ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
Факультет программной инженерии
и компьютерной техники

Лабораторная работа

Построение и визуализация фрактальных множеств

(по дисциплине «Теория функции комплексного переменного»)

Выполнили студенты:

Горин Семён, 465592
Лабин Макар, 466449
Пивоваров Роман, 467082

Поток: 22.4

ИТМО

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Фрактал «Кривая Гильберта»

1.1 Описание структуры и построения

Кривая Гильберта — это пространство-заполняющая кривая, впервые предложенная Давидом Гильбертом в 1891 году. Она является примером непрерывного отображения от единичного отрезка на единичный квадрат, при этом полностью заполняет его область. Кривая Гильберта строится итерационно, при каждой итерации увеличивая уровень вложенности и детализации.

1.1.1 Алгоритм построения

Построение кривой Гильберта основано на рекурсивной перестройке базового шаблона из четырёх подкрестов, соединённых под определённым углом. Каждый следующий порядок кривой делит квадрат на четыре меньших и встраивает в них повернутые копии кривой предыдущего порядка.

Кривую можно построить с помощью рекурсивной функции, описывающей направления движения пера:

$$\mathrm{Hilbert}(n, d) = \begin{cases} \text{влево, } \mathrm{Hilbert}(n-1, -d)\text{, вперёд, Направо,} \\ \mathrm{Hilbert}(n-1, d)\text{, вперёд, } \mathrm{Hilbert}(n-1, d)\text{,} \\ \text{направо, вперёд, } \mathrm{Hilbert}(n-1, -d) \end{cases}$$

где n — порядок кривой, а d определяет направление поворота.

Листинг 1: Построение кривой Гильберта

```python
import matplotlib.pyplot as plt

def hilbert_curve(n, angle=90, step=10):
    path = []
    def hilbert(level, sign):
        if level == 0:
            return
        plt.right(sign * angle)
        hilbert(level - 1, -sign)
        plt.forward(step)
        plt.left(sign * angle)
        hilbert(level - 1, sign)
        plt.forward(step)
        hilbert(level - 1, sign)
        plt.left(sign * angle)
        plt.forward(step)
        hilbert(level - 1, -sign)
        plt.right(sign * angle)
    hilbert(n, 1)

import turtle as plt
plt.speed(0)
hilbert_curve(5, step=8)
plt.hideturtle()
plt.done()
```

1.2 Визуализации

(a) Кривая Гильберта 1-го порядка

(b) Кривая Гильберта 3-го порядка

(c) Кривая Гильберта 5-го порядка

(d) Фрагмент с увеличением, показывающий самоподобие

Рис. 1: Построения кривой Гильберта разных порядков

1.3 Анализ структуры

Кривая Гильберта обладает рядом интересных свойств:

- **Самоподобие**: каждый уровень построения представляет собой масштабированную копию предыдущего, повернутую под разными углами.
- **Непрерывность**: кривая является непрерывной, но нигде не дифференцируемой функцией.
- **Заполнение пространства**: при бесконечном числе итераций кривая заполняет весь квадрат, переходя из одномерного пространства в двумерное.

Заключение

Были исследованы методы построения кривой Гильберта и показано, как простое рекурсивное правило приводит к образованию сложной, самоподобной структуры. Этот фрактал является классическим примером пространства-заполняющих кривых и демонстрирует идею предельного перехода от дискретных линий к непрерывной плоской форме.