

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-механический институт  
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Расчетное задание по курсу  
«ОСНОВЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ»

Работу выполнил  
студент гр.5030301/00102

Д.Ю. Кучиев

Преподаватель

Е.В. Колесник

8 июня 2023 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Задача №1.</b>	<b>3</b>
1.1	Постановка задачи. . . . .	3
1.2	Описание используемых численных методов. . . . .	3
1.3	Явная центральная схема. . . . .	4
1.4	Явная центральная схема с компенсацией старшего слагаемого ошибки аппроксимации. . . . .	5
1.5	Реализация численного метода. . . . .	7
1.6	Реализуемый вариант расчетов. . . . .	7
1.7	Результаты расчетов. . . . .	8
1.8	Вывод. . . . .	10
<b>2</b>	<b>Задача №2.</b>	<b>11</b>
2.1	Постановка задачи. . . . .	11
2.2	Явная противопоточная схема. . . . .	11
2.3	Схема Кабарэ . . . . .	13
2.4	Реализация численных методов. . . . .	14
2.5	Результаты расчетов. . . . .	15
2.5.1	Синусоидальный сигнал. . . . .	15
<b>3</b>	<b>Задача №3.</b>	<b>16</b>
3.1	Постановка задачи. . . . .	16
3.2	Анализ результатов. . . . .	16
<b>4</b>	<b>Код программ.</b>	<b>16</b>

# 1 Задача №1.

## 1.1 Постановка задачи.

Рассмотри разгон жидкости в плоском канале (Рис. 1). Разгон происходит за счет действия градиента давления ( $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ ).

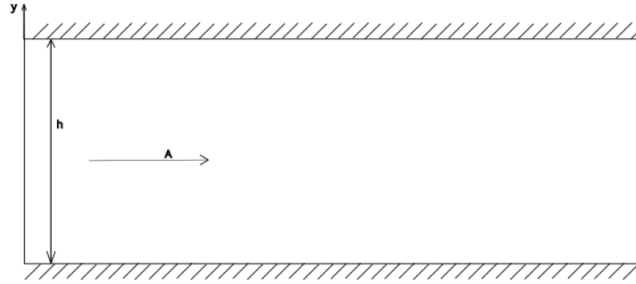


Рис. 1: Схема расчетной области.

Исследуемое течение описывается уравнением (1), где  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = A, [\text{м/с}^2]$  - амплитуда;  $\nu, [\text{м}^2/\text{с}]$  - коэффициент кинематической вязкости;  $h, [\text{м}]$  - высота зазора;  $u(y, t), \text{м/с}$  - скорость жидкости в точке  $(y)$  в момент времени  $(t)$ ;  $y, [\text{м}]$  - координата вдоль сечения;  $t, \text{с}$  - время.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Начальные условия для задачи - уравнение (2).

Граничные условия для задачи - уравнение (3).

$$u(y, 0) = 0 \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0 \quad u(h, t) = 0 \quad (3)$$

В данной задаче нам требуется: рассчитать установившееся течение; оценить за какой интервал времени оно станет установившимся; рассчитать течение при различных значениях  $A$ ; построить зависимость максимальной скорости при установившемся течении от  $A$ .

## 1.2 Описание используемых численных методов.

Для решения поставленной задачи воспользуемся двумя схемами численных методов:

- Явная центральная схема.
- Явная центральная схема с компенсацией старшего слагаемого ошибки аппроксимации.

### 1.3 Явная центральная схема.

Разобьем интервал  $[0, h]$  на  $N$  узлов с координатами  $y_i, i = [1, N]$ . Также будет двигаться по временным слоям с шагом по времени  $\Delta t$ , тогда получим  $t^n = n \cdot \Delta t$ . Будем считать значение на новом слое, основываясь на значениях на предыдущем слое, а также двух соседних точек предыдущего слоя. Граничные условия помогут заполнить значения для крайних узлов интервала. (Рис. 2)

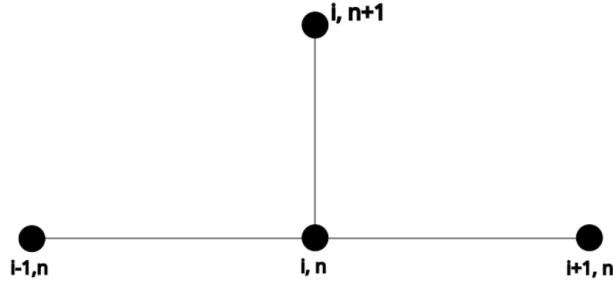


Рис. 2: Шаблон явной центральной схемы.

Аппроксимируем первую производную по времени и вторую по координате, используя ограничение на шаг аппроксимации по времени -  $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\nu}$ . Такое ограничение вводится с целью сохранения устойчивости схемы, как раз таки из-за этого ограничения вычисления при помощи данной схемы являются ресурсоемкими. Это в свою очередь является большим минусом. Схема аппроксимации представлена в уравнении (4). Также отдельно рассмотрим случай, когда с целью повышения точности аппроксимации выберем такое  $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{6\nu}$ .

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta y^2} - A = 0 \quad (4)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \nu \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n + A \frac{\nu}{\Delta y^2}) \quad (5)$$

Теперь аппроксимируем начальные и граничные условия, учитывая, что мы используем  $N$  узлов:

НУ:  $u_i^1 = 0, i = [1, N]$ ; ГУ:  $u_1^n = 0, n - \text{любое}$   $u_N^n = 0, n - \text{любое}$ .

Как мы видим, схема обладает первым порядком точности по времени и вторым по пространству. Найдем коэффициент перехода для данной схемы и исследуем ее на устойчивость. Воспользуемся анализом Фурье. Введем обозначение:  $VNM = \nu \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$  - число фон Неймана,  $\xi$  - погрешность округления.

$$\xi_i^{n+1} = \xi_i^n + VNM (\xi_{i-1}^n - 2\xi_i^n + \xi_{i+1}^n + A \frac{VNM}{\Delta t}) \quad (6)$$

$$g = \frac{\xi_i^{n+1}}{\xi_i^n} \quad (7)$$

Рассмотрим погрешность, как сумму ряда Фурье:  $\xi(t, y) = \sum_m b_m(t) \cdot e^{ik_m y}$ , где  $k_m = m \frac{\pi}{L}$  - волновое число. Получим  $\xi_i^n = e^{at} e^{ik_m y}$  и теперь подставим его в (7) с учетом (6).

$$g = 1 + VNM(e^{ik_m \Delta y} + e^{-ik_m \Delta y} - 2 + A \frac{VNM}{\xi_i^n \Delta t}) \quad (8)$$

Пусть  $\beta = k_m \Delta y$  и отбросим свободный член  $A \frac{VNM}{\xi_i^n \Delta t}$ . Учтем, что коэффициент перехода  $g > 0$ , но при этом для устойчивости схемы потребуем  $g < 1$ , тогда:

$$|1 - 2VNM(1 - \cos(\beta))| < |1 - 4VNM| < 1 \quad (9)$$

$$0 < VNM < 1 \quad (10)$$

В результате получили интервал для числа фон-Неймана (9) и (10).

Поэтому в данной схеме мы выбираем такой масштаб шага по времени, чтобы коэффициент перехода был равен 1.

#### 1.4 Явная центральная схема с компенсацией старшего слагаемого ошибки аппроксимации.

При использовании явной схемы возникает накапливающаяся ошибка, которая может вредить решению, чтобы этого избежать требуется ее компенсировать. Это нам позволяет разложение функции в ряд Тейлора и отбрасывание величин большего порядка малости, чем в обычной явной схеме. Отсюда у нас появляется еще одно слагаемое. Уравнение данной схемы представлено в уравнении (11).

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta y^2} + \left[ -\frac{\nu^2 \Delta t}{2} + \frac{\nu \Delta y^2}{12} \right] \frac{u_{i+2}^n - 4u_{i+1}^n + 6u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n}{\Delta y^4} = A \quad (11)$$

Аппроксимация производных, а также граничных и начальных условий аналогичны явный центральной схеме. Шаблон схемы с учетом старшего слагаемого ошибки аппроксимации представлен на Рис. 3

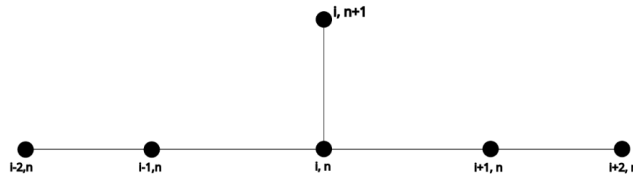


Рис. 3: Шаблон явной центральной схемы с компенсацией.

Но что происходит на границе области, когда мы должны воспользоваться для расчетов точками, которые выходят из нашего диапазона? Введем минимые точки  $u_0^n$  и  $u_{N+1}^n$ . Которые определяются из граничных условий для крайних точек области, а именно:  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}|_{y=0,h} = 0$ . Аппроксимируем данное условие и получим следующее:

$$\frac{u_0^n - 2u_1^n + u_2^n}{\Delta y^2} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{u_{N+1}^n - 2u_N^n + u_{N-1}^n}{\Delta y^2} = 0 \quad (13)$$

Откуда мы найдем значения для наших точек на  $n$  слое. Как мы можем видеть, схема обладает вторым порядком точности по времени и четвертым по координате.

Исследуем схему на устойчивость. Проведем аналогичные рассуждения, что были приведены для явной схемы.

$$\xi_i^{n+1} = \xi_i^n + VNM(\xi_{i-1}^n - 2\xi_i^n + \xi_{i+1}^n) - \left[ -\frac{VNM^2}{2} + \frac{VNM}{12} \right] (\xi_{i+2}^n - 4\xi_{i+1}^n + 6\xi_i^n - 4\xi_{i-1}^n + \xi_{i-2}^n) + A \frac{VNM}{\Delta t} \quad (14)$$

$$g = \frac{\xi_i^{n+1}}{\xi_i^n} = 1 - 2VNM(1 - \cos(\beta)) - \left[ -\frac{VNM^2}{2} + \frac{VNM}{12} \right] (2\cos(2\beta) - 8\cos\beta + 6) \quad (15)$$

$$g < 1 \quad (16)$$

$$|1 - 2VNM(1 - \cos(\beta)) - \left[ -\frac{VNM^2}{2} + \frac{VNM}{12} \right] (4\cos^2(\beta) - 8\cos\beta + 4)| < 1 \quad (17)$$

Пусть  $A = 2VNM$ ,  $B = -2VNM^2 + \frac{VNM}{3}$ :

$$|1 - (1 - \cos(\beta))(A - B(1 - \cos(\beta)))| < 1 \quad (18)$$

$$|1 - \cos(\beta)||A - B(1 - \cos(\beta))| > 0 \quad (19)$$

$$A - 2|B| > 0 \quad (20)$$

Тогда получим, что схема является устойчивой при числе  $VNM$  удовлетворяющему следую-

щему неравенству:

$$0 < VNM < \frac{2}{3} \quad (21)$$

## 1.5 Реализация численного метода.

Реализуем численный метод, используя язык программирования Fortran. Программа автоматически считывает из текстового файла константы, используемые при вычислении скорости на новом временном слое. Затем она инициализирует начальные условия заданные в программе и начинает итерационно идти вдоль временной координаты, доходя до слоя, в котором значение времени равно времени, заданному предварительно (время, в которое мы хотим получить распределение скорости). Производится подсчет каждого последующего временного слоя и после достижения заданного времени выводятся значения слоя в документ. Блок схема программы представлена на Рис. 4.

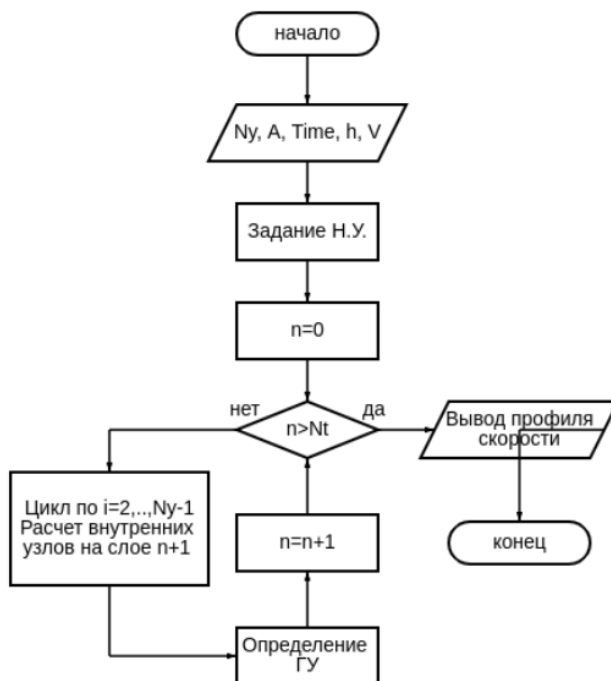


Рис. 4: Блок схема программы реализующей численный метод.

## 1.6 Реализуемый вариант расчетов.

Будем рассматривать задачу для следующих вводных параметров:

- $h = 0.01$  м - высота зазора
- $\nu = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с - кинематическая вязкость
- $Time = 100$  с - рассматриваемое время течения

- $A = 0.3 \text{ м/с}^2$  - амплитуда
- $Ny = 101$  - количество узлов

## 1.7 Результаты расчетов.

Расчитанное установившееся течение представлено на Рис. 5 (используем визуализатор gnuplot). Ввиду того, что отличие между схемами является малым, приблизим участок в середине сечения, чтобы визуально наблюдать различия. (Рис. 6)

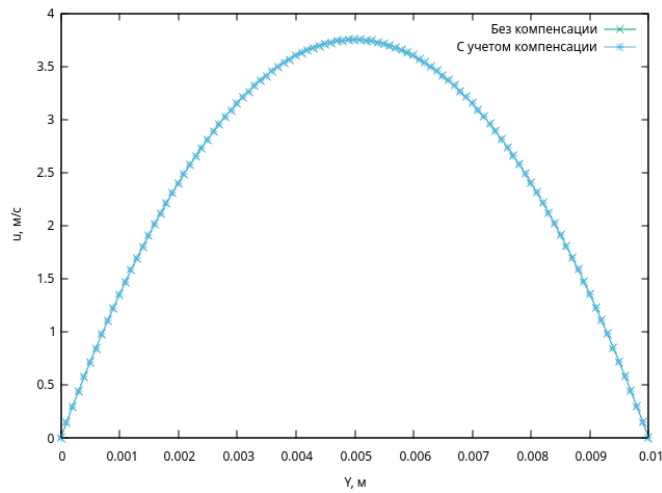


Рис. 5: Профиль скорости установившегося течения.

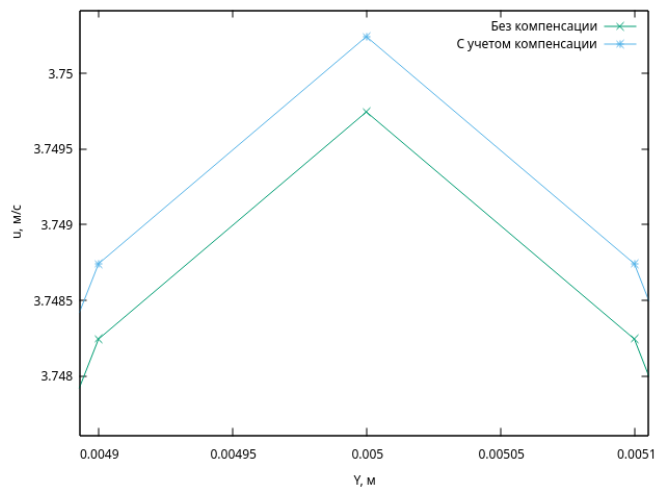


Рис. 6: Различие между двумя схемами.

Из Рис. 6 можем наблюдать, что схемы отличаются на значение порядка  $10^{-3}$ , что говорит о малом их различии.



Время установления течения для явной схемы без компенсации  $T_{уст} = 66.1с$ , а для схемы с учетом компенсации  $T_{уст} = 65.0с$ . Рассмотрим различные значения  $A$  и построим для них профили скорости (Рис. 7). Как мы можем наблюдать чем больше значение  $A$ , тем выше максимум нашей параболы Пуазейля. Действительно,  $A$  - перепад давления, который ускоряет поток, и чем он больше, тем больше сила, действующая на него, а значит и поток достигает большей скорости, перед тем, как за счет сил сопротивления компенсировать эту движущую силу.

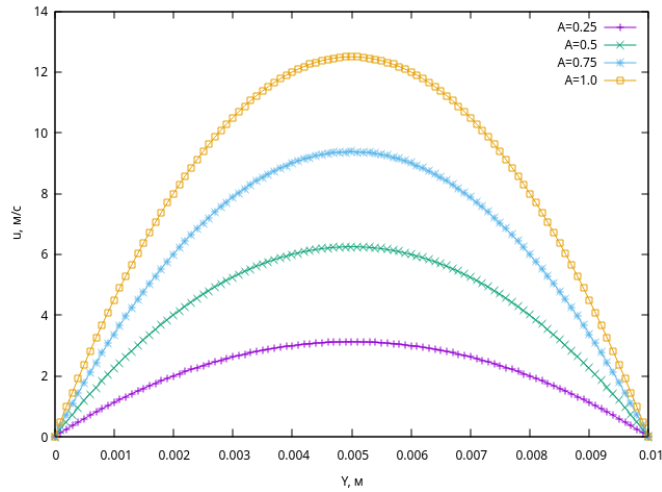


Рис. 7: Графики профиля скорости в зависимости от параметра  $A$ .

Построим зависимость максимальной скорости от значения параметра  $A$ . График зависимости представлен на Рис. 8. Из графика видно, что зависимость максимальной скорости от параметра  $A$  является линейной.

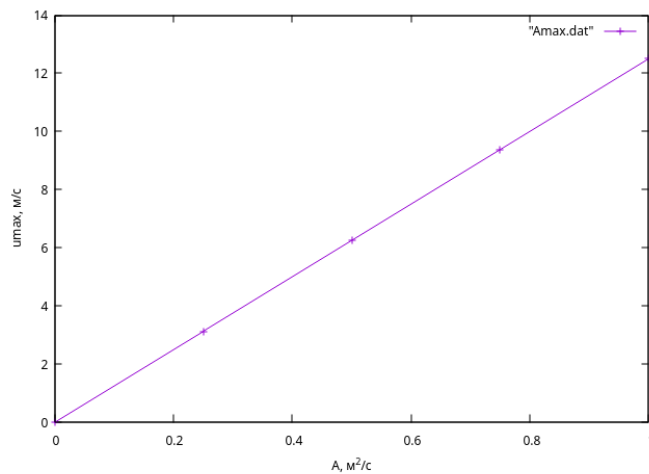
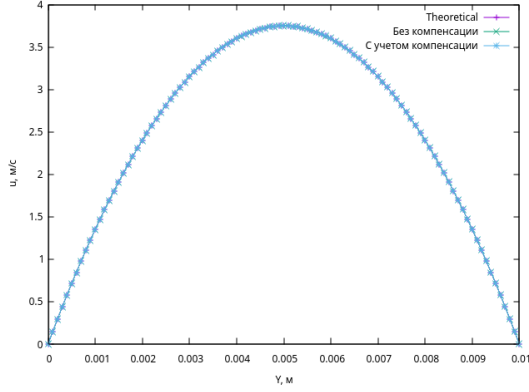


Рис. 8: Графики профиля скорости в зависимости от параметра  $A$ .

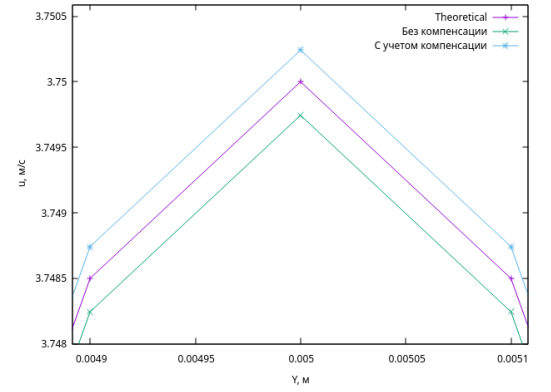
Сопоставим результат полученный с помощью данных схем и аналитическое решение.

Аналитическое решение описывается уравнением (22). Визуализация полученных профилей представлена на Рис. 9.

$$u = \frac{A}{2\nu}(R^2 - r^2), \text{ где } R=h/2, r=|y-h/2| \quad (22)$$



(a) Без увеличения.



(b) Масштабирование на пике.

Рис. 9: Сравнение аналитического и численно полученного профилей скорости.

Отличие аналитического решения от численного для обеих схем составляет порядка  $\delta = 0.2\%$  - максимальное отклонение численного решения от аналитического (23).

$$\delta = \max \left| \frac{u_i^{\text{числ}} - u^{\text{теор}}(y_i)}{u^{\text{теор}}(y_i)} \right| \quad (23)$$

Рассмотрим случай  $\Delta t = \frac{\Delta y^2}{6\nu}$  повышающий аппроксимацию для явной центральной схемы без компенсации. Данное допущение приводит нас к числу  $VNM = \frac{1}{6}$ . Порядок точности будем определять по максимальному значению скорости вычисленному с помощью численных методов и аналитически. (Таблица. 1)

	Теор.	$\Delta t = \frac{\Delta y^2}{6\nu}$	$\Delta t = \frac{\Delta y^2}{2\nu}$
$V_{max}$	3.75000	3.74963	3.74918

Таблица 1: Сравнение точности повышающего порядок аппроксимации схемы.

## 1.8 Вывод.

- Явная центральная схема без и с компенсацией старшего слагаемого ошибки аппроксимации отличаются друг от друга на порядок  $10^{-3}$ , что говорит нам о том, что данные схемы идентичны и дают одинаково точные результаты.
- Полученные профили скорости совпадают с теоритическими расчетами с относительной погрешность максимального отклонения  $\delta = 0.2\%$ .

- При увеличении параметра амплитуда  $A$  максимальная скорость установившегося течения растет, причем ее рост является линейным. (Рис. 8)
- Полученные профили описывают параболу Пуазейля.

## 2 Задача №2.

### 2.1 Постановка задачи.

Рассмотрим задачу переноса синусоидального сигнала с гармоникой:

$$\sin(kx), \text{ где } k = \frac{m\pi}{L}; \quad m = 2; \quad L = 1, \text{ тогда } y(x) = \sin(2\pi x)$$

А также сигнала описываемого кусочной функцией:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x < 0.4 \\ 5x - 3, & \text{при } 0.4 \leq x \leq 0.8 \\ 1, & \text{при } x > 0.8 \end{cases} \quad (24)$$

С помощью метода конечных разностей найдем численное решение для одномерного линейного уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Для аппроксимации уравнения рассмотрим два способа: явную противопоточную схему первого порядка и схема "Кабарэ".

### 2.2 Явная противопоточная схема.

Схема с разностями против потока в вычислительной физике — класс методов дискретизации для решения (явными схемами) дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа (гиперболических уравнений).

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{c + |c|}{2} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{c - |c|}{2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0 \quad (25)$$

Схема с разностями против потока неявно вводит в уравнение искусственную вязкость, которую часто называют неявной (схемной) искусственной вязкостью в отличие от явной искусственной вязкости, которая преднамеренно вводится в разностное уравнение. Искусственная вязкость сглаживает решение уравнения, уменьшая градиенты всех параметров независимо от причины возникновения этих градиентов, физической или вычислительной. Такое свойство разностной схемы, обусловленное наличием в выражении для погрешности

аппроксимации производных четного порядка, называют диссипацией на разностной сетке. Другое близкое к физическому свойство разностных схем называют дисперсией. Оно непосредственно связано с производными нечетного порядка в выражении для погрешности аппроксимации. Дисперсия приводит к искажению соотношения фаз различных волн. Совместное воздействие диссипации и дисперсии на решение иногда называют диффузией. Диффузия приводит к растяжению крутых линий раздела, которые могут появляться в расчетной области.

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}((C + |C|)(u_i^n - u_{i-1}^n) + (C - |C|)(u_{i+1}^n - u_i^n)) \quad (26)$$

Шаблон схемы аналогичен явной центральной схеме (Рис. 2)

Из выражения (26) видно, что явная противопоточная схема имеет первый порядок точности по времени и первый порядок точности по пространству. Также для данной схемы характерно появление диффузионных слагаемых (четные частные производные) и дисперсионных (нечетные частные производные), за счет диффузии появляется искажение амплитуды сигнала, а за счет дисперсии – искажение скорости распространения сигнала за счет возникновения новых гармоник. Исследуем данную схему на устойчивость, для этого найдем коэффициент перехода  $g$ . Применим анализ устойчивости Фурье. Введем число Куранта  $Cu = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$ .

$$g = 1 - Cu(1 - e^{ik_m \Delta x}) = 1 - Cu(1 - \cos(\beta)) + i \cdot Cu \cdot \sin(\beta) \quad (27)$$

$$|g| = 1 + 2Cu^2(1 - \cos(\beta)) - 2Cu(1 - \cos(\beta)) < 1 \quad (28)$$

$$Cu(Cu - 1) < 0 \quad (29)$$

Тогда мы получили, что схема является устойчивой, когда  $0 < Cu < 1$ . Построим поверхность диссипации для явной противопоточной схемы. (Рис. 10)

$$\phi = \arctan\left(\frac{Cu \cdot \sin(\beta)}{1 - Cu(1 - \cos \beta)}\right) \quad (30)$$

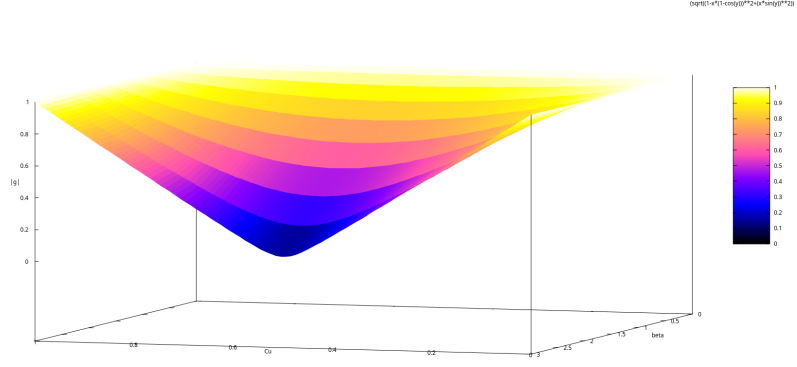


Рис. 10: Поверхность диссипации.

## 2.3 Схема Кабарэ

Схема Кабарэ является бездиссипативной и обладает улучшенными по сравнению с классическими линейными схемами дисперсионными свойствами. Она устойчива при положительных числах Куранта, не превышающих единицу, и точна при числах Куранта 0.5. Шаблон схемы представлен на Рис. 11

$$\frac{1}{2} \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_{i-1}^n - u_{i-1}^{n-1}}{\Delta t} \right) + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (31)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - u_{i-1}^n + u_{i-1}^{n-1} - 2c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (32)$$

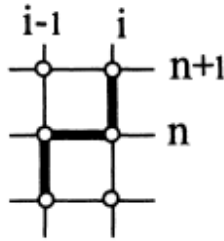


Рис. 11: Шаблон разностной схемы Кабарэ.

Как мы можем видеть схема обладает первым порядком точности по координате и по времени. Исследуем устойчивость нашей схемы.

$$g = 1 - e^{-ik_m \Delta x} (1 - e^{-a \Delta t}) - 2Cu(1 - e^{-ik_m \Delta x}) \quad (33)$$

Исключим константу из уравнения и тогда получим:

$$g = 1 - e^{-i\beta}(1 - e^{-a\Delta t}) - 2Cu(1 - e^{-i\beta}) \quad (34)$$

$$g = (1 - 2Cu)(1 - \cos(\beta)) + i(1 - 2Cu)\sin(\beta)$$

$$(1 - 2Cu)^2((1 - \cos(\beta))^2 + \sin^2(\beta)) < 1 \quad (35)$$

$$2(1 - 2Cu)^2(1 - \cos(\beta)) < 1 \quad (36)$$

$$4(1 - 2Cu)^2 < 1 \quad (37)$$

$$\frac{1}{4} < Cu < \frac{3}{4} \quad (38)$$

Найдем коэффициент перехода и сдвига:

$$|g| = \sqrt{((1 - 2Cu)(1 - \cos(\beta)))^2 + ((1 - 2Cu)\sin(\beta))^2}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\sin(\beta)}{1 - \cos(\beta)}\right)$$

Построим поверхность диссипации для схемы Кабарэ (Рис. 12).

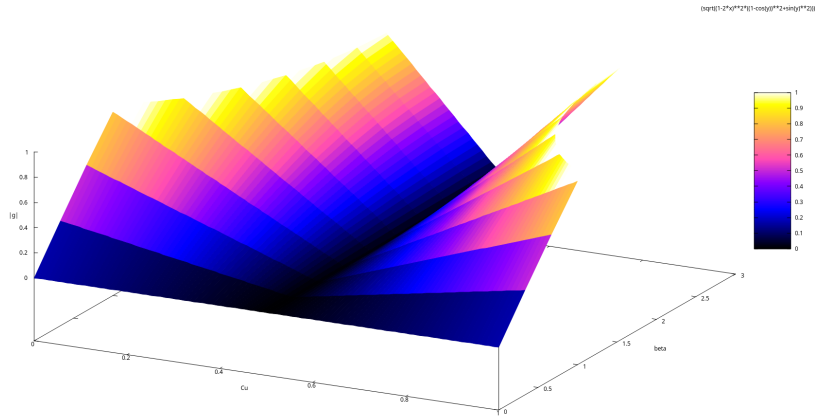


Рис. 12: Поверхность диссипации схемы Кабаре.

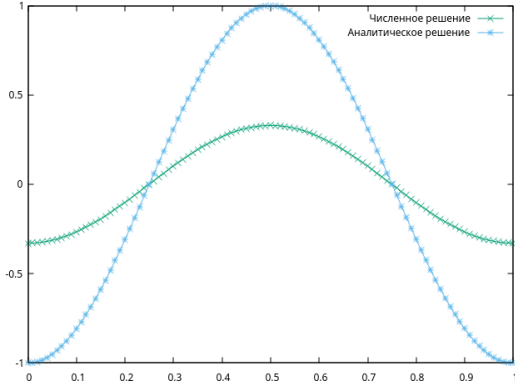
## 2.4 Реализация численных методов.

Реализуем численные методы, используя язык программирования Fortran. Для схемы Кабарэ, первую итерацию будем производить по явной противопоточной схеме. Блок схема программы представлена на Рис. 4

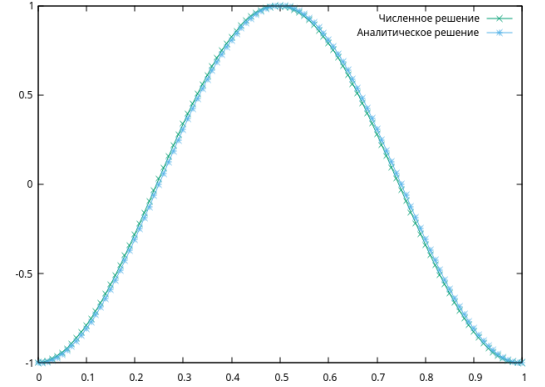
## 2.5 Результаты расчетов.

### 2.5.1 Синусоидальный сигнал.

На Рис. 13 представлены графики синусоидального сигнала в два различных момента времени вычисленных с помощью двух схем (на графике представлены аналитическое решение и численное).



(а) Явная противопоточная схема.  $t=15$



(б) Схема Кабаре.  $t=15$

Рис. 13: Вид сигнала рассчитанного с помощью различных схем.

Как мы можем видеть, амплитуда рассчитанного численного сигнала с помощью явной противопоточной схемы уменьшилась. Это связано с наличием диссипации у схемы, в отличие от схемы Кабаре, которая при числе  $Cu = 0.5$  убирает диссипацию. Проверим наши выводы для сигнала описываемого кусочной функцией, получим аналогичную картину (Рис. 14).

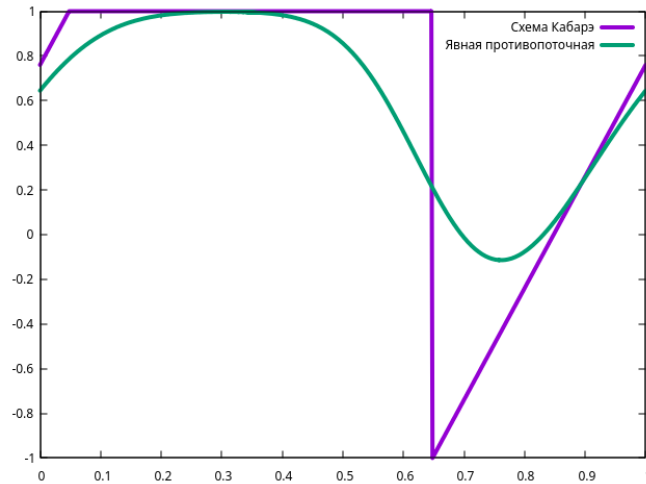


Рис. 14: Численное решение для схемы Кабаре и явной противопоточной схемы.

Как мы можем видеть, явная противопоточная схема сгладила изначальный сигнал, что объясняется коэффициентом диссипации  $|g| = 0.999980271^{11249} = 0.5$ .

## 3 Задача №3.

### 3.1 Постановка задачи.

Возьмем те же самые задачи описанные в предыдущем пункте и решим для них невязкое уравнение Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2/2)}{\partial x} = 0 \quad (39)$$

Для аппроксимации уравнения используем те же две схемы, что и для линейного уравнения переноса.

### 3.2 Анализ результатов.

Используя схему Кабарэ и явную противопоточную схему мы получили следующие виды сигналов в момент времени  $\tau = 15$ . Результаты представлены на Рис. ??.

## 4 Код программ.

Код программ представлен в удаленном репозитории на GitHub  
(<https://github.com/MrDionisio/CFD>)