

ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ
И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Лабораторная работа №2

Построение конформных отображений

(по дисциплине «Теория функций комплексного переменного»)

Выполнил:

Лабин Макар Андреевич,
ТФКП 22.4, Р3231, 466449.

Проверил:

Поздняков Семён Сергеевич

и́тмо

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Постановка задач

В ходе лабораторной работы по варианту №15 будут выполнены следующие задачи:

1. Аналитически описать заданные множества (*множества на рисунке за-крашены штриховкой, а все граничные точки подразумеваются не при-надлежащими им*).
2. Воспользовавшись композицией классических преобразований, составить конформное отображение, которое переводит первую область во вторую.
3. Составить обратное отображение, переводящее второе множество в первое.
4. На любом удобном языке программирования написать программу, которая изобразит первое множество и все этапы его преобразования во второе. Достаточно наглядным будет взять набор точек множества, передающий его форму (*может понадобится сделать набор «более плот-ным» в какой-то части множества*).

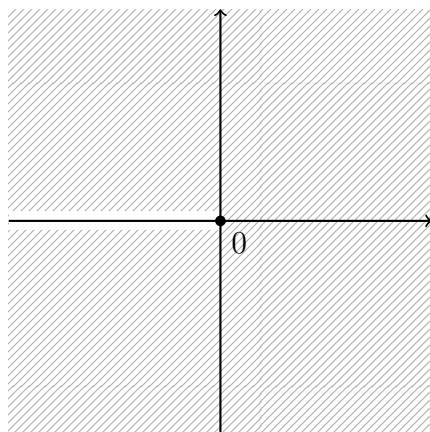


Рисунок 4

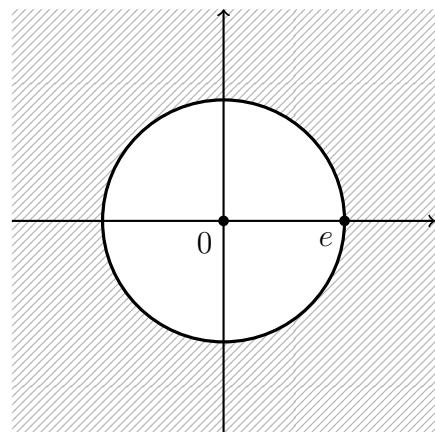
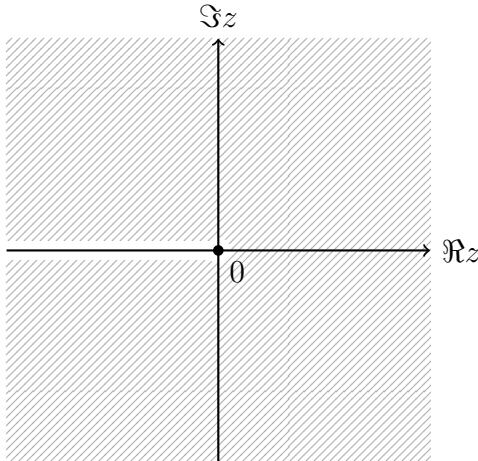


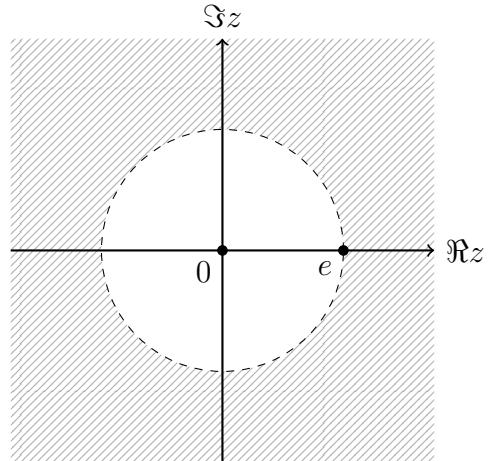
Рисунок 9

2 Аналитическое описание множеств

Даны изображения множеств P и Q на комплексной плоскости \mathbb{C} :



Множество $P' \subset \mathbb{C}$



Множество $Q' \subset \mathbb{C}$

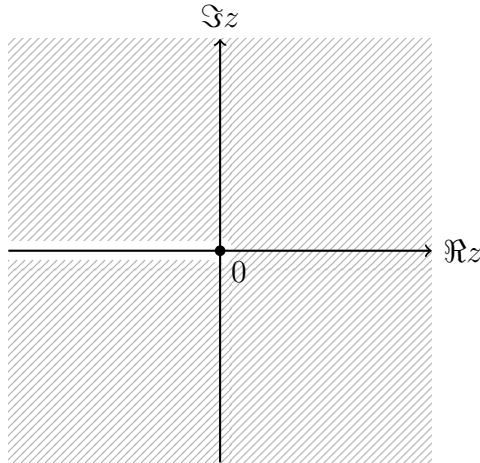
Видно, что множество P — комплексная плоскость с разрезом по действительному лучу $(-\infty, 0]$. Множество Q , в свою очередь, — внешняя часть комплексной окружности радиуса e :

$$P = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0 \vee \Im z \neq 0\} \quad Q = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > e\}$$

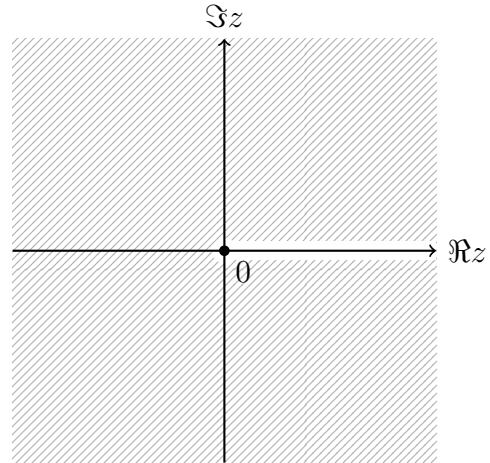
3 Конформные отображения множеств

Составим конформное отображение $\omega(z)$, переводящее множество P в Q :

1. Применим к P конформное отображение $\omega_1(z) = -z$:

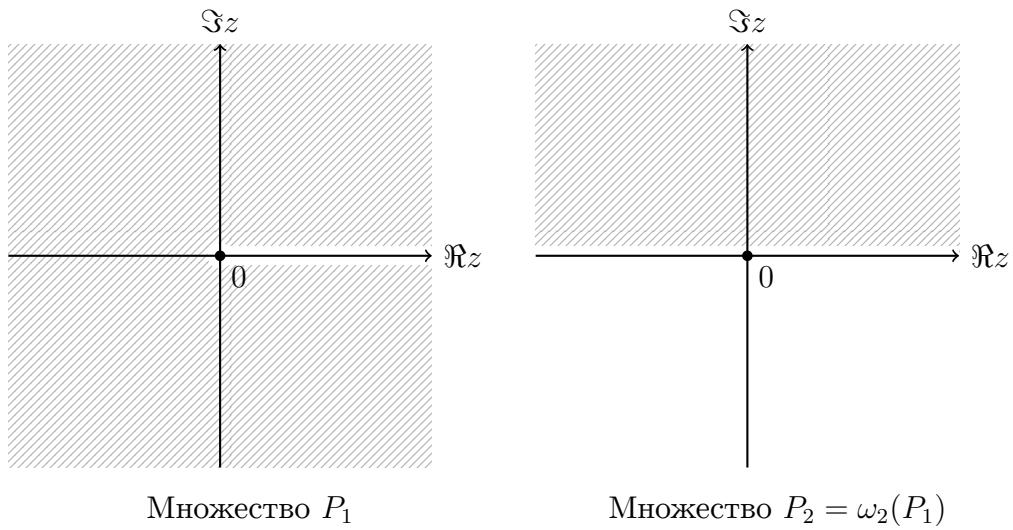


Множество P

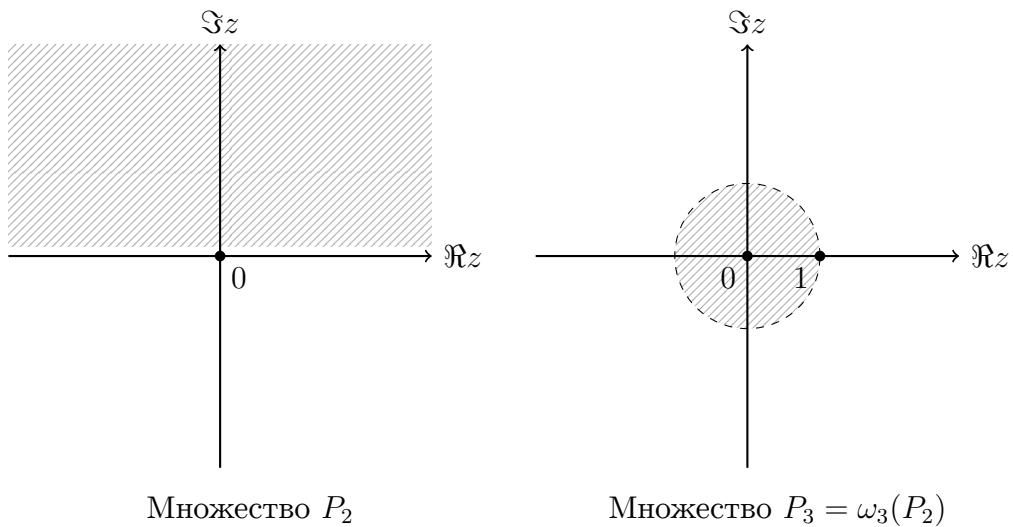


Множество $P_1 = \omega_1(P)$

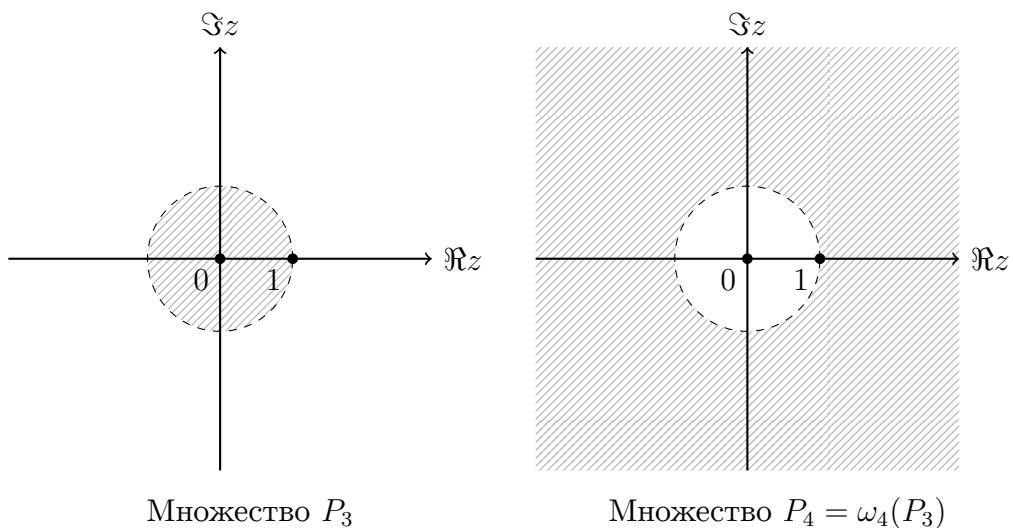
2. Применим к P_1 конформное отображение $\omega_2(z) = \sqrt{z}$:



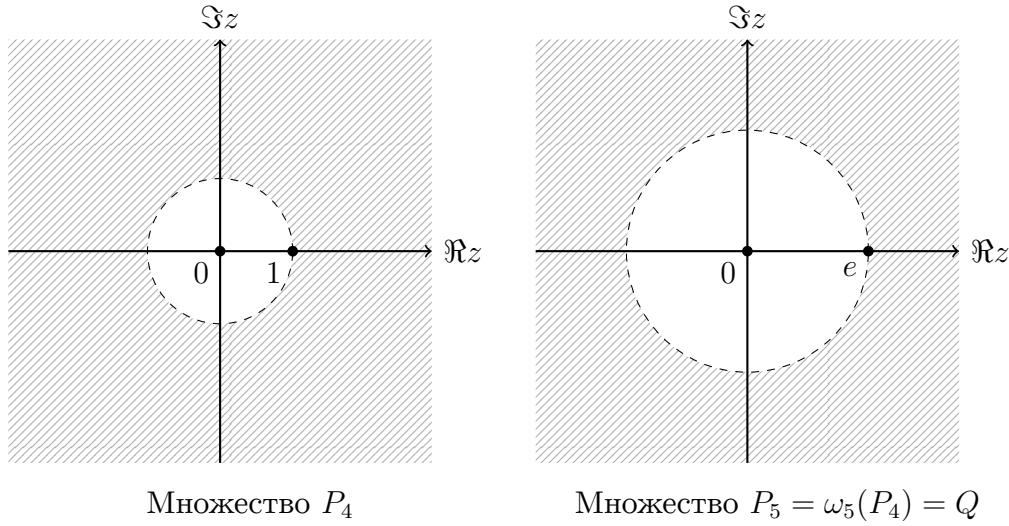
3. Применим к P_2 конформное отображение $\omega_3(z) = \frac{z-i}{z+i}$:



4. Применим к P_3 конформное отображение $\omega_4(z) = \frac{1}{z}$:



5. Применим к P_4 конформное отображение $\omega_5(z) = ez$:

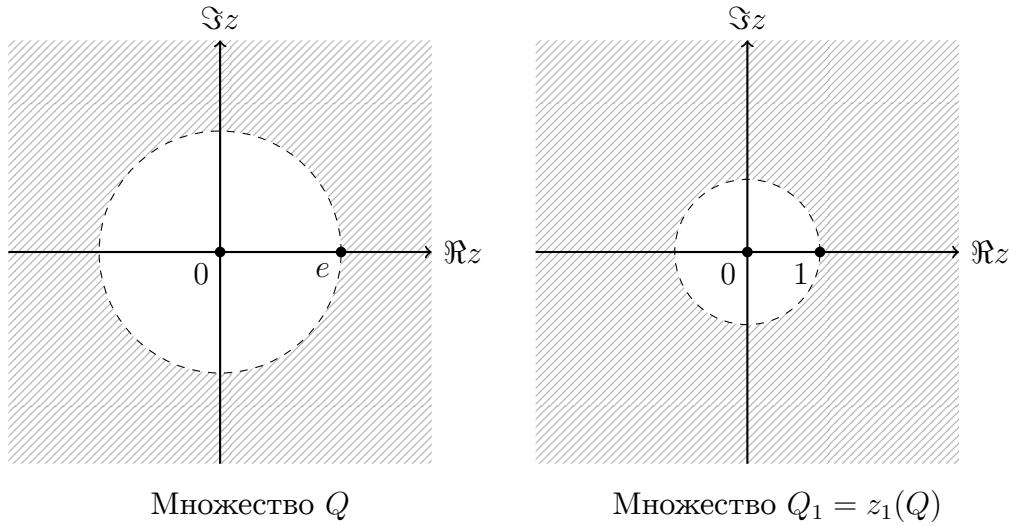


Итого $\omega(z)$ имеет вид:

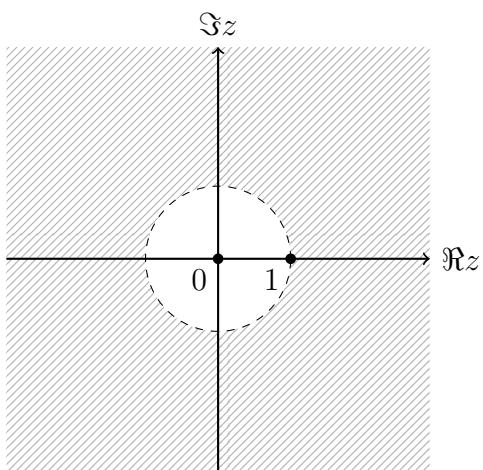
$$\omega = \omega_5 \circ \omega_4 \circ \omega_3 \circ \omega_2 \circ \omega_1 \implies \omega(z) = e \cdot \frac{\sqrt{-z} + i}{\sqrt{-z} - i}$$

Составим обратное конформное отображение $z(\omega)$, которое переводит множество Q в P :

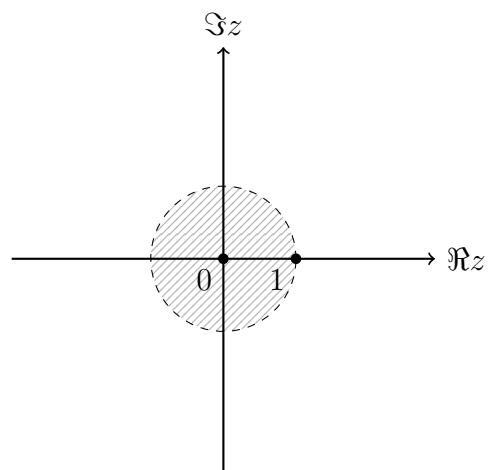
1. Применим к Q конформное отображение $z_1(\omega) = \frac{\omega}{e}$:



2. Применим к Q_1 конформное отображение $z_2(\omega) = \frac{1}{\omega}$:

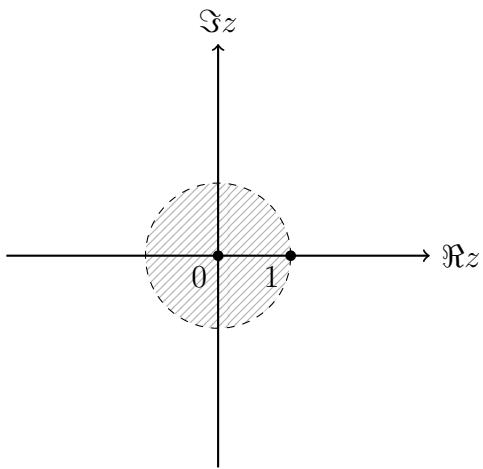


Множество Q_1

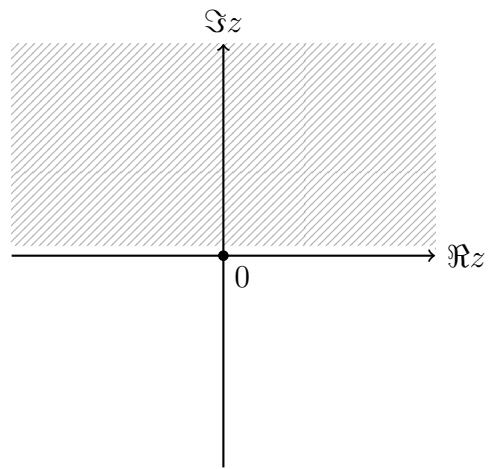


Множество $Q_2 = z_2(Q_1)$

3. Применим к Q_2 конформное отображение $z_3(\omega) = i \cdot \frac{1+\omega}{1-\omega}$:

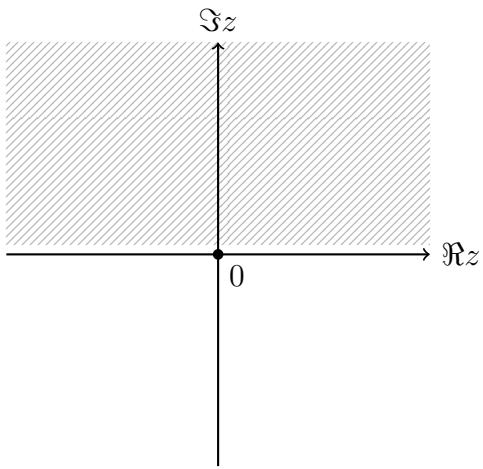


Множество Q_2

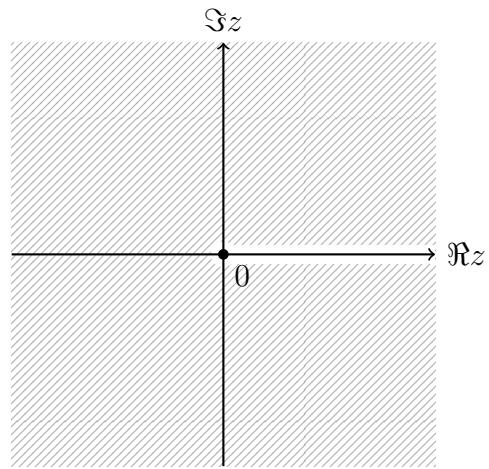


Множество $Q_3 = z_3(Q_2)$

4. Применим к Q_3 конформное отображение $z_4(\omega) = \omega^2$:

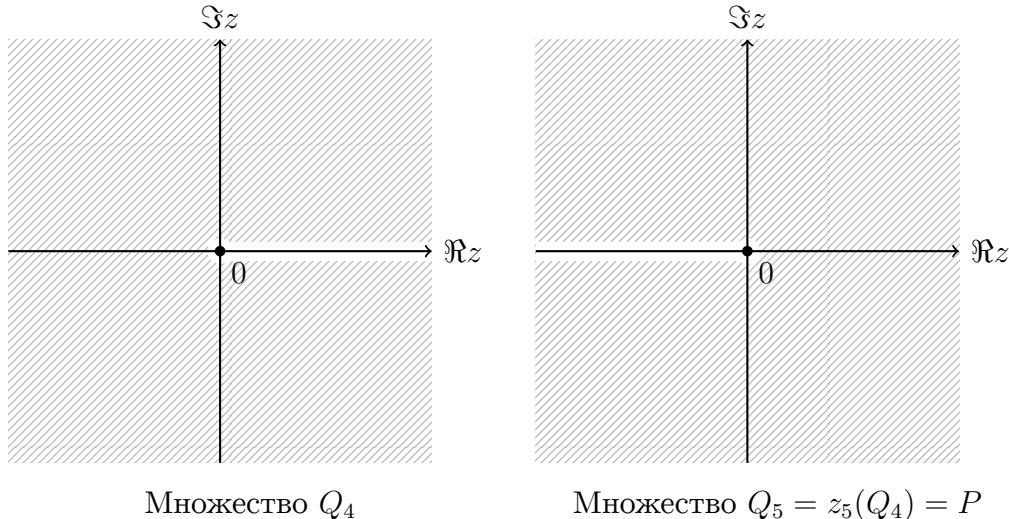


Множество Q_3



Множество $Q_4 = z_4(Q_3)$

5. Применим к Q_4 конформное отображение $z_5(\omega) = -\omega$:



Итого $z(\omega)$ имеет вид:

$$z = z_5 \circ z_4 \circ z_3 \circ z_2 \circ z_1 \implies z(\omega) = - \left(i \cdot \frac{1 + \frac{e}{\omega}}{1 - \frac{e}{\omega}} \right)^2$$

4 Скрипты для создания графики

Чтобы изобразить множество P и все его промежуточные образы, воспользуемся графическим пакетом *TikZ*. Для генерации необходимых файлов напишем скрипты на языке *Python*.

Для генерации точек, описывающих множество P , ограничим $|z| \leq 3$. Ещё для наглядности разделим комплексную плоскость на подмножества и окрасим их градиентами, которые меняются от близости к началу координат. Более того, используем логарифмическое масштабирование радиусов:

	$\operatorname{Arg} z$	Градиент
1.	$\left(-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right)$	
2.	$\left[-\frac{3\pi}{4}, 0\right)$	
3.	$\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$	
4.	$\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$	

Листинг 1: Скрипт `generate_dots.py`

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np

```

```

3 # Parameters for point generation
4 epsilon = 0.02 # Small number to exclude boundary values
5 density = 50 # Parameter affecting point density
6
7
8 def complex_positive(density):
9     """
10     Generates points in the sector (3pi/4, pi) of the complex
11     plane.
12     Points are distributed in logarithmic scale by radius.
13     """
14     angles_far = np.linspace(np.pi - np.pi / 4 + epsilon, np.pi -
15         epsilon, density // 9)
16     radius_far = np.exp(np.linspace(np.log(0.005), np.log(3),
17         density // 2))
18     r_grid, theta_grid = np.meshgrid(radius_far, angles_far)
19     z = r_grid * np.exp(1j * theta_grid)
20     points = z.flatten()
21     distances = np.abs(points)
22     colors = distances / np.max(distances) # Normalized distances
23         for coloring
24     return points, colors
25
26
27 def complex_negative(density):
28     """
29     Generates points in the sector (-pi, -3pi/4) of the complex
30     plane.
31     """
32     angles_center = np.linspace(-np.pi + epsilon, -np.pi + np.pi /
33         4 - epsilon, density // 9)
34     radius_center = np.exp(np.linspace(np.log(0.005), np.log(3),
35         density // 2))
36     r_grid, theta_grid = np.meshgrid(radius_center, angles_center)
37     z = r_grid * np.exp(1j * theta_grid)
38     points = z.flatten()
39     distances = np.abs(points)
40     colors = distances / np.max(distances)
41     return points, colors
42
43
44 def complex_far_positive(density):
45     """
46     Generates points in the sector [0, 3pi/4] of the complex plane
47     .
48     """
49     angles_center = np.linspace(0, np.pi - np.pi/4, density // 4)
50     radius_center = np.exp(np.linspace(np.log(0.005), np.log(3),
51         density // 2))
52     r_grid, theta_grid = np.meshgrid(radius_center, angles_center)
53     z = r_grid * np.exp(1j * theta_grid)
54     points = z.flatten()
55     distances = np.abs(points)

```

```

45     colors = distances / np.max(distances)
46     return points, colors
47
48 def complex_far_negative(density):
49     """
50     Generates points in the sector [-3pi/4, 0) of the complex
51     plane.
52     """
53     angles_center = np.linspace(-np.pi + np.pi/4, -epsilon,
54                                 density // 4)
55     radius_center = np.exp(np.linspace(np.log(0.005), np.log(3),
56                                      density // 2))
57     r_grid, theta_grid = np.meshgrid(radius_center, angles_center)
58     z = r_grid * np.exp(1j * theta_grid)
59     points = z.flatten()
60     distances = np.abs(points)
61     colors = distances / np.max(distances)
62     return points, colors
63
64 def get_P(plane):
65     """
66     Filters points: keeps only those with Re(z) > 0
67     or Im(z) != 0 (excludes non-positive real axis).
68     """
69     mask = np.logical_or(plane.real > 0, plane.imag != 0)
70     return plane[mask]
71
72 # Definition of mapping functions omega_1, ..., omega_5
73 def omega_1(z):
74     """omega_1(z) = -z (central symmetry about origin)"""
75     return -z
76
77 def omega_2(z):
78     """omega_2(z) = sqrt(z) (square root extraction)"""
79     r = np.abs(z)
80     theta = np.angle(z)
81     sqrt_r = np.sqrt(r)
82     theta_pos = np.mod(theta, 2*np.pi) # Bring angle to [0, 2*pi)
83     new_theta = theta_pos / 2
84     return sqrt_r * (np.cos(new_theta) + 1j * np.sin(new_theta))
85
86 def omega_3(z):
87     """omega_3(z) = (z - i)/(z + i) (fractional-linear
88      transformation)"""
89     return (z-1j)/(z+1j)
90
91 def omega_4(z):
92     """omega_4(z) = 1/z (inversion)"""
93     return 1/z
94
95 def omega_5(z):

```

```

92     """omega_5(z) = z * e (multiplication by Euler's number e)"""
93     return z * np.e
94
95 def get_all_Ps(complex_region):
96     """
97     Applies all five mappings sequentially to input set.
98     """
99     P = get_P(complex_region)
100    P1 = omega_1(P)
101    P2 = omega_2(P1)
102    P3 = omega_3(P2)
103    P4 = omega_4(P3)
104    P5 = omega_5(P4)
105    return [P, P1, P2, P3, P4, P5]
106
107 def scatter_regions(regions, axes, colors, cmap):
108     """
109     Displays 6 sets on 3x2 grid of plots.
110
111     Parameters:
112     regions: list of 6 arrays of complex numbers
113     axes: 3x2 matrix of axes
114     colors: array of values for colormap
115     cmap: name of colormap
116     """
117
118     if len(regions) < 6:
119         print("Error: lack of regions")
120         pass
121     for y in range(3):
122         for x in range(2):
123             axes[y, x].scatter(regions[y * 2 + x].real, regions[y * 2
124                                         + x].imag,
125                                 s=1, alpha=0.6, c=colors, cmap=cmap)
126
127 if __name__ == "__main__":
128     fig, ax = plt.subplots(3, 2)
129
130     # Generate and display points from four sectors with different
131     # colormaps
132     reg1, col1 = complex_far_positive(density)
133     scatter_regions(get_all_Ps(reg1), ax, col1, 'winter')
134
135     reg2, col2 = complex_far_negative(density)
136     scatter_regions(get_all_Ps(reg2), ax, col2, 'copper')
137
138     reg3, col3 = complex_positive(density)
139     scatter_regions(get_all_Ps(reg3), ax, col3, 'cool')
140
141     reg4, col4 = complex_negative(density)
142     scatter_regions(get_all_Ps(reg4), ax, col4, 'autumn')

```

```

141 # Save data from each plot to separate file
142 for i in range(6):
143     row = i // 2
144     col = i % 2
145
146     with open(f'step_{i+1}_data.txt', 'w') as f:
147         # Get all point collections from the plot
148         for collection_idx, collection in enumerate(ax[row, col].
149             collections):
150             data = collection.get_offsets() # Coordinates (x, y)
151             colors = collection.get_array() # Values for colormap
152             cmap_name = collection.get_cmap().name # Name of
153             colormap
154
155             # Write data to file: x, y, color value, colormap name
156             for j in range(len(data)):
157                 x, y = data[j]
158                 color_val = colors[j] if j < len(colors) else 0.0
159                 f.write(f'{x:.6f} {y:.6f} {color_val:.6f} {cmap_name}\n')
160
161     print(f"Step {i+1}: data saved")

```

Для транспиляции окрашенных наборов точек в графики *TikZ* воспользуемся скриптом:

Листинг 2: Скрипт tikzify.py

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib as plt
3 import os
4
5 def get_tikz_color_with_alpha(color_val, colormap, alpha=1.0):
6     """
7         Convert matplotlib colormap value to TikZ color with alpha
8             transparency.
9
10    Parameters:
11        color_val: normalized color value [0, 1]
12        colormap: name of matplotlib colormap
13        alpha: opacity value [0, 1]
14
15    """
16
17    cmap = plt.colormaps[colormap]
18    rgba = cmap(color_val)
19
20
21    # Convert rgba values (0-1) to rgb (0-255) for TikZ
22    r = int(rgba[0] * 255)
23    g = int(rgba[1] * 255)
24    b = int(rgba[2] * 255)
25    a = rgba[3] * alpha # Use alpha from colormap if available
26
27
28    return f"{{rgb,255:red,{r}; green,{g}; blue,{b}}}, opacity={a
29           :.2f}"

```

```

24
25 def convert_to_tikz(input_file, output_file, step_num):
26     """
27         Convert data file with point coordinates to TikZ code.
28
29     Parameters:
30         input_file: text file with columns: x, y, color_value,
31             colormap_name
32         output_file: output .tex file with TikZ code
33         step_num: ordinal numeral of current step
34     """
35
36     data = np.loadtxt(input_file, dtype=object)
37
38     # Validate data format
39     if data.shape[1] != 4:
40         raise ValueError("File must have 4 columns: x, y, color,
41                         colormap")
42
43     # Extract and convert data columns
44     points = data[:, :2].astype(float)
45     colors = data[:, 2].astype(float)
46     cmaps = data[:, 3]
47
48     # Normalize color values to [0, 1] range
49     colors_min = colors.min()
50     colors_max = colors.max()
51     colors_norm = (colors - colors_min) / (colors_max - colors_min
52         )
53
54     # Initialize TikZ code with axes and origin point
55     tikz_code = r"""\begin{tikzpicture}[scale=0.8]
56
57 \draw[->, thick] (-3.5,0) -- (3.5,0) node[right] {$\Re z$};
58 \draw[->, thick] (0,-3.5) -- (0,3.5) node[above] {$\Im z$};
59
60 \fill (0,0) circle (2.5pt) node[below right] {$0$};
61 """
62
63     match step_num:
64         case '4' | '5':
65             tikz_code += "\fill (1.2,0) circle (2.5pt) node[below
66                 left] {$1$};\n"
67         case '6':
68             tikz_code += f"\fill ({np.e},0) circle (2.5pt) node[below
69                 left] {{$e$}};\n"
70         case _:
71             tikz_code += "\n"
72
73     count = 0
74     for (x, y), color_val, cmap in zip(points, colors_norm, cmaps)
75     :
76         # Skip points outside the plotting area

```

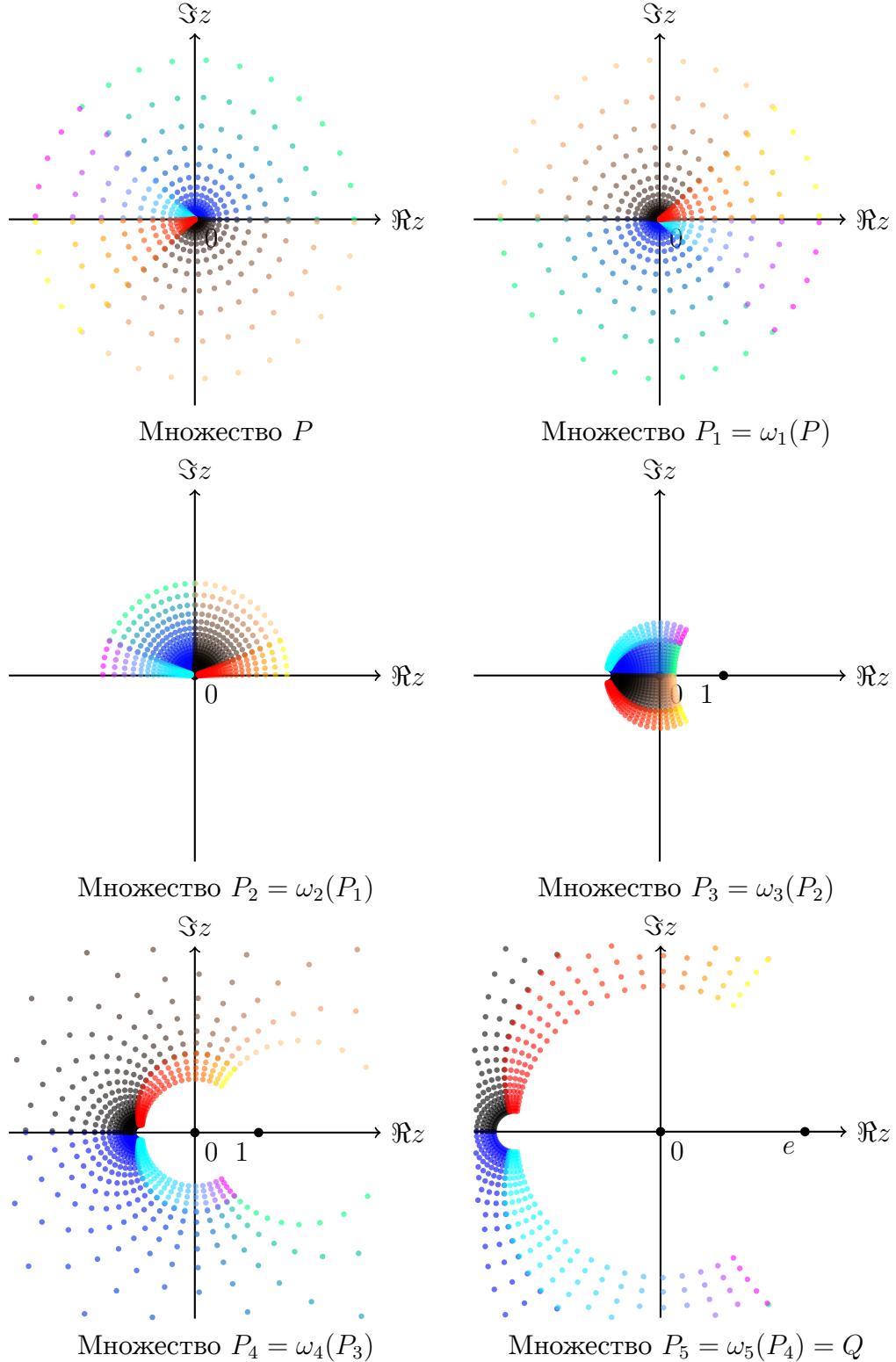
```

69     if abs(x) > 3.5 or abs(y) > 3.5:
70         continue
71
72     count += 1
73     tikz_color = get_tikz_color_with_alpha(color_val, cmap,
74                                             alpha=0.6)
74     tikz_code += f"\fill[color={tikz_color}] ({x:.4f},{y:.4f}
75     }) circle (1.5pt);\n"
76
76 tikz_code += "\n\\end{tikzpicture}"
77
78 with open(output_file, 'w') as f:
79     f.write(tikz_code)
80
81 print(f"Saved: {output_file} ({count} points)")
82
83 if __name__ == "__main__":
84     # Find all data files starting with 'step_' and ending with '_data.txt'
85     data_files = [f for f in os.listdir() if f.startswith('step_')
86                   and f.endswith('_data.txt')]
86
87 for data_file in data_files:
88     # Extract step number from filename (e.g., 'step_1_data.txt'
89     # -> '1')
90     step_num = data_file.split('_')[1]
90     output_file = f'step_{step_num}_tikz.tex'
91
92     convert_to_tikz(data_file, output_file, step_num)

```

5 Результаты отображений множества

В результате работы вышеуказанных скриптов были получены следующие множества:



6 Заключение

В ходе выполнения лабораторной работы была исследована задача конформного отображения заданных областей комплексной плоскости:

1. Было дано аналитическое описание исходного множества P (*комплексная плоскость с разрезом по действительному лучу $(-\infty, 0]$*) и целевого множества Q (*внешность окружности радиуса e*).
2. Построено конформное отображение

$$\omega(z) = e \cdot \frac{\sqrt{-z} + i}{\sqrt{-z} - i},$$

представляющее собой композицию пяти элементарных преобразований:

- центральная симметрия,
- взятие квадратного корня,
- дробно-линейное преобразование,
- инверсия,
- растяжение на константу e .

3. Построено обратное отображение

$$z(\omega) = - \left(i \cdot \frac{1 + \frac{e}{\omega}}{1 - \frac{e}{\omega}} \right)^2,$$

переводящее множество Q обратно в P .

4. Реализован набор скриптов на Python, включающий:

- генерацию точек исходного множества с учётом его структуры и окраской в зависимости от аргумента и модуля,
- последовательное применение всех пяти отображений,
- визуализацию каждого этапа преобразования,
- экспорт данных в форматы, пригодные для построения графиков с помощью TikZ.

5. Получены наглядные графики всех промежуточных образов, подтверждающие корректность построенных отображений и сохранение конформности на каждом шаге.

Работа демонстрирует практическое применение теории конформных отображений для преобразования областей комплексной плоскости, а также возможность автоматизации процесса визуализации с помощью скриптов.