

ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ
И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Домашняя работа №3-4

Теория поля. Поверхностный интеграл.

(по дисциплине «Дополнительные главы
математического анализа»)

Выполнил:

Лабин Макар Андреевич,
ДГМА 28.3, Р3231, 466449.

Проверил:

Богачёв Владимир Александрович

ИТМО

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Список задач

В рамках выполнения домашней работы *по варианту №2* необходимо предоставить решения следующих задач:

1. Дана функция $u(M) = u(x, y, z)$ и точки M_1 и M_2 . Вычислить $\text{grad } u(M_1)$, а также производную функции $u(M)$ в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$:

$$u(M) = 5xy^3z^3, \quad M_1(2, 1, -1), \quad M_2(4, -3, 0)$$

2. Вычислить поверхностный интеграл второго рода:

$$\iint_S z^2 dx dy, \quad S: \text{внешняя сторона поверхности эллипсоида } x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$$

3. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью ρ и координатными плоскостями, двумя способами: используя определение потока и с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\vec{a}(M) = (3x - 1)\vec{i} + (y - x + z)\vec{j} + 4z\vec{k}, \quad \rho: 2x - y - 2z = 2$$

4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $\rho: Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости двумя способами: используя определение циркуляции; с помощью формулы Стокса:

$$\vec{a}(M) = (x + z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x - y)\vec{k}, \quad \rho: 3x + 2y + z = 6$$

5. Найти величину и направление наибольшего изменения функции $u(M) = u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$u(M) = x^2yz, \quad M_0(2, 0, 2)$$

2 Решения задач

Задача 1. Дана функция $u(M) = u(x, y, z)$ и точки M_1 и M_2 . Вычислить $\text{grad } u(M_1)$, а также производную функции $u(M)$ в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$:

$$u(M) = 5xy^3z^3, \quad M_1(2, 1, -1), \quad M_2(4, -3, 0)$$

Решение. По определению градиента функции $u(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \text{grad } u(x, y, z) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = (5y^3z^3, 15xy^2z^3, 15xy^3z^2) \implies \\ &\implies \text{grad } u(2, 1, -1) = (-5, -30, 30) \end{aligned}$$

Определим нормированный вектор γ :

$$\gamma = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{|\overrightarrow{M_1 M_2}|} = \frac{(4-2, -3-1, 0-(-1))}{\sqrt{4+16+1}} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2, -4, 1)$$

По формуле связи производной функции u по направлению $\overrightarrow{M_1 M_2}$ с градиентом:

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{M_1 M_2}} = \frac{1}{\sqrt{21}} \text{grad } u(2, 1, -1) \cdot (2, -4, 1) = \frac{1}{\sqrt{21}}(-5 \cdot 2 - 30 \cdot (-4) + 30 \cdot 1) = \frac{140}{\sqrt{21}}$$

Итого:

$\text{grad } u(2, 1, -1) = (-5, -30, 30), \quad \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{M_1 M_2}} = \frac{140}{\sqrt{21}}$
--

Задача 2. Вычислить поверхностный интеграл второго рода:

$$\iint_S z^2 dx dy, \quad S: \text{внешняя сторона поверхности эллипсоида } x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$$

Решение. ...

Задача 3. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью ρ и координатными плоскостями, двумя способами: используя определение потока и с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\vec{a}(M) = (3x-1)\vec{i} + (y-x+z)\vec{j} + 4z\vec{k}, \quad \rho: 2x - y - 2z = 2$$

Решение. ...

Задача 4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $\rho: Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости двумя способами: используя определение циркуляции; с помощью формулы Стокса:

$$\vec{a}(M) = (x+z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x-y)\vec{k}, \quad \rho: 3x + 2y + z = 6$$

Решение. ...

Задача 5. Найти величину и направление наибольшего изменения функции $u(M) = u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$u(M) = x^2 y z, \quad M_0(2, 0, 2)$$

Решение. По определению градиента функции $u(x, y, z)$:

$$\text{grad } u(x, y, z) = \left(\frac{u}{x}, \frac{u}{y}, \frac{u}{z} \right) = (2xyz, x^2 z, x^2 y) \implies \text{grad } (2, 0, 2) = (0, 8, 0)$$

Введём произвольное направление L :

$$L = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

Найдём изменение функции $u(x, y, z)$ по направлению L :

$$\frac{\partial u}{\partial L} = (0, 8, 0) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = 8 \cos \beta$$

По необходимому условию экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial L} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\partial u}{\partial L} = -8 \sin \beta = 0 \implies \sin \beta = 0 \implies |\cos \beta| = 1 \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{\partial u}{\partial L} = 0 \end{cases}$$

Учтём нормировку L :

$$|L| = 1 \implies \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \implies \cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma = 0 \implies \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \cos \gamma = 0 \end{cases}$$

Итого:

$$\boxed{\left| \frac{\partial u}{\partial L} \right| = 8, \quad L = (0, 1, 0)}$$