Formulario

En este formulario: a, b, c y $d \in \mathbb{R}$ y son constantes

Dominio y rango de funciones

Función independiente: $f(x) = c$
$D_{f(x)} = \mathbb{R}$
$R_{f(x)} = c$

Función lineal: $f(x) = ax + c$
$D_{f(x)} = \mathbb{R}$
$R_{f(x)} = \mathbb{R}$

Función cuadrática: $ax^2 + bx + c$
$R_{f(x)} = \mathbb{R}$

Si $a \leq 0,\ R_{f(x)} = (-\infty, V_y]$
Si $a \geq 0,\ R_{f(x)} = [V_y, \infty)$

$$V(x, y) = V\left(\frac{-b}{2a}, \left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

Función racional (tipo 1): $\frac{c}{ax + c}$
$D_{f(x)} = \mathbb{R} - \{x | x \rightarrow ax + c = 0\}$
$ax + c \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{-c}{a}$
$D_{f(x)} \neq \mathbb{R} - \{-\frac{c}{a}\}$

$R_{f(x)} = \mathbb{R} - \{0\}$

Función racional (tipo 2): $\frac{ax^n + c}{bx^n + d}$
$D_{f(x)} = \mathbb{R} - \{bx^n + d = 0\}$
$bx^n + d \neq 0 \rightarrow x^n \neq \frac{-d}{b} \rightarrow \text{ despejar } x \text{ segun el valor de } n$

$R_{f(x)} = \frac{ax^n}{bx^n} = \frac{a}{b}$

Función racional (tipo 3): $\frac{ax^n + c}{bx^m + d}$
$D_{f(x)} = \mathbb{R} - \{x | x \rightarrow \text{denominador} = 0\}$
$bx^m + d \neq 0 \rightarrow x^m \neq \frac{-d}{b} \rightarrow \text{ despejar } x \text{ segun el valor de } n$

$R_{f(x)} = \frac{ax^n}{bx^m}$
si $n < m \rightarrow R_{f(x)} = \frac{ax^n}{bx^m} = \frac{a}{bx^{m-n}}$
si $n > m \rightarrow R_{f(x)} = \frac{ax^n}{bx^m} = \frac{ax^{n-m}}{b}$

Función radical (lineal): $\sqrt{ax + c}$
$D_{f(x)} = \mathbb{R} - \{x | x \rightarrow ax + c < 0\}$

si $a < 0 \rightarrow ax + c \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{-c}{a}$
si $a > 0 \rightarrow ax + c \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{-c}{a}$

$R_{f(x)} = [0, \infty)$

Función radical (cuadrática): $\sqrt{ax^2 - c}$
$D_{f(x)} = \mathbb{R} - \{x | x \rightarrow ax^2 - c < 0\}$
si $a > 0 \rightarrow ax^2 - c \geq 0 \rightarrow x^2 \geq \frac{c}{a} \rightarrow |x| \geq \sqrt{\frac{c}{a}} \rightarrow x \leq -\sqrt{\frac{c}{a}}$ o $x \geq \sqrt{\frac{c}{a}}$

$R_{f(x)} = [\sqrt{c}, \infty)$

Operaciones con funciones

Operación	Representación
Suma	$h(x) = f(x) + g(x)$
Resta	$h(x) = f(x) - g(x)$
Multiplicación	$h(x) = f(x) \cdot g(x)$
División	$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
Composición	$h(x) = f \circ g = f(g(x))$

Función inversa

Inyectiva: $f(x_1) = f(x_2)$
Sobreyectiva: $Cod_{f(x)} = R_{f(x)}$
Biyectiva: Inyectiva y sobreyectiva

Función inversa (f^{-1})
$f(x) = y \;\; f^{-1}(x) = x$

Cómo obtener la inversa de una función

Pasos	$f(x) = x + c$
Representar $f(x)$ como y	$y = x + c$
Despejar en términos de x	$y - c = x$
Intercambiar la posición de las igualdades (opcional)	$x = y - c$
Cambiar x por $f^{-1}(x)$ y y por x	$f^{-1}(x) = x - c$

Inversas de funciones trigonometricas

$\sin \rightarrow \text{arcsen}$	$\cos \rightarrow \arccos$	$\tan \rightarrow \arctan$
$\sec \rightarrow \text{arcsec}$	$\csc \rightarrow \text{arccsc}$	$\cot \rightarrow \text{arccot}$

Límites

Propiedades de los límites

$\lim_{x\to a} f(x)+g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
$\lim_{x\to a} f(x)-g(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
$\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} f(x) / \lim_{x\to a} g(x)$
$\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$

Algunos límites

$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$
$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, cuando f es una función trigonométrica $(\sin, \cos, \tan\ldots)$

Límites laterales

Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = L$
Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a^-} f(x) = M$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = \text{ No existe}$

Límites infinitos

Límite infinito: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$
Límite al infinito: $\lim_{x\to\infty} = L$

Reglas de los infinitos

$\infty * \infty = \infty$	$\infty + \infty = \infty$	$\infty * (-\infty) = -\infty$
$c * \infty = \infty;\ \text{si } c > 0$	$c * \infty = -\infty;\ \text{si } c < 0$	$\infty + c = \infty$
$\infty - \infty \text{ No concluyente}$	$\infty/\infty \text{ No concluyente}$	$0 * \infty = \infty \text{ No concluyente}$
$1/\infty = 0$	$0/\infty = 0$	$\infty/0 =^{+}_{-} \infty \text{ es necesario un análisis}$

Propiedades de los límites infinitos

donde $P_n(x) = \text{polinomio de grado } x$

Límites	Condiciones
$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$	-
$\lim_{x\to-\infty} x^n = \infty$	cuando $x^n > 0$
$\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$	cuando $x^n < 0$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$	-
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$	-
$\lim_{x\to\infty} c^x = \infty$	cuando $c > 1$

Límites	Condiciones
$\lim_{x\to\infty} c^x = 0$	cuando $c < 1$
$\lim_{x\to -\infty} c^x = 0$	cuando $c > 1$
$\lim_{x\to -\infty} c^x = \infty$	cuando $c < 1$
$\lim_{x\to\infty} P_n(x) = \infty$	-
$\lim_{x\to -\infty} P_n(x) = \infty$	si n es par
$\lim_{x\to -\infty} P_n(x) = -\infty$	si n es non

Teorema de compresión (sandwich)

Sean $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, entonces $= \lim_{x\to a} f(x) = L$

Variantes

Si $f(x) \geq g(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$
Si $f(x) \leq g(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

Límites trigonométricos

- $\lim_{x\to\infty} f(x)$ no existe si f e cualquier función trigonométrica. De igual manera con $-\infty$

Ejemplos:

- $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x+1}\sin(x)$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x}$

Derivadas

Propiedades de las Derivadas

donde $f = f(x)$ y $g = g(x)$

Caso	Fórmula
$(f \pm g)'$	$f' \pm g'$
$(cf)'$	$cf'(x)$
$(f \cdot g)'$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$f \cdot g'$	$(f \cdot g)' - f' \cdot g$
$\left(\frac{f}{g}\right)'$	$\frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$
$(f \circ g)'$	$f'(g) \cdot g'$
$\ln{(x)}'$	$\frac{x\ '}{x}$

Algunas derivadas

Función	Derivada
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$

Regla de la cadena
$z(x) = f(g(x))$

$f(x) = \sin(e^x) = \cos(e^x) \cdot e^x$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\frac{1}{\cos x} = \sec x$

Continuidad de funciones

Una función $f(x)$ es **continua** en $x = a$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
Si es continua en todo su dominio entonces la función es continua. Si una función no es ocntinua en un punto a se dice que f es dicontinua en a

Las siguientes funciones son continuas

- Polinomios
- Funciones racionales (siempre que no exista división entre 0)
- Raíces
- Funciones trigoométricas y sus inversas.
- Exponenciales y logaritmos

Se tiene $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$ siempre que f sea continua en $\lim_{x \to a} g(x)$
La composición de funciones continuas es continua

Puntos críticos

Pasos primer método	$f(x) = 2x^2 - 4x - 1$
Derivar	$f'(x) = 4x - 4$
Igualar a 0 y resolver	$4x - 4 = 0 \to x = 1$
Remplazar en $f(x)$	$f(1) = 2(1)^2 - 4(1) - 1 = -3$
Igualar $f'(x)$ a 0 y resolver	$f'(x) = 4x - 4 = 0 \to x = 1$
Evaluar $f'(x)$ del lado izquierdo	$f'(0) = 4(0) - 4 = -4 \leftarrow$ Decreciente
Evaluar $f'(x)$ del lado derecho	$f'(2) = 4(2) - 4 = 4 \leftarrow$ Creciente
-	Como primero disminuye y después aumenta $(1, -3)$ es un mínimo

Pasos segundo método	$f(x) = 2x^2 - 4x - 1$
Derivar	$f'(x) = 4x - 4$
Igualar a 0 y resolver	$4x - 4 = 0 \to x = 1$
Remplazar en $f(x)$	$f(1) = 2(1)^2 - 4(1) - 1 = -3$
Sacar la segunda derivada	$f''(x) = 4$
Evaluar $f''(x)$ en el valor encontrado de x	$f''(1) = 4$
Si $f''(x) > 0$, entonces su punto crítico es un mínimo	Sí aplica, por lo que $(1, -3)$ es un mínimo
Si $f''(x) < 0$, entonces su punto crítico es un máximo	No aplica
Si $f''(x) = 0$, entonces no es ninguno de los dos. "Es un punto silla"	No aplica

Funciones explicitas e implicitas

Una **función implicita** es aquella que $f(x)$, o en dado caso y, no está despejada, es decir:

$x + 2y = 1$

En cambio, una **función explicita** es aquella que $f(x)$ o y si está despejada
$y = 2x$

En forma explicita es: $y = y(x)$
$y(x) = x^2$
$y(x) = e^x + \ln x$

Derivadas de funciones implicitas

Encontrar y' / Encontrar $\frac{dy}{dx}$	$5x^2 + 3 = 2y^3 + 5$
Derivar la ecuación y, como se está derivando respecto a y , cuando saquemos la derivada de un término con y, se le agrega y' multiplicando	$10x = 6y^2y'$
Despejar y'	$\frac{10x}{6y^2} = y'$