ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
Факультет программной инженерии
и компьютерной техники

Расчётно-графическая работа №1

(по дисциплине «Дополнительные главы
математического анализа»)

Выполнили:

Джантуре Назерке,
ДГМА 27.3, P3208, 465755;
Карасев Александр Дмитриевич,
ДГМА 28.3, P3212, 466114;
Лабин Макар Андреевич,
ДГМА 28.3, P3231, 466449.

Проверил:

Богачёв Владимир Александрович

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Список задач

В рамках выполнения расчётно-графической работы *по варианту №6* необходимо предоставить решения следующих задач:

1. Найти и построить область определения сложной функции:

$$z = \ln(y - \ln x)$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва и укажите точки устранимого разрыва функции двух переменных:

$$z = x \sin \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

3. Для неявно заданной функции записать многочлен Тейлора 2 порядка по степеням $(x - x_0)$, $(y - y_0)$:

$$x^3 + z^3 - 6xz = y^3, \quad M_0(2; 2; 0)$$

4. Найдите угол между градиентами функций $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ в точке M_0:

$$v = \frac{3x^2}{\sqrt{2}} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z^2, \quad u = \frac{z^2}{x^2y^2}, \quad M_0\left(\frac{2}{3}; 2; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

5. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближённо вычислить:

$$\sin 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$$

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области D, ограниченной заданными линиями:

$$z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, \quad D:\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 2$$

7. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$S\colon x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0, \quad M_0(2, 1, -1)$$

2 Решения задач

Задача 1. *Найти и построить область определения функции*

$$z = \ln(y - \ln x).$$

Решение. ...

Задача 2. *Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва и укажите точки устранимого разрыва функции двух переменных:*

$$z = x \sin \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

Решение. ...

Задача 3. *Для неявно заданной функции записать многочлен Тейлора 2 порядка по степеням $(x - x_0)$, $(y - y_0)$:*

$$x^3 + z^3 - 6xz = y^3, \quad M_0(2; 2; 0)$$

Решение. ...

Задача 4. *Найдите угол между градиентами функций $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ в точке M_0:*

$$v = \frac{3x^2}{\sqrt{2}} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z^2, \quad u = \frac{z^2}{x^2y^2}, \quad M_0\left(\frac{2}{3}; 2; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Решение. По определению градиента функций $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$:

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad \operatorname{grad} v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

По определению скалярного произведения векторов:

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = |\operatorname{grad} u| \cdot |\operatorname{grad} v| \cdot \cos\alpha, \quad \alpha = \angle(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)$$

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} u| \cdot |\operatorname{grad} v|} \tag{1}$$

Перепишем скалярное произведение векторов в координатной форме:

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} \tag{2}$$

Вычислим частные производные функций $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{2z^2}{x^3y^2} & \qquad \frac{\partial v}{\partial x} &= 3\sqrt{2}x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{2z^2}{x^2y^3} & \qquad \frac{\partial v}{\partial y} &= -\sqrt{2}y \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{2z}{x^2y^2} & \qquad \frac{\partial v}{\partial z} &= 2\sqrt{2}z \end{aligned}$$

Подставим полученные частные производные в сумму (2):

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = -\frac{2z^2}{x^3y^2} \cdot 3\sqrt{2}x - \frac{2z^2}{x^2y^3} \cdot (-\sqrt{2}y) + \frac{2z}{x^2y^2} \cdot 2\sqrt{2}z$$
$$= \left(-6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\right) \cdot \frac{z^2}{x^2y^2} = 0$$

Учитывая, что модули градиентов функций $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ тождественно не равны нулю, из (1) получаем:

$$\cos\alpha = 0 \implies \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Таким образом, градиенты функций $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ взаимно перпендикулярны независимо от выбора точки M_0.

Задача 5. *Заменяя приращение функции дифференциалом, приближённо вычислить:*

$$\sin 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$$

Решение. Введём функцию $f(x,y) = \sin x \cdot \operatorname{tg} y$. Она дифференцируема в точке $M(88^\circ, 46^\circ)$ как произведение дифференцируемых функций.

По определению дифференцируемости функции f:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \mathrm{d}f(x_0,y_0)(\Delta x, \Delta y) + \underset{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)}{o}\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

Отбросим нелинейную часть приращения функции:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0)(\Delta x, \Delta y)$$

По определению дифференциала функции f:

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,\mathrm{d}x(\Delta x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\mathrm{d}y(\Delta y)$$

Полагая для нашей задачи $M_0\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\Delta\vec{r} = \left(-\frac{\pi}{90}, \frac{\pi}{180}\right)$, найдём частные производные в точке M_0:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \cos x_0 \cdot \tan y_0 = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \tan\frac{\pi}{4} = 0 \cdot 1 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = \frac{\sin x_0}{\cos^2 y_0} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 2$$

Найдём значение дифференциала функции f:

$$\mathrm{d}f(M_0)(\Delta\vec{r}) = 0 \cdot \left(-\frac{\pi}{90}\right) + 2 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{90}$$

Найдём значение функции f в точке M_0:

$$f(M_0) = \sin\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

Итого имеем:

$$f(M) \approx 1 + \frac{\pi}{90} \approx 1.034907$$

Определим относительную погрешность вычислений:

$$f(M) = 1.034899\ldots \implies \varepsilon = \frac{0.000008}{1.034899} \cdot 100\% \approx 7.7 \cdot 10^{-4}\,\%$$

Задача 6. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области D, ограниченной заданными линиями:*

$$z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, \quad D: \ x = 0, \ x = 2, \ y = 0, \ y = 2$$

Решение. Наибольшее и наименьшее значение располагается в экстремумах и/или на границах рассматриваемой области D.

По необходимому условию экстремума в точке $M(x, y)$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}(M) = 0\right) \land \left(\frac{\partial z}{\partial y}(M) = 0\right)$$

Вычислим частные производные функции $z(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 2 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 5y$$

Найдём стационарные точки функции $z(x, y)$:

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = 0 \\ -2x + 5y = 0 \end{cases} \implies M_0\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) \in D \text{ — стационарная}$$

По достаточному условию экстремума в стационарной точке M_0:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(M_0) & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Вычислим частные производные второго порядка функции $z(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z} = -2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 5$$

Полученные частные производные постоянны, значит, Гессиан функции $z(x, y)$ не зависит от выбора стационарной точки и равен:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-2) \cdot (-2) = 6 > 0 \implies M_0 \text{ — локальный минимум}$$

Найдём значение функции $z(x, y)$ в точке M_0:

$$z\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{25 - 20 + 10 - 30}{9} = -\frac{5}{3}$$

Значит, функция $z(x, y)$ принимает своё **наименьшее значение** $-\frac{5}{3}$ в точке $M_0 \in D$. Для поиска максимального значения рассмотрим поведение функции на границах области D:

1. $\measuredangle\, x = 0 \implies z(y) = \frac{5}{2}y^2$ — парабола с растянутыми ветвями вверх и вершиной в $(0, 0)$.

   Максимум достигается при $y = 2 \implies z(2) = 10$.

2. $\measuredangle\, x = 2 \implies z(y) = 4 - 4y + \frac{5}{2}y^2 - 4 = \frac{5}{2}y^2 - 4y = \frac{5}{2}\left(y - \frac{4}{5}\right)^2 - \frac{8}{5}$ — парабола с растянутыми ветвями вверх и вершиной в $(\frac{4}{5}, -\frac{8}{5})$.

   Максимум достигается при $y = 2 \implies z(2) = 2$.

3. $\measuredangle\, y = 0 \implies z(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ — парабола с ветвями вверх и вершиной в $(1, -1)$.

   Максимум достигается при $x = 0$ и $x = 2 \implies z(0) = z(2) = 0$.

4. $\measuredangle\, y = 2 \implies z(x) = x^2 - 4x + 10 - 2x = (x-3)^2 + 1$ — парабола с ветвями вверх и вершиной в $(3, 1)$.

   Максимум достигается при $x = 0 \implies z(0) = 10$.

Значит, функция $z(x, y)$ принимает своё **наибольшее значение** 10 в точке $(0, 2) \in D$.

Задача 7. *Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:*

$$S\colon x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0, \quad M_0(2, 1, -1)$$

Решение. ...

3 Оценочный лист

ФИО	ИСУ	Группа	Поток	Оценка
Джантуре Назерке	465755	P3208	ДГМА 27.3	
Карасев Александр Дмитриевич	466114	P3212	ДГМА 28.3	
Лабин Макар Андреевич	466449	P3231	ДГМА 28.3	