

**Zadanie 2-4.** Musimy wykonać  $n$  zadań, a wykonanie każdego z nich zajmuje czas  $t_i$  oraz  $m$  jednakowych maszyn, na których planujemy ich wykonanie. Zadań nie można rozdzielać pomiędzy maszyny. Dla danego planu, niech  $A_j$  będzie zbiorem zadań przypisanych do maszyny  $j$ , a  $T_j = \sum_{i \in A_j} t_i$  będzie czasem pracy maszyny  $j$ . Naszym celem jest znalezienie takiego przypisania zadań do maszyn, aby zminimalizować ramy czasowe wykonania planu, tj.  $T = \max_{1 \leq j \leq m} T_j$ .

Algorytm zachłanny polega na posortowaniu zadań tak, aby  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$  i iteracyjnym przypisaniu następnego zadania do maszyny z najmniejszym czasem pracy.

---

**Algorytm 1** Zachłanny algorytm planowania

---

**Require:**  $n, (t_1, t_2, \dots, t_n), m$

**Ensure:**  $T = \max_{1 \leq j \leq m} T_j$

```

SORT( $t_1, \dots, t_n$ )                                ▷ posortuj nierosnąco czasy zadań
for  $j \leftarrow 1, \dots, m$  do
     $A_j \leftarrow \emptyset$                                 ▷ maszyny nie mają przypisanych zadań
     $T_j \leftarrow 0$                                     ▷ maszyny nie mają obciążenia
end for
for  $i \leftarrow 1, \dots, n$  do
     $j \leftarrow \text{IMIN}(T_1, \dots, T_m)$                 ▷ znajdź maszynę z najmniejszym czasem pracy
     $A_j \leftarrow A_j \cup \{i\}$                             ▷ przypisz jej bieżące zadanie
     $T_j \leftarrow T_j + t_i$                                 ▷ zaktualizuj czas pracy  $j$ -tej maszyny
end for
 $T \leftarrow \text{MAX}(T_1, \dots, T_m)$                     ▷ znajdź maksymalne  $T_j$ 

```

Procedura SORT porządkuje (dowolnym efektywnym algorytmem) niemalejąco tablicę. Funkcja IMIN znajduje index najmniejszego elementu tablicy. Funkcja MAX zwraca największy element tablicy.

---

Niech  $T^*$  oznacza optymalne ramy czasowe wykonania planu. Udowodnij, że rozwiązanie  $T$  zwracane przez algorytm zachłanny spełnia

$$T \leq 2T^*.$$

**Wskazówka:** Skorzystaj z następujących oczywistych faktów:

$$T^* \geq \max_{1 \leq i \leq n} t_i,$$

$$T^* \geq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n t_i.$$