ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
Факультет программной инженерии
и компьютерной техники

Домашняя работа №1

Приложения двойных и тройных интегралов

(по дисциплине «Дополнительные главы
математического анализа»)

Выполнил:

Лабин Макар Андреевич,
ДГМА 28.3, P3231, 466449.

Проверил:

Богачёв Владимир Александрович

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Список задач

В рамках выполнения домашней работы *по варианту №10* необходимо предоставить решения следующих задач:

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:
$$(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2), \quad a > 0$$

2. Вычислить объём тела, ограниченного данными поверхностями:
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad z = c$$

3. Найти момент инерции относительно координатных плоскостей тела, ограниченного поверхностями:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$$

4. Вычислить *(тройным интегралом)* объёмы тел, ограниченных поверхностями:
$$z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 60, \quad z = 1$$

2 Решения задач

Задача 1. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:*

$$(x^2+y^2)^2 = a(x^3-3xy^2), \quad a>0$$

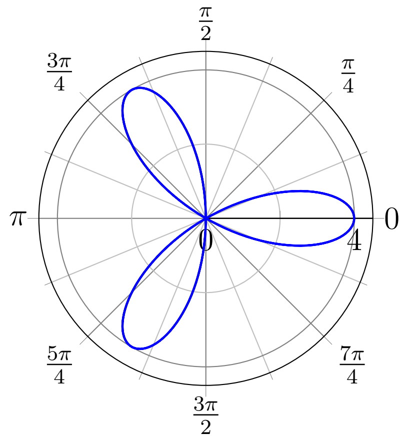
Решение. Применим преобразование $\mathcal{A}$ для перехода в полярную систему координат:

$$\mathcal{A}\colon \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \tag{1}$$

Упростим аналитическое представление заданной кривой:

$$\begin{aligned} \rho^4 &= a(\rho^3\cos^3\varphi - 3\rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi) \\ \rho &= a\cos\varphi(\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi) \\ \rho &= a(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi) \\ \rho &= a\cos 3\varphi, \quad a>0 \end{aligned}$$

В таком виде можно догадаться, что кривая образует график *полярной розы* с тремя лепестками и поворотом на $\frac{\pi}{6}$ радиан по часовой стрелке:



Заметим, что углы, определяющие каждый лепесток, соответствуют промежуткам неотрицательности $\cos 3\varphi$ *(с учётом периода)*:

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right]$$

В силу симметрии каждый лепесток имеет одинаковую площадь, поэтому:

$$S_{\text{фиг.}} = 3S_{\text{леп.}}$$

Вычислим площадь лепестка Ω на $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$ при помощи интеграла Римана по области:

$$S_{\text{леп.}} = \iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Учитывая (1), сделаем поправку на якобиан $\mathcal{A}$:

$$\mu(\mathcal{A}(\Omega)) = \mathcal{J}(\mathcal{A})(r,\varphi)\cdot\mu(\Omega) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} \cdot \mu(\Omega) = \rho\cdot\mu(\Omega)$$

Имеем:

$$S_{\text{леп.}} = \iint_\Omega \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi$$

По теореме Фубини:

$$\iint_\Omega \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a\cos 3\varphi} \rho \mathrm{d}\rho = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \rho^2\big|_0^{a\cos 3\varphi} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{4}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 6\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi a^2}{12}$$

Итого:

$$\boxed{S_{\text{фиг.}} = 3 \cdot \frac{\pi a^2}{12} = \frac{\pi a^2}{4}}$$

Задача 2. *Вычислить объём тела, ограниченного данными поверхностями:*

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad z = c$$

Решение. ...

Задача 3. *Найти момент инерции относительно координатных плоскостей тела, ограниченного поверхностями:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$$

Решение. ...

Задача 4. *Вычислить (тройным интегралом) объёмы тел, ограниченных поверхностями:*

$$z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 60, \quad z = 1$$

Решение. ...