Zadanie 2-2. Algorytm Strassena mnożenia macierzy $C = AB$ wymiaru $n \times n$ zapisanych blokowo w postaci:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

gdzie A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} są podmacierzami $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ odpowiednich macierzy, ma postać:

1. obliczamy pomocnicze iloczyny:

$$\begin{aligned} M_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}), & M_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11}, \\ M_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}), & M_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}), \\ M_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22}, & M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}), \\ M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}), \end{aligned}$$

2. obliczamy wynikowe podmacierze:

$$\begin{aligned} C_{11} &= M_1 + M_4 - M_5 + M_7, & C_{12} &= M_3 + M_5, \\ C_{21} &= M_2 + M_4, & C_{22} &= M_1 - M_2 + M_3 + M_6. \end{aligned}$$

Udowodnij poprawność algorytmu (tj. pokaż, że otrzymamy $C = AB$).

Wyznacz asymptotyczną złożoność (rząd wzrostu) rekurencyjnej postaci algorytmu mierzoną liczbą mnożeń elementów macierzowych przyjmując za parametr określający rozmiar zadania stopień macierzy, czyli n.

Wskazówka: Wykorzystaj następujące

Twierdzenie 1 (o rekurencji uniwersalnej)**.** *Niech funkcja $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie zdefiniowana następująco*

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & 0 \leqslant n < b \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n), & n \geqslant b \end{cases}$$

dla $a \geqslant 0$, $b > 1$, $n \geqslant 0$ oraz $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Wtedy:

- $\exists_{\epsilon>0} f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon}) \implies T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$*;*
- $\exists_{k\geqslant 0} f(n) = \Theta(n^{\log_b a}(\log n)^k) \implies T(n) = \Theta(n^{\log_b a}(\log n)^{k+1})$*;*
- $\exists_{\epsilon>0} f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}) \land \exists_{0<c<1}\exists_{n_0\geqslant 0}\forall_{n\geqslant n_0}\, af(\frac{n}{b}) \leqslant cf(n) \implies T(n) = \Theta(f(n))$.