ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
Факультет программной инженерии
и компьютерной техники

Домашняя работа №3-4

Теория поля. Поверхностный интеграл.

(по дисциплине «Дополнительные главы
математического анализа»)

Выполнил:

Лабин Макар Андреевич,
ДГМА 28.3, P3231, 466449.

Проверил:

Богачёв Владимир Александрович

ИТМО

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Список задач

В рамках выполнения домашней работы *по варианту №2* необходимо предоставить решения следующих задач:

1. Дана функция $u(M) = u(x, y, z)$ и точки M_1 и M_2. Вычислить $\operatorname{grad} u(M_1)$, а также производную функции $u(M)$ в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:
$$u(M) = 5xy^3z^3, \quad M_1(2, 1, -1), \quad M_2(4, -3, 0)$$

2. Вычислить поверхностный интеграл второго рода:
$$\iint_S z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad S\colon \text{внешняя сторона поверхности эллипсоида } x^2+y^2+2z^2 = 2$$

3. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью ρ и координатными плоскостями, двумя способами: использовав определение потока и с помощью формулы Остроградского-Гаусса:
$$\vec{a}(M) = (3x-1)\vec{i} + (y-x+z)\vec{j} + 4z\vec{k}, \quad \rho\colon 2x - y - 2z = 2$$

4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $\rho\colon Ax+By+Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости двумя способами: используя определение циркуляции; с помощью формулы Стокса:
$$\vec{a}(M) = (x+z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x-y)\vec{k}, \quad \rho\colon 3x + 2y + z = 6$$

5. Найти величину и направление наибольшего изменения функции $u(M) = u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:
$$u(M) = x^2yz, \quad M_0(2, 0, 2)$$

2 Решения задач

Задача 1. *Дана функция $u(M) = u(x,y,z)$ и точки M_1 и M_2. Вычислить* $grad\, u(M_1)$*, а также производную функции $u(M)$ в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:*

$$u(M) = 5xy^3z^3, \quad M_1(2,1,-1), \quad M_2(4,-3,0)$$

Решение. По определению градиента функции $u(x,y,z)$:

$$\operatorname{grad} u(x,y,z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \left(5y^3z^3, 15xy^2z^3, 15xy^3z^2\right) \implies$$
$$\implies \operatorname{grad} u(2,1,-1) = (-5,-30,30)$$

Определим нормированный вектор γ:

$$\gamma = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} = \frac{(4-2,-3-1,0-(-1))}{\sqrt{4+16+1}} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2,-4,1)$$

По теореме связи производной функции u по направлению $\overrightarrow{M_1M_2}$ с градиентом:

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{M_1M_2}} = \frac{1}{\sqrt{21}} \operatorname{grad} u(2,1,-1)\cdot(2,-4,1) = \frac{1}{\sqrt{21}}(-5\cdot 2 - 30\cdot(-4) + 30\cdot 1) = \frac{140}{\sqrt{21}}$$

Итого:

$$\boxed{\operatorname{grad} u(2,1,-1) = (-5,-30,30), \quad \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{M_1M_2}} = \frac{140}{\sqrt{21}}}$$

Задача 2. *Вычислить поверхностный интеграл второго рода:*

$$\iint_S z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad S\colon \textit{внешняя сторона поверхности эллипсоида } x^2+y^2+2z^2=2$$

Решение. По аддитивности поверхностного интеграла:

$$S = S_{\text{верх}} + S_{\text{низ}} \implies \iint_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S_{\text{верх}}} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{S_{\text{низ}}} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Параметризуем поверхность $S_{\text{верх}}$:

$$S_{\text{верх}}\colon \begin{cases} x(\rho,\varphi) = \sqrt{2}\rho\cos\varphi \\ y(\rho,\varphi) = \sqrt{2}\rho\sin\varphi \\ z(\rho,\varphi) = \sqrt{1-\rho^2} \end{cases}, \quad \rho\in[0,1]\,,\ \varphi\in[0,2\pi]$$

Параметризуем поверхность $S_{\text{низ}}$:

$$S_{\text{низ}}\colon \begin{cases} x(\rho,\varphi) = \sqrt{2}\rho\cos\varphi \\ y(\rho,\varphi) = \sqrt{2}\rho\sin\varphi \\ z(\rho,\varphi) = -\sqrt{1-\rho^2} \end{cases}, \quad \rho\in[0,1]\,,\ \varphi\in[0,2\pi]$$

Найдём направляющие косинусы для обоих случаев:

$$\cos\gamma_{\text{верх}} = \cos\gamma_{\text{низ}} = \cos\gamma = \begin{vmatrix} x'_\rho & y'_\rho \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2}\cos\varphi & \sqrt{2}\sin\varphi \\ -\sqrt{2}\rho\sin\varphi & \sqrt{2}\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = 2\rho$$

Перейдём к кратным интегралам по области D:

$$\iint_{S_{\text{верх}}} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{S_{\text{низ}}} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_D (\sqrt{1-\rho^2} - \sqrt{1-\rho^2})\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = 0$$

Итого:

$$\boxed{\iint_S z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0}$$

Задача 3. *Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью ρ и координатными плоскостями, двумя способами: использовав определение потока и с помощью формулы Остроградского-Гаусса:*

$$\vec{a}(M) = (3x-1)\vec{i} + (y - x + z)\vec{j} + 4z\vec{k}, \quad \rho\colon 2x - y - 2z = 2$$

Решение. ...

Задача 4. *Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости ρ: $Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости двумя способами: используя определение циркуляции; с помощью формулы Стокса:*

$$\vec{a}(M) = (x+z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x - y)\vec{k}, \quad \rho\colon 3x + 2y + z = 6$$

Решение. ...

Задача 5. *Найти величину и направление наибольшего изменения функции $u(M) = u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:*

$$u(M) = x^2yz, \quad M_0(2, 0, 2)$$

Решение. По определению градиента функции $u(x, y, z)$:

$$\operatorname{grad} u(x, y, z) = \left(\frac{u}{x}, \frac{u}{y}, \frac{u}{z}\right) = (2xyz, x^2z, x^2y) \implies \operatorname{grad}(2, 0, 2) = (0, 8, 0)$$

Введём произвольное направление L:

$$L = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Найдём изменение функции $u(x, y, z)$ по направлению L по теореме:

$$\frac{\partial u}{\partial L} = (0, 8, 0) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = 8\cos\beta$$

По необходимому условию экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\dfrac{\partial u}{\partial L} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \beta}\dfrac{\partial u}{\partial L} = -8\sin\beta = 0 \implies \sin\beta = 0 \implies |\cos\beta| = 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial \gamma}\dfrac{\partial u}{\partial L} = 0 \end{cases}$$

Учтём нормировку L:

$$|L| = 1 \implies \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \implies \cos^2\alpha + \cos^2\gamma = 0 \implies \begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ \cos\gamma = 0 \end{cases}$$

Итого:

$$\boxed{\left|\frac{\partial u}{\partial L}\right| = 8, \quad L = (0, 1, 0)}$$