Podstawy sztucznej inteligencji AI

Lab 1

Określenia precyzyjne i „rozmyte”

Paweł zarabia 5 tys. złotych.

Paweł kupił 2 kg jabłek.

Paweł ma 25 lat.

Paweł w ciągu wakacji 3 dni spędził nad morzem.

Określenia precyzyjne

Paweł zarabia dużo.

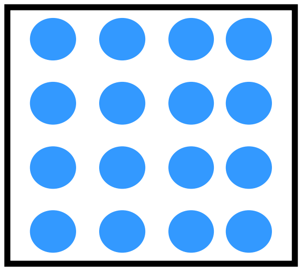
Paweł kupił trochę jabłek.

Paweł jest młody.

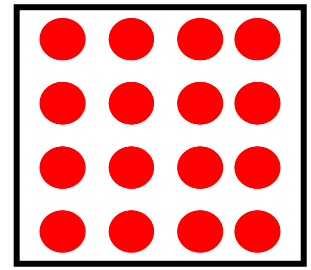
Paweł w ciągu wakacji był krótko nad morzem.

Określenia nieprecyzyjne

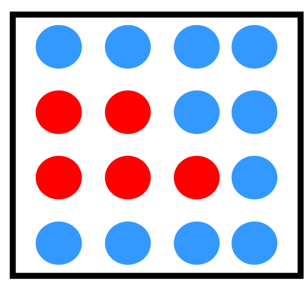
Rozmyty świat



Czy to jest pudełko
zawierające niebieskie kulki?

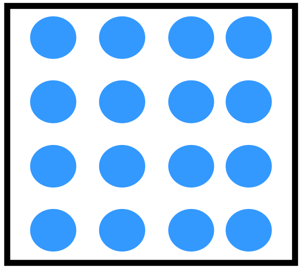


Czy to jest pudełko
zawierające czerwone kulki?

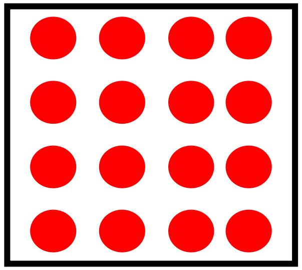


Czy to jest pudełko zawierające
niebieskie/czerwone kulki?

Brak rozmycia



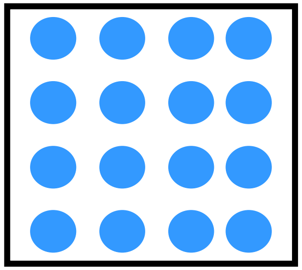
Brak czerwonych kulek → 0



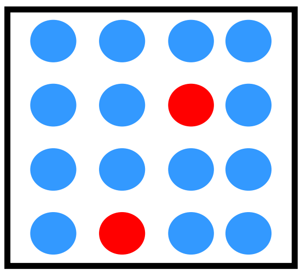
Tylko czerwone kulki → 1

Między stanami 0 i 1 możliwe są stany pośrednie....

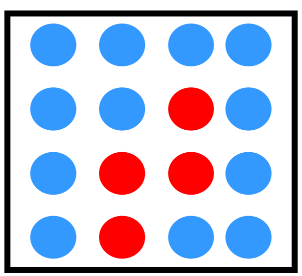
Rozmycie



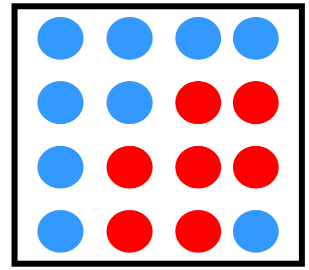
Pudełko **nie** zawiera czerwonych kulek (0).



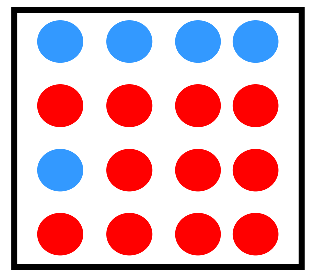
Pudełko zawiera **znikomą ilość** czerwonych kulek.



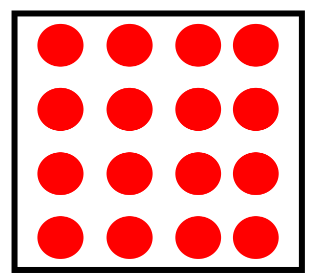
Pudełko zawiera **trochę** czerwonych kulek.



Pudełko zawiera **sporo** czerwonych kulek.



Pudełko zawiera **przeważnie** czerwone kulki.



Tak, pudełko zawiera **tylko** czerwone kulki (1).

Zbiory - powtórzenie

Zbiór to kolekcja, wielość obiektów.

Pojęcie zbioru jest podstawowe i niedefiniowalne.

Określenie zbioru musi być jednoznaczne w tym sensie, że musi być jasne czy dany konkretny obiekt należy do tego zbioru.

Obiekt który należy do zbioru jest nazywany elementem zbioru.

Zbiór definiujemy przez podanie jego elementów.

Przykład

$A = \{0, 10, -5, 7\}$

$B = \varnothing$

$C = \{\{1\},1,\{\{1\},\{3\}\}\}$

$D = \{x \in R: x > 4\}$

E = zbiór zielonych samochodów

F = zbiór latających słoni

W przypadku każdego z tych zbiorów łatwo określić czy dany obiekt/liczba należy do zbioru, czy nie należy.

$7 \in A$

$3 \notin D$

Zbiory rozmyte

Istnieją zbiory w przypadku których określenie przynależności danego konkretnego obiektu nie jest jednoznaczne.

Przykład

A = zbiór młodych ludzi

B = zbiór szybkich samochodów

C = zbiór wysokich drzew

W przypadku takich zbiorów możemy mówić o stopniu przynależności.

Można powiedzieć, że osoba w wieku 35 lat należy do zbioru A w większym stopniu niż osoba w wieku 80 lat.

Zbiory rozmyte

Dla ustalenia uwagi określmy tzw. przestrzeń (obszar) rozważań (ang. *the universe of discourse*). Nazywać go będziemy po prostu przestrzenią lub zbiorem rozważań i oznaczymy przez $X, Y, \ldots$.

Definicja

Zbiorem rozmytym A w pewnej (niepustej) przestrzeni X (co zapisujemy jako $A \subseteq X$) nazywamy zbiór par

$$A=\{(x, \mu_A(x)): x \in X\}$$

gdzie

$$\mu_A: X \to [0,1]$$

jest funkcją przynależności zbioru rozmytego A.

Funkcja μ_A każdemu elementowi $x \in X$ przypisuje jego stopień przynależności do zbioru rozmytego A.

Możemy wyróżnić 3 przypadki:

1) $\mu_A(x)=1$ oznacza pełną przynależność elementu x do zbioru rozmytego A, tzn. $x \in A$.

2) $\mu_A(x)=0$ oznacza brak przynależność elementu x do zbioru rozmytego A, tzn. $x \notin A$.

3) $0<\mu_A(x)<1$ oznacza częściową przynależność elementu x do zbioru rozmytego A.

Jeżeli X jest przestrzenią o skończonej liczbie elementów

$$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$$

To zbiór rozmyty A zapisujemy następująco:

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \cdots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}$$

Jeżeli X zawiera nieskończoną liczbę elementów to zbiór rozmyty $A \subseteq X$ symbolicznie zapisujemy jako

$$A = \int_X \frac{\mu_A(x)}{x}$$

Przykład

Niech X=N (zbiór liczb naturalnych)

Zbiór liczb naturalnych „bliskich liczbie 12” określamy następująco:

$$A = \frac{0,1}{9} + \frac{0,4}{10} + \frac{0,7}{11} + \frac{1}{12} + \frac{0,7}{13} + \frac{0,4}{14} + \frac{0,1}{15}$$

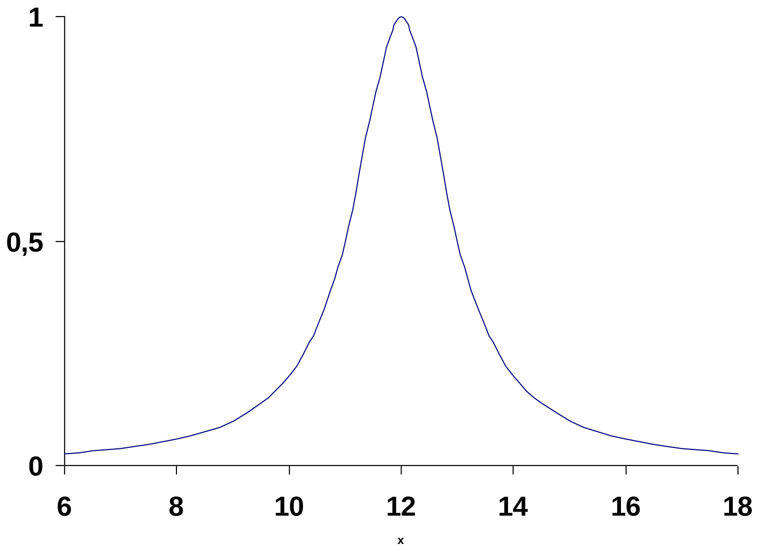
UWAGA: nie wypisujemy elementów dla których przynależność jest równa 0!!!

Przykład

Niech X=R (zbiór liczb rzeczywistych)

Zbiór liczb rzeczywistych „bliskich liczbie 12” (oznaczmy go przez A) określamy wykorzystując następującą funkcję przynależności:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+(x-12)^2}$$



Zatem

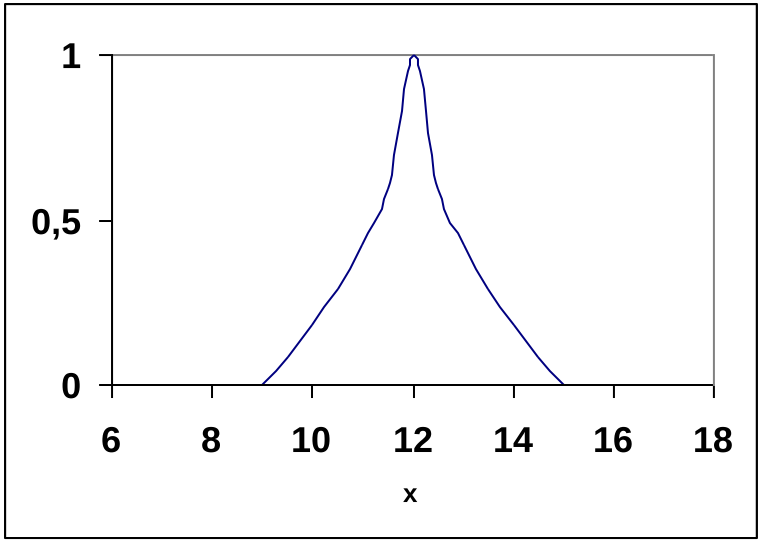
$$A = \int_X \frac{[1+(x-12)^2]^{-1}}{x}$$

Przykład

Niech X=R (zbiór liczb rzeczywistych)

Zbiory rozmyte liczb rzeczywistych „bliskich liczbie” 12 można też określić inaczej wykorzystując inną funkcję przynależności:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{\dfrac{|x-12|}{3}}, & 9 \le x \le 15 \\ 0 \quad , & w\ przeciwnym\ \ razie \end{cases}$$



Przykład

Sformalizujmy teraz określenie „temperatura wody odpowiednia do kąpieli”.

Zbiór rozważań:

X=[15, 16,..., 24, 25]

Zbiór rozmyty:

$$A = \frac{0,1}{16} + \frac{0,3}{17} + \frac{0,5}{18} + \frac{0,8}{19} + \frac{0,95}{20} + \frac{1}{21} + \frac{0,9}{22} + \frac{0,8}{23} + \frac{0,75}{24} + \frac{0,7}{25}$$

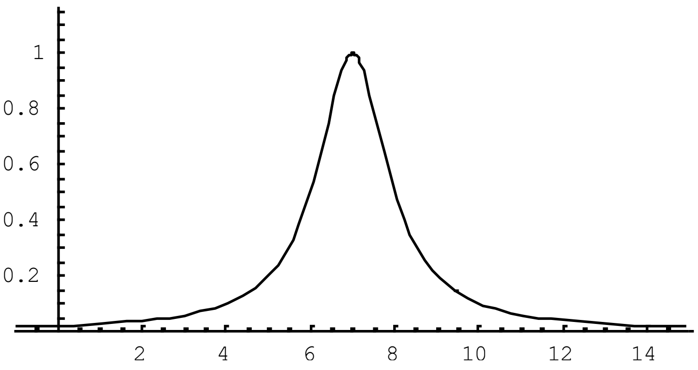
Inna możliwość:

$$A = \frac{0,1}{15} + \frac{0,2}{16} + \frac{0,4}{17} + \frac{0,7}{18} + \frac{0,9}{19} + \frac{1}{20} + \frac{0,9}{21} + \frac{0,85}{22} + \frac{0,8}{23} + \frac{0,75}{24} + \frac{0,7}{25}$$

Przykłady funkcji przynależności

Funkcja Gaussowska

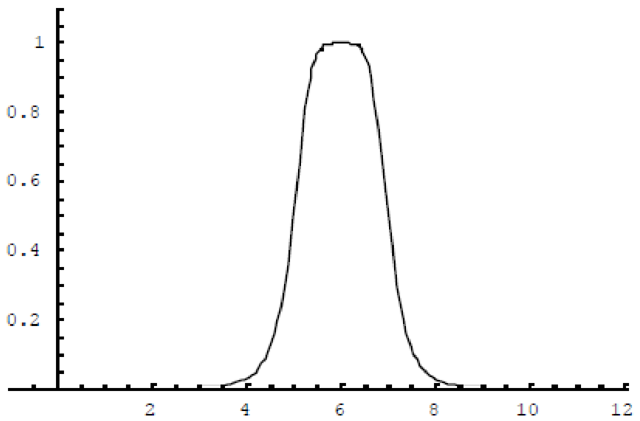
$$\mu_A(x) = \exp\left(-\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right)$$



gdzie $\bar{x}$ jest środkiem, a σ określa szerokość krzywej.

Funkcja typu dzwonowego

$$\mu_A(x;a,b,c) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

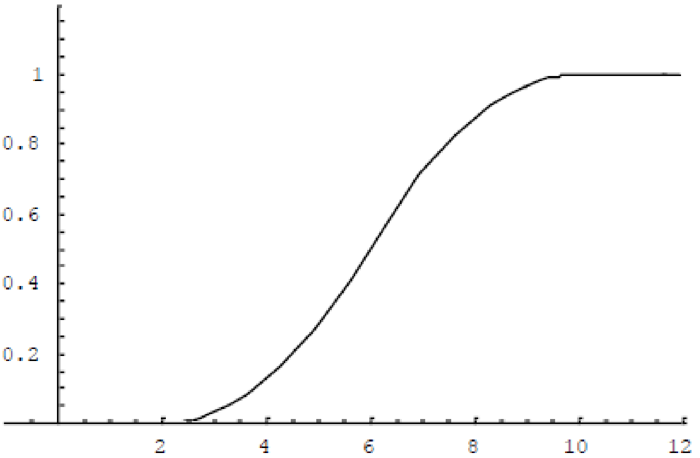


gdzie parametr a określa szerokość, b określa nachylenie, natomiast c określa środek.

Przykłady funkcji przynależności

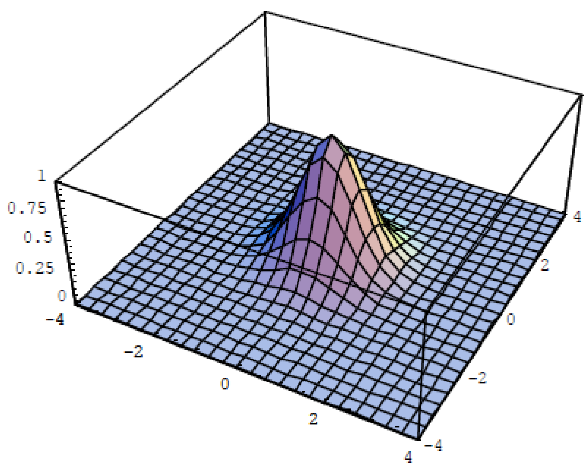
Funkcja klasy s

$$
s(x;\ a,\ b,\ c) = \begin{cases} 0 & dla \quad x \le a \\ 2\left(\dfrac{x-a}{c-a}\right)^2 & dla \quad a < x \le b \\ 1 - 2\left(\dfrac{x-c}{c-a}\right) & dla \quad b < x \le c \\ 1 & dla \quad x > c \end{cases}
$$



Funkcja radialna

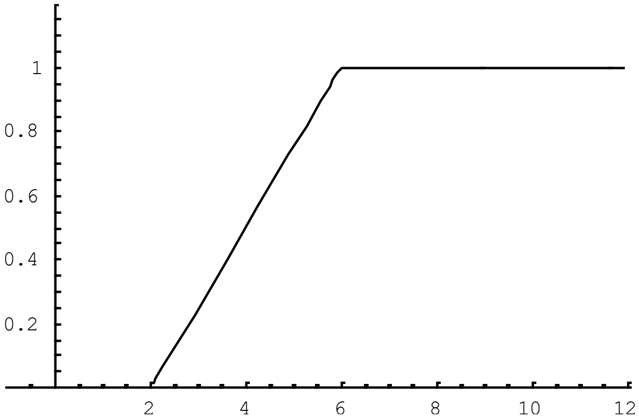
$$
\mu_A(x) = \exp\left(\frac{\|x - \bar{x}\|^2}{2\sigma^2}\right)
$$



Przykłady funkcji przynależności

Funkcja klasy γ

$$\gamma(x;\ a,\ b) = \begin{cases} 0 & dla \quad x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & dla \quad a < x \le b \\ 1 & dla \quad x > b \end{cases}$$



Funkcja singleton

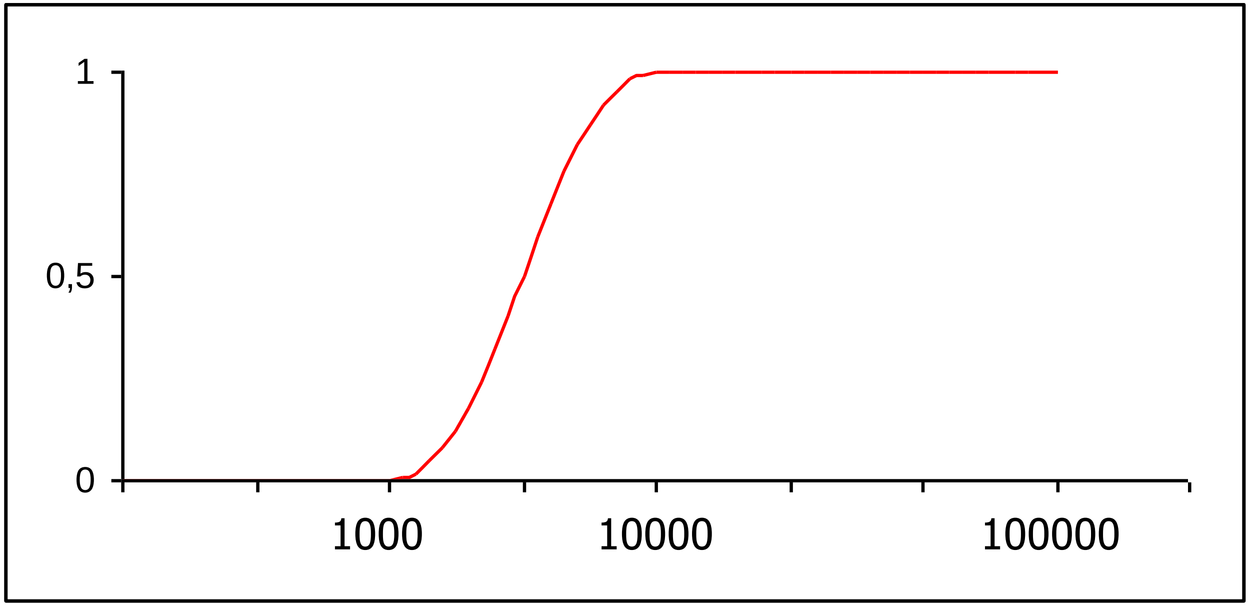
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & dla \quad x = \bar{x} \\ 0 & dla \quad x \ne \bar{x} \end{cases}$$

Do zbioru rozmytego A należy tylko $\bar{x}$.

Przykład

Niech X= [0, 100000 zł]

Funkcję przynależności zbioru rozmytego „dużo pieniędzy” możemy określić jako funkcję klasy s.



Nośnik zbioru rozmytego

Zbiór elementów przestrzeni X dla których $\mu_A(x)>0$ nazywamy **nośnikiem zbioru rozmytego** $A \subseteq X$. Formalnie:

$$\text{supp } A := \{ x \in X : \mu_A(x) > 0 \}$$

Przykład

Jeżeli X={1,2,3,4,5,6,7,8} oraz

$$A = \frac{0,2}{1} + \frac{0,4}{2} + \frac{0,6}{5} + \frac{0,3}{7}$$

wówczas

$$\text{supp } A = \{1, 2, 5, 7\}$$

Nośnik zbioru rozmytego

Wysokość zbioru rozmytego A oznaczamy przez h(A) i określamy jako:

$$h(A) := \sup_{x \epsilon X} \mu_A(x)$$

Przykład

Jeżeli X={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} oraz

$$A = \frac{0,2}{1} + \frac{0,4}{2} + \frac{0,6}{5} + \frac{0,3}{7}$$

wówczas

$$\mathrm{h(A)} = 0,6$$

Zbiór rozmyty normalny

Zbiór rozmyty A nazywamy normalnym wtedy i tylko wtedy gdy $\mathrm{h(A)=1}$. Zbiór, który nie jest normalny można znormalizować rozważając funkcję przynależności:

$$\mu_{A_{zn}}(x) = \frac{\mu_A(x)}{h(A)}$$

Przykład

Jeżeli X={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} oraz

$$\mathrm{A} = \frac{0{,}2}{1} + \frac{0{,}4}{2} + \frac{0{,}5}{5} + \frac{0{,}1}{7}$$

wówczas

$$\mathrm{h(A)} = 0{,}5$$

oraz

$$A_{zn} = \frac{0{,}4}{1} + \frac{0{,}8}{2} + \frac{1}{5} + \frac{0{,}2}{7}$$

Zbiór rozmyty pusty

Mówimy, że zbiór rozmyty A jest pusty (ozn. A=ø) wtedy i tylko wtedy

$$\text{supp } A := \emptyset$$

Podzbiór rozmyty

Mówimy, że zbiór rozmyty A jest podzbiorem zbioru B (ozn. A⊆B) wtedy i tylko wtedy

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

dla każdego $x \in X$.

Jeżeli $\mu_A(x) < \mu_B(x)$ (dla każdego $x \in X$) wówczas A jest podzbiorem właściwym B co zapisujemy $A \subset B$.

Przykład

$$X = \{4,5,6,7,8,9,10\}$$

Jeżeli:

$$A = \frac{0,1}{4} + \frac{0,4}{5} + \frac{0,7}{7} + \frac{1}{9} + \frac{0,4}{10}$$

$$B = \frac{0,5}{4} + \frac{0,4}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{0,9}{10}$$

Wówczas:

$$A \subseteq B$$

Jeżeli:

$$C = \frac{0,1}{4} + \frac{0,4}{5} + \frac{0,4}{6} + \frac{0,7}{7} + \frac{0,7}{8} + \frac{0,7}{9} + \frac{0,4}{10}$$

$$D = \frac{0,2}{4} + \frac{0,6}{5} + \frac{0,8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0,9}{8} + \frac{1}{9} + \frac{0,5}{10}$$

Wówczas:

$$C \subset D$$

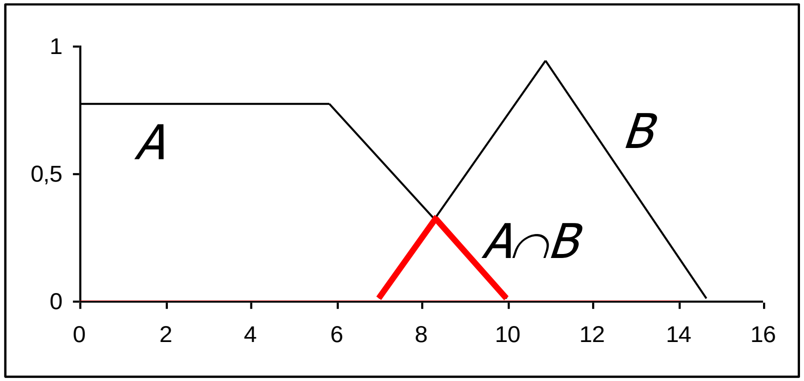
Operacje na zbiorach rozmytych

Przecięciem zbiorów rozmytych $A, B \subseteq X$ jest zbiór rozmyty oznaczony $A \cap B \subseteq X$ o funkcji przynależności:

$$\mu_{A \cap B}(x) := \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$$

W przypadku wielu zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ przecięcie określone jest następującą funkcją przynależności:

$$\mu_{A_1 \cap \ldots \cap A_n}(x) := \min\{\mu_{A_1}(x), \ldots, \mu_{A_n}(x)\}$$



Przykład

$$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

Jeżeli:

$$A = \frac{0,1}{2} + \frac{0,4}{4} + \frac{0,7}{7} + \frac{1}{9} + \frac{0,4}{10}$$

$$B = \frac{0,5}{1} + \frac{0,8}{4} + \frac{1}{7} + \frac{0,1}{8}$$

Wówczas:

$$A \cap B = \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{3} + \frac{0,4}{4} + \frac{0}{5} + \frac{0}{6} + \frac{0,7}{7} + \frac{0}{8} + \frac{0}{9} + \frac{0}{10}$$

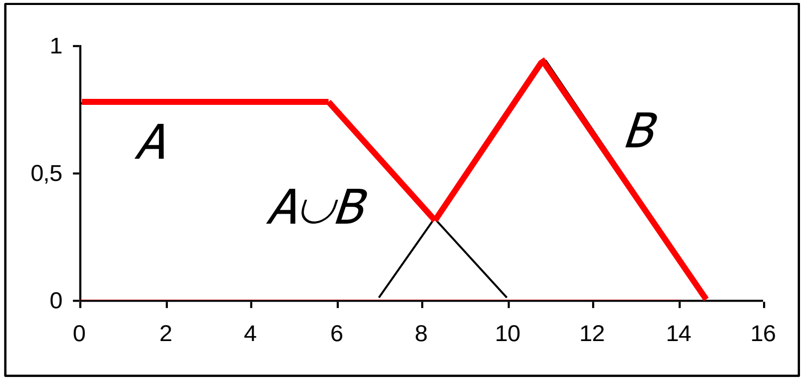
Operacje na zbiorach rozmytych

Sumą zbiorów rozmytych $A, B \subseteq X$ jest zbiór rozmyty oznaczony $A \cup B \subseteq X$ o funkcji przynależności:

$$\mu_{A \cup B}(x) := max\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$$

W przypadku wielu zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ suma określona jest następującą funkcją przynależności:

$$\mu_{A_1 \cup \ldots \cup A_n}(x) := \max\{\mu_{A_1}(x), \ldots, \mu_{A_n}(x)\}$$



Przykład

$$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

Jeżeli:

$$A = \frac{0,1}{2} + \frac{0,4}{4} + \frac{0,7}{7} + \frac{1}{9} + \frac{0,4}{10}$$

$$B = \frac{0,5}{1} + \frac{0,8}{4} + \frac{1}{7} + \frac{0,1}{8}$$

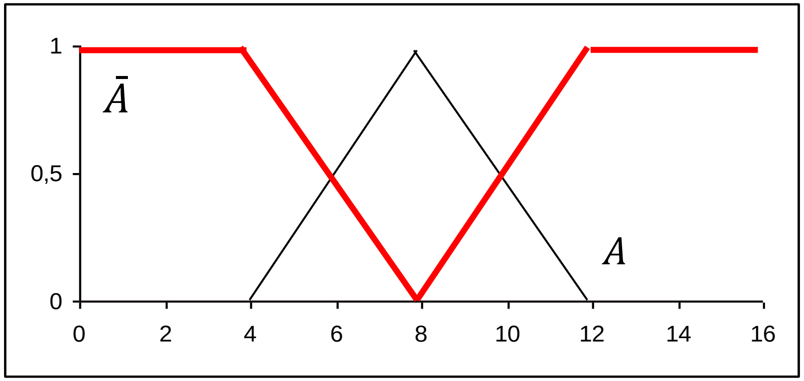
Wówczas:

$$A \cup B = \frac{0,5}{1} + \frac{0,1}{2} + \frac{0}{3} + \frac{0,8}{4} + \frac{0}{5} + \frac{0}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0,1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{0,4}{10}$$

Operacje na zbiorach rozmytych

Dopełnieniem zbioru rozmytego $A \subseteq X$ jest zbiór rozmyty $\bar{A}$ o funkcji przynależności:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



Przykład

Jeżeli X={1,2,3,4} oraz:

$$A = \frac{0,2}{1} + \frac{0,4}{2} + \frac{0,6}{4}$$

wówczas:

$$\bar{A} = \frac{0,8}{1} + \frac{0,6}{2} + \frac{0,4}{4} + \frac{1}{3}$$

Iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych

Iloczynem kartezjańskim zbiorów rozmytych $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$ nazywamy zbiór rozmyty $A \times B$ funkcji przynależności:

$$\mu_{A\times B}(x,y) := \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$$

gdzie $x \in X$ i $y \in Y$.

Przykład

Jeżeli $X = \{1,2,3,4,5\}, \mathrm{Y} = \{3,4,5\}$ oraz $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$ określone są następująco:

$$A = \frac{0{,}2}{1} + \frac{0{,}4}{2} + \frac{0{,}6}{5} \qquad B = \frac{0{,}4}{3} + \frac{0{,}3}{5}$$

wówczas

$$A \times B = \frac{0{,}2}{(1{,}3)} + \frac{0{,}2}{(1{,}5)} + \frac{0{,}4}{(2{,}3)} + \frac{0{,}3}{(2{,}5)} + \frac{0{,}4}{(5{,}3)} + \frac{0{,}3}{(5{,}5)}$$

Koncentracja zbioru rozmytego

Koncentrację zbioru rozmytego $A \subseteq X$ oznaczamy przez CON(A) i definiujemy jako

$$\mu_{CON(A)}(x) = (\mu_A(x))^2$$

gdzie $x \in X$.

Rozcieńczenie zbioru rozmytego

Rozcieńczenie zbioru rozmytego $A \subseteq X$ oznaczamy przez DIL(A) i definiujemy jako

$$\mu_{DIL(A)}(x) = (\mu_A(x))^{\frac{1}{2}}$$

gdzie $x \in X$.

Przykład

Jeżeli X={1,2,3,4,5} oraz $A = \frac{0{,}2}{1} + \frac{0{,}4}{2}$

Wówczas:

$$CON(A) = \frac{0{,}04}{1} + \frac{0{,}16}{2} \qquad DIL(A) = \frac{0{,}44}{1} + \frac{0{,}63}{2}$$