ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
Факультет программной инженерии
и компьютерной техники

Расчётная работа

(по дисциплине «Теория функций комплексного переменного»)

Выполнил:

Лабин Макар Андреевич,
ТФКП 22.4, P3231, 466449.

Проверил:

Поздняков Семён Сергеевич

ИТМО

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Список заданий

В рамках выполнения расчётной работы *по варианту №15* необходимо предоставить решения следующих заданий:

1. Изобразить на комплексной плоскости множество $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} = \{z\colon\ |z - 3 + 2i| \leq 2,\ 0 < \Re(iz) \leq 1\}$$

2. Найти все значения функции в указанной точке:

$$e^{e^i}$$

3. Найти аналитическую функцию по известной её действительной части:

$$u(x, y) = \operatorname{sh}(2x)\cos(2y) + x^2 - y^2 + 4y - 4$$

4. Вычислить интеграл по заданной кривой в указанном направлении:

$$\int_C \Im z \mathrm{d}z, \quad C\colon\ |z - 1| = 1,\ \Im z \geq 0,\ z_0 = 2$$

5. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 и указать область, в которой ряд представляет данную функцию:

$$f(z) = z^2 e^z, \quad z_0 = 1$$

6. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанной области:

$$f(z) = \frac{3}{z^2 - 7z + 10}, \quad 2 < |z| < 5$$

7. Вычислить интеграл при помощи вычетов:

$$\int_L z^3 \cos\left(\frac{2i}{z}\right) \mathrm{d}z, \quad L = \{z\colon\ |z| = \sqrt{2}\}$$

8. Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(ax)}{x^2 + 4x + 8} \mathrm{d}x, \quad a > 0$$

2 Решения заданий

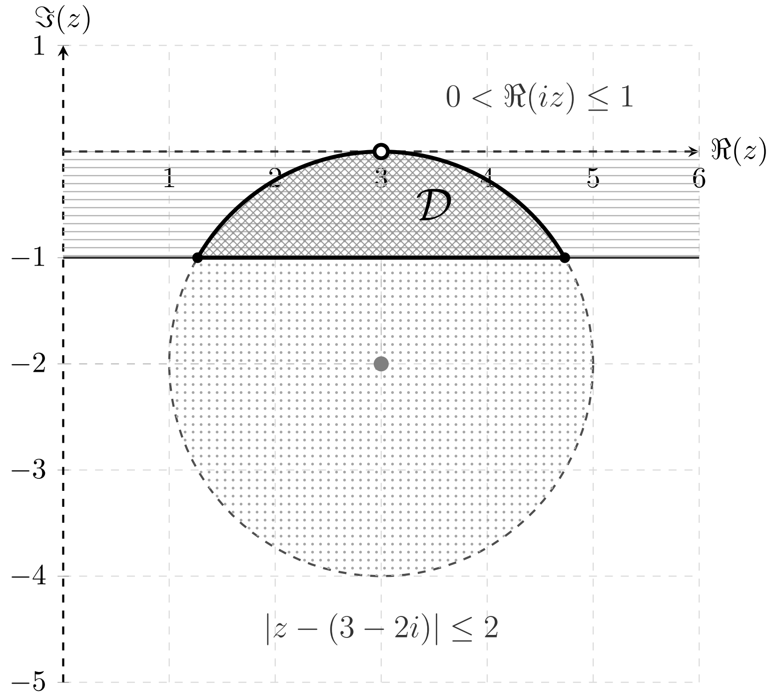
Задание 1. *Изобразить на комплексной плоскости множество $\mathcal{D}$:*

$$\mathcal{D} = \{z\colon\ |z-3+2i| \le 2,\ 0 < \Re(iz) \le 1\}$$

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда второе условие можно переписать в виде:

$$0 < \Re(iz) \le 1 \implies 0 < \Re(ix - y) \le 1 \implies 0 > y \ge -1$$

Итого:



Задание 2. *Найти все значения функции в указанной точке:*

$$e^{e^i}$$

Решение. Пусть $\omega(z) = e^{e^z}$, $z = x + iy$. Преобразуем $\omega(z)$:

$$\omega(z) = e^{e^z} = e^{e^{x+iy}} = e^{e^x e^{iy}} = e^{e^x(\cos y + i\sin y)} = e^{e^x\cos y} e^{e^x i \sin y} = \\ = e^{e^x\cos y}\left(\cos(e^x \sin y) + i\sin(e^x\sin y)\right)$$

Значение функции $\omega(z)$ в точке $z_0 = i$:

$$\omega(i) = e^{e^0\cos 1}\big(\cos(e^0\sin 1) + i\sin(e^0\sin 1)\big) = e^{\cos 1}(\cos(\sin 1) + i\sin(\sin 1))$$

Итого:

$$\boxed{e^{e^i} = e^{\cos 1}(\cos(\sin 1) + i\sin(\sin 1))}$$

Задание 3. *Найти аналитическую функцию по известной её действительной части:*

$$u(x,y) = \operatorname{sh}(2x)\cos(2y) + x^2 - y^2 + 4y - 4$$

Решение. Пусть $x = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Зная об аналитичности $f(z)$, воспользуемся первым уравнением из условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{sh}(2x)\cos(2y) + x^2 - y^2 + 4y - 4\right) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \implies$$

$$\implies \frac{\cos(2y)}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(e^{2x} - e^{-2x}) + 2x = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \implies \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = (e^{2x} + e^{-2x})\cos(2y) + 2x \implies$$

$$\implies v(x, y) = (e^{2x} + e^{-2x})\int \cos(2y)\mathrm{d}y + 2x\int \mathrm{d}y = \operatorname{ch}(2x)\sin(2y) + 2xy + C(x)$$

Воспользуемся вторым уравнением из условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{sh}(2x)\cos(2y) + x^2 - y^2 + 4y - 4\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{ch}(2x)\sin(2y) + 2xy + C(x)\right) \implies$$

$$\implies -2\sin(2y)\operatorname{sh}(2x) - 2y + 4 = -\left(2\operatorname{sh}(2x)\sin(2y) + 2y + C'(x)\right) \implies$$

$$\implies C'(x) = -4 \implies C(x) = -4x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Выразим функцию $f(z)$ через z:

$$f(z) = \operatorname{sh}(2x)\cos(2y) + x^2 - y^2 + 4y - 4 + i(\operatorname{ch}(2x)\sin(2y) + 2xy - 4x + C) =$$
$$= -i\sin(i2x)\cos(2y) + i\cos(i2x)\sin(2y) + (x + iy)^2 - 4i(x + iy) - 4 + iC =$$
$$= i(\sin(2y)\cos(i2x) - \cos(2y)\sin(i2x)) + z^2 - 4iz - 4 + iC =$$
$$= i\sin(2y - i2x) + (z - 2i)^2 + iC = i\sin(-2i(x + iy)) + (z - 2i)^2 + iC =$$
$$= \operatorname{sh}(2z) + (z - 2i)^2 + iC$$

Итого:

$$\boxed{f(z) = \operatorname{sh}(2z) + (z - 2i)^2 + iC, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Задание 4. *Вычислить интеграл по заданной кривой в указанном направлении:*

$$\int_C \Im z\mathrm{d}z, \quad C\colon\ |z - 1| = 1,\ \Im z \geq 0,\ z_0 = 2$$

Решение. Параметризуем кривую C:

$$\gamma(t) = 1 + e^{it}, \quad t \in [0, \pi]$$

Вычислим интеграл вдоль пути γ:

$$\int_\gamma \Im\gamma(t)\mathrm{d}\gamma = \int_0^\pi \Im(1 + e^{it})ie^{it}\mathrm{d}t = i\int_0^\pi \sin t e^{it}\mathrm{d}t = i\int_0^\pi \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}e^{it}\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi (e^{2it} - 1)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2it}}{2i} - t\right)\Bigg|_0^\pi = -\frac{\pi}{2}$$

Итого:

$$\boxed{\int_C \Im z\mathrm{d}z = -\frac{\pi}{2}}$$

Задание 5. *Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 и указать область, в которой ряд представляет данную функцию:*

$$f(z) = z^2e^z, \quad z_0 = 1$$

Решение. По определению ряда Тейлора в окрестности точки $z_0 = 1$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n$$

По формуле Лейбница:

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z^2)^{(k)} (e^z)^{(n-k)} = \left(\binom{n}{0} z^2 + \binom{n}{1} 2z + \binom{n}{2} 2\right) \cdot e^z =$$
$$= (z^2 + 2nz + n(n-1)) \cdot e^z \implies$$
$$\implies f^{(n)}(1) = (1 + 2n + n^2 - n)e = e(n^2 + n + 1)$$

Функция $f(z)$ получена как произведение аналитичных функций на $\mathbb{C}$, поэтому $f(z)$ тоже аналитична на $\mathbb{C}$:

$$\boxed{f(z) = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n!}(z-1)^n, \quad z \in \mathbb{C}}$$

Задание 6. *Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанной области:*

$$f(z) = \frac{3}{z^2 - 7z + 10}, \quad 2 < |z| < 5$$

Решение. Найдём нули знаменателя:

$$\begin{cases} z^2 - 7z + 10 = 0 \\ D = 49 - 40 = 3^2 \end{cases} \implies \left[\begin{array}{l} z = 2 \\ z = 5 \end{array}\right.$$

Разложим $f(z)$ на простейшие дроби методом неопределённых коэффициентов:

$$\frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-5} = \frac{3}{(z-2)(z-5)} \implies A(z-5) + B(z-2) = 3 \implies$$
$$\implies \begin{cases} A + B = 0 \\ -5A - 2B = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -B \\ 5B - 2B = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в области $2 < |z| < 5$:

$$f(z) = \frac{1}{z-5} - \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{5}} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n =$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} = -\sum_{-\infty}^{-1}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}$$

Итого:

$$\boxed{f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad c_n = \begin{cases} -2^{-n-1}, \ n \le -1 \\ -5^{-n-1}, \ n \ge 0 \end{cases}}$$

Задание 7. *Вычислить интеграл при помощи вычетов:*

$$\int_L z^3 \cos\left(\frac{2i}{z}\right) \mathrm{d}z, \quad L = \{z \colon |z| = \sqrt{2}\}$$

Решение. Выполним замену переменной интегрирования:

$$z = \frac{2i}{\omega} \implies \int_L z^3 \cos\left(\frac{2i}{z}\right) \mathrm{d}z = \int_{\tilde{L}} \frac{(2i)^3}{\omega^3} \cos\omega \frac{-2i}{\omega^2} \mathrm{d}\omega = -16 \int_{\tilde{L}} \frac{\cos\omega}{\omega^5} \mathrm{d}\omega$$

Параметризуем контур L и определим новый контур $\tilde{L}$:

$$\gamma(t) = \sqrt{2}e^{it},\ t \in [0, 2\pi] \implies \tilde{\gamma}(t) = \frac{2i}{\sqrt{2}e^{it}} = \sqrt{2}ie^{-it} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}-it},\ t \in [0, 2\pi]$$

Контур $\tilde{L}$ получен из L поворотом на $\frac{\pi}{2}$ и инверсией направления обхода.

Подынтегральная функция голоморфна на открытом множестве $D \backslash \{0\}$ с внешней замкнутой границей $\tilde{L}$.

По первой теореме Коши о вычетах:

$$\int_{\tilde{L}} \frac{\cos\omega}{\omega^5} \mathrm{d}\omega = -2\pi i \operatorname*{Res}_{\omega=0} \frac{\cos\omega}{\omega^5} = -\frac{2\pi i}{4!} \lim_{\omega\to0} \frac{\mathrm{d}^4 \cos\omega}{\mathrm{d}\omega^4} = -\frac{\pi i}{12} \lim_{\omega\to0} \cos\omega = -\frac{\pi i}{12}$$

Итого:

$$\boxed{\int_L z^3 \cos\left(\frac{2i}{z}\right) \mathrm{d}z = \frac{4\pi i}{3}}$$

Задание 8. *Вычислить несобственный интеграл:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(ax)}{x^2+4x+8} \mathrm{d}x, \quad a > 0$$

Решение. По принципу аналитического продолжения $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(ax)}{x^2+4x+8} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\cos(az)}{z^2+4z+8} \mathrm{d}z$$

Распишем интеграл через предел и разделим по аддитивности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\cos(az)}{z^2+4z+8} \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{R} \frac{ze^{iaz}}{z^2+4z+8} \mathrm{d}z + \int_{-R}^{R} \frac{ze^{-iaz}}{z^2+4z+8} \mathrm{d}z \right)$$

Введём контур $\gamma(t) = Re^{it},\ t \in [t_0, t_1]$ и функцию $f(z) = \frac{z}{z^2+4z+8}$.

Оценим функцию $f(z)$ на контуре γ:

$$\left|R^2e^{2it} + 4Re^{it} + 8\right| \geq R^2 - 4R - 8,\ R > 2 + \sqrt{12} \implies$$
$$|f(z)| = \frac{|Re^{it}|}{|R^2e^{2it} + 4Re^{it} + 8|} \leq \frac{R}{R^2 - 4R - 8}$$

Оценим первый интеграл по контуру γ:

$$\left| \int_\gamma f(z) e^{iaz} \mathrm{d}z \right| \leq \frac{R}{R^2-4R-8} \int_{t_0}^{t_1} \left| e^{iaRe^{it}} \right| \left| Rie^{it} \mathrm{d}t \right| =$$
$$= \frac{R^2}{R^2-4R-8} \int_{t_0}^{t_1} \left| e^{iaR(\cos t + i\sin t)} \right| \mathrm{d}t = \frac{R^2}{R^2-4R-8} \int_{t_0}^{t_1} e^{-aR\sin t} \mathrm{d}t$$

Если взять промежуток $t \in [0, \pi]$ *(обозначим такой контур γ_1)*, то:

$$\int_0^{\pi} e^{-aR\sin t}\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin t}\mathrm{d}t \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2aR}{\pi}t}\mathrm{d}t = 2\left.\frac{e^{-\frac{2aR}{\pi}t}}{-\frac{2aR}{\pi}}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{\pi}{aR}(e^{-aR} - 1) \leq \frac{\pi}{aR}$$

Получаем:

$$\left|\int_{\gamma_1} f(z)e^{iaz}\mathrm{d}z\right| \leq \frac{R}{R^2 - 4R - 8} \cdot \frac{\pi}{a} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Аналогично оценим второй интеграл по контуру γ:

$$\left|\int_{\gamma} f(z)e^{-iaz}\mathrm{d}z\right| \leq \dots = \frac{R^2}{R^2 - 4R - 8}\int_{t_0}^{t_1} e^{aR\sin t}\mathrm{d}t$$

Если взять промежуток $t \in [-\pi, 0]$ *(обозначим такой контур γ_2)*, то:

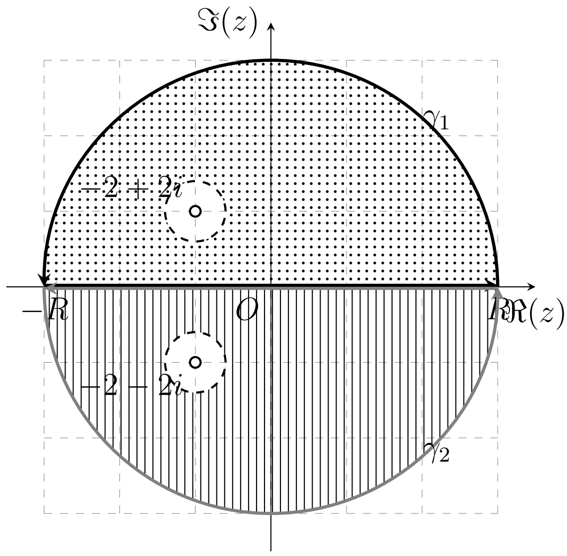
$$\int_{-\pi}^{0} e^{aR\sin t}\mathrm{d}t = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^{aR\sin t}\mathrm{d}t \leq 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^{\frac{2aRt}{\pi}}\mathrm{d}t = 2\left.\frac{e^{\frac{2aRt}{\pi}}}{\frac{2aR}{\pi}}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} =$$

$$= -\frac{\pi}{aR}(1 - e^{-aR}) \leq \frac{\pi}{aR}$$

Получаем:

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)e^{-iaz}\mathrm{d}z\right| \leq \frac{R}{R^2 - 4R - 8} \cdot \frac{\pi}{a} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Для наглядности изобразим полученные контуры:



По аддитивности интегралов:

$$\int_{[-R,R]} f(z)e^{iaz}\mathrm{d}z = \int_{[-R,R]\cup\gamma_1} f(z)e^{iaz}\mathrm{d}z - \int_{\gamma_1} f(z)e^{iaz}\mathrm{d}z$$

$$\int_{[-R,R]} f(z)e^{-iaz}\mathrm{d}z = -\left(\int_{[R,-R]\cup\gamma_2} f(z)e^{-iaz}\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)e^{-iaz}\mathrm{d}z\right)$$

Найдём нули знаменателя:

$$\begin{cases} z^2+4z+8=0 \\ D_1 = 4-8 = 2i \end{cases} \implies \left[\begin{aligned} z &= -2-2i \\ z &= -2+2i \end{aligned}\right.$$

По интегральной теореме Коши для замкнутого контура $[-R,R]\cup\gamma_1$:

$$\int_{[-R,R]\cup\gamma_1} f(z)e^{iaz}\mathrm{d}z = 2\pi i \lim_{z\to -2+2i} \frac{ze^{iaz}}{z+2+2i} = 2\pi i\frac{(-2+2i)e^{ia(-2+2i)}}{4i} =$$
$$= \pi e^{-2a(1+i)}\,(-1+i) = \pi i e^{-2a(1+i)}(1+i)$$

По интегральной теореме Коши для замкнутого контура $[R,-R]\cup\gamma_2$:

$$\int_{[R,-R]\cup\gamma_2} f(z)e^{iaz}\mathrm{d}z = -2\pi i \lim_{z\to -2-2i} \frac{ze^{-iaz}}{z+2-2i} = -2\pi i\frac{(-2-2i)e^{-ia(-2-2i)}}{-4i} =$$
$$= \pi e^{2a(-1+i)}\,(-1-i) = -\pi e^{2a(-1+i)}(1+i)$$

В пределе при $R\to\infty$ имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{iaz}\mathrm{d}z + \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-iaz}\mathrm{d}z = \pi(1+i)(ie^{-2a(1+i)} - e^{2a(-1+i)}) =$$
$$= \pi(1+i)e^{-2a}(ie^{-2ai} - e^{2ai}) = \pi(1+i)e^{-2a}(i\cos(2a) + \sin(2a) -$$
$$- \cos(2a) - i\sin(2a)) = \pi(1+i)e^{-2a}(1-i)(\sin(2a)-\cos(2a)) =$$
$$= 2\pi e^{-2a}(\sin(2a)-\cos(2a))$$

Итого:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(ax)}{x^2+4x+8}\mathrm{d}x = \pi e^{-2a}(\sin(2a)-\cos(2a)), \quad a>0}$$