ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
Факультет программной инженерии
и компьютерной техники

Домашняя работа №3-4

Теория поля. Поверхностный интеграл.

(по дисциплине «Дополнительные главы
математического анализа»)

Выполнил:

Лабин Макар Андреевич,
ДГМА 28.3, Р3231, 466449.

Проверил:

Богачёв Владимир Александрович

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Список задач

В рамках выполнения домашней работы *по варианту №2* необходимо предоставить решения следующих задач:

1. Дана функция $u(M) = u(x, y, z)$ и точки M_1 и M_2. Вычислить $\operatorname{grad} u(M_1)$, а также производную функции $u(M)$ в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:
$$u(M) = 5xy^3z^3, \quad M_1(2, 1, -1), \quad M_2(4, -3, 0)$$

2. Вычислить поверхностный интеграл второго рода:
$$\iint_S z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad S\colon \text{внешняя сторона поверхности эллипсоида } x^2+y^2+2z^2 = 2$$

3. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью ρ и координатными плоскостями, двумя способами: использовав определение потока и с помощью формулы Остроградского-Гаусса:
$$\vec{a}(M) = (3x - 1)\vec{i} + (y - x + z)\vec{j} + 4z\vec{k}, \quad \rho\colon 2x - y - 2z = 2$$

4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $\rho\colon Ax+By+Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости двумя способами: используя определение циркуляции; с помощью формулы Стокса:
$$\vec{a}(M) = (x + z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x - y)\vec{k}, \quad \rho\colon 3x + 2y + z = 6$$

5. Найти величину и направление наибольшего изменения функции $u(M) = u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:
$$u(M) = x^2yz, \quad M_0(2, 0, 2)$$

2 Решения задач

Задача 1. *Дана функция $u(M) = u(x, y, z)$ и точки M_1 и M_2. Вычислить $grad\,u(M_1)$, а также производную функции $u(M)$ в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:*

$$u(M) = 5xy^3z^3, \quad M_1(2, 1, -1), \quad M_2(4, -3, 0)$$

Решение. По определению градиента функции $u(x, y, z)$:

$$\operatorname{grad} u(x, y, z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \left(5y^3z^3, 15xy^2z^3, 15xy^3z^2\right) \implies$$
$$\implies \operatorname{grad} u(2, 1, -1) = (-5, -30, 30)$$

Определим нормированный вектор γ:

$$\gamma = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} = \frac{(4-2, -3-1, 0-(-1))}{\sqrt{4+16+1}} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2, -4, 1)$$

По теореме связи производной функции u по направлению $\overrightarrow{M_1M_2}$ с градиентом:

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{M_1M_2}} = \frac{1}{\sqrt{21}} \operatorname{grad} u(2, 1, -1) \cdot (2, -4, 1) = \frac{1}{\sqrt{21}}(-5 \cdot 2 - 30 \cdot (-4) + 30 \cdot 1) = \frac{140}{\sqrt{21}}$$

Итого:

$$\boxed{\operatorname{grad} u(2, 1, -1) = (-5, -30, 30), \quad \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{M_1M_2}} = \frac{140}{\sqrt{21}}}$$

Задача 2. *Вычислить поверхностный интеграл второго рода:*

$$\iint_S z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad S\colon \textit{внешняя сторона поверхности эллипсоида } x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$$

Решение. По аддитивности поверхностного интеграла:

$$S = S_{\text{верх}} + S_{\text{низ}} \implies \iint_S z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S_{\text{верх}}} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{S_{\text{низ}}} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Параметризуем поверхность $S_{\text{верх}}$:

$$S_{\text{верх}}\colon \begin{cases} x(\rho, \varphi) = \sqrt{2}\rho\cos\varphi \\ y(\rho, \varphi) = \sqrt{2}\rho\sin\varphi \\ z(\rho, \varphi) = \sqrt{1-\rho^2} \end{cases}, \quad \rho \in [0, 1], \ \varphi \in [0, 2\pi]$$

Параметризуем поверхность $S_{\text{низ}}$:

$$S_{\text{низ}}\colon \begin{cases} x(\rho, \varphi) = \sqrt{2}\rho\cos\varphi \\ y(\rho, \varphi) = \sqrt{2}\rho\sin\varphi \\ z(\rho, \varphi) = -\sqrt{1-\rho^2} \end{cases}, \quad \rho \in [0, 1], \ \varphi \in [0, 2\pi]$$

Найдём нормальные векторы для обоих случаев:

$$\vec{n}^*_{\text{верх}} = \vec{r}_{\text{верх}}(\rho,\varphi)'_\rho \times \vec{r}_{\text{верх}}(\rho,\varphi)'_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sqrt{2}\cos\varphi & \sqrt{2}\sin\varphi & -\dfrac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ -\sqrt{2}\rho\sin\varphi & \sqrt{2}\rho\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}\rho^2\cos\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}, \frac{\sqrt{2}\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}, 2\rho\right)$$

$$\vec{n}^*_{\text{низ}} = \vec{r}_{\text{низ}}(\rho,\varphi)'_\rho \times \vec{r}_{\text{низ}}(\rho,\varphi)'_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sqrt{2}\cos\varphi & \sqrt{2}\sin\varphi & \dfrac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ -\sqrt{2}\rho\sin\varphi & \sqrt{2}\rho\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}\rho^2\cos\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}, -\frac{\sqrt{2}\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}, 2\rho\right)$$

Уточним направление нормальных векторов:

$$\operatorname{grad} S = (2x, 2y, 4z) \implies \begin{cases} \vec{n}_{\text{верх}} = \left(\dfrac{\sqrt{2}\rho^2\cos\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}, \dfrac{\sqrt{2}\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}, 2\rho\right) \\ \vec{n}_{\text{низ}} = \left(\dfrac{\sqrt{2}\rho^2\cos\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}, \dfrac{\sqrt{2}\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}, -2\rho\right) \end{cases}$$

Перейдём к кратным интегралам по области D из параметризации:

$$\iint_{S_{\text{верх}}} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{S_{\text{низ}}} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_D (1-\rho^2-(1-\rho^2))\rho \mathrm{d}\sigma = 0$$

Итого:

$$\boxed{\iint_S z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0}$$

Задача 3. *Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью ρ и координатными плоскостями, двумя способами: использовав определение потока и с помощью формулы Остроградского-Гаусса:*

$$\vec{a}(M) = (3x-1)\vec{i} + (y-x+z)\vec{j} + 4z\vec{k}, \quad \rho\colon 2x-y-2z=2$$

Решение. Определим вершины пирамиды $G = OABC$:

$$\rho\colon x - \frac{y}{2} - z = 1 \implies O(0,0,0),\ A(1,0,0),\ B(0,-2,0),\ C(0,0,-1)$$

По аддитивности поверхностного интеграла:

$$\Phi = \Phi_{OAB} + \Phi_{OAC} + \Phi_{OBC} + \Phi_{ABC}$$

Вычислим нормированные нормальные векторы к внешним граням пирамиды G:

$$
\begin{aligned}
OAB \subset z = 0 &\implies \vec{n}_{OAB} = \frac{1}{\sqrt{0+0+1^2}}(0,0,1) = (0,0,1)\\
OAC \subset y = 0 &\implies \vec{n}_{OAC} = \frac{1}{\sqrt{0+1^2+0}}(0,1,0) = (0,1,0)\\
OBC \subset x = 0 &\implies \vec{n}_{OBC} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+0+0}}(-1,0,0) = (-1,0,0)\\
ABC \subset \rho &\implies \vec{n}_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}(2,-1,-2) = \frac{1}{3}(2,-1,-2)
\end{aligned}
$$

Вычислим Φ_{OAB} по определению:

$$z = 0 \implies \Phi_{OAB} = \iint_{OAB} \vec{a}\cdot\vec{n}_{OAB}\mathrm{d}\sigma = 4\iint_{OAB} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

Вычислим Φ_{OAC} по определению:

$$
\begin{aligned}
y = 0 \implies \Phi_{OAC} &= \iint_{OAC} \vec{a}\cdot\vec{n}_{OAC}\mathrm{d}\sigma = \iint_{OAC}(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z =\\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x-1}^0 (z-x)\mathrm{d}z = \int_0^1\left(x(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}\right)\mathrm{d}x =\\
&= \int_0^1\left(x^2 - x - \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1(x^2-1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}-1) = -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Вычислим Φ_{OBC} по определению:

$$x = 0 \implies \Phi_{OBC} = \iint_{OBC}\vec{a}\cdot\vec{n}_{OBC}\mathrm{d}\sigma = \iint_{OBC} 1\mathrm{d}y\mathrm{d}z = S_{OBC} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = 1$$

Вычислим Φ_{ABC} по определению[1]:

$$
\begin{aligned}
\Phi_{ABC} &= \iint_{ABC}\vec{a}\cdot\vec{n}_{ABC}\mathrm{d}\sigma =\\
&= \frac{1}{3}\iint_{ABC} 2(3x-1)\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\cos\alpha} - (y-x+z)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{\cos\beta} - 2\cdot 4z\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos\gamma} =\\
&= \iint_{ABC}(4+6z+3y)\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{2} - (x-z-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}z - 2\cdot(4x-2y-4)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{2}
\end{aligned}
$$

Посчитаем удвоенный первый интеграл:

$$
\begin{aligned}
&\iint_{ABC}(4+6z+3y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-2}^0\mathrm{d}y\int_{-\frac{1}{2}y-1}^0(4+6z+3y)\mathrm{d}z =\\
&= \int_{-2}^0 (4z+3z^2+3zy)\Big|_{-\frac{1}{2}y-1}^0\mathrm{d}y = -\int_{-2}^0\left((4+3y)\left(-\frac{1}{2}y-1\right) + 3\left(\frac{1}{2}y+1\right)^2\right)\mathrm{d}y =\\
&= -\int_{-2}^0\left(-2y-4-\frac{3}{2}y^2-3y+\frac{3}{4}y^2+3y+3\right)\mathrm{d}y = \int_{-2}^0\left(\frac{3}{4}y^2+2y+1\right)\mathrm{d}y =\\
&= \left(\frac{1}{4}y^3+y^2+y\right)\Big|_{-2}^0 = -(-2+4-2) = 0
\end{aligned}
$$

[1]После оформления осознал, что можно не разбивать на три компоненты и спроектировать на одну. Однако переписывать расчёт потока Φ_{ABC} нет желания.

Посчитаем второй интеграл:

$$\iint_{ABC}(2+z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^0(2+z-x)\mathrm{d}z=\int_0^1\left(2z+\frac{z^2}{2}-xz\right)\Bigg|_{x-1}^0\mathrm{d}x=$$

$$=-\int_0^1\left(2x-2+\frac{(x-1)^2}{2}-x^2+x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2-4x+3)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-2+3\right)=\frac{2}{3}$$

Посчитаем удвоенный третий интеграл:

$$4\iint_{ABC}(y-2x+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^1\mathrm{d}x\int_{2x-2}^0(y-2x+2)\mathrm{d}y=$$

$$=4\int_0^1\left(\frac{y^2}{2}-2xy+2y\right)\Bigg|_{2x-2}^0\mathrm{d}x=-4\int_0^1\left(\frac{(2x-2)^2}{2}-2x(2x-2)+2(2x-2)\right)\mathrm{d}x=$$

$$=-4\int_0^1(2(x^2-2x+1)-4x^2+4x+4x-4)\mathrm{d}x=-4\int_0^1(-2x^2+4x-2)\mathrm{d}x=$$

$$=8\int_0^1(x^2-2x+1)\mathrm{d}x=8\int_0^1(x-1)^2\mathrm{d}(x-1)=\frac{8}{3}(x-1)^3\Bigg|_0^1=\frac{8}{3}(0-(-1))=\frac{8}{3}$$

Имеем:

$$\Phi=0-\frac{1}{3}+1+\left(\frac{0}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\right)=1-\frac{1}{3}+2=\frac{9-1}{3}=\frac{8}{3}$$

Итого:

$$\boxed{\Phi=\frac{8}{3}}$$

По формуле Остроградского-Гаусса для внешней поверхности пирамиды $OABC$:

$$\Phi=\iiint_{OABC}\operatorname{div}\vec{a}\mathrm{d}V$$

Найдём дивергенцию векторного поля $\vec{a}$:

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=3+1+4=8$$

Подставим в поверхностный интеграл:

$$\iiint_{OABC}\operatorname{div}\vec{a}\mathrm{d}V=8\iiint_{OABC}\mathrm{d}V=8V_{OABC}$$

По формуле объёма тетраэдра:

$$V_{OABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{OAB}\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{3}$$

Итого:

$$\boxed{\Phi=\frac{8}{3}}$$

Задача 4. *Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $\rho\colon Ax+By+Cz=D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n}=(A,B,C)$ этой плоскости двумя способами: используя определение циркуляции; с помощью формулы Стокса:*

$$\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k},\quad \rho\colon 3x+2y+z=6$$

Решение. По определению циркуляции:

$$C=\oint_L \vec{a}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint_L a_x\mathrm{d}x+a_y\mathrm{d}y+a_z\mathrm{d}z$$

Из аддитивности криволинейного интеграла:

$$L=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3 \implies \oint_L \vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{\gamma_1}\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\int_{\gamma_2}\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\int_{\gamma_3}\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

Определим координаты вершин $\triangle XYZ$ из условия:

$$\begin{aligned} X\in\rho\wedge y=0\wedge z=0 &\implies x=2 \implies X(2,0,0)\\ Y\in\rho\wedge x=0\wedge z=0 &\implies y=3 \implies Y(0,3,0)\\ Z\in\rho\wedge x=0\wedge y=0 &\implies z=6 \implies Z(0,0,6)\end{aligned}$$

По правилу «правой руки»:

$$\overrightarrow{XY}\times\overrightarrow{YZ}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & -3 & 6\end{vmatrix}=(18,12,6)=6\vec{n}\implies XYZX \text{ — искомый контур}$$

Параметризуем контуры обхода:

$$\gamma_1=XY\colon\begin{cases}x(t)=2-2t\\ y(t)=3t\\ z(t)=0\end{cases},\quad t\in[0,1]\qquad \gamma_2=YZ\colon\begin{cases}x(t)=0\\ y(t)=3-3t\\ z(t)=6t\end{cases},\quad t\in[0,1]$$

$$\gamma_3=ZX\colon\begin{cases}x(t)=2t\\ y(t)=0\\ z(t)=6-6t\end{cases},\quad t\in[0,1]$$

Посчитаем интеграл вдоль контура XY:

$$\int_{XY}\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_0^1(2-2t+0)\cdot(-2)\mathrm{d}t=-2\cdot(2t-t^2)|_0^1=-2$$

Посчитаем интеграл вдоль контура YZ:

$$\int_{YZ}\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_0^1(6t\cdot(-3)+(3t-3)\cdot 6)\mathrm{d}t=-18\cdot t|_0^1=-18$$

Посчитаем интеграл вдоль контура ZX:

$$\int_{ZX}\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_0^1((2t+6-6t)\cdot 2+4t\cdot(-6))\mathrm{d}t=4(3t-4t^2)|_0^1=-4$$

Имеем:

$$C = -2 - 18 - 4 = -24$$

Итого:

$$\boxed{C = -24}$$

По формуле Стокса:

$$C = \oint_L a_x \mathrm{d}x + a_y \mathrm{d}y + a_z \mathrm{d}z =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathrm{d}z\mathrm{d}x \right]$$

Вычислим необходимые частные производные:

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} = 1 \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial a_y}{\partial z} = 1 \quad \frac{\partial a_z}{\partial x} = 2 \quad \frac{\partial a_z}{\partial y} = -1$$

Подставим частные производные в формулу Стокса:

$$\oint_L a_x \mathrm{d}x + a_y \mathrm{d}y + a_z \mathrm{d}z = -\iint_S [\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y\mathrm{d}z]$$

Вычислим первый двойной интеграл:

$$\iint_S \mathrm{d}z\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{6-3x} \mathrm{d}z = \int_0^2 (6-3x)\mathrm{d}x = \left(6x - \frac{3}{2}x^2 \right)\Big|_0^2 = 12 - 6 = 6$$

Вычислим второй двойной интеграл:

$$\iint_S 2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_0^3 \mathrm{d}y \int_0^{6-2t} \mathrm{d}z = 2\int_0^3 (6-2y)\mathrm{d}y = 2\cdot(6y - y^2)|_0^3 = 2\cdot(18-9) = 18$$

Имеем:

$$C = -(6+18) = -24$$

Итого:

$$\boxed{C = -24}$$

Задача 5. *Найти величину и направление наибольшего изменения функции $u(M) = u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:*

$$u(M) = x^2yz, \quad M_0(2, 0, 2)$$

Решение. По определению градиента функции $u(x, y, z)$:

$$\operatorname{grad} u(x, y, z) = \left(\frac{u}{x}, \frac{u}{y}, \frac{u}{z} \right) = (2xyz, x^2z, x^2y) \implies \operatorname{grad}(2, 0, 2) = (0, 8, 0)$$

Введём произвольное направление L:

$$L = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Найдём изменение функции $u(x, y, z)$ по направлению L по теореме:

$$\frac{\partial u}{\partial L} = (0, 8, 0)\cdot(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = 8\cos\beta$$

По необходимому условию экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\dfrac{\partial u}{\partial L} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \beta}\dfrac{\partial u}{\partial L} = -8\sin\beta = 0 \implies \sin\beta = 0 \implies |\cos\beta| = 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial \gamma}\dfrac{\partial u}{\partial L} = 0 \end{cases}$$

Учтём нормировку L:

$$|L| = 1 \implies \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \implies \cos^2\alpha + \cos^2\gamma = 0 \implies \begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ \cos\gamma = 0 \end{cases}$$

Итого:

$$\boxed{\left|\frac{\partial u}{\partial L}\right| = 8, \quad L = (0, 1, 0)}$$