ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
Факультет программной инженерии
и компьютерной техники

Расчётно-графическая работа №1

(по дисциплине «Дополнительные главы
математического анализа»)

Выполнили:

Джантуре Назерке,
ДГМА 27.3, P3208, 465755;
Карасев Александр Дмитриевич,
ДГМА 28.3, P3212, 466114;
Лабин Макар Андреевич,
ДГМА 28.3, P3231, 466449.

Проверил:

Богачёв Владимир Александрович

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Список задач

В рамках выполнения расчётно-графической работы *по варианту №6* необходимо предоставить решения следующих задач:

1. Найти и построить область определения сложной функции:

$$z = \ln(y - \ln x)$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва и укажите точки устранимого разрыва функции двух переменных:

$$z = x \sin \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

3. Для неявно заданной функции записать многочлен Тейлора 2 порядка по степеням $(x - x_0)$, $(y - y_0)$:

$$x^3 + z^3 - 6xz = y^3, \quad M_0(2; 2; 0)$$

4. Найдите угол между градиентами функций $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ в точке M_0:

$$v = \frac{3x^2}{\sqrt{2}} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z^2, \quad u = \frac{z^2}{x^2y^2}, \quad M_0\left(\frac{2}{3}; 2; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

5. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближённо вычислить:

$$\sin 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$$

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области D, ограниченной заданными линиями:

$$z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, \quad D: \ x = 0, \ x = 2, \ y = 0, \ y = 2$$

7. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$S\colon x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0, \quad M_0(2, 1, -1)$$

2 Решения задач

Задача 1. *Найти и построить область определения функции*

$$z = \ln(y - \ln x).$$

Решение. Функция $\ln(u)$ определена тогда и только тогда, когда её аргумент $u > 0$.

В нашем случае:

$$y - \ln x > 0 \quad \Rightarrow \quad y > \ln x.$$

и:

$$x > 0$$

Тогда D:

$$D = \{(x, y) \in R^2 \mid x > 0,\ y > \ln x\}$$

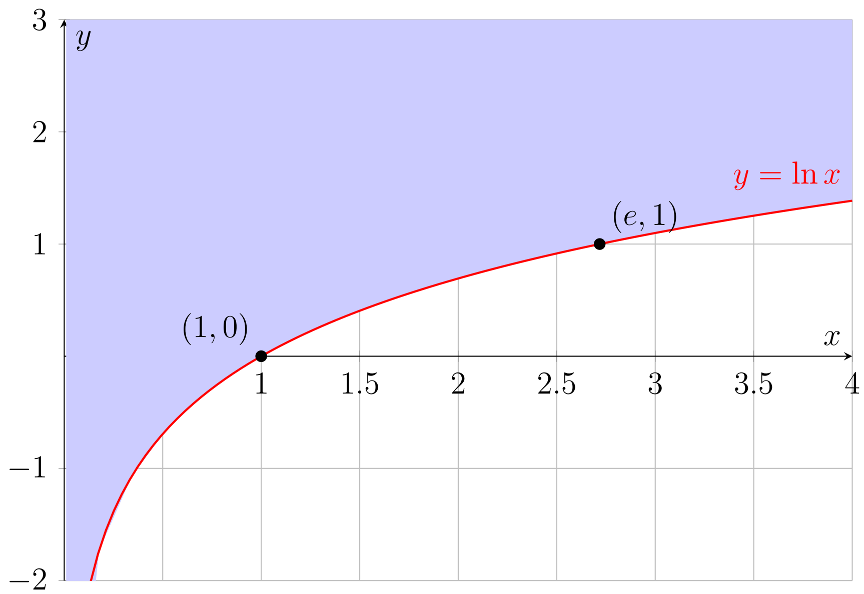
Границы области:

- $y = \ln x$
- $x = 0$

Проверим некоторые точки:

- Точка $(1, 0)$: $\ln 1 = 0$; $y > 0$
- Точка $(e, 1)$: $\ln e = 1$; $y > 1$

График области определения:



Задача 2. *Исследовать на непрерывность функцию:*

$$z = x \sin \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

Найти точки разрыва и определить их тип.

Решение. Функция не определена только в точке (0,0), где знаменатель $x^2 + y^2$ обращается в ноль. Во всех остальных точках функция непрерывна как композиция непрерывных функций.

Исследуем поведение функции в точке (0,0). Заметим, что синус любого аргумента по модулю не превосходит 1, поэтому:

$$|z(x,y)| = \left| x \sin \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| \le |x|$$

При стремлении (x,y) к (0,0) правая часть неравенства $|x|$ стремится к 0, значит и сама функция стремится к 0 по теореме о сжатой функции:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} z(x,y) = 0$$

Предел существует и равен 0, но функция в точке (0,0) не определена. Значит, разрыв устранимый - достаточно доопределить функцию, положив $z(0,0) = 0$.

Ответ:

- Точка разрыва: (0,0)
- Тип разрыва: устранимый

Задача 3. *Для неявно заданной функции записать многочлен Тейлора 2 порядка по степеням $(x - x_0)$, $(y - y_0)$:*

$$x^3 + z^3 - 6xz = y^3, \quad M_0(2;2;0)$$

Решение. Проверим, что точка M_0 принадлежит поверхности:

$$F(x,y,z) = x^3 + z^3 - 6xz - y^3 = 0$$
$$F(2,2,0) = 2^3 + 0^3 - 6 \cdot 2 \cdot 0 - 2^3 = 8 + 0 - 0 - 8 = 0 \quad \text{— верно}$$

Вычислим частные производные F в точке M_0:

$$F'_x = 3x^2 - 6z$$
$$F'_y = -3y^2$$
$$F'_z = 3z^2 - 6x$$

В точке $M_0(2,2,0)$:

$$F'_x(M_0) = 3 \cdot 4 - 6 \cdot 0 = 12$$
$$F'_y(M_0) = -3 \cdot 4 = -12$$
$$F'_z(M_0) = 3 \cdot 0 - 6 \cdot 2 = -12 \neq 0$$

Найдем первые производные неявной функции $z = z(x,y)$ в M_0:
По формулам для неявной функции:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

$$z'_x(M_0) = -\frac{12}{-12} = 1$$

$$z'_y(M_0) = -\frac{-12}{-12} = -1$$

Вычислим вторые частные производные F:

$$F'_{xx} = 6x, \quad F'_{xy} = 0$$

$$F'_{yy} = -6y, \quad F'_{xz} = -6$$

$$F_{zz} = 6z, \quad F'_{yz} = 0$$

В точке M_0:

$$F'_{xx}(M_0) = 12, \quad F'_{xy}(M_0) = 0$$

$$F'_{yy}(M_0) = -12, \quad F'_{xz}(M_0) = -6$$

$$F'_{zz}(M_0) = 0, \quad F'_{yz}(M_0) = 0$$

Найдем вторые производные неявной функции в M_0:

$$z'_{xx} = -\frac{F_{xx}F_z^2 - 2F_{xz}F_xF_z + F_{zz}F_x^2}{F_z^3}$$

$$z'_{xy} = -\frac{F_{xy}F_z^2 - F_{yz}F_xF_z - F_{xz}F_yF_z + F_{zz}F_xF_y}{F_z^3}$$

$$z'_{yy} = -\frac{F_{yy}F_z^2 - 2F_{yz}F_yF_z + F_{zz}F_y^2}{F_z^3}$$

Подставим значения для M_0:

$$z'_{xx}(M_0) = -\frac{12 \cdot 144 - 2 \cdot (-6) \cdot 12 \cdot (-12) + 0 \cdot 144}{(-12)^3} = -\frac{1728 - 1728}{-1728} = 0$$

$$z'_{xy}(M_0) = -\frac{0 \cdot 144 - 0 \cdot 12 \cdot (-12) - (-6) \cdot (-12) \cdot (-12) + 0 \cdot 12 \cdot (-12)}{(-12)^3}$$

$$z'_{xy}(M_0) = -\frac{0 - 0 + 864 + 0}{-1728} = \frac{1}{2}$$

$$z'_{yy}(M_0) = -\frac{(-12) \cdot 144 - 2 \cdot 0 \cdot (-12) \cdot (-12) + 0 \cdot 144}{(-12)^3} = -\frac{-1728}{-1728} = -1$$

Составим многочлен Тейлора 2 порядка:

$$T_2(x,y) = z_0 + z_x(x - x_0) + z_y(y - y_0) + \frac{1}{2}\left[z_{xx}(x - x_0)^2 + 2z_{xy}(x - x_0)(y - y_0) + z_{yy}(y - y_0)^2\right]$$

Подставим значения:

$$T_2(x,y) = 0 + 1 \cdot (x - 2) + (-1) \cdot (y - 2) + \frac{1}{2}\left[0 \cdot (x - 2)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x - 2)(y - 2) + (-1) \cdot (y - 2)^2\right]$$

Упростим:

$$T_2(x,y) = (x-2) - (y-2) + \frac{1}{2}\left[(x-2)(y-2) - (y-2)^2\right]$$

$$T_2(x,y) = x - 2 - y + 2 + \frac{1}{2}(xy - 2x - 2y + 4) - \frac{1}{2}(y^2 - 4y + 4)$$

$$T_2(x,y) = x - y + \frac{1}{2}xy - x - y + 2 - \frac{1}{2}y^2 + 2y - 2$$

$$T_2(x,y) = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y^2$$

Ответ: $T_2(x,y) = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y^2$

Задача 4. *Найдите угол между градиентами функций $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ в точке M_0:*

$$v = \frac{3x^2}{\sqrt{2}} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z^2, \quad u = \frac{z^2}{x^2y^2}, \quad M_0\left(\frac{2}{3}; 2; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Решение. По определению градиента функций $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$:

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad \operatorname{grad} v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

По определению скалярного произведения векторов:

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = |\operatorname{grad} u| \cdot |\operatorname{grad} v| \cdot \cos\alpha, \quad \alpha = \angle(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)$$

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} u| \cdot |\operatorname{grad} v|} \tag{1}$$

Перепишем скалярное произведение векторов в координатной форме:

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} \tag{2}$$

Вычислим частные производные функций $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{2z^2}{x^3y^2} & \qquad \frac{\partial v}{\partial x} &= 3\sqrt{2}x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{2z^2}{x^2y^3} & \qquad \frac{\partial v}{\partial y} &= -\sqrt{2}y \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{2z}{x^2y^2} & \qquad \frac{\partial v}{\partial z} &= 2\sqrt{2}z \end{aligned}$$

Подставим полученные частные производные в сумму (2):

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v &= -\frac{2z^2}{x^3y^2}\cdot 3\sqrt{2}x - \frac{2z^2}{x^2y^3}\cdot(-\sqrt{2}y) + \frac{2z}{x^2y^2}\cdot 2\sqrt{2}z \\ &= \left(-6\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4\sqrt{2}\right)\cdot\frac{z^2}{x^2y^2} = 0\end{aligned}$$

Учитывая, что модули градиентов функций $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ тождественно не равны нулю, из (1) получаем:

$$\cos\alpha = 0 \implies \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Таким образом, градиенты функций $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ взаимно перпендикулярны независимо от выбора точки M_0.

Задача 5. *Заменяя приращение функции дифференциалом, приближённо вычислить:*

$$\sin 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$$

Решение. Введём функцию $f(x,y) = \sin x \cdot \operatorname{tg} y$. Она дифференцируема в точке $M(88^\circ, 46^\circ)$ как произведение дифференцируемых функций.

По определению дифференцируемости функции f:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \mathrm{d}f(x_0,y_0)(\Delta x,\Delta y) + \underset{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}{o}\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$$

Отбросим нелинейную часть приращения функции:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0)(\Delta x,\Delta y)$$

По определению дифференциала функции f:

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)(\Delta x,\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,\mathrm{d}x(\Delta x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\mathrm{d}y(\Delta y)$$

Полагая для нашей задачи $M_0\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$, $\Delta\vec{r} = \left(-\frac{\pi}{90},\frac{\pi}{180}\right)$, найдём частные производные в точке M_0:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \cos x_0\cdot\tan y_0 = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\tan\frac{\pi}{4} = 0\cdot 1 = 0\\ &\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = \frac{\sin x_0}{\cos^2 y_0} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 2\end{aligned}$$

Найдём значение дифференциала функции f:

$$\mathrm{d}f(M_0)(\Delta\vec{r}) = 0\cdot\left(-\frac{\pi}{90}\right) + 2\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{90}$$

Найдём значение функции f в точке M_0:

$$f(M_0) = \sin\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

Итого имеем:

$$f(M) \approx 1 + \frac{\pi}{90} \approx 1.034907$$

Определим относительную погрешность вычислений:

$$f(M) = 1.034899\ldots \implies \varepsilon = \frac{0.000008}{1.034899}\cdot 100\% \approx 7.7\cdot 10^{-4}\,\%$$

Задача 6. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области D, ограниченной заданными линиями:*

$$z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, \quad D: \ x = 0, \ x = 2, \ y = 0, \ y = 2$$

Решение. Функция $z(x, y)$ непрерывна на замкнутом множестве D как сумма непрерывных функций. Следовательно, она ограничена и достигает своего наибольшего и наименьшего значения *(по теореме Вейерштрасса о функции на замкнутом множестве)*.

По необходимому условию экстремума в точке $M(x, y)$:

$$\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}(M) = 0\right) \wedge \left(\frac{\partial z}{\partial y}(M) = 0\right)\right] \vee \left(\nexists \frac{\partial z}{\partial x}(M)\right) \vee \left(\nexists \frac{\partial z}{\partial y}(M)\right)$$

Вычислим частные производные функции $z(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 2 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 5y$$

Найдём стационарные точки функции $z(x, y)$:

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = 0 \\ -2x + 5y = 0 \end{cases} \implies M_0\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) \in D \text{ — стационарная}$$

По достаточному условию экстремума в стационарной точке M_0:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(M_0) & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Вычислим частные производные второго порядка функции $z(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z} = -2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 5$$

Полученные частные производные постоянны, значит, Гессиан функции $z(x, y)$ не зависит от выбора стационарной точки и равен:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-2) \cdot (-2) = 6 > 0 \implies M_0 \text{ — локальный минимум}$$

Найдём значение функции $z(x, y)$ в точке M_0:

$$z\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{25 - 20 + 10 - 30}{9} = -\frac{5}{3}$$

Значит, функция $z(x, y)$ принимает своё **наименьшее значение** $-\frac{5}{3}$ в точке $M_0 \in D$. Для поиска максимального значения рассмотрим поведение функции на границах области D, где определены не все частные производные:

1. $\measuredangle\, x = 0 \implies z(y) = \frac{5}{2}y^2$ — парабола с растянутыми ветвями вверх и вершиной в $(0,0)$.

   Максимум достигается при $y = 2 \implies z(2) = 10$.

2. $\measuredangle\, x = 2 \implies z(y) = 4-4y+\frac{5}{2}y^2-4 = \frac{5}{2}y^2-4y = \frac{5}{2}\left(y-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{8}{5}$ — парабола с растянутыми ветвями вверх и вершиной в $(\frac{4}{5}, -\frac{8}{5})$.

   Максимум достигается при $y = 2 \implies z(2) = 2$.

3. $\measuredangle\, y = 0 \implies z(x) = x^2-2x = (x-1)^2-1$ — парабола с ветвями вверх и вершиной в $(1,-1)$.

   Максимум достигается при $x = 0$ и $x = 2 \implies z(0) = z(2) = 0$.

4. $\measuredangle\, y = 2 \implies z(x) = x^2-4x+10-2x = (x-3)^2+1$ — парабола с ветвями вверх и вершиной в $(3,1)$.

   Максимум достигается при $x = 0 \implies z(0) = 10$.

Значит, функция $z(x,y)$ принимает своё **наибольшее значение** 10 в точке $(0,2) \in D$.

Задача 7. *Найти касательную плоскость и нормаль к поверхности:*

$$x^2+y^2+z^2-6y+4z+4=0$$

в точке $M_0(2,1,-1)$.

Решение. Сначала проверим, что точка лежит на поверхности. Подставляем координаты:

$$2^2+1^2+(-1)^2-6\cdot 1+4\cdot(-1)+4 = 4+1+1-6-4+4 = 0$$

Точка действительно лежит на поверхности.

Чтобы найти касательную плоскость, нужно вычислить частные производные. Рассмотрим функцию:

$$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-6y+4z+4$$

Находим производные:

$$F'_x = 2x, \quad F'_y = 2y-6, \quad F'_z = 2z+4$$

Вычисляем их в точке $M_0(2,1,-1)$:

$$F'_x(2,1,-1) = 4, \quad F'_y(2,1,-1) = -4, \quad F'_z(2,1,-1) = 2$$

Эти числа - координаты вектора нормали к поверхности. Уравнение касательной плоскости:

$$4(x-2)-4(y-1)+2(z+1) = 0$$

Упрощаем (можно разделить на 2):

$$2(x-2)-2(y-1)+(z+1) = 0$$

$$2x - 4 - 2y + 2 + z + 1 = 0$$

$$2x - 2y + z - 1 = 0$$

Нормаль - это прямая, проходящая через точку M_0 в направлении вектора нормали. Её уравнения:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1}$$

Ответ:

- Касательная плоскость: $2x - 2y + z - 1 = 0$
- Нормаль: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$

3 Оценочный лист

ФИО	ИСУ	Группа	Поток	Оценка
Джантуре Назерке	465755	P3208	ДГМА 27.3	
Карасев Александр Дмитриевич	466114	P3212	ДГМА 28.3	
Лабин Макар Андреевич	466449	P3231	ДГМА 28.3	