

# Złożoność obliczeniowa algorytmów

## Maszyny Turinga

Kordian A. Smoliński

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

2024/2025

# Maszyny Turinga

## Treść wykładu

- 1 Maszyna Turinga
  - Wprowadzenie
  - Definicja
  - Problem stopu
  - Pracowity bóbr
- 2 Uniwersalna maszyna Turinga
- 3 Zasoby i złożoność
  - Zasoby
  - Złożoność
  - Asymptotyczne tempo wzrostu
- 4 Niedeterministyczna maszyna Turinga
  - Złożoność

# Maszyna Turinga

## Wprowadzenie

Abstrakcyjny model maszyny liczącej:

# Maszyna Turinga

## Wprowadzenie

Abstrakcyjny model maszyny liczącej:

- prosty koncepcyjnie;

# Wprowadzenie

### Abstrakcyjny model maszyny liczącej:

- prosty koncepcyjnie;
- może przeprowadzić dowolne obliczenie wykonalne na innych maszynach;

# Maszyna Turinga

## Wprowadzenie

Abstrakcyjny model maszyny liczącej:

- prosty koncepcyjnie;
- może przeprowadzić dowolne obliczenie wykonalne na innych maszynach;
- dobrze modeluje zużycie zasobów.

# Maszyna Turinga

## Definicja

Maszyna Turinga (Alan Turing, 1937)

Teoretyczna maszyna licząca złożona z:

# Maszyna Turinga

## Definicja

### Maszyna Turinga (Alan Turing, 1937)

Teoretyczna maszyna licząca złożona z:

**taśmy** — nieskończonej linii komórek, którą można przesuwac w przód i w tył;



# Maszyna Turinga

## Definicja

### Maszyna Turinga (Alan Turing, 1937)

Teoretyczna maszyna licząca złożona z:

**taśmy** — nieskończonej linii komórek, którą można przesuwac w przód i w tył;

**głowicy** — elementu aktywnego, który może:

# Maszyna Turinga

## Definicja

### Maszyna Turinga (Alan Turing, 1937)

Teoretyczna maszyna licząca złożona z:

**taśmy** — nieskończonej linii komórek, którą można przesuwac w przód i w tył;

**głowicy** — elementu aktywnego, który może:

- znajdować się w jednym ze skończonej liczby **stanów**,

# Maszyna Turinga

## Definicja

### Maszyna Turinga (Alan Turing, 1937)

Teoretyczna maszyna licząca złożona z:

**taśmy** — nieskończonej linii komórek, którą można przesuwac w przód i w tył;

**głowicy** — elementu aktywnego, który może:

- znajdować się w jednym ze skończonej liczby **stanów**,
- zmieniać **kołor** wskazywanej przez nią komórki;

# Maszyna Turinga

## Definicja

### Maszyna Turinga (Alan Turing, 1937)

Teoretyczna maszyna licząca złożona z:

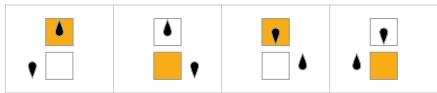
**taśmy** — nieskończonej linii komórek, którą można przesuwac w przód i w tył;

**głowicy** — elementu aktywnego, który może:

- znajdować się w jednym ze skończonej liczby **stanów**,
- zmieniać **kołor** wskazywanej przez nią komórki;

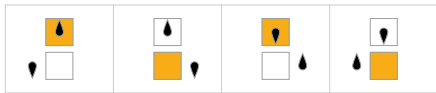
**zbioru instrukcji** określających jak głowica ma modyfikować wskazywaną komórkę i przesuwac taśmę.

# Maszyna Turinga

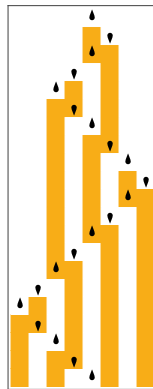


Rysunek: Przykładowa  
2-stanowa 2-kolorowa maszyna  
Turinga

# Maszyna Turinga



**Rysunek:** Przykładowa  
2-stanowa 2-kolorowa maszyna  
Turinga



**Rysunek:** Pierwszych 20 kroków  
działania maszyny

# Maszyna Turinga

## Definicja

### Definicje formalne



C. H. Papadimitriou,

*Złożoność obliczeniowa,*

Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2002.



J. E. Hopcroft, J. D. Ullman,

*Wprowadzenie do teorii automatów, języków i obliczeń,*

Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994.



A. V. Aho, J. E. Hopcroft, J. D. Ullman,

*Projektowanie i analiza algorytmów,*

Helion, Gliwice 2003.

# Maszyna Turinga

## Problem stopu

Maszyna Turinga może:



# Maszyna Turinga

## Problem stopu

Maszyna Turinga może:

- działać w nieskończoność;

# Maszyna Turinga

## Problem stopu

Maszyna Turinga może:

- działać w nieskończoność;
- zapętlać się;

# Maszyna Turinga

## Problem stopu

Maszyna Turinga może:

- działać w nieskończoność;
- zapętlać się;
- osiągnąć stan, w którym się zatrzyma.

# Maszyna Turinga

## Problem stopu

Maszyna Turinga może:

- działać w nieskończoność;
- zapętlać się;
- osiągnąć stan, w którym się zatrzyma.

## Problem stopu

Określić, czy dana maszyna Turinga zatrzyma się na danej taśmie wejściowej o skończonej liczbie kolorowych komórek.

# Maszyna Turinga

## Problem stopu

Maszyna Turinga może:

- działać w nieskończoność;
- zapętlać się;
- osiągnąć stan, w którym się zatrzyma.

## Problem stopu

Określić, czy dana maszyna Turinga zatrzyma się na danej taśmie wejściowej o skończonej liczbie kolorowych komórek.

## Nierozstrzygalność

Problem stopu jest **nierozstrzygalny**.

# Maszyna Turinga

Pracowity bóbr (*Busy beaver*)

## Przykład (Tibor Radó, 1962)

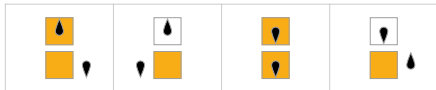
$n$ -stanowa 2-kolorowa maszyna Turinga, która na początkowo czystej taśmie koloruje jak najdłuższy ciąg komórek, po czym zatrzymuje się.

# Maszyna Turinga

Pracowity bóbr (*Busy beaver*)

## Przykład (Tibor Radó, 1962)

$n$ -stanowa 2-kolorowa maszyna Turinga, która na początkowo czystej taśmie koloruje jak najdłuższy ciąg komórek, po czym zatrzymuje się.



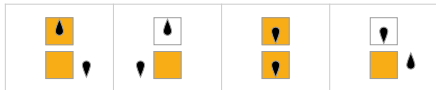
Rysunek: 2-stanowy pracowity bóbr

# Maszyna Turinga

## Pracowity bóbr (*Busy beaver*)

### Przykład (Tibor Radó, 1962)

$n$ -stanowa 2-kolorowa maszyna Turinga, która na początkowo czystej taśmie koloruje jak najdłuższy ciąg komórek, po czym zatrzymuje się.



**Rysunek:** 2-stanowy pracowity bóbr



**Rysunek:** Działanie 2-stanowego pracowitego bobra



# Uniwersalna maszyna Turinga

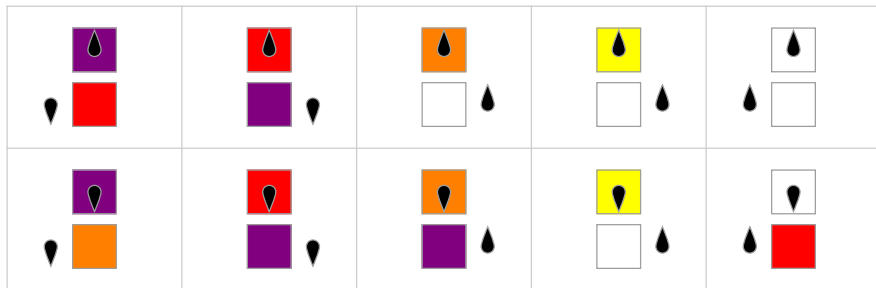
## Uniwersalna maszyna Turinga

Maszyna Turinga która, przez odpowiednie zaprogramowanie za pomocą skończonej liczby komórek taśmy wejściowej, może działać jak dowolna inna maszyna Turinga.

# Uniwersalna maszyna Turinga

## Uniwersalna maszyna Turinga

Maszyna Turinga która, przez odpowiednie zaprogramowanie za pomocą skończonej liczby komórek taśmy wejściowej, może działać jak dowolna inna maszyna Turinga.



**Rysunek:** Przykład 2-stanowej 5-kolorowej uniwersalnej maszyny Turinga (S. Wolfram, 2002)

# Zasoby i złożoność

## Zasoby

### Definicja

**Czas**  $T(M, w)$  obliczeń maszyny Turinga  $M$  na taśmie wejściowej  $w$ , to liczba kroków, które maszyna wykona przed zatrzymaniem się. Jeżeli  $M$  nie zatrzymuje się na  $w$ , to  $T(M, w) = \infty$ .

# Zasoby i złożoność

## Zasoby

### Definicja

**Czas**  $T(M, w)$  obliczeń maszyny Turinga  $M$  na taśmie wejściowej  $w$ , to liczba kroków, które maszyna wykona przed zatrzymaniem się. Jeżeli  $M$  nie zatrzymuje się na  $w$ , to  $T(M, w) = \infty$ .

### Definicja

**Pamięć**  $S(M, w)$  potrzebna maszynie Turinga  $M$  do obliczeń na taśmie wejściowej  $w$ , to liczba komórek taśmy odwiedzonych przez głowicę przed zatrzymaniem się. Jeżeli  $M$  nie zatrzymuje się na  $w$ , to  $S(M, w)$  jest nieokreślona.



# Zasoby i złożoność

## Złożoność

### Definicja

**Długość słowa**  $|w|$  dla taśmy wejściowej  $w$  to liczba komórek pomiędzy skrajnymi pokolorowanymi komórkami.

### Definicja

**Złożoność czasowa** maszyny  $M$  to funkcja  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  taka, że

$$f(n) = \max_{|w|=n} T(M, w).$$

# Zasoby i złożoność

## Złożoność

### Definicja

**Długość słowa**  $|w|$  dla taśmy wejściowej  $w$  to liczba komórek pomiędzy skrajnymi pokolorowanymi komórkami.

### Definicja

**Złożoność czasowa** maszyny  $M$  to funkcja  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  taka, że

$$f(n) = \max_{|w|=n} T(M, w).$$

### Definicja

**Złożoność pamięciowa** zawsze zatrzymującej się maszyny  $M$  to funkcja  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  taka, że

$$f(n) = \max_{|w|=n} S(M, w).$$

# Zasoby i złożoność

## Asymptotyczne tempo wzrostu

### Definicje

Niech  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Jeżeli istnieją  $n_0 \geq 0$ ,  $\epsilon > 0$  i  $M > 0$ , to:



# Zasoby i złożoność

## Asymptotyczne tempo wzrostu

### Definicje

Niech  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Jeżeli istnieją  $n_0 \geq 0$ ,  $\epsilon > 0$  i  $M > 0$ , to:  
 $f$  jest co najwyżej rzędu  $g$

$$f(n) \in O(g(n)) \iff \forall n \geq n_0: f(n) \leq Mg(n);$$

# Zasoby i złożoność

## Asymptotyczne tempo wzrostu

### Definicje

Niech  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Jeżeli istnieją  $n_0 \geq 0$ ,  $\epsilon > 0$  i  $M > 0$ , to:  
 $f$  jest co najwyżej rzędu  $g$

$$f(n) \in O(g(n)) \iff \forall n \geq n_0: f(n) \leq Mg(n);$$

$f$  jest co najmniej rzędu  $g$

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \iff \forall n \geq n_0: f(n) \geq \epsilon g(n);$$

# Zasoby i złożoność

## Asymptotyczne tempo wzrostu

### Definicje

Niech  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Jeżeli istnieją  $n_0 \geq 0$ ,  $\epsilon > 0$  i  $M > 0$ , to:  
 $f$  jest co najwyżej rzędu  $g$

$$f(n) \in O(g(n)) \iff \forall n \geq n_0: f(n) \leq Mg(n);$$

$f$  jest co najmniej rzędu  $g$

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \iff \forall n \geq n_0: f(n) \geq \epsilon g(n);$$

$f$  jest dokładnie rzędu  $g$

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \iff \forall n \geq n_0: \epsilon g(n) \leq f(n) \leq Mg(n);$$

# Niedeterministyczna maszyna Turinga

## Niedeterministyczna maszyna Turinga

Maszyna Turinga, która działa jak wiele „równoległych” maszyn Turinga wykonujących różne ścieżki obliczeń przy warunku, że te równoległe maszyny Turinga nie mogą się komunikować nawzajem.

# Niedeterministyczna maszyna Turinga

## Niedeterministyczna maszyna Turinga

Maszyna Turinga, która działa jak wiele „równoległych” maszyn Turinga wykonujących różne ścieżki obliczeń przy warunku, że te równoległe maszyny Turinga nie mogą się komunikować nawzajem.

Niedeterministyczna maszyna Turinga sprawdza równoległe wszystkie możliwości obliczeń, które można zobrazować przez **drzewo możliwych wykonań**.

# Niedeterministyczna maszyna Turinga

## Złożoność

### Definicje

Dla niedeterministycznej maszyny Turinga  $M$ , zatrzymującej się na słowie wejściowym  $w$ :

# Niedeterministyczna maszyna Turinga

## Złożoność

### Definicje

Dla niedeterministycznej maszyny Turinga  $M$ , zatrzymującej się na słowie wejściowym  $w$ :

czas  $NT(M, w)$  — liczba kroków najdłuższego z równoległych obliczeń;

# Niedeterministyczna maszyna Turinga

## Złożoność

### Definicje

Dla niedeterministycznej maszyny Turinga  $M$ , zatrzymującej się na słowie wejściowym  $w$ :

czas  $NT(M, w)$  — liczba kroków najdłuższego z równoległych obliczeń;

pamięć  $NS(T, w)$  — największa liczba komórek potrzebna w każdym z równoległych obliczeń.



# Niedeterministyczna maszyna Turinga

## Złożoność

### Definicje

Dla niedeterministycznej maszyny Turinga  $M$ , zatrzymującej się na słowie wejściowym  $w$ :

**czas**  $NT(M, w)$  — liczba kroków najdłuższego z równoległych obliczeń;

**pamięć**  $NS(T, w)$  — największa liczba komórek potrzebna w każdym z równoległych obliczeń.

Miary złożoności czasowej i pamięciowej określamy analogicznie jak dla zwykłej maszyny Turinga.