ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
Факультет программной инженерии
и компьютерной техники

Домашняя работа №2

Криволинейные интегралы

(по дисциплине «Дополнительные главы
математического анализа»)

Выполнил:

Лабин Макар Андреевич,
ДГМА 28.3, P3231, 466449.

Проверил:

Богачёв Владимир Александрович

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Список задач

В рамках выполнения домашней работы *по варианту №10* необходимо предоставить решения следующих задач:

1. Вычислить данный криволинейный интеграл:

$$\int_{L_{AB}} \frac{y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}, \quad L_{AB} \text{ — отрезок } AB\colon A(1,2),\ B(3,6)$$

2. Показать, что данное выражение является полным дифференциалом функции $u(x,y)$. Найти функцию $u(x,y)$:

$$(ye^{xy} + y^2)\mathrm{d}x + (xe^{xy} + 2xy)\mathrm{d}y$$

3. Вычислить момент инерции относительно начала координат отрезка прямой, заключенного между точками $A(2,0)$ и $B(0,1)$, если линейная плотность в каждой его точке равна 1.

2 Решения задач

Задача 1. *Вычислить данный криволинейный интеграл:*

$$\int_{L_{AB}} \frac{y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}, \quad L_{AB} \text{ — отрезок } AB\colon A(1,2),\ B(3,6)$$

Решение. Параметризуем L_{AB}:

$$L_{AB}\colon \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t \end{cases}, \quad t \in [1,3]$$

Подставим в интеграл:

$$\int_{L_{AB}} \frac{y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int_1^3 \frac{4t\mathrm{d}t}{5t^2} = \frac{2}{5}\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t^2}{t^2} = \frac{2}{5}\ln t^2\Big|_1^3 = \frac{4\ln 3}{5}$$

Итого:

$$\boxed{\int_{L_{AB}} \frac{y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \frac{4\ln 3}{5}}$$

Задача 2. *Показать, что данное выражение является полным дифференциалом функции $u(x,y)$. Найти функцию $u(x,y)$:*

$$(ye^{xy}+y^2)\mathrm{d}x + (xe^{xy}+2xy)\mathrm{d}y$$

Решение. Проверим условие Грина:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(ye^{xy}+y^2)}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + 2y \\ \dfrac{\partial(xe^{xy}+2xy)}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + 2y \end{cases} \implies \frac{\partial(ye^{xy}+y^2)}{\partial y} = \frac{\partial(xe^{xy}+2xy)}{\partial x} \implies$$
$$\implies \exists u(x,y)\colon \mathrm{d}u(x,y) = (ye^{xy}+y^2)\mathrm{d}x + (xe^{xy}+2xy)\mathrm{d}y$$

Найдём функцию $u(x,y)$ из определения полного дифференциала:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} + y^2 \implies u(x,y) = \int (ye^{xy}+y^2)\mathrm{d}x = e^{xy} + xy^2 + C(y)$$

Найдём функцию $C(y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} + 2xy \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} + 2xy + C'(y) \end{cases} \implies C'(y) = 0 \implies C(y) = C \in \mathbb{R}$$

Итого:

$$\boxed{u(x,y) = e^{xy} + xy^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Задача 3. *Вычислить момент инерции относительно начала координат отрезка прямой, заключенного между точками $A(2,0)$ и $B(0,1)$, если линейная плотность в каждой его точке равна 1.*

Решение. По определению момента инерции относительно точки $O(0,0)$:

$$I_O = \int_{L_{AB}} \lambda(s) r^2(s) \mathrm{d}s = [\lambda(s) = 1] = \int_{L_{AB}} r^2(s) \mathrm{d}s$$

Параметризуем отрезок прямой L_{AB}:

$$L_{AB}\colon \begin{cases} x(t) = -2 + 2t \\ y(t) = t \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

Перепишем интеграл:

$$\int_{L_{AB}} r^2(s) \mathrm{d}s = \int_0^1 r^2(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \mathrm{d}t = \sqrt{5} \int_0^1 r^2(t) \mathrm{d}t$$

Выразим $r^2(t)$ через $x = x(t),\ y = y(t)$:

$$r^2(s) = (x-0)^2 + (y-0)^2 = (2t-2)^2 + t^2 = 5t^2 - 8t + 4$$

Подставим $r^2(t)$ в последний интеграл:

$$\int_0^1 r^2(t) \mathrm{d}t = \int_0^1 (5t^2 - 8t + 4) \mathrm{d}t = \left(\frac{5}{3} t^3 - 4t^2 + 4t \right) \Bigg|_0^1 = \frac{5}{3}$$

Итого:

$$\boxed{I_O = \frac{5\sqrt{5}}{3}}$$