ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
Факультет программной инженерии
и компьютерной техники

Лабораторная работа

Построение и визуализация фрактальных множеств

(по дисциплине «Теория функции комплексного переменного»)

Выполнили студенты:

Горин Семён, 465592
Лабин Макар, 466449
Пивоваров Роман, 467082

Поток: 22.4

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Множество Мандельброта

2 Множество Жюлиа

3 Кривая Гильберта

3.1 Описание структуры и построения

Кривая Гильберта была описана немецким математиком Давидом Гильбертом в 1891 году. Она тесно связана с понятием *всюду плотных кривых*.

Определение 1. *Кривая на плоскости называется* ***всюду плотной*** *в некоторой области, если она проходит через любую сколь угодно малую окрестность каждой точки этой области.*

Кривая Гильберта — пример непрерывной сюръекции вида $p\colon [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^2$, причём она является фракталом из-за $D_T < D_F$:

- топологическая размерность D_T равна 1, поскольку прообраз — отрезок;
- метрическая размерность D_F равна 2, поскольку образ — квадрат.

Вышеуказанные утверждения требуют более формального обоснования, которое выходит за рамки курса. Оставим их доказательство в качестве упражнения читателю.

3.1.1 Алгоритм построения

Итеративный процесс построения кривой Гильберта удобно описать при помощи *L-системы*.

Определение 2. *Детерминированной контекстнонезависимой* ***L-системой*** *называют набор, состоящий из алфавита, аксиомы, и множества правил.*

Исторически она впервые была предложена биологом Аристидом Линденмайером в качестве математической модели развития растений.

Определение 3. ***Алфавитом*** *называется конечное множество, а его элементы —* ***символами****.*

Природа символов не важна, их единственная функция — отличаться друг от друга.

Определение 4. ***Аксиомой*** *называется некоторая строка над алфавитом, определяющая начальное состояние системы.*

Определение 5. ***Правилом*** *называется пара, состоящая из предшественника (символа алфавита) и последователя (строки над алфавитом).*

Опираясь на определения, *L-система* для кривой Гильберта выглядит следующим образом:

Алфавит: $A, B, F, +, -$

Аксиома: A

Правила:
$$\begin{cases} A \to -BF + AFA + FB- \\ B \to +AF - BFB - FA+ \end{cases}$$

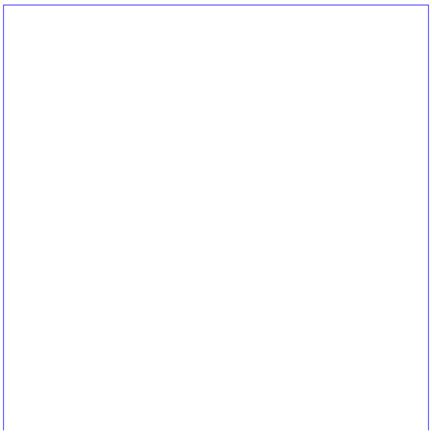
Здесь F означает «движение вперёд», «$-$» — поворот влево на 90°, «$+$» — поворот вправо на 90°, а A и B игнорируются при рисовании.

Листинг 1: Построение кривой Гильберта

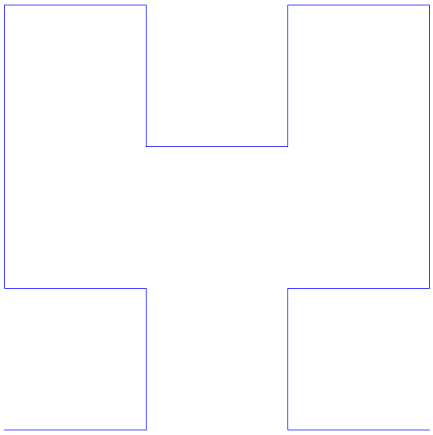
```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def generate_hilbert_string(level):
    """
    Generate Hilbert curve string using L-system rules
    """
    def apply_rules(char):
        if char == 'A':
            return '-BF+AFA+FB-'
        elif char == 'B':
            return '+AF-BFB-FA+'
        else:
            return char

    current_string = 'A' # axiom

    for _ in range(level):
        new_string = ''
        for char in current_string:
            new_string += apply_rules(char)
        current_string = new_string

    return current_string

def draw_hilbert_from_string(hilbert_string, level, step=10, angle=90, filename="hilbert_curve.png"):
    """
    Draw Hilbert curve by interpreting the generated string using matplotlib
    """
    x, y, direction = 0, 0, 0
    points = [(x, y)]

    for char in hilbert_string:
        if char == 'F':
            rad = np.radians(direction)
            x += step * np.cos(rad)
            y += step * np.sin(rad)
            points.append((x, y))
        elif char == '+':
            direction -= angle
        elif char == '-':
            direction += angle

    plt.figure(figsize=(10, 10))
    plt.plot(
        [p[0] for p in points],
        [p[1] for p in points],
        'b-',
```

```python
            linewidth=1)
    plt.axis('off')

    total_segments = len([c for c in hilbert_string if c == 'F'])
    print(f'Hilbert Curve - Level {level}')
    print(f'Total segments: {total_segments:,}')
    print(f'Saving plot to: {filename}')
    plt.tight_layout()
    plt.savefig(filename, dpi=150, bbox_inches='tight', facecolor='white')
    plt.close()

def main():
    try:
        level = int(input("Enter the level for Hilbert curve: "))
        if level < 1:
            print("Level must be at least 1. Using level 1.")
            level = 1
        elif level > 7:
            print("Warning: High levels may take long to compute and render.")

        output_file = f"hilbert_curve_level{level}.png"
        draw_hilbert_from_string(generate_hilbert_string(level), level=level, step=8, filename=output_file)

    except ValueError:
        print("Invalid input. Please enter a valid integer.")
        return

if __name__ == "__main__":
    main()
```

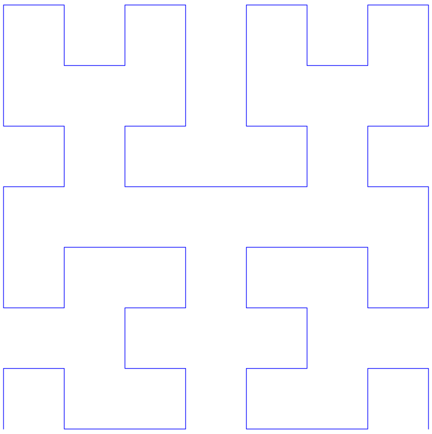
3.2 Визуализации



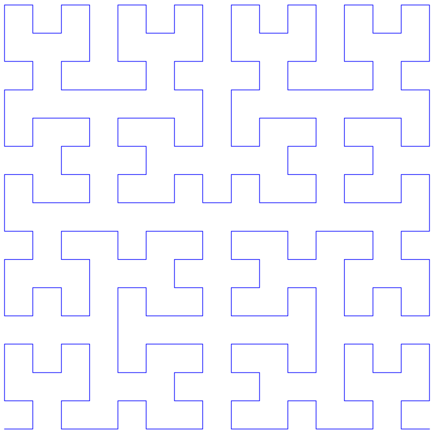
Кривая Гильберта 1-го порядка
Всего сегментов: 3



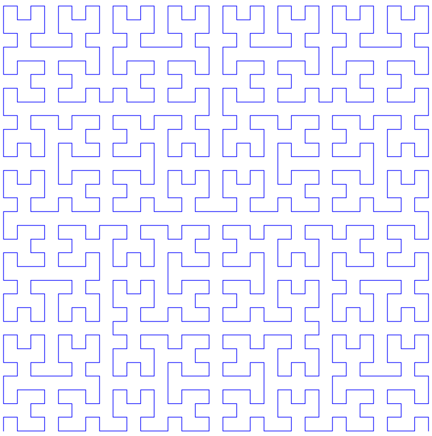
Кривая Гильберта 2-го порядка
Всего сегментов: 15



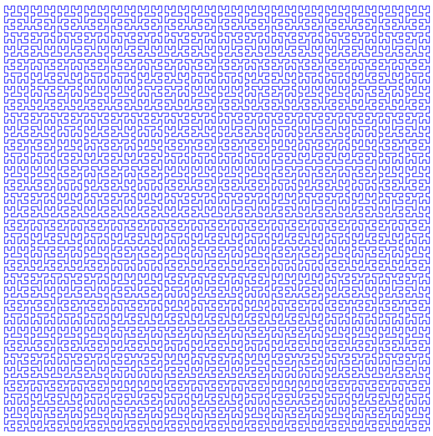
Кривая Гильберта 3-го порядка
Всего сегментов: 63



Кривая Гильберта 4-го порядка
Всего сегментов: 255



Кривая Гильберта 5-го порядка
Всего сегментов: 1,023



Кривая Гильберта 7-го порядка
Всего сегментов: 16,383

Рис. 1: Построения кривой Гильберта разных порядков

3.3 Анализ структуры

Кривая Гильберта обладает рядом интересных свойств:

- **Сюръективность.** Кривая Гильберта не позволяет биективно отобразить отрезок в квадрат, потому что $p_n\colon [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^2$ при $n \to \infty$ имеет бесконечное число самопересечений. В частности, центральной точке соответствуют $p(\frac{1}{6})$, $p(\frac{1}{2})$ и $p(\frac{5}{6})$.[1]

- **Недифференцируемость.** Несмотря на непрерывность отображения p, оно нигде не дифференцируемо в силу более сильного утверждения для всюду плотных кривых.[2]

- **Самоподобие.** Если увеличить любой подквадрат в $2n$ раз, мы получим кривую в точности похожую на всю кривую.

[1] That's Maths: Space-Filling Curves, Part II

[2] Sagan H. Space-Filling Curves. Springer-Verlag, 1994. Глава 3, стр. 34-36

Заключение

Были исследованы методы построения кривой Гильберта и показано, как простое рекурсивное правило приводит к образованию сложной, самоподобной структуры. Этот фрактал является классическим примером пространства-заполняющих кривых и демонстрирует идею предельного перехода от дискретных линий к непрерывной плоской форме.