

ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»  
ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ  
И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

## Домашняя работа №3-4

Теория поля. Поверхностный интеграл.

(по дисциплине «Дополнительные главы  
математического анализа»)

**Выполнил:**

Лабин Макар Андреевич,  
ДГМА 28.3, Р3231, 466449.

**Проверил:**

Богачёв Владимир Александрович

**и́тмо**

г. Санкт-Петербург, Россия  
2025

# 1 Список задач

В рамках выполнения домашней работы *по варианту №2* необходимо представить решения следующих задач:

1. Данна функция  $u(M) = u(x, y, z)$  и точки  $M_1$  и  $M_2$ . Вычислить  $\text{grad } u(M_1)$ , а также производную функции  $u(M)$  в точке  $M_1$  по направлению вектора  $\overrightarrow{M_1 M_2}$ :

$$u(M) = 5xy^3z^3, \quad M_1(2, 1, -1), \quad M_2(4, -3, 0)$$

2. Вычислить поверхностный интеграл второго рода:

$$\iint_S z^2 dx dy, \quad S: \text{внешняя сторона поверхности эллипсоида } x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$$

3. Вычислить поток векторного поля  $\vec{a}(M)$  через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью  $\rho$  и координатными плоскостями, двумя способами: использовав определение потока и с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\vec{a}(M) = (3x - 1)\vec{i} + (y - x + z)\vec{j} + 4z\vec{k}, \quad \rho: 2x - y - 2z = 2$$

4. Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}(M)$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $\rho: Ax + By + Cz = D$  с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора  $\vec{n} = (A, B, C)$  этой плоскости двумя способами: используя определение циркуляции; с помощью формулы Стокса:

$$\vec{a}(M) = (x + z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x - y)\vec{k}, \quad \rho: 3x + 2y + z = 6$$

5. Найти величину и направление наибольшего изменения функции  $u(M) = u(x, y, z)$  в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ :

$$u(M) = x^2yz, \quad M_0(2, 0, 2)$$

## 2 Решения задач

**Задача 1.** Дано функция  $u(M) = u(x, y, z)$  и точки  $M_1$  и  $M_2$ . Вычислить  $\text{grad } u(M_1)$ , а также производную функции  $u(M)$  в точке  $M_1$  по направлению вектора  $\overrightarrow{M_1 M_2}$ :

$$u(M) = 5xy^3z^3, \quad M_1(2, 1, -1), \quad M_2(4, -3, 0)$$

**Решение.** По определению градиента функции  $u(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} \text{grad } u(x, y, z) &= \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = (5y^3z^3, 15xy^2z^3, 15xy^3z^2) \implies \\ &\implies \text{grad } u(2, 1, -1) = (-5, -30, 30) \end{aligned}$$

Определим нормированный вектор  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|} = \frac{(4-2, -3-1, 0-(-1))}{\sqrt{4+16+1}} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2, -4, 1)$$

По теореме связи производной функции  $u$  по направлению  $\overrightarrow{M_1 M_2}$  с градиентом:

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{M_1 M_2}} = \frac{1}{\sqrt{21}} \text{grad } u(2, 1, -1) \cdot (2, -4, 1) = \frac{1}{\sqrt{21}}(-5 \cdot 2 - 30 \cdot (-4) + 30 \cdot 1) = \frac{140}{\sqrt{21}}$$

Итого:

$$\boxed{\text{grad } u(2, 1, -1) = (-5, -30, 30), \quad \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{M_1 M_2}} = \frac{140}{\sqrt{21}}}$$

**Задача 2.** Вычислить поверхностный интеграл второго рода:

$$\iint_S z^2 dx dy, \quad S: \text{внешняя сторона поверхности эллипсоида } x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$$

**Решение.** По аддитивности поверхностного интеграла:

$$S = S_{\text{верх}} + S_{\text{низ}} \implies \iint_S z^2 dx dy = \iint_{S_{\text{верх}}} z^2 dx dy + \iint_{S_{\text{низ}}} z^2 dx dy$$

Параметризуем поверхность  $S_{\text{верх}}$ :

$$S_{\text{верх}}: \begin{cases} x(\rho, \varphi) = \sqrt{2}\rho \cos \varphi \\ y(\rho, \varphi) = \sqrt{2}\rho \sin \varphi, \quad \rho \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi] \\ z(\rho, \varphi) = \sqrt{1-\rho^2} \end{cases}$$

Параметризуем поверхность  $S_{\text{низ}}$ :

$$S_{\text{низ}}: \begin{cases} x(\rho, \varphi) = \sqrt{2}\rho \cos \varphi \\ y(\rho, \varphi) = \sqrt{2}\rho \sin \varphi, \quad \rho \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi] \\ z(\rho, \varphi) = -\sqrt{1-\rho^2} \end{cases}$$

Найдём направляющие косинусы для обоих случаев:

$$\cos \gamma_{\text{верх}} = \cos \gamma_{\text{низ}} = \cos \gamma = \begin{vmatrix} x'_\rho & y'_\rho \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} \cos \varphi & \sqrt{2} \sin \varphi \\ -\sqrt{2} \rho \sin \varphi & \sqrt{2} \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = 2\rho$$

Перейдём к кратным интегралам по области  $D$ :

$$\iint_{S_{\text{верх}}} z^2 dx dy + \iint_{S_{\text{низ}}} z^2 dx dy = 2 \iint_D (\sqrt{1 - \rho^2} - \sqrt{1 - \rho^2}) \rho d\rho d\varphi = 0$$

Итого:

$$\boxed{\iint_S z^2 dx dy = 0}$$

**Задача 3.** Вычислить поток векторного поля  $\vec{a}(M)$  через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью  $\rho$  и координатными плоскостями, двумя способами: используя определение потока и с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\vec{a}(M) = (3x - 1)\vec{i} + (y - x + z)\vec{j} + 4z\vec{k}, \quad \rho: 2x - y - 2z = 2$$

**Решение.** Определим вершины пирамиды  $G = OABC$ :

$$\rho: x - \frac{y}{2} - z = 1 \implies O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, -2, 0), C(0, 0, -1)$$

По аддитивности поверхностного интеграла:

$$\Phi = \Phi_{OAB} + \Phi_{OAC} + \Phi_{OBC} + \Phi_{ABC}$$

Вычислим нормированные нормальные векторы к внешним граням пирамиды  $G$ :

$$\begin{aligned} OAB \subset z = 0 &\implies \vec{n}_{OAB} = \frac{1}{\sqrt{0+0+1^2}}(0, 0, 1) = (0, 0, 1) \\ OAC \subset y = 0 &\implies \vec{n}_{OAC} = \frac{1}{\sqrt{0+1^2+0}}(0, 1, 0) = (0, 1, 0) \\ OBC \subset x = 0 &\implies \vec{n}_{OBC} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+0+0}}(-1, 0, 0) = (-1, 0, 0) \\ ABC \subset \rho &\implies \vec{n}_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}(2, -1, -2) = \frac{1}{3}(2, -1, -2) \end{aligned}$$

Вычислим  $\Phi_{OAB}$  по определению:

$$z = 0 \implies \Phi_{OAB} = \iint_{OAB} \vec{a} \cdot \vec{n}_{OAB} d\sigma = 4 \iint_{OAB} 0 dx dy = 0$$

Вычислим  $\Phi_{OAC}$  по определению:

$$\begin{aligned} y = 0 &\implies \Phi_{OAC} = \iint_{OAC} \vec{a} \cdot \vec{n}_{OAC} d\sigma = \iint_{OAC} (z - x) dx dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (z - x) dz = \int_0^1 \left( x(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left( x^2 - x - \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 1) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - 1 \right) = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Вычислим  $\Phi_{OBC}$  по определению:

$$x = 0 \implies \Phi_{OBC} = \iint_{OBC} \vec{a} \cdot \vec{n}_{OBC} d\sigma = \iint_{OBC} 1 dy dz = S_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$$

Вычислим  $\Phi_{ABC}$  по определению<sup>[1]</sup>:

$$\begin{aligned} \Phi_{ABC} &= \iint_{ABC} \vec{a} \cdot \vec{n}_{ABC} d\sigma = \\ &= \frac{1}{3} \iint_{ABC} 2(3x - 1) \frac{dy dz}{\cos \alpha} - (y - x + z) \frac{dx dz}{\cos \beta} - 2 \cdot 4z \frac{dxdy}{\cos \gamma} = \\ &= \iint_{ABC} (4 + 6z + 3y) \frac{dy dz}{2} - (x - z - 2) dx dz - 2 \cdot (4x - 2y - 4) \frac{dxdy}{2} \end{aligned}$$

Посчитаем удвоенный первый интеграл:

$$\begin{aligned} \iint_{ABC} (4 + 6z + 3y) dy dz &= \int_{-2}^0 dy \int_{-\frac{1}{2}y-1}^0 (4 + 6z + 3y) dz = \\ &= \int_{-2}^0 (4z + 3z^2 + 3zy) \Big|_{-\frac{1}{2}y-1}^0 dy = - \int_{-2}^0 \left( (4 + 3y) \left( -\frac{1}{2}y - 1 \right) + 3 \left( \frac{1}{2}y + 1 \right)^2 \right) dy = \\ &= - \int_{-2}^0 \left( -2y - 4 - \frac{3}{2}y^2 - 3y + \frac{3}{4}y^2 + 3y + 3 \right) dy = \int_{-2}^0 \left( \frac{3}{4}y^2 + 2y + 1 \right) dy = \\ &= \left( \frac{1}{4}y^3 + y^2 + y \right) \Big|_{-2}^0 = -(-2 + 4 - 2) = 0 \end{aligned}$$

Посчитаем второй интеграл:

$$\begin{aligned} \iint_{ABC} (2 + z - x) dx dz &= \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (2 + z - x) dz = \int_0^1 \left( 2z + \frac{z^2}{2} - xz \right) \Big|_{x-1}^0 dx = \\ &= - \int_0^1 \left( 2x - 2 + \frac{(x-1)^2}{2} - x^2 + x \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - 2 + 3 \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Посчитаем удвоенный третий интеграл:

$$\begin{aligned} 4 \iint_{ABC} (y - 2x + 2) dx dy &= 4 \int_0^1 dx \int_{2x-2}^0 (y - 2x + 2) dy = \\ &= 4 \int_0^1 \left( \frac{y^2}{2} - 2xy + 2y \right) \Big|_{2x-2}^0 dx = -4 \int_0^1 \left( \frac{(2x-2)^2}{2} - 2x(2x-2) + 2(2x-2) \right) dx = \\ &= -4 \int_0^1 (2(x^2 - 2x + 1) - 4x^2 + 4x + 4x - 4) dx = -4 \int_0^1 (-2x^2 + 4x - 2) dx = \\ &= 8 \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = 8 \int_0^1 (x-1)^2 d(x-1) = \frac{8}{3} (x-1)^3 \Big|_0^1 = \frac{8}{3} (0 - (-1)) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

---

<sup>[1]</sup>После оформления осознал, что можно не разбивать на три компоненты и спроектировать на одну. Однако переписывать расчёт потока  $\Phi_{ABC}$  нет желания.

Имеем:

$$\Phi = 0 - \frac{1}{3} + 1 + \left( \frac{0}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \right) = 1 - \frac{1}{3} + 2 = \frac{9 - 1}{3} = \frac{8}{3}$$

Итого:

$$\boxed{\Phi = \frac{8}{3}}$$

По формуле Остроградского-Гаусса для внешней поверхности пирамиды  $OABC$ :

$$\Phi = \iiint_{OABC} \operatorname{div} \vec{a} dV$$

Найдём дивергенцию векторного поля  $\vec{a}$ :

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 3 + 1 + 4 = 8$$

Подставим в поверхностный интеграл:

$$\iiint_{OABC} \operatorname{div} \vec{a} dV = 8 \iiint_{OABC} dV = 8V_{OABC}$$

По формуле объёма тетраэдра:

$$V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{OAB} \cdot |\overrightarrow{OC}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

Итого:

$$\boxed{\Phi = \frac{8}{3}}$$

**Задача 4.** Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{a}(M)$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $\rho: Ax + By + Cz = D$  с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора  $\vec{n} = (A, B, C)$  этой плоскости двумя способами: используя определение циркуляции; с помощью формулы Стокса:

$$\vec{a}(M) = (x+z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x-y)\vec{k}, \quad \rho: 3x + 2y + z = 6$$

**Решение.** ...

**Задача 5.** Найти величину и направление наибольшего изменения функции  $u(M) = u(x, y, z)$  в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ :

$$u(M) = x^2yz, \quad M_0(2, 0, 2)$$

**Решение.** По определению градиента функции  $u(x, y, z)$ :

$$\operatorname{grad} u(x, y, z) = \left( \frac{u}{x}, \frac{u}{y}, \frac{u}{z} \right) = (2xyz, x^2z, x^2y) \implies \operatorname{grad} (2, 0, 2) = (0, 8, 0)$$

Введём произвольное направление  $L$ :

$$L = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

Найдём изменение функции  $u(x, y, z)$  по направлению  $L$  по теореме:

$$\frac{\partial u}{\partial L} = (0, 8, 0) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = 8 \cos \beta$$

По необходимому условию экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial L} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\partial u}{\partial L} = -8 \sin \beta = 0 \implies \sin \beta = 0 \implies |\cos \beta| = 1 \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{\partial u}{\partial L} = 0 \end{cases}$$

Учтём нормировку  $L$ :

$$|L| = 1 \implies \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \implies \cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma = 0 \implies \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \cos \gamma = 0 \end{cases}$$

Итого:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial L} \right| = 8, \quad L = (0, 1, 0)$$