

ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»  
ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ  
И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

## Расчётно-графическая работа №2

(по дисциплине «Дополнительные главы  
математического анализа»)

**Выполнил:**

Лабин Макар Андреевич,  
ДГМА 28.3, Р3231, 466449.

**Проверил:**

Богачёв Владимир Александрович

**и́тмо**

г. Санкт-Петербург, Россия  
2025

# 1 Список задач

В рамках выполнения расчёто-графической работы *по варианту №10* необходимо предоставить решения следующих задач:

1. Плоская область  $D$  ограничена заданными линиями:

$$y = \sqrt[3]{x}, \quad x = -\sqrt{y+2}, \quad y = 3x - 2$$

- (a) Сделайте схематический рисунок области  $D$ .
  - (b) С помощью двойного интеграла найдите площадь области  $D$ .
2. Тело  $T$  ограничено заданными поверхностями:

$$z = 4 - x^2 - y^2, \quad 9z = -5(x^2 + y^2), \quad y = 0 \quad \text{при } y \leq 0$$

- (a) Сделайте схематический рисунок тела  $T$ .
  - (b) С помощью тройного интеграла найдите объём тела  $T$ , перейдя к цилиндрическим или сферическим координатам.
3. С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу  $M$  дуги плоской материальной кривой, заданной уравнениями:

$$(a) y = \frac{1}{x}, \quad \sqrt[4]{3} \leq x \leq \sqrt[4]{8}, \quad \rho(x, y) = \frac{6x^3}{y^2}$$

$$(b) \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi, \quad \rho(x, y) = 1$$

4. С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу  $M$  дуги пространственной материальной кривой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t + 1 \end{cases}, \quad 6 \leq t \leq 20, \quad \rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - x^2}}$$

5. Дано векторное поле  $\vec{a}$  и плоскость  $\sigma$ , пересекающая координатные плоскости по замкнутой ломаной  $KLMK$ , где  $K, L, M$  — точки пересечения плоскости  $\sigma$  координатными осями  $Ox, Oy, Oz$  соответственно:

$$\vec{a} = (3z - x)\vec{i} + (z - y)\vec{j}, \quad \sigma: x - 2y - z = -4$$

- (a) Найдите поток  $Q$  векторного поля  $\vec{a}$  через часть  $S$  плоскости  $\sigma$ , вырезанной координатными плоскостями, в сторону нормали  $\vec{n}$ , направленной от начала координат  $O(0, 0, 0)$ .
- (b) С помощью теоремы Остроградского-Гаусса найдите поток  $Q$  векторного поля  $\vec{a}$  через полную поверхность тетраэдра  $OLMK$  в сторону внешней нормали.
- (c) Найдите циркуляцию  $C$  векторного поля  $\vec{a}$  по контуру  $KLMK$ , образованному пересечением плоскости  $\sigma$  с координатными плоскостями.

6. Дано векторное поле  $\vec{a}(M)$ :

$$\vec{a} = (1 + e^y)\vec{i} + (xe^y - e^z - 1)\vec{j} + (2 - ye^z)\vec{k}$$

- (а) Проверьте, является ли векторное поле соленоидальным или потенциальным.
- (б) Если поле потенциально, найдите его потенциал.

## 2 Решения задач

**Задача 1.** Плоская область  $D$  ограничена заданными линиями:

$$y = \sqrt[3]{x}, \quad x = -\sqrt{y+2}, \quad y = 3x - 2$$

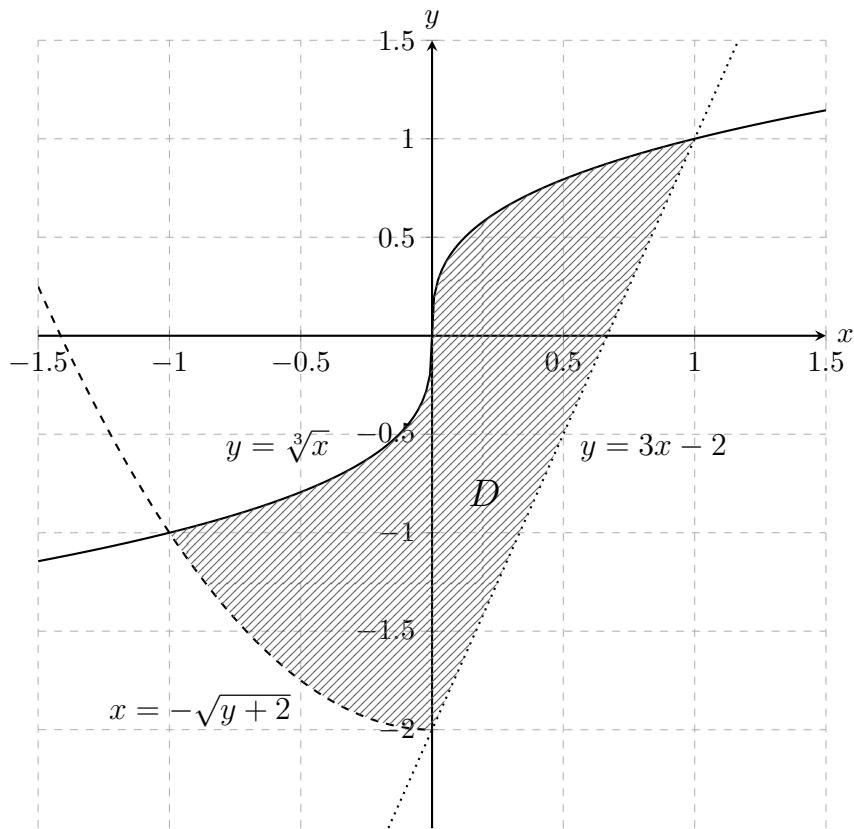
- (a) Сделайте схематический рисунок области  $D$ .
- (b) С помощью двойного интеграла найдите площадь области  $D$ .

**Решение.** График кривой  $y = \sqrt[3]{x}$  — кубическая парабола с инверсией относительно прямой  $y = x$ .

График кривой  $x = -\sqrt{y+2}$  — левая ветвь параболы с центром в  $(0, 2)$ .

График кривой  $y = 3x - 2$  — прямая, проходящая через т.  $(0, -2)$  и  $(1, 1)$ .

Имеем рисунок области  $D$ , ограниченной заданными графиками:



Найдём площадь области  $D$  с помощью двойного интеграла по теореме Фубини:

$$\begin{aligned} S_D &= \iint_D d\Omega = \int_{-1}^0 dx \int_{x^2-2}^{\sqrt[3]{x}} dy + \int_0^1 dx \int_{3x-2}^{\sqrt[3]{x}} dy = \\ &= \int_{-1}^0 (\sqrt[3]{x} - x^2 + 2) dx + \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - 3x + 2) dx = \\ &= \left( \frac{3}{4}(\sqrt[3]{x})^4 - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{3}{4}(\sqrt[3]{x})^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + 2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

Ответ:

$$S_D = \frac{13}{6}$$

**Задача 2.** Тело  $T$  ограничено заданными поверхностями:

$$z = 4 - x^2 - y^2, \quad 9z = -5(x^2 + y^2), \quad y = 0 \quad \text{при } y \leq 0$$

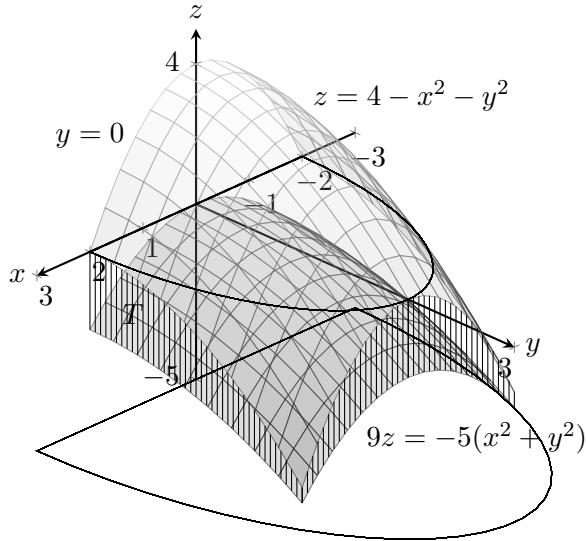
- (a) Сделайте схематический рисунок тела  $T$ .
- (b) С помощью тройного интеграла найдите объём тела  $T$ , переходя к цилиндрическим или сферическим координатам.

**Решение.** График поверхности  $z = 4 - x^2 - y^2$  — эллиптический параболоид с вершиной в точке  $(0, 0, 4)$ , направленный вниз.

График поверхности  $9z = -5(x^2 + y^2)$  — эллиптический параболоид с вершиной в точке  $(0, 0, 0)$ , направленный вниз с сжатием в  $\frac{9}{5}$  раз.

График поверхности  $y = 0$  — плоскость  $xOz$ .

Имеем рисунок тела  $T$ , ограниченного заданными плоскостями (тело показано с дополнительными сечениями для лучшего понимания его формы):



Перейдём к цилиндрическим координатам:

$$\mathcal{A}: \begin{cases} x(r, \varphi, z) = r \cos \varphi \\ y(r, \varphi, z) = r \sin \varphi \\ z(r, \varphi, z) = z \end{cases} \implies |J_{\mathcal{A}}| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos \varphi \cos \varphi + r \sin \varphi \sin \varphi = r$$

Найдём объём тела  $T$  с помощью тройного интеграла по теореме Фубини:

$$\begin{aligned} V_T &= \iiint_T dV = \int_{-5}^0 dz \int_{\sqrt{-\frac{9}{5}z}}^{\sqrt{4-z}} r dr \int_0^\pi d\varphi + \int_0^4 dz \int_0^{\sqrt{4-z}} r dr \int_0^\pi d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \int_{-5}^0 r^2 \left| \sqrt{\frac{4-z}{-\frac{9}{5}z}} dz + \int_0^4 r^2 \left| \sqrt{\frac{4-z}{0}} dz \right. \right. \right) = \frac{\pi}{2} \left( \int_{-5}^0 \left( 4 + \frac{4}{5}z \right) dz + \int_0^4 (4-z) dz \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \left( 4z + \frac{2}{5}z^2 \right) \Big|_{-5}^0 + \left( 4z - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^4 \right) = \frac{\pi}{2}(10+8) = 9\pi \end{aligned}$$

Итого:

$$V_T = 9\pi$$

**Задача 3.** С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу  $M$  дуги плоской материальной кривой, заданной уравнениями:

$$(a) \quad y = \frac{1}{x}, \quad \sqrt[4]{3} \leq x \leq \sqrt[4]{8}, \quad \rho(x, y) = \frac{6x^3}{y^2}$$

$$(b) \quad \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi, \quad \rho(x, y) = 1$$

**Решение.** Параметризуем кривую  $L_a$ :

$$L_a: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{1}{t} \end{cases}, \quad t \in [\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{8}]$$

Рассчитаем  $dl$ :

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \sqrt{1 + \frac{1}{t^4}} dt$$

Найдём массу  $M_a$  дуги кривой  $L_a$ :

$$\begin{aligned} M_a &= \int_{L_a} \rho(x, y) dl = 6 \int_{\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{8}} t^3 \cdot t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^4}} dt = 6 \int_{\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{1+t^4} \cdot t^3 dt = \\ &= [d(t^4 + 1) = 4t^3 dt] = \frac{3}{2} \int_{\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{1+t^4} d(1+t^4) = (1+t^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_{\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{8}} = \\ &= 9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} = 27 - 8 = 19 \end{aligned}$$

Итого:

$$M_a = 19$$

Рассчитаем  $dl$  для кривой  $L_b$ :

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \sqrt{4(1 - \cos t)^2 + 4 \sin^2 t} dt = \sqrt{16 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 4 \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt$$

Найдём массу  $M_b$  дуги кривой  $L_b$ :

$$M_b = \int_{L_b} \rho(x, y) dl = 4 \int_0^\pi \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = -8 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^\pi = -8 \cdot (-1) = 8$$

Итого:

$$M_b = 8$$

**Задача 4.** С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу  $M$  дуги пространственной материальной кривой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t + 1 \end{cases}, \quad 6 \leq t \leq 20, \quad \rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - x^2}}$$

**Решение.** Найдём  $dl$ :

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt = \sqrt{4 + 1 + 4} dt = 3 dt$$

Найдём массу  $M$  дуги пространственной кривой  $L$ :

$$\begin{aligned} M &= \int_L \rho(x, y, z) dl = 3 \int_6^{20} \frac{dt}{\sqrt{(2t+1)^2 - 4t^2}} = 3 \int_6^{20} \frac{dt}{\sqrt{4t+1}} = \\ &= [d(4t+1) = 4dt] = \frac{3}{4} \int_6^{20} \frac{d(4t+1)}{\sqrt{4t+1}} = \frac{3}{2} \sqrt{4t+1} \Big|_6^{20} = \\ &= \frac{3}{2}(9 - 5) = 6 \end{aligned}$$

Итого:

$$M = 6$$

**Задача 5.** Дано векторное поле  $\vec{a}$  и плоскость  $\sigma$ , пересекающая координатные плоскости по замкнутой ломаной  $KLMK$ , где  $K, L, M$  — точки пересечения плоскости  $\sigma$  координатными осями  $Ox, Oy, Oz$  соответственно:

$$\vec{a} = (3z - x)\vec{i} + (z - y)\vec{j}, \quad \sigma: x - 2y - z = -4$$

- (a) Найдите поток  $Q$  векторного поля  $\vec{a}$  через часть  $S$  плоскости  $\sigma$ , вырезанной координатными плоскостями, в сторону нормали  $\vec{n}$ , направленной от начала координат  $O(0, 0, 0)$ .
- (b) С помощью теоремы Остроградского-Гаусса найдите поток  $Q$  векторного поля  $\vec{a}$  через полную поверхность тетраэдра  $OLMK$  в сторону внешней нормали.
- (c) Найдите циркуляцию  $C$  векторного поля  $\vec{a}$  по контуру  $KLMK$ , образованному пересечением плоскости  $\sigma$  с координатными плоскостями.

**Решение.** ...

**Задача 6.** Дано векторное поле  $\vec{a}(M)$ :

$$\vec{a} = (1 + e^y)\vec{i} + (xe^y - e^z - 1)\vec{j} + (2 - ye^z)\vec{k}$$

- (a) Проверьте, является ли векторное поле соленоидальным или потенциальным.
- (b) Если поле потенциально, найдите его потенциал.

**Решение.** ...