

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-механический институт  
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Расчетное задание по курсу  
«ОСНОВЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ»

Работу выполнил  
студент гр.5030301/00102

Д.Ю. Кучиев

Преподаватель

Е.В. Колесник

26 апреля 2023 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи.</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Описание используемых численных методов.</b>	<b>3</b>
2.1	Явная центральная схема. . . . .	4
2.2	Явная центральная схема с компенсацией старшего слагаемого ошибки аппроксимации. . . . .	4
<b>3</b>	<b>Реализация численного метода.</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Реализуемый вариант расчетов.</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Результаты расчетов.</b>	<b>6</b>
<b>6</b>	<b>Код программы.</b>	<b>9</b>
<b>7</b>	<b>Вывод.</b>	<b>9</b>

# 1 Постановка задачи.

Рассмотри разгон жидкости в плоском канале (Рис. 1). Разгон происходит за счет действия градиента давления  $(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x})$ .

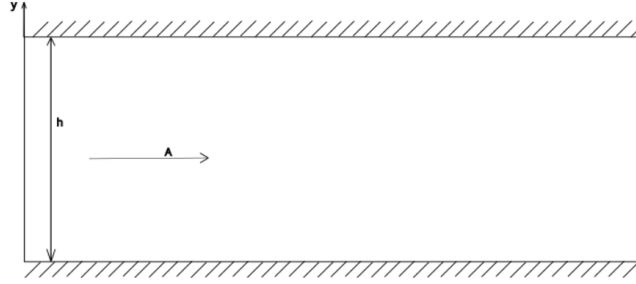


Рис. 1: Схема расчетной области.

Исследуемое течение описывается уравнением (1), где  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = A, [\text{м/с}^2]$  - амплитуда;  $\nu, [\text{м}^2/\text{с}]$  - коэффициент кинематической вязкости;  $h, [\text{м}]$  - высота зазора;  $u(y, t), \text{м/с}$  - скорость жидкости в точке  $(y)$  в момент времени  $(t)$ ;  $y, [\text{м}]$  - координата вдоль сечения;  $t, \text{с}$  - время.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Начальные условия для задачи - уравнение (2).

Граничные условия для задачи - уравнение (3).

$$u(y, 0) = 0 \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0 \quad u(h, t) = 0 \quad (3)$$

В данной задаче нам требуется: рассчитать установившееся течение; оценить за какой интервал времени оно станет установившимся; рассчитать течение при различных значениях  $A$ ; построить зависимость максимальной скорости при установившемся течении от  $A$ .

# 2 Описание используемых численных методов.

Для решения поставленной задачи воспользуемся двумя схемами численных методов:

- Явная центральная схема.
- Явная центральная схема с компенсацией старшего слагаемого ошибки аппроксимации.

## 2.1 Явная центральная схема.

Разобьем интервал  $[0, h]$  на  $N$  узлов с координатами  $y_i, i = [1, N]$ . Также будет двигаться по временным слоям с шагом по времени  $\Delta t$ , тогда получим  $t^n = n \cdot \Delta t$ . Будем считать значение на новом слое, основываясь на значениях на предыдущем слое, а также двух соседних точек предыдущего слоя. Граничные условия помогут заполнить значения для крайних узлов интервала. (Рис. 2)

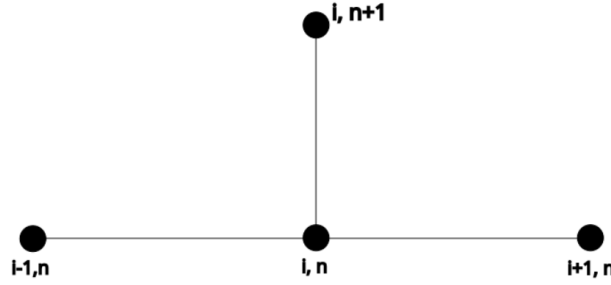


Рис. 2: Шаблон явной центральной схемы.

Аппроксимируем первую производную по времени и вторую по координате, используя ограничение на шаг аппроксимации по времени -  $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\nu}$ . Такое ограничение вводится с целью сохранения устойчивости схемы, как раз таки из-за этого ограничения вычисления при помощи данной схемы являются ресурсоемкими. Это в свою очередь является большим минусом. Схема аппроксимации представлена в уравнении (4). Также отдельно рассмотрим случай, когда с целью повышения точности аппроксимации выберем такое  $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{6\nu}$ .

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta y^2} - A = 0 \quad (4)$$

Теперь аппроксимируем начальные и граничные условия, учитывая, что мы используем  $N$  узлов - НУ:  $u_i^1 = 0, i = [1, N]$ ; ГУ:  $u_1^n = 0, n - \text{любое}$   $u_N^n = 0, n - \text{любое}$ .

## 2.2 Явная центральная схема с компенсацией старшего слагаемого ошибки аппроксимации.

При использовании явной схемы возникает накапливающаяся ошибка, которая может вредить решению, чтобы этого избежать требуется ее компенсировать. Это нам позволяет разложение функции в ряд Тейлора и отбрасывание величин большего порядка малости, чем в обычной явной схеме. Отсюда у нас появляется еще одно слагаемое. Уравнение данной схемы представлено в уравнении (5).

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta y^2} + \left[ -\frac{\nu^2 \Delta t}{2} + \frac{\nu \Delta y^2}{12} \right] \frac{u_{i+2}^n - 4u_{i+1}^n + 6u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n}{\Delta y^4} = A \quad (5)$$

Аппроксимация производных, а также граничных и начальных условий аналогичны явной центральной схеме. Шаблон схемы с учетом старшего слагаемого ошибки аппроксимации представлен на Рис. 3

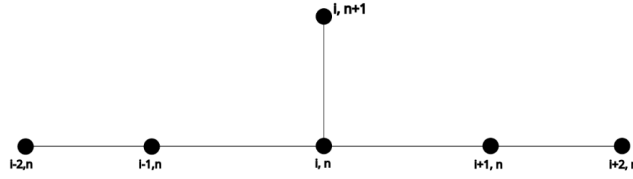


Рис. 3: Шаблон явной центральной схемы с компенсацией.

Но что происходит на границе области, когда мы должны воспользоваться для расчетом точками, которые выходят из нашего диапазона? Введем минимые точки  $u_0^n$  и  $u_{N+1}^n$ . Которые определяются из граничных условий для крайних точек области, а именно:  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}|_{y=0,h} = 0$ . Аппроксимируем данное условие и получим следующее:

$$\frac{u_0^n - 2u_1^n + u_2^n}{\Delta y^2} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{u_{N+1}^n - 2u_N^n + u_{N-1}^n}{\Delta y^2} = 0 \quad (7)$$

Откуда мы найдем значения для наших точек на  $n$  слое.

### 3 Реализация численного метода.

Реализуем численный метод, используя язык программирования Fortran. Программа автоматически считывает из текстового файла константы, использующиеся при вычислении скорости на новом временном слое. Затем она инициализирует начальные условия заданные в программе и начинает итерационно идти вдоль временной координаты, доходя до слоя, в котором значение времени равно времени, заданному предварительно (время, в которое мы хотим получить распределение скорости). Производится подсчет каждого последующего временного слоя и после достижения заданного времени выводятся значения слоя в документ. Блок схема программы представлена на Рис. 4.

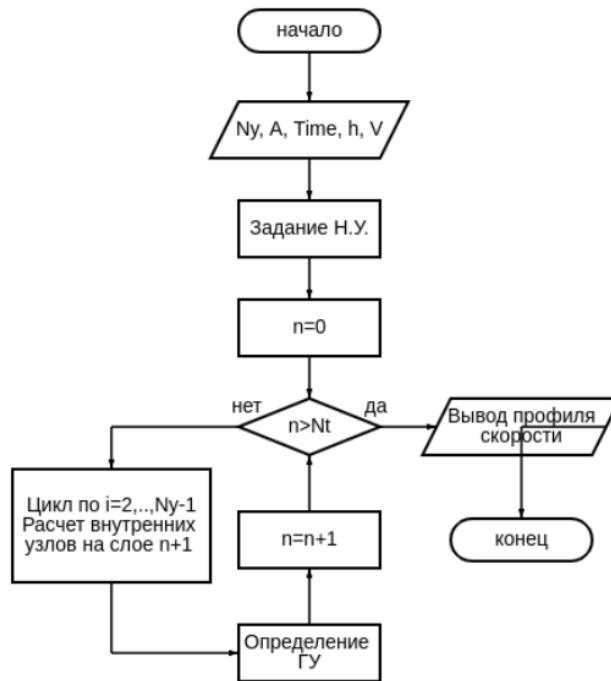


Рис. 4: Блок схема программы реализующей численный метод.

## 4 Реализуемый вариант расчетов.

Будем рассматривать задачу для следующих вводных параметров:

- $h = 0.01\text{м}$  - высота зазора
- $\nu = 1.e - 6\text{м}^2/\text{с}$  - кинематическая вязкость
- $Time = 100\text{ с}$  - рассматриваемое время течения
- $A = 0.3\text{м}/\text{с}^2$  - амплитуда
- $Ny = 100$  - количество узлов

## 5 Результаты расчетов.

Расчитанное установившееся течение представлено на Рис. 5 (используем визуализатор gnuplot). Ввиду того, что отличие между схемами является малым, приблизим участок в середине сечения, чтобы визуально наблюдать различия. (Рис. 6)

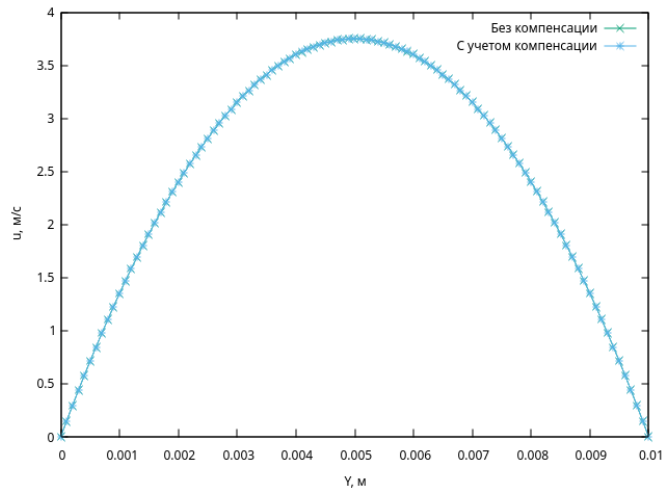


Рис. 5: Профиль скорости установившегося течения.

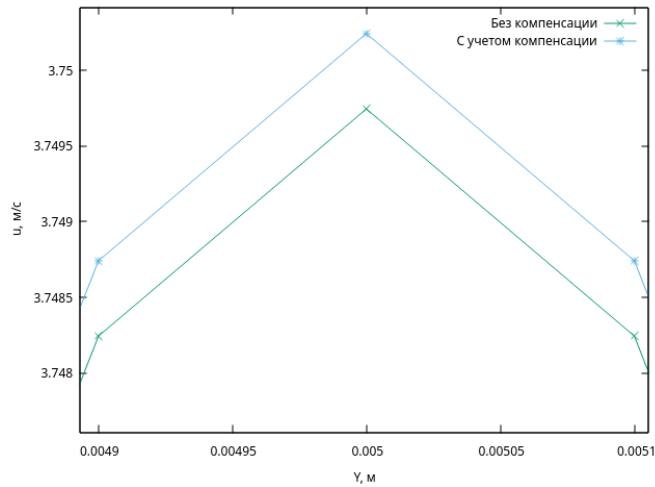


Рис. 6: Различие между двумя схемами.

Из Рис. 6 можем наблюдать, что схемы отличаются на значение порядка  $10^{-3}$ , что говорит о малом их различии.

Время установления течения для явной схемы без компенсации  $T_{уст} = 66.1с$ , а для схемы с учетом компенсации  $T_{уст} = 65.0с$ . Рассмотрим различные значения  $A$  и построим для них профили скорости. (Рис. 7) Как мы можем наблюдать чем больше значение  $A$ , тем выше максимум нашей параболы Пуазейля. Действительно,  $A$  - ускорение, которое прикладывается к потоку и чем оно больше, тем больше сила, действующая на него, а значит и поток достигает большей скорости, перед тем, как за счет сил сопротивления компенсировать эту движущую силу.

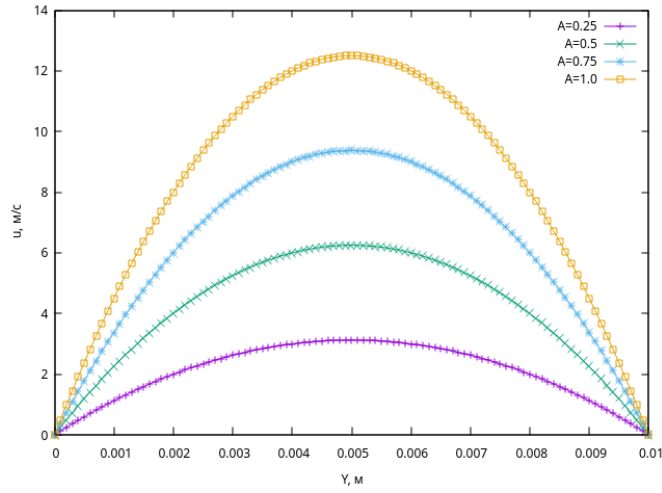


Рис. 7: Графики профиля скорости в зависимости от параметра  $A$ .

Построим зависимость максимальной скорости от значения параметра  $A$ . График зависимости представлен на Рис. 8. Из графика видно, что зависимость максимальной скорости от параметра  $A$  является линейной.

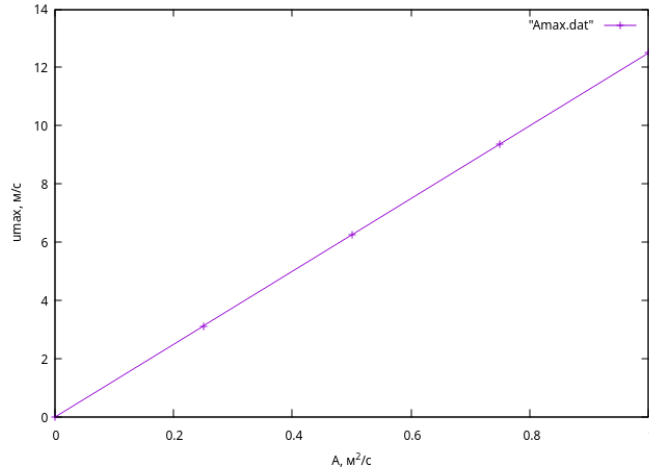
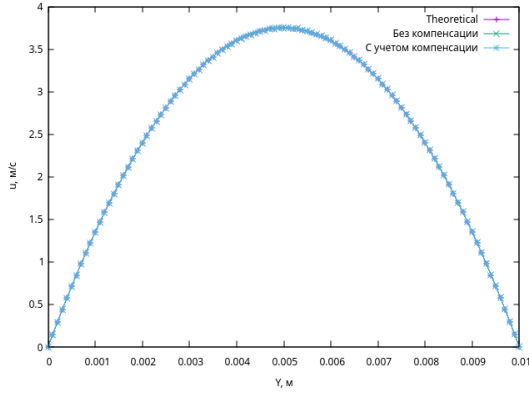


Рис. 8: Графики профиля скорости в зависимости от параметра  $A$ .

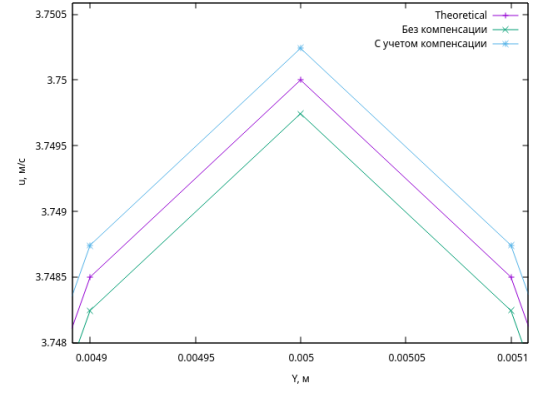
Сопоставим результат полученный с помощью данных схем и аналитическое решение. Аналитическое решение описывается уравнением (8). Визуализация полученных профилей представлена на Рис. 9.

$$u = \frac{A}{2\nu}(R^2 - r^2), \text{ где } R=h/2, r=|y-h/2| \quad (8)$$





(a) Без увеличения.



(b) Масштабирование на пике.

Рис. 9: Сравнение аналитического и численно полученного профилей скорости.

Отличие аналитического решения от численного для обеих схем составляет порядка  $\delta = 0.006\%$  - максимальное отклонение численного решения от аналитического (9).

$$\delta = \max \left| \frac{u_i^{\text{числ}} - u^{\text{теор}}(y_i)}{u^{\text{теор}}(y_i)} \right| \quad (9)$$

Рассмотрим случай  $\Delta t = \frac{\Delta y^2}{6\nu}$  повышающий аппроксимацию. Порядок точности будем определять по максимальному значению скорости вычисленному с помощью численных методов и аналитически. (Таблица. 1)

	Теор.	$\Delta t = \frac{\Delta y^2}{6\nu}$	$\Delta t = \frac{\Delta y^2}{2\nu}$
$V_{\max}$	3.75000	3.74963	3.74918

Таблица 1: Сравнение точности повышающего порядок аппроксимации схемы.

## 6 Код программы.

Код программы представлен в удаленном репозитории на GitHub (<https://github.com/MrDionisio/CFD>)

## 7 Вывод.

- Явная центральная схема без и с компенсацией старшего слагаемого ошибки аппроксимации отличаются друг от друга на порядок  $10^{-3}$ , что говорит нам о том, что данные схемы идентичны и дают одинаково точные результаты.
- Полученные профили скорости совпадают с теоритическими расчетами с относительной погрешность максимального отклонения  $\delta = 0.006\%$ .

- При увеличении параметра амплитуда  $A$  максимальная скорость установившегося течения растет, причем ее рост является линейным. (Рис. 8)
- Полученные профили описывают параболу Пуазейля.