

ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ
И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Расчётно-графическая работа №1

(по дисциплине «Дополнительные главы
математического анализа»)

Выполнили:

Джантуре Назерке,
ДГМА 27.3, Р3208, 465755;
Карасев Александр Дмитриевич,
ДГМА 28.3, Р3212, 466114;
Лабин Макар Андреевич,
ДГМА 28.3, Р3231, 466449.

Проверил:

Богачёв Владимир Александрович



г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Список задач

В рамках выполнения расчётно-графической работы по варианту №6 необходимо предоставить решения следующих задач:

1. Найти и построить область определения сложной функции:

$$z = \ln(y - \ln x)$$

2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва и укажите точки устранимого разрыва функции двух переменных:

$$z = x \sin \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

3. Для неявно заданной функции записать многочлен Тейлора 2 порядка по степеням $(x - x_0)$, $(y - y_0)$:

$$x^3 + z^3 - 6xz = y^3, \quad M_0(2; 2; 0)$$

4. Найдите угол между градиентами функций $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ в точке M_0 :

$$v = \frac{3x^2}{\sqrt{2}} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z^2, \quad u = \frac{z^2}{x^2y^2}, \quad M_0\left(\frac{2}{3}; 2; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

5. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближённо вычислить:

$$\sin 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$$

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области D , ограниченной заданными линиями:

$$z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, \quad D: x = 0, x = 2, y = 0, y = 2$$

7. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0, \quad M_0(2, 1, -1)$$

2 Решения задач

Задача 1. Найти и построить область определения функции

$$z = \ln(y - \ln x).$$

Решение. ...

Задача 2. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва и укажите точки устранимого разрыва функции двух переменных:

$$z = x \sin \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

Решение. ...

Задача 3. Для неявно заданной функции записать многочлен Тейлора 2 порядка по степеням $(x - x_0)$, $(y - y_0)$:

$$x^3 + z^3 - 6xz = y^3, \quad M_0(2; 2; 0)$$

Решение. ...

Задача 4. Найдите угол между градиентами функций $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ в точке M_0 :

$$v = \frac{3x^2}{\sqrt{2}} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z^2, \quad u = \frac{z^2}{x^2y^2}, \quad M_0\left(\frac{2}{3}; 2; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Решение. По определению градиента функций $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$:

$$\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \text{grad } v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

По определению скалярного произведения векторов:

$$\text{grad } u \cdot \text{grad } v = |\text{grad } u| \cdot |\text{grad } v| \cdot \cos \alpha, \quad \alpha = \angle(\text{grad } u, \text{grad } v)$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{grad } u \cdot \text{grad } v}{|\text{grad } u| \cdot |\text{grad } v|} \quad (1)$$

Перепишем скалярное произведение векторов в координатной форме:

$$\text{grad } u \cdot \text{grad } v = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2)$$

Вычислим частные производные функций $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{2z^2}{x^3y^2} & \frac{\partial v}{\partial x} &= 3\sqrt{2}x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{2z^2}{x^2y^3} & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\sqrt{2}y \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{2z}{x^2y^2} & \frac{\partial v}{\partial z} &= 2\sqrt{2}z \end{aligned}$$

Подставим полученные частные производные в сумму (2):

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v &= -\frac{2z^2}{x^3y^2} \cdot 3\sqrt{2}x - \frac{2z^2}{x^2y^3} \cdot (-\sqrt{2}y) + \frac{2z}{x^2y^2} \cdot 2\sqrt{2}z \\ &= \left(-6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\right) \cdot \frac{z^2}{x^2y^2} = 0\end{aligned}$$

Учитывая, что модули градиентов функций $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ тождественно не равны нулю, из (1) получаем:

$$\cos \alpha = 0 \implies \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Таким образом, градиенты функций $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ взаимно перпендикулярны независимо от выбора точки M_0 .

Задача 5. *Заменяя приращение функции дифференциалом, приближённо вычислить:*

$$\sin 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$$

Решение. Введём функцию $f(x, y) = \sin x \cdot \operatorname{tg} y$. Она дифференцируема в точке $M(88^\circ, 46^\circ)$ как произведение дифференцируемых функций.

По определению дифференцируемости функции f :

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)}$$

Отбросим нелинейную часть приращения функции:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y)$$

По определению дифференциала функции f :

$$df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) dx(\Delta x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dy(\Delta y)$$

Полагая для нашей задачи $M_0\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\Delta \vec{r} = \left(-\frac{\pi}{90}, \frac{\pi}{180}\right)$, найдём частные производные в точке M_0 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) &= \cos x_0 \cdot \tan y_0 = \cos \frac{\pi}{2} \cdot \tan \frac{\pi}{4} = 0 \cdot 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) &= \frac{\sin x_0}{\cos^2 y_0} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2\end{aligned}$$

Найдём значение дифференциала функции f :

$$df(M_0)(\Delta \vec{r}) = 0 \cdot \left(-\frac{\pi}{90}\right) + 2 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{90}$$

Найдём значение функции f в точке M_0 :

$$f(M_0) = \sin \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

Итого имеем:

$$f(M) \approx 1 + \frac{\pi}{90} \approx 1.034907$$

Определим относительную погрешность вычислений:

$$f(M) = 1.034899 \dots \implies \varepsilon = \frac{0.000008}{1.034899} \cdot 100\% \approx 7.7 \cdot 10^{-4} \%$$

Задача 6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области D , ограниченной заданными линиями:

$$z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, \quad D: x = 0, x = 2, y = 0, y = 2$$

Решение. ...

Задача 7. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0, \quad M_0(2, 1, -1)$$

Решение. ...

3 Оценочный лист

ФИО	ИСУ	Группа	Поток	Оценка
Джантуре Назерке	465755	P3208	ДГМА 27.3	
Карасев Александр Дмитриевич	466114	P3212	ДГМА 28.3	
Лабин Макар Андреевич	466449	P3231	ДГМА 28.3	