ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
Факультет программной инженерии
и компьютерной техники

Домашняя работа №3-4

Теория поля. Поверхностный интеграл.

(по дисциплине «Дополнительные главы
математического анализа»)

Выполнил:

Лабин Макар Андреевич,
ДГМА 28.3, P3231, 466449.

Проверил:

Богачёв Владимир Александрович

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Список задач

В рамках выполнения домашней работы *по варианту №2* необходимо предоставить решения следующих задач:

1. Дана функция $u(M) = u(x, y, z)$ и точки M_1 и M_2. Вычислить $\operatorname{grad} u(M_1)$, а также производную функции $u(M)$ в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:
$$u(M) = 5xy^3z^3, \quad M_1(2, 1, -1), \quad M_2(4, -3, 0)$$

2. Вычислить поверхностный интеграл второго рода:
$$\iint_S z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad S\colon \text{внешняя сторона поверхности эллипсоида } x^2+y^2+2z^2 = 2$$

3. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью ρ и координатными плоскостями, двумя способами: использовав определение потока и с помощью формулы Остроградского-Гаусса:
$$\vec{a}(M) = (3x-1)\vec{i} + (y - x + z)\vec{j} + 4z\vec{k}, \quad \rho\colon 2x - y - 2z = 2$$

4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $\rho\colon Ax+By+Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости двумя способами: используя определение циркуляции; с помощью формулы Стокса:
$$\vec{a}(M) = (x+z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x-y)\vec{k}, \quad \rho\colon 3x + 2y + z = 6$$

5. Найти величину и направление наибольшего изменения функции $u(M) = u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:
$$u(M) = x^2yz, \quad M_0(2, 0, 2)$$

2 Решения задач

Задача 1. *Дана функция* $u(M) = u(x, y, z)$ *и точки* M_1 *и* M_2. *Вычислить* $grad\, u(M_1)$, *а также производную функции* $u(M)$ *в точке* M_1 *по направлению вектора* $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$u(M) = 5xy^3z^3, \quad M_1(2, 1, -1), \quad M_2(4, -3, 0)$$

Решение. ...

Задача 2. *Вычислить поверхностный интеграл второго рода:*

$$\iint_S z^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y, \quad S\colon \text{внешняя сторона поверхности эллипсоида } x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$$

Решение. ...

Задача 3. *Вычислить поток векторного поля* $\vec{a}(M)$ *через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью* ρ *и координатными плоскостями, двумя способами: использовав определение потока и с помощью формулы Остроградского-Гаусса:*

$$\vec{a}(M) = (3x - 1)\vec{i} + (y - x + z)\vec{j} + 4z\vec{k}, \quad \rho\colon 2x - y - 2z = 2$$

Решение. ...

Задача 4. *Вычислить циркуляцию векторного поля* $\vec{a}(M)$ *по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости* $\rho\colon Ax + By + Cz = D$ *с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора* $\vec{n} = (A, B, C)$ *этой плоскости двумя способами: используя определение циркуляции; с помощью формулы Стокса:*

$$\vec{a}(M) = (x + z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x - y)\vec{k}, \quad \rho\colon 3x + 2y + z = 6$$

Решение. ...

Задача 5. *Найти величину и направление наибольшего изменения функции* $u(M) = u(x, y, z)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$u(M) = x^2yz, \quad M_0(2, 0, 2)$$

Решение. ...