ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
Факультет программной инженерии
и компьютерной техники

Домашняя работа №1

Приложения двойных и тройных интегралов

(по дисциплине «Дополнительные главы
математического анализа»)

Выполнил:

Лабин Макар Андреевич,
ДГМА 28.3, P3231, 466449.

Проверил:

Богачёв Владимир Александрович

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Список задач

В рамках выполнения домашней работы *по варианту №10* необходимо предоставить решения следующих задач:

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:
$$(x^2+y^2)^2 = a(x^3-3xy^2), \quad a>0$$
2. Вычислить объём тела, ограниченного данными поверхностями:
$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}, \quad z=c$$
3. Найти момент инерции относительно координатных плоскостей тела, ограниченного поверхностями:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \quad (a>0,\ b>0,\ c>0)$$
4. Вычислить *(тройным интегралом)* объёмы тел, ограниченных поверхностями:
$$z=\sqrt{64-x^2-y^2}, \quad x^2+y^2\le 60, \quad z=1$$

2 Решения задач

Задача 1. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:*

$$(x^2+y^2)^2 = a(x^3-3xy^2), \quad a>0$$

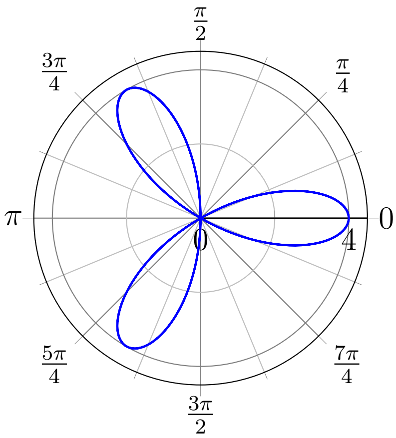
Решение. Применим преобразование $\mathcal{A}$ для перехода в полярную систему координат:

$$\mathcal{A}\colon \begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases} \tag{1}$$

Упростим аналитическое представление заданной кривой:

$$\begin{aligned} \rho^4 &= a(\rho^3\cos^3\varphi - 3\rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi) \\ \rho &= a\cos\varphi(\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi) \\ \rho &= a(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi) \\ \rho &= a\cos 3\varphi, \quad a>0 \end{aligned}$$

В таком виде можно догадаться, что кривая образует график *полярной розы* с тремя лепестками и поворотом на $\frac{\pi}{6}$ радиан по часовой стрелке:



Заметим, что углы, определяющие каждый лепесток, соответствуют промежуткам неотрицательности $\cos 3\varphi$ *(с учётом периода)*:

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

В силу симметрии каждый лепесток имеет одинаковую площадь, поэтому:

$$S_{\text{фиг.}} = 3S_{\text{леп.}}$$

Вычислим площадь лепестка Ω на $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ при помощи интеграла Римана по области:

$$S_{\text{леп.}} = \iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Учитывая (1), сделаем поправку на якобиан $\mathcal{A}$:

$$\mu(\mathcal{A}(\Omega)) = \mathcal{J}(\mathcal{A})(r,\varphi)\cdot\mu(\Omega) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} \cdot \mu(\Omega) = \rho\cdot\mu(\Omega)$$

Имеем:

$$S_{\text{леп.}} = \iint_{\Omega} \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi$$

По теореме Фубини:

$$\iint_{\Omega} \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{a\cos 3\varphi} \rho \mathrm{d}\rho = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \rho^2\Big|_0^{a\cos 3\varphi} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{4}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 6\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi a^2}{12}$$

Итого:

$$\boxed{S_{\text{фиг.}} = 3 \cdot \frac{\pi a^2}{12} = \frac{\pi a^2}{4}}$$

Задача 2. *Вычислить объём тела, ограниченного данными поверхностями:*

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad z = c$$

Решение. Тело задано площадью поперечного сечения, параллельного плоскости xOy на интервале $[0; c]$.

Вычислим объём тела Ω при помощи интеграла Римана по области:

$$V_{\text{тел.}} = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

По теореме Фубини:

$$\iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^c \mathrm{d}z \int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} \mathrm{d}y \int_{\psi_1(z,y)}^{\psi_2(z,y)} \mathrm{d}x$$

Найдём нижние и верхние границы $x = \psi_1(z,y)$, $x = \psi_2(z,y)$:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \implies x = \pm|a|\sqrt{z - \frac{y^2}{b^2}} \implies \begin{cases} \psi_1(z,y) = -|a|\sqrt{z - \frac{y^2}{b^2}} \\ \psi_2(z,y) = |a|\sqrt{z - \frac{y^2}{b^2}} \end{cases}$$

Подставим границы $x = \psi_1(z,y)$, $x = \psi_2(z,y)$ и посчитаем интеграл:

$$\int_{\psi_1(z,y)}^{\psi_2(z,y)} \mathrm{d}x = x\Bigg|_{-|a|\sqrt{z-\frac{y^2}{b^2}}}^{|a|\sqrt{z-\frac{y^2}{b^2}}} = 2|a|\sqrt{z - \frac{y^2}{b^2}}$$

Найдём нижние и верхние границы $y = \phi_1(z)$, $y = \phi_2(z)$:

$$z = \frac{y^2}{b^2} \implies y = \pm|b|\sqrt{z} \implies \begin{cases} \phi_1(z) = -|b|\sqrt{z} \\ \phi_2(z) = |b|\sqrt{z} \end{cases}$$

Подставим границы $y = \phi_1(z)$, $y = \phi_2(z)$ и посчитаем интеграл:

$$\int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} 2\,|a| \sqrt{z - \frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}y = 2\,|a| \int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} \sqrt{z - \frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}y =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} y = |b|\sqrt{z}\sin\alpha & |b|\sqrt{z} = |b|\sqrt{z}\sin\alpha_2 \implies \alpha_2 = \pi/2 \\ \mathrm{d}y = |b|\sqrt{z}\cos\alpha\mathrm{d}\alpha & -|b|\sqrt{z} = |b|\sqrt{z}\sin\alpha_1 \implies \alpha_1 = -\pi/2 \end{array}\right] =$$

$$= 2\,|a|\,|b|\,z \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\,|\cos\alpha|\,\mathrm{d}\alpha = 4\,|a|\,|b|\,z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\alpha\mathrm{d}\alpha =$$

$$= 2\,|a|\,|b|\,z \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\alpha)\mathrm{d}\alpha = 2\,|a|\,|b|\,z \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\,|a|\,|b|\,z$$

Наконец, посчитаем последний интеграл:

$$\int_0^c |a|\,|b|\,\pi z\mathrm{d}z = |a|\,|b|\,\pi \int_0^c z\mathrm{d}z = \pi\,|a|\,|b|\,\frac{z^2}{2}\,|_0^c = \pi\,|a|\,|b|\,\frac{c^2}{2}$$

Итого:

$$\boxed{V_{\text{тел.}} = \pi\,|a|\,|b|\,\frac{c^2}{2}}$$

Задача 3. *Найти момент инерции относительно координатных плоскостей тела, ограниченного поверхностями:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$$

Решение. По определению момента инерции относительно координатных плоскостей тела Ω:

$$I_{yz} = \iiint_\Omega x^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$I_{xz} = \iiint_\Omega y^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$I_{xy} = \iiint_\Omega z^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Поскольку иное в задаче не оговорено, будем считать плотность тела $\rho(x,y,z)$ постоянной и равной 1:

$$I_{yz} = \iiint_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \quad I_{xz} = \iiint_\Omega y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \quad I_{xy} = \iiint_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

По теореме Фубини для момента инерции I_{yz} тела Ω:

$$\iiint_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^d \mathrm{d}z \int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} \mathrm{d}y \int_{\psi_1(z,y)}^{\psi_2(z,y)} x^2\mathrm{d}x$$

Найдём нижние и верхние границы $x = \psi_1(z,y)$, $x = \psi_2(z,y)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c} \implies x = \pm\,|a|\sqrt{2\frac{z}{c} - \frac{y^2}{b^2}} \implies \psi_1(z,y) = -a\sqrt{2\frac{z}{c} - \frac{y^2}{b^2}}$$
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \implies x = a\left(\frac{z}{c} - \frac{y}{b}\right) \implies \psi_2(z,y) = a\left(\frac{z}{c} - \frac{y}{b}\right)$$

Подставим границы $x = \psi_1(z, y)$, $x = \psi_2(z, y)$ и посчитаем интеграл:

$$\int_{\psi_1(z,y)}^{\psi_2(z,y)} x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\bigg|_{-a\sqrt{2\frac{z}{c}-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)} = \frac{a^3}{3}\left(\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)^3 + \left(\sqrt{2\frac{z}{c}-\frac{y^2}{b^2}}\right)^3\right)$$

Найдём нижние и верхние границы $y = \phi_1(z)$, $y = \phi_2(z)$:

$$\frac{y}{b} = \frac{z}{c} \implies y = \frac{b}{c}z \implies \phi_1(z) = \frac{b}{c}z$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c} \implies y = \pm|b|\sqrt{2\frac{z}{c}} \implies \phi_2(z) = b\sqrt{2\frac{z}{c}}$$

Подставим границы $y = \phi_1(z)$, $y = \phi_2(z)$ и посчитаем интеграл:

$$\int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} \frac{a^3}{3}\left(\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)^3 + \left(\sqrt{2\frac{z}{c}-\frac{y^2}{b^2}}\right)^3\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{a^3}{3}\left(\int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)}\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)^3\mathrm{d}y + \int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)}\left(\sqrt{2\frac{z}{c}-\frac{y^2}{b^2}}\right)^3\mathrm{d}y\right)$$

Посчитаем первое слагаемое:

$$\int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)}\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)^3\mathrm{d}y = -b\int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)}\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)^3\mathrm{d}\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right) = -\frac{b}{4}\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)^4\bigg|_{\frac{b}{c}z}^{b\sqrt{2\frac{z}{c}}} =$$

$$= -\frac{b}{4}\left(\left(\frac{z}{c}-\sqrt{2\frac{z}{c}}\right)^4 - \left(\frac{z}{c}-\frac{z}{c}\right)^4\right) = -\frac{b}{4}\left(\frac{z}{c}-\sqrt{2\frac{z}{c}}\right)^4$$

Посчитаем второе слагаемое:

$$\int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)}\left(\sqrt{2\frac{z}{c}-\frac{y^2}{b^2}}\right)^3\mathrm{d}y =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} y = b\sqrt{2\frac{z}{c}}\sin\alpha & \frac{b}{c}z = b\sqrt{2\frac{z}{c}}\sin\alpha_2 \implies \alpha_2 = \arcsin\sqrt{\frac{z}{2c}} \\ \mathrm{d}y = b\sqrt{2\frac{z}{c}}\cos\alpha\mathrm{d}\alpha & -b\sqrt{2\frac{z}{c}} = b\sqrt{2\frac{z}{c}}\sin\alpha_1 \implies \alpha_1 = -\pi/2 \end{array}\right] =$$

$$= 2\frac{z}{c}\int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)}|\cos\alpha|\cos\alpha\mathrm{d}\alpha$$

Для поиска верхней границы $z = d$ выведем условие $g(x, y) = 0$ как пересечение эллиптического параболоида с плоскостью:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c} \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b} = \frac{z}{c} \end{cases} \implies \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y}{b} = 0 \implies \left(\frac{x}{a}-1\right)^2 + \left(\frac{y}{b}-1\right)^2 = 2 \implies$$

$$\implies g(x, y) = \left(\frac{x}{a}-1\right)^2 + \left(\frac{y}{b}-1\right)^2 - 2$$

Запишем функцию Лагранжа для поиска экстремума z плоскости тела Ω при условии $g(x,y)=0$:

$$L(x,y,\lambda)=\lambda_0 c\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+\lambda_1\left(\left(\frac{x}{a}-1\right)^2+\left(\frac{y}{b}-1\right)^2-2\right)$$

Воспользуемся методом множителей Лагранжа для проверки необходимого условия условного экстремума в точке $M(x,y)$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}(M,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(M,\lambda)=0\\ \left(\dfrac{x}{a}-1\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}-1\right)^2=2\end{cases}\implies\begin{cases}\dfrac{\lambda_0 c}{a}+\dfrac{2\lambda_1}{a}\left(\dfrac{x}{a}-1\right)^2=0\\ \dfrac{\lambda_0 c}{b}+\dfrac{2\lambda_1}{b}\left(\dfrac{y}{b}-1\right)^2=0\\ \left(\dfrac{x}{a}-1\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}-1\right)^2=2\end{cases}\implies$$

$$\implies\begin{cases}2\lambda_1\left(\dfrac{x}{a}-1\right)^2-2\lambda_1\left(\dfrac{y}{b}-1\right)^2=0\\ \left(\dfrac{x}{a}-1\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}-1\right)^2=2\end{cases}\implies\begin{cases}\left|\dfrac{x}{a}-1\right|=\left|\dfrac{y}{b}-1\right|\\ \left(\dfrac{x}{a}-1\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}-1\right)^2=2\end{cases}\implies$$

$$\implies\begin{cases}\left(\dfrac{x}{a}-1\right)^2=1\\ \left(\dfrac{x}{a}-1\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}-1\right)^2=2\end{cases}\implies\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2a\end{array}\right.\\ \left(\dfrac{x}{a}-1\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}-1\right)^2=2\end{cases}\implies$$

$$\implies\begin{cases}x\in\{0,2a\}\\ y\in\{0,2b\}\end{cases}$$

Рассмотрим каждую точку M и найдём верхнюю границу $z=d$:

1. $\measuredangle M(0,0)\implies\frac{z}{c}=0\implies z=0$
2. $\measuredangle M(0,2b)\implies\frac{z}{c}=2\implies z=2c$
3. $\measuredangle M(2a,0)\implies\frac{z}{c}=2\implies z=2c$
4. $\measuredangle M(2a,2b)\implies\frac{z}{c}=4\implies z=4c$ — наибольшее значение.

По теореме Фубини для момента инерции I_{xz} тела Ω:

$$\iiint_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^d\mathrm{d}z\int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)}y^2\mathrm{d}y\int_{\psi_1(z,y)}^{\psi_2(z,y)}\mathrm{d}x$$

По теореме Фубини для момента инерции I_{xy} тела Ω:

$$\iiint_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^d z^2\mathrm{d}z\int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)}\mathrm{d}y\int_{\psi_1(z,y)}^{\psi_2(z,y)}\mathrm{d}x$$

Задача 4. *Вычислить (тройным интегралом) объёмы тел, ограниченных поверхностями:*

$$z=\sqrt{64-x^2-y^2},\quad x^2+y^2\le 60,\quad z=1$$

Решение. Вычислим объём тела Ω при помощи интеграла Римана по области:

$$V_{\text{тел.}} = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Тело Ω ограничено верхней полусферой радиуса 8 с центром в начале координат, бесконечным круговым цилиндром радиуса $\sqrt{60}$ и плоскостью, параллельной xOy и расположенной на высоте 1.

Определим высоту пересечения полусферы и кругового цилиндра:

$$\begin{cases} z = \sqrt{64 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = 60 \end{cases} \implies z = 2$$

По теореме Фубини и линейности интеграла Римана:

$$\iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_1^2 \mathrm{d}z \int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} \mathrm{d}y \int_{\psi_1(z,y)}^{\psi_2(z,y)} \mathrm{d}x + \int_2^8 \mathrm{d}z \int_{\tilde{\phi}_1(z)}^{\tilde{\phi}_2(z)} \mathrm{d}y \int_{\tilde{\psi}_1(z,y)}^{\tilde{\psi}_2(z,y)} \mathrm{d}x \qquad (2)$$

Найдём нижние и верхние границы $x = \psi_1(z, y)$, $x = \psi_2(z, y)$:

$$x^2 + y^2 = 60 \implies x = \pm\sqrt{60 - y^2} \implies \begin{cases} \psi_1(z, y) = -\sqrt{60 - y^2} \\ \psi_2(z, y) = \sqrt{60 - y^2} \end{cases}$$

Подставим границы $x = \psi_1(z, y)$, $x = \psi_2(z, y)$ и посчитаем интеграл:

$$\int_{\psi_1(z,y)}^{\psi_2(z,y)} \mathrm{d}x = x \Big|_{-\sqrt{60-y^2}}^{\sqrt{60-y^2}} = 2\sqrt{60 - y^2}$$

Найдём нижние и верхние границы $y = \phi_1(z)$, $y = \phi_2(z)$:

$$y^2 = 60 \implies y = \pm\sqrt{60} \implies \begin{cases} \phi_1(z) = -\sqrt{60} \\ \phi_2(z) = \sqrt{60} \end{cases}$$

Подставим границы $y = \phi_1(z)$, $y = \phi_2(z)$ и посчитаем интеграл:

$$\int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} 2\sqrt{60 - y^2}\mathrm{d}y = 2\int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} \sqrt{60 - y^2}\mathrm{d}y =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} y = \sqrt{60}\sin\alpha & \sqrt{60} = \sqrt{60}\sin\alpha_2 \implies \alpha_2 = \pi/2 \\ \mathrm{d}y = \sqrt{60}\cos\alpha\mathrm{d}\alpha & -\sqrt{60} = \sqrt{60}\sin\alpha_1 \implies \alpha_1 = -\pi/2 \end{array} \right] =$$

$$= 120\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\,|\cos\alpha|\,\mathrm{d}\alpha^{[1]} = 60\pi$$

Досчитаем первый интеграл в (2):

$$\int_1^2 60\pi\mathrm{d}z = 60\pi\int_1^2 \mathrm{d}z = 60\pi z\,\Big|_1^2 = 60\pi$$

[1]Такой интеграл был посчитан в задании №2.

Найдём нижние и верхние границы $x = \tilde{\psi}_1(z,y)$, $x = \tilde{\psi}_2(z,y)$:

$$z = \sqrt{64 - x^2 - y^2} \implies x = \pm\sqrt{64 - z^2 - y^2} \implies \begin{cases} \psi_1(z,y) = -\sqrt{64 - z^2 - y^2} \\ \psi_2(z,y) = \sqrt{64 - z^2 - y^2} \end{cases}$$

Подставим границы $x = \tilde{\psi}_1(z,y)$, $x = \tilde{\psi}_2(z,y)$ и посчитаем интеграл:

$$\int_{\tilde{\psi}_1(z,y)}^{\tilde{\psi}_2(z,y)} \mathrm{d}x = x \Big|_{-\sqrt{64-z^2-y^2}}^{\sqrt{64-z^2-y^2}} = 2\sqrt{64 - z^2 - y^2}$$

Найдём нижние и верхние границы $y = \tilde{\phi}_1(z)$, $y = \tilde{\phi}_2(z)$:

$$z = \sqrt{64 - y^2} \implies y = \pm\sqrt{64 - z^2} \implies \begin{cases} \tilde{\phi}_1(z) = -\sqrt{64 - z^2} \\ \tilde{\phi}_2(z) = \sqrt{64 - z^2} \end{cases}$$

Подставим границы $y = \tilde{\phi}_1(z)$, $y = \tilde{\phi}_2(z)$ и посчитаем интеграл:

$$\int_{\tilde{\phi}_1(z)}^{\tilde{\phi}_2(z)} 2\sqrt{64 - z^2 - y^2}\mathrm{d}y = 2\int_{\tilde{\phi}_1(z)}^{\tilde{\phi}_2(z)} \sqrt{64 - z^2 - y^2}\mathrm{d}y =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} y = \sqrt{64 - z^2}\sin\alpha & \sqrt{64 - z^2} = \sqrt{64 - z^2}\sin\alpha_2 \implies \alpha_2 = \pi/2 \\ \mathrm{d}y = \sqrt{64 - z^2}\cos\alpha\mathrm{d}\alpha & -\sqrt{64 - z^2} = \sqrt{64 - z^2}\sin\alpha_1 \implies \alpha_1 = -\pi/2 \end{array} \right] =$$

$$= 2(64 - z^2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\,|\cos\alpha|\,\mathrm{d}\alpha^{[2]} = \pi(64 - z^2)$$

Досчитаем второй интеграл в (2):

$$\int_2^8 \pi(64 - z^2)\mathrm{d}z = \pi\int_2^8 (64 - z^2)\mathrm{d}z = \pi\left(64z - \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_2^8 = \pi(64\cdot(8-2) - \frac{512 - 8}{3}) = 216\pi$$

Итого:

$$\boxed{V_{\text{тел.}} = 60\pi + 216\pi = 276\pi}$$

[2]Аналогично, такой интеграл был посчитан в задании №2.