

Zatem błąd bezwzględny i względy wynoszą odpowiednio:

$$\Delta = |I - Q_{zS}| = \left| \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right| = 0$$

$$\delta = \left| \frac{I - Q_{zS}}{I} \right| = \left| \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} \right| = 0$$

Tutaj, podobnie jak w przypadku prostego wzoru Simpsona, błędy wynoszą 0.

6.6. Zadania

1) Dana jest funkcja $f(x) = e^{(-x^2)}$ określona na przedziale $[0, 1]$. Oblicz przybliżenie całki oznaczonej tej funkcji następującymi metodami:

- a) prostym wzorem trapezów,
- b) prostym wzorem Simpsona,
- c) złożonym wzorem trapezów dla 10 podprzedziałów,
- d) złożonym wzorem Simpsona dla 10 podprzedziałów,
- e) metodą Romberga z dokładnością $\varepsilon = 10^{-5}$.

- 2) Znajdź pole figury znajdującej się w przedziale $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ i ograniczonej wykresami funkcji $f(x) = \sin(\pi x^2)$ oraz $g(x) = \cos(\pi x^2)$, za pomocą metod:
- a) złożonego wzoru trapezów dla 10 podprzedziałów,
 - b) złożonego wzoru Simpsona dla 10 podprzedziałów,
 - c) metody Romberga z dokładnością $\varepsilon = 10^{-5}$.

Tematyka ćwiczenia obejmuje metody rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych z warunkiem początkowym. Omówiono metody jednokrobowe oraz wielokrobowe. Przedstawiono metody: Eulera, ulepszoną Eulera, Eulera-Cauchy'ego, Rungego-Kutty rzędu czwartego oraz wielokrobowe.

7. Równania różniczkowe zwyczajne

7.1. Wprowadzenie

W rozdziale tym zajmiemy się numerycznym wyznaczaniem rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu z warunkiem początkowym. Rozważmy równanie różniczkowe zwyczajne w postaci normalnej [18]:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (7.1)$$

gdzie:

f – funkcja ciągła i określona w pasie $a \leq t \leq b$, $-\infty \leq y \leq \infty$,

a , b – liczby rzeczywiste skończone.

Równania różniczkowe tej postaci posiadają wiele rozwiązań. Natomiast w zagadniach praktycznych zazwyczaj interesuje nas konkretne rozwiązanie przechodzące przez dany punkt (t_0, y_0) nazywany **warunkiem początkowym**. Innymi słowy szukamy trajektorii równania startującej z punktu (t_0, y_0) . W związku z tym będziemy zajmować się zagadnieniem Cauchego, czyli równaniem różniczkowym (7.1) wraz z warunkiem początkowym:

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ \frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad t \in [t_0, b] \end{cases} \quad (7.2)$$

Określoność i ciągłość funkcji f podanej wzorem (7.1) gwarantuje istnienie rozwiązania zagadnienia Cauchego przehodzącego przez t_0 .

Numeryczne rozwiązywanie zagadnienia początkowego to inaczej numeryczne całkowanie zagadnienia początkowego. Polega ono na znalezieniu w punktach $t_i \in [t_0, b]$ wartości y_i będących przybliżeniem nieznanego rozwiązania dokładnego $y(t_i)$. Punkty t_i dobieramy w taki sposób, aby $t_i < t_{i+1}$. Zaczynamy od punktu t_0 z warunku początkowego (t_0, y_0) , a kończymy gdy osiągniemy b (koniec przedziału). Określamy tzw. krok całkowania jako:

Jeśli $t_i - t_{i-1} = \text{const}$ dla każdego i , to krok całkowania jest stały i oznaczany go przez h .

W przeciwnym wypadku mamy do czynienia ze zmiennym krokiem całkowania.

Obliczenie kolejnego przybliżenia $y_i \approx y(t_i)$ dla punktu t_i nazywamy krokiem obliczeń.

Wyróżniamy **metody jednokrokowe i wielokrokowe**. W metodach jednokrokowych obliczanie nie y_i w danym kroku wykonywane jest na podstawie tylko jednego przybliżenia obliczonego w poprzednim kroku (y_{i-1}). Natomiast w metodach wielokrokowych wykorzystuje się kilka ostatnich przybliżeń.

7.2. Metody jednokrokowe

W niniejszym rozdziale omówimy metody jednokrokowe o stałym kroku całkowania.

Należą do nich: metoda Eulera, ulepszona metoda Eulera-Cauchy'ego oraz metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu. Metoda Eulera jest najstarszą i najprostszą metodą jednokrokową. Natomiast w praktyce najczęściej stosowana jest metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu (lub szóstego).

7.2.1. Metoda Eulera

Metoda Eulera polega na zastąpieniu krzywej całkowej $y = y(t)$ łamana o wierzchołkach (t_i, y_i) . W związku z tym nieukończenie małe wartości dy i dt zastępujemy skończonymi przyrostami Δy oraz $\Delta t = h$.

Ustalmy zatem małą wartość kroku h i wyznaczmy kolejno punkty (t_{i+1}, y_{i+1}) :

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i) \end{cases} \quad (7.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} i &= 0, 1, \dots, n-1, \\ t_i &\in [t_0, b], \end{aligned}$$

zaczynając od warunku początkowego (t_0, y_0) :

$$\begin{cases} t_1 = t_0 + h \\ y_1 = y_0 + h f(t_0, y_0) \end{cases} \quad (7.5)$$

Wyniki uzyskane metodą Eulera są mało dokładne. Aby zmniejszyć błędy przybliżeń, powstały różne modyfikacje tej metody np. ulepszona metoda Eulera i metoda Eulera-Cauchy'ego.

Algorytm otwartej metody Eulera

1. Wprowadź dane wejściowe: $f(t, y)$ – równanie różniczkowe, (t_0, y_0) – warunek początkowy, b – koniec przedziału całkowania.
2. Określ stały krok całkowania h .
3. Wyznacz $n = \frac{b-t_0}{h}$ – liczbę iteracji.
4. Wyznacz n kolejnych punktów trajektorii (t_{i+1}, y_{i+1}) , korzystając ze wzoru (7.8):
 - a) oblicz zmienne pomocnicze k_1, k_2 ,
 - b) oblicz kolejne wartości y_{i+1}, t_{i+1} .

7.2.3. Metoda Eulera-Cauchy'ego

Kolejną modyfikacją metody Eulera jest metoda Eulera-Cauchy'ego. Podobnie jak poprzednich algorytmach ustalamy wartość kroku całkowania h i zaczynamy iteracje warunku początkowego (t_0, y_0) .

7.2.2. Ulepszona metoda Eulera

Ulepszona metoda Eulera to inaczej **metoda punktu środkowego (midpoint rule)**. Metoda ta należy do metod jednokrokowych drugiego rzędu.

Standardowo ustalamy wartość kroku całkowania h i zaczynamy iteracje od warunku początkowego (t_0, y_0) . W każdym kolejnym kroku korzystamy z przybliżenia uzyskanego w poprzednim kroku i z przybliżenia w tzw. punkcie środkowym. Punkt środkowy $(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$ określamy następująco:

$$\begin{cases} t_{i+\frac{1}{2}} = t_i + \frac{h}{2} \\ y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i) \end{cases} \quad (7.6)$$

Następnie możemy wykonać pełny krok, czyli wyznaczyć (t_{i+1}, y_{i+1}) :

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h f\left(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right) \end{cases} \quad (7.7)$$

Wprowadzając pomocnicze zmienne k_1 i k_2 możemy podać uproszczony zapis:

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ k_1 = h f(t_i, y_i) \\ k_2 = h f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ t_{i+1} = t_i + h \\ y_{i+1} = y_i + k_2 \end{cases} \quad (7.8)$$

gdzie:
 $i = 0, 1, \dots, n-1$,
 $t_i \in [t_0, b]$.

Algorytm ulepszonej metody Eulera

1. Wprowadź dane wejściowe: $f(t, y)$ – równanie różniczkowe, (t_0, y_0) – warunek początkowy, b – koniec przedziału całkowania.
2. Określ stały krok całkowania h .
3. Wyznacz $n = \frac{b-t_0}{h}$ – liczbę iteracji.
4. Wyznacz n kolejnych punktów trajektorii (t_{i+1}, y_{i+1}) , korzystając ze wzoru (7.8):
 - a) oblicz zmienne pomocnicze k_1, k_2 ,
 - b) oblicz kolejne wartości y_{i+1}, t_{i+1} .

W kolejnych krokach korzystamy z poprzedniego przybliżenia oraz ze średniej arytmetycznej wartości funkcji w poprzednim punkcie i w tzw. punkcie pośrednim. Zatem znajdując się w punkcie (t_i, y_i) określamy punkt pośredni:

$$x_i = y_i + h f(t_i, y_i) \quad (7.9)$$

oraz średnia:

$$s = \frac{f(t_i, y_i) + f(t_i + h, x_i)}{2} \quad (7.10)$$

Stąd możemy wyznaczyć pełny krok:

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h \\ y_{i+1} = y_i + hs \end{cases} \quad (7.11)$$

Wprowadzając pomocnicze zmienne k_1 i k_2 możemy zapisać:

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ k_1 = h f(t_i, y_i) \\ k_2 = h f(t_i + h, y_i + k_1) \\ t_{i+1} = t_i + h \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \end{cases} \quad (7.12)$$

gdzie:

i – kolejne iteracje $i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Algorytm metody Eulera-Cauchego

1. Wprowadź dane wejściowe: $f(t, y)$ – równanie różniczkowe, (t_0, y_0) – warunek początkowy, b – koniec przedziału całkowania.
2. Określ stały krok całkowania h .

3. Wyznacz $n = \frac{b-t_0}{h}$ – liczbę iteracji.

4. Wyznacz n kolejnych punktów trajektorii (t_{i+1}, y_{i+1}) , korzystając ze wzoru (7.12):

- a) oblicz zmienne pomocnicze k_1, k_2 ,
- b) oblicz kolejne wartości y_{i+1}, t_{i+1} .

gdzie:

$$\begin{aligned} m &\geq 1 \text{ – rzad metody,} \\ s &\geq 1 \text{ – liczba kroków pośrednich,} \end{aligned}$$

w_i, c_s, a_{sj} – stałe zależne od rzędu metody.

Sposób wyznaczania stałych w_i, c_s, a_{sj} można przykładowo znaleźć w [10]. Jeśli wartość s oznacza liczbę kroków pośrednich, zaś m oznacza rzad, to zachodzi związek $m \leq s$. Ponizsza tabela przedstawia zależności między rzędem metody a minimalną liczbą kroków pośrednich:

| Rząd metody | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|----|
| Minimalna liczba kroków pośrednich | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 |

Podstawiając do ogólnego wzoru $s = 2$, otrzymujemy wzór na metodę Eulera-Cauchego, czyli jest to metoda Rungego-Kutty drugiego rzędu. Natomiast najpopularniejszą metodą jednokrokową jest metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu o czterech krokach pośrednich:

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ k_1 = h f(t_i, y_i) \\ k_2 = h f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = h f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = h f\left(t_i + h, y_i + k_3\right) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ t_{i+1} = t_i + h \end{cases} \quad (7.14)$$

Metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu jest metodą stosunkowo prostą w implementacji i często spotykana w praktycznych zastosowaniach. Zauważmy, że uzyskanie wyższego rzędu metody (piątego) wymagałoby już wykonania co najmniej dwóch dodatkowych kroków pośrednich.

Algorytm metody Rungego-Kutty czwartego rzędu

1. Wprowadź dane wejściowe: $f(t, y)$ – równanie różniczkowe, (t_0, y_0) – warunek początkowy, b – koniec przedziału całkowania.
2. Określ stały krok całkowania h .
3. Wyznacz $n = \frac{b-t_0}{h}$ – liczbę iteracji.
4. Wyznacz n kolejnych punktów trajektorii (t_{i+1}, y_{i+1}) , korzystając ze wzoru (7.14):

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h \sum_{s=1}^m w_s k_s \quad i = 0, 1, \dots \\ k_1 = f(t_i, y_i) \\ k_s = f(t_i + c_s h, y_i + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} k_j) \quad \text{dla } 2 \leq m \leq s \end{cases} \quad (7.13)$$

7.3. Metody wielokrokowe

W niniejszym rozdziale omówimy metody wielokrokowe o stałym kroku całkowania.

Należą do nich: **metoda Adamsa-Bashfortha** (należąca do metod wielokrokowych jawnych), **metoda Adamsa-Moultona** (należąca do metod wielokrokowych niejawnych) oraz **metoda predyktorkorektor** oparta na obu tych metodach.

Jak już wcześniej wspomniano, metody wielokrokowe korzystają z więcej niż jednego poprzedniego przybliżenia. Rozważmy zatem zagadnienie początkowe (7.2). Dla ustalonego k ($k = 1, 2, \dots$) zastosowanie metody k -krokowej wymaga znajomości k przybliżeń:

$$y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$$

wartości dokładnych:

$$y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_{k-1})$$

gdzie $y(t_0)$ – warunek początkowy.

Wtedy wzór na kolejne przybliżenie w metodzie k -krokowej jest następujący:

$$y_i = \sum_{j=1}^k \alpha_j y_{i-j} + h \sum_{j=0}^k \beta_j f(t_{i-j}, y_{i-j}) \quad (7.15)$$

gdzie:

$$i = k, k+1, \dots$$

h – krok całkowania,

α_j, β_j – odpowiednio dobrane liczby.

Metodę k -krokową nazywamy **jawną (otwartą)**, jeżeli $\beta_0 = 0$, natomiast jeżeli $\beta_0 \neq 0$, metodę nazywamy **niejawną (zamkniętą)**.

Metody Adamsa cechują się tą samą ideą, tzn. zagadnienie początkowe (7.2) przepisujemy w równoważnej postaci całkowej:

$$y(t_i) = y(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x, y(x)) dx \quad (7.16)$$

Funkcję podcalkową przybliżamy wielomianem interpolacyjnym, a następnie całkujemy.

7.3.1. Metoda Adamsa-Bashfortha

Wyrowadźmy wzór iteracyjny metody Adamsa-Bashfortha rzędu k [6], [16]. Niech $L(x)$ będzie wielomianem interpolacyjnym stopnia $k - 1$, takim że:

$$L(t_{i-j}) = f(t_{i-j}, y(t_{i-j})), \quad j = 1, \dots, k \quad (7.17)$$

i zapisanym w postaci Lagrange'a:

$$L(x) = \sum_{j=1}^k l_j(x) f(t_{i-j})$$

gdzie:

$$f(t_{i-j}) = f(t_{i-j}, y(t_{i-j})) \quad (7.18)$$

$l_j(x) = \prod_{m=1, m \neq j}^k \frac{(x - t_{i-m})}{(t_{i-j} - t_{i-m})}$

Zauważmy, że wielomian ten przechodzi przez węzły x_{i-1}, \dots, x_{i-k} . Wstawiając wielomian interpolacyjny do postaci całkowej zagadnienia początkowego (7.16) oraz korzystając z twierdzenia o wartości średniej,trzymujemy:

$$y(t_i) = y(t_{i-1}) + \sum_{j=1}^k f(t_{i-j}, y_{i-j}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} l_j(x) dx \quad (7.19)$$

Oznaczmy teraz ponizszą zależność jako współczynnik β_{kj} :

$$\beta_{kj} = \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} l_j(x) dx \quad j = 1, \dots, k \quad (7.20)$$

Orzynujemy zatem:

$$y(t_i) = y(t_{i-1}) + h \sum_{j=1}^k f(t_{i-j}, y_{i-j}) \beta_{kj} \quad (7.21)$$

Zastępując wartości dokładne znanyimi przybliżeniami, otrzymujemy wzór metody Adamsa-Bashfortha rzędu k :

$$y_i = y_{i-1} + h \sum_{j=1}^k \beta_{kj} f_{i-j} \quad (7.22)$$

gdzie:

$$h \quad \text{krok całkowania,}$$

$$\beta_{kj} \quad \text{współczynnik dany wzorem (7.20),}$$

$$f_{i-j} = f(t_{i-j}, y_{i-j}).$$

Dla każdego rzędu metody współczynnik β_{kj} łatwo obliczyć, ponieważ jest to całkowici wielomianu (7.20). Z postaci wzoru (7.22) wynika, że jest to metoda jawną ($\beta_0 = 0$).

W metodzie Adamsa-Bashfortha początkowe przybliżenia y_i wyznacza się, korzystając z metody Rungego-Kutty lub przy użyciu rozwinięcia w szereg Taylora.

W tabeli 7.1 przedstawiono wzory metody Adamsa-Bashfortha dla rzędów od 1 do 4.

Tabela 7.1

| | |
|--------|--|
| | $y_0 = y(t_0)$ |
| 1 rząd | $y_i = y_{i-1} + h f_{i-1}$ |
| 2 rząd | $y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}(3f_{i-1} - f_{i-2})$ |
| 3 rząd | $y_i = y_{i-1} + \frac{h}{12}(23f_{i-1} - 16f_{i-2} + 5f_{i-3})$ |
| 4 rząd | $y_i = y_{i-1} + \frac{h}{24}(55f_{i-1} - 59f_{i-2} + 37f_{i-3} - 9f_{i-4})$ |

7.3.2. Metoda Adamsa-Moultona

Wyrowadźmy wzór iteracyjny metody Adamsa-Moultona rzędu k [6], [16]. Podobnie jak w metodzie Adamsa-Bashfortha niech $L(x)$ będzie wielomianem interpolacyjnym stopnia k , takim, że:

$$L(t_{i-j}) = f(t_{i-j}, y(t_{i-j})), \quad j = 0, \dots, k \quad (7.23)$$

i zapisanym w postaci Lagrange'a:

$$L(x) = \sum_{j=0}^k l_j(x) f(t_{i-j}), \quad (7.24)$$

gdzie:

$$f(t_{i-j}) = f(t_{i-j}, y(t_{i-j})),$$

$$l_j(x) = \prod_{m=0, m \neq j}^k \frac{(x - t_{i-m})}{(t_{i-j} - t_{i-m})}.$$

Zauważmy, że wielomian ten przekształca się przez węzły $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k}$.

Przeprowadzając takie same obliczenia jak w przypadku metody Adamsa-Bashfortha otrzymujemy wzór metody Adamsa-Moultona:

$$y_i = y_{i-1} + h \sum_{j=0}^k \beta_{kj} f_{i-j} \quad (7.25)$$

gdzie:

$$\beta_{kj} = \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} l_j(x) dx \quad j = 0, \dots, k,$$

h – krok całkowania.

Jest to równanie uwikłane względem y_i , ponieważ funkcja $f(t_i, y_i)$ przy β_0 jest zależna od y_i w i -tej iteracji. Metoda Adamsa-Moultona jest zatem metodą niejawną ($\beta_0 \neq 0$).

Metodę Adamsa-Moultona stosuje się właściwie tylko w połączeniu z innymi metodami wielokrobowymi. Pełni ona rolę „korygującą” w tzw. metodach łączonych typu predyktorkorektor [16]. W każdym kroku metody predyktor-korektor pierwszym etapem obliczeń jest

wyznaczenie przybliżenia początkowego za pomocą metody jawnej, czyli predykcja. Drugim etapem jest dokonanie kilku iteracji za pomocą metody niejawnej, czyli korekcja. W tabeli 7.2 przedstawione są wzory metody Adamsa-Moultona dla rzędów od 1 do 4.

Tabela 7.2

| | |
|--------|---|
| 1 rząd | $y_i = y_{i-1} + h f_{i-1}$ |
| 2 rząd | $y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}(f(t_i, y_i) + f(t_{i-1}, y_{i-1}))$ |
| 3 rząd | $y_i = y_{i-1} + \frac{h}{12}(5f(t_i, y_i) + 8f(t_{i-1}, y_{i-1}) - f(t_{i-2}, y_{i-2}))$ |
| 4 rząd | $y_i = y_{i-1} + \frac{h}{24}(9f(t_i, y_i) + 19f(t_{i-1}, y_{i-1}) - 5f(t_{i-2}, y_{i-2}) + f(t_{i-3}, y_{i-3}))$ |

7.4. Przykłady

Dane jest zagadnienie Cauchy'ego:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) = -4t^3 + 24t^2 - 40t + 16 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Przedstaw na wykresie trajektorię tego równania dla $t \in [0, 4]$ uzyskaną analitycznie oraz pomocą metod:

- Eulera,
- Rungego-Kutty czwartego rzędu.

W metodach numerycznych przyjmij krok całkowania $h = 0.5$.

Rozwiązanie

Metoda analityczna

Rozwiążemy to równanie metodą rozdzielania zmiennych:

$$\frac{dy}{dt} = -4t^3 + 24t^2 - 40t + 16$$

Calkując obustronne równanie otrzymujemy:

$$\int dy = \int (-4 \cdot t^3 + 24 \cdot t^2 - 40 \cdot t + 16) dt$$

$$y(t) = -t^4 + 8 \cdot t^3 - 20 \cdot t^2 + 16 \cdot t + C$$

Wyznaczmy teraz stałą C korzystając z warunku początkowego $y(0) = 1$:

$$\begin{cases} y(0) = C \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Zatem stała $C = 1$. Stąd rozwiązaniem dokładnym jest funkcja:

$$y(t) = -t^4 + 8 \cdot t^3 - 20 \cdot t^2 + 16 \cdot t + 1$$

Natomiast trajektorią jest wykres tej funkcji w przedziale $[0, 4]$.

Metoda Eulera

Korzystając z metody Eulera (7.4), otrzymujemy trajektorię przedstawioną na rysunku 7.1.

7.5. Zadania

1) Dane jest równanie różniczkowe:

$$\frac{dy}{dt} = \cos(y) \sin\left(\frac{t}{4}\right)$$

z warunkiem początkowym $y(1) = 1$.

Znajdź rozwiązanie tego równania dla $t \in [1, 50]$ następującymi metodami:

- Eulera,
- ulepszoną metodą Eulera,
- Eulera-Cauchego,
- Rungego-Kutty czwartego rzędu.

Przyjmij krok całkowania $h = 0.5$. Przetestuj także inne wartości kroku całkowania. Porównaj uzyskane wyniki.

2) Dane jest równanie różniczkowe:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) = (1 - 2t)y^2$$

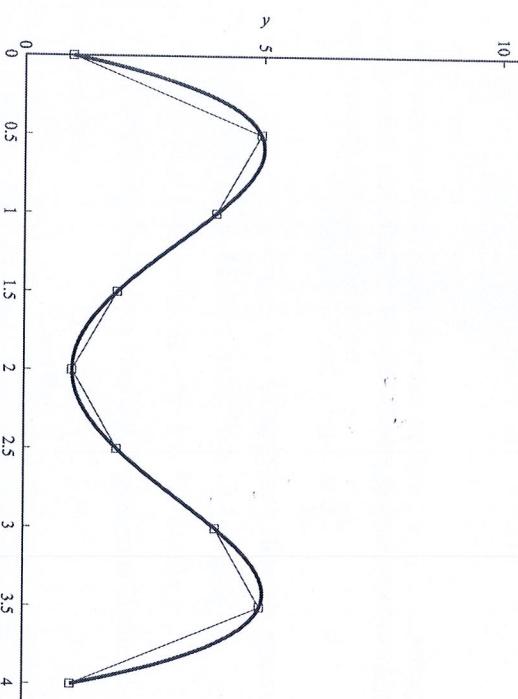
z warunkiem początkowym $y(0) = 1$.

Znajdź rozwiązanie tego równania dla $t \in [0, 5]$ metodami:

- Eulera,
- Rungego-Kutty czwartego rzędu.

Przyjmij krok całkowania $h = 0.1$. Przetestuj także inne wartości kroku całkowania. Porównaj uzyskane wyniki.

Metoda Rungego-Kutty rzędu 4
Korzystając z równań (7.14), otrzymujemy trajektorię przedstawioną na rysunku 7.2.



Rys. 7.1. Rozwiążanie dokładne i rozwiązanie uzyskane metodą Eulera

Rys. 7.2. Rozwiążanie dokładne i rozwiązanie uzyskane metodą RK4

- [18] Ombach J.: *Wykłady z równań różniczkowych wspomagane komputerowo – Ma*
Kraków, WUJ 1999
- [19] Pietraszek J.: *Mathcad Ćwiczenia*. Gliwice, Helion 2002
- [20] Povstenko J.: *Wprowadzenie do metod numerycznych*. Warszawa, Exit 2002
- [21] Press WH., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.F.: *Numerical Recipes in*
Cambridge University Press 1995, <http://www.library.cornell.edu/nr/bookcpdf.html>
- [22] Turowicz A.: *Teoria macierzy*. Kraków, Wydawnictwa AGH 1995
- [23] IEEE 754-2008: Standard for Binary Floating-Point Arithmetic,
<http://ieeexplore.ieee.org>
- [1] Atkinson K.: *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley 1989
- [2] Björck A., Dahlquist G.: *Numerical Methods*. Dover Publications 2003
- [3] Bloomey R.: *Applied Linear Algebra and Numerical Analysis. Splines*. University of
Washington, 2001,
<http://www.amath.washington.edu/courses/352-spring-2001/Lectures/lecture15.pdf>
- [4] Burden R.: *Numerical Analysis*. Thomson Brooks/Cole 2005
- [5] Dudek-Dyduch E.: *Wykłady z metod numerycznych (praca niepublikowana)*
- [6] Dryja M., Jankowscy J. i M.: *Przegląd metod i algorytmów numerycznych, cz.2*. War-
szawa, WNT 1988
- [7] Engeln-Mullges G., Uhlig F.: *Numerical Algorithms with C*. Berlin-NY, Springer 1996
- [8] Faires D., Burden R.: *Numerical Methods*. Brooks Cole 2002
- [9] Fichtenholz G.M.: *Rachunek różniczkowy i całkowy*. Warszawa, PWN 2007
- [10] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J.: *Metody numeryczne*. Warszawa, WNT 1993
- [11] Gancarzewicz J.: *Algebra liniowa z elementami geometrii*. Kraków, WUJ 1999
- [12] Jankowscy J. i M.: *Przegląd metod i algorytmów numerycznych, cz.1*. Warszawa, WNT
1988
- [13] Kernighan B., Ritchie D.: *Język ANSI C*. Warszawa, WNT 2001
- [14] Kiełbasiński A., Schwetlick H.: *Numeryczna algebra liniowa*. Warszawa, WNT 1992
- [15] Kincaid D., Cheney W.: *Analiza numeryczna*. Warszawa, WNT 2006
- [16] Krupowicz A.: *Metody numeryczne zagadnień początkowych równań różniczkowych*
zwyczajnych. Warszawa, PWN 1986
- [17] Linkiewicz G.: *Mathcad for Windows*. Warszawa, EXIT 1994

