

ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»  
ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ  
И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

## Домашняя работа №2

### Криволинейные интегралы

(по дисциплине «Дополнительные главы  
математического анализа»)

**Выполнил:**

Лабин Макар Андреевич,  
ДГМА 28.3, Р3231, 466449.

**Проверил:**

Богачёв Владимир Александрович

**ИТМО**

г. Санкт-Петербург, Россия  
2025

# 1 Список задач

В рамках выполнения домашней работы *по варианту №10* необходимо предоставить решения следующих задач:

1. Вычислить данный криволинейный интеграл:

$$\int_{L_{AB}} \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad L_{AB} \text{ — отрезок } AB: A(1, 2), B(3, 6)$$

2. Показать, что данное выражение является полным дифференциалом функции  $u(x, y)$ . Найти функцию  $u(x, y)$ :

$$(ye^{xy} + y^2)dx + (xe^{xy} + 2xy)dy$$

3. Вычислить момент инерции относительно начала координат отрезка прямой, заключенного между точками  $A(2, 0)$  и  $B(0, 1)$ , если линейная плотность в каждой его точке равна 1.

## 2 Решения задач

**Задача 1.** Вычислить данный криволинейный интеграл:

$$\int_{L_{AB}} \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad L_{AB} \text{ — отрезок } AB: A(1, 2), B(3, 6)$$

**Решение.** Параметризуем  $L_{AB}$ :

$$L_{AB}: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t \end{cases}, \quad t \in [1, 3]$$

Подставим в интеграл:

$$\int_{L_{AB}} \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int_1^3 \frac{4tdt}{5t^2} = \frac{2}{5} \int_1^3 \frac{dt}{t} = \frac{2}{5} \ln t^2 \Big|_1^3 = \frac{4 \ln 3}{5}$$

Итого:

$$\boxed{\int_{L_{AB}} \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \frac{4 \ln 3}{5}}$$

**Задача 2.** Показать, что данное выражение является полным дифференциалом функции  $u(x, y)$ . Найти функцию  $u(x, y)$ :

$$(ye^{xy} + y^2)dx + (xe^{xy} + 2xy)dy$$

**Решение.** Проверим условие Грина:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial(ye^{xy} + y^2)}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + 2y \\ \frac{\partial(xe^{xy} + 2xy)}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + 2y \end{cases} &\implies \frac{\partial(ye^{xy} + y^2)}{\partial y} = \frac{\partial(xe^{xy} + 2xy)}{\partial x} \implies \\ &\implies \exists u(x, y): du(x, y) = (ye^{xy} + y^2)dx + (xe^{xy} + 2xy)dy \end{aligned}$$

Найдём функцию  $u(x, y)$  из определения полного дифференциала:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = ye^{xy} + y^2 \implies u(x, y) = \int (ye^{xy} + y^2)dx = e^{xy} + xy^2 + C(y)$$

Найдём функцию  $C(y)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = xe^{xy} + 2xy \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = xe^{xy} + 2xy + C'(y) \end{cases} \implies C'(y) = 0 \implies C(y) = C \in \mathbb{R}$$

Итого:

$$\boxed{u(x, y) = e^{xy} + xy^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

**Задача 3.** Вычислить момент инерции относительно начала координат отрезка прямой, заключённого между точками  $A(2, 0)$  и  $B(0, 1)$ , если линейная плотность в каждой его точке равна 1.

**Решение.** ...