ФГАОУ ВО «НИУ ИТМО»
Факультет программной инженерии
и компьютерной техники

Расчётно-графическая работа №2

(по дисциплине «Дополнительные главы
математического анализа»)

Выполнил:

Лабин Макар Андреевич,
ДГМА 28.3, Р3231, 466449.

Проверил:

Богачёв Владимир Александрович

ИТМО

г. Санкт-Петербург, Россия
2025

1 Список задач

В рамках выполнения расчётно-графической работы *по варианту №10* необходимо предоставить решения следующих задач:

1. Плоская область D ограничена заданными линиями:

$$y = \sqrt[3]{x}, \quad x = -\sqrt{y+2}, \quad y = 3x - 2$$

   (a) Сделайте схематический рисунок области D.

   (b) С помощью двойного интеграла найдите площадь области D.

2. Тело T ограничено заданными поверхностями:

$$z = 4 - x^2 - y^2, \quad 9z = -5(x^2 + y^2), \quad y = 0 \quad \text{при } y \leq 0$$

   (a) Сделайте схематический рисунок тела T.

   (b) С помощью тройного интеграла найдите объём тела T, перейдя к цилиндрическим или сферическим координатам.

3. С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги плоской материальной кривой, заданной уравнениями:

   (a) $y = \dfrac{1}{x}, \quad \sqrt[4]{3} \leq x \leq \sqrt[4]{8}, \quad \rho(x, y) = \dfrac{6x^3}{y^2}$

   (b) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi, \quad \rho(x, y) = 1$

4. С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги пространственной материальной кривой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t + 1 \end{cases}, \quad 6 \leq t \leq 20, \quad \rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - x^2}}$$

5. Дано векторное поле $\vec{a}$ и плоскость σ, пересекающая координатные плоскости по замкнутой ломаной $KLMK$, где K, L, M — точки пересечения плоскости σ координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно:

$$\vec{a} = (3z - x)\vec{i} + (z - y)\vec{j}, \quad \sigma\colon x - 2y - z = -4$$

   (a) Найдите поток Q векторного поля $\vec{a}$ через часть S плоскости σ, вырезанной координатными плоскостями, в сторону нормали $\vec{n}$, направленной от начала координат $O(0, 0, 0)$.

   (b) С помощью теоремы Остроградского-Гаусса найдите поток Q векторного поля $\vec{a}$ через полную поверхность тетраэдра $OLMK$ в сторону внешней нормали.

   (c) Найдите циркуляцию C векторного поля $\vec{a}$ по контуру $KLMK$, образованному пересечением плоскости σ с координатными плоскостями.

6. Дано векторное поле $\vec{a}(M)$:

$$\vec{a} = (1 + e^y)\vec{i} + (xe^y - e^z - 1)\vec{j} + (2 - ye^z)\vec{k}$$

(a) Проверьте, является ли векторное поле соленоидальным или потенциальным.

(b) Если поле потенциально, найдите его потенциал.

2 Решения задач

Задача 1. *Плоская область D ограничена заданными линиями:*

$$y = \sqrt[3]{x}, \quad x = -\sqrt{y+2}, \quad y = 3x - 2$$

(a) *Сделайте схематический рисунок области D.*

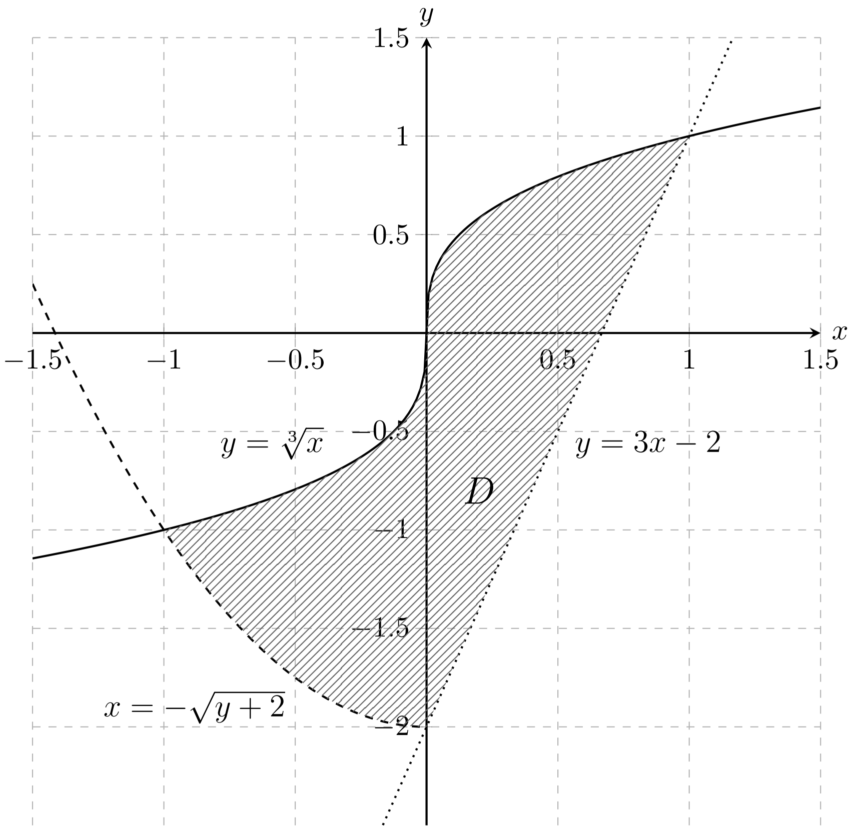
(b) *С помощью двойного интеграла найдите площадь области D.*

Решение. График кривой $y = \sqrt[3]{x}$ — кубическая парабола с инверсией относительно прямой $y = x$.

График кривой $x = -\sqrt{y+2}$ — левая ветвь параболы с центром в $(0, 2)$.

График кривой $y = 3x - 2$ — прямая, проходящая через т. $(0, -2)$ и $(1, 1)$.

Имеем рисунок области D, ограниченной заданными графиками:



Найдём площадь области D с помощью двойного интеграла по теореме Фубини:

$$S_D = \iint_D \mathrm{d}\Omega = \int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_{x^2-2}^{\sqrt[3]{x}} \mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{3x-2}^{\sqrt[3]{x}} \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(\sqrt[3]{x} - x^2 + 2\right) \mathrm{d}x + \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - 3x + 2\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{3}{4}(\sqrt[3]{x})^4 - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{3}{4}(\sqrt[3]{x})^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + 2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{13}{6}$$

Ответ:

$$\boxed{S_D = \frac{13}{6}}$$

Задача 2. *Тело T ограничено заданными поверхностями:*

$$z = 4 - x^2 - y^2, \quad 9z = -5(x^2 + y^2), \quad y = 0 \quad \textit{при } y \leq 0$$

(a) *Сделайте схематический рисунок тела T.*

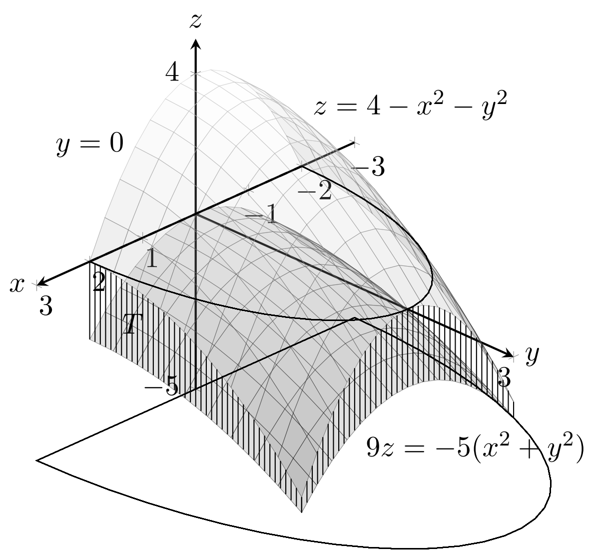
(b) *С помощью тройного интеграла найдите объём тела T, перейдя к цилиндрическим или сферическим координатам.*

Решение. График поверхности $z = 4 - x^2 - y^2$ — эллиптический параболоид с вершиной в точке $(0, 0, 4)$, направленный вниз.

График поверхности $9z = -5(x^2 + y^2)$ — эллиптический параболоид с вершиной в точке $(0, 0, 0)$, направленный вниз с сжатием в $\frac{9}{5}$ раз.

График поверхности $y = 0$ — плоскость xOz.

Имеем рисунок тела T, ограниченного заданными плоскостями *(тело показано с дополнительными сечениями для лучшего понимания его формы)*:



Перейдём к цилиндрическим координатам:

$$\mathcal{A}\colon \begin{cases} x(r, \varphi, z) = r\cos\varphi \\ y(r, \varphi, z) = r\sin\varphi \\ z(r, \varphi, z) = z \end{cases} \implies |J_{\mathcal{A}}| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= r\cos\varphi\cos\varphi + r\sin\varphi\sin\varphi = r$$

Найдём объём тела T с помощью тройного интеграла по теореме Фубини:

$$V_T = \iiint_T \mathrm{d}V = \int_{-5}^{0} \mathrm{d}z \int_{\sqrt{-\frac{9}{5}z}}^{\sqrt{4-z}} r\mathrm{d}r \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi + \int_0^4 \mathrm{d}z \int_0^{\sqrt{4-z}} r\mathrm{d}r \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\int_{-5}^{0} r^2 \Big|_{\sqrt{-\frac{9}{5}z}}^{\sqrt{4-z}} \mathrm{d}z + \int_0^4 r^2 \Big|_0^{\sqrt{4-z}} \mathrm{d}z\right) = \frac{\pi}{2}\left(\int_{-5}^{0}\left(4+\frac{4}{5}z\right)\mathrm{d}z + \int_0^4 (4-z)\,\mathrm{d}z\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\left(4z+\frac{2}{5}z^2\right)\Big|_{-5}^{0} + \left(4z-\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^4\right) = \frac{\pi}{2}(10+8) = 9\pi$$

Итого:

$$\boxed{V_T = 9\pi}$$

Задача 3. *С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги плоской материальной кривой, заданной уравнениями:*

(a) $y = \dfrac{1}{x}, \quad \sqrt[4]{3} \le x \le \sqrt[4]{8}, \quad \rho(x,y) = \dfrac{6x^3}{y^2}$

(b) $\begin{cases} x = 2(t-\sin t) \\ y = 2(1-\cos t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le \pi, \quad \rho(x,y) = 1$

Решение. Параметризуем кривую L_a:

$$L_a\colon \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \dfrac{1}{t} \end{cases}, \quad t \in [\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{8}]$$

Рассчитаем $\mathrm{d}l$:

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\mathrm{d}t = \sqrt{1+\frac{1}{t^4}}\mathrm{d}t$$

Найдём массу M_a дуги кривой L_a:

$$M_a = \int_{L_a} \rho(x,y)\mathrm{d}l = 6\int_{\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{8}} t^3 \cdot t^2 \sqrt{1+\frac{1}{t^4}}\mathrm{d}t = 6\int_{\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{1+t^4}\cdot t^3\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\mathrm{d}(t^4+1) = 4t^3\mathrm{d}t\right] = \frac{3}{2}\int_{\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{1+t^4}\mathrm{d}(1+t^4) = (1+t^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{8}} =$$

$$= 9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} = 27 - 8 = 19$$

Итого:

$$\boxed{M_a = 19}$$

Рассчитаем $\mathrm{d}l$ для кривой L_b:

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\mathrm{d}t = \sqrt{4(1-\cos t)^2 + 4\sin^2 t}\mathrm{d}t = \sqrt{16\sin^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = 4\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t$$

Найдём массу M_b дуги кривой L_b:

$$M_b = \int_{L_b} \rho(x,y)\mathrm{d}l = 4\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t = -8\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} = -8\cdot(-1) = 8$$

Итого:

$$\boxed{M_b = 8}$$

Задача 4. *С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги пространственной материальной кривой, заданной уравнениями:*

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t + 1 \end{cases}, \quad 6 \le t \le 20, \quad \rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - x^2}}$$

Решение. Найдём $\mathrm{d}l$:

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}\mathrm{d}t = \sqrt{4 + 1 + 4}\mathrm{d}t = 3\mathrm{d}t$$

Найдём массу M дуги пространственной кривой L:

$$M = \int_L \rho(x, y, z)\mathrm{d}l = 3\int_6^{20} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(2t+1)^2 - 4t^2}} = 3\int_6^{20} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4t+1}} =$$
$$= [\mathrm{d}(4t+1) = 4\mathrm{d}t] = \frac{3}{4}\int_6^{20} \frac{\mathrm{d}(4t+1)}{\sqrt{4t+1}} = \frac{3}{2}\sqrt{4t+1}\bigg|_6^{20} =$$
$$= \frac{3}{2}(9 - 5) = 6$$

Итого:

$$\boxed{M = 6}$$

Задача 5. *Дано векторное поле $\vec{a}$ и плоскость σ, пересекающая координатные плоскости по замкнутой ломаной $KLMK$, где K, L, M — точки пересечения плоскости σ координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно:*

$$\vec{a} = (3z - x)\vec{i} + (z - y)\vec{j}, \quad \sigma\colon x - 2y - z = -4$$

(a) *Найдите поток Q векторного поля $\vec{a}$ через часть S плоскости σ, вырезанной координатными плоскостями, в сторону нормали $\vec{n}$, направленной от начала координат $O(0,0,0)$.*

(b) *С помощью теоремы Остроградского-Гаусса найдите поток Q векторного поля $\vec{a}$ через полную поверхность тетраэдра $OLMK$ в сторону внешней нормали.*

(c) *Найдите циркуляцию C векторного поля $\vec{a}$ по контуру $KLMK$, образованному пересечением плоскости σ с координатными плоскостями.*

Решение. Определим координаты точек K, L и M:

1. $K(x, 0, 0) \wedge K \in \sigma \implies x = -4 \implies K(-4, 0, 0)$
2. $L(0, y, 0) \wedge L \in \sigma \implies y = 2 \implies L(0, 2, 0)$
3. $M(0, 0, z) \wedge M \in \sigma \implies z = 4 \implies M(0, 0, 4)$

Найдём поток Q_a векторного поля $\vec{a}$ через $\triangle KLM$, который расположен во втором октанте $(x < 0; y, z > 0)$:

$$Q_a = \iint_{KLM} \vec{a} \cdot \vec{n}\mathrm{d}\Omega$$

Определим нормальный вектор $\vec{n}^*$ к $\triangle KLM \subset \sigma$, направленный от O:

$$\sigma\colon x - 2y - z + 4 = 0 \implies \vec{n}^* = (-1, 2, 1)$$

Нормируем нормальный вектор:

$$|\vec{n}^*| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \implies \vec{n} = \frac{\vec{n}^*}{|\vec{n}^*|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Выразим $z(x,y)$ из уравнения σ:

$$z(x,y) = x - 2y + 4$$

Рассчитаем $\mathrm{d}\Omega$:

$$\mathrm{d}\Omega = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{1+1+4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{6}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

По теореме Фубини:

$$\iint_{KLM} \vec{a}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\Omega = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (x - 3z + 2z - 2y)\mathrm{d}y =$$
$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (x - 2y - (x - 2y + 4))\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (-4)\mathrm{d}y =$$
$$= -4\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \mathrm{d}y$$

Определим границы интегрирования из проекции $\triangle KLM$ на xOy:

$$a = -4, \quad b = 0$$
$$\varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2(x) = \frac{x}{2} + 2$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int_0^{\frac{x}{2}+2} \mathrm{d}y = \frac{x}{2} + 2$$

Вычислим внешний интеграл:

$$\int_{-4}^{0} \left(\frac{x}{2} + 2\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{4} + 2x\right)\Big|_{-4}^{0} = -(4-8) = 4$$

Итого:

$$\boxed{Q_a = -16}$$

По теореме Остроградского-Гаусса:

$$Q_b = \iiint_{OLMK} \operatorname{div}\vec{a}\mathrm{d}\Omega$$

Определим дивергенцию векторного поля $\vec{a}$:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = -1 - 1 + 0 = -2$$

Тогда формула для вычисления потока Q_b примет вид:

$$Q_b = -2 \iiint_{OLMK} \mathrm{d}\Omega = -2V_{OLMK}$$

Воспользуемся формулой для поиска объёма тетраэдра $OLMK$:

$$V_{OLMK} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 = \frac{16}{3}$$

Итого:

$$\boxed{Q_b = -\frac{32}{3}}$$

Параметризуем замкнутую ломаную $KLMK = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$:

$$\gamma_1\colon \begin{cases} x(t) = -4 + 4t \\ y(t) = 2t \\ z(t) = 0 \end{cases}, \quad t \in [0, 1] \qquad \gamma_2\colon \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 2 - 2t \\ z(t) = 4t \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_3\colon \begin{cases} x(t) = -4t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 4 - 4t \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$$

Найдём циркуляцию C векторного поля $\vec{a}$ по определению:

$$C = \oint_{KLMK} \vec{a}\mathrm{d}\vec{z} = \oint_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3} (3z - x)\mathrm{d}x + (z - y)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 ((4 - 4t)4 - 4t)\mathrm{d}t + \int_0^1 (4t - 2 + 2t)(-2)\mathrm{d}t + \int_0^1 (12 - 12t + 4t)(-4)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 (16 - 20t - 12t + 4 - 48 + 32t)\mathrm{d}t = -28 \int_0^1 \mathrm{d}t = -28$$

Итого:

$$\boxed{C = -28}$$

Задача 6. *Дано векторное поле $\vec{a}(M)$:*

$$\vec{a} = (1 + e^y)\vec{i} + (xe^y - e^z - 1)\vec{j} + (2 - ye^z)\vec{k}$$

(a) *Проверьте, является ли векторное поле соленоидальным или потенциальным.*

(b) *Если поле потенциально, найдите его потенциал.*

Решение. Проверим условие соленоидальности векторного поля $\vec{a}$:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0 + xe^y - ye^z \neq 0 \text{ на } \mathbb{R}^3 \implies \vec{a} \text{ не соленоидально}$$

Проверим условие потенциальности векторного поля $\vec{a}$:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1+e^y & xe^y - e^z - 1 & 2 - ye^z \end{vmatrix} =$$

$$= (-e^z + e^z)\vec{i} - (0-0)\vec{j} + (e^y - e^y)\vec{k} = 0 \implies \vec{a} \text{ потенциально}$$

Значит, существует $u(x, y, z)\colon \vec{a} = \operatorname{grad} u$.
Из определения полного дифференциала:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + e^y \implies u(x,y,z) = \int (1+e^y)\mathrm{d}x = x + xe^y + C(y,z)$$

Найдём $C(y, z)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = xe^y + \dfrac{\partial C}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = xe^y - e^z - 1 \end{cases} \implies \frac{\partial C}{\partial y} = -(e^z+1) \implies$$

$$\implies C(x,y) = -\int (e^z+1)\mathrm{d}y = -ye^z - y + D(z)$$

Найдём $D(z)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z} = -ye^z + \dfrac{\partial D}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 2 - ye^z \end{cases} \implies \frac{\partial D}{\partial z} = 2 \implies$$

$$\implies D(z) = 2\int \mathrm{d}y = 2z + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Итого:

$$\boxed{u(x,y,z) = x - y + 2z + xe^y - ye^z + C, \quad C \in \mathbb{R}}$$