Комплексная геометрия

Никита Клемятин

Верстка: Косяк Сергей

НМУ, 2025

Содержание

Перед вами конспект лекций, прочитанный в НМУ в 2025 году. Цель курса – рассказать ряд базовых результатов и техник в комплексной геометрии, дойдя до тех, что не содержатся в книжках Гриффитса-Харриса[3] и/или Хойхбрехтса[2]. Среди них L^2-оценка Хёрмандера (и теорема Кодаиры как следствие из нее), а также теорема Калаби-Яу (и геометрические следствия из нее). Также хотелось бы обсудить саму кэлерову геометрию, т.е. как кривизна влияет на свойства многообразия, как устроены многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны, etc.

1. (Почти) комплексные многообразия. Голоморфные и плюрисубгармонические функции, а также сопутствующая линейная алгебра. Примеры.

2. Подмногообразия и дивизоры.

3. Голоморфные расслоения и когерентные пучки. Когомологии.

4. Эрмитовы метрики и связность Черна. Кривизна. Подрасслоения, вторая фундаментальная форма и уравнение Гаусса.

5. Кэлеровы метрики, связность Леви–Чивита, секционные кривизны и кривизна Риччи. Кэлеровы тождества. Теорема Ходжа и достаточно детальный набросок доказательства.

   Замечание. Обычно теорему Ходжа либо вовсе не доказывают, либо пересказывают всё доказательство (например, по книге Уорнера). Здесь выбран другой путь: не доказываются самые трудные аналитические факты (типа леммы Реллиха или неравенства $\|u\|_{s+2} \leq C_s\big(\|\Delta u\|_s + \|u\|_s\big)$), но показывается, как они работают и зачем нужны. Так слушатели поймут, как используется теория УрЧП в доказательстве, при этом не тратя много времени.

6. Возвращение к кривизнам: положительная/отрицательная кривизна. Лемма Шварца и формулы Кодаиры–Бохнера. Следствия из них.

7. L^2-оценка Хёрмандера. Мультипликаторные пучки идеалов, теорема Наделя. Теорема Кодаиры как следствие из них.

8. (опционально) Доказательство теоремы Ньюлендера–Ниренберга об интегрируемости почти комплексных структур при помощи L^2-оценки Хёрмандера.

   Замечание. Доказательство L^2-оценки использует лишь факт, что тензор Нийенхюса равен нулю, то есть имеет место разложение $d = \partial + \bar{\partial}$ дифференциала де Рама на k-формах. Этого достаточно, чтобы легко получить существование голоморфных координат в окрестности каждой точки.

9. Уравнение Монжа–Ампера и теорема Калаби–Яу. Существование метрик Кэлера–Эйнштейна на многообразиях общего типа и на многообразиях с нулевым классом Черна.

10. Если останется время: теорема Демайи–Пауна о характеристиках кэлерова конуса через интегралы по подмногообразиям (существенным образом используется теорема Калаби–Яу).

Лекция 1

Комплексификация и овеществление векторных пространств

Для начала вспомним некоторые основы линейной алгебры.

Предложение 1.1. *Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{C}$ размерности $\dim_{\mathbb{C}} V = n$ и пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ — $\mathbb{C}$-линейное отображение. Тогда $\mathcal{A}$ также можно рассматривать как вещественное линейное отображение и* $\dim V_{\mathbb{R}} = 2n$

Доказательство. Рассмотрим $V_{\mathbb{R}}$ как то же самое векторное пространство V, но только теперь над $\mathbb{R}$. И соответственно получим линейное отображение $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}\colon V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$.

В обратную сторону, рассмотрим на $V_{\mathbb{R}}$ следующее линейное отображение:

$$J\colon V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}, \quad J^2 = -\operatorname{Id}, \qquad J\colon v \mapsto iv, \quad v \in V. \tag{1.1}$$

пусть (W,J) — вещественное векторное пространство и $J\colon W \to W$, т.ч. $J^2 = -\operatorname{Id}$. Размерность W действительно чётная: пусть $m = \dim_{\mathbb{R}}$, тогда т.к.

$$\det J^2 = \det(-\operatorname{Id} = (-1)^m = (\det J)^2 \geq 0, \quad \Longrightarrow \quad m = 2n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому чётномерное пространство (W,J) над $\mathbb{R}$ можно наделить структурой векторного пространства над $\mathbb{C}$. Пусть $a + bi \in \mathbb{C}$, $w \in W$ и $(a + bi) \cdot w = aw + bJw$. Нетрудно проверить, что операторы $\mathcal{A}\colon W \to W$ коммутируют с J (т.е. $\mathcal{A}J = J\mathcal{A}$) и являются в точности комплексными эндоморфизмами. Если $\det \mathcal{A} \neq 0$, то $\mathcal{A} \in \mathrm{GL(n,\mathbb{C})}$. ■

Рассмотрим ещё некоторые свойства векторных пространств. Пусть W — векторное пространство над $\mathbb{R}$, тогда

$$W_{\mathbb{C}} \simeq W \oplus_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V,$$

где V — теперь рассматривается как комплексное векторное пространство, а $W_{\mathbb{C}}$ называется *комплексификацией векторного пространства.*

$$W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq W \oplus W, \qquad \dim_{\mathbb{R}} W = \dim_{\mathbb{C}} V.$$

Заметим, что $W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq W \oplus W$ и оператор J действует на покомпонентно как

$$J(w_1, w_2) = (-w_2, w_1).$$

эта операция и называется комплексификацией вещественного пространства.

Но как связаны операции комплексификации и овеществления? Если вещественное пространство сначала комплексифицировать, а затем овеществить, то получим:

$$\left(V_{\mathbb{R}}\right)_{\mathbb{C}} \cong V \oplus \overline{V},$$

а провести эти операции в обратном порядке для исходно комплексного пространства:

$$\big(V_{\mathbb{C}}\big)_{\mathbb{R}} \cong V \oplus \overline{V},$$

полученное $\overline{V}$ — это векторное пространство над $\mathbb{C}$, однако $\forall\, a+ib \in \mathbb{C}$, $v \in \overline{V}$ выполняется $(a+ib)\cdot v = (a-ib)v$ и

$$(V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{R}}$$

для которого

$$J(v_1,v_2) = (-v_2, v_1), \qquad v_j \in V,\, j = 1,2.$$

а $J^2 = -\mathrm{Id}$. Тогда можно определить следующие собственные векторыне пространства отображения J, как

$$V^{1,0} = \big\{(v_1,v_2) \in (V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \ \mid\ J(v_1,v_2) = i(v_1,v_2)\big\} \simeq V,$$

$$V^{0,1} = \big\{(v_1,v_2) \in (V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \ \mid\ J(v_1,v_2) = -i(v_1,v_2)\big\} \simeq \overline{V}.$$

Очевидно, что всё то же самое можно написать и для сопряжённых векторных пространств $\big(V_{\mathbb{R}}^*\big)_{\mathbb{C}}$.

Пространство k-форм

Определение 1.2. Пусть $\Lambda^k\big((V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}\big)$ обозначает пространство k-форм на $(V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$. Тогда имеет место следующее разложение

$$\Lambda^k\big((V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}\big) = \Lambda^k(V^* \oplus V^*) = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^p V^* \otimes \Lambda^q V^*.$$

Элементы пространства $\Lambda^{p,q} := \Lambda^p V^* \otimes \Lambda^q V^*$ называются *формами типа* (p,q).

Предложение 1.3. *Форма типа* (n,n)

$$\tau := i^n f_1 \wedge \overline{f}_1 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{f}_n$$

задаёт ориентацию на $V_{\mathbb{R}}$.

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$. Зафиксируем базис $e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n$ в $V_{\mathbb{R}}$.

Тогда оператору $\mathcal{A}$ сопоставляется матрица $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$, которая выражается через комплексную матрицу как

$$\mathcal{A} = B + iC, \qquad B,C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}).$$

В вещественном базисе $V_{\mathbb{R}}$ матрица $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\det \mathcal{A}_{\mathbb{R}} = |\det \mathcal{A}|^2 \geq 0.$$

■

Положительные и сильно положительные формы

Определение 1.4. Пусть $\eta \in \Lambda^{p,q}(V^*)$.

1. Форма η называется *положительной*, если для любых $f_1, \ldots, f_q$ при $q = n - p$ форма
$$\eta \wedge if_1 \wedge \overline{f}_1 \wedge \cdots \wedge if_q \wedge \overline{f}_q$$
положительна.

2. Форма η называется *сильно положительной*, если
$$\eta = \sum_s \gamma_s i f_{1,s} \wedge \overline{f}_{1,s} \wedge \cdots \wedge i f_{p,s} \wedge \overline{f}_{p,s}, \qquad \gamma_s > 0.$$

Пример 1.5. Для формы типа (1,1):

$$\eta \text{ положительна} \quad \Longleftrightarrow \quad \eta = \sum_{j,\bar{k}} h_{j\bar{k}} f_j \wedge \overline{f}_k,$$

где $h_{j\bar{k}} = ih_{jk}$ и $h = (h_{j\bar{k}})$ — эрмитова матрица.

Предложение 1.6. (1,1)-*форма положительна тогда и только тогда, когда она положительна на ограничении к каждому одномерному подпространству.*

Доказательство. Рассмотрим 1-ое подпространство $L = \langle \xi \rangle \subset V$ и $\eta|_L \geq 0$. Продолжим ξ до базиса, тогда

$$\eta \wedge if_1 \wedge \overline{f}_1 \wedge \cdots \wedge if_n \wedge \overline{f}_n > 0.$$

В обратную сторону ограничение $\eta|_L$ имеет вид

$$\eta|_L = \eta_{1\bar{1}} f_1 \wedge \overline{f}_1,$$

где $\eta_{1\bar{1}} = \eta(\xi, \bar{\xi})$. ■

Следствие 1.7. (1,1)-*форма имеет вид*

$$\eta = i \sum_{j,k=1}^{n} h_{j\bar{k}} f_j \wedge \overline{f}_k,$$

где $H = (h_{j\bar{k}})$ *— положительно определённая эрмитова матрица. То есть*

$$\forall \xi = \xi^j e_j \in V, \quad h_{j\bar{k}} \xi^j \overline{\xi^k} > 0.$$

Предложение 1.8. *Если* (V,h) *— положительное эрмитово пространство, то* h *определяет евклидову метрику* g *и симплектическую структуру* ω *на* $V_{\mathbb{R}}$*:*

$$h(\xi_1,\xi_2) = g(\xi_1,\xi_2) + i\omega(\xi_1,\xi_2).$$

Доказательство. Для $\xi_1,\xi_2 \in V$ имеем

$$h(\xi_1,\xi_2) = g(\xi_1,\xi_2) + i\omega(\xi_1,\xi_2).$$

Заметим, что

$$h(\xi_2,\xi_1) = \overline{h(\xi_1,\xi_2)} = g(\xi_2,\xi_1) - i\omega(\xi_2,\xi_1).$$

Кроме того,

$$h(i\xi_1, i\xi_2) = h(\xi_1,\xi_2),$$

откуда следует

$$g(J\xi_1, J\xi_2) = g(\xi_1,\xi_2), \qquad \omega(J\xi_1,J\xi_2) = \omega(\xi_1,\xi_2).$$

Поскольку $h(\xi,\xi) = g(\xi,\xi) > 0$, то форма g является положительно определённой.

Далее,

$$h(i\xi_1,\xi_2) = g(J\xi_1,\xi_2) + i\omega(J\xi_1,\xi_2),$$

но также

$$h(i\xi_1,\xi_2) = ih(\xi_1,\xi_2) = ig(\xi_1,\xi_2) - \omega(\xi_1,\xi_2).$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$g(J\xi_1,\xi_2) = -\omega(\xi_1,\xi_2), \qquad -\omega(\xi_1,\xi_2) = -g(\xi_1,J\xi_2).$$

То есть g и ω согласованы с комплексной структурой J. ■

Лекция 2

Голоморфные функции многих переменных

Определение 2.1. Пусть Ω — открытое и связное множество в $\mathbb{C}^n$. Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ называаается *голоморфной функцией нескольких переменных*, если она непрерывна и голоморфна по каждой переменной $(z^1, \dots z^n)$.

Предложение 2.2. *Пусть* $z_0 \in \Omega$ *и задан полидиск* $P(z_0,R) = \{z \in \mathbb{C}^n \big| |z^j - z_0^j| < R_j, j \in \overline{1,n}\}$ *и его граница* $T(z_0,R) = \{z \in \mathbb{C}^n \big| |z^j - z_0^j| = R_j, j \in \overline{1,n}$, *где* $R = \{R_1, \dots, R_n | R_i > 0\}$, *тогда если* f *голоморфна в* Ω *(*$f \in \mathcal{O}(\Omega)$*), то верно*

$$f(z_0) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T(z_0,R)} \frac{f(\xi) d\xi^1 \dots d\xi^n}{(z^1 - \xi^1) \dots (z^n - \xi^n)}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству для одномерного случая. ∎

Следствие 2.3. 1. *Голоморфная функция аналитична*

2. *Пусть* $\nu = (\nu_1 \dots \nu_n)$ *— мультииндекс и задана производная*

$$f^{(\nu)} = \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial z^{\nu_1} \dots \partial z^{\nu_k}} f, \quad \Longrightarrow \quad f^{(\nu)}(z_0) = \frac{\nu!}{(2\pi n)^n} \int\limits_{T(z_0,R)} \frac{f(\xi) d^n \xi}{(z-\xi)^{\nu+1}}.$$

3. *Верна следующая оценка*

$$|f^\nu(z_0)| \leq \frac{\nu! \sup_T |f|}{R_1^{\nu_1} \cdots R_n^{\nu_n}}$$

4. *Если* f *голоморфна на* $\mathbb{C}^n$ *и ограничена, то* $f \equiv const$.

Определение 2.4. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, функция $F\colon \Omega \to \mathbb{C}^m$ назывется *голоморфным отображением*, если оно задано голоморфными функциями.

Т.е. если $(w^i \dots w^n)$ — координыты на $\mathbb{C}^m$, то функции $w^j = F^j(z^1 \dots z^n)$, $j = 1 \dots m$ являются голоморфными.

Предложение 2.5 (Цепное свойство)**.** *Пусть функция* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *голоморфна,* $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)\colon \Omega' \subset \mathbb{C}^p \to \Omega$, *где* $\varphi^j \in \mathcal{O}(\Omega')$ *для всех* $j = 1, \dots, n$, *и* $(\varphi^1(w), \dots, \varphi^n(w)) \in \Omega$ *для всех* $w \in \Omega'$.

Тогда

$$f\big(\varphi^1(w), \dots, \varphi^n(w)\big) \in \mathcal{O}(\Omega').$$

Также можно дать и альтернативное определение голоморфного отображения:

Определение 2.6. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, функция $F\colon \Omega \to \mathbb{C}^m$ называется *голоморфным отображением*, если $\forall g \in \mathcal{O}(C^m)$ F^*g — голоморфная функция.

После чего мы наконец готовы дать центральное определение нашего курса.

Определение 2.7. Хаусдорфово топологическое пространство X со счетной базой топологии называется *комплексным многообразием*, если существует атлас карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, такой что

$$X = \bigcup_\alpha U_\alpha, \quad \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n,$$

и для любых α, β отображение переклейки

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\colon \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

и его обратное — $\varphi_{\beta\alpha}$ — голоморфны.

Пусть X — комплексное многообразие комплексной размерности n. Как следует из первой лекции, комплексификация овеществлённого касательного пространства в точке $x \in X$ раскладывается в прямую сумму подпространств двух типов (1,0) и (0,1):

$$(T_x)_\mathbb{R} \otimes \mathbb{C} \cong T_x \oplus \overline{T_x}, \qquad \big((T_x)^*_\mathbb{R}\big) \otimes \mathbb{C} \cong T^*_x \oplus \overline{T^*_x}.$$

В локальных голоморфных координатах $z^j = x^j + iy^j$ базис 1-форм имеет вид

$$dz^j = dx^j + idy^j \quad \text{— (1,0)-форма,} \qquad d\bar{z}^j = dx^j - idy^j \quad \text{— (0,1)-форма.}$$

Соответственно, внешние степени кокасательного пространства также раскладываются по типам:

$$\Lambda^k\big(((T^*_x)_\mathbb{R} \otimes \mathbb{C})\big) = \Lambda^k\big(T^*_x \oplus \overline{T^*_x}\big) \cong \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^p T^*_x \otimes \Lambda^q \overline{T^*_x} \cong \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q} T^*_x,$$

и элементы суммы называют дифференциальными формами типа (p,q).

Дифференциал де Рама

Глобально для комплексного многообразия X внешнее дифференцирование

$$d\colon \Gamma\big(\Lambda^k (T^*_X)_\mathbb{R} \otimes \mathbb{C}\big) \longrightarrow \Gamma\big(\Lambda^{k+1} (T^*_X)_\mathbb{R} \otimes \mathbb{C}\big)$$

согласовано с разложением по типам и раскладывается как $d = \partial + \bar\partial$, т.е.

$$\partial\colon \Gamma(\Lambda^{p,q} T^*_X) \to \Gamma(\Lambda^{p+1,q} T^*_X), \qquad \bar\partial\colon \Gamma(\Lambda^{p,q} T^*_X) \to \Gamma(\Lambda^{p,q+1} T^*_X).$$

Следствие 2.8. *Функция $f\colon X \to \mathbb{C}$ является голоморфной тогда и только тогда когда $\bar{\partial} f = 0$.*

Замечание. Т.к. $d^2 = 0$, то $\partial^2 + \bar{\partial}^2 + \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$. Заметим, что если

$$\Psi_{p,q} \in \Gamma\big(\Lambda^{p,q} T_x^*\big),$$

то

$$\partial^2 \Psi_{p,q} \in \Gamma\big(\Lambda^{p+2,q} T_x^*\big), \qquad \bar{\partial}^2 \Psi_{p,q} \in \Gamma\big(\Lambda^{p,q+2} T_x^*\big),$$

а также

$$(\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)\Psi_{p,q} \in \Gamma\big(\Lambda^{p+1,q+1} T_x^*\big).$$

Следовательно,

$$0 = d^2 = \partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial.$$

Понятное дело, что можно определить и когомологии Дольбо комплексного многообразия X как

$$H^{p,q}(X) = \frac{\ker\big(\bar{\partial}\big|_{\Gamma(\Lambda^{p,q} T_X^*)}\big)}{\operatorname{Im}\big(\bar{\partial}\big|_{\Gamma(\Lambda^{p,q-1} T_X^*)}\big)}.$$

Предложение 2.9. *Пусть $\Psi_{p,q} \in \Gamma(\Lambda^{p,q})$ удовлетворяет условию*

$$\bar{\partial}\Psi_{p,q} = 0.$$

Тогда её коэффициенты образуют голоморфную функцию.

Замечание. Из условия $\bar{\partial}\Psi = 0$ **не следует**, что $\partial\Psi = 0$.

Пусть $\pi\colon E \to X$ — комплексное векторное расслоение над комплексным многообразием X.

Определение 2.10. Говорят, что E является *голоморфным векторным расслоением*, если существует покрытие $\{U_\alpha\}$ множества X, $U_\alpha \subset \mathbb{C}^n$, такое что функции перехода

$$\gamma_{\alpha\beta}\colon E|_{U_\alpha \cap U_\beta} \longrightarrow E|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

являются голоморфными.

ТУТ ЕЩЕ ОДНО УТВЕРЖДЕНИЕ

Лекция 3

Рассмотрим действие оператора $\bar{\partial}$ на формах, а именно

$$\bar{\partial}\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial_{\bar{k}}\alpha_{I\bar{J}}}{\partial \overline{z}^k}.$$

Рассмотрим уравнение вида $\bar{\partial}u = f$. Очевидно, что необходимым условием для его решения является условие $\bar{\partial}f = 0$. в случае если взять (0,1)-форму f:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{C}} \frac{f_j(z_1,\ldots,z_{j-1},\zeta,z_{j+1},\ldots,z_n)}{\zeta - z_j} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Потоки и обобщенные функции

Пусть $\mathcal{D}^k(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}$ — пространство k -форм с компактными носителями (со значениями в $\mathbb{K}$ или $\mathbb{C}$).

Пусть $L \subset \Omega$ — компакт, $\alpha \in \mathcal{D}^k(\Omega)$, определим

$$P_{s,l} = \sup_{x\in L}\ \sup_{|\nu|,|J|\le s} |\partial^\nu \alpha_J(x)|, \quad \text{где} \quad \alpha = \sum_{|J|=k} \alpha_J dx^J, \quad \partial^\nu = \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1}\cdots \partial x_n^{\nu_n}}$$

Чтобы как-то это проиллюстрировать, рассмотрим несколькопримеров.

Определение 3.1. Поток T размерности k (или степени $n-k$) — это линейный функционал на $\mathcal{D}^{n-k}(\Omega)$, непрерывный в обычной топологии.

Пример 3.2. 1. Пусть β — гладкая $(n-k)$-форма на Ω. Тогда

$$T_\beta(\alpha) = \int_\Omega \beta \wedge \alpha.$$

2. Пусть $\Sigma \subset \Omega$ — гладкое ориентированное многообразие размерности k. Тогда

$$T_\Sigma(\alpha) = \int_\Sigma \alpha.$$

Пусть

$$\langle T_\beta,\alpha\rangle :\ = T_\beta(\alpha) := \int_\Omega \beta\wedge\alpha.$$

Определим также следующие обозначения функционалов T_Σ по формуле

$$T_\Sigma(\alpha) = \int_\Sigma \alpha = [\Sigma].$$

Ω — область в $\mathbb{R}^n$ или ориентируемое многообразие без края.

Если $\alpha \in \mathcal{D}^{k-1}(\Omega)$, $\beta \in \Gamma(\Lambda^{n-k}\Omega)$, то

$$0 = \int_\Omega d(\beta \wedge \alpha) = \int_\Omega d\beta \wedge \alpha + (-1)^{n-k} \int_\Omega \beta \wedge d\alpha.$$

Кроме того,

$$\int_\Omega \beta \wedge d\alpha = \langle T_\beta, d\alpha \rangle.$$

Определение 3.3. Определим оператор d на потоках размерности k по формуле

$$\langle dT, \alpha \rangle = (-1)^{n-k+1} \langle T, d\alpha \rangle, \qquad \alpha \in \mathcal{D}^{k-1}(\Omega).$$

Предложение 3.4. *Пусть* $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, $\dim \Sigma = k$, *а* $\gamma \in \mathcal{D}^{k-1}(\Omega)$, *тогда*

$$dT_\Sigma = (-1)^{n-k+1} T_{\partial\Sigma}.$$

Доказательство. Доказательство следует из теоремы Стокса.

$$T_\Sigma(d\gamma) = \int_\Sigma d\gamma = \int_{\partial\Sigma} \gamma = (-1)^{n-k+1} \langle dT_\Sigma, \gamma \rangle.$$

∎

Пусть $F\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ — гладкое отображение между ориентируемыми C^∞-многообразиями размерности m_1 и m_2. Тогда для каждого k определён непрерывный оператор на гладких формах

$$F^*\colon \Gamma^k(\Omega_2) \longrightarrow \Gamma^k(\Omega_1), \qquad \operatorname{supp}(F^*u) \subset F^{-1}(\operatorname{supp} u).$$

Вообще говоря, F^* *не* переводит $\mathcal{D}^k(\Omega_2)$ в $\mathcal{D}^k(\Omega_1)$ (если F не собственное), лишь в $\Gamma^k(\Omega_1)$.

Определение 3.5 (Носитель потока)**.** Пусть Ω — ориентируемое m-мерное многообразие и $T \in \mathcal{D}'_k(\Omega)$ — поток размерности k (степени $m-k$). Его *носителем* $\operatorname{supp} T$ называется наименьшее замкнутое множество $A \subset \Omega$ такое, что

$$\langle T, \alpha \rangle = 0 \quad \text{для всех } \alpha \in \mathcal{D}^{m-k}(\Omega) \text{ с } \operatorname{supp}\alpha \subset \Omega \setminus A.$$

Пусть $F\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ — гладкое отображение и $T \in \mathcal{D}'_k(\Omega_1)$ такой, что ограничение $F\big|_{\operatorname{supp} T}\colon \operatorname{supp} T \to \Omega_2$ собственно (прообраз компакта компактен). Тогда существует единственный поток $F_*T \in \mathcal{D}'_k(\Omega_2)$, определённый формулой

$$\langle F_*T, \alpha \rangle = \langle T, F^*\alpha \rangle, \qquad \alpha \in \mathcal{D}^{m_2-k}(\Omega_2),$$

где $m_2 = \dim \Omega_2$.

Пример 3.6. Пусть α — 1-форма на $\mathbb{R}$ с компактным носителем.

$$\alpha = \alpha(x)dx.$$

Зададим отображение

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto x.$$

Предложение 3.7. *Пусть $T \in \mathcal{D}'_k(\Omega_1)$ и ограничение $F\big|_{\operatorname{supp} T}$ собственное. Тогда*

1. $\operatorname{supp}(F_*T) \subset F(\operatorname{supp} T)$.
2. $F_*\big(T \wedge F^*\alpha\big) = (F_*T) \wedge \alpha$.
3. $d(F_*T) = F_*(dT)$.
4. *Если $G\colon \Omega_2 \to \Omega_3$ и $G\big|_{\operatorname{supp}(F_*T)}$ собственное, то*

$$G_*(F_*T) = (G \circ F)_*T.$$

Пусть теперь $F\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ — субмерсия (т.е. F сюръективно и $dF_x\colon T_x\Omega_1 \to T_{F(x)}\Omega_2$ сюръективно для всех $x \in \Omega_1$).

Если $\alpha \in \mathcal{D}^k(\Omega_1)$ (форма с компактным носителем), $\dim \Omega_i = n_i$ и $k \geq n_1 - n_2$, то можно определить $F_*\alpha$ (интегрирование по слоям).

Обозначим $\mathcal{F}_y = \{x \in \Omega_1 \mid F(x) = y\}$. Локально существуют координаты $x = (x^1, \dots, x^{n_1})$, $y = (y^1, \dots, y^{n_2})$ такие, что $F(x) = (y^1, \dots, y^{n_2})$ и $x^i = y^i$ для $1 \leq i \leq n_2$; положим $\hat{x} = (x^{n_2+1}, \dots, x^{n_1})$ и пусть $\operatorname{supp} \alpha \subset \mathcal{F}_y \times \{|y| < 1\}$. Тогда при таких координатах

$$(F_*\alpha)(y) = \int\limits_{\hat{x} \in \widehat{\mathcal{F}}_y} \alpha(y,\hat{x}).$$

В этом случае определяем оператор на токах

$$F^*\colon \mathcal{D}'_k(\Omega_2) \longrightarrow \mathcal{D}'_{k+n_1-n_2}(\Omega_1),$$

по дуальности

$$\langle F^*T, \alpha \rangle = \langle T, F_*\alpha \rangle, \qquad \forall \alpha \in \mathcal{D}^{n_2-k}(\Omega_1).$$

Пример 3.8. Пусть δ_0 — дельта-функция на $\mathbb{R}^k$, $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$. Пусть $F\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $F(x,y) = x - y$. Тогда

$$F^*\delta_0 = [\Delta],$$

где $\Delta = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \mid x = y\big\}$ — диагональ.

Ядро Бохнера-Мартинелли

Вернемся теперь к нашей первоначальной задачи, а именно построить фундаментальное решение для оператора $\bar\partial$ в $\mathbb{C}^n$.

Пусть мы живём в $\mathbb{C}^n$ с координатами $z = (z^1, \ldots, z^n)$, $|z|^2 = \sum_{j=1}^n z^j \bar z^j$. Определим $(n,n-1)$-форму (поток) Бохнера–Мартинелли

$$K(z,\bar z) = \frac{(n-1)!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \frac{\bar z^j}{|z|^{2n}} d\bar z^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar z^j} \wedge \cdots \wedge d\bar z^n \wedge dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n.$$

Теорема 3.9 (Фундаментальное решение для $\bar\partial$). *Для $n \geq 2$ имеет место тождество потоков*

$$\bar\partial K(z,\bar z) = \delta_0,$$

где δ_0 — дельта-функционал.

Доказательство. Обозначим через

$$dV = dx^1 \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge dy^n = \left(\frac{1}{2i}\right)^n \bigwedge_{s=1}^n dz^s \wedge d\bar z^s$$

меру Лебега в $\mathbb{R}^{2n}$.

Вне начала координат дифференцирование действует покомпонентно, и из определения K получаем

$$\bar\partial K = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar z^j}\left(\frac{\bar z^j}{|z|^{2n}}\right) d\bar z^1 \wedge \cdots \wedge d\bar z^n \wedge dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n.$$

Используя тождество

$$\frac{\partial}{\partial \bar z^j}\left(\frac{\bar z^j}{|z|^{2n}}\right) = -\frac{1}{n-1} \frac{\partial^2}{\partial z^j \partial \bar z^j}\left(\frac{1}{|z|^{2n-2}}\right),$$

а также равенство

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z^j \partial \bar z^j} = \frac{1}{4}\Delta_{\mathbb{R}^{2n}},$$

получаем (в смысле обычных функций вне 0)

$$\bar\partial K = -\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{4}\Delta_{\mathbb{R}^{2n}}\left(\frac{1}{|z|^{2n-2}}\right) dV. \tag{3.1}$$

Напомним фундаментальное решение для лапласиана в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 3)$:

$$N(y) = -\frac{1}{(m-2)\sigma_{m-1}} \frac{1}{|y|^{m-2}}, \qquad \Delta_{\mathbb{R}^m} N = \delta_0,$$

где $\sigma_{m-1} = \dfrac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}$. При $m = 2n$ имеем

$$\Delta_{\mathbb{R}^{2n}}\left(\frac{1}{|z|^{2n-2}}\right) = -(2n-2)\sigma_{2n-1}\delta_0.$$

Подставляя это в (3.1) и используя $\sigma_{2n-1} = \dfrac{2\pi^n}{(n-1)!}$, плучаем

$$\bar{\partial}K = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{2n-2}{4(n-1)}\frac{2\pi^n}{(n-1)!}\delta_0 = \delta_0.$$

Здесь использовано тождество форм $d\bar{z}^1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^n\wedge dz^1\wedge\cdots\wedge dz^n = (2i)^n dV$, которое компенсирует соответствующие множтели.

∎

Лекция 4

Как мы выяснили на прошлой лекции

$$k(z,\overline{z}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\frac{\overline{z}^j dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\overline{z}^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\overline{z}^j} \wedge \cdots \wedge dz^n}{|z|^{2n}},$$

удовлетворятn уравнению

$$\overline{\partial} k(z,\overline{z}) = \delta_0. \tag{4.1}$$

Рассмотрим отображение $\pi\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, заданное как $(z,\xi) = z - \xi$. При помощи этого мы можем определить *форму Бохнера-Мартинелли*

$$K_{BM}(z,\xi) := \pi^* k(z,\overline{z}) \tag{4.2}$$

обладающую следующим свойством

$$\overline{\partial} k_{BM} = [\Delta], \tag{4.3}$$

где множество $\Delta = \{(z,\xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} | z = \xi\}$ — всем привычная диагональ.

Заметим, что K_{BM} можно представить в виде следующей суммы:

$$K_{BM} = \sum_{p,q} K_{BM}^{p,q}(z,\xi),$$

где $K_{BM}^{p,q}$ — это компонента K_{BM} бистепени (p,q) по переменной z (соответственно $(n-p,n-q+1)$ по переменной ξ).

Теорема 4.1 (Формула Коппельмана)**.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ — ограниченная открытая область с кусочно C^1-гладкой границей. Тогда для любой (p,q)-формы v класса C^1 на $\overline{\Omega}$ для всех $z \in \Omega$ выполняется следующая формула:*

$$v(z) = \int_{\partial\Omega} K_{\mathrm{BM}}^{p,q}(z,\xi) \wedge v(\xi) + \bar{\partial}_z \int_{\Omega} K_{\mathrm{BM}}^{p,q-1}(z,\xi) \wedge v(\xi) + \int_{\Omega} K_{\mathrm{BM}}^{p,q}(z,\xi) \wedge \bar{\partial}_z v(\xi). \tag{4.4}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\partial\Omega} K_{\mathrm{BM}}(z,\xi) \wedge v(\xi),$$

его можно рассматривать как форму, которая задает поток, т.е. взяв $w \in \mathcal{D}^{n-p,n-q}$, можем получить

$$\int_{\partial\Omega\times\Omega} K_{\mathrm{BM}}(z,\xi) \wedge v(\xi) \wedge w(z).$$

Т.к. w — это форма с компактным носителем, то она зануляется на границе области $\partial\Omega$, а значит область интегрирования может быть расширена до $\partial(\Omega\times\Omega)$, тогда, применив теорему Стокса, получаем:

$$\int_{\partial\Omega\times\Omega} K_{\mathrm{BM}}(z,\xi)\wedge v(\xi)\wedge w(z) = \int_{\Omega\times\Omega} \bar\partial_z\big(K_{\mathrm{BM}}(z,\xi)\wedge v(\xi)\wedge w(z)\big)$$
$$= \int_{\Omega\times\Omega} \bar\partial_z K_{\mathrm{BM}}(z,\xi)\wedge v(\xi)\wedge w(z) - K_{\mathrm{BM}}(z,\xi)\wedge \bar\partial_z v(\xi)\wedge w(z)$$
$$-(-1)^{p+q}\int_{\Omega\times\Omega} K_{\mathrm{BM}}(z,\xi)\wedge v(\xi)\wedge \bar\partial_z w(z).$$

в силу уравнения (4.3), мы можем переписать первое слагаемое как

$$\int_{\Omega\times\Omega} \bar\partial_z K_{\mathrm{BM}}(z,\xi)\wedge v(\xi)\wedge w(z) = \int_{\Omega\times\Omega} [\Delta]\wedge v(\xi)\wedge w(z) = \int_{\Omega} v(z)\wedge w(z).$$

Второе же слагаемое, после применения разложения K_{BM} в сумму, оставляет только коэффициент $K_{BM}^{p,q}$, а в третьем остается $K_{BM}^{p,q-1}$.

Обозначая через $\langle,\rangle$ спаривание между потоками и пробными формами на Ω, вышеуказанное равенство переписывается как

$$\Big\langle \int_{\partial\Omega} K_{\mathrm{BM}}(z,\xi)\wedge v(\xi), w(z)\Big\rangle = \Big\langle v(z) - \int_{\Omega} K^{p,q}_{\mathrm{BM}}(z,\xi)\wedge \bar\partial_z v(\xi), w(z)\Big\rangle$$
$$-(-1)^{p+q}\Big\langle \int_{\Omega} K^{p,q-1}_{\mathrm{BM}}(z,\xi)\wedge v(\xi), \bar\partial_z w(z)\Big\rangle,$$

что само по себе эквивалентно формуле Коппельмана при интегрировании $\bar\partial_z v$ по частям. ■

Замечание. Заметим, что формула (4.4) является многомерным обобщением формулы Коши

Следствие 4.2. *Рассмотрим форму v с компактным носителем в Ω и $\bar\partial_z v = 0$, тогда по формуле* (4.4)

$$v(z) = \bar\partial_z \int_{\Omega} K^{p,q-1}_{BM}(z,\xi)\wedge v(\xi),$$

т.е. каждая форма с компактным носителем является точной.

Теорема 4.3. *Пусть теперь $n \geqslant 2$, $K\subset\Omega$, Ω/K — связно, тогда $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega/K)$ существует $F|_{\Omega/K} = f$.*

Доказательство. Пусть φ — гладкая функция с компактным носителем, такая что $\varphi = 1$ в окрестности K. Введем

$$\tilde f = \begin{cases} (1-\varphi)f & \text{вне } K,\\ 0 & \text{на } K.\end{cases}$$

тогда пусть $v = \bar\partial_z f$ — форма типа (0,1) с компактным носителем, поэтому по следствию 4.2

$$v = \bar\partial_z \int_\Omega K^{0,0}_{BM} =: \bar\partial_z u.$$

Полученная нами u также иммет компактный носитель.

Действительно: при $|z| \gg 1$ можно считать что

$$K^{0,0}_{BM}(z,\xi) \sim \frac{1}{|z-\xi|^{2n-1}}, \quad \Longrightarrow \quad u \sim \frac{1}{|z|^{2n-1}}, \tag{4.5}$$

и $u(z)$ при $|z| \gg 1$ голоморфна. С другой стороны, если $n \geq 2$, то существует комплексная прямая l, которая лежит в $\mathbb{C}^n$ и не пересекает $\operatorname{supp} v$. Тогда $u|_l$ голоморфна и ограничена, значит по теореме Лиувилля и формуле (4.5) в ограничении $u|_l = 0$.

Таким образом, положив $F = \tilde f - u$, получим, что $\bar\partial_z F = 0$ и $F = f$ вне окрестности K. ∎

$\bar\partial$-лемма Пуанкаре

Если $\bar\partial u = v$, $\bar\partial v = 0$, и v имеет компактный носитель, то у нас есть решение u с компактным носителем.

Теорема 4.4 ($\bar\partial$-лемма Пуанкаре)**.** *Пусть $B(0,R)$ — шар в $\mathbb{C}^n$, пусть v — форма типа (p,q) такая, что $\bar\partial v = 0$ тогда в $B(0,R)$ существует форма u: $v = \bar\partial u$*

Доказательство. Используем следующий трюк: берем на $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ форму

$$K(z,w,\xi) = C_n \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{w^j - \bar\xi}{((z-\xi)(w-\xi))^n} d(z^1 - \xi^1) \wedge \cdots \wedge d(z^n - \xi^n) \wedge$$
$$\wedge\, d(w^1 - \bar\xi^1) \wedge \cdots \wedge \widehat{d(w^j - \bar\xi^j)} \wedge \cdots \wedge d(w^n - \bar\xi^n),$$

заметим, что если положить $w = \bar z$, то получим $K_{BM}(z,\xi)$. Пусть ψ — гладкая функция,$\psi = 1$ на $B(0,1)$ с компактным носителем. Тогда по формуле Коппельмана (4.4) имеем

$$\psi(z)v(z) = \bar\partial_z \int_{B(0,R)} K^{p,q-1}_{\mathrm{BM}}(z,\xi) \wedge \psi(\xi)(\xi) + \int_{B(0,R)} K^{p,q}_{\mathrm{BM}}(z,\xi) \wedge \bar\partial\psi(\xi) \wedge v(\xi).$$

т.е. $\psi(z)v(z) = \bar\partial u_0 + v_1$. Пусть теперь

$$\tilde v_1(z,w) = \int K^{p,q}_{\mathrm{BM}}(z,w,\xi) \wedge \overline{\partial}\Psi(\xi) \wedge v(\xi),$$

где $K^{p,q}(z,w,\xi)$ — это часть $K(z,w,\xi)$, которая имеет степень p по z и q по w. $\tilde v_1(z,w)$ определена на множестве

$$U = \{(z,w) \in B(0,1) \times B(0,1) | \forall \xi \colon |\xi| > 1 \quad \Re((z-\xi)(w-\overline{\xi})) > 0\}.$$

Заметим, что если $(z,w) \in U$, то $(z,tw) \in U, t \in [0,1]$. Тогда $v_1 = g^* \widetilde{v}$, где $g \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, $z \mapsto (z,\overline{z})$ и $0 = \bar\partial v_1 = \bar\partial g^* \tilde v_1 = g^* \partial_w v_1$, откуда $\partial_w \tilde v_1 = 0$. ■

Лекция 5

Локальное поведение голоморфных функций

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}^n$, а функции f и g голоморфны.

Определение 5.1. Будем говорить, что $f \sim g$ в точке z_0, если существует окрестность $U = U(z_0)$, такая что $f|_U = g|_U$.

Откуда, если рассмотреть, например, полидиск с центров в точке z_0, то можно неформально сказать следующее:

Предложение 5.2. *Если $f \sim g$, то их разложения около точки z_0 совпадают.*

Далее для удобства будем считать $z_0 = 0$.

Определение 5.3. Класс эквивалентности f в z_0 $(= 0)$ называется *ростком* функции f.

А $\mathscr{O}_n$ — означает *кольцо голоморфных функций* (оно изоморфно алгебре сходящихся степенных рядов).

Рассмотрим некоторые алгебраические свойства $\mathscr{O}_n$.

Предложение 5.4.

1. *$\mathscr{O}_n$ — область целостности.*
2. *$\mathscr{O}_n$ — локальное кольцо, оно имеет единственный максимальный идеал $m_0 = \{f \in \mathscr{O}_n | f(0) = 0\}$.*

Из обычного комплексного анализа $(n = 1)$ мы знаем, что любая голоморфная функкйция представляется как $f(z) = z^k \cdot h(z)$, где $h(0) \neq 0$. Как нам получить нечто похожее для многомерного случая?

Логично предположить, что результатом должно оказаться нечто вида $f(z) = g(z) \cdot h(z)$, где g — полином, а $h(0) \neq 0$, однако оказывается, что достичь подобного результата не удается.

Далее будем обозначать n переменных как $(z^1, \ldots, w)$

Если $f(0) \neq 0$, то тогда можно счиатать $g = 1$, $f = h$. Предположим, что $f(0, \ldots ,0) = 0$, но не $f \not\equiv 0$, тогда можно считать что $f(0, \ldots ,0,w) \not\equiv 0$. Ясно, что существует $\delta,r > 0$, такие что $|f(0,w)| > \delta$, если $r = |w|$. Тогда в силу непрерывности существует $\varepsilon > 0$, такое что $|f(z,w)| > \delta/2$, при $r = |w|$ и $|z| < \varepsilon$.

Давайте посмотрим на то, что происходит в $|z| < \varepsilon$, $|w| < r$. При фиксированном $z = (z^1, \ldots ,z^{n-1})$ голоморфная функция f от w.

Предложение 5.5. *Пусть z фиксировано, тогда пусть $b_1(z), \dots b_k$ — нули $f(z,w)$ в $|w| < r$. Тогда верна следующая формула $\forall m \geqslant 0$:*

$$b_1^m + \dots + b_k^m = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=r} \frac{\xi^m \partial_w f(z,w)}{f(z,w)} dw. \tag{5.1}$$

Доказательство. Опустим для удобства зависимость от z, тогда $f(w) = w^k h(w)$, $f'(w) = kw^{k-1}h(w) + w^k h'$. Тогда

$$\frac{f'(w)}{f(w)} = \frac{k}{w} + \frac{h'}{h}.$$

А значит

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=r} \frac{w^k f'(w)}{f(w)} dw = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{bj}$$

∎

Вспомним некоторые знания из курса алгебры — если $\sigma(b_1, \dots, b_k)$ — элементарные симметрические полиномы от b_j, то они могут быть выражены через

$$\sum_{j=1}^{k} b_j^m, \qquad \text{где} \quad m = 1, \dots, k.$$

Вернемся теперь к $g_f(z,w) = w^k - \sigma_1(b(z_1)w^{k-1}, \dots, b(z_k))w^{k-1} + \ldots + (-1)^k \sigma_k(b(z_1), \dots, b(z_k))$ в разложении f. Перед тем как дать новое определение, заметим что, $\sigma_i(z_1, \dots, z_{n-1})$ голоморфно зависит от первых $n-1$ переменных, т.к. интеграл (5.1) зависит голоморфно от z.

Определение 5.6. *Полиномом Вейерштрасса* называется полином вида

$$w^k + a_1(z)w^{k-1} + \dots + a_k(z),$$

где $a_j(z)$ - голоморфные функции от $z = (z^1, \dots, z^n)$.

Рассмотрим

$$h(z,w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=r} \frac{f(z,\xi)}{g_f(z,\xi)} \frac{d\xi}{\xi - w}$$

тогда

Предложение 5.7. $h(0) \neq 0$.

Теорема 5.8. *Пусть $f \in \mathcal{O}_n$, $f(0) = 0$, $f(0, \dots, w) \not\equiv 0$. Тогда f единственным образом представимо в виде*

$$f(z,w) = g_f(z,w)h(z,w),$$

где g_f — полином Вейерштрасса, а $h(0) \neq 0$.

Замечание. Заметим также слудующее: пусть $Z(f) = \{(z,w) \in \mathbb{C}^n | f(z,w) = 0\}$, тогда $Z(f)$ проектируется на $\{w = 0\}$, причем эта проекция — конечное накрытие вне множества нулей голоморфной функции от $z^1, \dots, z^{n-1}$

ТУТ ПОПРАВИТЬ и добавить про вандермонда и детерминант

Лемма 5.9. *Кольцо $\mathscr{O}_n$ факториально, т.е. $\mathscr{O}_n$ целостно и:*

a) каждый ненулевой росток $f \in \mathscr{O}_n$ допускает разложение $f = f_1 \cdots f_N$ на неприводимые элементы;

b) разложение единственно с точностью до обратимых элементов.[1]

Доказательство. Докозательство будем проводить индукцией по n. Пусть $\mathscr{O}_{n-1}$ — кольцо ростков голоморфных функций от $z^1 \dots z^{n-1}$. Пусть $\mathscr{O}_{n-1}$ факториально, тогда по теореме Гаусса $\mathscr{O}_{n-1}[w]$ тоже факториально.

Пусть $f = g_f h$, где g_f - полином Вейерштрасса. Тогда $f = g_1 \dots g_m h$, где g_j — неприврдимы.Предположим, что f имеет другое разложение

$$f = \tilde{f}_1 \cdots \tilde{f}_p.$$

Каждое $\tilde{f}_j$ также является многочленом Вейерштрасса, умноженным на обратимый элемент, то есть

$$\tilde{f}_j = \tilde{g}_j h_j, \qquad j = 1, \dots, p,$$

где $\tilde{g}_j$ неприводим в $\mathscr{O}_{n-1}[w]$, а h_j обратим. Следовательно,

$$g_1 \cdots g_m \cdot h = \prod_{j=1}^{p} \tilde{g}_j \prod_{j=1}^{p} h_j.$$

Так как $\mathscr{O}_{n-1}[w]$ факториально по предположению индукции, разложения g и $\tilde{g}_1 \cdots \tilde{g}_p$ совпадают с точностью до единиц. Отсюда следует, что и разложение f единственно с точностью до обратимых множителей. ∎

Предложение 5.10. *Пусть $f_1, f_2 \in \mathscr{O}_n$ — взаимно простые элементы. Тогда для $z_0 \in \mathbb{C}^n$ достатчно близких к нулю ростки f_1, f_2 тоже будут взаимно просты.*

Доказательство. Существуют $m_1, m_2 \in \mathscr{O}_n[w]$, $r \in O$ такие что $m_1 f_1 + m_2 f_2 = r$. **ДОПИСАТЬ**

∎

[1]Боле подробно можно прочитать в [1]((2.10) Theorem.)

Теорема 5.11 (Вейерштрасса о делении). *Пусть f — голоморфная функция, $f(0) = 0$, (но $f \not\equiv 0$), g — полином Вейерштрасса, тогда существует и притом единственные h,r такие, что:*

$$f = gh + r,$$

причем r — полином Вейерштрасса такой что $\deg_w r < \deg_w g$.

Доказательство. Возьмем

$$h(z,w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=r} \frac{f(z,\xi)}{g(z,\xi)} \frac{d\xi}{\xi - w},$$

определим

$$\begin{aligned} r(z,w) &= f(z,w) - g(z,w)h(z,w) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int f(z,\xi) - \frac{f(z,\xi)}{g(z,\xi)} g(z,w) \frac{d\xi}{\xi - w} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z,\xi)}{g(z,\xi)} \left[\frac{g(z\xi) - g(z,w)}{\xi - w} \right] d\xi \end{aligned}$$

Т.к. g — полином Вейерштрасса, то разность в числителе в квадратных скобках перепишется как

$$g(z,\xi) - g(z,w) = \xi^k - w^k + a_1(\xi^{k-1} - w^{k-1}) + \dots + a_{k-1}(\xi - w),$$

а значит делится на знаменатель и формула переписывается как:

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z,\xi)}{g(z,\xi)} P(z,\xi,w) d\xi.$$

Т.е мы получили полином по w степени $k - 1$ или ниже. ■

Следствие 5.12. *$f \in \mathscr{O}_n$ неприводимо, h зануляется на $Z(f) = \{f = 0\}$. Тогда f делит h.*

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.

Определение 5.13. *$V \subset \Omega$ — аналитическое множество*, если $\forall z \in V$ существует $U = U(z)$ и голоморфные функции $f_1, \dots, f_k$ такие, что $V \cap U = \{f_1 = \dots = f_k = 0\}$.

Теорема 5.14. *1) Разложение*

$$V = V_{smooth} \cup V_{sing}, \text{ где } V_{sing} = \{z \in V | V \text{ не является подмногообразием}\}$$

является нигде неплотным и $\dim V = \dim V_{smooth}$.

2) Для почти любого $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^n$, где $k = \dim V$ проекция $A \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$, ограниченная на V — это разветвленное накрытие.

3) $V = V_0 \supset V_2 \supset \dots \supset V_k = \varnothing$, где $V_j \setminus V_{j+1}$ — подмногообразие в $\Omega \setminus V_{j+1}$.

Лекция 6

Почти комплексное многообразие

Как мы определяли во второй лекции —пусть X – комплексное многообразие размерности n. В каждой точке $z \in X$ на $T_z X_{\mathbb{R}}$ есть оператор J_z такой, что $J_z^2 = -\operatorname{Id}$. Теперь же посмотрим что будет, если мы сначала возьмем M - вещественное многообразие размерности $2n$ и дадим следующее определение.

Определение 6.1. Вещественное многообразие M размерности $2n$ с тензорным полем $J\colon TM \to TM$ называется *почти комплексным многообразием* (M,J).

Будет ли (M,J) **комплексным многообразием?** Ответ: **нет**.

На комплексном многообразии есть разложение $d = \partial + \bar{\partial}$, которое по следствию 2.8 обладает свойствами $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$ и $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$. Заметим, что на (M,J) есть разложение дифференциальных форм

$$\Lambda^k(M,\mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}M$$

С другой стороны $d\colon \Lambda^{p,q}M \to \Lambda^{k+1}(M,\mathbb{C})$ посмотрим что ломается:

Пример 6.2. В случае $k = 1$, $p = 1$, $q = 0$ $\alpha \in \Lambda^{1,0}M$ ее дифференциал

$$d\alpha \in \Lambda^{2,0}M + \Lambda^{1,1}M + \Lambda^{0,2}M.$$

Пусть Z_1, Z_2 — комплекснозначные векторные полня на M типа (0,1), напомним, что еслм $TM \otimes \mathbb{C}$, а X — вещественное векторное поле, то

$$Z_1 = \tfrac{1}{2}\big(X + iJX\big) \quad \text{— векторное поле типа (0,1),}$$

$$V = \tfrac{1}{2}\big(X - iJX\big) \quad \text{— поле типа (1,0).}$$

. Тогда по формуле Картана

$$d\alpha(Z_1, Z_2) = Z_1\big(\alpha(Z_2)\big) - Z_2\big(\alpha(Z_1)\big) - \alpha\big([Z_1, Z_2]\big) = -\alpha\big([Z_1, Z_2]\big).$$

Т.к. Z_1 и Z_2 произвольные поля типа (0,1), такие что $[Z_1,Z_2]$ - векторное поле (1,0), то получим, что (0,2) часть $d\alpha$ не равна 0. Т.е. препятивие для (M,J) быть комплексным многообразием, в том, что $T_M^{0,1}$ и $T_M^{1,0}$ не замкнуты относительно коммутатора.

Определение 6.3. Песть X, Y — вещественные векторные поля на M. Тензор

$$N(X,Y) = [X,Y] - i\big([JX,Y] + [X,JY]\big) - [JX,JY]$$

называется *тензором Нийенхейса*.

Теорема 6.4 (Ньюлендер-Ниренберг). *Почти комплексное многообразие является комплексным тогда и только тогда, когда тензор Ниенхейса* $N(X,Y) = 0$ *для любых* X,Y.

Полное доказательсво этой теоремы не будет приведено тут и мы дадим лишь набросок.

Доказательство. Если $N \equiv 0$, то формально $d = \partial + \bar\partial$ на 1 формах, а значит $\bar\partial = 0$. Мы будем решать уравнение $\bar\partial f = g$, где g — 1 форма $\bar\partial g = 0$. С помощью L^2 теории для уравнения выше можно показать, что любоая (0,1) форма α с $d\alpha = 0$ является дифференциалом функции f такой что $\bar\partial f = 0$. ■

Лемма 6.5. *Пусть* α *– форма типа* (p,q)*, тогда*

$$d\alpha \in \Lambda^{p+1,q}M \oplus \Lambda^{p,q+1}M \oplus \Lambda^{p+2,q-1}M \oplus \Lambda^{p-1,q+2}M.$$

Доказательство. Считаем, что $\alpha = f\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_q$, где α_j — формы типа (1,0), а β — формы типа (0,1). Утверждение леммы сразу следует из

$$d\alpha = df \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \wedge \beta_q + f d\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \wedge \beta_q - \cdots \pm f\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \wedge d\beta_q.$$

■

Свойства комплексных многообразий

Дальше считаем, что X — комплексное многообразие. Но перед тем как рассматривать что-то, докажем несколько вспомогательных лемм и дадим несколько определений.

Лемма 6.6. *На* X *существвет эрмитова метрика* $h = h_{i\bar j} dz^i \wedge d\bar z^j = g + i\omega$

Доказательство. Следует из разбиелния единыци и склейки. ■

Определим оператор $\Box\varphi$, $\varphi \in C^\infty(X)$, как

$$\Box\varphi = h^{j\bar k}\partial_j\partial_{\bar k}\varphi = \mathrm{tr}_\omega\big(\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi\big).$$

Если $\varphi = |f|^2$, то $\Box|f|^2 \geqslant 0$. Нетрудно показать что в вещественных координатах

$$\Box|f|^2 = \frac{1}{2} g^{AB}\frac{\partial}{\partial x^A}\frac{\partial}{\partial x^B}|f|^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\right)|f|^2,$$

а значит он эллептический. Про которого из курса дифференциальных уравнений известно то, что

Теорема 6.7 (Принцип максимума)**.** *Если* $\Box$ *— эллептический оператор и* $\Box\varphi \geqslant 0$ *то* $\varphi \equiv const$.

Предложение 6.8. *Если X — компнкт, то все голомоморфные функции на X — тождественные константы.*

Доказательство. Пусть f — голоморфная функция на X,

$$\partial\bar{\partial} f = 0 \quad \Longrightarrow \quad \overline{\partial\bar{\partial} f} = \bar{\partial}\partial\bar{f} = -\partial\bar{\partial}\bar{f}.$$

тогда $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}|f|^2 = \sqrt{-1}\partial f \wedge \bar{\partial} f$, а значит $\Box|f|^2 \geqslant 0$ и по теореме максимума она константа. ■

Пример 6.9. Λ – решетка в $\mathbb{C}^n$, $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2n}$. Λ действует на $\mathbb{C}^n$ сдвигами. На $\mathbb{C}^n/\Lambda$ существует структура комплексного многообразия. Пусть $\Lambda_1 = \mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{C}^2$, а

$$\Lambda_2 = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} : i = 1{,}2{,}3{,}4 \right\}.$$

Это решётка, порождённая векторами

$$\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}, \quad i = 1,\ldots,4.$$

Если $\alpha_1,\ldots,\alpha_4,\beta_1,\ldots,\beta_4$ независимы над $\mathbb{Q}$, то $\mathbb{C}^2/\Lambda_1$ не биголоморфно на $\mathbb{C}^2/\Lambda_2$

Пример 6.10. Рассмотрим $M = \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$, на нем действуеи $\mathbb{C}^* \curvearrowright M$ как

$$(z_0,\ldots,z_n) \to (\lambda z_0,\ldots,\lambda z_n), \quad \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Фактор $M/\mathbb{C}^* = \mathbb{CP}^n$. Рассмотрим $[z_0\colon \ldots : z_n]$ — класс эквивалентности $(z_0,\ldots,z_n)$ под действием $\mathbb{C}^*$. Пусть $U_j = z_j \neq 0$ тогда $Z\colon = [z_0\colon \ldots : z_j\colon \ldots : z_n] = [z_0/z_j\colon \ldots : 1\colon \ldots : z_n/z_j]$, обозначим $w^k = z_k/z_j, k \neq j$, тогда $U_j \cong \mathbb{C}^n$. ТОгда рассмотрим $Z \in U_i \cap U_m$ тогда Z имеет 2 набора координат отвечающих двум картам как $w_m^k = w_j^k \frac{z_j}{z_m}$, т.е. функции перехода оказались голоморфными.

Пример 6.11. Рассмотрим грассманиан

$$\operatorname{Gr}(k,n) = \{\text{множество } k\text{-мерных подространств в } \mathbb{C}^n\}.$$

Пусть $L \in \operatorname{Gr}(k,n)$

$$A_L = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}, \qquad \text{где } a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} - j\text{-й базисный вектор в базисе } L.$$

А $L = \mathrm{span}(a_1, \ldots, a_k)$ и $\mathrm{rk}\, A_L = k$, следовательно выберем $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, такие что

$$A_I = \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & \cdots & a_{i_1 k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k 1} & \cdots & a_{i_k k} \end{pmatrix}.$$

является невырожденной $\det A_I \neq 0$. Обозначим за $U_I = \{A_l | \det A_I \neq 0\}$, тогда

$$AA_I^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{kn} \\ 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

$U_I \cong \{$Матрицы из k столбцов и строк такие что $A_I = \mathrm{Id}\}$. Если $L \in U_I \cap U_J$, то функции из $A_I A_J^{-1}$ задают функции перехода. Кроме того, $\dim \mathrm{Gr}(k,n) = k(n-k)$.

Лекция 7

Приведём ещё несколько примеров

Пример 7.1 (Многообразие Хопфа)**.** Рассмотрим $\mathbb{C}/\{0\}$ и $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $|\alpha| < 1$. Определим действие

$$\mathcal{A}\colon \mathbb{C}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{C}^n \backslash \{0\}, \qquad\qquad z \to \alpha z.$$

Тогда степени $\mathcal{A}$ порождают действие $\mathbb{Z}$. Иными словами

$$M_n = (\mathbb{C}^n \backslash \{0\}) / \sim, \qquad\qquad z \sim \alpha^k z \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Многообразие $M = \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}$ называется *многообразием Хопфа*.

Заметим, что как вещественное многообразие $M_n \cong S^{2n-1} \times S$. Явно увидеть это можно, если ввести полярные координаты на $\mathbb{C}\backslash\{0\} \cong S^{2n-1} \times \mathbb{R}$. Пусть для простоты рассмотрим вещественное $\alpha = 1/2$. Тогда рассмотрев действие степеней отобраджения $\mathcal{A}$ на (r,θ), получим, что $\mathcal{A}(r,\theta) = (r/2,\theta)$. Заметим также что есть отображение $M_n \to \mathbb{CP}^{n-1}$ со слоем T^2

Пример 7.2 (Многообразие Ивасавы)**.** Рассмотрим группу всех верхнетреугольных матриц G и дискретную подгруппу $G_{\mathbb{Z}}$[2].

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{C} \right\}, \quad G_{\mathbb{Z}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \right\}.$$

Тогда можно показать, что многообразие $G/G_{\mathbb{Z}}$ существует и называется *многообразием Ивасавы*.

В дальнейшем будет показано, что многообразия из примеров 7.1 и 7.2 не являются проективными подмногообразиями.

Канонические и касательные расслоения

Определение 7.3. Пусть X — комплексное многообразие, T_X — касательное расслоение, $T_X^* = \Omega_X$ — кокасательное расслоение. Тогда *каноническим расслоением* называется $K_X = \det(\Omega_X) = \Lambda^n T_X^*$ расслоение $(n,0)$ - форм, где $n = \dim_{\mathbb{C}} X$

Заметим, что если X - многообразие Хопфа, то вещественное касательное расслоение тривиально. Действительно, т.к. $X = S^1 \times S^{2n-1}$, то $(T_X)_{\mathbb{R}} \cong \pi_1^* TS^1 \oplus \pi_2^* TS^{2n-1}$, т.к. TS^1 тривиально. Однако оно не будет голоморфном тривиальным.

[2]Множество $Z[\sqrt{-1}]$ называют ещё *гауссовыми числами*

Касательное расслоение к грассманиану Gr(k,n). Обозначим за S - тавтологическое расслоение. Его слой над $[L] \in \mathrm{Gr}(k,n)$ — это L.

Заметим, что $GL(n,\mathbb{C})$ действует транзитивно на $\mathrm{Gr}(k,n)$. Стабилизатор L — это такие $\{\mathcal{A} \in GL(n,\mathbb{C})\}$, что $\mathcal{A}(L) = L$. Касательное расслоение к $GL(n,\mathbb{C})$ — это $\mathrm{Hom}(V,V)$, где V — n мерное векторное пространство на $\mathbb{C}$. Тогда касательное пространство к стабилизатору L — это $a \in \mathrm{Hom}(V,V)$, $a(L) \subset L$, следовательно

$$T_{[L]}\,\mathrm{Gr}(k,n) \cong \mathrm{Hom(V,V)}\,/\{a|a(L) \subset L\} \cong \mathrm{Hom}(L,V/L),$$

последнее следует из вида топреатора такого что $a(L) \subset L$:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Предложение 7.4. *$T\,\mathrm{Gr}(k,n) \cong \mathrm{Hom}(S,V/S)$, где $\underline{V}$ — тривиальное голоморфное расслоение нал $\mathrm{Gr}(k,n)$.*

Доказательство. Изоморфизм был доказан в рассуждении выше, а утверждение о голоморфности следует из точной последовательности расслоений

$$0 \to S \hookrightarrow \underline{V} \to \underline{V}/S \to 0$$

■

Дальше перейдем к рассмотрению грассманианов с $k = 1$ тобишь к проектвным пространствам $\mathbb{CP}^n$.

Определение 7.5. На $\mathbb{CP}^n$ S образует $\mathcal{O}(-1)$ — это одномерное*голоморфное линейное расслоение.*

И имеется такая точная последовательность

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to \underline{V} \to \underline{V}/\mathcal{O}(-1) \to 0.$$

Далее обозначим $Q = \underline{V}/\mathcal{O}(-1)$, $\dim V = n + 1$

Соответственно в довесок к $\mathcal{O}(-1)$ также определим:

Определение 7.6. Стандартные обозначения для линейных расслоений:

$$\mathcal{O}(1) := \mathcal{O}(-1)^*, \quad \mathcal{O}(k) = \mathcal{O}(1)^{\otimes k}, \quad \mathcal{O}(-k) = \mathcal{O}(-1)^{\otimes k}, \quad k = 0,1,2,\dots$$

Предложение 7.7. *На $\mathbb{CP}^n$ существует короткая точная последовательность расслоений, называется последовательностью Эйлера*

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^{\ltimes}} \to \mathcal{O}(1)^{\oplus(n+1)} \to T_{\mathbb{CP}^n} \to 0$$

Доказательство. Т.к. $T_{\mathbb{CP}^n} \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1), \underline{V}/\mathcal{O}(-1)) \cong O(1) \otimes (\underline{V}/\mathcal{O}(-1)) \cong \mathcal{O}(1)^{\oplus(n+1)}/\mathcal{O}$ ■

Следствие 7.8. $T_{\mathbb{CP}^n} \cong Q \otimes \mathcal{O}(1)$

Заметим, что $\mathcal{O}(-1) = \{(Z,\xi) \in \mathbb{CP}^n \times V \mid \xi \in \mathbb{C} \cdot z\}$. Любой однородный полином степени 1 от $z_0, \ldots, z_n$ является сечением $\mathcal{O}(1)$.

Определение 7.9. Путсь $U \subset X$ - открытое подмножество в X. *Мероморфной функцией* f на U называется функция, которая локально является отношеним голоморфных функций $f = g/h$.

f мероморфна на X, если существует покрытие $\{U_i\}$ и на каждом U_i $f = g_i/h_i$

Пример 7.10. Пусть s_1, s_2 - два голоморфных сечения голоморфного векторного расслоения $L \to X$. Тогда s_1/s_2 - мероморфная функция на X.

Предложение 7.11. *Пусть* $\mathbb{C}[z_o, \ldots, z_n]_k$ *пространство однородных многочленов степени* k*, тогда это пространство глобальных голоморфных сечений* $\mathcal{O}(k)$ *на* $\mathbb{CP}^n$*.*

Доказательство. В одну сторону очевидно. В обратную: пусть S — голоморфное сечение $\mathcal{O}(k)$. s_0 — элемент $\mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]_k$, из примера 7.10 $f = S/s_0$ — мероморфна на $\mathbb{CP}^n$. Рассмотрим $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{CP}^n$, тогда $\pi^* f = F$ — это мероморфная функция на $\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$, тогда $G = F s_0$ — голоморфная функция там же, тогда G продолжается на $\mathbb{C}^{n+1}$. G — однородный многочлен степени k. ■

Предложение 7.12. *Пусть* $L \to X$ — *голоморфное линейное расслоение над компактным* X*. Если* L *и* $L^{-1} := L^*$ *имеют голоморфные сечения, то* L *тривиально.*

Доказательство. ■

Следствие 7.13. $\mathcal{O}(-k)$ *не имеют голоморфных сечений.*

Подмногообразия

Определение 7.14. Я потом допишу определение все-таки сюда

Пример 7.15 (Вложение Веронезе)**.**

$$\mathbb{CP}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^{\binom{n+1}{k}-1}, \qquad [z_0 \colon \ldots \colon z_n] \longmapsto \left[z_0^{a_0} \cdots z_n^{a_n}\right]_{a_0+\cdots+a_n=k}.$$

Т.е. мы берем все мономы от переменнных $z^0, \ldots, z^n$ и т.к. хотябы один из z^i не нулевой, то хотябы одна компонента в образе тоже не нулевая. Это вложение корректно определено и более того является голоморфным отображением.

Пример 7.16 (Вложение Сегре).

$$\begin{aligned} \mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m &\longrightarrow \mathbb{CP}^{(n+1)(m+1)-1}, \\ ([z_0\colon \cdots : z_n],[w_0\colon \cdots : w_m]) &\longmapsto \big[z_i w_j\big]_{0\le i\le n, 0\le j\le m} \\ &= \big[z_0w_0\colon z_0w_1\colon \cdots : z_0w_m\colon z_1w_0\colon \cdots : z_nw_m\big]. \end{aligned}$$

это легко проиллюстрировать на примере $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{CP}^3$, с координатами $[y_0\colon y_1\colon y_2\colon y_3]$ т.е.

$$[z_0\colon z_1][w_0\colon w_1] \longmapsto [z_0w_0\colon z_1w_1\colon z_0w_1\colon z_1w_0]$$

и оьраз лежит в $y_0y_1 = y_2y_3$.

Пример 7.17 (Вложение Плюккера).

$$\mathrm{Gr}(k,n) \hookrightarrow \mathbb{CP}^{\binom{n}{k}-1}$$

$$L = \mathrm{span}(a_1,\ldots,a_k) \longmapsto a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$$

ТУТ ПРОПИСАТЬ МОТИВИРОВКУ ЗАЧЕМ

Пусть теперь у нас есть $L \to X$ - линейное расслоение, $s_0,\ldots,s_k$ — голоморфные сечения, то $[s_0(z) : \ldots : s_k(z)] \in \mathbb{CP}^k$.

Касательные и нормальные расслоения к подмногообразиям

Пусть $Y \subset X$ — подмногообразие коразмерности k, тогда рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \to T_Y \to T_X|_Y \to N_y \to 0, \tag{7.1}$$

N_Y называется *нормальным расслоением*. Понятно, что есть и дуальная последовательность

$$0 \leftarrow T_Y^* \leftarrow T_X^*|_Y \leftarrow N_Y^* \leftarrow 0 \tag{7.2}$$

и N_Y^* называется к*конормальным расслоением*. И

$$\det\left(T_X^*\Big|_Y\right) \simeq \det\left(T_Y^*\right) \otimes \det\left(N_Y^*\right)$$

Предложение 7.18 (Формула присоединения).

$$K_Y \cong K_X\big|_Y \otimes \det(N_Y)$$

Предложение 7.19. *Пусть $\pi\colon E \to X$ — голоморфное векторное расслоение ранга k. Пусть $s \in \Gamma(X,E)$ — голоморфное сечение, такое что $Y = \{x \in X \mid s(x) = 0\}$.*

Тогда Y — комплексное подмногообразие коразмерности k, тогда

$$E\big|_Y \cong N_Y$$

Лекция 8

В данной лекции, как и раньше, рассмотрим $Y \subset X$ — комплексное подмногообразие, а также снова затронем точную последовательность (7.1). Мы уже доказали формулу присоединения. Теперь мы посмотрим, как, имея X и Y, можно построить ещё одно многообразие.

Для этого вспомним следующее: Пусть $\pi\colon E \to Y$ — голоморфное векторное $\operatorname{rk} E = r$ расслоение (т.е на Y есть тривиализация E с голоморфными функциями перехода). Тогда можно сделать новое расслоение $\pi\colon \mathbb{P}(E) \to Y$, где слой над точной $y \in Y$ — это проективизация $\mathbb{P}(E_y)$, (E_y — слой E над Y).

Предложение 8.1. *1. $\mathbb{P}(E)$ является комплексным многообразием размерности* $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{P}(E) = \dim_{\mathbb{C}} V + r - 1$

2. На $\mathbb{P}(E)$ существцет голоморфное линейное рассление $\mathcal{O}_E(-1)$, ограниечение котоорого на $\mathbb{P}_E$ изоморфна $\mathcal{O}(-1)$

Доказательство. ■

Пусть $U \subset X$ — открытое подмножество с координатам и $(z_1, \ldots, z_n)$. Пусть $U \cap Y = \{f_1 = \cdots = f_k = 0 | f_j\text{- голоморфные функции в } U, \operatorname{rk}(f_1 \ldots f_k) = k\}$.

Предложение 8.2. *Если $g_1 \ldots g_k$ - другая система функций с теми же свойствами,*

$U \cap Y = \{g_1 = \cdots = g_k = 0 | g_j\text{- голоморфные функции в } U, \operatorname{rk}(g_1 \ldots g_k) = k\}$,

то тогда существцует матрица $M = (M_{ij})$ из голоморфных функций, такая что $g_i = \sum_{j=1}^{k} M_{ij} f_j$ и $\det M \neq 0$ в окретности y.

Доказательство. По голоморфной теореме о неявной функции выберем координаты $(z_1, \ldots, z_n)$ с центром в y, в которых $f_j = z_j$ для $j = 1, \ldots, k$, так что $Y = \{z_1 = \cdots = z_k = 0\}$. Поскольку каждый g_i обращается в ноль на Y, он лежит в идеале $(z_1, \ldots, z_k)$. Следовательно, существуют голоморфные функции M_{ij} такие, что

$$g_i = \sum_{j=1}^{k} M_{ij} z_j, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Дифференцируя в точке y (то есть при $z = 0$), получаем

$$dg_i|_y = \sum_{j=1}^{k} M_{ij}(y) dz_j,$$

поскольку слагаемые $z_j dM_{ij}$ исчезают при $z = 0$. Тем самым матрица перехода между базисами $(dz_1,\ldots,dz_k)$ и $(dg_1,\ldots,dg_k)$ в $T_y^* X$ равна $M(y) = (M_{ij}(y))$. Так как $\operatorname{rk}(dg_1,\ldots,dg_k)\big|_y = k$, матрица $M(y)$ обратима, то есть $\det M(y) \neq 0$. По непрерывности $\det M$ не обращается в нуль в некоторой окрестности $U' \ni y$. ■

ВСЕ ЧТО НИЖЕ ВЫГЛЯДИТ КАШЕЙ, НАДО БУДЕТ ПОПРАВИТЬ

Пусть теперь $\{U_\alpha\}$ — покрытие X, тогда, очевидно, что $V_j = U_j \cap Y$ — покрытие Y.

На U_j имеются функции $f_1^j, \ldots f_k^j$, такие что $Y \cap U_j = \{f_1^j = \cdots = f_k^j = 0\}$ и $\operatorname{rk}(f_1^j, \ldots f_k^j) = k$. На пересечении $U_j \cap U_k$ мы имеем две системы функций $Y(U_j \cap U_m) = \{f_1^j = \cdots = f_k^j = 0\} = \{f_1^m = \cdots = f_k^m = 0\}$. Тогда существует M^{jm} такая что $f^j = M^{jm} f^m$.

Замечание. Матрица $M^{jm}|_Y$ задает матрицу перехода для конормального расслоения N_y^*.

Определим матрицу $P_{jm} \colon = (M^{jm})^{-t}$, тогда она задает функции перехлда на N_y

Рассмотрим $U \subset X$ и

$$U \times \mathbb{CP}^{k-1} \supset \widetilde{U}_Y = \left\{ (w,Z) \in U \times \mathbb{CP}^{k-1} \;\middle|\; Z_i f_j = Z_j f_i,\ (i,j) = 1,\ldots,k,\ i \neq j \right\}.$$

и отображение

$$\tau \colon\ \widetilde{U}_Y \longrightarrow U, \qquad (w,z) \longmapsto w.$$

Если $w \notin Y$, то прообраз $\tau^{-1}(w)$ — это ровно одна точка. Если же $w \in V$, то прообраз w — это $\mathbb{CP}^{k-1}$

Определение 8.3. $\widetilde{U}_Y$ называется *раздутием U вдоль Y*

уравнением Обозначим $E = \pi^{-1}(Y)$. Тогда $\widehat{U}_Y \setminus E \cong U \setminus Y$. На самом деле E задается одним уравнением в $\widetilde{U}_Y$, $Z_j f_i = Z_i f_j$. Определим $\tilde{f}_i \coloneqq \tau^* f_i$. Если $\tilde{f}_i = 0$, то и $\tilde{f}_j = 0$.

Пусть $V \subset X$ — другое открытое множество в X, $Y \cap V = \{f_1^V = \cdots = f_k^V\}$. Получим раздутие $\widetilde{V}_Y$ вдоль Y.

Пусть $U \cap V \neq \varnothing$. Обозначим столбцы функций $\mathbf{f}^u = (f_1^u,\ldots,f_k^u)^\mathsf{T}$ и $\mathbf{f}^v = (f_1^v,\ldots,f_k^v)^\mathsf{T}$. На пересечении есть обратимая матрица перехода M^{uv}, такая что $f^U = M^{UV} f^V$.Для каждого из них свои соотношения $Z_i f_j^U = Z_j f_i^U$ и $\hat{Z}_i \tilde{f}_j^U = \hat{Z}_j \tilde{f}_i^U$.

Т.е. теперь у нас есть два раздутия

$$\widetilde{U}_Y = \{(w,Z) \in U \times \mathbb{CP}^{k-1} \mid Z_i f_j^u(w) = Z_j f_i^u(w) \text{ для всех } i,j\}.$$

$$\widetilde{V}_Y = \{(\hat{w},\hat{Z}) \in V \times \mathbb{CP}^{k-1} \mid \hat{Z}_i f_j^v(\hat{w}) = \hat{Z}_j f_i^v(\hat{w}) \text{ для всех } i,j\}.$$

и функции переклейки между ними

$$\psi_{UV}(w,Z) = \big(w, P_{uv}(w)Z\big), \qquad P_{uv} = (M^{uv})^{-\mathsf{t}}.$$

Теорема 8.4 (склейка локальных раздутий). *Пусть X — комплексное многообразие, $Y \subset X$ — подмногообразие комплексной коразмерности k. Пусть $\{U_j\}$ — покрытие X и $\widehat{U}_{j,Y}$ — раздутие U_j вдоль $Y \cap U_j$. На перекрытии $U_u \cap U_v$ задана карта склейки*

$$\psi_{UV}(w,Z) = \big(w, [P_{uv}(w)Z]\big), \qquad P_{uv} = (M^{uv}(w))^{-\mathsf{T}}.$$

Тогда

$$\widehat{X}_Y \coloneqq \Big(\bigsqcup\nolimits_j \widehat{U}_{j,Y}\Big)\Big/\sim, \qquad (w,Z) \sim \psi_{UV}(w,Z) \text{ на } U_u \cap U_v,$$

является комплексным многообразием (раздутием X вдоль Y).

Более того, существует отображение $\pi\colon\ \widetilde{X}_Y \to X$, причём $E = \pi^{-1}(Y) \cong \mathbb{P}(N_Y)$ и $\pi\colon\ \widetilde{X}_Y \setminus E \cong X \setminus Y$. $\widetilde{X}_Y$ компактно, если X компактно.

Предложение 8.5. *Если $E \subset X$ — гладкая гиперповерхность, то E определяет голоморфное линейное расслоение L_E*

Доказательство. $U,V \subset X$ — откр. мн-ва, $U \cap V \neq 0$. Пусть $E \cap U = \{f_U = 0\}$, $E \cap V = \{f_V = 0\}$.

Тогда

$$\psi_{UV} \coloneqq \frac{f_U}{f_V}$$

— нигде не нулевая голоморфная функция на $U \cap V$. Функция

$$\psi_{UV}\,\psi_{VW}\,\psi_{WU} = 1.$$

удовлетворяет условию кокцикла $\Rightarrow$ определено голоморное линейное расслоение L_E. А функции $f_U = \psi_{UV} f_V$ и $\{f_U\}$ задают сечения расслоения. ∎

Определение 8.6. Пусть у нас есть раздутие X вдоль Y. $E\colon\ = \pi^{-1}(Y)$ — *исключительный дивизор.*

Обозназначим той же буквой E голоморфное линейное расслоение, задаваемое E. Тогда $\widehat{X}_Y$ и X и $\pi\colon\ \widehat{X}_Y \to X$. Более того, $\pi^* K_X$ и $K_{\widetilde{X}_Y}$ на $\widetilde{X}_y$. Как они связаны?

$$E^{\otimes m} = mE, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Предложение 8.7.

$$K_{\widehat{X}_Y} \cong \pi^* K_X + (k-1)E,$$

где $k = \operatorname{codim} Y$.

Лекция 9

Пучки

Как и обычно считаем X — гладким комплексным многообразием.

Определение 9.1. *Предпучком абелевых групп* (колец) $\mathcal{F}$ называется следующий набор:

1. Для любого открытого множества $U \subset X$ $\mathcal{F}(U)$ — это абелева группа (кольцо). $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$. Элементы $\mathcal{F}(U)$ называются *сечениями пучка* $\mathcal{F}$ *над* U.

2. Для любых $V \subset U$ есть отображение ограничения $r_{UV}\colon\ \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, причем если $W \subset V \subset U$, то
$$r_{UW} = r_{VW} \circ r_{UV},$$
и r_{UV} — гомоморфизм абелевых групп (колец).

Если $s \in \mathcal{F}(U)$ то часть будем использовать обозначение $s|_V = r_{UV}$.

Определение 9.2. Предпучок $\mathcal{F}$ является *пучком*, если также выполнены условия

1. Если $U = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$ и заданы $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$, такие что если они совпадают на пересечении $s_\alpha\big|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta\big|_{U_\alpha \cap U_\beta}$, то существует сечение на глобальном множестве $s \in \mathcal{F}(U)$, такое что $s\big|_{U_\alpha} = s_\alpha$

2. Если $s_1{,}s_2 \in F(U)$ и $s_1\big|_U\alpha = s_2\big|_U\alpha$, то $s_1 = s_2$.

Пример 9.3. *Локально постоянные пучки*, сечениями которых являются локально постоянные функции в $\mathbb{Z}_X$, $\mathbb{Q}_X$, $\mathbb{R}_X$ и $\mathbb{C}_X$.

Пример 9.4. $\mathcal{C}_X^\infty$ — пучок гладких функций, можно также вести и C_X^* — пучок гладких функций, не обращающихся в 0.

Как и $\mathcal{A}_X^p$ — пучки гладких p форм.

Пример 9.5. Теперь рассмотрим примеры пучков, связанных с комплексной структурой.

$\mathcal{O}_X$ — пучок голоморных функций и $\mathcal{O}_X^*$ — пучок голоморных функционалов, которые нигде не обращаются в ноль.

J_V — пучок голоморфных функций на V, где V — аналитическое множество.

$\mathcal{M}_X^*$ — пучок ненулевых мероморфных функций.

Ω_X^p — пучок голоморных $(p{,}0)$-форм;

$\mathcal{A}_X^{p,q}$ — пучок $(p{,}q)$-форм;

Если $E \to X$ — голоморное векторное расслоения, то $\mathcal{O}(E)$ — пучок голоморфных сечений расслоения E.

Определение 9.6. Пусть $\mathcal{R}$ — пучок колец на мнгообразии X (не обязательно комплексном), тогда $\mathcal{A}$ —*пучок модулей над* $\mathcal{R}$, если $\mathcal{A}$ — пучок и для любого $U \subset X$ $\mathcal{A}(U)$ обладает структурой модуля над $\mathcal{R}(U)$ и гомомрфизмы ограничений являются гомоморфизмами модулей.

Определение 9.7. Пусть $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ — пучки, а $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — *отображение пучков*, если

1. Для любого $X \subset X$ $\varphi_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ — гомоморфизм

2. Следующая диаграмма коммутирует.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\rho_{UV}"] \arrow[d, "\psi_U"'] & \mathcal{F}(V) \arrow[d, "\psi_V"] \\
\mathcal{G}(U) \arrow[r, "t_{UV}"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

Определение 9.8. $\mathcal{A}$ — пучок модулей над $\mathcal{R}$, где R — пучок колец. $\mathcal{A}$ называется *локально свободным*, если существует $n > 0$ и открытое покрытие $U = \{U_\alpha\}$ такие, что $\mathcal{A}(U_\alpha) = \mathcal{R}(U_\alpha)^n$ для всех α.

Предложение 9.9. *Пусть $\mathcal{A}$ — свободный пучок над $\mathcal{R}$, где $\mathcal{R} = \mathcal{C}_X^\infty$. Тогда существует векторное расслоение $E \to X$ (гладкое или голоморфное), такое что $\mathcal{A}$ — пучок сечений E.*

Доказательство. Рассмотрим $\{U_\alpha\}$ покрытие X, $\tau_\alpha\colon \mathcal{A}(U_\alpha) \to \mathcal{R}^n$. Тогда на $U_\alpha \cap U_\beta$ $\varphi_{\alpha\beta} = \tau_\beta \circ \tau_\alpha^{-1}$ ■

Определение 9.10. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок, $x \in X$, тогда *слой пучка*

$$F_x\colon = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U).$$

Напомним, что прямой предел это

$$\varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U) = \bigsqcup_{U \ni x} \mathcal{F}(U) / \sim .$$

где $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ $(i = 1{,}2)$, $s_1 \sim s_2$, если $\exists V \subset U_i$, что $s_1\big|_V = s_2\big|_V$.

С помощью этого определения можно объяснить понятие того, что такое инъективность и сюрьективность, если речь идет об отобрпжении пучков.

Определение 9.11. Пусть $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — морфизм пучков на X. Говорят, что φ *инъективен* (соответственно, *сюръективен*), если для каждого $x \in X$ индуцированный морфизм на слое $\varphi_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ инъективен (соответственно, сюръективен).

Предложение 9.12. *Пусть $\varphi\colon F \to G$ — морфизм пучков на X. Для каждого открытого $U \subset X$ положим*

1. $(\ker\varphi(U) := \ker\big(\varphi_U\colon F(U) \to G(U)\big)$. *Тогда отображение $U \mapsto (\ker\varphi)(U)$ с ограничениями из F определяет пучок (подпучок F), который обозначим $\ker\varphi$.*

2. $\ker\varphi = 0 \iff \varphi$ *инъективен (т.е. $\forall x \in X\colon\ \varphi_x\colon F_x \to G_x$ инъективен).*

Доказательство. ■

Если $g_\alpha \in \operatorname{Im}\big(\varphi_{U_\alpha}\colon \mathcal{F}(U_\alpha) \to \mathcal{G}(U_\alpha)\big)$ и $g_\alpha = g_\beta$ на $U_\alpha \cap U_\beta$, то существует $g \in \mathcal{G}(U)$ такое, что $g|_{U_\alpha} = g_\alpha$ для всех α. Но g может не лежать в образе $\varphi_U\colon F(U) \to G(U)$.

т.е. образ экспоненционного отображения пучком не вляется.

Пример 9.13. $X = \mathbb{C},\ \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp(2\pi i\,\cdot)} \mathcal{O}_X^*,\ f \mapsto \exp(2\pi i f) = F$. Локально: если $F \in \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}}(D)$, то $f = \log F$ определён локально. Но на $\mathbb{C}^*$ функция $F(z) = z$ не может быть глобально вида $e^{2\pi i f}$ (допустим, запишем $z = e^{2\pi i f}$).

слудеющее утверждение в нашем курсе будет дано без доказательства.

Предложение 9.14. *Если $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — морфизм пучков, то ассоциированный пучок $\operatorname{Im}\{\varphi\colon F \to G\}$ существует и совпадает с $\mathcal{G}$ тогда и только тогда когда φ сюръективно*

Определение 9.15. Последовательность

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \mathcal{F}_{i+2} \longrightarrow \cdots$$

называется *точной*, если $\ker\varphi_{i+1} = \operatorname{Im}\varphi_i$.

Вот есколько примеров точных последовательностей

Пример 9.16.

1. $V \subset X$ — аналитическое подмножество; Имеем точную последовательность пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_V \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_V \longrightarrow 0,$$

где $\mathcal{O}_V$ — структурный пучок V, продолженный нулём с V на X.

2. Для комплексного X и $p \geq 0$ — точная последовательность

$$0 \longrightarrow \Omega^p_X \longrightarrow \mathcal{A}^{p,0}_X \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{p,1}_X \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{p,2}_X \xrightarrow{\bar\partial} \cdots,$$

где Ω^p_X — пучок голоморфных p-форм, $\mathcal{A}^{p,q}_X$ — пучок гладких (p,q)-форм.

3.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp(2\pi i\,\cdot)} \mathcal{O}^\times_X \longrightarrow 0$$

Когомологии

Пусть X — многообразие, $\mathcal{F}$ — пучок, $\underline{U} = \{U_\alpha\}$ — покрытие.

Определение 9.17. Пусть $\underline{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ — открытое покрытие пространства X, а F — предшеф/пучок на X. Определим p-коцепи:

$$C^p(\underline{U},F) \;=\; \prod_{i_0<\cdots<i_p} F\big(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_p}\big).$$

Кограничный оператор

$$\delta\colon\; C^{p-1}(\underline{U},F) \longrightarrow C^p(\underline{U},F)$$

задаётся для $\sigma \in C^{p-1}(\underline{U},F)$ формулой

$$(\delta\sigma)_{U_{i_0}\ldots U_{i_p}} = \sum_{j=0}^{p}(-1)^j\,\sigma_{U_{i_0}\ldots\widehat{U_{i_j}}\ldots U_{i_p}}\Big|_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_p}},$$

где знак $\widehat{\quad}$ как обычно означает опущенный множитель, а $\sigma_{U_{i_0}\ldots U_{i_{p-1}}} \in \mathcal{F}\big(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{p-1}}\big)$.

Определение 9.18. *Когомологии* определяются как

$$H^p(\underline{U},F) = \frac{\ker\big(\delta\colon C^p(\underline{U},F)\to C^{p+1}(\underline{U},F)\big)}{\operatorname{Im}\big(\delta\colon C^{p-1}(\underline{U},F)\to C^p(\underline{U},F)\big)}.$$

Пусть $\underline{U}$,$\underline{V}$ - два покрытия X, $\underline{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in B}$ и $\underline{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Говорят, что $\underline{V}$ *вписано* в $\underline{U}$, если существует отображение $\varphi\colon A\to B$ такое, что для всех $\alpha\in A$ выполняется

$$V_{\varphi(\alpha)}\subset U_\alpha.$$

Определение 9.19. Тогда *когомологии всего многообразия*

$$H^p(X,F) = \varinjlim_{\underline{U}} H^p(\underline{U},F).$$

Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{H}\longrightarrow 0 \tag{9.1}$$

Предложение 9.20. *Точная последовательность* (9.1) *индуцирует длинную точную последовательность в когомологиях*

$$\begin{aligned}0\to H^0(X,\mathcal{F})\to H^0(X,\mathcal{G})\to H^0(X,\mathcal{H})\xrightarrow{\delta^*}&\\ H^1(X,\mathcal{F})\to H^1(X,\mathcal{G})\to H^1(X,\mathcal{H})&\xrightarrow{\delta^*} H^2(X,\mathcal{F})\to\\ \cdots\to H^p(X,\mathcal{F})\to H^p(X,\mathcal{G})\to H^p(X,\mathcal{H})&\xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(X,\mathcal{F})\to\cdots\end{aligned}$$

Лекция 10

Это будет заключительная лекция по пучкам в которой мы докажем важную теорему Дальбо.

Но сначала дадим слудеющее определение.

Определение 10.1. Пучок колец $\mathcal{F}$ называется *тонким*, если существует покрытие $\underline{U} = \{U_\alpha\}$ и сечения $f_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$, такое что $\sum_\alpha f_\alpha \equiv 1$

Основной пример тонкого пучка — это кольцо диференцируемых функций на гладком многообразии.

Тнкие пучки хорши тем, что имеют нулевые когомологии, что будет сформулированно немного позже.

Но отвлечёмся пока от них и рассмотрим общий случай. Рассмотрим группу $H^p(X,\mathcal{F})$, определённую в определении 9.18. Поймём, что такое $H^0(X,\mathcal{F})$.

Как обычно покрытие $\underline{U} = \{U_\alpha\}$ — покрытие X. Тогда элемент $C^0(\underline{U},\mathcal{F})$ задается так: на каждом U_α есть σ_α. σ — цикл, если на $U_\alpha \cap U_\beta$ $\sigma_\alpha - \sigma_\beta = 0$. Т.е. $H^0(X,\mathcal{F}) = \{$глобальные сечения $\mathcal{F}\}$.

Предложение 10.2. *Если $\mathcal{F}$ — тонкий, то $H^q(X,\mathcal{F}) = 0$ при $q \geq 0$.*

Доказательство. Доказательсво данного утверждения в силу своей громоздкости бцдет проведено только для $q = 1$.

Пусть $\underline{U} = \{U_\alpha\}$ — покрытие X, а f_α — соответствующее разбиение единицы.

Пусть $\sigma \in C^1(\underline{U},\mathcal{F})$. $\delta\sigma = 0$ эквивалентно тому, что $\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\gamma} + \sigma_{\gamma\alpha} = 0$ на $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Определим

$$\tau_\alpha = \sum f_\eta \sigma_{\eta\alpha},$$

а также заметим, что $\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha}$, тогда

$$(\delta\tau)_{\alpha\beta} = \tau_\alpha - \tau_\beta = \sum_\eta f_\eta\big(\sigma_{\eta\alpha} - \sigma_{\eta\beta}\big) = -\sum_\eta f_\eta\big(\sigma_{\alpha\eta} + \sigma_{\eta\beta}\big) \equiv \sum_\eta f_\eta\, \sigma_{\beta\alpha} = \sigma_{\beta\alpha}.$$

■

Теорема Дольбо

Теперь X — комплексное многообразие, $E \to X$ — голоморфное векторное расслоение, а $\mathcal{A}^q(E)$ — пучок $(0,q)$-форм со значениями в E. Рассмотрим комплекс пучков

$$0 \to \mathcal{O}(E) \to A^0(E) \xrightarrow{\bar\partial} A^1(E) \xrightarrow{\bar\partial} A^2(E) \to \cdots$$

По лемме Пуанкаре этот комплекс является точной последовательностью, то есть для каждого $q \geq 1$ имеем короткие точные последовательности пучков

$$0 \to \mathcal{O}(E) \hookrightarrow A^0(E) \xrightarrow{\bar\partial} \bar\partial A^0(E) \to 0,$$

$$0 \to \bar\partial A^{q-1}(E) \hookrightarrow A^q(E) \xrightarrow{\bar\partial} \bar\partial A^q(E) \to 0.$$

Напомним общий факт: для любой короткой точной последовательности пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

существует ассоциированная длинная точная последовательность когомологий

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{H}) \longrightarrow \\ H^1(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} H^2(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow H^q(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^q(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots \end{aligned} \tag{10.1}$$

Пучки $A^p(E)$ (а значит и $\mathcal{A}^p(E)$) являются тонкими, поэтому их высшие когомологии исчезают:

$$H^q(X, \mathcal{F}^p(E)) = 0, \quad q \geq 1.$$

Применяя длинную точную последовательность когомологий к короткой точной последовательности

$$0 \to \mathcal{O}(E) \hookrightarrow A^0(E) \xrightarrow{\bar\partial} \bar\partial A^0(E) \to 0,$$

получаем для $q \geq 2$ изоморфизмы

$$H^q(X, \mathcal{O}(E)) \cong H^{q-1}(X, \overline{\partial}\mathcal{A}^0(E)), \quad q \geq 2.$$

Для малых значений q из той же длинной точной последовательности имеем

$$0 \leftarrow H^1(X, \partial(E)) \leftarrow H^0(X, \overline{\partial}\mathcal{A}^0(E)) \xleftarrow{\overline{\partial}} H^0(X, \mathcal{A}^0(E)) \leftarrow H^0(X, \partial(E)) \leftarrow 0.$$

(Здесь $\partial(E)$ обозначает тот же пучок, что и $\mathcal{O}(E)$.) Отсюда немедленно следует

$$H^1(X, \mathcal{O}(E)) \cong \frac{H^0(X, \overline{\partial}\mathcal{A}^0(E))}{\overline{\partial}H^0(X, \mathcal{A}^0(E))}.$$

Аналогично, применяя длинную точную последовательность к последовательностям

$$0 \to \bar\partial A^{q-1}(E) \hookrightarrow A^q(E) \xrightarrow{\bar\partial} \bar\partial A^q(E) \to 0,$$

и снова используя исчезновение когомологий тонких пучков, комбинируя полученные изоморфизмы с изложенным выше случаем, получаем, что для всех $q \geq 1$

$$H^q(X, \partial(E)) \cong H^{q-1}(X, \overline{\partial}\mathcal{A}^0(E)) \cong H^1(X, \overline{\partial}\mathcal{A}^{q-1}(E)) \cong \frac{H^0(X, \overline{\partial}\mathcal{A}^{q-1}(E))}{\overline{\partial}H^0(X, \mathcal{A}^{q-1}(E))}.$$

С другой стороны, по определению когомологий Дольбо

$$H^q_{\overline{\partial}}(X, E) \cong \frac{\ker\left(\overline{\partial}\colon \mathcal{A}^q(E) \to \mathcal{A}^{q+1}(E)\right)}{\operatorname{Im}\left(\overline{\partial}\colon \mathcal{A}^{q-1}(E) \to \mathcal{A}^q(E)\right)}.$$

Так как $H^0(X, \overline{\partial}\mathcal{A}^{q-1}(E))$ состоит из $\overline{\partial}$-замкнутых $(0,q)$-форм со значениями в E, а $\overline{\partial}H^0(X, \mathcal{A}^{q-1}(E))$ — из $\overline{\partial}$-точных форм, получаем

$$H^q(X,\partial(E)) \cong H^q_{\overline{\partial}}(X,E).$$

Теорема 10.3 (Дальбо). *Пусть X — комплексное многообразие, $E \to X$ — голоморфное векторное расслоение. Тогда*

$$H^q(X, \partial(E)) \cong \frac{\ker\left(\overline{\partial}\colon \mathcal{A}^q(E) \to \mathcal{A}^{q+1}(E)\right)}{\operatorname{Im}\left(\overline{\partial}\colon \mathcal{A}^{q-1}(E) \to \mathcal{A}^q(E)\right)}.$$

Следствие 10.4. *Пусть $E = \mathbb{C}$, Ω^p_X пучок голоморфных p-форм. Тогда*

$$H^q(X, \Omega^p_X) = H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X) = \frac{\ker\left(\overline{\partial}\colon \Lambda^{p,q} \to \Lambda^{p,q+1}\right)}{\operatorname{Im}\left(\overline{\partial}\colon \Lambda^{p,q-1} \to \Lambda^{p,q}\right)}.$$

Часто используют обозначение:

$$H^q(X, E) := H^q(X, \mathcal{O}(E)).$$

Предложение 10.5. *Пусть $Y \subset \mathbb{C}^n$ — гиперповерхность. Тогда Y является множеством нулей голоморфной функции.*

Доказательство. Пусть $\underline{U}$ — покрытие $\mathbb{C}^n$ и $U_\alpha \cap Y = \{f_\alpha = 0\}$, и на $U_\alpha \cap U_\beta$ $\quad \frac{f_\alpha}{f_\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Пусть $\psi_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta}$. Ясно, что $\psi_{\alpha\beta}\psi_{\beta\gamma}\psi_{\gamma\alpha} = 1$. рассмотрим точную последловательность пучков

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \xrightarrow{\exp(2\pi i\,\cdot)} \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^n} \longrightarrow 0$$

$\mathbb{Z}$ — постоянный пучок, а у $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ нет когомологий, отсюда

$$H^q(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^n}) \cong H^{q+1}(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}) \cong 0.$$

Значит $\psi_{\alpha\beta} = \frac{g_\alpha}{g_\beta}$, где g_α и g_β — ненулевыйе голоморфные функции.

$$\frac{f_\alpha}{f_\beta} = \frac{g_\alpha}{g_\beta}, \quad \Longrightarrow \quad \frac{f_\alpha}{g_\alpha} = \frac{f_\beta}{g_\beta}.$$

И т.к. пучок голоморфных фцнуцый то существует глобально определенная голоморфнвя функция $\hat{f}|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \frac{f_\alpha}{g_\alpha}$. ■

Дивизоры

Пусть теперь X — произвольное комплексное многообразие.

Если $Y \subset X$ — гиперповерхность, то $Y = \cup_i Y_i$, где Y_i – непрерывная.

Определение 10.6. Формальная линейная комбинация

$$D = \sum a_i Y_i, \quad a_i \in \mathbb{Z},$$

где Y_i — непрерывные, называется *дивизором*.

Y — непрерывная гиперповерхность локально возле нуля задаваесая как $Y = \{g = 0\}$ в X, f — мероморфная функцция, тогда для $x \in Y$ иожно определить $\operatorname{ord}_{x,Y}(f) \in \mathbb{Z}$, такое что $f = g^{\operatorname{ord}_{x,Y}(f)} \cdot h$, $h \in \mathcal{O}_{x,X}$, $Y = \{g = 0\}$, а h — обратима. Если Y неприводим, то $\operatorname{ord}_Y(f) = \operatorname{ord}_{x,Y}(f)\ \forall x \in Y$

Определение 10.7. Дивизор мероморфной функции f определяется как

$$(f) := \sum \operatorname{ord}_Y(f) \cdot Y,$$

дивизор мероморфной функции называется *главным*.

Дивизоры, как формальную сумму можно склыдвать, такая группа обозначается $\operatorname{Div}(X)$.

Заметим, что всякая гиперповерхность задана лин Локально $Y \cap U_\alpha = \{f_\alpha = 0\}$, где $\underline{U} = \{U_\alpha\}$ — покрытие X. $\frac{f_\alpha}{f_\beta} = \psi_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$ — коцикл, следовательно он лежит в группе $H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$. С другой стороны, любой такой коцикл из $H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$ по определениею задает голоморфное линейное расслоение. Более того у такого расслоения сразу имеется сечение, задаваемое f_α.

$H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$ — это группа, образованная голоморными линейными расслоениями, часто она обозначается $\operatorname{Pic}(X)$.

Отображение из $\operatorname{Div}(X)$ в $\operatorname{Pic}(X)$ — гомоморфизм.

Т.е. резюмирая все вышесказанное

Предложение 10.8.

1. *Отображение* $\operatorname{Div}(X) \to \operatorname{Pic}(X)$ *является гомоморфизмом.*

2. *Образ* $\operatorname{Div}(X) \to \operatorname{Pic}(X)$ *содержит расслоения* $L \subset H^0(X,L)$, *т.е. имеющими непрерывные сечения.*

3. *Если* $s_i \in H^0(X,L_i)$, $i = 1,2$ *то* s_i *соответствуют дивизоры* $D_i = s_i = 0$, *причем* D_i *отображаются в* L_i *при отображениии* $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$

4. *Образ* $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ *порожден расслоениями* $H^0(X,L) \neq 0$.

Лекция 11

Уже по традиции X — комплексное многообразие, вспомним что на прошлой лекции мы определили группу дивизоров $\mathrm{Div}(X)$ и обсудили связь с группой голоморфных линейных расслоений $H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$.

Рассмотрим две точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{M}_X^* \longrightarrow \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0,$$

где напомним, что $\mathcal{M}_X^*$ — пучок мероморфных функций.

Первое граничное отображение из $H^1(X,\mathcal{O}_X^*) \to H^2(X,\mathbb{Z})$

Замечание. Отоборажение $H^1(X,\mathcal{O}_X^*) \to H^2(X,\mathbb{Z})$ есть ни что иное как сопостевление голоморфному линейному расслоениею его первый класс Черна. $L \mapsto C_1(L)$

Вторoе отображение $H^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ есть тоже самое, что и отображение $\mathrm{Div}(X) \to H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$. Действительно, рассмотрим утверждение

Предложение 11.1. *Пусть X — гладкое комплексное многообразие, тогда $\mathrm{Div}(X) \cong H^0(X,\mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*))$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f \in H^0(X,M_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ и покрытие $\underline{U} = \{U_\alpha\}$ f_j — мероморфные функции неа U_α. На $U_\alpha \cap U_\beta$ $f_\alpha/f_\beta = \mathcal{O}_X^*(U_\alpha \cap U_\beta)$. Каждому f локально сопоставляется дивизор, т.е.

$$f_\alpha \mapsto \mathrm{Div}(f_\alpha) = \sum a_i Y_i$$

.

В обратную сторону, пусть $D \in \mathrm{Div}(X)$,

$$D = \sum a_i Y_i,$$

где Y_i неприводимые. Пусть $f_{\alpha i}$ — локальное уравнение для $Y_i \cap U_\alpha$, тогда определим

$$f_\alpha = \prod_j f_{\alpha i}^{a_i}.$$

Тогда видно, что $\{f_\alpha\}$ опрееделяет элемент в $H^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ ■

Далее, в прошлый раз мы говорили, что если

$$D = \sum a_i Y_i, \qquad a_i \geq 0$$

- дивизор, то ему сопоставляется линейное расслоение $\mathcal{O}(D)$. Локально D задано одним уравнением $D \cap U_\alpha = \{f_\alpha = 0\}$. Тогда отношение локальрных уравнений $f_\alpha/f_\beta = g_{\alpha\beta} \in H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$. $g_{\alpha\beta}$ — склеивающий коцикл некоторого линейного расслоения $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$ следовательно f_α задает сечение.

Пусть f — мероморфная функуия, тогда $D(F)$ — сопоставленный ей дивизор. Заметим, что ${}_\alpha/f_\beta = 1$, тогда дивизор мероморфной функции задает тривиальное расслоение. Такое расслоение называется главным.

Пусть $L \to X$ — голоморфное линейное расслоение, $H^0(X,L) \neq 0$, т.е. s - голоморфное сечение, рассмотрим $Z_s = \{x \in X | s(x) = 0\}$ - это аналитическая гиперповерхность, т.е. двизор. Потому есть отображение $Z_s \to \mathcal{O}(Z_s)$

Предложение 11.2. $\mathcal{O}(Z_s) \cong L$

Доказательство. $s_\alpha = s|_{U_\alpha}$ и $s_\alpha = g\alpha\beta s_\beta$ на $U_\alpha \cap U_\beta$? где $g_{\alpha\beta}$ — склеивающий коцикл для L. Тогда $s_\alpha/s_\beta = g_{\alpha\beta}$. ■

Образ
$$\mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$
порождается голоморфными линейными расслоениями с $H^0(X,L) \neq 0$.

Замечание. Это отображение может быть не сюрьективным.

Метрики, связности и кривизна

Рассмотрим комплексное векторное расслоение $E \to X$ (не обяхзательно голоморфное.) Любое сечение имеет следующие свойства:

1. На E всегда существует эрмитова метрика H Если $(e_1, \ldots, e_r)$ — локальное тривиализующее сечение, то
$$H_{\alpha\bar{\beta}} = H(e_\alpha, e_{\bar{\beta}}), \quad \alpha, \beta = 1, \quad r = \mathrm{rk}\, E.$$
H — это сечение $E^* \otimes \overline{E}^*$

2. На E всегда существует связность, т.е. отображение
$$D \colon \Gamma(E) \to \Gamma(E \otimes \Lambda^1),$$
такое что
   а) $D(s_1 + s_2) = Ds_1 + Ds_2$
   б) $D(fs) = df \otimes s + fDs$

3. Локально ковариантная производная имеет вид:
$$D = d + A,$$
где A — матричнозначная 1-форма $De_\alpha = A_\alpha^\beta e_\beta$ (тензором она не является).

Заметим, что **априори связи между D и H нету**

Заметим, что если мы продолжим D на

$$D\colon \Gamma(E\otimes\Lambda^p_X)\longrightarrow\Gamma(E\otimes\Lambda^{p+1}_X)$$

по формуле

$$D(h\otimes s)=dh\otimes s+h\cdot Ds.$$

Предложение 11.3. *Пусть $s\in\Gamma(E)$. Тогда справедливо равенство*

$$D^2s=F_A\wedge s,$$

где

$$F_A=dA+A\wedge A\in\operatorname{End}(E)\otimes\Lambda^2_X$$

Если есть D на E, то D задает связность на тензорных степенях (прямых суммах и E^*) E.

Т.к. рaасслоение у нас комплексное, то рассмотрим $\overline{E}$, связность на нем определяется по формуле

$$\overline{D}s=Ds.$$

Связность D называется согласованной с H, если $DH-0$, ну или эквивалентно, $DH(s_1,s_2)=H(Ds_1,s_2)+H(s_1,Ds_2)$.

Пусть X — комплексное многообраазие, тогда D на комплексном векторном расслоении раскладывается на (1,0)- и (0,1)-составляющие:

$$D=D'+D'',$$

где

$$D=d+A,\quad D'=\partial+A^{(1,0)},\quad D''=\overline{\partial}+A^{(0,1)},$$

и $A^{(1,0)}$, $A^{(0,1)}$ — компоненты матрицы связности A по типу формы.

Пусть E — голоморфное векторное расслоение. Тогда оператор $\overline{\partial}$ корректно определён на $\Gamma(E)$.

Вопрос: Существует ли связность D на E, такая что:

а) $DH=0$, т.е. D согласована с ней;

б) $D''=\overline{\partial}$.

Ответ — да, причем единственная.

Заметим две вещи:

1. Метрика H определяет изоморфизм $E\to\overline{E}^*$ — антиголоморфно. На $\overline{E}^8$ есть оператор ∂.

По этому положим для любого сечения $s \in \Gamma(E)$ $D^n s = \bar\partial s$ и $D's = H^{-1}(\partial H s)$.

нетрудно видеть, что формула лейбница выполняется, пусть $z^1, \ldots z^n$ — локальные координаты в X, $e_1, \ldots e_r$ — голоморфная тривиализация E. Пусть

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial z^j}, \qquad \partial_{\bar j} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}^j},$$

$s = s^\alpha e_\alpha$. Тогда

$$\partial_{\overline{k}} s^\alpha = D''_{\overline{k}} s^\alpha$$

и

$$D'_j s^\alpha = \partial_j s^\alpha + H^{\alpha\overline{\gamma}} \partial_j H_{\overline{\gamma}\beta} s^\beta.$$

Теорема 11.4. *Пусть E — голоморфное векторное расслоение над комплексным многообразием X.*

Тогда существует единственная связность D, такая что:

1. $D'' = \overline{\partial}$;
2. $D' = \partial + \partial H \cdot H^{-1}$;
3. *D сохраняет эрмитову метрику H, то есть $DH \equiv 0$.*

Такая связность называется *связностью Черна.*

Доказательство. Мы доказали все, кроме того, что она сохраняет метрику и единственна.

Продолжим D на $E \otimes \overline{E}^*$, если $t \in \Gamma(E^*)$, то $D(t(s)) = d(t(s)) - t(Ds)$. Т.к. $Dt = dt - At$, то также нетрудно понять, что

$$D'_j H_{\alpha\overline{\beta}} = \partial_j H_{\alpha\overline{\beta}} - A_{j\alpha}{}^{\gamma} H_{\gamma\overline{\beta}},$$

где $A_{j\alpha}{}^{\gamma} = \partial H \cdot H^{-1}$. ну и соответственно

$$D''_{\overline{k}} H_{\alpha\overline{\beta}} = \partial_{\overline{k}} H_{\alpha\overline{\beta}} - A_{\overline{k}\,\overline{\beta}}{}^{\overline{\delta}} H_{\alpha\overline{\delta}} = 0$$

потому связность сохраняет метрику.

Единственность следует из того, что формулы для обеих функций будут одинаковые. ■

Доказательство. Пусть $(e_1, \ldots, e_r)$ — локальный тривиальный базис.

Наоборот, пусть D — связность такая, что $DH = 0$ и $D'' = \overline{\partial}$.

Тогда:

$$dH(e_\alpha, e_{\overline{\beta}}) = H(De_\alpha, e_{\overline{\beta}}) + H(e_\alpha, De_{\overline{\beta}})$$

Так как $D = D' + D''$ и $D'' = \overline{\partial}$, то:

$$\partial H(e_\alpha, e_{\overline{\beta}}) = H(D'e_\alpha, e_{\overline{\beta}}) + H(e_\alpha, \overline{\partial} e_{\overline{\beta}})$$

Поскольку $e_{\overline{\beta}}$ — базисное сечение, его производная равна нулю:

$$= H(D'e_\alpha, e_{\overline{\beta}}) = H(A_\alpha^{\ \gamma} e_\gamma, e_{\overline{\beta}}) = A_\alpha^{\ \gamma} H_{\gamma\overline{\beta}} = \partial H_{\alpha\overline{\beta}}$$

Отсюда:

$$A_\alpha^{\ \gamma} = \partial H_{\alpha\overline{\beta}} \cdot H^{\overline{\beta}\gamma} \quad \Rightarrow \quad A = \partial H \cdot H^{-1}$$

$\blacksquare$

Далее для связности Черна будем использовать соглашение

$$\nabla := D', \qquad \bar{\partial} = D''.$$

На сопряженных расслоениях, соответственно черта будет на других местах.

F — кривизна связности Черна:

Пусть $A = A^{(1,0)} + A^{(0,1)}$. Тогда

$$\begin{aligned} F = dA + A \wedge A = &\underbrace{\partial A^{(1,0)} + A^{(1,0)} \wedge A^{(1,0)}}_{F^{(2,0)}} \\ &+ \underbrace{\overline{\partial} A^{(1,0)} + \partial A^{(0,1)} + A^{(1,0)} \wedge A^{(0,1)} + A^{(0,1)} \wedge A^{(1,0)}}_{F^{(1,1)}} \\ &+ \underbrace{\overline{\partial} A^{(0,1)} + A^{(0,1)} \wedge A^{(0,1)}}_{F^{(0,2)}} \end{aligned}$$

$$F = F^{(2,0)} + F^{(1,1)} + F^{(0,2)},$$

но $F^{(0,2)} = 0$ для связности Черна на E.

Рассмотрим подробнее $F^{(2,0)} = \partial A^{(1,0)} + A^{(1,0)} \wedge A^{(1,0)}$, $A^{(1,0)} = \partial H \cdot H^{-1}$ а именно

$$\begin{aligned} F^{(2,0)} &= \partial(\partial H \cdot H^{-1}) + \partial H \cdot H^{-1} \wedge \partial H \cdot H^{-1} \\ &= -\partial H \cdot H^{-1} \wedge \partial H \cdot H^{-1} + \partial H \cdot H^{-1} \wedge \partial H \cdot H^{-1} = 0 \end{aligned}$$

$F^{(1,1)} = \overline{\partial}(\partial H \cdot H^{-1}) = F$

Т.е. мы только что доказали, что

Предложение 11.5. *Кривизна связности Черна на голоморфном векторном расслоении E с эрмитовой метрикой H, имеющей тип* (1,1)*, выражается формулой:*

$$F = \overline{\partial}(\partial H \cdot H^{-1}).$$

В локальных координатах

$$F = F^\alpha_{jk\overline{\beta}}\, dz^j \wedge d\overline{z}^k,$$

где

$$F^\alpha_{jk\overline{\beta}} = -\partial_j \partial_k H_{\gamma\overline{\beta}}\, H^{\alpha\overline{\gamma}} + \partial_j H_{\gamma\overline{\beta}}\, H^{\epsilon\overline{\gamma}}\, \partial_k H_{\epsilon\overline{\delta}}\, H^{\alpha\overline{\delta}}.$$

Лекция 12

По классике пусть X — компактное комплексное многообразие, $E \to X$ — голоморфное векторное расслоение ранга $r = \operatorname{rk} E$, а $H = (H_{\alpha\overline{\beta}})$ — эрмитова метрика на E.

На прошлой лекции нами введена (см. теорему о связности Черна) метрика Черна, а также рассмотрена кривизна, соответствующая ей.

Напомним общий факт, что если есть двойственное расслоение E^*, тогда если $t \in \Gamma(E^*)$, а $s \in \Gamma(E)$, то мы можем на E^* ввести связность как

$$(\nabla t)(s) = d(t(s)) - t(\nabla s)$$

Далее если E_1 и E_2 — голоморфые векторные расслоения, ∇_1, ∇_2 — соответствующие связности, то можем определить связность на прямой сумме $E_1 \oplus E_2$ как

$$\nabla^{E_1 \oplus E_2}(s_1 \oplus s_2) = \nabla^1 s_1 \oplus \nabla^2 s_2, \qquad s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^{E_1 \oplus E_2}_{\partial/\partial z}, s = \begin{pmatrix} \nabla^1 s_1 \\ \nabla^2 s_2 \end{pmatrix}.$$

На тензорном произведении $E_1 \otimes E_2$ можно задать связность по формуле

$$\nabla(s_1 \otimes s_2) = \nabla^1 s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^2 s_2.$$

Ну и на $\overline{E}$, если $s \in \Gamma(E)$, то $\overline{s} \in \Gamma(\overline{E})$ $\nabla \overline{s} := \overline{\nabla s}$

Предложение 12.1. *Пусть (E,H) — голоморфное векторное расслоение над X, $x_0 \in X$. Тогда существует $e_1, \dots, e_r$ — тривиализация E в окрестности x_0, такая, что имеет вид $H(e_\alpha, e_{\overline{\beta}}) = \delta_{\alpha\overline{\beta}}$, и выполнено $\partial H(x_0) = 0$.*

Доказательство. Т.к. всегда мы можем выбрать ОНБ, то считаем, что первое выполнено. Заметим, что если $a\colon\ E \to E$ — голоморфное преобразование, то метрика преобразуется как $H \mapsto aHa^{-1}$, соответственно $\partial H = \partial H \cdot H^{-1} \cdot H + H \cdot \partial H \cdot H^{-1}$. Откуда видно, что надо найти a, такое что

$$1) \quad a(x_0) = \operatorname{Id}, \qquad\qquad 2) \quad a = \operatorname{Id} + a^i_\beta \bar{z}^j,$$

где

$$a^i_\beta = \partial_j H_{\beta\overline{\delta}} \cdot H^{\overline{\delta}i}(x_0) = -\partial_j H_{\beta\overline{i}}(x_0).$$

Если $\operatorname{rk} E = r$, то на $\Lambda^r E$ имеется

$$e_1 \wedge \dots \wedge e_r \in \Gamma(\Lambda^r E)$$

— локальная тривиализацияе $\Lambda^r E$.

$$\nabla s = \sum_{j=1}^{r} e_1 \wedge \dots \wedge \nabla e_j \wedge \dots \wedge e_r,$$

где мы знаем что $\nabla e_\alpha = A_\alpha{}^\beta e_\beta$. Перепишем сумму выше как

$$\sum_{\beta,\alpha=1}^{r} e_1 \wedge \ldots \wedge A_\alpha^\beta e_\beta \wedge \ldots \wedge e_r = \sum_{\alpha=1}^{r} e_1 \wedge \ldots \wedge A_\alpha{}^\alpha e_\alpha \wedge \ldots \wedge e_r = \sum_{\alpha=1}^{r} A_\alpha{}^\alpha s.$$

заметим, что $A = A_\alpha{}^\alpha = H^{\alpha\bar\beta}\,\partial H_{\alpha\bar\beta} = \partial \log\det H$, где $H = (H_{\alpha,\bar\beta})$ (здесь идёт мнимое суммирование). Тогда кривизна A

$$F_A = \bar\partial A = \bar\partial\partial \log\det H$$

Более общо, если $L \to X$ голоморфное линейное расслоение, H — метрика на L, то

$$F = \bar\partial\partial \log H$$

Если локально взять $H = e^{-\varphi}$, то

$$F = -\bar\partial\partial\varphi = \partial\bar\partial\varphi$$

■

Часто под кривизной L понимают не $\bar\partial\partial\log H$ (или $\partial\bar\partial\varphi$), а

$$\sqrt{-1}\,\bar\partial\partial\log H = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\varphi$$

Пример 12.2. Пусть $L \to X$ —комплексное линейное расслоение на компактном комплексном многообразии X, как раньше, но $H^0(X,L)$ и для любого $x_0 \in X$ существует $s \in H^0(X,L)$, такой что $s(x_0) = 0$. усть X — компактное. Тогда $\dim H^0(X,L) < +\infty$.

Пусть $s_1, \ldots, s_k$ — базис в $H^0(X,L)$, а s — произвольное сечени. Тогда определим

$$H(s,s) = \frac{|s|^2}{\sum\limits_{j=1}^{k} |s_j|^2}.$$

В частности, если $X = \mathbb{CP}^n$, $L = \mathcal{O}(1)$, то

$$H_{FS} = \frac{1}{|z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2},$$

такая метрика называется *метрикой Фубини-Штуди*. Вычислим кривизну

$$F_{FS} = -\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\log\left(\sum |z_j|^2\right) = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\log\sum |z_j|^2$$

вообще говоря сумма под логарифмам определена только локально, но сама F_{FS}, глобальная.

Заметим также, что

Предложение 12.3. *Если f — голоморфная функция не имеет нулей в окрестности нуля в $\mathbb{C}^r$, то $\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\log|f|^2 = 0$.*

X — комплексное многообразие.

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{p} Q \longrightarrow 0,$$

— точная последовательность голоморфных векторных расслоений. Пусть H — метрика на E.

На каждом пространстве есть связность Черна, поймем как они связаны.

У нас имеется разложение $S^{\perp} = T$, $E \simeq S \oplus S^{\perp} \simeq S \oplus T$. и $T \simeq Q$. T — комплексное, однако **не голоморфное**. Пусть π_s, π_T — проекторы на S и T соответственно.

Предложение 12.4. *Пусть $\psi \in \Gamma(S)$. Тогда ковариантная производная $\nabla\psi$ раскладывается как*

$$\nabla\psi = \pi_S(\nabla\psi) + \pi_T(\nabla\psi),$$

где:

1. *∇^S — связность Черна на S, и тогда*

$$\pi_S(\nabla\psi) = \nabla^S\psi;$$

2. *$\pi_T(\nabla\psi) = B\psi$, где $B \in \Gamma(\mathrm{Hom}(S,T) \otimes \Lambda^{1,0}_X)$.*

а ∇ — связность Черна на E.

Доказательство. 1) Сначала докажем первый пункт. Пусть $f \in C^{\infty}(X)$. Тогда:

$$\pi_S\left(\nabla(f\psi)\right) = \pi_S\left((\partial f) \otimes \psi + f\nabla\psi\right) = (\partial f) \otimes \pi_S(\psi) + f\pi_S(\nabla\psi),$$

то есть

$$\pi_S\left(\nabla(f\psi)\right) = (\partial f) \otimes \psi + f\pi_S(\nabla\psi).$$

2)

$$\pi_T\left(\nabla(f\psi)\right) = (\partial f) \otimes \pi_T(\psi) + f\pi_T(\nabla\psi) = f\pi_T(\nabla\psi),$$

гдн роследнее равенство следует из того, что T-проекция от ψ равна нулю (по предположению в условии). Таким образом,

$$\pi_T\left(\nabla(f\psi)\right) = f\pi_T(\nabla\psi).$$

■

Предложение 12.5. *Пусть ∇ — связность Черна на векторном расслоении E, и $\varphi \in \Gamma(T)$ — сечение подрасслоения T. Тогда выполнены следующие свойства:*

1. $\Pi_T(\nabla\varphi) := \nabla^T\varphi$, *где* ∇^T *— некоторая унитарная связность на* T*;*
2. $\Pi_S(\nabla\varphi) = C\varphi$, *где* C *— 1 форма со значениями в* $\mathrm{Hom}(T,S)$.

Доказательство. Аналогично предыдущему. ■

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla^S & C \\ B & \nabla^T \end{pmatrix}$$

Более того, если $B = B_j\, d\bar{z}^j$, то $B_j^* = -C_{\bar{j}}$ $\psi \in \Gamma(S)$, $\varphi \in \Gamma(T)$

$$0 = \partial_j\langle\psi,\varphi\rangle = \langle\nabla_j\psi,\varphi\rangle + \langle\psi,\partial_j\varphi\rangle = \langle B_j\psi,\varphi\rangle + \langle\psi, C_{\bar{j}}\varphi\rangle$$

Веренмся к точной последовательности. Голоморфное отображение $p\colon E \to Q = E/S$ и сопряженное $p^*\colon Q \to E$ — определяет изоморфизм Q и T. Пусть $\nabla^Q\colon = p\nabla p^*$, тогда имеем разложение

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla^S & C \\ pB & \nabla^Q \end{pmatrix}.$$

Предложение 12.6. $\nabla^Q\colon = p\nabla p^*$ *— связность Черна на* Q*.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \Gamma(Q)$. Тогда $p^*\varphi$ — сечение E.

$$p\bar{\partial}(p^*\varphi) = \bar{\partial}(pp^*\varphi) = \bar{\partial}\varphi.$$

■

Предложение 12.7. *Пусть F^S, F^Q — кривизны связностей ∇^S и ∇^Q, а F — кривизна связности ∇ на E. Тогда:*

$$F = \begin{pmatrix} F^S + \gamma\wedge\beta & \nabla^{\mathrm{Hom}(Q<S)}\gamma \\ \bar{\partial}\beta & F^Q + \beta\wedge\gamma \end{pmatrix},$$

где $\beta = pB$, $\gamma = Cp^*$.

Доказательство. Пусть $\psi \in \Gamma(s)$, $\varphi \in \Gamma(Q)$, тогда

$$\nabla\begin{pmatrix}\psi\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\nabla^S\psi + \gamma\varphi \\ \nabla^Q\varphi + \beta\psi\end{pmatrix}$$

откуда

$$\nabla^2\begin{pmatrix}\psi\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\nabla^S(\nabla^S\psi + \gamma\varphi) + \gamma(\nabla^Q\varphi + \beta\psi) \\ \nabla^Q(\nabla^Q\varphi + \beta\psi) + \beta(\nabla^S\psi + \gamma\varphi)\end{pmatrix}$$

Рассмотрим подробнее первую компоненту

$$\nabla^S(\nabla^S\psi + \gamma\varphi) + \gamma(\nabla^Q\varphi + \beta\psi) \;=\; (\nabla^S)^2\psi + \nabla^S(\gamma\varphi) + \gamma\nabla^Q\varphi + \gamma\wedge\beta\psi$$

Но $\nabla(\gamma\varphi) = \nabla\gamma\cdot\varphi - \gamma\wedge\nabla\varphi$. а следовательно первая компонента выражения переписывается как

$$(\nabla^S)^2\psi + \nabla^{\mathrm{Hom}(Q,S)}\gamma\psi + \gamma\wedge\beta\psi.$$

Аналоогично рассматривается и вторая компонента

$$\nabla^Q(\nabla^Q\varphi + \beta\psi) + \beta(\nabla^S\psi + \gamma\varphi) = (\nabla^Q)^2\varphi + \beta\wedge\gamma\varphi + \nabla^{\mathrm{Hom}(S,Q)}\beta\psi,$$

итого

$$\begin{pmatrix}(\nabla^S)^2\psi + \gamma\wedge\beta\,\psi + \nabla^{\mathrm{Hom}(Q,S)}\gamma\psi\\ (\nabla^Q)^2\varphi + \beta\wedge\gamma\,\varphi + \nabla^{\mathrm{Hom}(S,Q)}\beta\psi\end{pmatrix}$$

Т.к. F^E — (1,1) форма, то ее кмпоненты тоже (1,1) формы, значит

$$\nabla\beta = \nabla^{1,0}\beta + \bar\partial\beta$$
$$\nabla\gamma = \nabla^{1,0}\gamma + \bar\partial\gamma$$

$\nabla^{1,0}\beta$ - это (2,0) форма, а $\bar\partial\gamma$ — (0,2) форма, а значит они равн нулю, т.к. F^E — (1,1) форма. Т.е. везде ∇^{Hom} можно переписать как $\nabla^{(1,0)}$. То в итоге получаем

$$\begin{pmatrix}(\nabla^S)^2 + \gamma\wedge\beta & \nabla^{1,0}\gamma\\ \bar\partial\beta & (\nabla^Q)^2 + \beta\wedge\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi\\ \varphi\end{pmatrix},$$

более того $\bar\partial\gamma = 0$. ■

Лекция 13

На проошлой лекции мы остановились на рассмотрении тоной последовательности

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{p} Q \longrightarrow 0,$$

линейных расслоений на комплексном многообразии X. А также нашли связь между связностями Черна на них (см. предложение 12.5) и было доказано также и утверждение про кривизны (см. предложение 12.7). В нем было показано, что $\bar{\partial}\gamma = 0$, тогда оно определяет $\gamma \in H^1_{X,\bar{\partial}}(\mathrm{Hom}(Q,S))$. На самом деле верно даже больше, а именно пусть у нас есть две точные последовательности

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{\iota} E_1 \xrightarrow{p} Q \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{\iota} E_2 \xrightarrow{p} Q \longrightarrow 0,$$

тогда $E_1 \cong E_2$ эквивалентно соответствию $[\gamma_1] = [\gamma_2]$. Т.е. $E \cong S \oplus Q$ (голоморфное) равносильно тому что $[\gamma] = 0$.

Напомним ещё пару важных свойств связности

Замечание. Пусть $E \to X$ — голоморфное векторное расслоение, H — метрика,

$$H = (H_{\alpha\bar{\beta}}), \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, r, \quad r = \operatorname{rank} E,$$

$z^1, \ldots, z^n$ — локальные координаты на X,
$e_1, \ldots, e_r$ — локальная тривиализация, $H_{\alpha\bar{\beta}} = H(e_\alpha, e_\beta)$. Сечение $s = s^\alpha e_\alpha$.

$$\nabla_j = \nabla_{\frac{\partial}{\partial z^j}}, \quad \nabla_{\bar{k}} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}}$$

Тогда, если $A^\alpha_{j,\beta} = H^{\alpha\bar{\gamma}}\partial_j H_{\beta\bar{\gamma}}$, $F^{\alpha}_{j\bar{k}\ \beta} = -\partial_{\bar{k}}(A_j)$.

$$[\nabla_j, \nabla_{\bar{k}}]\, s^\alpha = F_{j\bar{k}\,\beta}^{\ \ \alpha}\, s^\beta, \qquad [\nabla_j, \nabla_{\bar{m}}]\, s^\alpha = [\nabla_{\bar{k}}, \nabla_{\bar{m}}]\, s^\alpha = 0.$$

Замечание. Любая связность позволяет определять параллельный перенос векторов.

Классы Черна

X, E — те же, что и раньше (но E можно считать комплексным, со связностью ∇^A).

Определение 13.1. P — k-полилинейная функция на $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ (симметрическая).

$P(B)$ — полином степени k на $B \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$, т.е. $B \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^r)$.

Инвариантность P, если

$$\forall a \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}), \quad P(aBa^{-1}) = P(B).$$

Пусть F_A — кривизна связности ∇^A.

Тогда
$$P\left(\frac{\sqrt{-1}F_A}{2\pi}\right)$$
является $2k$-формой на X, она корректно определена.

Предложение 13.2. *Верны следующие свойства:*

1. $P\left(\frac{\sqrt{-1}F_A}{2\pi}\right)$ *замкнута;*
2. *Класс* $\left[P\left(\frac{\sqrt{-1}F_A}{2\pi}\right)\right]$ *не зависит от выбора связности.*
3. *Если* $\Phi\colon Y \to X$ *— гладкое отображение, то*
$$\Phi^* P\left(\frac{\sqrt{-1}F_A}{2\pi}\right) = P\left(\frac{\sqrt{-1}\Phi^* F_A}{2\pi}\right).$$
а значит $\Phi^*[P(E)] = [P(\Phi^* E)]$

Посмотрим на
$$P(B) = \det(\mathrm{Id} + B) = 1 + P_1(B) + \dots + P_r(B)$$

Определение 13.3. *k- классом Черна $c_k(E)$* называется класс
$$\left[P_k\left(\frac{F_A}{2\pi}\right)\right].$$

Например
$$c_1(E) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\operatorname{Tr}(F_A)$$
$$c_2(E) = \frac{1}{8\pi^2}\left(\operatorname{Tr}(F_A \wedge F_A) - \operatorname{Tr}(F_A)^2\right)$$
Если E — голоморфное векторное расслоение, то $c_k(E)$ представляется формой типа (k, k).

Пусть H_1, H_2 — две эрмитовы метрики. Тогда первый класс Черна задаётся формулой:
$$c_1(E) = \left[-\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\log\det H_1\right].$$
Так как класс Черна не зависит от выбора метрики, имеем:
$$c_1(E) = \left[-\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\log\det H_2\right]$$

откуда если рассмотреть разность

$$-\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\log\det H_1+\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\log\det H_2 \\ =\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\log\left(\frac{\det H_2}{\det H_1}\right)=\sqrt{-1}\partial\bar\partial\det H_1^{-1}H_2, \quad (13.1)$$

обозначив за $h=H_1^{-1}H_2$, то

$$(F_1)_{j\bar k}-(F_2)_{j\bar k}=\partial_{\bar k}\left(\nabla_j^2 h\cdot h^{-1}\right),$$

$(F_i)_{j\bar k}$ — компоненты кривизны соответствующей связности $\nabla^{(i)}$. Эта формула очень полезна и позволяет сравнивать кривизны двух связностей Черна.

Пусть X — комплексное многообразие, $T_x^{1,0}$ — голоморное касательное расслоение и $T_x\otimes\mathbb{C}=T_x^{1,0}\oplus T_x^{0,1}$. Заметим, что на T_x есть оператор J. Пусть на X есть метрика g, совместная с J, т.е.

$$g(\xi,\eta)=g(J\xi,J\eta).$$

Тогда она определяет эрмитову метрику на $T_x^{1,0}$.

Обратно, эрмитова метрика на $T_x^{1,0}$ определяет метрику на T_x, совместимую с J.

На $T_x^{1,0}$ есть связность Черна ∇, а на $T_x\otimes\mathbb{C}$ связность Леви-Чивиты ∇^g. Потребуем чтобы $\nabla^g J=0$ (вообще говоря в общем случае это не так). Тогда ∇^g сохраняет $T_x^{1,0}$ и $T_x^{0,1}$. Рассмотрим

$$\partial_j=\frac{\partial}{\partial z^j},\quad \partial_{\bar k}=\frac{\partial}{\partial\bar z^k}$$

то

$$J(\nabla_m^g\partial_j)=\nabla_m^g J(\partial_j).$$

Следовательно существует Γ_{jk}^i, такая что

$$\nabla_m^g\partial_j=\Gamma_{mj}^s\,\partial_s, \qquad \nabla_{\bar m}^g\,\partial_{\bar k}=\Gamma_{\bar m\bar k}^{\bar s}\,\partial_{\bar s}.$$

заметим, что $\nabla_{\bar m}^g\,\partial_k=\nabla_k^g\,\partial_{\bar m}$, это верно, т.к. ∇^g без кручения. Слева в равенстве стоит (1,0) вектор, а справа (0,1) поэтому $\nabla_{\bar m}^g\partial_k=0$. Продолжим метрику по линейности на комплексификацию касательного расслоения $g_{j\bar k}=g(\partial_j,\partial_{\bar k})$, поэтому

$$\partial_m g_{j\bar k}=\partial_m\,g(\partial_j,\partial_{\bar k})=g(\nabla_m\partial_j,\partial_{\bar k})=\Gamma_{mj}^s\,g_{s\bar k}$$

следовательно $\Gamma_{mj}^s=g^{s\bar k}\,\partial_m g_{j\bar k}$, т.е $\nabla^g=\nabla$ на $T_x^{0,1}$.

Заметим, что из $\nabla_m\partial_j=\nabla_j\partial_m$ следует $\Gamma_{mj}^s=\Gamma_{jm}^s$ и $\partial_m g_{j\bar k}=\partial_j g_{m\bar k}$ для всех j,m,k. Аналогично, $\partial_{p}g_{j\bar k}=\partial_{\bar k}g_{j\bar p}$.

Рассмотрим мнимую часть эрмитовой метрики

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{j,k} g_{j\bar{k}}\, dz^j \wedge d\bar{z}^k$$

$\mathbb{P}$ — из формулы выше эквивалентно тому, что $d\omega = 0$.

Определение 13.4. Риманова метрика g на X, совместимая с J, называется *кэллеровой*, если

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum g_{j\bar{k}}\, dz^j \wedge d\bar{z}^k$$

замкнута, то есть $d\omega = 0$.

Теорема 13.5. *Пусть (X, g, J, ω) — как выше. Следующие условия эквивалентны:*

1. $\nabla^g J = 0$*;*
2. $\nabla^g \omega = 0$*;*
3. $d\omega = 0$*;*
4. $\nabla^g = \nabla$*, где* ∇ *— связность Черна на* $T_X^{1,0}$*;*
5. *В окрестности любой точки* $x \in X$ *существуют голоморфные координаты* $(z^1, \dots, z^n)$*, такие что*

$$g_{j\bar{k}} = \delta_{jk} + \mathcal{O}(|z|^2).$$

Доказательство. $\omega(\xi, \eta) = g(J\xi, \eta)$ то 1) $\Leftrightarrow$ 2). из 4) $\Rightarrow$ 3) мы показали выше. Заметим, что 3) $\Leftrightarrow$ 5), из 5) в 3) очевидно, а в обратную сторону рассмотрим произвольную систему координат z^j, тогда замена вида $w^j = \bar{z}^j - \frac{1}{2}\,\partial_a g_{b\bar{j}}(x)\, z^a z^b$. В координатах w^j метрика имеет заданный вид

■

Лекция 14

Кэллеровы многообразия

На прошлой лекции мы дказали очень важную теорему 13.5 и дли определение Кэллеровой метрики. Заметим сначала следующее.

Предложение 14.1. *1) Пусть* (X_1,ω_1) *и* (X_2,ω_2) *— два кэллеровых многообразия, то их произведение* $(X_1 \times X_3, \omega_1 + \omega_2)$ *также является кэллеровым многообраазием.*

2) Если (X, ω) *кэллерово многообразие,* $Y \subset X$ *— комплексное подмногообразие, то* $(Y,\omega|_Y)$ *— кэллерово.*

Доказательство. Доказательство первого пункта очевидно, потому рассмотрим второй. После ограничения форма $\omega|_Y$ положительна и задает эрмитову метрика, в силу функтуриальности дифференциала верным остается и то, что $d(\omega|_Y) = (d\omega)|_Y$ ■

Рассмотрим несколько примеров

Пример 14.2. Стандартная эрмитова метрика на$\mathbb{C}^n$ дает кэллерову метрику

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{j=1}^{n} dz^j \wedge d\bar{z}^j.$$

Про эту метрику можно заметить то, что она инвариантна относительно сдвигов, потому многообразие $\mathbb{C}^n/\Lambda$ тоже кэллерово, где $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2n}$ — решетка.

Пример 14.3. Подмногооюбразия в $\mathbb{C}^n$ кэллеровы. Например гиперповерхности вида

$$z_1^d + \cdots + z_n^d = 1$$

кэллерово многообразие.

Пример 14.4. Рассмотрим $\mathbb{CP}^n$ и

$$\omega = \omega_{FS} = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\left(\sum_{j=0}^{n}|z_j|^2\right),$$

где z_j — это одна координата (сечение $\mathcal{O}(1)$) Как уже упоминалось, если f нигде не нулевая голоморфная функция, то

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log|f|^2 = \sqrt{-1}\partial\left(\frac{f\partial\bar{f}}{|f|^2}\right) \\ = \sqrt{-1}\left[\frac{\partial f\wedge\partial\bar{f}}{|f|^2} - \frac{\bar{f}\partial f\wedge\bar{f}\partial\bar{f}}{|f|^4}\right] \\ = \sqrt{-1}\left[\frac{\partial f\wedge\bar{\partial}\bar{f}}{|f|^2} - \frac{\partial f\wedge\bar{\partial}\bar{f}}{|f|^2}\right] = 0\end{aligned}$$

Пусть $U_0 = \{[z] \in \mathbb{CP}^n | z_0 \neq 0\}$, тогда в карте $w^j = z_j/z_0$ имеем

$$\log\left(\sum_{j=0}^{n} |z_j|^2\right) = \log|z_0|^2 + \log\left(1 + \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2\right)$$

Но $\partial\bar{\partial}\log|f|^2 = 0$, поэтому в U_0

$$\omega_{FS} = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\left(1 + \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2\right).$$

Для краткости обозначим $|w|^2 \colon = \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2$, таким образом

$$\omega_{FS} = \sqrt{-1}\partial\left(\frac{w^k d\bar{w}^k}{1+|w|^2}\right) = \sqrt{-1}\left[\frac{\delta_{jk} dw^j \wedge d\bar{w}^k}{1+|w|^2} - \frac{\bar{w}^j w^k dw^j \wedge d\bar{w}^k}{(1+|w|^2)^2}\right]$$

следовательно

$$g_{i\bar{k}} = \frac{\delta_{j\bar{k}}}{1+|w|^2} - \frac{w^k \bar{w}^j}{(1+|w|^2)^2}.$$

заметим, что на $\mathbb{CP}^n$ транзитивно действует унитарная группа $U(n+1)$ и сохранят сумму $\sum |z_j|^2$, а следовательно и ω_{FS}. Таким образом нам остается проверить положительность формы лишь в одной точке. Получается, что $\mathbb{CP}^n$ и его подмногообразия кэллеровы ($d\omega_{FS} = 0$).

Пример 14.5. Рассматрим единичный шар $B = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z| \leq 1\}$ в $\mathbb{C}^n$ с метрикой $\omega_B = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(1 - |z|^2)$, действуя аналогично предыдущему примеру можно также доказать что оно кэллерово. Можно смотреть на B как на шар в $\mathbb{CP}^n$, с условием

$$|z_0|^2 \geq \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2$$

Получается, что на B транзитивно действует группа $U(1,n)$.

Рассмотренные примеры примечательны тем, что представляют собой примеры многообрзий с постоянной кривизной, но только в комплексном случае.

Вообще говоря проекция проекция

$$(S^{2n-1}, g_{\text{can}}) \longrightarrow (\mathbb{CP}^n, \omega_{FS})$$

является римновой субмерсией, где g_{can} — стандартная каноническая метрика на $S^{2n-1}_{\mathbb{R}}$.

Рассмотрим на кэллеровом многообразии (X, ω) векторные поля ξ, ζ и τ. Тензор Римана определяется как

$$R(\xi,\eta)\tau = \left(\nabla_\xi \nabla_\eta - \nabla_\eta \nabla_\xi - \nabla_{[\xi,\eta]}\right)\tau.$$

и тензор кривизны

$$R(\xi,\eta,\tau,\zeta)=g(R(\xi,\eta),\tau,\zeta).$$

Напомним, что тензор Римана связности Леви-Чивитты(в нашем случае это тоже саме, что и связность Черна) обладает следующими симметриями

1. $R(\xi,\eta)\tau=-R(\eta,\xi)\tau,$
2. $R(\xi,\eta,\tau,\zeta)=-R(\xi,\eta,\zeta,\tau),$
3. $R(\xi,\eta,\tau,\zeta)+R(\eta,\tau,\xi,\zeta)+R(\tau,\xi,\eta,\zeta)=0,$
4. $R(\xi,\eta,\tau,\zeta)=R(\tau,\zeta,\xi,\eta).$

Теперь кэллеров случай, т.к. комлексная структура параллельна, то верно:

5. $\nabla J=0 \implies R(\xi,\eta)J\tau=J(R(\xi,\eta)\tau)$
6. а из $g(J\cdot,J\cdot)=g(\cdot,\cdot)$ следует, что $R(\xi,\eta,J\tau,J\zeta)=R(\xi,\eta,\tau,\zeta)$

Таким образом из всех этих симметрий следует то, что на кэллеровом многообразии ненулевые компоненты R это

$$R\left(\frac{\partial}{\partial z^a},\frac{\partial}{\partial \bar z^b},\frac{\partial}{\partial z^c},\frac{\partial}{\partial \bar z^d}\right)$$

т.е. с точностью до сопряжения и перестановок векторов

В вещественном случае также можно определить секционную кривизну:

$$\frac{R(\xi,\eta,\eta,\xi)}{|\xi|^2|\eta|^2-g(\xi,\eta)^2}.$$

Пусть $e_1,\ldots,e_{2n}$ — ортонормированный базис, то тензор Риччи (который по линейности продолжается и на все остальные вектора)

$$\mathrm{Ric}(e_i,e_j)=\sum_{k\neq j}R(e_i,e_k,e_k,e_j).$$

На кэллеровом многообразии

$$\left[\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^a}},\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar z^b}}\right]\frac{\partial}{\partial z^c}=R_{a\bar b c}{}^d\frac{\partial}{\partial z^d},$$

где

$$R_{ab\bar c}{}^d=-\partial_a\partial_{\bar b}g_{c\bar p}g^{d\bar p}- -\partial_{\bar b}g^{d\bar p}\partial_a g_{c\bar p}= =-\partial_a\partial_{\bar b}g_{c\bar p}g^{d\bar p}+g^{d\bar q}\partial_{\bar b}g_{\bar q\bar s}g^{s\bar p}\partial_a g_{c\bar p}$$

Иначе говоря можно переписать

$$R\left(\frac{\partial}{\partial z^a},\frac{\partial}{\partial \bar z^b},\frac{\partial}{\partial z^c},\frac{\partial}{\partial \bar z^d}\right)=R_{a\bar b c\bar d}=R_{a\bar b c}{}^e g_{e\bar d}=R_{a\bar b c\bar d}.$$

Определение 14.6 (Комплексный тензор Риччи)**.** *Комплексный тензор Риччи* называется тензор

$$R_{j\bar{k}}\colon = R_{j\bar{k}a\bar{b}}g^{a\bar{b}} \quad \left(= R_{a\bar{b}j\bar{k}}g^{a\bar{b}}\right)$$

заметим, что это равенство также переписывается как

$$R_{j\bar{k}a}{}^{a} = -\partial_j\partial_{\bar{k}}g_{a\bar{b}}\cdot g^{a\bar{b}} + \partial_j gg\partial_{\bar{k}}g = = -\partial_{\bar{k}}\left(g^{a\bar{b}}\partial_j g_{a\bar{b}}\right) = -\partial_j\partial\bar{k}\log\det(g).$$

Т.е. альтернативным определением тензора Риччи является

$$R_{j\bar{k}}\colon = -\partial_j\partial_{\bar{k}}\log\det(g),$$

обозначим $\mathrm{Ric}^{\mathrm{K}} = \sqrt{-1}R_{j\bar{k}}dz^j \wedge d\bar{z}^k$.

Предложение 14.7. *Определение комплексного тензора Риччи в слеждующем смысле совпадает с вещественным: если $u = 1/\sqrt{2}(e - \sqrt{-1}Je)$, где e — вещественный вектор, то*

$$\mathrm{Ric}^K(u,\bar{u}) = \mathrm{Ric}(e,\bar{e}).$$

Доказательство. Достаточно проверить в касательном пространстве в некоторой точке. Возьмем в касательном пространстве к ней вещественный базис вида $e_1,\dots,e_n,Je_1,\dots,Je_n$, где $|e_i| = 1$. (соответственно $u_j = 1/\sqrt{2}(e_j - \sqrt{-1}Je_j)$). Таки образом просто расписывая свертку, получаем

$$\mathrm{Ric}(u_j,\bar{u}_j) = \sum_{k=1}^{n} R(u_j,\bar{u}_j,u_k,\bar{u}_k).$$

Рассмотрим компоненты полученного равенства поподробнее:

$$R(u_j,\bar{u}_j,u_k,\bar{u}_k) = \frac{1}{2}R(e_j - \sqrt{-1}Je_j, e_j + \sqrt{-1}Je_j, u_k, \bar{u}_k) = \sqrt{-1}R(e_j,Je_j,u_k,\bar{u}_k)$$

$$\begin{aligned} R(u_j,\bar{u}_j,u_k,\bar{u}_k) &= \frac{1}{2}R(e_j - \sqrt{-1}Je_j, e_j + \sqrt{-1}Je_j, u_k, \bar{u}_k) \\ &= \sqrt{-1}R(e_j,Je_j,u_k,\bar{u}_k) = -R(e_j,Je_j,e_k,Je_k) \\ &= R(Je_j,e_k,e_j,Je_k) + R(e_k,e_j,Je_j,Je_k) \quad (14.1) \end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое суммы:

$$\begin{aligned} R(u_j,\bar{u}_j,u_k,\bar{u}_k) &= \frac{1}{2}R(e_j - \sqrt{-1}Je_j, e_j + \sqrt{-1}Je_j, u_k, \bar{u}_k) = \sqrt{-1}R(e_j,Je_j,u_k,\bar{u}_k) \\ &= -R(e_j,Je_j,e_k,Je_k) = R(Je_j,e_k,e_j,Je_k) + R(e_k,e_j,Je_j,Je_k) \end{aligned}$$

таким образом (14.1) переписывается как

$$R(e_j, Je_k, Je_k, e_j) + R(e_k, e_j, e_j, e_k).$$

Итого сумма всех компонент будет равна

$$\sum_{k=1}^{n} [R(e_j, Je_k, Je_k, e_j) + R(e_j, e_k, e_k, e_j)] = \mathrm{Ric}(e_j, e_j)$$

■

Лекция 15

Как мы показали в прошлой лекции, комплексное определение тензора Риччи на кэллеровом многообразии в некотором смысле совпадает с обычным тензором Риччи, определяемом через риманову метрику. Напомним, что

$$R_{j\bar{k}} = -\partial_j \partial_{\bar{k}} \log \det(g),$$

т.е. тензор Риччи совпадает с кривизной на линейном расслоении $\Lambda^n(T_X^{1,0}$. Соответственно $-R_{j\bar{k}}$ будет кривизной на каноническом расслоении $K_X = \Lambda^n(T_X^{*\ 1,0})$.

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \sqrt{-1}\, R_{j\bar{k}}\, dz^j \wedge d\bar{z}^k = -\sqrt{-1}\, \partial\bar{\partial} \log \omega^n$$

Ну и соответственно кривизна на K_X получается равна $-\mathrm{Ric}(\omega)$. Заметим также, что когомологический класс совпадает с первым классом Черна

$$\left[\frac{\mathrm{Ric}(\omega}{2\pi}\right] = c_1(X),$$

откуда можно заметить то, что $c_1(K_X) = -c_1(X)$.

Замечание. Заметим, что если мы не возьмем не кэллерово многообразие и ω будет незамкнутой эрмитовой (1,1) формой, то $R_{j\bar{k}}$ никакое отношение к кривизне Риччии иметь не будет, однако утверждение про класс Черна все еще останется справедливым.

Голоморфная бисекционная кривизна

Обсудим дальше бисекционную кривизну, определяему. следующим образом. Пусть (X, ω) — кэллерово многообразие размерности $\dim_{\mathbb{C}} = n$, тогда

Определение 15.1. Пусть ξ, η — вектора типа (1,0). *Голоморфной бисекционной кривизной* называется

$$\frac{R(\xi, \bar{\xi}, \eta, \bar{\eta})}{|\xi|^2 |\eta|^2}.$$

рассмотрим в термминах стандартного вещественного базиса

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e_1 - iJe_1\right), \qquad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e_2 - iJe_2\right),$$

тогда $|\xi| = |\eta| = 1$. Таким образом, применяя перестановочные свойства тензора и тожедество бьянки

$$\begin{aligned} R(\xi, \bar{\xi}, \eta, \bar{\eta}) &= -R(e_1, Je_1, e_2, Je_2) \\ &= R(Je_1, e_1, e_1, Je_2) + R(e_2, e_1, Je_2, Je_2) \\ &= R(Je_2, e_1, e_1, Je_2) + R(e_2, e_1, e_1, e_2) \end{aligned}$$

т.е. бисекционная кривая является суммой двух секционных кривизн. Основная важность рассмотренной нами кривизны заключается в слудеющей теореме.

Теорема 15.2. *Пусть* (X, ω) *— односвязное кэллерово многообразие, такое что голоморная бисекционная кривизна* ω *постоянна, т.е.* $\forall \xi, \eta$

$$\frac{R(\xi,\bar{\xi},\eta,\bar{\eta})}{|\xi|^2|\eta|^2} = \kappa.$$

Тогда

1. *Если* $\kappa > 0$*, то с точностью до домножения на* $\sqrt{\kappa}$ $(X, \omega) = (\mathbb{CP}^n, \omega_{FS})$*,*
2. *Если* $\kappa = 0$*, то многообраазие* $(X, \omega) = (\mathbb{C}^n, \omega_{eucl})$*. Где*

$$\omega_{eucl} = c\sum_{j=1}^{n} dz^j \wedge d\bar{z}^j$$

3. *Если* $\kappa < 0$*, то с точностью до растяжений* $X = \mathbb{B}^n$*,* $\omega = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(1-|z|^2)$*.*

Доказательство этой теоремы мы не будем приводить в рамках этого курса.

Рассмотрим также ещё один важный инвариант:

Определение 15.3. *Голоморной секционной кривизной* называется

$$\frac{R(\xi,\bar{\xi},\xi,\bar{\xi})}{|\xi|^4}.$$

Если голоморфная бисекционная кривизна посчитана и равна κ, то

$$R_{a\bar{b}c\bar{d}} = K\left(g_{a\bar{b}}g_{c\bar{d}} + g_{a\bar{d}}g_{c\bar{b}}\right).$$

Лапласиан

Мы ограничимся в данной теории связными компактными кэллеровыми многообразиями (X, ω). Т.к. распространение на некомпактный случай далеко не всегда известно и также методически полезно как изложенная ниже теория.

$$\omega = \sqrt{-1}g_{j\bar{k}}dz^j \wedge d\bar{z}^k.$$

Рассмотрим функцию $f \in C^\infty(X)$, тогда

Определение 15.4. *Лапласианом* Δ называется оператор $\Delta = g^{j\bar{k}}\partial_j\partial_{\bar{k}}$

$$\Delta\colon C^\infty(X,\mathbb{R}) \to C^\infty(X,\mathbb{R}).$$

Очевидно, что Δ вещественный. На самом деле $2\Delta = \Delta_{\mathbb{R}}$, где $\Delta_{\mathbb{R}}$ — оператор Лапласа-Бельтрами, что проверяется простым вычислением в координатах.

Предложение 15.5. *Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, то на компактном комплексном $(X,\, \omega)$*

$$\int_X \Delta f \omega^n = 0.$$

Доказательство. Будем считть, что $n \geq 2$, заметим, что $\Delta f = \mathrm{Tr}_\omega\left(\sqrt{-1}\partial\bar{\partial} f\right)$, тогда из упражнение

$$n(n-1)\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial} f \wedge \omega^{n-2} = [(\Delta f)\, n - \Delta f]\, \omega^n = (n-1)\Delta f \omega^n,$$

тогда воспольдзовавшись теоремой Стокса

$$0 = \int \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial} f \wedge \omega^{n-1} = \int (\Delta f)\omega^n.$$

■

Отсюда вытекает:

Следствие 15.6. *Если $\Delta f \geq 0$, то $f = const$.*

Доказательство.

$$0 = \int \frac{1}{2}\,\Delta(f^2)\,\omega^n = \int f\,\Delta f\,\omega^n + \int \sqrt{-1}\,\partial f \wedge \bar{\partial} f \wedge \omega^{n-1} \geq 0$$

сумма больше нуля и.к второе слагаемое строго положительно, если $f \neq \mathrm{const}$, а первое слагаемое, т.к. $f \in C^\infty(X)$ положительна (так можно считать т.к. f ограничена и в силу нечувствительности лаплассиана к константе мы можем сделать ее таковой) и выполнено условие требуемое в следсвтвии. ■

Пусть $E \to X$ — голоморфное векторное расслоение, $H_{\alpha\bar{\beta}}$ — эрмитова метрика на E, задана кривизна

$$F_{j\bar{k}\,\beta}^{\;\;\;\alpha} = -\partial_{\bar{k}}\left(H^{\alpha\bar{\gamma}}\,\partial_j H_{\beta\bar{\gamma}}\right).$$

Определим тогда $K^\alpha_{\;\beta} = g^{j\bar{k}} F_{j\bar{k}\,\beta}^{\;\;\;\alpha}$ — эндоморфизм E. И эрмитову форму $K_{\alpha\bar{\gamma}} = K^\alpha_{\;\beta} H_{\alpha\bar{\gamma}}$. Оба $K^\alpha_{\;\beta}$ и $K_{\alpha\bar{\gamma}}$ называются средними кривизнами.

Предложение 15.7. *Пусть $(X,\, \omega)$ — компактно кэллерово, $(E{,}H)$ — голоморфное векторное расслоение с эрмитовой метрикой и пусть $\kappa \leq 0$, тогда любое голоморфное сечение $s \in H^0(X{,}E)$ параллельно. Если $\kappa < 0$ в одной точке, то $H^0(X{,}E) = 0$.*

Доказательство. Возьмем $f = |s|_H^2 = H_{\alpha\bar\beta} s^\alpha s^\beta$. Тогда

$$\Delta f = g^{j\bar k}\,\partial_j \partial_{\bar k} |s|_H^2 = g^{j\bar k}\,\partial_{\bar k}\left(H_{\alpha\bar\beta}\,\nabla_j s^\alpha\,\overline{s^\beta}\right)$$
$$= g^{j\bar k}\left(H_{\alpha\bar\beta}\,\nabla_{\bar k}\nabla_j s^\alpha\,\overline{s^\beta}\right) + g^{j\bar k}\,H_{\alpha\bar\beta}\,\nabla_j s^\alpha\,\overline{\nabla_k s^\beta},$$

последнее равенство следует из голоморфности сечений. После чего в первом слагаемом перемтавим производные местами, а про второе заметим, что оно равна норме ковариантной производной $|\nabla s|_H^2$. Таким образом, учитывая что

$$g^{j,\bar k}\nabla_{\bar k}\nabla_j S^\alpha = g^{j,\bar k}(\cancelto{0}{\nabla_j\nabla_{\bar k} s^\alpha} - F_{j\bar k}{}^{\alpha}{}_{\beta} S^\beta) = -K^\alpha_\gamma s^\gamma,$$

наш лапласиан переписывается как

$$\Delta |s|_H^2 = |\nabla s|_H^2 - K^\alpha_{\ \beta} S^\beta \overline{S^\gamma} H_{\alpha\bar\gamma}.$$

Проинтегрируем полученное равенство:

$$0 = \int |\nabla s|_H^2\,\omega^n - \int K(S,S)\,\omega^n \geq \int |\nabla s|_H^2\,\omega^n \geq 0.$$

из которого и следует все утверждение теоремы. ■

Следствие 15.8. *1. Если на* (X,ω) *выполнено* $\mathrm{Ric}(\omega) > 0$*, то на* X *нету голоморфных* (1,0)*-форм и* $(n,0)$*-форм. Более того,для любого* $m \in \mathbb{N}$ $K_X^{\otimes m}$ *не имеет сечений.*

2. Если $\mathrm{Ric}(\omega) < 0$*, то на* X *нету голоморфных векторных полей.*

3. Если $\mathrm{Ric}(\omega) = 0$*, то все голоморфные векторные поля и голоморные* (1,0)*-формы , а также голоморные* $(n,0)$*-формы параллельны.*

Далее будем пользоваться следующими удобными обозначениями

$$\nabla^j = g^{j\bar k}\nabla_{\bar k}, \qquad \nabla^{\bar k} = g^{j\bar k}\nabla_j.$$

На любом голоморфном расслоении можно ввести лапласиан как

$$\nabla^j\nabla_j = -\nabla^*\nabla, \qquad \nabla^{\bar k}\nabla_{\bar k} = -\bar\nabla^*\bar\nabla.$$

Если $s \in \Gamma(E)$Ю H — метрика, то

$$\int H_{\alpha\bar\beta}\,\nabla^j\nabla_j s^\alpha\,\overline{S^\beta}\,\omega^n = \int H(\nabla^j\nabla_j s, s)\,\omega^n$$
$$= -\int H_{\alpha\bar\beta}\,\nabla_j s^\alpha\,\overline{\nabla^j s^\beta}\,\omega^n = \int |\nabla s|^2\,\omega^n \quad (15.1)$$

Аналогичено все тоже самое верно и для второго лапласиана.

В конце заметим, что

$$(\nabla^*\nabla - \bar\nabla^*\bar\nabla)s = \mathcal{F}s,$$

где $\mathcal{F}$ зависит от кривизн на E и на X.

Расслоение (p,q)-форм

Напомним определение звездочки Ходжа. Пусть $\varphi, \psi \in \Gamma(\Lambda^{p,q}T^*_X)$, т.е.

$$\psi = \psi_{A\bar{B}}\, dz^A \wedge d\bar{z}^B, \qquad \psi = \psi_{A\bar{B}}\, dz^A \wedge d\bar{z}^B.$$

где A и B — мультииндексы. Определим скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{p!\, q!} \varphi_{A\bar{B}}\, \overline{\psi_{A'\bar{B}'}}\, g^{A\bar{A}'} g^{B\bar{B}'}$$

Предложение 15.9. *Существует оператор* $* : \Lambda^{p,q}_x \to \Lambda^{n-q,n-p}_X$*, такой что*

1. $\langle \varphi, \psi \rangle \dfrac{\omega^n}{n!} = \varphi \wedge *\overline{\psi}$
2. $*$ *— вещественный оператор*
3. $**\varphi = (-1)^{p+q} \varphi$

Доказательство. Пусть ψ — форма типа (p,q). Кэлерова метрика определяет изоморфизм между формами типов (p,q) и (q,p). Пусть $\psi^\sharp$ это результат такого отображения. Пусть теперь

$$*\psi = C_{n,p,q}\, \psi^{\#} \lrcorner \frac{\omega^n}{n!},$$

очевидно, что 2ое и 3е условия будут выполненты, если верно подобрать константу $C_{n,p,q}$, она зависит только от n,p,q, и ее поиск остается как упражнение читателю. Ну и первое соответственно тоже. ∎

Определение 15.10. Определим операторы

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}^* &= - * \partial *, && \Gamma(\Lambda^{p,q}T^*_X) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^{p,q-1}T^*_X),\\
\partial^* &= - * \bar{\partial} *, && \Gamma(\Lambda^{p,q}T^*_X) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^{p-1,q}T^*_X),\\
d^* &= - * d *, && k\text{-формы} \longrightarrow\ k-1\text{-формы}
\end{aligned}$$

Понятно, что звездочку ходжа можно продлить на

$$* : \Gamma(\Lambda^{p,q}T^*_X \otimes E) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^{n-p,\,n-q}T^*_X \otimes E^*)$$

и определить там похожие операторы:

Определение 15.11. Оператор ∂_∇ — это (1,0)-часть связности Черна.

Определение 15.12. А также операторы

$$\begin{aligned}
\Delta_{\bar{\partial}} &:= \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial},\\
\Delta_{\partial} &:= \partial\partial^* + \partial^*\partial,\\
\Delta_d &:= dd^* + d^*d.
\end{aligned}$$

Лекция 16

На этой лекции мы продолжим рассматривать компактные кэллеровы многообразия. Мы определили несколько операторов, а именно

$$\bar{\partial}^* = - * \partial *, \qquad \partial^* = - * \bar{\partial} * .$$

на $(p{,}q)$ формах и собираемся исследовать их свойства.

Более обще, если $E \to X$ — голоморное расслоение, то их можно определить как $\bar{\partial} = - * \partial_{\nabla^*}$, где $\partial_\nabla = \partial + A$, $A = H^{-1}\partial H$ и

$$\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$$

А также формально сопраженный оператор к $\bar{\partial}$:

$$\int \langle \bar{\partial}\varphi, \psi \rangle \frac{\omega^n}{n!} = \int \langle \varphi, \bar{\partial}^*\psi \rangle \frac{\omega^n}{n!}, \tag{16.1}$$

где $\varphi \in \Gamma(\Lambda_X^{p,q-1})$, а $\psi \in \Gamma(\Lambda^{p,q})$

Зачем нам вообще нужен этот оператор? Чуть раньше мы доказали теорему Дольбо, что когомологии голоморфного расслоения E совпадают с когомологиями относительно оператора $\bar{\partial}$. Введённый нам выше оператор поможет сформулировать и доказать теорему Ходжа, которая утверждает, что для любого $\varphi \in \Gamma(E \otimes \Lambda_X^{0,0})$ такого что $\bar{\partial}\varphi$ существует единственный ψ, такое что $[\psi] = [\varphi]$, и $\Delta_{\bar{\partial}}\psi = 0$.

Для оператора $\Delta_d = dd^* + d^*d$, где $d^* = - * d *$. существует похожая теорема, которая тоже иногда носит имя Ходжа. Согласно ней для любого φ существует причем единственный $\psi \in \Gamma(\Lambda_X^k)$, такой что $[\varphi] = [\psi]$ и $\Delta_d\psi$.

Определение 16.1. Формы ψ, такие что $\Delta_{\bar{\partial}}$ (аналогично $\Delta_d\psi = 0$) называются *гармоническими.*

Напомним, что на формах есть скалярное произведение

$$(\varphi{,}\psi) = \int \langle \varphi, \psi \rangle \frac{\omega^n}{n!} = \int \varphi \wedge \overline{\psi}.$$

заметим, что оператор $\Delta_{\bar{\partial}} \colon \Gamma(\Lambda_X^{p,q}) \to \Gamma(\Lambda_X^{p,q})$ не повышает и не понижаает степени форм. В терминах вышеупомянутого скалярного произведения мы можем переписать формул (16.1) как

$$(\bar{\varphi}{,}\psi) = (\varphi{,}\bar{\partial}^*\psi).$$

Предложение 16.2. *Пусть ψ гармонична, т.е $\Delta_{\bar{\partial}}\psi = 0$. Если $\psi = \bar{\partial}\alpha$, то $\psi = 0$ (аналогично верно для Δ_d)*

Доказательство. Заметим, что если $\Delta_{\bar\partial}\psi = 0$, тогда

$$0 = (\Delta_{\bar\partial}\psi, \psi) = ((\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial)\psi, \psi) = (\bar\partial\bar\partial^*\psi, \psi) + (\bar\partial^*\bar\partial\psi, \psi) = (\bar\partial\psi, \bar\partial\psi) + (\bar\partial^*\psi, \bar\partial^*\psi) \quad (16.2)$$

т.к. оба последних слааемых положительны, то $\bar\partial\psi = 0$ и $\bar\partial^*\psi = 0$. Если $\psi = \bar\partial\alpha$, то

$$0 \le (\psi, \psi) = (\psi, \bar\partial\phi) = (\bar\partial^*\psi, \phi) = 0,$$

откуда $(\psi, \psi) = 0$ и соответственно $\psi = 0$. ■

Тоже самое верно и для $\psi \in \Gamma(E \otimes \Lambda^{p,q}_X)$, где $E \to X$ голоморфное расслоение.

Предложение 16.3. *Пусть (X, ω) — кэллерово, $E \to X$ голоморфное расслоение, $\varphi \in \Gamma(E \otimes \Lambda^{0,q})$. Тогда $\bar\partial = \mathrm{Alt}(\bar\nabla\psi)$, где ∇ — связность на $E \otimes \Lambda^{0,q}$.*

Или если

$$\psi = \frac{1}{q!}\psi_{\bar k} d\bar z^k = \sum_{k_1,\dots,k_q} \psi_{\bar k_1 < \dots < \bar k_q} d\bar z^{k_1} \wedge \dots \wedge d\bar z^{k_q},$$

то

$$\bar\partial\psi = \sum_{j=0}^{q} \sum_{k_0,\dots k_q} \nabla_{\bar k_j} \psi_{\bar k_0 \dots \widehat{\bar k_j} \dots \bar k_q} d\bar z^{k_j} \wedge d\bar z^{k_0} \wedge \dots \wedge d\bar z^{k_q}$$

Доказательство. Это следкет из того, что левая и правая части совпадают в нормальных координатах. ■

Следствие 16.4.

$$\bar\partial^*\varphi = -\nabla^{\bar k}\varphi_{\bar k, \bar k_1, \dots, \bar k_{q-1}} d\bar z^{k_1} \wedge \dots \wedge d\bar z^{k_{q-1}}$$

Из явного вида компонент

$$(\bar\partial\psi)_{\bar k_0 \dots \bar k_q} = \nabla_{\bar k_0}\psi_{\bar k_1 \dots \bar k_q} - \nabla_{\bar k_1}\psi_{\bar k_0 \bar k_2 \dots \bar k_q} + \dots + (-1)^q \nabla_{\bar k_q}\psi_{\bar k_0 \dots \bar k_{q-1}},$$

а также следствия можно прямым вычислением показать, что

Предложение 16.5. *Верно следующее равенство:*

$$(\Delta_{\bar\partial}\psi)_{\bar k_1 \dots \bar k_q} = -\nabla^{\bar k}\nabla_{\bar k}\psi_{\bar k_1 \dots \bar k_q} + [\nabla^{\bar k}, \nabla_{\bar k_1}]\psi_{\bar k \bar k_2 \dots \bar k_q} + \dots + [\nabla^{\bar k}, \nabla_{\bar k_q}]\psi_{\bar k_1 \dots \bar k_{q-1} \bar k}$$

Таким образом можно сказать, что $\Delta_{\bar\partial} = \bar\nabla^*\bar\nabla + R_1$, где R_1 — кусок, который завистт от кривизны, а $\bar\nabla^*\bar\nabla = -\nabla^{\bar k}\nabla_{\bar k} = -g^{j\bar k}\nabla_j\nabla_{\bar k}$.

Теорема 16.6. *Существует константа $C > 0$, $C = C(X,\omega,H,E)$, такая что*

$$C((I + \Delta_{\bar{\partial}})\psi, \psi) \geq \int_X |\nabla\psi|^2 \frac{\omega^n}{n!} + \int_X |\bar{\nabla}\psi|^2 \frac{\omega^n}{n!} + \int_X |\psi|^2 \frac{\omega^n}{n!}$$

Доказательство. Напомним, что, если подставить замечание выше в скалярное произвдение и проинтегировать по частям, то

$$(\bar{\nabla}\nabla\psi, \psi) = (\bar{\nabla}\psi, \nabla\psi) = \int_X |\nabla\psi|^2 \frac{\omega^n}{n!}.$$

Аналогично и для $\nabla^*\nabla$ получаем, что $\nabla^*\nabla = -\nabla^j\nabla_j = -g^{j\bar{k}}\nabla_{\bar{k}}\nabla_j$. Также

$$\nabla^*\nabla = \frac{1}{2}(\bar{\nabla}^*\bar{\nabla} + \bar{\nabla}\bar{\nabla}^*) + R_2,$$

где R_2 зависит от кривизны. Таким образом они зависят только от X,E,ω,H. ■

Пространства Соболева

Пусть $E \to X$ — гладкое расслоение с метрикой H, а ∇ — связность, сохраняющая метрику, X —компактное, ориентируемое и римваново с метрикой g.

Пусть $k \in \mathbb{N}$.

Определение 16.7. Пусть $s \in \Gamma(E)$, то

$$\|s\|_k \colon = \left(\sum_{m=0}^{k} \int_X |\nabla^m s|^2 \, d\mu_g\right)^{1/2},$$

где $|\nabla^m S|^2 = H_{\alpha\bar{\beta}}\, g^{a_1 b_1} \cdots g^{a_m b_m}\, \nabla_{a_1} \cdots \nabla_{a_m} S^\alpha\, \nabla_{b_1} \cdots \nabla_{b_m} s^\beta$ называется *k-ая Соебелевская норма*

Определение 16.8. H_k — пополнение $\Gamma(E)$ по норме $\|\cdot\|_k$. Оно называется *Пространством Соболева* и является Гильбертовым пространтсвом.

Теорема 16.9. *Пусть $\dim_{\mathbb{R}} X = n$. Тогда:*

1. *Для любого $s \in \Gamma(E)$ выполнено*

   $$\|s\|_{C^k(X)} \leq C\,\|s\|_{k+m},$$

   $m > n/2$ где C — константа, не зависящая от s.

2. *$C^k(X, E) \supset H_{k+s}$.*

3. *$\bigcap_{k=0}^{\infty} H_k(E) = \Gamma(E)$.*

4. *(Лемма Релиха) Если $k < m$, тогда естественное вложение $H_m \subset H_k$ компактно. Т.е. если $\{\psi_j\} \in H_m$ и $|\psi_j| \leq C$, то $\exists$ подпоследовательность ψ_{j_k}, сходящаяся в H_k.*

Замечание. Если E — голоморфное расслоение над кэлеровым многообразием (X, ω), то $s \in \Gamma(E)$, норму

$$\|s\|_k = \left(\sum_{m=0}^{k} \int_X |\nabla^m s|^2 \frac{\omega^n}{n!} \right)^{1/2},$$

Рассмотрим $\nabla^m s$ — она может содержать части как (0,1) так и части (1,0) связности, потому определение нормы разумно переписывается как

$$\left(\sum_{m=0}^{k} \sum_{q+s=m} \int_X \left| \nabla_{a_1} \bar{\nabla}_{a_2} \nabla_{a_3} \dots \bar{\nabla}_{a_m} s \right|^2 \frac{\omega^n}{n!} \right)^{1/2}.$$

Например

$$\|s\|_1 = \left(\int_X |\bar{\nabla} s|^2 \frac{\omega^n}{n!} + \int_X |\nabla s|^2 \frac{\omega^n}{n!} + \int_X |s|^2 \frac{\omega^n}{n!} \right)^{1/2}$$

Ну и последний факт в который придется поверить это априорная оценка:

$$\|s\|_{k+2} \leq C \left(\|\Delta s\|_k^2 + \|s\|_{k+1}^2 \right).$$

Нетрудно видеть, что $\|\Delta s\|_o^2 \leq C \|s\|_2$.

Лекция 17

Мы продолим подбираться к теореме ходжа и даже по модулю некоторых свойств пространств Соболева приведем доказателльство.

Пусть $(X,\,\omega)$ –компактное кэллерово многообразие, $E \to X$ — голомор фное векторное расслоение. На E есть эрмитова метрика, $H = (H_{\alpha\bar{\beta}})$. На $\Gamma(X, E\otimes\Lambda_X^{p,q})$ можно определить $\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}^*\bar{\partial} + \bar{\partial}\bar{\partial}^*$. На прошлой лекции мытопределили Соболевские нормы, каоторые получаются из асскалярного произведения

$$(\varphi,\psi)_k = \sum_{m=0}^{k}\int_X \langle\nabla^m\varphi, \nabla^m\psi\rangle\frac{\omega^n}{n!}.$$

Предложение 17.1. *Существует $C > 0$ такое, что*

$$\|\Delta\varphi\|_k \leq C\|\varphi\|_{k+2},$$

где $\Delta = \Delta_{\bar{\partial}}$.

второго утверждения мы слегка каснулись на прошлой лекции

Предложение 17.2. *Пусть Δ — лапласиан. Тогда существует $C > 0$ такое, что для любого φ выполняется*

$$\|\varphi\|_{k+2}^2 \leq C\big(\|\Delta\varphi\|_k^2 + \|\varphi\|_k^2\big).$$

***Существует уточнённая версия неравенства**: если $\Delta\psi = f$, где $f \in H_k$, то $\varphi \in H_{k+2}$ то верно следующее неравенство:*

$$\|\varphi\|_{k+2} \leq C\left(\|\Delta\varphi\|_k + \|\varphi\|_{k+1}\right) = C\left(\|f\|_k + \|\varphi\|_{k+1}\right). \tag{17.1}$$

Предложение 17.3 (Лемма Вейля)**.** *Пусть ψ такова, что $\Delta\varphi = \psi$ в слабом смысле, т.е. $\forall\eta \in \Gamma(X, E\otimes\Lambda_X^{p,q}) \subset L^2$ выполняется $(\varphi, \Delta\eta)_{L^2} = (\psi, \eta)_{L^2}$. Если $\psi \in \Gamma(X, E\otimes\Lambda_X^{p,q})$, то $\varphi \in \Gamma(X, E\otimes\Lambda_X^{p,q})$.*

Приняв три утверждения выше на веру, а также вспомнив следующую теорему Гильберта:

Теорема 17.4 (Гильберт)**.** *Если G — компактный самосопряжённый неотрицательный оператор $G\colon H_0 \to H_0$*

1. *Тогда H_0 допускает базис из собственных векторов G.*

2. *Собственные значения G — вещественные, ограниченные, и единственная точка накопления собственных чисел оператора G это ноль.*

3. *Собственные пространства конечномерны.*

4. *Собственные векторы образуют базис в H_0, который можно выбрать ортонормированным.*

мы приступаем к доказательству главной теоремы:

Теорема 17.5 (Ходжа, Кодаира)**.** *Пусть $(X,\,\omega)$ — компактное кэллерово, $E \to X$ — голоморное расслоение. H_0 — пополнение $\Gamma(X, E \otimes \Lambda_X^{p,q})$ по норме $\|\cdot\|_0$ (Можно неформально думать об H_0 как об $L^2(X,E \otimes \Lambda_X^{p,q})$ сечении), тогда*

a) *Существует ортонормированный базис $\{\varphi_j\}$ из собственных сечений Δ, т.е. $\Delta\varphi_j = \lambda_j\varphi_j$, где $\varphi_j \in \Gamma(X, E \otimes \Lambda_X^{p,q})$, а собственные пространства с собственными пространства с собственными числами λ_j конечномерны.*

b) *Существует оператор $G\colon H_0 \to H_0$, такой что $\Delta G = \mathrm{Id} - \mathcal{H} = G\Delta$, где $\mathcal{H}$ — проекция на $\ker\Delta$. Более того*

$$\bar{\partial} G = G\bar{\partial}, \qquad \bar{\partial}^* G = G\bar{\partial}^*$$

Оператор G компактен (т.е. отображает последовательности в последовательности имеющие сходящиеся поподследовательности) и $G = \Delta^{-1}$ на $(\ker\Delta)^{\perp}$.

Доказательство. **Шаг 1.** Регулярность. Пусть положим $\ker\Delta' = \{\,\varphi \in H_2 \mid \Delta\varphi = 0\,\}$. Тогда если $\varphi \in \ker\Delta$, то $\varphi \in \Gamma(X, E \otimes \Lambda_X^{p,q})$ — по лемме Вейля. Если $\Delta\varphi = \lambda\varphi$ и верно (17.1), то $\varphi \in H_k$ для любого $k \geq 0$ и, следовательно, применяя теорему Соболева, получаем

$$\varphi \in \bigcap_{k \geq 0} H_k = \Gamma(X, E \otimes \Lambda_X^{p,q}).$$

Шаг 2. Конечномерность собственных пространств.

Предположим обратное, пусть $\ker\Delta$ бесконечномерное, пусть $\varphi_1,\varphi_2\ldots$ — какой-то счетный ортонормированный по $\|\varphi_i\|_2$ базис (т.к. ядро лежит в L^2, то он существует), что $\varphi_i \perp \varphi_j$ и

$$\sqrt{2} = \|\varphi_i - \varphi_j\|_2 \leq C\|\varphi_j - \varphi_{m,l}\|_1 \to 0.$$

по лемме Релиха базис по норме содержит сходящуюся в H_1 подпоследовательность.

Шаг 3. Пусть

$$R(\Delta) = \{\varphi \in H_0 \mid \varphi = \Delta\psi,\ \psi \in H_2\}$$

Предложение 17.6. *$R(\Delta)$ замкнуто в H_0.*

Доказательство предложения. Покажем, что

$$\|\varphi\|_2 \leq C\|\Delta\psi\|$$

если $\varphi \perp \ker\Delta$, $\varphi \in H_2$. От противного, пусть существует $\varphi_j \in H_2$, $\varphi_j \perp \ker\Delta$ и $\|\varphi_j\|_2 \geq j\|\Delta\varphi_j\|_0$. Тогда $\psi_j = \dfrac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|_2}$, т.е. $\|\psi_j\|_2 = 1$, и $\|\Delta\psi_j\|_0 \leq \dfrac{1}{j}$. Заметим, что ψ_j сходятся в H_1, таким образом

$$\|\psi_j - \psi_k\|_2 \leq C\left(\|\Delta\psi_j - \Delta\psi_k\|_0 + \|\psi_j - \psi_k\|_1\right)$$

по неравенству треугольника получаем, что $\{\psi_j\}$—последовательность Коши в H_2, следовательно $\psi_j \to \psi$ и $\Delta\psi = 0$. Но ψ должно быть ортогонально $\ker\Delta$, а значит $\psi = 0$, что противоречит $\|\psi\| = 1$.

Пусть теперь $\Phi_j = \Delta\varphi_j$, $\Phi_j \in H_2$ и φ_j сходится. Тогда по только что доказанному неравенству

$$\|\varphi_j - \varphi_k\|_2 \leq C\|\Phi_j - \Phi_k\|_0.$$

Получаем, что φ сходится и $\varphi = \lim\varphi_j$ и $\Phi = \lim\Phi_j = \Delta\varphi$. ■

Шаг 4. Мы получили разложение $H_0 = R(\Delta) \oplus R(\Delta)^\perp$. Заметим, что по лемме Вейля элементы $R(\Delta)$ лежат в $\ker\Delta$. Действительно, ортогональное дополнение к образу лежит в ядре, а с другой стороны, если взять произвольное гладкое сечение и его образ при лапласиане и спарить с элементом из ортогонального дополнения, то получим условие в слабом смысле, т.е. условие леммы Вейля. Значит $R(\Delta)^\perp = \ker\Delta$.

Шаг 5. т.к. $H_0 = R(\Delta)\oplus\ker\Delta$, $\varphi \in H_0$, тогда $\varphi = \Delta\psi + \varphi_0$, где $\varphi_0 \in \ker\Delta$, $\psi \perp \ker\Delta$ в H_2. Положим $G(\varphi - \varphi_0) = \psi$, $G\colon R(\Delta) \to H_2$. Т.е.

$$G\colon R(\Delta) \to H_2 \hookrightarrow H_0$$

Предложение 17.7. *$G\colon H_0 \to H_0$. Тогда G — это компактный оператор. Более того, G самосопряжен ограничен и $(G\varphi,\varphi) \geq 0$.*

Доказательство предложения. Нетривиально здесь только самосопряженность, потому докажем только ее. Пусть φ_1, $\varphi_2 \in H_0$, $\varphi_i = \Delta\psi_i + \varphi_{0i}$, $i = 1, 2,$, а $\psi_i \perp \ker\Delta$, $\varphi_{0i} \in \ker\Delta$. . Таким образом

$$(G\varphi_1, \varphi_2) = (\psi_1, \varphi_2) = (\psi_1, \Delta\psi_2),$$

и

$$(\varphi_1, G\varphi_2) = (\varphi_1, \psi_2) = (\Delta\psi_1, \psi_2).$$

Компактность следует из вложения, а ограниченность из оценки

$$\|\psi_1 - \psi_2\|_2 \leq C\,\|\Delta(\psi_1 - \psi_2)\|_0 \leq C\,\|\varphi_1 - \varphi_2\|_0.$$

■

И ссылаясь на теорему Гильберта получаем прочие свойства и по построению $\Delta G = G\Delta = \mathrm{Id} - \mathcal{H}$.

Шаг 6. В завершение доказательства осталось показать, что $\bar\partial G = G\bar\partial$, с одной стороны

$$\bar\partial G \Delta\psi = \bar\partial\Delta G\psi = \Delta\bar\partial G\psi.$$

С другой

$$\bar\partial\psi G\bar\partial\psi = G\Delta\bar\partial\psi = \Delta G\bar\partial\psi = (\mathrm{Id} - H)\bar\partial\psi = \bar\partial\psi.$$

В силу самосопряженности G следует и второе утверждение. ■

Следствие 17.8.

$$\begin{aligned}\Gamma(X, E\otimes\Lambda^{p,q}) &= \ker\Delta_{\bar\partial}\oplus\Delta_{\bar\partial}\big(\Gamma(X, E\otimes\Lambda^{p,q})\big)\\ &= \ker\Delta_{\bar\partial}\oplus\bar\partial(\bar\partial^*\Gamma)\oplus\bar\partial^*(\bar\partial\Gamma) = \ker\Delta_{\bar\partial}\oplus\Delta_{\bar\partial}\big(\Gamma(\Gamma)\big).\end{aligned}$$

Лекция 18

На прошлой лекции мы доказали один из важнейших результатов курса, а именно теорему Ходжа. Теперь обсудим некоторые её следствия.

Следствие 18.1. *$H^q(X,E)$ и $H^{p,q}(X)$ конечномерны.*

Формально мы это не доказывали, но приведенное выше доказзательство дословно работает и для когомологий Де Рама, таким образом следствие из нее будет следеющее.

Следствие 18.2. *Если $(X,\ g)$ — компактное риманово многообразие, то $H^k_{\mathrm{dR}}(X,\mathbb{R})$ конечномерные. Более того звездочка Ходжа переводит гармонически формы в гармонически ($*\Delta_d = \Delta_d *$), следовательно $H^k(X,\mathbb{R}) \simeq H^{\dim_{\mathbb{R}} X-k}(X,\mathbb{R})$.*

Взглянем на композицию звездочки Ходжа и комплексного сопряжения. По определению звездочка Ходжа это отображение

$$* : \Lambda^{p,q}_X(E) \longrightarrow \Lambda^{n-q,n-p}_X(E^*)$$

Тогда композияция $\overline{*}$ будет переводить в $\Lambda^{n-q,n-p}_x(E^*)$, $n = \dim_{\mathbb{C}} X$.Пусть $\mathcal{H}^q(x.E)$ — гармонические $(0,q)$ формы в E, тогда $\overline{*}$ переводит гармонические формы со значениями в E в гармонические формы со значениями в E^*. Поэтому $\overline{*} : \mathcal{H}^q(E) \to \mathcal{H}^{n-q}(K_X \otimes E^*)$ и это изоморфизм ($\mathbb{C}$ — антилинейный). Таким образом

Следствие 18.3. *Имеет место двойственность Серра: $H^q(X,E) \simeq H^{n-q}(X, K_X \otimes E^*)^*$, и $H^{p,q}(X) \simeq H^{n-p,n-q}(X)^*$.*

Предложение 18.4. *Пусть $(X,\ g)$ — компактное ориентируемое риманово многообразие и $f \in C^\infty(X)$ такое, что*

$$\int_X f\, dV = 0.$$

Тогда существует $\varphi \in C^\infty(X)$, такое что

$$\Delta\varphi = f \quad \text{и} \quad \int_X \varphi\, dV = 0.$$

Доказательство. По теореме Ходжа имеем:

$$C^\infty(X) = \mathbb{R} \oplus \Delta(C^\infty(X)). \tag{18.1}$$

Если $\int_X f\, dV = 0$, то f лежит в образе Δ. Если $f \in C^\infty(X)$ — произвольная функция, то её проекция на $\mathbb{R}$ в (18.1) равна

$$\frac{\int_X f\, dV}{\int_X dV}.$$

∎

Следствие 18.5 (Неравенство Пуанкаре). *Пусть* $(X,\, g)$ — *компактное ориентируемое риманово многообразие. Если* $f \in C^\infty(X)$ — *произвольная функция, то*

$$\bar{f} = \frac{\int_X f\, dV}{V}, \qquad V = \int_X dV,$$

где dV — *форма объёма.*

Тогда существует $\lambda_1 = \lambda_1(X,\, g) > 0$*, такое что*

$$\int_X |\nabla f|^2\, dV \geq \lambda_1 \int_X |f - \bar{f}|^2\, dV.$$

Список литературы

[1] Jean-Pierre Demailly. *Complex Analytic and Differential Geometry.* Institut Fourier, Université Grenoble I, Saint-Martin-d'Hères, France, 2012. Lecture notes, version of June 21, 2012.

[2] Daniel Huybrechts. *Complex Geometry: An Introduction.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[3] Ф. Гриффитс and Дж. Харрис. *Принципы алгебраической геометрии. Том 1.* Мир, Москва, 1982. Перевод англ. изд. *Principles of Algebraic Geometry* (Wiley, 1978).

Указатель терминов