

ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ
И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Домашняя работа №3-4

Теория поля. Поверхностный интеграл.

(по дисциплине «Дополнительные главы
математического анализа»)

Выполнил:

Лабин Макар Андреевич,
ДГМА 28.3, Р3231, 466449.

Проверил:

Богачёв Владимир Александрович

ИТМО

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Список задач

В рамках выполнения домашней работы по варианту №2 необходимо предоставить решения следующих задач:

1. Дана функция $u(M) = u(x, y, z)$ и точки M_1 и M_2 . Вычислить $\text{grad } u(M_1)$, а также производную функции $u(M)$ в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$:

$$u(M) = 5xy^3z^3, \quad M_1(2, 1, -1), \quad M_2(4, -3, 0)$$

2. Вычислить поверхностный интеграл второго рода:

$$\iint_S z^2 dx dy, \quad S: \text{внешняя сторона поверхности эллипсоида } x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$$

3. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью ρ и координатными плоскостями, двумя способами: используя определение потока и с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\vec{a}(M) = (3x - 1)\vec{i} + (y - x + z)\vec{j} + 4z\vec{k}, \quad \rho: 2x - y - 2z = 2$$

4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $\rho: Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости двумя способами: используя определение циркуляции; с помощью формулы Стокса:

$$\vec{a}(M) = (x + z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x - y)\vec{k}, \quad \rho: 3x + 2y + z = 6$$

5. Найти величину и направление наибольшего изменения функции $u(M) = u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$u(M) = x^2 y z, \quad M_0(2, 0, 2)$$

2 Решения задач

Задача 1. Дана функция $u(M) = u(x, y, z)$ и точки M_1 и M_2 . Вычислить $\text{grad } u(M_1)$, а также производную функции $u(M)$ в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$:

$$u(M) = 5xy^3z^3, \quad M_1(2, 1, -1), \quad M_2(4, -3, 0)$$

Решение. По определению градиента функции $u(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \text{grad } u(x, y, z) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = (5y^3z^3, 15xy^2z^3, 15xy^3z^2) \implies \\ &\implies \text{grad } u(2, 1, -1) = (-5, -30, 30) \end{aligned}$$

Определим нормированный вектор γ :

$$\gamma = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{|\overrightarrow{M_1 M_2}|} = \frac{(4 - 2, -3 - 1, 0 - (-1))}{\sqrt{4 + 16 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2, -4, 1)$$

По теореме связи производной функции u по направлению $\overrightarrow{M_1 M_2}$ с градиентом:

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{M_1 M_2}} = \frac{1}{\sqrt{21}} \text{grad } u(2, 1, -1) \cdot (2, -4, 1) = \frac{1}{\sqrt{21}}(-5 \cdot 2 - 30 \cdot (-4) + 30 \cdot 1) = \frac{140}{\sqrt{21}}$$

Итого:

$$\text{grad } u(2, 1, -1) = (-5, -30, 30), \quad \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{M_1 M_2}} = \frac{140}{\sqrt{21}}$$

Задача 2. Вычислить поверхностный интеграл второго рода:

$$\iint_S z^2 dx dy, \quad S: \text{внешняя сторона поверхности эллипсоида } x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$$

Решение. По аддитивности поверхностного интеграла:

$$S = S_{\text{верх}} + S_{\text{низ}} \implies \iint_S z^2 dx dy = \iint_{S_{\text{верх}}} z^2 dx dy + \iint_{S_{\text{низ}}} z^2 dx dy$$

Параметризуем поверхность $S_{\text{верх}}$:

$$S_{\text{верх}}: \begin{cases} x(\rho, \varphi) = \sqrt{2}\rho \cos \varphi \\ y(\rho, \varphi) = \sqrt{2}\rho \sin \varphi, \quad \rho \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi] \\ z(\rho, \varphi) = \sqrt{1 - \rho^2} \end{cases}$$

Параметризуем поверхность $S_{\text{низ}}$:

$$S_{\text{низ}}: \begin{cases} x(\rho, \varphi) = \sqrt{2}\rho \cos \varphi \\ y(\rho, \varphi) = \sqrt{2}\rho \sin \varphi, \quad \rho \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi] \\ z(\rho, \varphi) = -\sqrt{1 - \rho^2} \end{cases}$$

Найдём направляющие косинусы для обоих случаев:

$$\cos \gamma_{\text{верх}} = \cos \gamma_{\text{низ}} = \cos \gamma = \begin{vmatrix} x'_\rho & y'_\rho \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} \cos \varphi & \sqrt{2} \sin \varphi \\ -\sqrt{2} \rho \sin \varphi & \sqrt{2} \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = 2\rho$$

Перейдём к кратным интегралам по области D :

$$\iint_{S_{\text{верх}}} z^2 dx dy + \iint_{S_{\text{низ}}} z^2 dx dy = 2 \iint_D (\sqrt{1-\rho^2} - \sqrt{1-\rho^2}) \rho d\rho d\varphi = 0$$

Итого:

$$\boxed{\iint_S z^2 dx dy = 0}$$

Задача 3. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью ρ и координатными плоскостями, двумя способами: используя определение потока и с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\vec{a}(M) = (3x-1)\vec{i} + (y-x+z)\vec{j} + 4z\vec{k}, \quad \rho: 2x - y - 2z = 2$$

Решение. Определим вершины пирамиды $G = OABC$:

$$\rho: x - \frac{y}{2} - z = 1 \implies O(0, 0, 0), \quad A(1, 0, 0), \quad B(0, -2, 0), \quad C(0, 0, -1)$$

По аддитивности поверхностного интеграла:

$$\Phi = \Phi_{OAB} + \Phi_{OAC} + \Phi_{OBC} + \Phi_{ABC}$$

Вычислим нормированные нормальные векторы к внешним граням пирамиды G :

$$OAB \subset z = 0 \implies \vec{n}_{OAB} = \frac{1}{\sqrt{0+0+1^2}}(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$$

$$OAC \subset y = 0 \implies \vec{n}_{OAC} = \frac{1}{\sqrt{0+1^2+0}}(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$$

$$OBC \subset x = 0 \implies \vec{n}_{OBC} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+0+0}}(-1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$$

$$ABC \subset \rho \implies \vec{n}_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}(2, -1, -2) = \frac{1}{3}(2, -1, -2)$$

Вычислим Φ_{OAB} по определению:

$$z = 0 \implies \Phi_{OAB} = \iint_{OAB} \vec{a} \cdot \vec{n}_{OAB} d\sigma = 4 \iint_{OAB} 0 dx dy = 0$$

Вычислим Φ_{OAC} по определению:

$$\begin{aligned} y = 0 \implies \Phi_{OAC} &= \iint_{OAC} \vec{a} \cdot \vec{n}_{OAC} d\sigma = \iint_{OAC} (z-x) dx dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (z-x) dz = \int_0^1 \left(x(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(x^2 - x - \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 1) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Вычислим Φ_{OBC} по определению:

$$x = 0 \implies \Phi_{OBC} = \iint_{OBC} \vec{a} \cdot \vec{n}_{OBC} d\sigma = \iint_{OBC} 1 dy dz = S_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$$

Вычислим Φ_{ABC} по определению^[1]:

$$\begin{aligned} \Phi_{ABC} &= \iint_{ABC} \vec{a} \cdot \vec{n}_{ABC} d\sigma = \\ &= \frac{1}{3} \iint_{ABC} 2(3x-1) \frac{dydz}{\cos \alpha} - (y-x+z) \frac{dxdz}{\cos \beta} - 2 \cdot 4z \frac{dxdy}{\cos \gamma} = \\ &= \iint_{ABC} (4+6z+3y) \frac{dydz}{2} - (x-z-2) dxdz - 2 \cdot (4x-2y-4) \frac{dxdy}{2} \end{aligned}$$

Посчитаем удвоенный первый интеграл:

$$\begin{aligned} \iint_{ABC} (4+6z+3y) dy dz &= \int_{-2}^0 dy \int_{-\frac{1}{2}y-1}^0 (4+6z+3y) dz = \\ &= \int_{-2}^0 (4z+3z^2+3zy) \Big|_{-\frac{1}{2}y-1}^0 dy = - \int_{-2}^0 \left((4+3y) \left(-\frac{1}{2}y-1 \right) + 3 \left(\frac{1}{2}y+1 \right)^2 \right) dy = \\ &= - \int_{-2}^0 \left(-2y-4-\frac{3}{2}y^2-3y+\frac{3}{4}y^2+3y+3 \right) dy = \int_{-2}^0 \left(\frac{3}{4}y^2+2y+1 \right) dy = \\ &= \left(\frac{1}{4}y^3+y^2+y \right) \Big|_{-2}^0 = -(-2+4-2) = 0 \end{aligned}$$

Посчитаем второй интеграл:

$$\begin{aligned} \iint_{ABC} (2+z-x) dx dz &= \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (2+z-x) dz = \int_0^1 \left(2z + \frac{z^2}{2} - xz \right) \Big|_{x-1}^0 dx = \\ &= - \int_0^1 \left(2x-2 + \frac{(x-1)^2}{2} - x^2+x \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2-4x+3) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Посчитаем удвоенный третий интеграл:

$$\begin{aligned} 4 \iint_{ABC} (y-2x+2) dx dy &= 4 \int_0^1 dx \int_{2x-2}^0 (y-2x+2) dy = \\ &= 4 \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} - 2xy + 2y \right) \Big|_{2x-2}^0 dx = -4 \int_0^1 \left(\frac{(2x-2)^2}{2} - 2x(2x-2) + 2(2x-2) \right) dx = \\ &= -4 \int_0^1 (2(x^2-2x+1) - 4x^2+4x+4x-4) dx = -4 \int_0^1 (-2x^2+4x-2) dx = \\ &= 8 \int_0^1 (x^2-2x+1) dx = 8 \int_0^1 (x-1)^2 d(x-1) = \frac{8}{3} (x-1)^3 \Big|_0^1 = \frac{8}{3} (0 - (-1)) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

^[1]После оформления осознал, что можно не разбивать на три компоненты и спроектировать на одну. Однако переписывать расчёт потока Φ_{ABC} нет желания.

Имеем:

$$\Phi = 0 - \frac{1}{3} + 1 + \left(\frac{0}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \right) = 1 - \frac{1}{3} + 2 = \frac{9-1}{3} = \frac{8}{3}$$

Итого:

$$\boxed{\Phi = \frac{8}{3}}$$

По формуле Остроградского-Гаусса для внешней поверхности пирамиды $OABC$:

$$\Phi = \iiint_{OABC} \operatorname{div} \vec{a} dV$$

Найдём дивергенцию векторного поля \vec{a} :

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 3 + 1 + 4 = 8$$

Подставим в поверхностный интеграл:

$$\iiint_{OABC} \operatorname{div} \vec{a} dV = 8 \iiint_{OABC} dV = 8V_{OABC}$$

По формуле объёма тетраэдра:

$$V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{OAB} \cdot |\vec{OC}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

Итого:

$$\boxed{\Phi = \frac{8}{3}}$$

Задача 4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $\rho: Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости двумя способами: используя определение циркуляции; с помощью формулы Стокса:

$$\vec{a}(M) = (x+z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x-y)\vec{k}, \quad \rho: 3x + 2y + z = 6$$

Решение. ...

Задача 5. Найти величину и направление наибольшего изменения функции $u(M) = u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$u(M) = x^2yz, \quad M_0(2, 0, 2)$$

Решение. По определению градиента функции $u(x, y, z)$:

$$\operatorname{grad} u(x, y, z) = \left(\frac{u}{x}, \frac{u}{y}, \frac{u}{z} \right) = (2xyz, x^2z, x^2y) \implies \operatorname{grad} (2, 0, 2) = (0, 8, 0)$$

Введём произвольное направление L :

$$L = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

Найдём изменение функции $u(x, y, z)$ по направлению L по теореме:

$$\frac{\partial u}{\partial L} = (0, 8, 0) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = 8 \cos \beta$$

По необходимому условию экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial L} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\partial u}{\partial L} = -8 \sin \beta = 0 \implies \sin \beta = 0 \implies |\cos \beta| = 1 \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{\partial u}{\partial L} = 0 \end{cases}$$

Учтём нормировку L :

$$|L| = 1 \implies \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \implies \cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma = 0 \implies \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \cos \gamma = 0 \end{cases}$$

Итого:

$$\boxed{\left| \frac{\partial u}{\partial L} \right| = 8, \quad L = (0, 1, 0)}$$