ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
Факультет программной инженерии
и компьютерной техники

Лабораторная работа №2

Построение конформных отображений

(по дисциплине «Теория функций комплексного переменного»)

Выполнил:

Лабин Макар Андреевич,
ТФКП 22.4, P3231, 466449.

Проверил:

Поздняков Семён Сергеевич

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Постановка задач

В ходе лабораторной работы *по варианту №15* будут выполнены следующие задачи:

1. Аналитически описать заданные множества.
2. Воспользовавшись композицией классических преобразований, составить конформное отображение, которое переводит первую область во вторую.
3. Составить обратное отображение, переводящее второе множество в первое.
4. На любом удобном языке программирования написать программу, которая изобразит первое множество и все этапы его преобразования во второе. Достаточно наглядным будет взять набор точек множества, передающий его форму *(может понадобится сделать набор «более плотным» в какой-то части множества)*.

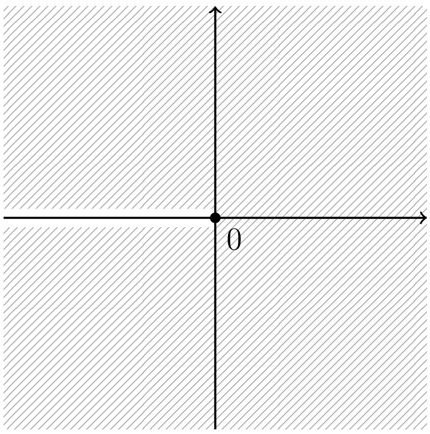


Рисунок 4

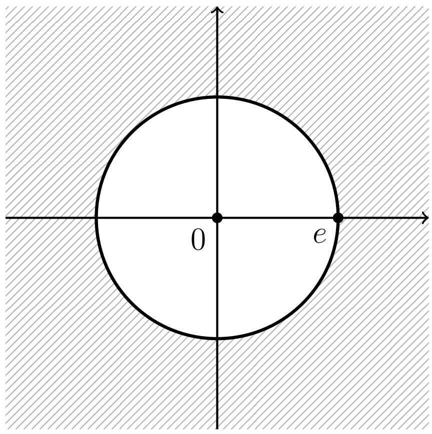
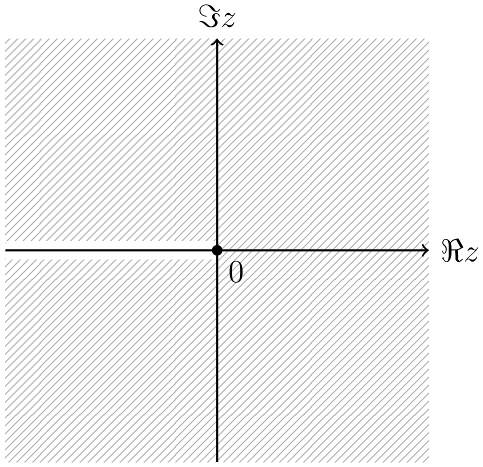


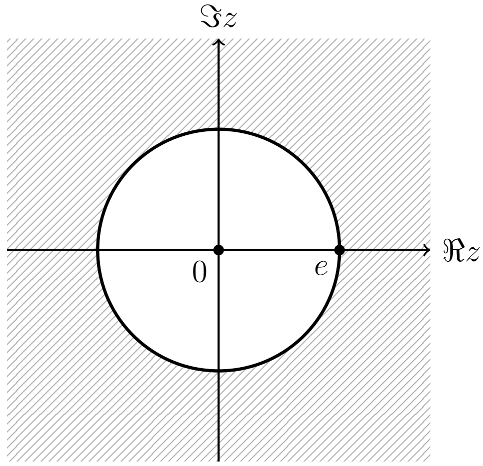
Рисунок 9

2 Аналитическое описание множеств

Даны изображения множеств P' и Q' на комплексной плоскости $\mathbb{C}$:



Множество $P' \subset \mathbb{C}$



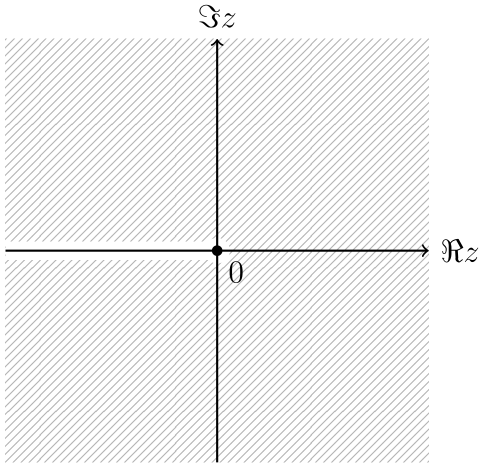
Множество $Q' \subset \mathbb{C}$

Видно, что множество P' — комплексная плоскость с разрезом по действительному лучу $(-\infty, 0)$. Множество Q', в свою очередь, — внешняя часть с границей комплексной окружности радиуса e.

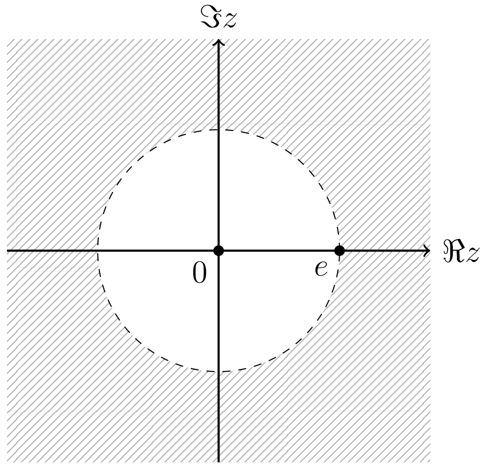
Однако стоит заметить, что $P' \backslash \{0\}$ открыто, а Q' замкнуто. Следовательно, в следующих задачах *невозможно* подобрать такие конформные отображения, которые переведут открытое множество в замкнутое и наоборот. Для исправления ситуации рассмотрим следующие открытые множества:

$$P = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \Re z > 0 \lor \Im z \neq 0\} \qquad Q = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > e\}$$

Ниже приведены из изображения на комплексной плоскости $\mathbb{C}$:



Множество $P \subset \mathbb{C}$

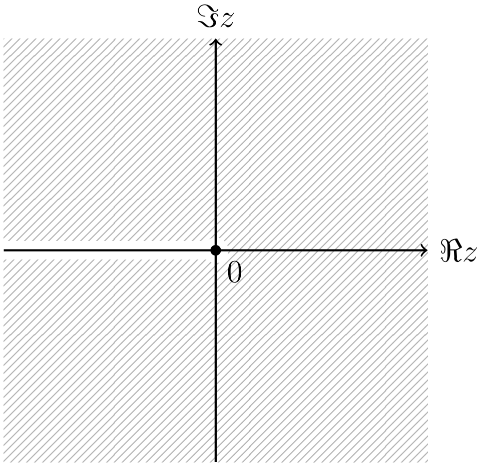


Множество $Q \subset \mathbb{C}$

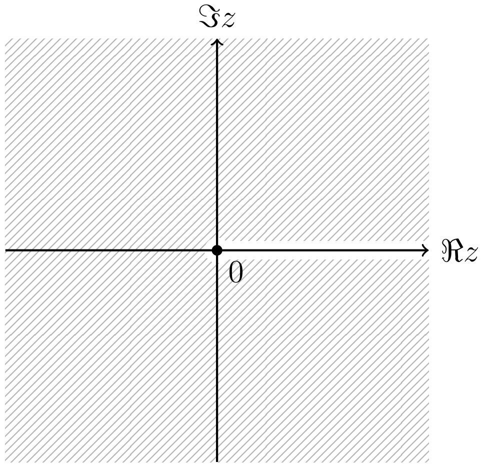
3 Конформные отображения множеств

Составим конформное отображение $\omega(z)$, переводящее множество P в Q:

1. Применим к P конформное отображение $\omega_1(z) = -z$:

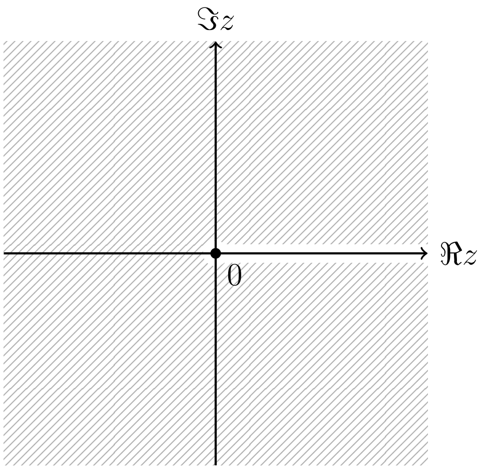


Множество P

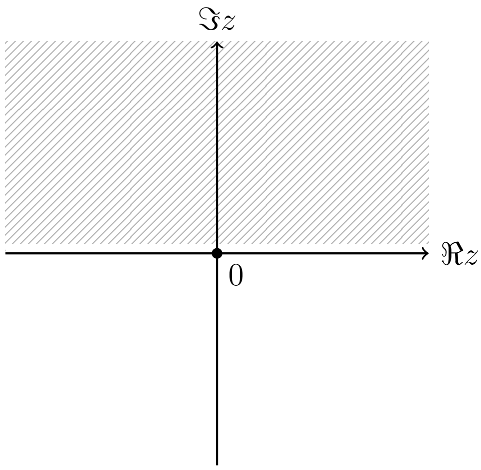


Множество $P_1 = \omega_1(P)$

2. Применим к P_1 конформное отображение $\omega_2(z) = \sqrt{z}$:

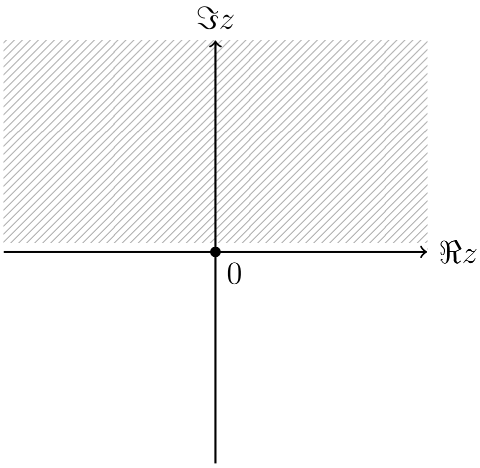


Множество P_1

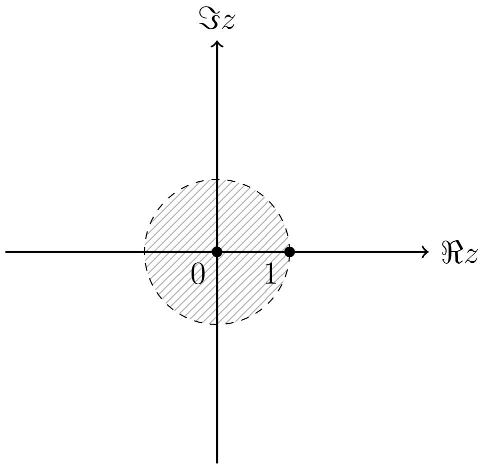


Множество $P_2 = \omega_2(P_1)$

3. Применим к P_2 конформное отображение $\omega_3(z) = \frac{z-i}{z+i}$:

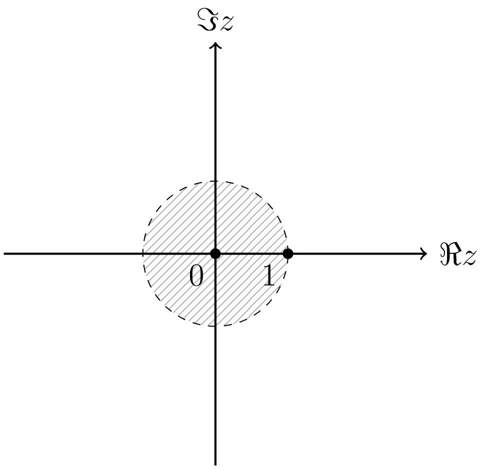


Множество P_2

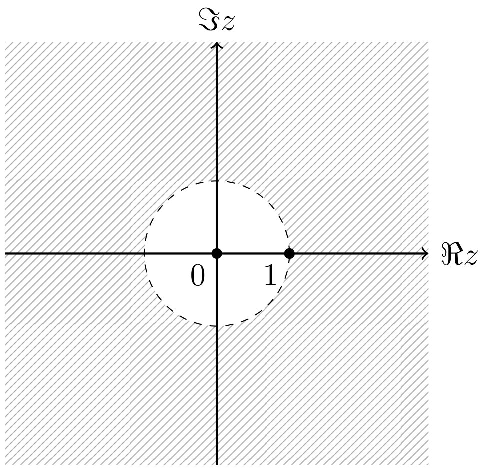


Множество $P_3 = \omega_3(P_2)$

4. Применим к P_3 конформное отображение $\omega_4(z) = \frac{1}{z}$:

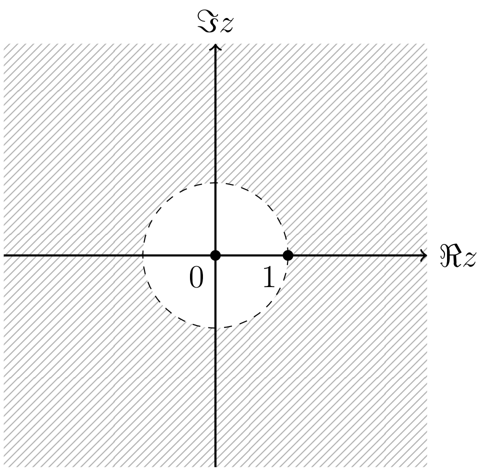


Множество P_3

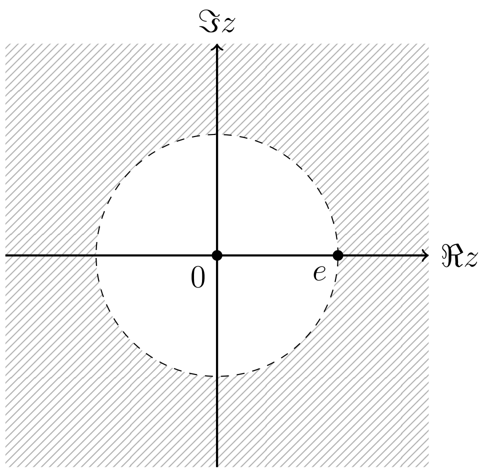


Множество $P_4 = \omega_4(P_3)$

5. Применим к P_4 конформное отображение $\omega_5(z) = ez$:



Множество P_4



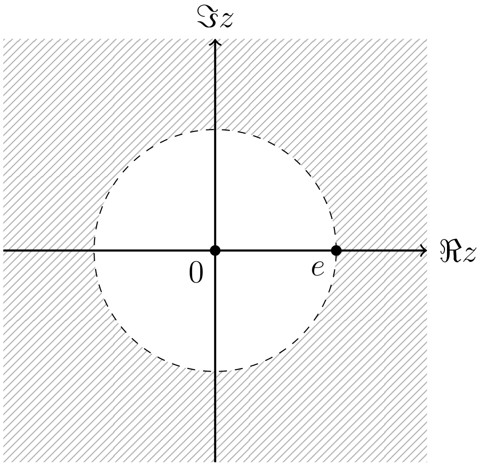
Множество $P_5 = \omega_5(P_4)$

Итого $\omega(z)$ имеет вид:

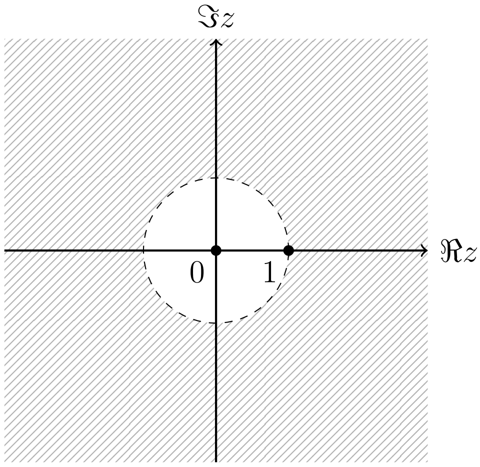
$$\omega = \omega_5 \circ \omega_4 \circ \omega_3 \circ \omega_2 \circ \omega_1 \implies \omega(z) = e \cdot \frac{\sqrt{-z} + i}{\sqrt{-z} - i}$$

Составим обратное конформное отображение $z(\omega)$, которое переводит множество Q в P:

1. Применим к Q конформное отображение $z_1(\omega) = \frac{\omega}{e}$:

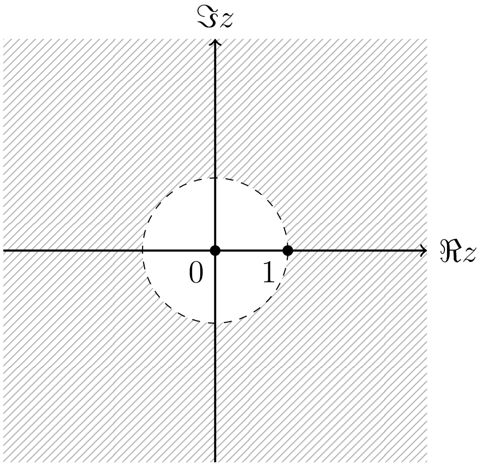


Множество Q

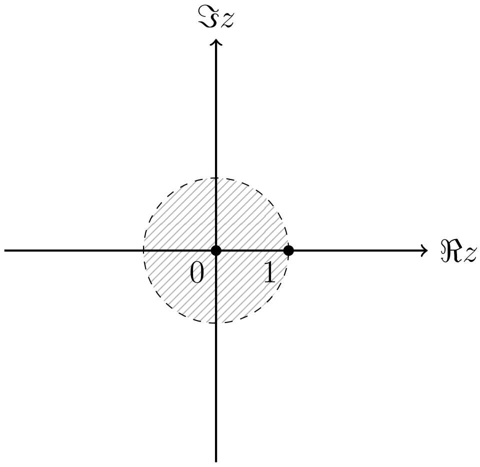


Множество $Q_1 = z_1(Q)$

2. Применим к Q_1 конформное отображение $z_2(\omega) = \frac{1}{\omega}$:

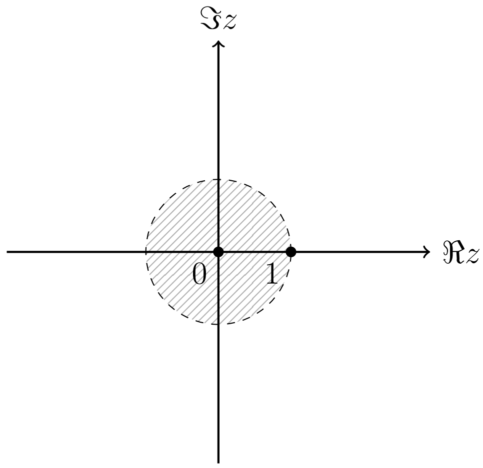


Множество Q_1

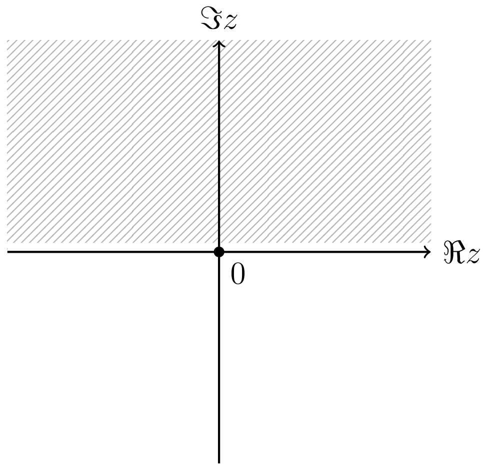


Множество $Q_2 = z_2(Q_1)$

3. Применим к Q_2 конформное отображение $z_3(\omega) = i \cdot \frac{1+\omega}{1-\omega}$:

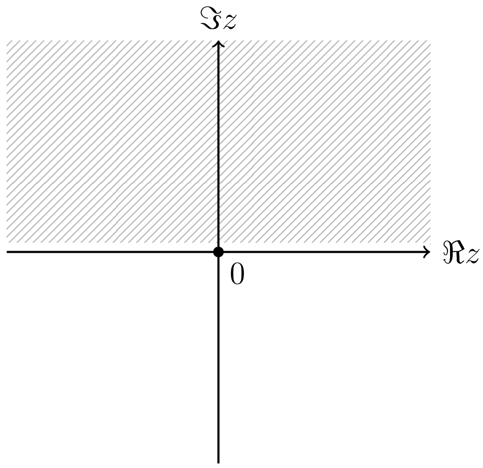


Множество Q_2

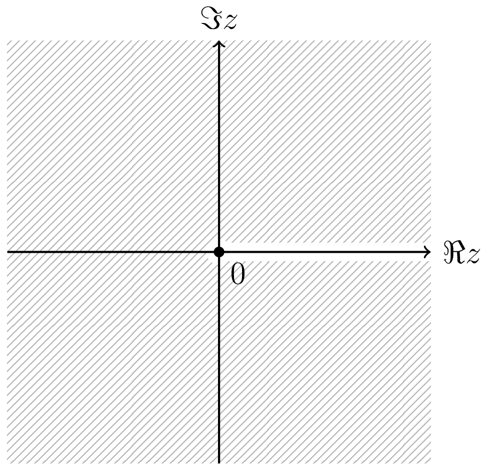


Множество $Q_3 = z_3(Q_2)$

4. Применим к Q_3 конформное отображение $z_4(\omega) = \omega^2$:

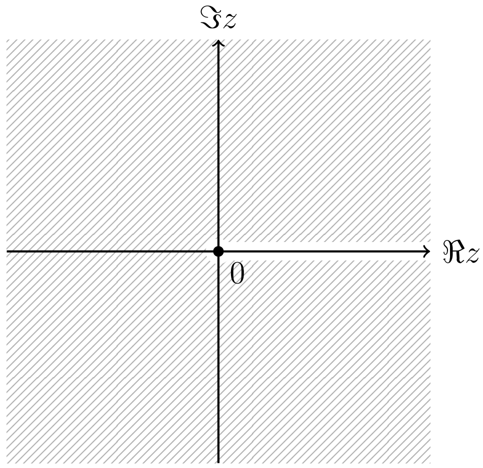


Множество Q_3

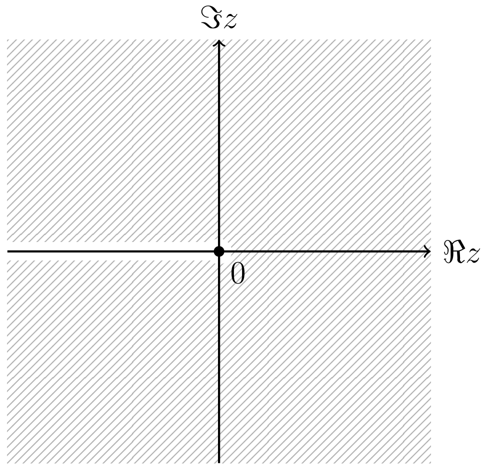


Множество $Q_4 = z_4(Q_3)$

5. Применим к Q_4 конформное отображение $z_5(\omega) = -\omega$:



Множество Q_4



Множество $Q_5 = z_5(Q_4)$

Итого $z(\omega)$ имеет вид:

$$z = z_5 \circ z_4 \circ z_3 \circ z_2 \circ z_1 \implies z(\omega) = -\left(i \cdot \frac{1 + \frac{e}{\omega}}{1 - \frac{e}{\omega}}\right)^2$$

4 Результат отображений множеств

...

5 Заключение

...