

ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ
И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Домашняя работа №2

Криволинейные интегралы

(по дисциплине «Дополнительные главы
математического анализа»)

Выполнил:

Лабин Макар Андреевич,
ДГМА 28.3, Р3231, 466449.

Проверил:

Богачёв Владимир Александрович

ітмо

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Список задач

В рамках выполнения домашней работы *по варианту №10* необходимо представить решения следующих задач:

1. Вычислить данный криволинейный интеграл:

$$\int_{L_{AB}} \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad L_{AB} — \text{отрезок } AB: A(1, 2), B(3, 6)$$

2. Показать, что данное выражение является полным дифференциалом функции $u(x, y)$. Найти функцию $u(x, y)$:

$$(ye^{xy} + y^2)dx + (xe^{xy} + 2xy)dy$$

3. Вычислить момент инерции относительно начала координат отрезка прямой, заключенного между точками $A(2, 0)$ и $B(0, 1)$, если линейная плотность в каждой его точке равна 1.

2 Решения задач

Задача 1. Вычислить данный криволинейный интеграл:

$$\int_{L_{AB}} \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad L_{AB} — отрезок AB: A(1, 2), B(3, 6)$$

Решение. Параметризуем L_{AB} :

$$L_{AB}: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t \end{cases}, \quad t \in [1, 3]$$

Подставим в интеграл:

$$\int_{L_{AB}} \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int_1^3 \frac{4tdt}{5t^2} = \frac{2}{5} \int_1^3 \frac{dt^2}{t^2} = \frac{2}{5} \ln t^2 \Big|_1^3 = \frac{4 \ln 3}{5}$$

Итого:

$$\boxed{\int_{L_{AB}} \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \frac{4 \ln 3}{5}}$$

Задача 2. Показать, что данное выражение является полным дифференциалом функции $u(x, y)$. Найти функцию $u(x, y)$:

$$(ye^{xy} + y^2)dx + (xe^{xy} + 2xy)dy$$

Решение. Проверим условие Грина:

$$\begin{cases} \frac{\partial(ye^{xy} + y^2)}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + 2y \\ \frac{\partial(xe^{xy} + 2xy)}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + 2y \end{cases} \implies \frac{\partial(ye^{xy} + y^2)}{\partial y} = \frac{\partial(xe^{xy} + 2xy)}{\partial x} \implies \\ \implies \exists u(x, y): du(x, y) = (ye^{xy} + y^2)dx + (xe^{xy} + 2xy)dy$$

Найдём функцию $u(x, y)$ из определения полного дифференциала:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = ye^{xy} + y^2 \implies u(x, y) = \int (ye^{xy} + y^2)dx = e^{xy} + xy^2 + C(y)$$

Найдём функцию $C(y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = xe^{xy} + 2xy \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = xe^{xy} + 2xy + C'(y) \end{cases} \implies C'(y) = 0 \implies C(y) = C \in \mathbb{R}$$

Итого:

$$\boxed{u(x, y) = e^{xy} + xy^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Задача 3. Вычислить момент инерции относительно начала координат отрезка прямой, заключенного между точками $A(2, 0)$ и $B(0, 1)$, если линейная плотность в каждой его точке равна 1.

Решение. ...