Systemy Baz Danych

Więzy i Normalizacja

Bartosz Zieliński

WYDZIAŁ FIZYKI
i INFORMATYKI STOSOWANEJ
Uniwersytet Łódzki

Więzy i Normalizacja

- Atrybuty danych można bez straty informacji rozdzielić na wiele sposobów pomiędzy zmienne relacyjne.
- Niektóre z tych sposobów są lepsze niż inne ponieważ unikają pewnych **anomalii modyfikacji** — zmienne relacyjne są wtedy w jednej z **postaci normalnych**.
- Anomalie modyfikacji i postacie normalne zmiennych powiązane są z **zależnościami funkcyjnymi** i **wielowartościowymi**.
- Pogłębimy także zrozumienie **więzów** wprowadzonych wcześniej nieformalnie, a w szczególności więzów klucza głównego, referencyjnych i unikalności.

Zależności Funkcyjne dla Relacji

Definicja

Niech R będzie relacją i niech $X, Y \subseteq \mathrm{Attr}(R)$. Powiemy że R **spełnia zależność funkcyjną** $X \to Y$, co oznaczamy $R \models X \to Y$, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdych krotek $t, t' \in R$ jeśli $t|_X = t'|_X$ to $t|_Y = t'|_Y$.

Przykład Zależności Funkcyjnych

Rozważmy następującą relację R:

A	B	C
1	'K'	10
1	'K'	20
2	'L'	30
3	'M'	40

R spełnia zależność funkcyjną $\{\mathbf{A}\} \rightarrow \{\mathbf{B}\}$ ponieważ dla każdych krotek $t, t' \in R$ jeśli $t.\mathbf{A} = t'.\mathbf{A}$ to $t.\mathbf{B} = t'.\mathbf{B}$

R **nie** spełnia zależności funkcyjnej $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \rightarrow \{\mathbf{C}\}$ ponieważ istnieją dwie krotki $t, t' \in R$ (czerwone) dla których $t|_{\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}} = \frac{\mathbf{A} \quad \mathbf{B}}{1 \quad \text{'K'}} = t'|_{\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}}$ ale $t.\mathbf{C} = 10 \neq 20 = t'.\mathbf{C}$, czyli $t|_{\{\mathbf{C}\}} \neq t'|_{\{\mathbf{C}\}}$.

Zależności Funkcyjne dla Zmiennych Relacyjnych

Definicja

Powiemy że zmienna relacyjna $\mathbf{R}$ spełnia **zależność funkcyjną** $X \rightarrow Y$, co oznaczamy $\mathbf{R} \models X \rightarrow Y$, jeśli wszystkie **legalne** relacje które **chcemy** przechowywać w $\mathbf{R}$ spełniają tą zależność.

Zauważmy że spełnianie zależności funkcyjnych dla zmiennych relacyjnych zależy od **znaczenia** tych zmiennych

Przykład

Przypuśćmy że $\mathbf{R}$ jest zmienną o atrybutach **PESEL** i **Imię** i chcemy aby każda krotka $\mathbf{R}$ przechowywała informacje o PESELu i imieniu rzeczywistego człowieka (np. pracownika). Wówczas $\mathbf{R}$ spełnia $\{$**PESEL**$\} \rightarrow \{$**Imię**$\}$ tylko gdy PESELe są w rzeczywistości unikalne (nie są).

Aksjomaty Armstronga Zależności Funkcyjnych

Aksjomaty Armstronga

Niech R będzie relacją lub zmienną relacyjną i niech $X, Y, Z \subseteq \mathrm{Attr}(R)$.

1. Jeśli $Y \subseteq X$ to $R \models X \to Y$,
2. Jeśli $R \models X \to Y$ to $R \models X \cup Z \to Y \cup Z$
3. Jeśli $R \models X \to Y$ i $R \models Y \to Z$ to $R \models X \to Z$.

Twierdzenie

Niech $\mathbf{R}$ będzie zmienną relacyjną. Niech $\mathcal{X}$ będzie zbiorem zależności funkcyjnych z których każda jest spełniona przez R. Wówczas $\mathbf{R}$ spełnia zależność funkcyjną $X \to Y$ wtedy i tylko wtedy gdy można ją wyprowadzić z zależności ze zbioru $\mathcal{X}$ przy pomocy reguł danych **aksjomatami Armstronga**.

Przykład Wyprowadzania Zależności Funkcyjnych

Jako przykład udowodnimy korzystając z **aksjomatów Armstronga** że jeśli $R \models X \rightarrow Y$ i $R \models X \rightarrow Z$ to $R \models X \rightarrow Y \cup Z$.

Dowód

$$\dfrac{\dfrac{R \models X \rightarrow Y}{R \models X \cup X \rightarrow X \cup Y}\,\mathbf{A2} \qquad \dfrac{R \models X \rightarrow Z}{R \models X \cup Y \rightarrow Y \cup Z}\,\mathbf{A2}}{R \models X \rightarrow Y \cup Z}\,\mathbf{A3}$$

Zauważmy że skorzystaliśmy tu z przemienności ($X \cup Y = Y \cup X$) oraz z idempotentości ($X \cup X = X$) operacji unii zbiorów.

Nieredukowalne Zależności Funkcyjne

Definicja

Zależność funkcyjną $X \rightarrow Y$ nazywamy **nieredukowalną w** R gdy

1. $R \models X \rightarrow Y$ i dla żadnego $Z \subsetneq X$ nie zachodzi $R \models Z \rightarrow Y$,
2. Y zawiera tylko jeden atrybut.

Wystarczalność Nieredukowalnych Zależności Funkcyjnych

Lemat

Następujące reguły można wyprowadzić z **aksjomatów Armstronga**:

1. $R \models X \rightarrow Y$ i $R \models X \rightarrow Z$ wtedy i tylko wtedy gdy $R \models X \rightarrow Y \cup Z$
2. Jeśli $X \subseteq X'$ i $R \models X \rightarrow Y$ to $R \models X' \rightarrow Y$.

Twierdzenie

Nietrudno zauważyć że gdy $R \models X \rightarrow Y$ to istnieje zbiór $\mathcal{S}$ zależności funkcyjnych nieredukowalnych w R taki że $R \models X \rightarrow Y$ można wyprowadzić z $\{R \models X' \rightarrow Y' \mid X' \rightarrow Y' \in \mathcal{S}\}$

Nadklucze

Definicja

Podzbiór X atrybutów zmiennej relacyjnej $\mathbf{R}$ nazywamy **nadkluczem** (*superkey*) zmiennej $\mathbf{R}$ gdy $\mathbf{R} \models X \rightarrow \mathrm{Attr}(R)$

Uwaga

Nadkluczem każdej zmiennej relacyjnej $\mathbf{R}$ jest $\mathrm{Attr}(\mathbf{R})$.

Klucze Kandydujące

Definicja

Klucz kandydujący X (*candidate key*) zmiennej relacyjnej $\mathbf{R}$ to minimalny **nadklucz** $\mathbf{R}$, tzn. $\mathbf{R} \models X \rightarrow \mathsf{Attr}(R)$ i dla żadnego $Y \subsetneq X$ nie zachodzi $\mathbf{R} \models Y \rightarrow \mathsf{Attr}(R)$.

Uwaga

Każdy **nadklucz** X zawiera w sobie co najmniej jeden **klucz kandydujący**: albo X jest minimalny (a zatem jest **kluczem kandydującym**) albo istnieje $Y \subsetneq X$ t.ż Y jest nadkluczem. Powtarzając rozumowanie dla Y (i kolejnych jego podzbiorów) w końcu musimy uzyskać klucz kandydujący.

Definicja

Pierwszorzędny atrybut (**prime attribute**) zmiennej $\mathbf{R}$ to atrybut należący do pewnego **klucza kandydującego** $\mathbf{R}$.

Klucz Główny

Definicja

Jeden z kluczy kandydujących danej zmiennej $\mathbf{R}$ projektant bazy może wybrać jako **klucz główny** (*primary key*).

Uwaga

Klucz główny pełni specjalną rolę w zmiennej relacyjnej. Jest on kanonicznym identyfikatorem wiersza w tabeli wykorzystywanym m.in. w więzach referencyjnych.

Na zmiennej relacyjnej $\mathbf{R}$ można założyć więzy postaci

CHECK(ϕ)

każda krotka $t \in \mathbf{R}$ musi spełniać warunek ϕ zależny wyłącznie od t ale nie od innych krotek.

A NOT NULL

wartością atrybutu A nie może być **NULL**.

UNIQUE$(A_1, \ldots, A_n)$

dla każdych $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ jeśli $t_1.A_i \neq \mathbf{NULL}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ i $t_1|_{\{A_1,\ldots,A_n\}} = t_2|_{\{A_1,\ldots,A_n\}}$ to $t_1 = t_2$.

- **UNIQUE**$(A_1, \ldots, A_n)$ z A_i **NOT NULL**, $i \in \{1, \ldots, n\}$, deklaruje że $\{A_1, \ldots, A_n\}$ jest **nadkluczem** $\mathbf{R}$

PRIMARY KEY$(A_1, \ldots, A_n)$

deklaruje że $\{A_1, \ldots, A_n\}$ jest **kluczem głównym** $\mathbf{R}$ (choć warunek minimalności nie jest sprawdzany)

Przykład Deklaracji Więzów w SQL

```
CREATE TABLE Products (
    vendor VARCHAR(30),
    productId INTEGER,
    -- NOT NULL jest zawsze umieszczany razem z atrybutem
    productName INTEGER NOT NULL,
    -- gdy wiąz odwołuje się tylko do jednego atrybutu
    -- można go zdefiniować razem z atrybutem
    unitPrice NUMBER(6,2) NOT NULL CHECK(unitPrice > 0),
    quantity INTEGER NOT NULL CHECK(quantity >= 0),
    price NUMBER(6,0) NOT NULL,
    -- więzy odwołujące się do więcej niż jednego atrybutu
    -- muszą być zdefiniowane osobno
    PRIMARY KEY(vendor,productId),
    UNIQUE(vendor,productName),
    CHECK(price = unitPrice * quantity)
);
```

Więzy Referencyjne

Przypuśćmy że $\mathbf{S}$ jest zmienną relacyjną dla której określono wiąz klucza głównego poleceniem **PRIMARY KEY**$(A_1, \ldots, A_n)$. Wówczas następujący wiąz referencyjny na zmiennej $\mathbf{R}$:

FOREIGN KEY$(B_1, \ldots, B_n)$ **REFERENCES** $\mathbf{R}(A_1, \ldots, A_n)$

deklaruje że dla każdej krotki $t \in \mathbf{R}$ zachodzi **jeden** z następujących warunków:

- $t.B_i = \mathbf{NULL}$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, n\}$
- istnieje $t' \in \mathbf{S}$ takie że $t'.A_i = t.B_i$ dla $i \in \{1, \ldots, n\}$.

- Zbiór atrybutów $\{B_1, \ldots, B_n\}$ nazywany jest **kluczem obcym**
- Dana zmienna relacyjna może może posiadać więcej niż jeden wiąz referencyjny.

Więzy Referencyjne a Związki Pomiędzy Tabelami

- Więzy referencyjne wyrażają związki pomiędzy krotkami z różnych tabel.
- Większość typowych złączeń to złączenia równościowe na atrybutach **klucza obcego** jednej tabeli i odpowiadających atrybutach **klucza głównego** drugiej.

Przypuśćmy że $X \subseteq \mathrm{Attr}(R)$ jest kluczem obcym wskazującym na zmienną S. Załóżmy dla uproszczenia że kluczem głównym S jest także X. Wówczas

- W ogólności wiąz referencyjny wyraża związek 1 do wielu: każdemu $t \in S$ odpowiada 0 lub więcej $t' \in R$ t.ż. $t|_X = t'|_X$.
- Gdy na R założony jest dodatkowo wiąz **UNIQUE**(X) wówczas wiąz referencyjny wyraża relację 1 do co najwyżej 1: każdemu $t \in S$ odpowiada co najwyżej jeden $t' \in R$ t.ż. $t|_X = t'|_X$.
- Relacja 1 do 1 pomiędzy krotkami R i S wymaga by X w obu tabelach było zarówno kluczem kandydującym i obcym
- Relacja wiele do wielu wymaga zastosowania pośredniej tabeli.

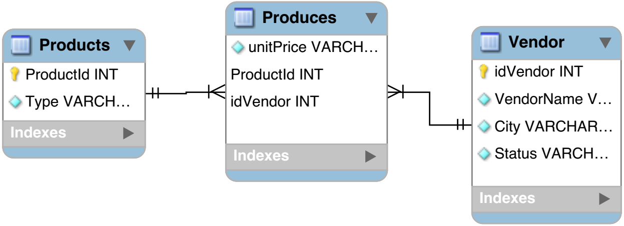
Przykład Deklaracji Schematu Bazy

```sql
CREATE TABLE Products (
  ProductId INTEGER NULL PRIMARY KEY,
  Type VARCHAR(45) NOT NULL
);

CREATE TABLE Produces (
  unitPrice NUMERIC(6,2) NOT NULL,
  ProductId INTEGER,
  idVendor INTEGER,
  PRIMARY KEY (ProductId, idVendor),
  FOREIGN KEY (ProductId) REFERENCES Products (ProductId),
  FOREIGN KEY (idVendor) REFERENCES Vendor(idVendor)
);

CREATE TABLE Vendor (
  idVendor INTEGER,
  VendorName VARCHAR(45) UNIQUE,
  City VARCHAR(45) NOT NULL,
  Status VARCHAR(45) NOT NULL,
  PRIMARY KEY (idVendor)
);
```

Przykład Diagramu Bazy



- Wykonany w programie SQL Workbench.
- Zwrócić uwagę na zastosowanie kruczych stóp po stronie "wiele" (czyli tam gdzie jest atrybut **klucz obcy**.
- Zmienna relacyjne **Produces** implementuje tu relację wiele do wielu pomiędzy **Products** a **Vendor** — każdy produkt jest produkowany przez wielu producentów, a każdy producent produkuje wiele produktów.

Modyfikacje Wskazywanych Tabel

```
CREATE TABLE Vend (
  VendId INTEGER PRIMARY KEY,
  VendName VARCHAR(30)
);
```

```
CREATE TABLE Prod (
  ProdId INTEGER PRIMARY KEY,
  VendId INTEGER REFERENCES Vend
);
```

Przypuśćmy że skasowaliśmy wiersz t z tabeli **Vend** lub zmodyfikowaliśmy wartość atrybutu **VendId** w krotce $t \in \mathbf{Vend}$. Co zrobić z krotkami $t' \in \mathbf{Prod}$ dla których $t.\mathbf{VendId} = t'.\mathbf{VendId}$? Można albo zabronić operacji, albo

- w przypadku **DELETE** usunąć także odpowiadające krotki $t' \in \mathbf{Prod}$,
- w przypadku **UPDATE** zmodyfikować także wartość atrybutu. $\mathbf{VendId}$ w odpowiednich krotkach $t' \in \mathbf{Prod}$.

Anomalie Modyfikacji

Supplies spełnia
$\{\#S, \#P\} \to \{QTY\}$,
$\{\#S\} \to \{City\}$

PRIMARY KEY$(\#S, \#P)$

Supplies

#S	**City**	**#P**	**QTY**
S1	London	P1	300
S1	London	P2	200
S1	London	P3	400
S1	London	P4	200
S1	London	P5	100
S1	London	P6	100
S2	Paris	P1	300
S2	Paris	P2	400
S3	Paris	P2	200
S4	London	P2	200
S4	London	P4	300
S4	London	P5	400

Dla tabeli $\mathbf{Supplies}$ mogą wystąpić **anomalie modyfikacji**, czyli trudności związane z operacjami:

- **INSERT** — nie można wstawić do $\mathbf{Supplies}$ danych dostawcy (np. $(S5, Athens)$) który niczego jeszcze nie dostarcza.
- **DELETE** — skasowanie ostatniej krotki z informacjami o dostawach pewnego dostawcy (np. S3) usuwa także informację o tym dostawcy (np. że S3 ma siedzibę w Paryżu co ciągle jest prawdą)
- **UPDATE** — ta sama informacja o siedzibie dostawcy x (atrybut $\mathbf{City}$) musi się powtarzać w każdej krotce t dla której $t.\#S = x$. Zatem gdy x zmienia siedzibę musimy zmodyfikować tę informację w wielu krotkach jednocześnie.

Przyczyny Anomalii Modyfikacji

Supplies spełnia
$\{\#S, \#P\} \to \{QTY\}$,
$\{\#S\} \to \{City\}$
PRIMARY KEY(#S, #P)

Supplies

#S	City	#P	QTY
S1	London	P1	300
S1	London	P2	200
S1	London	P3	400
S1	London	P4	200
S1	London	P5	100
S1	London	P6	100
S2	Paris	P1	300
S2	Paris	P2	400
S3	Paris	P2	200
S4	London	P2	200
S4	London	P4	300
S4	London	P5	400

Przyczyną anomalii modyfikacji

jest umieszczanie w jednej zmiennej relacyjnej informacji dotyczących wielu różnych „obiektów", a w konsekwencji powtarzanie tych samych informacji w wielu krotkach. Symptomem obecności w jednej tabeli $\mathbf{R}$ danych dotyczących wielu obiektów jest spełnianie przez $\mathbf{R}$ zależności funkcyjnych postaci $X \to Y$ gdzie X nie jest nadkluczem a $Y \not\subseteq X$.

Przykład

Tabela $\mathbf{Supplies}$ zawiera dane zarówno o dostawcach jak i dostawach. Symptomem tego jest zależność funkcyjna $\{\#S\} \to \{City\}$ spełniana przez $\mathbf{Supplies}$: #City zależy od #S a nie od całego klucza kandydującego.

Usuwanie Anomalii Modyfikacji (Normalizacja)

Suppliers

#S	City
S1	London
S2	Paris
S3	Paris
S4	London

SP

#S	#P	QTY
S1	P1	300
S1	P2	200
S1	P3	400
S1	P4	200
S1	P5	100
S1	P6	100
S2	P1	300
S2	P2	400
S3	P2	200
S4	P2	200
S4	P4	300
S4	P5	400

Normalizacja

Anomalie modyfikacji usuwamy **normalizując** schemat bazy: zastępując każdą ze zmiennych relacyjnych dla których występują takie anomalie (zmienne takie nazywamy **nieznormalizowanymi**) dwoma lub więcej tabelami nie wykazującymi anomalii (każda z nich zawiera dane dotyczące tylko jednego rodzaju „obiektu”).

Przykład

Należy zastąpić zmienną $\mathbf{Supplies}$ dwiema tabelami: $\mathbf{Suppliers} := \pi_{\{\#\mathsf{S},\mathsf{City}\}}(\mathbf{Supplies})$ i $\mathbf{SP} := \pi_{\{\#\mathsf{S},\#\mathsf{P},\mathsf{QTY}\}}(\mathbf{Supplies})$. Można pokazać że $\mathbf{Supplies} = \mathbf{Suppliers} \bowtie \mathbf{SP}$, zatem nowa baza ma tą samą zawartość informacyjną.

Postać Normalna Boyca/Codda (BCNF)

Jak widać z poprzedniego przykładu jedną z oznak redundancji w zmiennej relacyjnej $\mathbf{R}$ jest spełnianie przez $\mathbf{R}$ nietrywialnych zależności funkcyjnych $X \rightarrow Y$ dla których X nie jest nadkluczem $\mathbf{R}$.

Definicja

Mówimy że zmienna relacyjna $\mathbf{R}$ jest w **postaci normalnej Boyca/Codda (BCNF)** wtedy i tylko wtedy gdy dla każdej zależności funkcyjnej $X \rightarrow Y$ spełnianej przez $\mathbf{R}$ mamy że albo $Y \subseteq X$ (zależność jest trywialna) albo X jest nadkluczem $\mathbf{R}$.

- Gdy $\mathbf{R}$ jest w postaci **BCNF** wówczas w większości przypadków jest wolna od **anomalii modyfikacji**.
- Gdy $\mathbf{R}$ nie jest w postaci **BCNF** wówczas powinno się zastąpić $\mathbf{R}$ kilkoma zmiennymi relacyjnymi których wartości są wynikami projekcji $\mathbf{R}$ na odpowiednie podzbiory atrybutów.
- Powstaje pytanie czy możliwy jest taki wybór projekcji który gwarantuje że dane przechowywane w $\mathbf{R}$ można odzyskać z nowych zmiennych dokonując ich naturalnego złączenia?

Bezstratna Dekompozycja Zmiennych Relacyjnych

Definicja

Niech $X_i \subseteq \mathrm{Attr}(\mathbf{R})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru atrybutów zmiennej relacyjnej $\mathbf{R}$ taką że $\mathrm{Attr}(\mathbf{R}) = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} X_i$. Mówimy że $\mathbf{R}$ można **bezstratnie podzielić** pomiędzy projekcje $\pi_{X_i}(\mathbf{R})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdej legalnej wartości $\mathbf{R}$ zachodzi $\mathbf{R} = \pi_{X_1}(\mathbf{R}) \bowtie \cdots \bowtie \pi_{X_n}(\mathbf{R})$.

Twierdzenie (Heath'a)

Przypuśćmy że zmienna relacyjna $\mathbf{R}$ spełnia zależność funkcyjną $X \rightarrow Y$. Oznaczmy $\bar{Y} := \mathrm{Attr}(R) \setminus Y$. Wówczas dla dowolnej legalnej wartości $\mathbf{R}$ mamy $\mathbf{R} = \pi_{X \cup Y}(\mathbf{R}) \bowtie \pi_{X \cup \bar{Y})}(\mathbf{R})$.

Dowód Twierdzenia Heath'a

Twierdzenie (Heath'a)

Przypuśćmy że zmienna relacyjna $\mathbf{R}$ spełnia zależność funkcyjną $X \to Y$. Oznaczmy $\bar{Y} := \mathsf{Attr}(R) \setminus Y$. Wówczas dla dowolnej legalnej wartości $\mathbf{R}$ mamy $\mathbf{R} = \pi_{X \cup Y}(\mathbf{R}) \bowtie \pi_{X \cup \bar{Y})}(\mathbf{R})$.

Oznaczmy $Z := X \cup Y$, $Z' = X \cup \bar{Y}$. Wtedy $\mathsf{Attr}(\mathbf{R}) = Z \cup Z'$. Ponieważ $t = t|_Z \bowtie t|_{Z'} \in \pi_Z(\mathbf{R}) \bowtie \pi_{Z'}(\mathbf{R})$ dla każdego $t \in \mathbf{R}$ stąd $R \subseteq \pi_Z(\mathbf{R}) \bowtie \pi_{Z'}(\mathbf{R})$. Aby wykazać zawieranie w przeciwną stronę przypuśćmy teraz że $t \in \pi_Z(\mathbf{R}) \bowtie \pi_{Z'}(\mathbf{R})$. Wtedy istnieją $t', t'' \in \mathbf{R}$ takie że

- $t'|_X = t''|_X$ (zauważmy że $Z \cap Z' = X$)
- $t = (t'|_Z) \bowtie (t''|_{Z'})$.

Ponieważ $\mathbf{R} \models X \to Y$ więc z $t'|_X = t''|_X$ mamy $t'|_Z = t''|_Z$. Stąd $t = (t'|_Z) \bowtie (t''|_{Z'}) = (t''|_Z) \bowtie (t''|_{Z'}) = t'' \in \mathbf{R}$.

Dekompozycja Zmiennej Do Postaci BCNF

Mając daną tabelę $\mathbf{R}$ i zbiór $\mathcal{F}$ wszystkich zależności funkcyjnych spełnianych przez $\mathbf{R}$ postępujemy (w uproszczeniu) następująco:

- Jeśli istnieje jakiś $X \rightarrow Y \in \mathcal{F}$ taki taki że $Y \not\subseteq X$ i X nie jest nadkluczem, wówczas należy zastąpić zmienną $\mathbf{R}$ dwiema zmiennymi o wartościach równych projekcjom $\pi_{X \cup Y}(\mathbf{R})$ i $\pi_{X \cup (\mathtt{Attr}(\mathbf{R}) \setminus Y)}(\mathbf{R})$.
  - W razie potrzeby, zmienne te dzielić dalej.
- Jeśli taki $X \rightarrow Y$ nie istnieje oznacza to że $\mathbf{R}$ jest w **BCNF**

Proces (bezstratnego) zastępowania zmiennych relacyjnych ich odpowiednimi projekcjami w celu uzyskania sytuacji w której wszystkie tabele bazy znajdują się w odpowiedniej postaci normalnej (tu: **BCNF**) nazywa się **normalizacją** lub **sprowadzaniem do postaci normalnej**.

Jest jasne że algorytm powyższy nie określa ostatecznych projekcji jednoznacznie. Istnieją oczywiście rozkłady lepsze i gorsze.

Przykład Niejednoznacznej Dekompozycji

Rozważmy zmienną relacyjną $\mathbf{R}$ dla której

$$\mathsf{Attr}(\mathbf{R}) = \{\#R, A, K\}, \quad \mathbf{R} \models \{\#R\} \rightarrow \{K\}, \quad \mathbf{R} \models \{K\} \rightarrow \{A\}$$

(z aksjomatów Armstronga otrzymujemy z powyższych zależności że $\mathbf{R} \models \{\#R\} \rightarrow \mathsf{Attr}(R)$, tzn. $\{\#R\}$ jest **kluczem kandydującym $\mathbf{R}$**)

$\mathbf{R}$ nie jest w **BCNF** (z powodu $\mathbf{R} \models \{K\} \rightarrow \{A\}$).

Możemy rozbić R na dwie projekcje (w **BCNF**) na dwa sposoby:

$\pi_{\{\#R,A\}}(\mathbf{R})$ i $\pi_{\{\#R,K\}}(\mathbf{R})$

Nowe zmienne relacyjne spełniać będą jedynie zależności funkcyjne $\{\#R\} \rightarrow \{A\}$, $\{\#R\} \rightarrow \{K\}$. Zależność $\{K\} \rightarrow \{A\}$ została utracona.

$\pi_{\{\#R,K\}}(\mathbf{R})$ i $\pi_{\{K,A\}}(\mathbf{R})$

Nowe zmienne relacyjne spełniać będą zarówno $\{\#R\} \rightarrow \{K\}$ jak i $\{K\} \rightarrow \{A\}$. Wszystkie oryginalne zależności funkcyjne zostały odzwierciedlone w nowej bazie.

Dekompozycje Zachowujące Zależności

Definicja

Niech $\mathbf{R}$ będzie zmienną relacyjną i niech $X, Y \subseteq \mathsf{Attr}(\mathbf{R})$ będą takie że $X \cup Y = \mathsf{Attr}(R)$. Mówimy że zmienne $\mathbf{R}_1 := \pi_X(\mathbf{R})$ i $\mathbf{R}_2 := \pi_Y(\mathbf{R})$ są **niezależne** wtedy i tylko wtedy gdy

- Każda zależność funkcyjna spełniana przez $\mathbf{R}$ jest konsekwencją logiczną zależności funkcyjnych spełnianych przez $\mathbf{R}_1$ i $\mathbf{R}_2$.
- $\mathsf{Attr}(\mathbf{R}_1) \cap \mathsf{Attr}(\mathbf{R}_2)$ jest kluczem kandydującym co najmniej jednej ze zmiennych $\mathbf{R}_1$ i $\mathbf{R}_2$.

- Jeśli zmienną $\mathbf{R}$ zamienimy na **niezależne projekcje**, wówczas nie tylko zostaną zachowane wszystkie dane przechowywane w $\mathbf{R}$ (wartość $\mathbf{R}$ można odzyskać wykonując złączenie projekcji) ale również wszystkie zależności funkcyjne spełniane przez $\mathbf{R}$ zostaną odzwierciedlone w zależnościach funkcyjnych spełnianych przez te projekcje.
- Niestety istnieją zmienne nie będące w BCNF dla których nie istnieją niezależne projekcje i dla których zatem normalizacja skończy się utratą nie tyle danych co zależności w danych

Tabela Nie Normalizowalna Bez Utraty Zależności

R

Student	Subject	Teacher
Smith	Math	Prof. White
Smith	Physics	Prof. Green
Jones	Math	Prof. White
Jones	Physics	Prof. Brown

Zależności funkcyjne na $\mathbf{R}$:
$\{Student, Subject\} \rightarrow \{Teacher\}$,
$\{Teacher\} \rightarrow \{Subject\}$

- $\mathbf{R}$ nie jest w BCNF (z uwagi na czerwoną zależność funkcyjną)
- Niestety żadne projekcje z $\mathbf{R}$ nie zachowują wszystkich zależności funkcyjnych. $\mathbf{R}$ jest przykładem zmiennej relacyjnej której nie uda się znormalizować do BCNF zachowując zależności funkcyjne.
- $\mathbf{R}$ jest natomiast w **trzeciej postaci normalnej**
- **3NF** choć dopuszcza więcej anomalii modyfikacji niż BCNF jest często stosowana w praktyce jako wystarczająca.

Trzecia Postać Normalna

Definicja

Zmienna relacyjna $\mathbf{R}$ znajduje się w **trzeciej postaci normalnej** (**3NF**) wówczas gdy dla każdej zależności funkcyjnej $X \to Y$ spełnianej przez $\mathbf{R}$ zachodzi jeden z warunków:

- X jest nadkluczem $\mathbf{R}$,
- $Y \subseteq X$,
- Każdy atrybut $A \in Y \setminus X$ jest **pierwszorzędny** (czyli jest elementem jakiegoś **klucza kandydującego $\mathbf{R}$**).

Twierdzenie

Dla dowolnej zmiennej relacyjnej zawsze istnieje rozkład na zmienne relacyjne w **3NF** dokonany przy pomocy ciągu niezależnych projekcji (a zatem zachowujący zależności funkcyjne).

Zależności Wielowartościowe. Przykład

CTX

Course	**Teacher**	**Text**
Physics	Prof. Green	Basic Mechanics
Physics	Prof. Green	Principles of Optics
Physics	Prof. Brown	Basic Mechanics
Physics	Prof. Brown	Principles of Optics
Math	Prof. Green	Basic Mechanics
Math	Prof. Green	Vector Analysis
Math	Prof. Green	Trigonometry

Zmienna relacyjna **CTX** przechowuje informacje o kursach, wykładowcach i podręcznikach przewidzianych dla danego kursu. Przypuśćmy że **CTX** nie spełnia żadnych nietrywialnych zależności funkcyjnych, natomiast dla każdego przedmiotu (który może być nauczany przez więcej niz jednego wykładowcę istnieje ustalony, niezależny od wykładowcy zbiór podręczników.

Zależności Wielowartościowe. Przykład cd.

Innymi słowy, dla każdych krotek

Course	Teacher	Text
c	*a*	*x*
c	*b*	*y*

$\subseteq \mathbf{CTX}$

także

Course	Teacher	Text
c	*a*	*y*
c	*b*	*x*

$\subseteq \mathbf{CTX}$

Mówimy że **CTX** spełnia **zależność wielowartościową** $\{\mathbf{Course}\} \twoheadrightarrow \{\mathbf{Text}\}$ (równoważnie $\{\mathbf{Course}\} \twoheadrightarrow \{\mathbf{Teacher}\}$) co zapisujemy $\mathbf{CTX} \models \{\mathbf{Course}\} \twoheadrightarrow \{\mathbf{Text}\}$

Zależności Wielowartościowe. Przykład cd.

CTX

Course	**Teacher**	**Text**
Physics	Prof. Green	Basic Mechanics
Physics	Prof. Green	Principles of Optics
Physics	Prof. Brown	Basic Mechanics
Physics	Prof. Brown	Principles of Optics
Math	Prof. Green	Basic Mechanics
Math	Prof. Green	Vector Analysis
Math	Prof. Green	Trigonometry

Nietrudno zauważyć że zależność wielowartościowa $\{\mathbf{Course}\} \twoheadrightarrow \{\mathbf{Text}\}$ na **CTX** powoduje **anomalie modyfikacji** na **CTX** pomimo że **CTX** jest w **BCNF** (i tym samym w **3NF**).

Przykład Anomalii Modyfikacji na CTX

Zmieniając tytuł książki „Basic Mechanics" na „Advanced Mechanics" dla kursu prowadzonego przez prof. Green'a, trzeba to samo zrobić dla kursu fizyki prowadzonego przez prof. Brown'a.

Zależności Wielowartościowe. Przykład cd.

Łatwo widać, że (dzięki zależności wielowartościowej $\{\mathbf{Course}\} \twoheadrightarrow \{\mathbf{Text}\}$) można rozbić zmienną relacyjną **CTX** bez utraty danych na dwie zmienne **CT** i **CX**, których wartości powinny być odpowiednimi projekcjami z **CTX**. Oryginalną wartość **CTX** można odzyskać jako złączenie $\mathbf{CT} \bowtie \mathbf{CX}$.

CT

Course	**Teacher**
Physics	Prof. Green
Physics	Prof. Brown
Math	Prof. Green

CX

Course	**Text**
Physics	Basic Mechanics
Physics	Principles of Optics
Math	Basic Mechanics
Math	Vector Analysis
Math	Trigonometry

Ogólna Definicja Zależności Wielowartościowych

Definicja

Niech $\mathbf{R}$ będzie zmienną relacyjną i niech $X, Y \subseteq \mathrm{Attr}(\mathbf{R})$. Oznaczmy $\bar{Y} := \mathrm{Attr}(\mathbf{R}) \setminus (X \cup Y)$. Wówczas

$$\mathbf{R} \models X \twoheadrightarrow Y$$

($\mathbf{R}$ spełnia **zależność wielowartościową** $X \twoheadrightarrow Y$) wtedy i tylko wtedy gdy dla każdej legalnej wartości $\mathbf{R}$, jeśli $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ są krotkami takimi że $t_1|_X = t_2|_X$ wówczas istnieją również krotki $t_3, t_4 \in \mathbf{R}$ takie że

$$t_3|_X = t_4|_X = t_1|_X,$$
$$t_3|_Y = t_1|_Y, \quad t_4|_Y = t_2|_Y, \quad t_3|_{\bar{Y}} = t_2|_{\bar{Y}}, \quad t_4|_{\bar{Y}} = t_1|_{\bar{Y}}.$$

Własności Zależności Wielowartościowych

Niech $\mathbf{R}$ będzie zmienną relacyjną i niech $X, Y \subseteq \mathrm{Attr}(\mathbf{R})$.
Oznaczmy $\bar{Y} := \mathrm{Attr}(\mathbf{R}) \setminus (X \cup Y)$. Wówczas:

Twierdzenie

- Jeśli $\mathbf{R} \models X \to Y$ to $\mathbf{R} \models X \twoheadrightarrow Y$ (Czyli zależności funkcyjne są szczególnym rodzajem zależności wielowartościowych)
- $\mathbf{R} \models X \twoheadrightarrow Y$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{R} \models X \twoheadrightarrow \bar{Y}$
- $\mathbf{R} \models X \twoheadrightarrow Y$ jeśli $X \cup Y = \mathrm{Attr}(\mathbf{R})$ (czyli $\bar{Y} = \emptyset$)

Twierdzenie Fagina (uogólnia Twierdzenie Heatha)

$\mathbf{R} = \pi_{X \cup Y}(\mathbf{R}) \bowtie \pi_{X \cup \bar{Y}}(\mathbf{R})$ dla każdej legalnej wartości $\mathbf{R}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{R} \models X \twoheadrightarrow Y$.

Czwarta Postać Normalna (4NF)

Definicja

Mówimy że zmienna relacyjna $\mathbf{R}$ jest w **czwartej postaci normalnej** (**4NF**) wtedy i tylko wtedy gdy zawsze gdy $\mathbf{R} \models X \twoheadrightarrow Y$ wówczas albo X jest **nadkluczem** $\mathbf{R}$, albo $X \supseteq Y$, albo $X \cup Y = \mathrm{Attr}(\mathbf{R})$.

Twierdzenie

Każda zmienna relacyjna która jest w **4NF** jest równiez w **BCNF**.

Istnieją zmienne relacyjne w **BCNF** które nie są w **4NF**.

Normalizacja do 4NF

Dzięki **Twierdzeniu Fagina** każdą zmienną relacyjną która nie jest w **4NF** można rozbić sukcesywnymi projekcjami na mniejsze tabele z których każda jest w **4NF**.