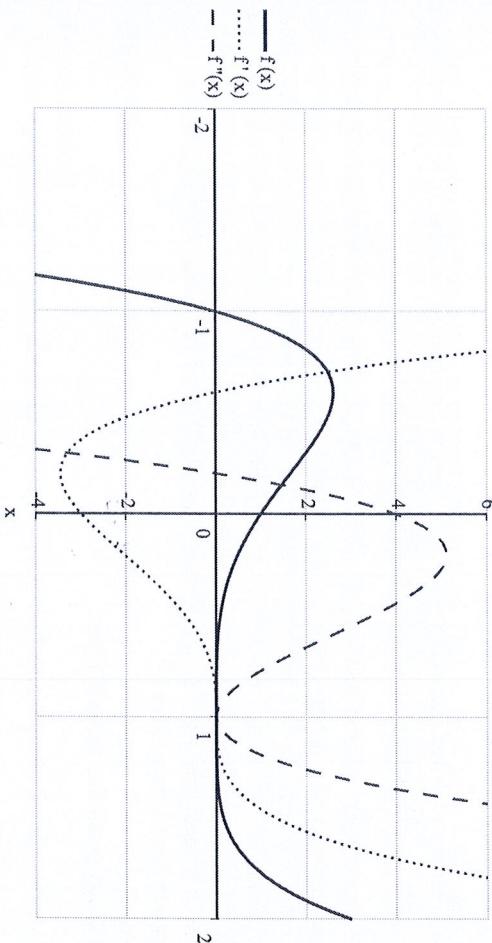
Zatem pierwsza pochodna w przedziale $[-1,5; -0,75]$ jest stale większa od zera, czyli nie zmienia znaku.

Podobnie zbadajmy drugą pochodną, która ma podwójne miejsce zerowe w 1 oraz pojedyncze w $-\frac{1}{5}$:

$$sgn(f''(x)) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, -\frac{1}{5}) \\ 0, & x = -\frac{1}{5} \\ 1, & x \in (-\frac{1}{5}, 1) \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

Druga pochodna w przedziale $[-1.5; -0.75]$ jest stała mniejsza od zera, czyli nie zmienia znaku. Stąd wynika, że nasza funkcja spełnia warunki zbieżności w przedziale $[-1.5; -0.75]$. Oznacza to, że dla tej funkcji w tym przedziale metody: stycznych, siecznych i *regula falsi* są metodami zbieżnymi. Natomiast w przedziale $[0; 1.5]$ funkcja nie spełnia warunków zbieżności.

Podsumowanie
Po przeprowadzonym przebiegu zmienności funkcji możemy narysować wykres funkcji $f(x)$ oraz jej pierwszej i drugiej pochodnej, co przedstawia rysunek 5.4:



Rys. 5.4. Wykres funkcji $f(x)$ wraz z pierwszą i drugą pochodną

Zestawmy również w tabelach 5.1 i 5.2 sprawdzone warunki zbieżności dla poszczególnych metod:

Tabela 5.1

	Metoda bisekcji	Wartunek	$[-1.5; -0.75]$	$[0; 1.5]$
1	Funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale.		+	+
2	Na końcach przedziału wartości funkcji $f(x)$ przyjmują przeciwny znak.		+	-

Tabela 5.1. (cd.)

	Metoda stycznych (Newtona)	Wartunek	$[-1.5; -0.75]$	$[0; 1.5]$
1	Funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale.		+	+
2	Pierwsza i druga pochodna istnieją i są ciągłe w przedziale.		+	+
3	Na końcach przedziału wartości funkcji $f(x)$ przyjmują przeciwny znak.		+	-
4	Pierwsza i druga pochodna mają stały znak w przedziale.		+	-
	Metoda siecznych	Warunek	$[-1.5; -0.75]$	$[0; 1.5]$
1	Funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale.		+	+
2	Pierwsza i druga pochodna istnieją i są ciągłe w przedziale.		+	+
3	Na końcach przedziału wartości funkcji $f(x)$ przyjmują przeciwny znak.		+	-
4	Pierwsza i druga pochodna mają stały znak w przedziale.		+	-

	Metoda regula falsi	Wartunek	$[-1.5; -0.75]$	$[0; 1.5]$
1	Funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale.		+	+
2	Pierwsza i druga pochodna istnieją i są ciągłe w przedziale.		+	+
3	Na końcach przedziału wartości funkcji $f(x)$ przyjmują przeciwny znaki.		+	-
4	Pierwsza i druga pochodna mają stały znak w przedziale.		+	-

W przedziale $[-1.5; -0.75]$ funkcja spełnia warunki zbieżności wszystkich metod. Zatem przystąpić do obliczeń. W tabeli 5.2 znajdują się uzyskane pierwiastki oraz zestawienie przeprowadzonej liczby iteracji. Wszystkie obliczenia wykonano w programie Mathcad z przyjęta dokładnością obliczeń $\varepsilon = 10^{-6}$.

Tabela 5.2

Metoda	Wartość pierwiastka	Liczba iteracji
Bisekcja	-1.0000000477	22
Styczne	-1.000000181	5
Sieczne	-1.000002660	6
Reguła falsi	-0.999999548	28

W przedziale $[0; 1.5]$ funkcja nie spełnia warunków zbieżności żadnej z metod. Nie da się również dobrą takiego przedziału izolacji dla pierwiastka $x_1 = 1$, w którym te warunki były spełnione, ponieważ jest to pierwiastek poczwórnego i funkcja w jego otoczeniu nie zmienia znaku. W tym wypadku, pamiętając o tym, że nie możemy zagwarantować zbieżności ww. metod, można jeszcze spróbować znaleźć pierwiastek metodą Newtona (uzyskano

pierwastek 0.97547695854 po 12 iteracjach) lub innymi metodami. W takim przypadku należy zbadać zbieżność ciągu uzyskanych rozwiązań.

5.7. Zadania

1) Dana jest funkcja $f(x) := e^{-2x} - 1 + x$ określona na przedziale $[-1, 2]$. Znajdź odpowiednie przedziały izolacji i wyznacz pierwiastki tej funkcji następującymi metodami:

- bisekcji,
- stycznych (Newtona),
- regula falsi,
- siecznych.

2) Rozwiąż równanie: $k^5 - 3k^4 + 2k^3 = -2k^2 + 3k - 1$ za pomocą metod:

- bisekcji,
- stycznych (Newtona),
- regula falsi,
- metoda siecznych.

3) Klient kupuje samochód osobowy wartości $60\,000\text{ PLN}$ posłekując się preferencyjnym kredytem o oprocentowaniu 0% . W momencie zakupu wpłaca $30\,000\text{ PLN}$, czyli połowę wartości samochodu oraz dodatkowo wpłaca 900 PLN prowizji dla banku za przyznanie kredytu. Kolejne $30\,000\text{ PLN}$ klient spłaca w 12 równych ratach, płacąc $2\,500\text{ PLN}$ pierwszego dnia miesiąca, przez 12 kolejnych miesięcy po zakupie. Oblicz ESP (Efektywną Stopę Procentową) spłacanego kredytu.

Wskazówka: zadanie sprawdza się do znalezienia pierwiastka zależności:

$$f(ESP) = \frac{CF_1}{(1+ESP)^{\frac{T_1}{365}}} + \frac{CF_2}{(1+ESP)^{\frac{T_2}{365}}} + \dots + \frac{CF_N}{(1+ESP)^{\frac{T_N}{365}}} = \sum_{i=1}^N \frac{CF_i}{(1+ESP)^{\frac{T_i}{365}}}$$

gdzie:

$CF_1 = CF_2 = \dots = CF_N$ – kwoty raty kredytu, $T_1 = T_2 = \dots = T_N$ – czas trwania raty kredytu, ESP – poszukiwana Efektywna Stopa Procentowa, p – poziom wagi, a – czas rozpoczęcia spłaty kredytu, b – czas zakończenia spłaty kredytu.

gdzie:

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – dana funkcja określona i ciągła w przedziale $[a, b]$,

$p : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ – funkcja wagowa, czyli spełniająca warunki:

$p(x) \geq 0$ w przedziale $[a, b]$,
 $p(x) = 0$ w co najwyżej skończonej liczbie punktów,
 $I_p(f)$ – całka oznaczona Riemanna funkcji f w przedziale $[a, b]$.

Funkcję wagową dobiera się w taki sposób, aby można było dobrze przybliżać całkę. W dalszych rozważaniach przyjmijmy wartość wagi $p(x) = 1$ dlatego, że taka waga występuje w większości kwadratur o największym znaczeniu praktycznym. Zatem będziemy rozważać zagadnienie:

$I_p(f) = \int_a^b f(x) dx$

W obliczeniach użyj metody Newtona, pochodne oblicz symbolicznie, proponowany

przedział poszukiwań $<0; 0.7>$, dokładność $10^{-6}\%$.

Odpowiedź: $ESP = 5.8345\%$

6. Całkowanie numeryczne

6.1. Wprowadzenie

Tematyka ćwiczenia obejmuje zagadnienia całkowania numerycznego. Omówiono kwaterury Newtona-Cotesa prostie i złożone oraz oparte na tych kwadraturach metody: trapezów i Simpsona. Przedstawiono również metode Romberg'a umożliwiającą szybkie uzyskiwanie dokładniejszych rozwiązań na bazie kwadratur.

W niniejszym rozdziale zostaną omówione metody numerycznego obliczania całki oznaczonej funkcji jednej zmiennej.
 Niech będzie dany przedział $[a, b]$. Szukamy $I_p(f)$ – całki oznaczonej Riemanna funkcji f z wagą p w przedziale $[a, b]$:

$$I_p(f) = \int_a^b f(x) p(x) dx \quad (6.1)$$

gdzie:
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – dana funkcja określona i ciągła w przedziale $[a, b]$,

$p : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ – funkcja wagowa, czyli spełniająca warunki:

$p(x) \geq 0$ w przedziale $[a, b]$,

$p(x) = 0$ w co najwyżej skończonej liczbie punktów,

$I_p(f)$ – całka oznaczona Riemanna funkcji f w przedziale $[a, b]$.

Często nie potrafimy znaleźć funkcji pierwotnej F dla funkcji f i wtedy niemożliwe jest uzyskanie rozwiązania na podstawie granic całkowania: $I(f) = F(b) - F(a)$. Zatem w zastosowaniach numerycznych stosuje się wzory przybliżone.