

Dynamische und statische Messung des Elastizitätsmoduls

M15

29.11.18

Janosch Ehlers, Piet Braasch

December 6, 2018

INHALT

1. Ziel des Versuches
2. Theoretischer Hintergrund
3. Versuchsaufbau und -Durchführung
4. Statische Messung
5. Dynamische Messung
6. Messprotokoll
7. Anhang

1 Ziel des Versuches

Bestimmung des Elastizitätsmoduls, verschiedener Materialien, über die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallimpulsen in Stäben mithilfe eines Piezoelements. Und der statischen Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch Deformation einseitig eingespannter Stäbe mit diskreten Belastungen.

2 Theoretischer Hintergrund

„Mechanik der deformierbaren Medien“ ist ein Teilgebiet der Physik, welche sich mit den elastischen Eigenschaften von Körpern beschäftigt. Durch elastische Verformung ist es nicht möglich einen Feststoff nachhaltig in seiner Struktur zu verändern. Bei einer plastischen Verformung ist dies der Regelfall. Disziplin dieses Teilgebietes ist die Errechnung von Elastizitätsmodul (E), Torsionsmodul (G) und Kompressionsmodul (K). Zu untersuchen ist das Elastizitätsmodul verschiedener Materialien (Aluminium, Eisen, Messing, Polycarbonat), dynamisch über Messung der Schallgeschwindigkeit in den Materialien und statisch über Biegung der Materialien. Schallwellen breiten sich in Festkörpern sowohl in Longitudinalwellen als auch in Transversalwellen aus. Außerdem ist die Schallausbreitung in Festkörpern schneller, da eine größere Bindung zwischen den Atomen besteht, als im Vergleich zu Gasphasen. Die Schallausbreitung ist abhängig von den elastischen Eigenschaften und der Dichte eines Materials. Wenn Dichte = ρ dann gilt:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Für die dynamische Bestimmung des Elastizitätsmoduls wird der Stab mit Schallimpulsen versetzt, diese können durch ein Piezoelement gemessen werden. Der Abstand der Gemessenen Schwingungen kann in die Ausbreitungsgeschwindigkeit umgerechnet werden. Für die Statische Bestimmung des Elastizitätsmoduls werden die Stäbe einseitig horizontal eingespannt. Das freie Ende wird hierbei durch eine Kraft F belastet. Und der Stab um den Biegepfad abgesenkt. Bei kleinem Biegepfad bleiben die Querschnitte eben, sodass das Hook'sche Gesetz gilt. Die Durchbiegung eines Trägers nimmt mit der dritten Potenz seiner Länge L^3 zu. Und der Biegepfad hängt vom Profil des Trägers ab, welches in diesem Fall durch das sogenannte Flächen-Trägheitsmoment $I = \frac{\pi}{4} \cdot R^4$ beschrieben wird. Es gilt:

$$s = \frac{F}{3EI} \cdot L^3$$

3 Versuchsaufbau und -Durchführung

Zur dynamischen Bestimmung des Elastizitätsmoduls wurde das zu untersuchende Objekt mit einem Holzstab in Schwingung versetzt. Mittels eines Piezoelements wurden dann die Schwingungen gemessen und mit der Computer Software CASSY ausgewertet. Der Stab wurde dabei auf das Piezoelement gestellt und angeschlagen. Der Versuchsaufbau der statischen Messung des Elastizitätsmoduls bestand aus einem an der Wand eingespannten Stabes und der Behängung des freiliegenden Endes durch Gewichte. Mithilfe eines Lasers wurde auf einem entfernten Schirm die Auslenkung des Stabes aus der Ruhelage abgebildet. Durch Variation der Gewichte von 50g bis 1050g kann die Kraft diskret bestimmt werden. Wie in den Skizzen Fig. 4, Fig. 5 zusehen.

4 Statische Messung

In Tab. 1 können die gemessenen Werte von des Statischen Verfahrens eingesehen werden. Da gilt:

$$s = \frac{FL^3}{3EI}$$

mit $I = \frac{\pi}{4} \cdot R^4$. Da s dem Biegefeil entspricht und nicht dem gemessenen Wert nach dem Versuchsaufbau, muss s mithilfe des Strahlensatzes $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (siehe Fig.5) umgerechnet werden. Wenn gilt: $Laenge_{Fixpunkt, Schirm} := l_{ges}$, $Laenge_{Stange} := b$ und $Abstand_{Nullmessung, Messung} := y$ dann kann folgende Gleichung aufgestellt werden:

$$s = \frac{yb}{l_{ges}}$$

$$\frac{yb}{l_{ges}} = \frac{FL^3}{3ER^4\frac{\pi}{4}}$$

oder

$$\frac{yb}{l_{ges}} = \frac{4FL^3}{3ER^4\pi}$$

Da wir E suchen wird nach E umgestellt:

$$\frac{yb}{l_{ges}} = \frac{4FL^3}{3ER^4\pi} \quad | \cdot E$$

$$\frac{Eyb}{l_{ges}} = \frac{4FL^3}{3R^4\pi} \quad | \cdot l_{ges}$$

$$ybE = \frac{4FL^3l_{ges}}{3R^4\pi} \quad | \cdot \frac{1}{yb}$$

$$E = \frac{4FL^3l_{ges}}{3ybR^4\pi}$$

Nach einsetzen der Werte in die Formel kommen wir auf die Werte, wie in Tab. 2 zusehen. Daraus können wir nun Mittelwert und Fehler berechnen:

	<i>Aluminium</i> _(pa)	<i>Messing</i> _(pa)	<i>Eisen</i> _(pa)
Mittelwert	224800185497,967	495174523324,915	819882877639,469
Varianz	±10704770737,9984	±23579739205,9482	±39042041792,3555

Aluminium: (224800185497,967Pa ± 10704770737,9984Pa)

Messing: (495174523324,915Pa ± 23579739205,9482Pa)

Eisen: (819882877639,469Pa ± 39042041792,3555Pa)

Ein Diagramm indem s über F für jedes Material abgebildet wurde ist bei 6.0 Messprotokoll unter Fig. 1, Fig. 2, Fig. 3 zu finden.

5 Dynamische Messung

EISEN

Im Anhang 1 (A1) sieht man die Messkurve von Schallimpulsen in einer Eisenstange, hierbei ist die Zeit $t_{(ms)}$ in Abhängigkeit von der Spannung $UA1_{(V)}$ dargestellt. Zunächst lässt sich beobachten, dass der Graph zu Beginn der Aufzeichnung eine starke Intensität hat, welche bereits nach kurzer Zeit, ca. 40ms nachlässt. Beim Heranzoomen an den Graphen lässt sich starkes Übersteuern erkennen. Die Wellenkämme flachen immer weiter ab und das Übersteuern nimmt auch ab. Unsere Messwerte sind aus dem Bereich zwischen 63-69ms, da hier beinahe keine Übersteuerung mehr zu erkennen ist und Schwingung beinahe harmonisch ablaufen. Bei Messwerten aus anderen Bereichen mit mehr Übersteuerung oder großen Unterschieden zwischen den einzelnen Amplituden würden wesentlich ungenauere Werte ergeben.

POLYCARBONAT

In Anhang 2 (A2) sieht man die Messkurve von Schallimpulsen in einer Stange aus Polycarbonat, hierbei ist die Zeit $t_{(ms)}$ in Abhängigkeit von der Spannung $UA1_{(V)}$ dargestellt. Genau wie bei der Eisenstange lässt sich zu Beginn eine starke Intensität der Welle beobachten, im Gegensatz zur Eisenstange hat die Welle von Polycarbonat eine größere Wellenlänge, also weniger Perioden im gleichen Zeitraum. Auch hier lässt sich beim Heranzoomen an den Graphen starkes Übersteuern feststellen. Der von uns gewählte Zeitraum liegt zwischen 130-140ms, da hier eine beinahe harmonische Schwingung zu erkennen ist und kein Übersteuern vorhanden ist.

MESSING

In Anhang 3 (A3) sieht man die Messkurve von Schallimpulsen in einer Messingstange, hierbei ist die Zeit $t_{(ms)}$ in Abhängigkeit von der Spannung $UA1_{(V)}$ dargestellt. Auch bei der Messingstange lässt sich zu Beginn eine stärkere Intensität beobachten, welche im Verlauf der Messung immer weiter abnimmt. Im Vergleich zu den Maximalen Auslenkungen der Graphen von Eisen und Polycarbonat, beide weit über $\pm 10V$ ist bei Messing die maximale Auslenkung nur bei ca. 8V. Auch hier lässt sich starkes Übersteuern beim Heranzoomen erkennen. Der von uns gewählte Bereich liegt zwischen 30-50ms da hier wieder kaum Übersteuern zu erkennen war und die Welle einer harmonischen Schwingung ähnelt.

ALUMINIUM

In Anhang 4 (A4) sieht man die Messkurve von Schallimpulsen in einer Aluminiumstange, hierbei ist die Zeit $t_{(ms)}$ in Abhängigkeit von der Spannung $UA1_{(V)}$ dargestellt. Zu Beginn der Messung weist auch die Welle der Aluminiumstange eine starke Intensität auf, welche aber nach kurzer Zeit nachlässt. Die maximale Auslenkung ($\pm 10V$) ist zwar größer als bei der Messingstange, aber auch kleiner als bei der Polycarbonat oder der Eisenstange. Näher betrachtet erkennt man auch hier starkes Übersteuern. Der von uns gewählte Bereich liegt zwischen 65-75ms, da hier wieder kaum Übersteuern vorhanden war und die Schwingung sich beinahe harmonisch verhält.

$$\frac{\Delta V_L}{V_L} = \pm \left\{ \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta t}{t} \right\} \cdot V_L$$
$$\Delta V_L = \pm \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta t}{t} \right) \cdot V_L$$

$$\begin{aligned}\Delta V_L &= 775,81 \frac{m}{s} \\ \frac{\Delta \rho}{\rho} &= \pm \left\{ \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{2\Delta d}{d} \right\} \cdot \rho \\ \Delta \rho &= \pm \left\{ \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{2\Delta d}{d} \right\} \cdot \rho \\ \Delta \rho &= 1090,43 \\ \frac{\Delta E}{E} &= \pm \left\{ \frac{2\Delta V_L}{V_L} + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right\} \cdot E \\ \Delta E &= \pm \left\{ \frac{2\Delta V_L}{V_L} + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right\} \cdot E \\ \Delta E &= 102,03 GPa\end{aligned}$$

Messing

$$\begin{aligned}\Delta V_L &= 462,67 \frac{m}{s} \\ \Delta \rho &= 1186,04 \\ \Delta E &= 45,95 GPa\end{aligned}$$

Polycarbonat

$$\begin{aligned}\Delta V_L &= 147,35 \frac{m}{s} \\ \Delta \rho &= 112,52 \\ \Delta E &= 69,29 MPa\end{aligned}$$

Aluminium

$$\begin{aligned}\Delta V_L &= 772,15 \frac{m}{s} \\ \Delta \rho &= 328,17 \\ \Delta E &= 30,56 GPa\end{aligned}$$

Eisen

$$\begin{aligned}\frac{\Delta E}{E} &= \pm \left\{ \frac{2\Delta V_L}{V_L} + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right\} \cdot E \\ \Delta E &= \pm \left\{ \frac{2\Delta V_L}{V_L} + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right\} \cdot E \\ \Delta E &= 102,03 GPa\end{aligned}$$

6 Messprotokoll

Tab. 1 Y ÜBER M

<i>Gewicht</i> _(g)	<i>Aluminium</i> _(mm)	<i>Messing</i> _(mm)	<i>Eisen</i> _(mm)
50	7,5	7	3,5
100	15	12,5	6
150	22,5	18	9
200	30	24	11,25
250	37,25	30	14,25
300	44,75	35,5	16,75
350	51,25	41,25	19,25
400	59,25	46,25	21,75
450	66,25	51,5	24,25
500	74,25	58,5	27,25
550	81,75	64,25	29,75
600	88,75	69,25	32,75
650	96,5	74,25	35,75
700	104	80,5	38,25
750	111,5	85,5	40,75
800	119	91	43,25
850	126,5	96,25	45,75
900	133,5	102,25	48,75
950	141,5	107,75	51,75
1000	149	113,25	54,25
1050	156,5	119,75	56,75

Tab. 2 WERTETAFEL E ÜBER M

<i>Gewicht</i> _(g)	<i>Aluminium</i> _(pa)	<i>Messing</i> _(pa)	<i>Eisen</i> _(pa)
50	212293611210,424	2416104170439,55	4510061118153,83
100	212293611210,424	1353018335446,15	2067111345820,51
150	212293611210,424	939596066282,049	1378074230547,01
200	212293611210,424	704697049711,537	1202682964841,02
250	213718400547,407	544965718443,589	949486551190,281
300	213479609038,415	476414906847,236	740457795517,794
350	217471504166,776	355338148703,029	673580556607,391
400	214980872111,822	390059339948,44	518397829672,854
450	216299151044,583	306509008029,872	488202492171,291
500	214437991121,64	308380247395,134	579273905083,979
550	214241259019,694	263233139191,858	435846242510,665
600	215283662072,543	227945327271,313	344279474668,232
650	214493545005,351	235373560038,331	315388889381,387
700	214334895933,601	210096014820,831	368469045600,804
750	214197589786,302	197809698164,642	276690866144,407
800	214077591136,562	185854166956,889	286766891905,735
850	213971821575,724	175716666941,059	258773998582,597
900	214678932684,699	154378620181,305	277542222655,621
950	213793919416,858	167426862854,899	239665083573,392
1000	213718400547,407	149339772124,299	228620609676,001
1050	213650119908,254	141233646706,279	258285438484,581

7 Anhang

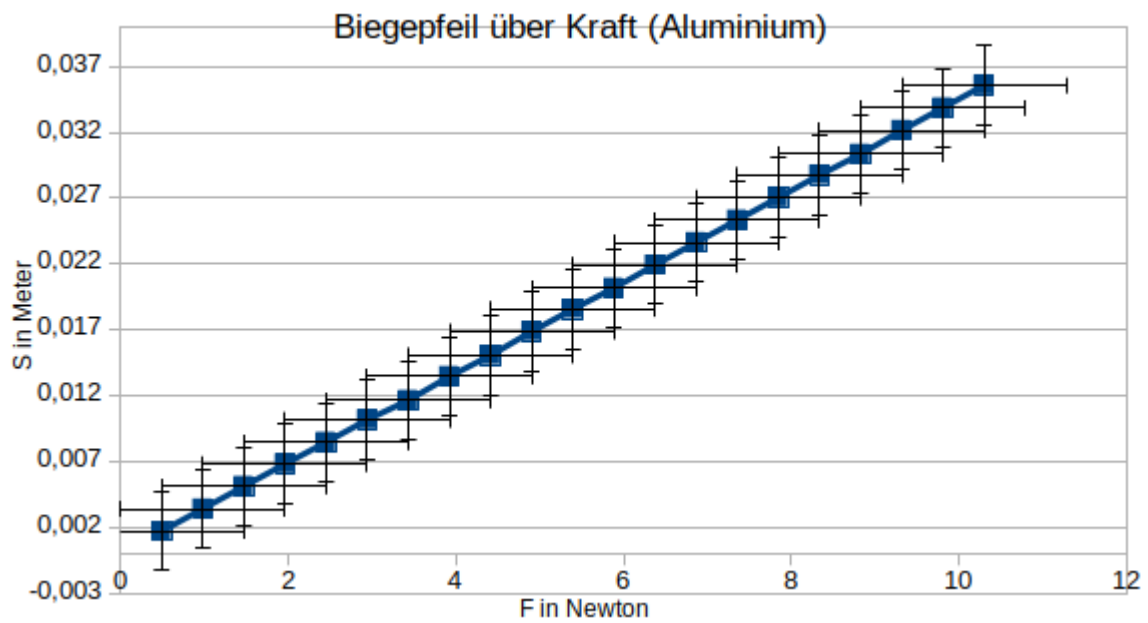


Fig. 1

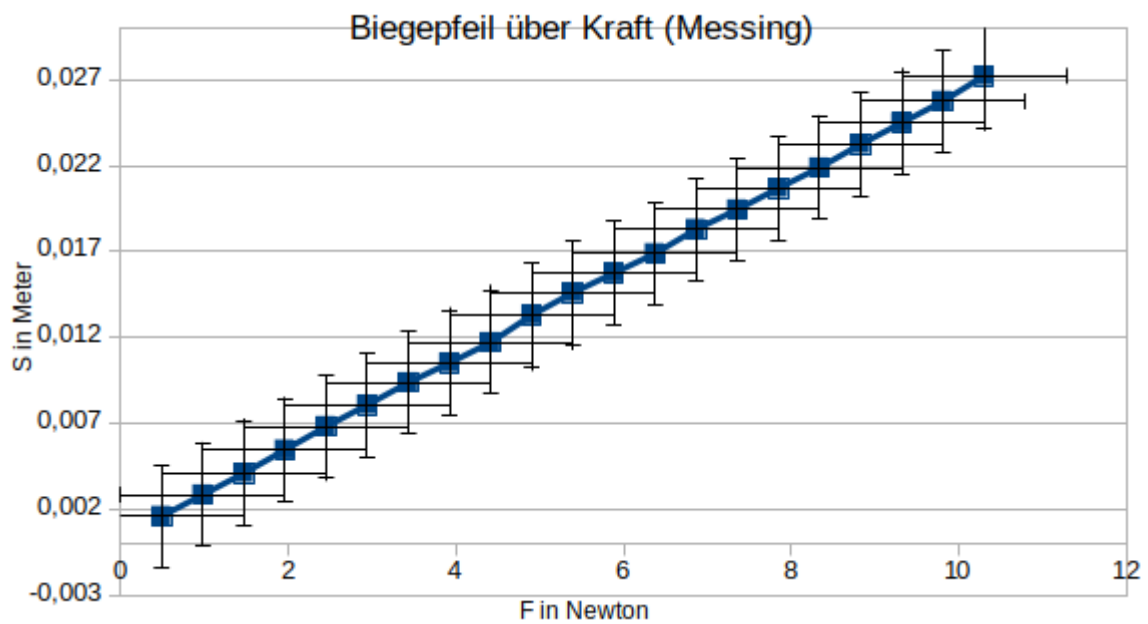


Fig. 2

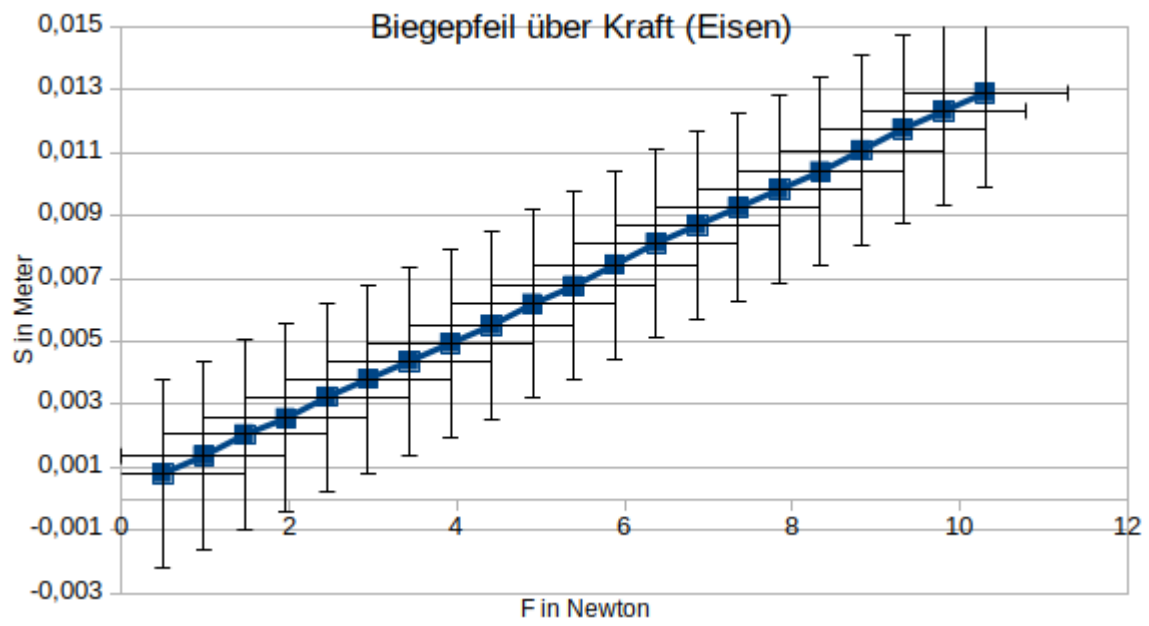
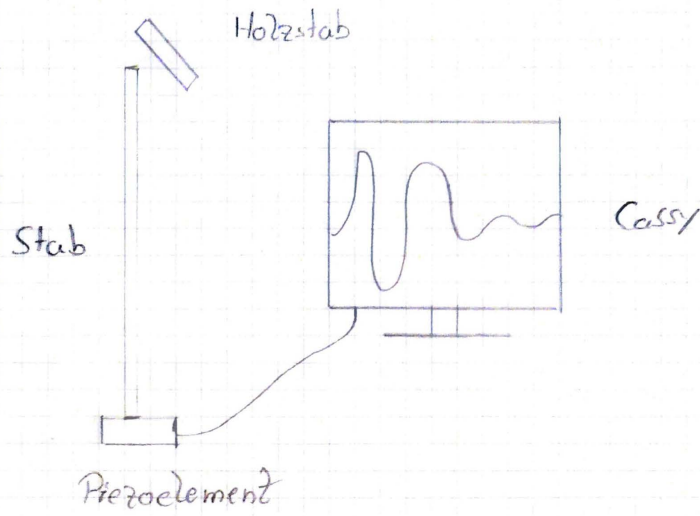


Fig. 3

Dynamisches Verfahren



Statistisches Verfahren

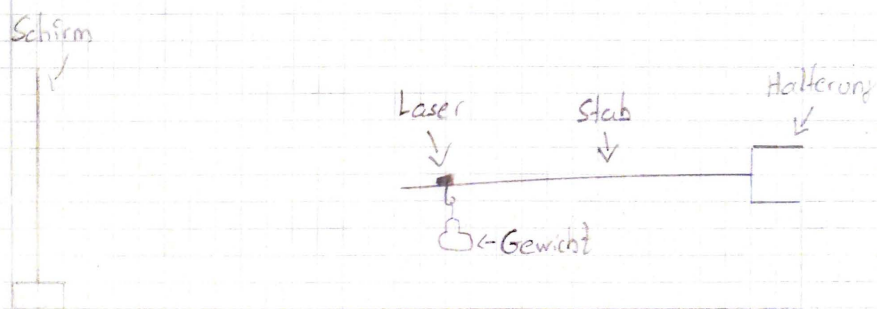


Fig. 4 / 5

	Messing	Tisch	Polycarbonat	Aluminium
L	999,5	1000 mm	1100 mm	999 mm
d	1 mm	12 mm	21,5 mm	11,1 mm = 0
	1 mm Maßgenauigkeit			0,05 mm
m	952,0	876,0	447,1	315,5 g

$$952 / 99,95 \text{ cm} - \left(\frac{1,1}{2} \right)^2$$

9,2178334

1. 120305565

~~401115493~~
~~3,22015521~~
2,498026554

- Statische: Stützweite als Reibfehler

maßfehler Abstand statisch: 6 mm

