

ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ
И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Расчётная работа

(по дисциплине «Теория функций комплексного переменного»)

Выполнил:

Лабин Макар Андреевич,
ТФКП 22.4, Р3231, 466449.

Проверил:

Поздняков Семён Сергеевич

и́тмо

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Список заданий

В рамках выполнения расчётной работы *по варианту №15* необходимо представить решения следующих заданий:

1. Изобразить на комплексной плоскости множество \mathcal{D} :

$$\mathcal{D} = \{z: |z - 3 + 2i| \leq 2, 0 < \Re(iz) \leq 1\}$$

2. Найти все значения функции в указанной точке:

$$e^{e^i}$$

3. Найти аналитическую функцию по известной её действительной части:

$$u(x, y) = \operatorname{sh}(2x) \cos(2y) + x^2 - y^2 + 4y - 4$$

4. Вычислить интеграл по заданной кривой в указанном направлении:

$$\int_C \Im z dz, \quad C: |z - 1| = 1, \Im z \geq 0, z_0 = 2$$

5. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 и указать область, в которой ряд представляет данную функцию:

$$f(z) = z^2 e^z, \quad z_0 = 1$$

6. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанной области:

$$f(z) = \frac{3}{z^2 - 7z + 10}, \quad 2 < |z| < 5$$

7. Вычислить интеграл при помощи вычетов:

$$\int_L z^3 \cos\left(\frac{2i}{z}\right) dz, \quad L = \{z: |z| = \sqrt{2}\}$$

8. Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(ax)}{x^2 + 4x + 8} dx, \quad a > 0$$

2 Решения заданий

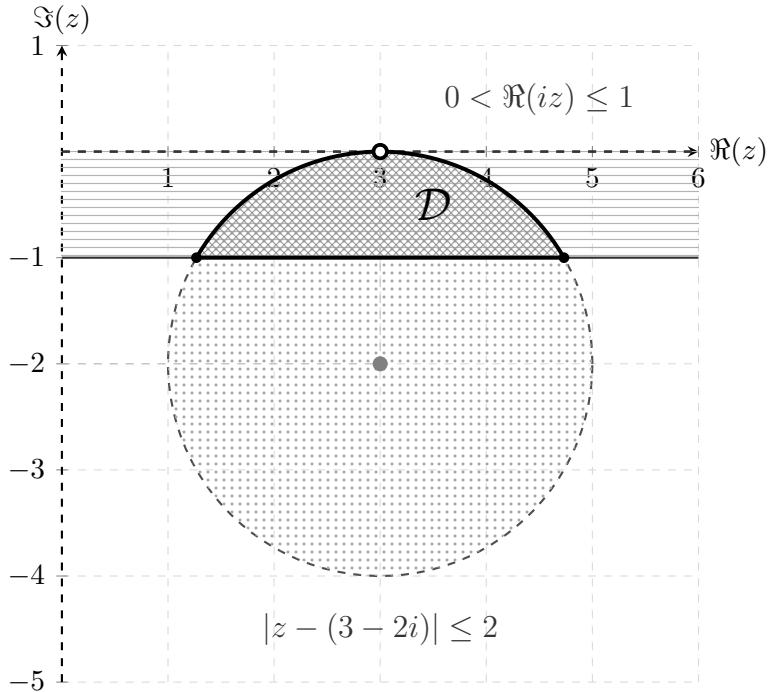
Задание 1. Изобразить на комплексной плоскости множество \mathcal{D} :

$$\mathcal{D} = \{z: |z - 3 + 2i| \leq 2, 0 < \Re(iz) \leq 1\}$$

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда второе условие можно переписать в виде:

$$0 < \Re(iz) \leq 1 \implies 0 < \Re(ix - y) \leq 1 \implies 0 > y \geq -1$$

Итого:



Задание 2. Найти все значения функции в указанной точке:

$$e^{e^i}$$

Решение. Пусть $\omega(z) = e^{e^z}$, $z = x + iy$. Преобразуем $\omega(z)$:

$$\begin{aligned} \omega(z) &= e^{e^z} = e^{e^{x+iy}} = e^{e^x e^{iy}} = e^{e^x(\cos y + i \sin y)} = e^{e^x \cos y} e^{e^x i \sin y} = \\ &= e^{e^x \cos y} (\cos(e^x \sin y) + i \sin(e^x \sin y)) \end{aligned}$$

Значение функции $\omega(z)$ в точке $z_0 = i$:

$$\omega(i) = e^{e^0 \cos 1} (\cos(e^0 \sin 1) + i \sin(e^0 \sin 1)) = e^{\cos 1} (\cos(\sin 1) + i \sin(\sin 1))$$

Итого:

$$e^{e^i} = e^{\cos 1} (\cos(\sin 1) + i \sin(\sin 1))$$

Задание 3. Найти аналитическую функцию по известной её действительной части:

$$u(x, y) = \operatorname{sh}(2x) \cos(2y) + x^2 - y^2 + 4y - 4$$

Решение. Пусть $x = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Зная об аналитичности $f(z)$, воспользуемся первым уравнением из условия Коши-Римана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{sh}(2x) \cos(2y) + x^2 - y^2 + 4y - 4) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \implies \\ \implies \frac{\cos(2y)}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (e^{2x} - e^{-2x}) + 2x &= \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \implies \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = (e^{2x} + e^{-2x}) \cos(2y) + 2x \implies \\ \implies v(x, y) &= (e^{2x} + e^{-2x}) \int \cos(2y) dy + 2x \int dy = \operatorname{ch}(2x) \sin(2y) + 2xy + C(x) \end{aligned}$$

Воспользуемся вторым уравнением из условия Коши-Римана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{sh}(2x) \cos(2y) + x^2 - y^2 + 4y - 4) &= -\frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{ch}(2x) \sin(2y) + 2xy + C(x)) \implies \\ \implies -2 \sin(2y) \operatorname{sh}(2x) - 2y + 4 &= -(2 \operatorname{sh}(2x) \sin(2y) + 2y + C'(x)) \implies \\ \implies C'(x) &= -4 \implies C(x) = -4x + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Выразим функцию $f(z)$ через z :

$$\begin{aligned} f(z) &= \operatorname{sh}(2x) \cos(2y) + x^2 - y^2 + 4y - 4 + i(\operatorname{ch}(2x) \sin(2y) + 2xy - 4x + C) = \\ &= -i \sin(i2x) \cos(2y) + i \cos(i2x) \sin(2y) + (x + iy)^2 - 4i(x + iy) - 4 + iC = \\ &= i(\sin(2y) \cos(i2x) - \cos(2y) \sin(i2x)) + z^2 - 4iz - 4 + iC = \\ &= i \sin(2y - i2x) + (z - 2i)^2 + iC = i \sin(-2i(x + iy)) + (z - 2i)^2 + iC = \\ &= \operatorname{sh}(2z) + (z - 2i)^2 + iC \end{aligned}$$

Итого:

$$f(z) = \operatorname{sh}(2z) + (z - 2i)^2 + iC, \quad C \in \mathbb{R}$$

Задание 4. Вычислить интеграл по заданной кривой в указанном направлении:

$$\int_C \Im z dz, \quad C: |z - 1| = 1, \quad \Im z \geq 0, \quad z_0 = 2$$

Решение. Параметризуем кривую C :

$$\gamma(t) = 1 + e^{it}, \quad t \in [0, \pi]$$

Вычислим интеграл вдоль пути γ :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \Im \gamma(t) d\gamma &= \int_0^{\pi} \Im(1 + e^{it}) ie^{it} dt = i \int_0^{\pi} \sin t e^{it} dt = i \int_0^{\pi} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} e^{it} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (e^{2it} - 1) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2it}}{2i} - t \right) \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Итого:

$$\int_C \Im z dz = -\frac{\pi}{2}$$

Задание 5. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 и указать область, в которой ряд представляет данную функцию:

$$f(z) = z^2 e^z, \quad z_0 = 1$$

Решение. По определению ряда Тейлора в окрестности точки $z_0 = 1$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (z - 1)^n$$

По формуле Лейбница:

$$\begin{aligned} f^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (z^2)^{(k)} (e^z)^{(n-k)} = \left(\binom{n}{0} z^2 + \binom{n}{1} 2z + \binom{n}{2} 2 \right) \cdot e^z = \\ &= (z^2 + 2nz + n(n-1)) \cdot e^z \implies \\ \implies f^{(n)}(1) &= (1 + 2n + n^2 - n)e = e(n^2 + n + 1) \end{aligned}$$

Функция $f(z)$ получена как произведение аналитических функций на \mathbb{C} , поэтому $f(z)$ тоже аналитична на \mathbb{C} :

$$f(z) = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!} (z - 1)^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

Задание 6. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанной области:

$$f(z) = \frac{3}{z^2 - 7z + 10}, \quad 2 < |z| < 5$$

Решение. Найдём нули знаменателя:

$$\begin{cases} z^2 - 7z + 10 = 0 \\ D = 49 - 40 = 3^2 \end{cases} \implies \begin{cases} z = 2 \\ z = 5 \end{cases}$$

Разложим $f(z)$ на простейшие дроби методом неопределённых коэффициентов:

$$\begin{aligned} \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-5} &= \frac{3}{(z-2)(z-5)} \implies A(z-5) + B(z-2) = 3 \implies \\ \implies \begin{cases} A+B=0 \\ -5A-2B=3 \end{cases} &\implies \begin{cases} A=-B \\ 5B-2B=3 \end{cases} \implies \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases} \end{aligned}$$

Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в области $2 < |z| < 5$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-5} - \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{5}} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{5}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{5^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = -\sum_{-\infty}^{-1} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{5^{n+1}} \end{aligned}$$

Итого:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad c_n = \begin{cases} -2^{-n-1}, & n \leq -1 \\ -5^{-n-1}, & n \geq 0 \end{cases}$$

Задание 7. Вычислить интеграл при помощи вычетов:

$$\int_L z^3 \cos\left(\frac{2i}{z}\right) dz, \quad L = \{z: |z| = \sqrt{2}\}$$

Решение. Выполним замену переменной интегрирования:

$$z = \frac{2i}{\omega} \implies \int_L z^3 \cos\left(\frac{2i}{z}\right) dz = \int_{\tilde{L}} \frac{(2i)^3}{\omega^3} \cos\omega \frac{-2i}{\omega^2} d\omega = -16 \int_{\tilde{L}} \frac{\cos\omega}{\omega^5} d\omega$$

Параметризуем контур L и определим новый контур \tilde{L} :

$$\gamma(t) = \sqrt{2}e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi] \implies \tilde{\gamma}(t) = \frac{2i}{\sqrt{2}e^{it}} = \sqrt{2}ie^{-it} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}-it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Контур \tilde{L} получен из L поворотом на $\frac{\pi}{2}$ и инверсией направления обхода. Подынтегральная функция голоморфна на открытом множестве $D \setminus \{0\}$ с внешней замкнутой границей \tilde{L} .

По первой теореме Коши о вычетах:

$$\int_{\tilde{L}} \frac{\cos\omega}{\omega^5} d\omega = -2\pi i \operatorname{Res}_{\omega=0} \frac{\cos\omega}{\omega^5} = -\frac{2\pi i}{4!} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d^4 \cos\omega}{d\omega^4} = -\frac{\pi i}{12} \lim_{\omega \rightarrow 0} \cos\omega = -\frac{\pi i}{12}$$

Итого:

$$\boxed{\int_L z^3 \cos\left(\frac{2i}{z}\right) dz = \frac{4\pi i}{3}}$$

Задание 8. Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(ax)}{x^2 + 4x + 8} dx, \quad a > 0$$

Решение. По принципу аналитического продолжения \mathbb{R} в \mathbb{C} :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(ax)}{x^2 + 4x + 8} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z \cos(az)}{z^2 + 4z + 8} dz$$

Распишем интеграл через предел и разделим по аддитивности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z \cos(az)}{z^2 + 4z + 8} dz = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^R \frac{ze^{iaz}}{z^2 + 4z + 8} dz + \int_{-R}^R \frac{ze^{-iaz}}{z^2 + 4z + 8} dz \right)$$

Введём контур $\gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [t_0, t_1]$ и функцию $f(z) = \frac{z}{z^2 + 4z + 8}$. Оценим функцию $f(z)$ на контуре γ :

$$\begin{aligned} |R^2 e^{2it} + 4Re^{it} + 8| &\geq R^2 - 4R - 8, \quad R > 2 + \sqrt{12} \implies \\ |f(z)| &= \frac{|Re^{it}|}{|R^2 e^{2it} + 4Re^{it} + 8|} \leq \frac{R}{R^2 - 4R - 8} \end{aligned}$$

Оценим первый интеграл по контуру γ :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) e^{iaz} dz \right| &\leq \frac{R}{R^2 - 4R - 8} \int_{t_0}^{t_1} \left| e^{iaRe^{it}} \right| \left| Rie^{it} dt \right| = \\ &= \frac{R^2}{R^2 - 4R - 8} \int_{t_0}^{t_1} \left| e^{iaR(\cos t + i \sin t)} \right| dt = \frac{R^2}{R^2 - 4R - 8} \int_{t_0}^{t_1} e^{-aR \sin t} dt \end{aligned}$$

Если взять промежуток $t \in [0, \pi]$ (обозначим такой контур γ_1), то:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-aR \sin t} dt &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin t} dt \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2aR}{\pi}t} dt = 2 \left. \frac{e^{-\frac{2aR}{\pi}t}}{-\frac{2aR}{\pi}} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -\frac{\pi}{aR} (e^{-aR} - 1) \end{aligned}$$

Получаем:

$$\left| \int_{\gamma_1} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq -\frac{R}{R^2 - 4R - 8} \cdot \frac{\pi}{a} (e^{-aR} - 1) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Аналогично оценим второй интеграл по контуру γ :

$$\left| \int_{\gamma} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \dots = \frac{R^2}{R^2 - 4R - 8} \int_{t_0}^{t_1} e^{aR \sin t} dt$$

Если взять промежуток $t \in [-\pi, 0]$ (обозначим такой контур γ_2), то:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 e^{aR \sin t} dt &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^{aR \sin t} dt \leq 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^{aRt} dt = 2 \left. \frac{e^{aRt}}{aR} \right|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \\ &= -\frac{2}{aR} (1 - e^{-\frac{aR\pi}{2}}) \end{aligned}$$

Получаем:

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) e^{-iaz} dz \right| \leq -\frac{R}{R^2 - 4R - 8} \cdot \frac{2}{a} (1 - e^{-\frac{aR\pi}{2}}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

По аддитивности интегралов:

$$\begin{aligned} \int_{[-R, R]} f(z) e^{iaz} dz &= \int_{[-R, R] \cup \gamma_1} f(z) e^{iaz} dz - \int_{\gamma_1} f(z) e^{iaz} dz \\ \int_{[-R, R]} f(z) e^{-iaz} dz &= - \left(\int_{[R, -R] \cup \gamma_2} f(z) e^{-iaz} dz - \int_{\gamma_2} f(z) e^{-iaz} dz \right) \end{aligned}$$

Найдём нули знаменателя:

$$\begin{cases} z^2 + 4z + 8 = 0 \\ D_1 = 4 - 8 = 2i \end{cases} \implies \begin{cases} z = -2 - 2i \\ z = -2 + 2i \end{cases}$$

По интегральной теореме Коши для замкнутого контура $[-R, R] \cup \gamma_1$:

$$\begin{aligned} \int_{[-R, R] \cup \gamma_1} f(z) e^{iaz} dz &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow -2+2i} \frac{ze^{iaz}}{z + 2 + 2i} = 2\pi i \frac{(-2 + 2i)e^{ia(-2+2i)}}{4i} = \\ &= \pi e^{-2a(1+i)} (-1 + i) = \pi i e^{-2a(1+i)} (1 + i) \end{aligned}$$

По интегральной теореме Коши для замкнутого контура $[R, -R] \cup \gamma_2$:

$$\begin{aligned} \int_{[R, -R] \cup \gamma_2} f(z) e^{iaz} dz &= -2\pi i \lim_{z \rightarrow -2-2i} \frac{ze^{-iaz}}{z + 2 - 2i} = -2\pi i \frac{(-2 - 2i)e^{-ia(-2-2i)}}{-4i} = \\ &= \pi e^{2a(-1+i)} (-1 - i) = -\pi e^{2a(-1+i)} (1 + i) \end{aligned}$$

В пределе при $R \rightarrow \infty$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{iaz} dz + \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-iaz} dz &= \pi(1+i)(ie^{-2a(1+i)} - e^{2a(-1+i)}) = \\ &= \pi(1+i)e^{-2a}(ie^{-2ai} - e^{2ai}) = \pi(1+i)e^{-2a}(i\cos(2a) + \sin(2a) - \\ &- \cos(2a) - i\sin(2a)) = \pi(1+i)e^{-2a}(1-i)(\sin(2a) - \cos(2a)) = \\ &= 2\pi e^{-2a}(\sin(2a) - \cos(2a)) \end{aligned}$$

Итого:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(ax)}{x^2 + 4x + 8} dx = \pi e^{-2a}(\sin(2a) - \cos(2a)), \quad a > 0}$$