

ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ
И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Расчётно-графическая работа №2

(по дисциплине «Дополнительные главы
математического анализа»)

Выполнил:

Лабин Макар Андреевич,
ДГМА 28.3, Р3231, 466449.

Проверил:

Богачёв Владимир Александрович

и́тмо

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Список задач

В рамках выполнения расчёто-графической работы *по варианту №10* необходимо предоставить решения следующих задач:

1. Плоская область D ограничена заданными линиями:

$$y = \sqrt[3]{x}, \quad x = -\sqrt{y+2}, \quad y = 3x - 2$$

- (a) Сделайте схематический рисунок области D .
- (b) С помощью двойного интеграла найдите площадь области D .

2. Тело T ограничено заданными поверхностями:

$$z = 4 - x^2 - y^2, \quad 9z = -5(x^2 + y^2), \quad y = 0 \quad \text{при } y \leq 0$$

- (a) Сделайте схематический рисунок тела T .
- (b) С помощью тройного интеграла найдите объём тела T , перейдя к цилиндрическим или сферическим координатам.

3. С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги плоской материальной кривой, заданной уравнениями:

$$(a) y = \frac{1}{x}, \quad \sqrt[4]{3} \leq x \leq \sqrt[4]{8}, \quad \rho(x, y) = \frac{6x^3}{y^2}$$

$$(b) \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi, \quad \rho(x, y) = 1$$

4. С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги пространственной материальной кривой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t + 1 \end{cases}, \quad 6 \leq t \leq 20, \quad \rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - x^2}}$$

5. Дано векторное поле \vec{a} и плоскость σ , пересекающая координатные плоскости по замкнутой ломаной $KLMK$, где K, L, M — точки пересечения плоскости σ координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно:

$$\vec{a} = (3z - x)\vec{i} + (z - y)\vec{j}, \quad \sigma: x - 2y - z = -4$$

- (a) Найдите поток Q векторного поля \vec{a} через часть S плоскости σ , вырезанной координатными плоскостями, в сторону нормали \vec{n} , направленной от начала координат $O(0, 0, 0)$.
- (b) С помощью теоремы Остроградского-Гаусса найдите поток Q векторного поля \vec{a} через полную поверхность тетраэдра $OLMK$ в сторону внешней нормали.
- (c) Найдите циркуляцию C векторного поля \vec{a} по контуру $KLMK$, образованному пересечением плоскости σ с координатными плоскостями.

6. Дано векторное поле $\vec{a}(M)$:

$$\vec{a} = (1 + e^y)\vec{i} + (xe^y - e^z - 1)\vec{j} + (2 - ye^z)\vec{k}$$

- (а) Проверьте, является ли векторное поле соленоидальным или потенциальным.
- (б) Если поле потенциально, найдите его потенциал.

2 Решения задач

Задача 1. Плоская область D ограничена заданными линиями:

$$y = \sqrt[3]{x}, \quad x = -\sqrt{y+2}, \quad y = 3x - 2$$

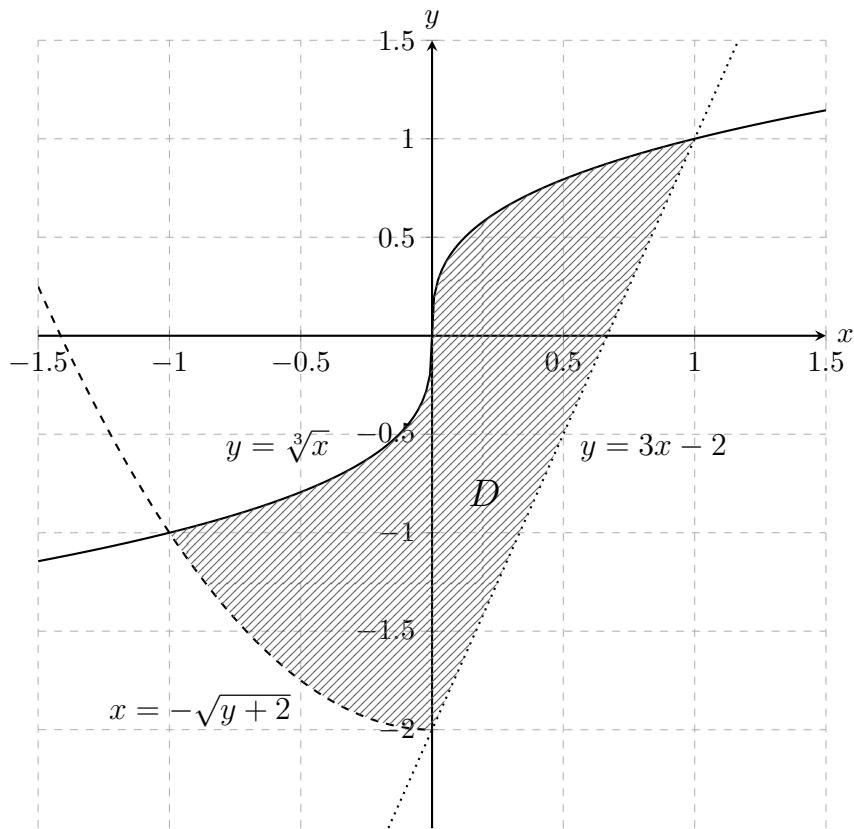
- (a) Сделайте схематический рисунок области D .
- (b) С помощью двойного интеграла найдите площадь области D .

Решение. График кривой $y = \sqrt[3]{x}$ — кубическая парабола с инверсией относительно прямой $y = x$.

График кривой $x = -\sqrt{y+2}$ — левая ветвь параболы с центром в $(0, 2)$.

График кривой $y = 3x - 2$ — прямая, проходящая через т. $(0, -2)$ и $(1, 1)$.

Имеем рисунок области D , ограниченной заданными графиками:



Найдём площадь области D с помощью двойного интеграла по теореме Фубини:

$$\begin{aligned} S_D &= \iint_D d\Omega = \int_{-1}^0 dx \int_{x^2-2}^{\sqrt[3]{x}} dy + \int_0^1 dx \int_{3x-2}^{\sqrt[3]{x}} dy = \\ &= \int_{-1}^0 (\sqrt[3]{x} - x^2 + 2) dx + \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - 3x + 2) dx = \\ &= \left(\frac{3}{4}(\sqrt[3]{x})^4 - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{3}{4}(\sqrt[3]{x})^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + 2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

Ответ:

$$S_D = \frac{13}{6}$$

Задача 2. Тело T ограничено заданными поверхностями:

$$z = 4 - x^2 - y^2, \quad 9z = -5(x^2 + y^2), \quad y = 0 \quad \text{при } y \leq 0$$

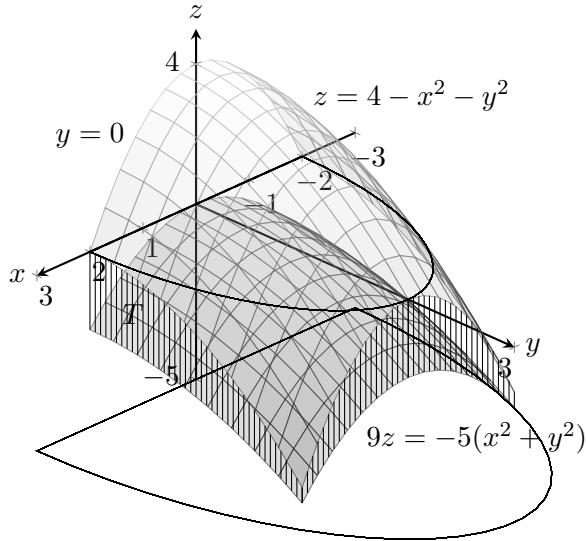
- (a) Сделайте схематический рисунок тела T .
- (b) С помощью тройного интеграла найдите объём тела T , переходя к цилиндрическим или сферическим координатам.

Решение. График поверхности $z = 4 - x^2 - y^2$ — эллиптический параболоид с вершиной в точке $(0, 0, 4)$, направленный вниз.

График поверхности $9z = -5(x^2 + y^2)$ — эллиптический параболоид с вершиной в точке $(0, 0, 0)$, направленный вниз с сжатием в $\frac{9}{5}$ раз.

График поверхности $y = 0$ — плоскость xOz .

Имеем рисунок тела T , ограниченного заданными плоскостями (тело показано с дополнительными сечениями для лучшего понимания его формы):



Перейдём к цилиндрическим координатам:

$$\mathcal{A}: \begin{cases} x(r, \varphi, z) = r \cos \varphi \\ y(r, \varphi, z) = r \sin \varphi \\ z(r, \varphi, z) = z \end{cases} \implies |J_{\mathcal{A}}| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos \varphi \cos \varphi + r \sin \varphi \sin \varphi = r$$

Найдём объём тела T с помощью тройного интеграла по теореме Фубини:

$$\begin{aligned} V_T &= \iiint_T dV = \int_{-5}^0 dz \int_{\sqrt{-\frac{9}{5}z}}^{\sqrt{4-z}} r dr \int_0^\pi d\varphi + \int_0^4 dz \int_0^{\sqrt{4-z}} r dr \int_0^\pi d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\int_{-5}^0 r^2 \left| \sqrt{\frac{4-z}{-\frac{9}{5}z}} dz + \int_0^4 r^2 \left| \sqrt{\frac{4-z}{0}} dz \right. \right. \right) = \frac{\pi}{2} \left(\int_{-5}^0 \left(4 + \frac{4}{5}z \right) dz + \int_0^4 (4-z) dz \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\left(4z + \frac{2}{5}z^2 \right) \Big|_{-5}^0 + \left(4z - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^4 \right) = \frac{\pi}{2}(10+8) = 9\pi \end{aligned}$$

Итого:

$$V_T = 9\pi$$

Задача 3. С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги плоской материальной кривой, заданной уравнениями:

$$(a) \quad y = \frac{1}{x}, \quad \sqrt[4]{3} \leq x \leq \sqrt[4]{8}, \quad \rho(x, y) = \frac{6x^3}{y^2}$$

$$(b) \quad \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi, \quad \rho(x, y) = 1$$

Решение. Параметризуем кривую L_a :

$$L_a: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{1}{t} \end{cases}, \quad t \in [\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{8}]$$

Рассчитаем dl :

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \sqrt{1 + \frac{1}{t^4}} dt$$

Найдём массу M_a дуги кривой L_a :

$$\begin{aligned} M_a &= \int_{L_a} \rho(x, y) dl = 6 \int_{\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{8}} t^3 \cdot t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^4}} dt = 6 \int_{\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{1+t^4} \cdot t^3 dt = \\ &= [d(t^4 + 1) = 4t^3 dt] = \frac{3}{2} \int_{\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{1+t^4} d(1+t^4) = (1+t^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_{\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{8}} = \\ &= 9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} = 27 - 8 = 19 \end{aligned}$$

Итого:

$$M_a = 19$$

Рассчитаем dl для кривой L_b :

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \sqrt{4(1 - \cos t)^2 + 4 \sin^2 t} dt = \sqrt{16 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 4 \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt$$

Найдём массу M_b дуги кривой L_b :

$$M_b = \int_{L_b} \rho(x, y) dl = 4 \int_0^\pi \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = -8 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^\pi = -8 \cdot (-1) = 8$$

Итого:

$$M_b = 8$$

Задача 4. С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги пространственной материальной кривой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t + 1 \end{cases}, \quad 6 \leq t \leq 20, \quad \rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - x^2}}$$

Решение. Найдём dl :

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt = \sqrt{4 + 1 + 4} dt = 3 dt$$

Найдём массу M дуги пространственной кривой L :

$$\begin{aligned} M &= \int_L \rho(x, y, z) dl = 3 \int_6^{20} \frac{dt}{\sqrt{(2t+1)^2 - 4t^2}} = 3 \int_6^{20} \frac{dt}{\sqrt{4t+1}} = \\ &= [d(4t+1) = 4dt] = \frac{3}{4} \int_6^{20} \frac{d(4t+1)}{\sqrt{4t+1}} = \frac{3}{2} \sqrt{4t+1} \Big|_6^{20} = \\ &= \frac{3}{2}(9 - 5) = 6 \end{aligned}$$

Итого:

$$M = 6$$

Задача 5. Дано векторное поле \vec{a} и плоскость σ , пересекающая координатные плоскости по замкнутой ломаной $KLMK$, где K, L, M — точки пересечения плоскости σ координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно:

$$\vec{a} = (3z - x)\vec{i} + (z - y)\vec{j}, \quad \sigma: x - 2y - z = -4$$

- (a) Найдите поток Q векторного поля \vec{a} через часть S плоскости σ , вырезанной координатными плоскостями, в сторону нормали \vec{n} , направленной от начала координат $O(0, 0, 0)$.
- (b) С помощью теоремы Остроградского-Гаусса найдите поток Q векторного поля \vec{a} через полную поверхность тетраэдра $OLMK$ в сторону внешней нормали.
- (c) Найдите циркуляцию C векторного поля \vec{a} по контуру $KLMK$, образованному пересечением плоскости σ с координатными плоскостями.

Решение. Определим координаты точек K, L и M :

1. $K(x, 0, 0) \wedge K \in \sigma \implies x = -4 \implies K(-4, 0, 0)$
2. $L(0, y, 0) \wedge L \in \sigma \implies y = 2 \implies L(0, 2, 0)$
3. $M(0, 0, z) \wedge M \in \sigma \implies z = 4 \implies M(0, 0, 4)$

Найдём поток Q_a векторного поля \vec{a} через $\triangle KLM$, который расположен в пятом октанте ($x < 0; y, z > 0$):

$$Q_a = \iint_{KLM} \vec{a} \cdot \vec{n} d\Omega$$

Определим нормальный вектор \vec{n}^* к $\triangle KLM \subset \sigma$, направленный от O :

$$\sigma: x - 2y - z + 4 = 0 \implies \vec{n}^* = (-1, 2, 1)$$

Нормируем нормальный вектор:

$$|\vec{n}^*| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \implies \vec{n} = \frac{\vec{n}^*}{|\vec{n}^*|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

Выразим $z(x, y)$ из уравнения σ :

$$z(x, y) = x - 2y + 4$$

Рассчитаем $d\Omega$:

$$d\Omega = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1+1+4} dx dy = \sqrt{6} dx dy$$

По теореме Фубини:

$$\begin{aligned} \iint_{KLM} \vec{a} \cdot \vec{n} d\Omega &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (x - 3z + 2z - 2y) dy = \\ &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (x - 2y - (x - 2y + 4)) dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (-4) dy = \\ &= -4 \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy = -4 \sqrt{6} \end{aligned}$$

Определим границы интегрирования из проекции $\triangle KLM$ на xOy :

$$\begin{aligned} a &= -4, \quad b = 0 \\ \varphi_1(x) &= 0, \quad \varphi_2(x) = \frac{x}{2} + 2 \end{aligned}$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int_0^{\frac{x}{2}+2} dy = \frac{x}{2} + 2$$

Вычислим внешний интеграл:

$$\int_{-4}^0 \left(\frac{x}{2} + 2 \right) dx = \left(\frac{x^2}{4} + 2x \right) \Big|_{-4}^0 = -(4 - 8) = 4$$

Итого:

$$Q_a = -16$$

По теореме Остроградского-Гаусса:

$$Q_b = \iiint_{OLMK} \operatorname{div} \vec{a} d\Omega$$

Определим дивергенцию векторного поля \vec{a} :

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = -1 - 1 + 0 = -2$$

Тогда формула для вычисления потока Q_b примет вид:

$$Q_b = -2 \iint_{OLMK} d\Omega = -2V_{OLMK}$$

Воспользуемся формулой для поиска объёма тетраэдра $OLMK$:

$$V_{OLMK} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 = \frac{16}{3}$$

Итого:

$$Q_b = -\frac{32}{3}$$

Параметризуем замкнутую ломаную $KLMK = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$:

$$\begin{aligned} \gamma_1: \quad & \begin{cases} x(t) = -4 + 4t \\ y(t) = 2t \\ z(t) = 0 \end{cases}, \quad t \in [0, 1] & \gamma_2: \quad & \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 2 - 2t \\ z(t) = 4t \end{cases}, \quad t \in [0, 1] \\ \gamma_3: \quad & \begin{cases} x(t) = -4t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 4 - 4t \end{cases}, \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Найдём циркуляцию C векторного поля \vec{a} по определению:

$$\begin{aligned} C &= \oint_{KLMK} \vec{a} d\vec{z} = \oint_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3} (3z - x) dx + (z - y) dy = \\ &= \int_0^1 ((4 - 4t)4 - 4t) dt + \int_0^1 (4t - 2 + 2t)(-2) dt + \int_0^1 (12 - 12t + 4t)(-4) dt = \\ &= \int_0^1 (16 - 20t - 12t + 4 - 48 + 32t) dt = -28 \int_0^1 dt = -28 \end{aligned}$$

Итого:

$$C = -28$$

Задача 6. Дано векторное поле $\vec{a}(M)$:

$$\vec{a} = (1 + e^y)\vec{i} + (xe^y - e^z - 1)\vec{j} + (2 - ye^z)\vec{k}$$

(a) Проверьте, является ли векторное поле соленоидальным или потенциальным.

(b) Если поле потенциально, найдите его потенциал.

Решение. ...