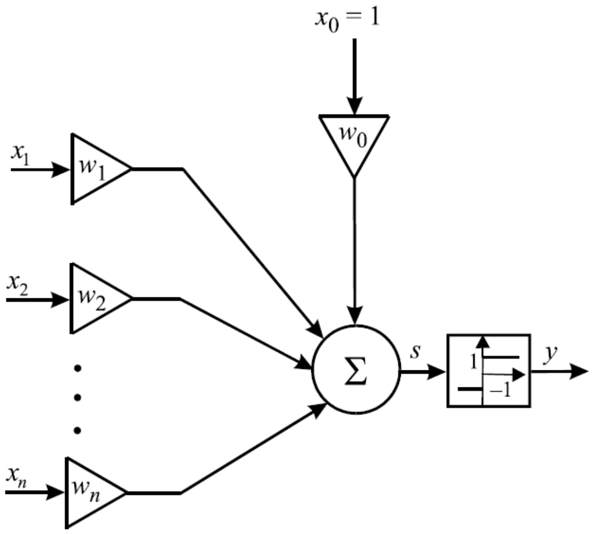
PAI zadania 5

Perceptron

Struktura:



- *n* wejść: x_0=1 (bias), x_1, x_2,…, x_n
- 1 wyjście: y

$$y = f(\sum_{i=1}^{n} x_i w_i + \theta)$$

gdzie θ, w_1,…, w_n (w_0 jest oznaczane przez θ) są wagami i

$$f(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ -1, & s \le 0 \end{cases}$$

jest *funkcją aktywacji*.

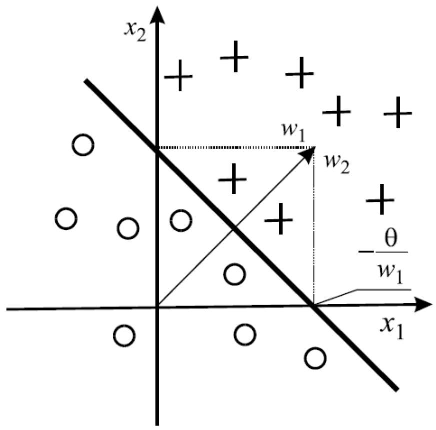
- Perceptron może klasyfikować "obiekty" które należą do dwóch liniowo separowalnych zbiorów.

Dla *n*=2 zbiory te są separowalne przez linię prostą:

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + \theta = 0$$

Wówczas:

$$x_2 = -\frac{w_1}{w_2} x_1 - \frac{\theta}{w_2}$$



W celu nauczenia percepronu klasyfikacji musimy użyć pewnego ciągu uczącego tzn. zbioru $D=\{(\boldsymbol{x}_1,d_1),\ldots,(\boldsymbol{x}_m,d_m)\}$ m przykładów gdzie:

- $\boldsymbol{x}_j$ – jest n-wymiarowym wektorem wejść.
- d_j – jest wartością oczekiwaną na wyjściu dla wektora $\boldsymbol{x}_j$.

Algorytm uczenia:

1. Nadaj wartości początkowe wagom θ, $w_1,\ldots, w_n$. Wagi mogą być początkowo równe 0 lub wybrane losowo.
2. Dla każdego elementu $(\boldsymbol{x}_j,d_j)$ z ciągu uczącego :
   a. Oblicz y.
   b. Jeżeli klasyfikacja jest poprawna ($y=d_j$), nic nie rób.
   c. Jeżeli klasyfikacja nie jest poprawna ($y\neq d_j$), wówczas zmodyfikuj wszystkie wagi: $w_i = w_i + d_j x_{ji}$
3. Powtarzaj tę procedurę aż wszystkie $\boldsymbol{x}_i$ będą zaklasyfikowane poprawnie.

Zadanie 1

Napisz program będący implementacją perceptronu dla poniższego ciągu uczącego:

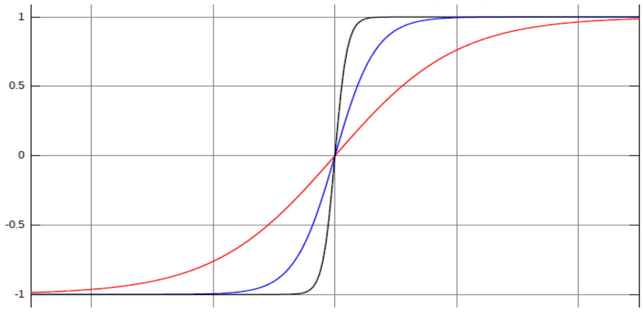
x_1	x_2	d
2	1	1
2	2	1
0	6	1
-2	10	-1
-2	0	-1
0	0	-1
4	-20	-1

Po nauczeniu znajdź równanie prostej decyzyjnej.

Neuron Hebba

Funkcja aktywacji bipolarna:

$$f(x) = \frac{1 - \exp(-\beta x)}{1 + \exp(-\beta x)}$$



Uczenie polega na znalezieniu wag minimalizujących błąd:

$$E = \frac{1}{2}(d - f(\sum_{i=o}^{n} x_i w_i))^2$$

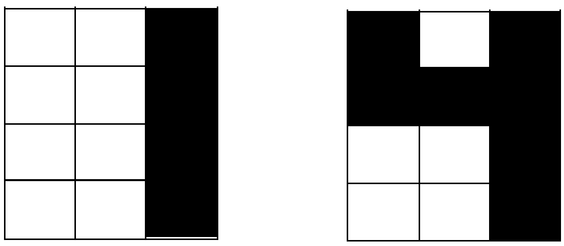
Modyfikacja wag: $w_i = w_i + \eta d x_i$

gdzie $\eta \in [0,1]$ jest *współczynnikiem uczenia.*
Algorytm uczenia:

1. Nadaj wartości początkowe wagom θ, $w_1, \ldots, w_n$. Wagi mogą być początkowo równe 0 lub wybrane losowo.
2. Dla każdego elementu ($\boldsymbol{x}_j$,d_j) z ciągu uczącego :
   a. Oblicz y.
   b. Zmodyfikuj wszystkie wagi.
   c. Policz błąd E.
3. Jeżeli błąd sumaryczny dla całej epoki nie jest mniejszy od założonego E_{MAX} wówczas wróć do pkt 2.

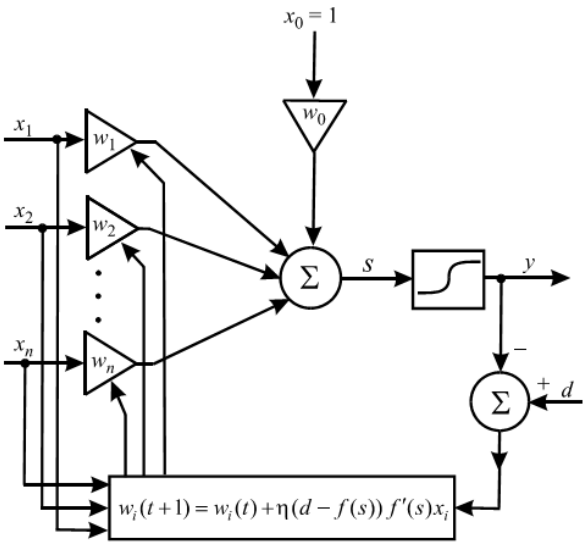
Zadanie 2

Napisz program dla neuronu Hebba rozpoznającego dwie cyfry:



Przetestuj działanie programu dla 3 różnych zestawów wartości hiperparametrów. Wygeneruj wykresy zmian błędu i oceń działanie programu.

Neuron sigmoidalny z unipolarną funkcją aktywacji



Unipolarna funkcja aktywacji:

$$f\left(x\right) = \frac{1}{1 + e^{-\beta x}}$$

Wyjście neuronu:

$$y\left(t\right) = f\left(\sum_{i=0}^{n} w_i\left(t\right) x_i\left(t\right)\right).$$

Uczenie polega na znalezieniu wag minimalizujących błąd:

$$Q\left(\mathbf{w}\right) = \frac{1}{2}\left[d - f\left(\sum_{i=0}^{n} w_i x_i\right)\right]^2$$

Modyfikacja wag:

$$w_i(t+1) = w_i(t) - \eta \delta x_i = w_i(t) + \eta(d - f(s)) f'(s) x_i.$$

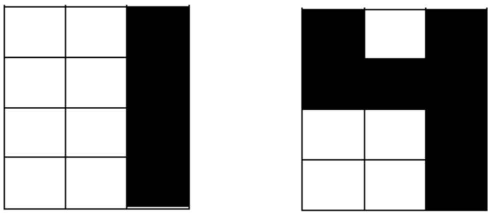
gdzie $\eta \in [0,1]$ jest *współczynnikiem uczenia.*
Pochodna:

$$f'(x) = \beta f(x)(1 - f(x))$$

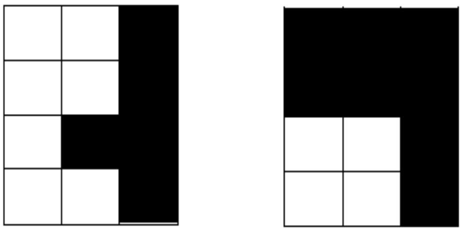
Algorytm uczenia taki jak dla neuronu Hebba.

Zadanie 3

Napisz program dla neuronu **sigmoidalny z unipolarną funkcją aktywacji** rozpoznającego dwie cyfry:

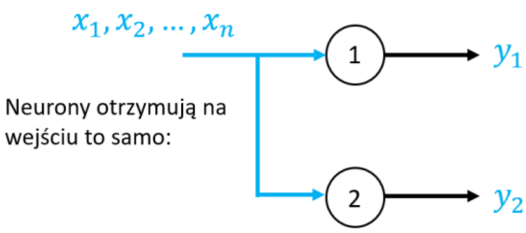


Przetestuj działanie programu dla 3 różnych zestawów wartości hiperparametrów. Wygeneruj wykresy zmian błędu i oceń działanie programu.
Po nauczeniu sprawdź, jak są klasyfikowane następujące obrazki:

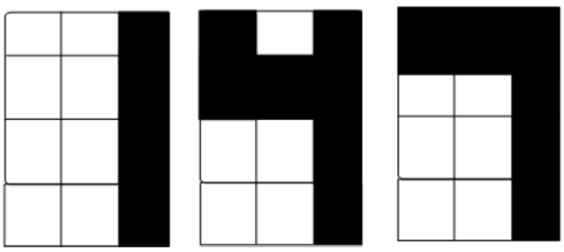


Zadanie 4

Sieć jednowarstwowa złożona z dwóch neuronów unipolarnych:



rozpoznająca cyfry:



Czy powyższa sieć może być wykorzystana do rozpoznania czterech cyfr, np. cyfr 1,4,7,0? Odpowiedź uzasadnij. Jeżeli jest pozytywna zmodyfikuj program i sprawdź, jak przebiega proces uczenia.

Przetestuj działanie programu dla 3 różnych zestawów wartości hiperparametrów. Wygeneruj wykresy zmian błędu i oceń działanie programu.