

ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ
И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Домашняя работа №1

Приложения двойных и тройных интегралов

(по дисциплине «Дополнительные главы
математического анализа»)

Выполнил:

Лабин Макар Андреевич,
ДГМА 28.3, Р3231, 466449.

Проверил:

Богачёв Владимир Александрович

ИТМО

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Список задач

В рамках выполнения домашней работы *по варианту №10* необходимо предоставить решения следующих задач:

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2), \quad a > 0$$

2. Вычислить объём тела, ограниченного данными поверхностями:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad z = c$$

3. Найти момент инерции относительно координатных плоскостей тела, ограниченного поверхностями:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

4. Вычислить (*тройным интегралом*) объёмы тел, ограниченных поверхностями:

$$z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 60, \quad z = 1$$

2 Решения задач

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2), \quad a > 0$$

Решение. Применим преобразование \mathcal{A} для перехода в полярную систему координат:

$$\mathcal{A}: \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (1)$$

Упростим аналитическое представление заданной кривой:

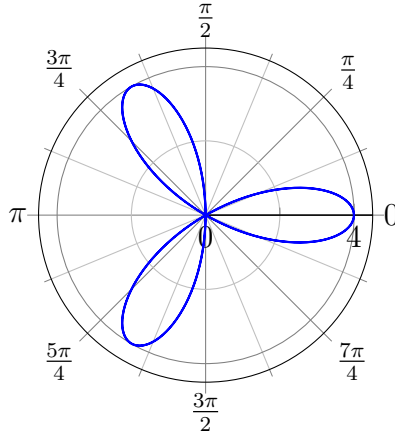
$$\rho^4 = a(\rho^3 \cos^3 \varphi - 3\rho^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi)$$

$$\rho = a \cos \varphi (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi)$$

$$\rho = a(4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi)$$

$$\rho = a \cos 3\varphi, \quad a > 0$$

В таком виде можно догадаться, что кривая образует график *полярной розы* с тремя лепестками и поворотом на $\frac{\pi}{6}$ радиан по часовой стрелке:



Заметим, что углы, определяющие каждый лепесток, соответствуют промежуткам неотрицательности $\cos 3\varphi$ (с учётом периода):

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

В силу симметрии каждый лепесток имеет одинаковую площадь, поэтому:

$$S_{\text{фиг.}} = 3S_{\text{леп.}}$$

Вычислим площадь лепестка Ω на $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ при помощи интеграла Римана по области:

$$S_{\text{леп.}} = \iint_{\Omega} dx dy$$

Учитывая (1), сделаем поправку на якобиан \mathcal{A} :

$$\mu(\mathcal{A}(\Omega)) = \mathcal{J}(\mathcal{A})(r, \varphi) \cdot \mu(\Omega) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} \cdot \mu(\Omega) = \rho \cdot \mu(\Omega)$$

Имеем:

$$S_{\text{леп.}} = \iint_{\Omega} \rho d\rho d\varphi$$

По теореме Фубини:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \rho d\rho d\varphi &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^{a \cos 3\varphi} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \rho^2 \Big|_0^{a \cos 3\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 6\varphi) d\varphi = \frac{a^2}{4} \left(\varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi a^2}{12} \end{aligned}$$

Итого:

$$S_{\text{фиг.}} = 3 \cdot \frac{\pi a^2}{12} = \frac{\pi a^2}{4}$$

Задача 2. Вычислить объём тела, ограниченного данными поверхностями:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad z = c$$

Решение. Тело задано площадью поперечного сечения, параллельного плоскости xOy на интервале $[0; c]$.

Вычислим объём тела Ω при помощи интеграла Римана по области:

$$V_{\text{тел.}} = \iiint_{\Omega} dx dy dz$$

По теореме Фубини:

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^c dz \int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} dy \int_{\psi_1(z,y)}^{\psi_2(z,y)} dx$$

Найдём нижние и верхние границы $x = \psi_1(z, y)$, $x = \psi_2(z, y)$:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \implies y = \pm |a| \sqrt{z - \frac{y^2}{b^2}} \implies \begin{cases} \psi_1(z, y) = -|a| \sqrt{z - \frac{y^2}{b^2}} \\ \psi_2(z, y) = |a| \sqrt{z - \frac{y^2}{b^2}} \end{cases}$$

Подставим границы $x = \psi_1(z, y)$, $x = \psi_2(z, y)$ и посчитаем интеграл:

$$\int_{\psi_1(z,y)}^{\psi_2(z,y)} dx = x \Big|_{-|a|\sqrt{z-\frac{y^2}{b^2}}}^{|a|\sqrt{z-\frac{y^2}{b^2}}} = 2|a| \sqrt{z - \frac{y^2}{b^2}}$$

Найдём нижние и верхние границы $y = \phi_1(z)$, $y = \phi_2(z)$:

$$z = \frac{y^2}{b^2} \implies y = \pm |b| \sqrt{z} \implies \begin{cases} \phi_1(z) = -|b| \sqrt{z} \\ \phi_2(z) = |b| \sqrt{z} \end{cases}$$

Подставим границы $y = \phi_1(z)$, $y = \phi_2(z)$ и посчитаем интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} 2|a| \sqrt{z - \frac{y^2}{b^2}} dy = 2|a| \int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} \sqrt{z - \frac{y^2}{b^2}} dy = \\ & = \left[\begin{array}{l} y = |b| \sqrt{z} \sin \alpha \\ dy = |b| \sqrt{z} \cos \alpha d\alpha \end{array} \middle| - \begin{array}{l} |b| \sqrt{z} = |b| \sqrt{z} \sin \alpha_2 \implies \alpha_2 = \pi/2 \\ |b| \sqrt{z} = |b| \sqrt{z} \sin \alpha_1 \implies \alpha_1 = -\pi/2 \end{array} \right] = \\ & = 2|a| |b| z \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha |\cos \alpha| d\alpha = 4|a| |b| z \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha d\alpha = \\ & = 2|a| |b| z \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\alpha) d\alpha = 2|a| |b| z \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) \bigg|_0^{\pi/2} = \pi |a| |b| z \end{aligned}$$

Наконец, посчитаем последний интеграл:

$$\int_0^c |a| |b| \pi z dz = |a| |b| \pi \int_0^c z dz = \pi |a| |b| \frac{z^2}{2} \bigg|_0^c = \pi |a| |b| \frac{c^2}{2}$$

Итого:

$$\boxed{V_{\text{тел.}} = \pi |a| |b| \frac{c^2}{2}}$$

Задача 3. Найти момент инерции относительно координатных плоскостей тела, ограниченного поверхностями:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

Решение. ...

Задача 4. Вычислить (тройным интегралом) объёмы тел, ограниченных поверхностями:

$$z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 60, \quad z = 1$$

Решение. Вычислим объём тела Ω при помощи интеграла Римана по области:

$$V_{\text{тел.}} = \iiint_{\Omega} dx dy dz$$

Тело Ω ограничено верхней полусферой радиуса 8 с центром в начале координат, бесконечным круговым цилиндром радиуса $\sqrt{60}$ и плоскостью, параллельной xOy и расположенной на высоте 1.

Определим высоту пересечения полусферы и кругового цилиндра:

$$\begin{cases} z = \sqrt{64 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = 60 \end{cases} \implies z = 2$$

По теореме Фубини и линейности интеграла Римана:

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_1^2 dz \int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} dy \int_{\psi_1(z,y)}^{\psi_2(z,y)} dx + \int_2^8 dz \int_{\tilde{\phi}_1(z)}^{\tilde{\phi}_2(z)} dy \int_{\tilde{\psi}_1(z,y)}^{\tilde{\psi}_2(z,y)} dx \quad (2)$$

Найдём нижние и верхние границы $x = \psi_1(z, y)$, $x = \psi_2(z, y)$:

$$x^2 + y^2 = 60 \implies x = \pm \sqrt{60 - y^2} \implies \begin{cases} \psi_1(z, y) = -\sqrt{60 - y^2} \\ \psi_2(z, y) = \sqrt{60 - y^2} \end{cases}$$

Подставим границы $x = \psi_1(z, y)$, $x = \psi_2(z, y)$ и посчитаем интеграл:

$$\int_{\psi_1(z, y)}^{\psi_2(z, y)} dx = x \Big|_{-\sqrt{60 - y^2}}^{\sqrt{60 - y^2}} = 2\sqrt{60 - y^2}$$

Найдём нижние и верхние границы $y = \phi_1(z)$, $y = \phi_2(z)$:

$$y^2 = 60 \implies y = \pm \sqrt{60} \implies \begin{cases} \phi_1(z) = -\sqrt{60} \\ \phi_2(z) = \sqrt{60} \end{cases}$$

Подставим границы $y = \phi_1(z)$, $y = \phi_2(z)$ и посчитаем интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} 2\sqrt{60 - y^2} dy &= 2 \int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} \sqrt{60 - y^2} dy = \\ &= \left[y = \sqrt{60} \sin \alpha \quad \left| \quad \begin{aligned} \sqrt{60} &= \sqrt{60} \sin \alpha_2 \implies \alpha_2 = \pi/2 \\ -\sqrt{60} &= \sqrt{60} \sin \alpha_1 \implies \alpha_1 = -\pi/2 \end{aligned} \right. \right] = \\ &= 120 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha |\cos \alpha| d\alpha = 60\pi \end{aligned}$$

Досчитаем первый интеграл в (2):

$$\int_1^2 60\pi dz = 60\pi \int_1^2 dz = 60\pi z \Big|_1^2 = 60\pi$$

Найдём нижние и верхние границы $x = \tilde{\psi}_1(z, y)$, $x = \tilde{\psi}_2(z, y)$:

$$z = \sqrt{64 - x^2 - y^2} \implies x = \pm \sqrt{64 - z^2 - y^2} \implies \begin{cases} \tilde{\psi}_1(z, y) = -\sqrt{64 - z^2 - y^2} \\ \tilde{\psi}_2(z, y) = \sqrt{64 - z^2 - y^2} \end{cases}$$

Подставим границы $x = \tilde{\psi}_1(z, y)$, $x = \tilde{\psi}_2(z, y)$ и посчитаем интеграл:

$$\int_{\tilde{\psi}_1(z, y)}^{\tilde{\psi}_2(z, y)} dx = x \Big|_{-\sqrt{64 - z^2 - y^2}}^{\sqrt{64 - z^2 - y^2}} = 2\sqrt{64 - z^2 - y^2}$$

Найдём нижние и верхние границы $y = \tilde{\phi}_1(z)$, $y = \tilde{\phi}_2(z)$:

$$z = \sqrt{64 - y^2} \implies y = \pm \sqrt{64 - z^2} \implies \begin{cases} \tilde{\phi}_1(z) = -\sqrt{64 - z^2} \\ \tilde{\phi}_2(z) = \sqrt{64 - z^2} \end{cases}$$

¹Такой интеграл был посчитан в задании №2.

Подставим границы $y = \tilde{\phi}_1(z)$, $y = \tilde{\phi}_2(z)$ и посчитаем интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\phi}_1(z)}^{\tilde{\phi}_2(z)} 2\sqrt{64 - z^2 - y^2} dy = 2 \int_{\tilde{\phi}_1(z)}^{\tilde{\phi}_2(z)} \sqrt{64 - z^2 - y^2} dy = \\ = & \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{64 - z^2} \sin \alpha \\ dy = \sqrt{64 - z^2} \cos \alpha d\alpha \end{array} \middle| \begin{array}{l} \sqrt{64 - z^2} = \sqrt{64 - z^2} \sin \alpha_2 \implies \alpha_2 = \pi/2 \\ -\sqrt{64 - z^2} = \sqrt{64 - z^2} \sin \alpha_1 \implies \alpha_1 = -\pi/2 \end{array} \right] = \\ & = 2(64 - z^2) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha |\cos \alpha| d\alpha = \pi(64 - z^2) \end{aligned}$$

Досчитаем второй интеграл в (2):

$$\int_2^8 \pi(64 - z^2) dz = \pi \int_2^8 (64 - z^2) dz = \pi \left(64z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_2^8 = \pi(64 \cdot (8 - 2) - \frac{512 - 8}{3}) = 216\pi$$

Итого:

$$\boxed{V_{\text{тел.}} = 60\pi + 216\pi = 276\pi}$$

²Аналогично, такой интеграл был посчитан в задании №2.