Podstawy sztucznej inteligencji AI

Lab 2

Przykład

Niech X={0, 20, 40, 60, 80} oraz

$$A = \frac{1}{0} + \frac{0,6}{20} + \frac{0,1}{40}$$

Zbiór rozmyty *A* odpowiada określeniu „młody”.

Wówczas zbiór:

$$CON(A) = \frac{1}{0} + \frac{0,36}{20} + \frac{0,01}{40}$$

możemy interpretować jako „bardzo młody”.

Natomiast zbiór:

$$CON(CON(A)) = \frac{1}{0} + \frac{0,13}{20}$$

możemy interpretować jako „bardzo, bardzo młody”.

Przykład (wnioskowanie w otoczeniu rozmytym)

4-osobowa rodzina chce kupić mieszkanie. Bierzemy pod uwagę dwa kryteria: cenę i wielkość (ilość pokoi). Cenę opisujemy zbiorem:

$$C = \frac{0,2}{1} + \frac{0,5}{2} + \frac{0,8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0,7}{5} + \frac{0,3}{6}$$

Wielkość mieszkania opisujemy zbiorem rozmytym:

$$W = \frac{0,2}{3} + \frac{0,4}{4} + \frac{0,6}{5} + \frac{0,8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

Mieszkanie atrakcyjne cenowo i jednocześnie duże opisywane jest zbiorem rozmytym:

$$C \cap W = \frac{0,2}{3} + \frac{0,4}{4} + \frac{0,6}{5} + \frac{0,3}{6}$$

t-normy

Przecięcie zbiorów rozmytych $A,B \subseteq X$ określiliśmy jako zbiór rozmyty $A \cap B$ o funkcji przynależności:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$$

Zamiast funkcji min możemy użyć dowolnej t-normy, tzn. funkcji T takiej że:

1. T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c)) (łączność)
2. T(a, b) = T(b, a) (przemienność)
3. T(a, b) ≤ T(d, c) dla a ≤ d, b ≤ c (monotoniczność)
4. T(a, 1) = a (warunek brzegowy)

Wprowadzamy oznaczenie:

$$T(a,b) = a \overset{T}{*} b$$

t-normy

Nazwa operatora	wzór
minimum (MIN)	$\boxed{\mu_{A\cap B}(x) = MIN[\mu_A(x), \mu_B(x)]}$
iloczyn algebr.	$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$
iloczyn Hamachera	$\mu_{A\cap B}(x) = \frac{\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)}{\mu_A(x)+\mu_B(x)-2\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)}$
iloczyn Einsteina	$\mu_{A\cap B}(x) = \frac{\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)}{2-(\mu_A(x)+\mu_B(x)-2\mu_A(x)\cdot\mu_B(x))}$
iloczyn drastyczny	$\mu_{A\cap B}(x) = \begin{cases} MIN[\mu_A(x), \mu_B(x)] \text{ dla } MAX[\mu_A(x), \mu_B(x)] = 1, \\ 0 \text{ poza tym} \end{cases}$
iloczyn ograniczony	$\mu_{A\cap B}(x) = MAX[0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1]$

s -normy

Sumę zbiorów rozmytych $A,B \subseteq X$ określiliśmy jako zbiór rozmyty $A \cup B$ o funkcji przynależności

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$$

Zamiast funkcji max można wziąć dowolna s-normę, tzn. dowolna funkcje spełniająca warunki:

1. S(S(a, b), c) = S(a, S(b, c)) (łączność)
2. S(a, b) = S(b, a) (przemienność)
3. S(a, b) $\leq$ S(d, c) dla a $\leq$ d, b $\leq$ c (monotoniczność)
4. S(a, 0) = a (warunek brzegowy)

Wprowadzamy oznaczenie:

$$S(a,b) = a \overset{S}{*} b$$

Operatory s -normy

Nazwa operatora	wzór
maksimum (MAX)	$\mu_{A \cup B}(x) = MAX[\mu_A(x), \mu_B(x)]$
suma algebr.	$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$
suma Hamachera	$\mu_{A \cup B}(x) = \frac{\mu_A(x)+\mu_B(x)-2\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)}{1-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)}$
suma Einsteina	$\mu_{A \cup B}(x) = \frac{\mu_A(x)+\mu_B(x)}{1+\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)}$
suma drastyczna	$\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} MAX[\mu_A(x), \mu_B(x)] \text{ dla } MIN[\mu_A(x), \mu_B(x)] = 0, \\ 1 \text{ poza tym} \end{cases}$
suma ograniczona	$\mu_{A \cup B}(x) = MIN[1, \mu_A(x) + \mu_B(x)]$

Relacje rozmyte

Zbiory rozmyte pozwalają nam operować nieprecyzyjnym sformułowaniami

temperatura wody odpowiednia do kąpieli

szybki samochód

Zajmiemy się teraz relacjami rozmytymi.
Relacje takie pozwalają sprecyzować nieprecyzyjne sformułowania np.

x jest znacznie mniejsze od y

zdarzenie x miało miejsce dużo wcześniej niż zdarzenie y

Definicja

Relacją rozmytą R między dwoma niepustymi zbiorami (nierozmytymi) X i Y nazywamy następujący zbiór rozmyty określony w iloczynie kartezjańskim X $\times$Y:

$$R = \{((x,y),\mu_R(x,y))\} \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y$$

gdzie:

$$\mu_R : X \times Y \to [0,1]$$

jest funkcją przynależności do relacji R.

Oznaczenia:

$$R = \sum_{X\times Y} \frac{\mu_R(x,y)}{(x,y)} \qquad\qquad R = \int_{X\times Y} \frac{\mu_R(x,y)}{(x,y)}$$

Przykład

Niech X={3,4,5} i Y={4,5}.

Rozważmy następującą relację rozmytą:

$$R = \frac{0{,}8}{(3{,}4)} + \frac{0{,}3}{(3{,}5)} + \frac{1}{(4{,}4)} + \frac{0{,}8}{(4{,}5)} + \frac{0{,}8}{(5{,}4)} + \frac{1}{(5{,}5)}$$

Relację tą możemy interpretować jako reprezentację zdania "x jest mniej więcej równe y".

Funkcja przynależności dla tej relacji

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1 & dla \quad x = y \\ 0{,}8 & dla \quad |x-y| = 1 \\ 0{,}3 & dla \quad |x-y| = 2 \end{cases}$$

Przykład (cd)

Relację:

$$R = \frac{0{,}8}{(3{,}4)} + \frac{0{,}3}{(3{,}5)} + \frac{1}{(4{,}4)} + \frac{0{,}8}{(4{,}5)} + \frac{0{,}8}{(5{,}4)} + \frac{1}{(5{,}5)}$$

możemy zapisać za pomocą macierzy:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

gdzie $x_1=3$, $x_2=4$, $x_3=5$ oraz $y_1=4$, $y_2=5$.

Złożenie relacji

Niech X, Y i Z będą zbiorami nierozmytymi.

Rozważmy dwie relacje rozmyte:

R⊆X×Y z funkcją przynależności $\mu_R(x,y)$

S⊆Y×Z z funkcją przynależności $\mu_S(y,z)$

Definicja

Złożeniem typu sup-T relacji rozmytych R i S nazywamy relację rozmytą R∘S⊆X×Z określoną następującą funkcją przynależności:

$$\mu_{R\circ S}(x,z) = \sup_{y\in Y}\{\mu_R(x,y) \overset{T}{*} \mu_S(y,z)\}$$

gdzie T jest operatorem t–normy.

Przykład

Jeżeli T(a, b)=min{a, b} wówczas otrzymujemy:

$$\mu_{R\circ S}(x,z) = \sup_{y\in Y}\{\min\{\mu_R(x,y),\mu_S(y,z)\}\}$$

(tzw. złożenie typu sup-min)

Jeżeli zbiór Y ma skończoną liczbę elementów wówczas

$$\mu_{R\circ S}(x,z) = \max_{y\in Y}\{\min\{\mu_R(x,y),\mu_S(y,z)\}\}$$

(tzw. złożenie typu max-min)

Przykład

Rozważmy dwie relacje rozmyte:

$$R = \begin{bmatrix} 0,3 & 1 \\ 0,6 & 0,7 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 0,4 & 1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,8 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie X={1, 2}, Y={3, 4}, Z={5, 6,7}

Złożenie typu max-min relacji *R* i *S* ma postać:

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0,3 & 1 \\ 0,6 & 0,7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0,4 & 1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Przykład (cd)

Korzystając ze wzoru

$$\mu_{R\circ S}(x,z) = \max_{y\in Y}\{\min\{\mu_R(x,y),\mu_S(y,z)\}\}$$

Znajdujemy wartości a_{ij}:

$$a_{11} = \max\{\min\{0,3;0,4\};\min\{1;0,3\}\} = 0,3$$

$$a_{12} = \max\{\min\{0,3;1\};\min\{1;0,8\}\} = 0,8$$

$$a_{13} = \max\{\min\{0,3;0,4\};\min\{1;1\}\} = 1$$

$$a_{21} = \max\{\min\{0,6;0,4\};\min\{0,7;0,3\}\} = 0,4$$

$$a_{22} = \max\{\min\{0,6;1\};\min\{0,7;0,8\}\} = 0,7$$

$$a_{23} = \max\{\min\{0,6;0,4\};\min\{0,7;1\}\} = 0,7$$

Ostatecznie:

$$R\circ S = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,8 & 1 \\ 0,4 & 0,7 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Złożenie relacji - własności

1	$R \circ I = I \circ R = R$
2	$R \circ O = O \circ R = O$
3	$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
4	$R^m \circ R^n = R^{m+n}$
5	$(R^m)^n = R^{mn}$
6	$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$
7	$R \circ (S \cap T) = (R \circ S) \cap (R \circ T)$
8	$S \subset T \Rightarrow R \circ S \subset R \circ T$

Przykład

Rozważmy relacje rozmyte $R \subseteq X \times Y$, $I \subseteq Y \times Z$, $O \subseteq Y \times Z$:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie $X=\{x_1, x_2\}$, $Y=\{y_1, y_2\}$, $Z=\{z_1, z_2\}$

Złożenie typu max-min relacji R i I ma postać

$$R \circ I = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \max\{\min\{r_{11}, 1\}, \min\{r_{12}, 0\}\} & \max\{\min\{r_{11}, 0\}, \min\{r_{12}, 1\}\} \\ \max\{\min\{r_{21}, 1\}, \min\{r_{22}, 0\}\} & \max\{\min\{r_{21}, 0\}, \min\{r_{22}, 1\}\} \end{bmatrix} =$$

Przykład (cd)

czyli

$$R \circ I = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = R$$

Złożenie typu max-min relacji R i O ma postać

$$R \circ O = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \max\{\min\{r_{11}, 0\}, \min\{r_{12}, 0\}\} & \max\{\min\{r_{11}, 0\}, \min\{r_{12}, 0\}\} \\ \max\{\min\{r_{21}, 0\}, \min\{r_{22}, 0\}\} & \max\{\min\{r_{21}, 0\}, \min\{r_{22}, 0\}\} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

Złożenie zbioru rozmytego i relacji rozmytej

Rozważmy:

zbiór rozmyty A$\subseteq$X z funkcją przynależności $\mu_A(x)$

relację rozmytą R$\subseteq$X $\times$Y z funkcją przynależności $\mu_R(x,y)$

Definicja

Złożenie zbioru rozmytego A i relacji rozmytej R definiujemy jako zbiór rozmyty B= A$\circ$R $\subseteq$Y określony następująco

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X}\{\mu_A(x) \overset{T}{*} \mu_R(x,y)\}$$

gdzie T jest operatorem t–normy.

Złożenie zbioru rozmytego i relacji rozmytej (cd)

Jeżeli T(a, b)=min{a, b} wówczas otrzymujemy:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X}\{\min\{\mu_A(x), \mu_R(x, y)\}\}$$

(tzw. złożenie typu sup-min)

Jeżeli T(a, b)= a·b wówczas otrzymujemy:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X}\{\mu_A(x) \cdot \mu_R(x, y)\}$$

(tzw. złożenie typu sup-product)

Przykład

Niech X={x_1, x_2, x_3}, Y={y_1, y_2}.

Rozważmy zbiór rozmyty A:

$$A = \frac{0{,}2}{x_1} + \frac{0{,}4}{x_2} + \frac{0{,}6}{x_3}$$

oraz relację rozmytą *R* określoną macierzą:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ 1 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Przykład

Rozważmy złożenie A○R typu sup-min.

Rezultatem takiego złożenia jest zbiór rozmyty B postaci:

$$B = \frac{\mu_B(y_1)}{y_1} + \frac{\mu_B(y_2)}{y_2}$$

gdzie:

$$\mu_B(y_1) = \max\{\min\{0{,}2; 0{,}1\}; \min\{0{,}4; 1\}; \min\{0{,}6; 0{,}7\}\} = 0{,}6$$

$$\mu_B(y_1) = \max\{\min\{0{,}2; 0{,}2\}; \min\{0{,}4; 0{,}3\}; \min\{0{,}6; 1\}\} = 0{,}6$$

Zatem:

$$B = \frac{0{,}6}{y_1} + \frac{0{,}6}{y_2}$$

Definicja

Rozszerzeniem cylindrycznym zbioru A⊆X w zbiór X×Y nazywamy:

$$ce(A) = \int_{X\times Y} \frac{\mu_A(x)}{(x,y)}$$

Definicja

Projekcją zbioru rozmytego A⊆X×Y na przestrzeń Y nazywamy:

$$proj\ A\ na\ Y = \int_{y\in Y} \frac{\sup\limits_{x\in X} \mu_A(x,y)}{y}$$

Korzystając z powyższych definicji złożenie zbioru rozmytego A i relacji rozmytej R definiujemy jako zbiór rozmyty $B=A\circ R\subseteq Y$ określony następująco:

$$B = A \circ R = proj\ \{ce(A) \cap R\}\ na\ Y$$

Przykład

Niech $X=\{x_1, x_2, x_3\}$, $Y=\{y_1, y_2\}$.

$$\mathrm{A} = \frac{0,2}{\mathrm{x}_1} + \frac{0,4}{\mathrm{x}_2} + \frac{0,6}{\mathrm{x}_3} \qquad \mathrm{R}= \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 1 & 0,3 \\ 0,7 & 1 \end{bmatrix}$$

Wówczas:

$$B = A \circ R = \frac{0,6}{y_1} + \frac{0,6}{y_2}$$

$$B = A \circ R = proj\ \{ce(A) \cap R\}\ na\ Y$$

$$\mathrm{A} = \frac{0{,}2}{\mathrm{x}_1} + \frac{0{,}4}{\mathrm{x}_2} + \frac{0{,}6}{\mathrm{x}_3}$$

Policzmy:

$$ce(A) = \frac{0{,}2}{(x_1, y_1)} + \frac{0{,}2}{(x_1, y_2)} + \frac{0{,}4}{(x_2, y_1)} + \frac{0{,}4}{(x_2, y_2)} + \frac{0{,}6}{(x_3, y_1)} + \frac{0{,}6}{(x_3, y_2)}$$

$$R = \frac{0{,}1}{(x_1, y_1)} + \frac{0{,}2}{(x_1, y_2)} + \frac{1}{(x_2, y_1)} + \frac{0{,}3}{(x_2, y_2)} + \frac{0{,}7}{(x_3, y_1)} + \frac{1}{(x_3, y_2)}$$

Wówczas:

$$ce(A) \cap R = \frac{0{,}1}{(x_1, y_1)} + \frac{0{,}2}{(x_1, y_2)} + \frac{0{,}4}{(x_2, y_1)} + \frac{0{,}3}{(x_2, y_2)} + \frac{0{,}6}{(x_3, y_1)} + \frac{0{,}6}{(x_3, y_2)}$$

$$B = A \circ R = proj\ \{ce(A) \cap R\}\ na\ Y$$

$$ce(A) \cap R = \frac{0{,}1}{(x_1, y_1)} + \frac{0{,}2}{(x_1, y_2)} + \frac{0{,}4}{(x_2, y_1)} + \frac{0{,}3}{(x_2, y_2)} + \frac{0{,}6}{(x_3, y_1)} + \frac{0{,}6}{(x_3, y_2)}$$

Ostatecznie:

$$proj\ \{ce(A) \cap R\}\ na\ Y = \frac{0{,}6}{y_1} + \frac{0{,}6}{y_2}$$

Wcześniej otrzymaliśmy:

$$B = A \circ R = \frac{0{,}6}{y_1} + \frac{0{,}6}{y_2}$$