

2. Модель маятника

Моделирование динамических систем в *Simulink*. Непрерывные модели. Модель затухающих колебаний маятника.

2.1. Постановка задачи

К неподвижной опоре на невесомом нерастяжимом стержне длины l [м] подвешен груз массы m [кг]. Построить модель колебаний маятника, если ускорение свободного падения равно g [м/с²], а сопротивление среды прямо пропорционально скорости движения маятника с коэффициентом γ [кг/с].

Требуется:

- записать математическую модель колебаний маятника
- в *Simulink* построить непрерывную модель колебаний маятника
- построить графики зависимости угла и угловой скорости маятника от времени
- фазовую диаграмму колебаний
- анимацию движения маятника.

Запустите *MatLab*. Установите свой рабочий каталог в качестве текущего каталога *MatLab*.

2.2. Математическая модель маятника

Изобразить маятник. Выявить его основные характеристики. Изобразить все силы, действующие на груз. Используя второй закон Ньютона, записать уравнения движения маятника.

Если обозначить φ – угол отклонения маятника против часовой стрелки от направления вертикально вниз, то после выбора удобных единиц измерения уравнение колебаний маятника примет вид

$$\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + \sin \varphi = 0. \quad (1)$$

Для получения конкретного колебания мы должны задать начальные условия:

$\varphi(0) = \varphi_0$ – начальный угол;

$\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$ – начальная угловая скорость

в начальный момент времени $t=0$. В результате мы получаем задачу Коши для определения колебания маятника

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + \sin \varphi = 0, \\ \dot{\varphi}(0) := \dot{\varphi}_0, \\ \varphi(0) := \varphi_0. \end{cases} \quad (3)$$

Для моделирования в *Simulink* решения (интегрирования) дифференциального уравнения (3) следует использовать блок **Интегратор (Continuous\Integrator)**. Но дифференциальное уравнение второго порядка предварительно следует преобразовать в эквивалентную систему двух дифференциальных уравнений первого порядка. Это можно сделать, введя в рассмотрение угловую скорость $v = \dot{\varphi}$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = v, \\ \varphi(0) = \varphi_0, \\ \dot{v} = -\gamma v - \sin \varphi, \\ v(0) = v_0. \end{cases} \quad (3)$$

2.3. Динамическая модель колебаний маятника

Каждую модель сохраняйте в новом файле!

2.3.1. Модель малых колебаний

Полученную модель (3) можно упростить, если сделать дополнительные предположения:

$\gamma = 0$ – нет сопротивления среды;
 $\sin \varphi \approx \varphi$ – малые колебания.

При этом уравнение движения маятника (1) примет вид $\ddot{\varphi} + \varphi = 0$.

И соответственно система (3) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = v, \\ \varphi(0) = \varphi_0, \\ \dot{v} = -\varphi, \\ v(0) = v_0. \end{cases} \quad (4)$$

Соответствующая схема моделирования приведена на рис.2.1.

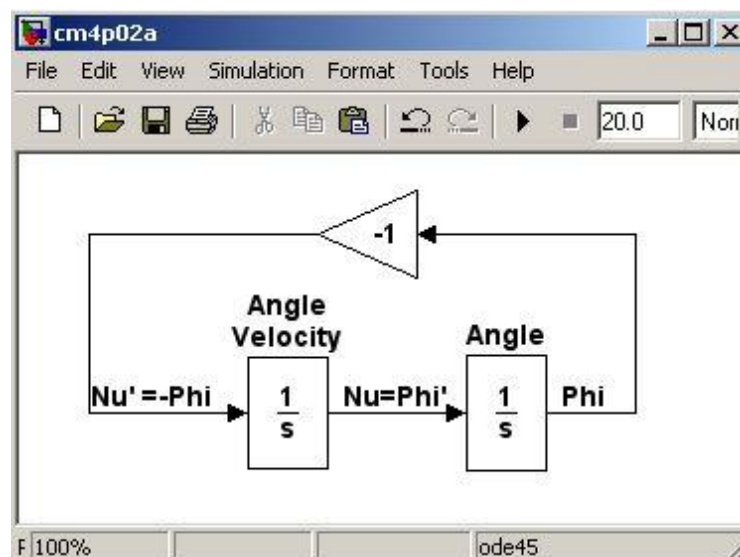


Рис. 2.1. Модель малых колебаний

- 1) Начальные условия на интеграторах устанавливаются при задании внутренних параметров блока.
- 2) Внесите в эту схему блоки, позволяющие:
 - наблюдать фазовые траектории в фазовом пространстве $(\varphi, \dot{\varphi})$, т. е. графики зависимости $\dot{\varphi}$ от φ : (фазовая диаграмма с осями: по горизонтали – угол $\varphi(t)$, по вертикали – угловая скорость $\dot{\varphi}(t)$): графопостроитель **XYGraph** (папка **Sinks**);

- получать два графика $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ на одном осциллографе: блок **Scope** (папка **Sinks**).
- 3) Сохраните модель в файле **L0201.mdl**.
 - 4) Нажмите кнопку **Start simulation** (черный треугольник). Дважды кликните по блоку **Scope** — появится график выходного сигнала.

2.3.2. Модель колебаний маятника без учета сопротивления среды

Смоделируйте уравнение
$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \sin \varphi = 0, \\ \dot{\varphi}(0) = 0, \\ \varphi(0) = 1/2. \end{cases}$$

Оно описывает свободное колебание математического маятника, который отклонили от положения равновесия на угол около 30град. и отпустили без начальной скорости. Соответствующая схема моделирования приведена на рис. 2.2. Она содержит два интегратора, блок **Trigonometric Function** (папка **Math Operations**) для получения функции $\sin \varphi$ и инвертирующий усилитель **Gain** (папка **Math Operations**). Начальные условия на интеграторах устанавливаются при задании внутренних параметров блока.

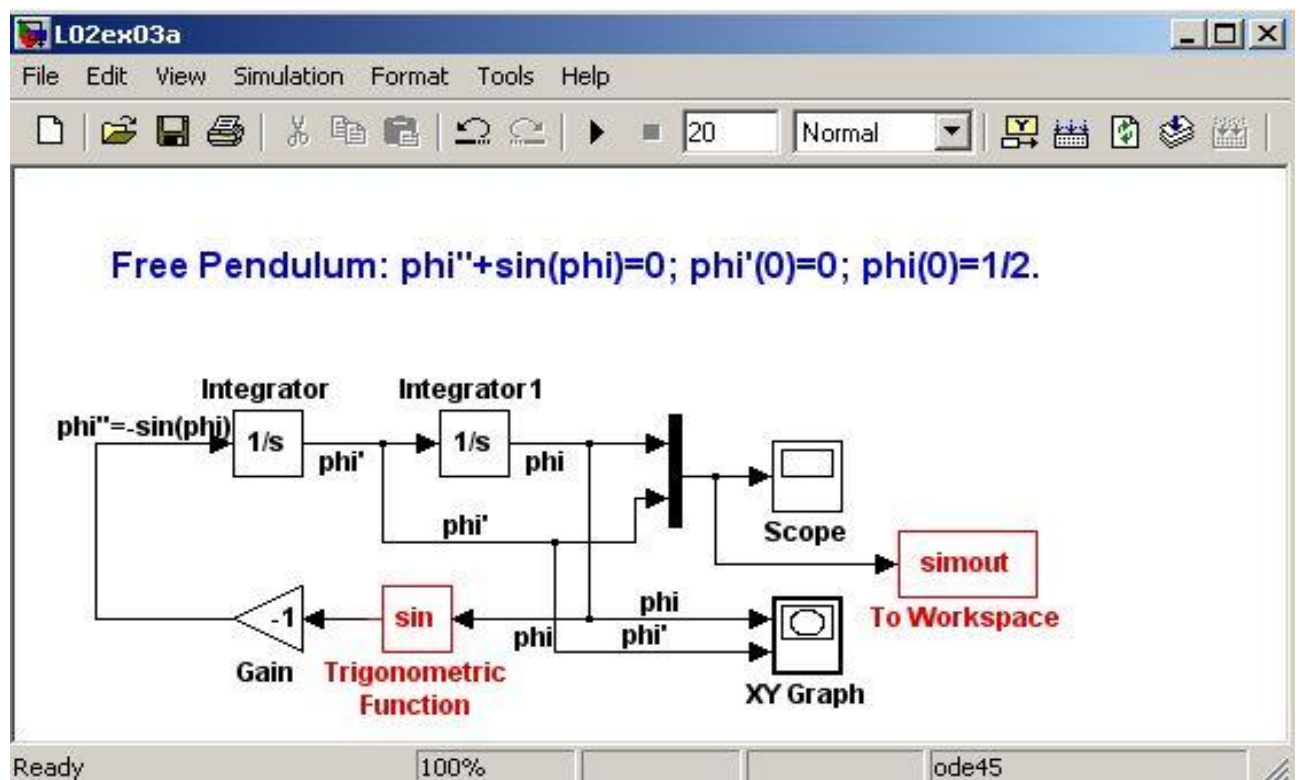


Рис. 2.2. Модель полных колебаний маятника без учета сопротивления среды

- 1) Сохраните модель из примера **L0201.mdl** в файл **L0202.mdl**.
- 2) Внесите в схему блоки, позволяющие
 - отклонять маятник на произвольный угол: блок **Trigonometric Function** (папка **Math Operations**) и инвертирующий усилитель **Gain** (папка **Math Operations**);
 - наблюдать фазовые траектории в фазовом пространстве (φ , $\dot{\varphi}$): графопостроитель **XYGraph** (папка **Sinks**);

- получать два графика $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ на одном осциллографе: блок **Scope** (папка **Sinks**). Для совмещения двух графиков на вход осциллографа **Scope** подавайте «сдвоенный» сигнал. Для этого используйте блок «мультиплексор» **Mux** из группы блоков «маршрутизация сигналов» (**Signal Routing**).
- 3) Для передачи результатов моделирования в MATLAB используйте блок **To Workspace** (папка **Sinks**) с форматом вывода *structure with time*. Теперь после прогона модели графики $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ можно будет построить из командного окна MATLAB, набрав команду `>>plot(simout.time,simout.signals.values)`.

2.3.3. Траектория движения маятника

Добавьте к модели из примера **L0202.mdl** схематическую картинку, изображающую реальные колебания маятника (траекторию движения груза) как на рис.2.3.

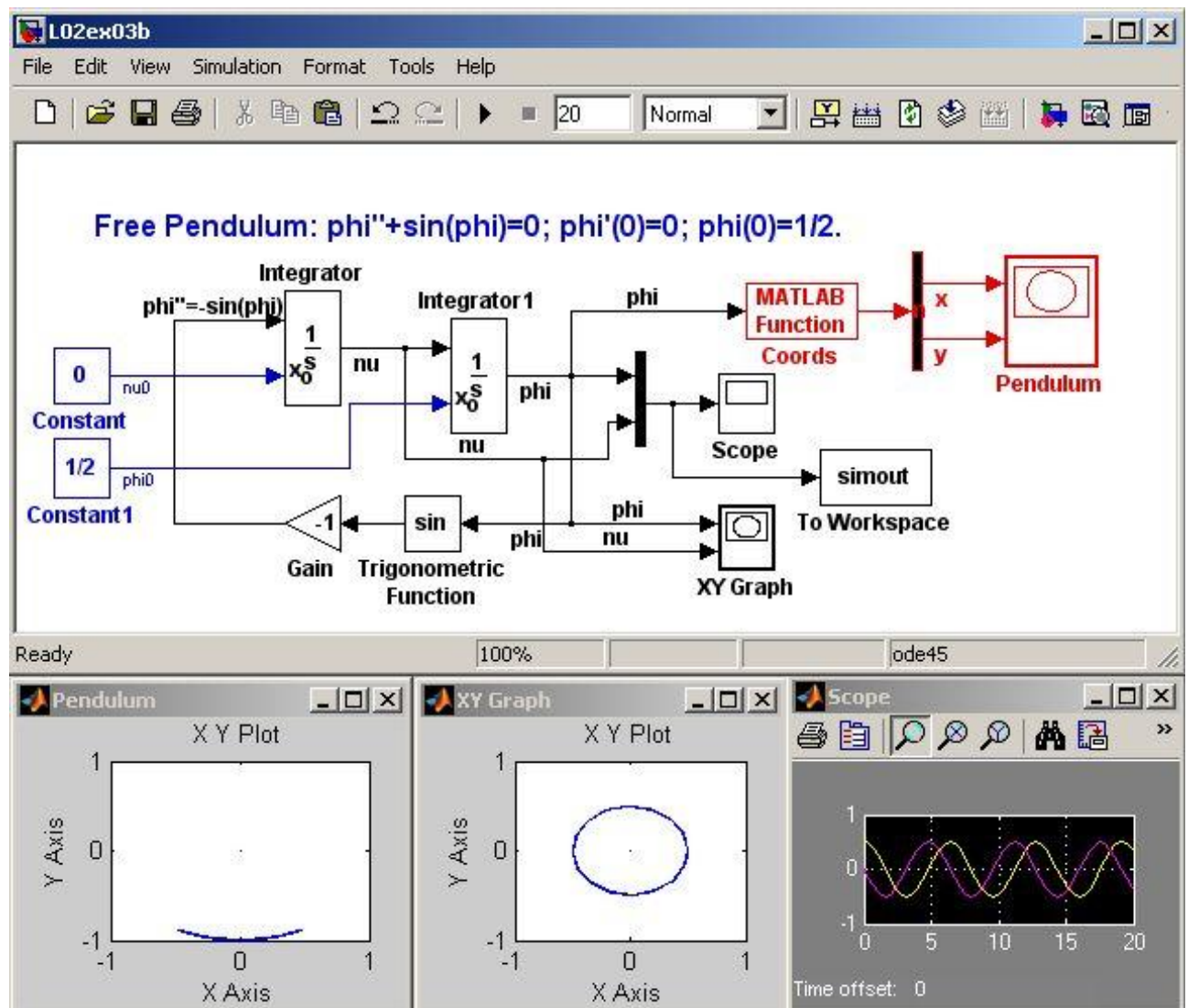


Рис. 2.3. Траектория движения маятника без учета сопротивления среды

Для этого:

- 1) Используйте для этого блок **XY Graph**. Но сейчас нам надо подать на его входы значения **координат** груза. Эти координаты легко вычисляются по известному углу φ наклона

маятника (**вычислите координаты самостоятельно!**). Для реализации этого преобразования в модели используйте блок **User-Defined Functions\ MATLAB Fcn**, который может изменять размерность сигнала. В нашем случае требуется из одномерного сигнала $\varphi(t)$ получить двумерный $[x(t), y(t)]$. Перед подачей координат на график их надо разделить при помощи блока **Разветвитель (Signal Routing\ Demux)** на независимые, но уже одномерные сигналы.

- Измените способ задания начальных условий **Initial Condition Source** обоих интеграторов на **external**. Внесите в схему блоки **Sources\Constant**, позволяющие изменять начальные значения угла отклонения φ_0 и угловой скорости $\dot{\varphi}_0$.

Сохраните модель в файле **L0203.mdl**.

2.3.4. Задание начальных условий

Для удобства экспериментирования с построенной моделью изменим способ задания начальных значений на более наглядный. Для этого вместо двух блоков **Constant** используем блоки **"Реостат" (Math Operations\ Slider Gain)** как на рис.2.4.

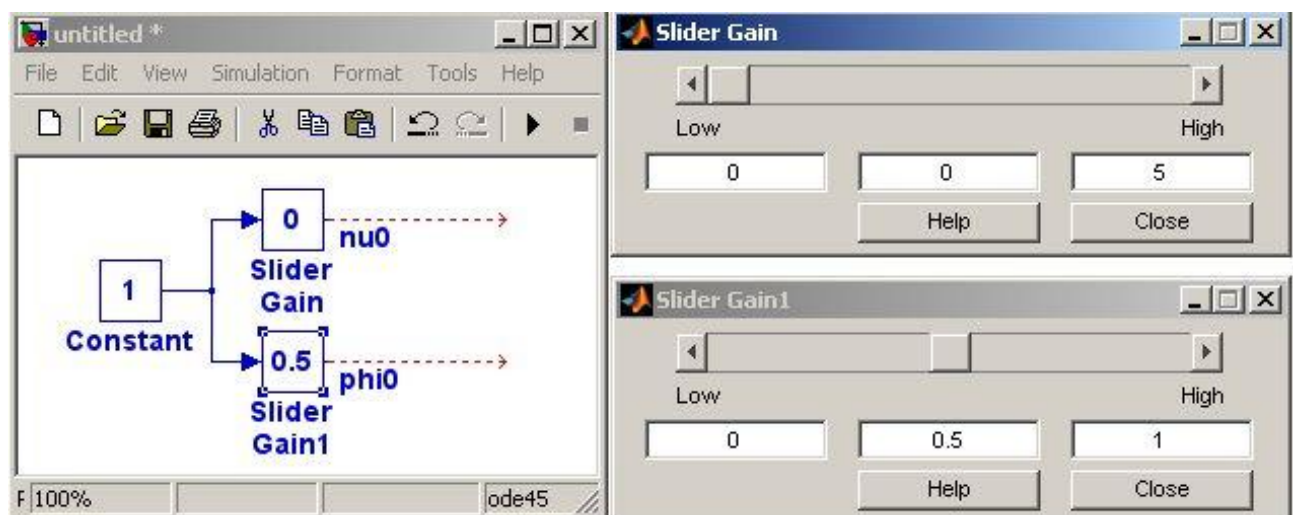


Рис. 2.4. Задание начальных значений с помощью Реостата

Сохраните модель в файле **L0204.mdl**.

2.3.5. Выделение подсистемы «Колебания маятника»

Чтобы избежать потери контроля над моделью и упростить ее схему, мы выделим собственно закон колебания маятника в отдельную подсистему, оставив на верхнем уровне описание интерфейса, отвечающего за ввод начальных условий и отображения полученных результатов.

Для создания подсистемы выделим мышкой оба Интегратора, блок **Trigonometric Function** и инвертирующий усилитель **Gain** – блоки, моделирующие поведение маятника и составляющие сердцевину системы. После чего выполним команду главного меню **Edit\ Create Subsystem (Ctrl-G)**. Отредактируем полученную схему. Для редактирования подсистемы достаточно открыть ее в отдельном окне, дважды кликнув по ней мышкой. Добавьте в подсистему блоки **Sources\In** и **Sinks\Out** для ввода начальных условий и вывода полученных результатов как на рис.2.5.

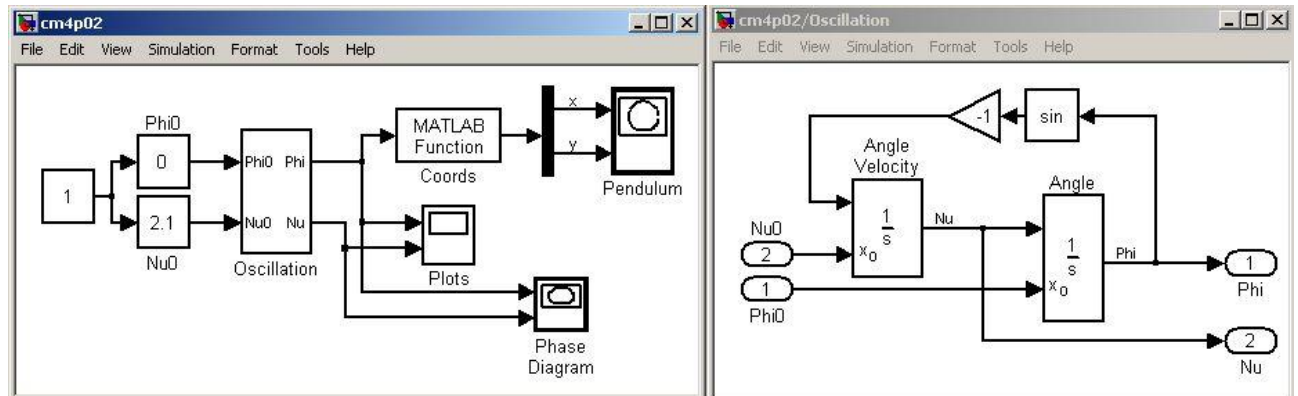


Рис. 2.5. Выделение подсистемы «Колебания маятника»

Сохраните модель в файле **L0205.mdl**.

2.3.6. Затухающие колебания маятника

Самостоятельно измените модель **L0205.mdl** таким образом, чтобы в ней выполнялся учет сопротивления среды.

Сохраните модель в файле **L0206.mdl**.