Элементарная алгебра

Виды выражений

Одночлен *(моном)* — произведение переменных и коэффициентов; *многочлен* *(полином)* — сумма одночленов.

Двучлен *(бином)* — многочлен из двух одночленов; *трёхчлен* *(трином)* — многочлен из трёх одночленов.

Многочлен P от одной переменной x можно представить так:

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$$

Малая теорема Безу

Для многочлена $P =: P(x)$ справедливо:

$$P(x) = f(x)(x - r) + P(r)$$

Это следует из деления многочлена с остатком. Значит,

$$(x - r) \mid P(x) \iff P(r) = 0.$$

Свойства неравенств

Отношение сравнения *транзитивно*; неравенства можно *складывать* *(не вычитать)*, а также *перемножать* и возводить в натуральную степень k *(без смены знака)*:

$$\begin{cases} a < b \\ c \le d \end{cases} \implies \begin{cases} a + c < b + d \\ ac < bd \\ a^k < b^k \end{cases}$$

При умножении на отрицательное число знак неравенства *инвертируется*:

$$a < b \iff am > bm, \quad m \in \mathbb{R}^-$$

Неравенство Коши

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^+$. Тогда верно *(О.Л. Коши)*:

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$$

Доказательство.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff a+b \geq 2\sqrt{ab} \iff a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \iff (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \blacksquare$$

Неравенство Бернулли

Пусть $n \geq 2,\ x > 0$. Тогда верно *(Я. Бернулли)*:

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

Доказательство. Проверим базис индукции $n = 2$:

$$(1+x)^2 > 1 + 2x \iff 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x \ \square$$

Проверим индукционный шаг $n+1$. Пусть утверждение верно для некоторого $n > 2$, тогда:

$$(1+x)^n > 1 + nx \iff (1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x) \iff (1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x + nx^2 \iff (1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x \ \blacksquare$$

Свойства функций

Функция f *возрастает*, когда

$$\forall x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Максимумом функции f называется такая точка x_0, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists U_\varepsilon(x_0) : \forall x \in U\ f(x) < f(x_0).$$

Функция f *убывает*, когда

$$\forall x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

Минимумом функции f называется такая точка x_0, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists U_\varepsilon(x_0) : \forall x \in U\ f(x) > f(x_0).$$

Функция f *чётна*, когда

$$\forall x \in D_f \implies f(-x) = f(x).$$

Функция f *нечётна*, когда

$$\forall x \in D_f \implies f(-x) = -f(x).$$

Функция f *периодична*, когда

$$\forall x \in D_f\ \exists T \neq 0 : f(x) = f(x \pm T),$$

где T — **период** функции; наименьший положительный период называется *основным*.

Функция модуля

Абсолютная величина *(модуль)* — чётная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, которая задаётся формулой:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Она *дистрибутивна* относительно умножения, отчасти — относительно сложения: $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Степенная функция

Возведение в чётную степень — чётная функция; график — *парабола*:

$$f\colon \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto x^n} \mathbb{R}_0^+,\ n \in \mathbb{N}$$

Обратная функция к $f\,|_{\mathbb{R}_0^+}$ — **арифметический корень**:

$$f^{-1}\colon \mathbb{R}_0^+ \xrightarrow{x \mapsto \sqrt[n]{x}} \mathbb{R}_0^+$$

Возведение в нечётную степень — нечётная функция; график — *кубическая парабола*:

$$g\colon \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto x^n} \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

Обратная функция к g — **арифметический корень**:

$$g^{-1}\colon \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto \sqrt[n]{x}} \mathbb{R}$$

Функция знака

Функция знака *(сигнум-функция)* — нечётная функция $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1; 0; 1\}$, которая определяет знак аргумента:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Условия выпуклости функции

Функция f *выпукла* **вверх** на отрезке $[a;b]$, когда для отрезка g с концами в точках $\langle a;f(a)\rangle$, $\langle b;f(b)\rangle$ справедливо:

$$\forall x \in [a;b]\; f(x) \geq g(x)$$

Функция f *выпукла* **вниз** на отрезке $[a;b]$, когда для отрезка g с концами в точках $\langle a;f(a)\rangle$, $\langle b;f(b)\rangle$ справедливо:

$$\forall x \in [a;b]\; f(x) \leq g(x)$$

Функция f выпукла вверх $\iff$ функция $-f$ выпукла вниз.

Функция f выпукла вверх на $[a;b]$, если для $a \leq x \leq b$ верно:

$$\operatorname{tg}\alpha_{bx} \leq \operatorname{tg}\alpha_{ab} \leq \operatorname{tg}\alpha_{ax} \qquad \operatorname{tg}\alpha_{mn} := \operatorname{tg}(\overrightarrow{oX};\overrightarrow{mn})$$

Функция натурального логарифма

Функция натурального логарифма — значение интеграла:

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}, \quad \ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

Свойства:

$$\ln ax = \ln a + \ln x$$
$$\ln x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\ln x$$

Логарифмическая функция

Логарифмическая функция по основанию a — отношение:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad \log_a\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad a \neq 1$$

Свойства:

$$\log_a a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}$$
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad c \neq 1$$
$$\log_a a^x = x$$
$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad a, b \neq 1$$

Элементарная теория чисел

Делимость

Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$. Тогда a — **делитель** b, когда

$$ax = b,\ x \in \mathbb{Z} \iff a \mid b \iff |a| \leq |b|$$

Отношение делимости *транзитивно*, такое выражение можно *перемножить* с другим:

$$\times \begin{cases} a \mid b \\ c \mid d \end{cases} \implies ac \mid bd$$

Общий делитель чисел делит их *линейную комбинацию*:

$$a \mid b, c \implies a \mid bx + cy, \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

Заметим, что $a = bx + cy$*, когда $(b, c) \mid a$.

Доказательство. Пусть $d := (b, c)$, тогда:

$$d \mid b, c \implies d \mid (bx + cy) \implies d \mid a \ \blacksquare$$

Коэффициенты Безу (x, y) *неуникальны* и легко выражаются *(доказывается подстановкой в соотношение)*:

$$(x + mk, y - ak),\ k \in \mathbb{Z}$$

---

* Такое уравнение называют *соотношением Безу*, а x и y — *коэффициентами Безу* (Э. Безу).

Наибольший общий делитель

*Наибольший общий делитель** для $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — такое $gcd(\{a_k\})$, что

$$\exists d\colon d \mid gcd(\{a_k\}) \mid \{a_k\}.$$

Упрощённая запись $gcd(\{a_k\}) = (\{a_k\})$.

Этот бинарный оператор *коммутативен*, *ассоциативен* и *дистрибутивен*.

Наименьшее общее кратное

*Наименьшее общее кратное*** для $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — такое $lcm(\{a_k\})$, что

$$\exists m\colon \{a_k\} \mid lcm(\{a_k\}) \mid m.$$

Упрощённая запись $lcm(\{a_k\}) = [\{a_k\}]$.

Этот бинарный оператор *коммутативен* и *ассоциативен*, однако *не дистрибутивен*.

Двойственность

НОД и НОК *двойственны* друг другу:

$$(a,b)\cdot[a,b] = ab$$

Доказательство. Пусть $m := [a,b]$, тогда:

$$a,b \mid m \iff ab \mid am, bm \iff ab \mid (am, bm) \iff ab \mid (a,b)m$$

Так как $(a,b) \mid [a,b] \mid ab$, то $ab/(a,b) \mid [a,b]$.

Значит, $ab/(a,b) \le [a,b]$. Но $[a,b]$ — *наименьшее* общее кратное a, b. Следовательно, $ab/(a,b) \nless [a,b]$, поэтому:

$$ab/(a,b) = [a,b] \iff ab = (a,b)\cdot[a,b] \ \blacksquare$$

---

* Сокращённно *НОД*, или *Greatest Common Divisor* (*GCD*).
** Сокращённно *НОК*, или *Least Common Multiple* (*LCM*).

Модульная арифметика

Конгруэнтность

Два целых числа **конгруэнтны** *(сравнимы)* по модулю m, когда их разность кратна m *(К.Ф. Гаусс)*:

$$a \equiv b \pmod m \iff m \mid (a-b) \iff a = b + mk,\ k \in \mathbb{Z}$$

Отношение конгруэнтности *транзитивно*, поэтому числа образуют *систему остаточных классов* $\mathbf{Z}_m$ по модулю m. Например, $\mathbf{Z}_3$:

$$\{\ldots, -6, -3, \mathbf{0}, 3, 6, \ldots\} \text{ класс } r_0$$

$$\{\ldots, -5, -2, \mathbf{1}, 4, 7, \ldots\} \text{ класс } r_1$$

$$\{\ldots, -4, -1, \mathbf{2}, 5, 8, \ldots\} \text{ класс } r_2$$

Свойства сравнения

Конгруэнтные числа можно *складывать*, *перемножать* и передавать *многочлену* $f \in \mathbb{Z}[x]$:

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod m \\ c \equiv d \pmod m \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + d & \pmod m \\ ac \equiv bd & \pmod m \\ f(a) \equiv f(b) & \pmod m \end{cases}$$

Конгруэнтные числа можно *умножать* *(делить)* на одно число с *увеличением* *(сокращением)* модуля:

$$a \equiv b \pmod m \iff ad \equiv bd \pmod{md}$$

$$ad \equiv bd \pmod m \iff a \equiv b \left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{(m,d)}\right)$$

Из транзитивности делимости следует:

$$a \equiv b \pmod m,\ n \mid m \Longrightarrow a \equiv b \pmod n$$

Признаки делимости

Для вывода признаков делимости лучше использовать *десятичное представление* числа $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$:

$$\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} 10^i$$

— При модуле $m = 2^k; 5^k; 10^k$ одночлены $a_{n-i}10^i \equiv a_{n-i}0 = 0$ $(i \geq k)$. Значит, число $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ кратно m, когда последние k цифры кратны m:

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv 0 \iff \overline{a_{n-k+1} \dots a_{n-1} a_n} \equiv 0$$

— При модуле $m = 3; 9$ одночлены $a_{n-i}10^i \equiv a_{n-i}1^i = a_{n-i}$. Значит, число $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ кратно m, когда сумма цифр кратна m:

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv 0 \iff a_1 + a_2 + \dots + a_n \equiv 0$$

— При модуле $m = 11$ одночлены $a_{n-i}10^i \equiv a_{n-i}(-1)^i$. Значит, число $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ кратно 11, когда знакочередующаяся сумма цифр кратна 11:

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv 0 \iff a_1 - a_2 + \dots - a_n \equiv 0$$

— При модуле $m = 7$ вычтем из числа n последнюю цифру; останется $\lfloor n/10 \rfloor$. Последняя цифра равна $n - 10\lfloor n/10 \rfloor$. Вычтем из числа удвоенную последнюю цифру:

$$\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor - 2\left(n - 10\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor\right) \equiv 0 \iff 21\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor - 2n \equiv 0$$

Одночлен $21\lfloor n/10 \rfloor \equiv 0$. Значит, число $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ кратно 7, когда удвоенная разность последней цифры числа и самого числа без этой цифры кратна 7:

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv 0 \iff \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} - 2a_n \equiv 0$$

Функция Эйлера

Функция $\phi(m)$ считает количество положительных целых чисел, меньших m и взаимно простых с ним *(для малых и простых m целесообразно перебрать вручную)*:

$$\phi(m) = m \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

p — простой делитель m;
$1/p$ — часть чисел, кратных p;
$1 - 1/p$ — часть чисел, взаимно простых с p.

Функция Эйлера *мультипликативна* *(только для взаимно простых натуральных чисел)*.

Теорема Эйлера

> **Теорема.** Пусть $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$. Тогда верно *(Л. Эйлер)*:
> $$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}, \quad a \not\equiv 0 \pmod{m}$$

Доказательство. Введём систему остаточных классов $\mathbf{Z}_m$. В ней есть m классов: $r_0, r_1, \dots, r_{m-1}$.

Пусть множество Φ содержит в себе $\phi(m)$ остатков, взаимно простых с m. Домножим каждый элемент на a и образуем новое множество Φ_a. Заметим, что:

Элементы Φ_a из разных классов.

Допустим, это не так. Тогда:

$$ar_k \equiv ar_l \implies r_k \equiv r_l$$

Но $r_k \not\equiv r_l \implies ar_k \not\equiv ar_l$ □

Φ и Φ_a конгруэнтны.

Пусть $ar_k \equiv r_l,\ r_l \in \mathbf{Z}_m$.

Так как $m \nmid ar_k$, то:

$$r_l \in \Phi \implies \Phi \equiv \Phi_a \ \square$$

Перемножим элементы множеств Φ и Φ_a:

$$r_0 r_1 \dots r_{\phi(m)} \equiv ar_0 ar_1 \dots ar_{\phi(m)} \implies$$
$$r_0 r_1 \dots r_{\phi(m)} \equiv a^{\phi(m)} r_0 r_1 \dots r_{\phi(m)} \implies a^{\phi(m)} \equiv 1 \ \blacksquare$$

> **Следствие.** Пусть $a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ (m, a) = 1$. Тогда:
> $$a^b \equiv a^{b \bmod \phi(m)} \pmod{m}, \quad a \not\equiv 0 \pmod{m}$$

Доказательство. Представим b в арифметическом виде:

$$b = \phi(m) \left\lfloor \frac{b}{\phi(m)} \right\rfloor + b \bmod \phi(m)$$

$\phi(m)$ — модуль деления.
$\lfloor b/\phi(m) \rfloor$ — целое частное.
$b \bmod \phi(m)$ — остаток.

Подставим полученное выражение:

$$a^{\phi(m)\lfloor b/\phi(m) \rfloor + b \bmod \phi(m)} = (a^{\phi(m)})^{\lfloor b/\phi(m) \rfloor} a^{b \bmod \phi(m)}$$

Так как $a^{\phi(m)} \equiv 1$, получается $a^b \equiv a^{b \bmod \phi(m)}$. ■

Алгоритм Евклида

Пусть $a, b \in \mathbb{N}^0 \ (a > b)$, тогда:

$$(a, b) = (a \bmod b, b)$$

Доказательство. Допустим, $m \mid (a - b), b$:

$$+\begin{cases} a - b \equiv 0 \pmod{m} \\ b \equiv 0 \pmod{m} \end{cases} \implies \begin{cases} a \equiv 0 \pmod{m} \\ b \equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

Получаем, что любой общий делитель m у $a - b$, b есть у a, b. Следовательно, $(a, b) = (a - b, b)$.

При повторе вычитания получится остаток от деления на b:

$$(a, b) = (a \bmod b, b) \ \blacksquare$$

Мультипликативная инверсия

Пусть $ab \equiv 1 \pmod{m}$ — линейное сравнение, где b — **мультипликативная инверсия** числа a по модулю m:

$$b \equiv a^{-1} \equiv \frac{1}{a} \pmod{m}, \quad (a, m) = 1$$

«Дробные» числа можно *складывать*, *перемножать* и *сокращать* как рациональные:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} \equiv \dfrac{ad + bc}{cd} \pmod{m} \\ \dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} \equiv \dfrac{ac}{bd} \pmod{m} \\ \qquad \dfrac{eg}{fg} \equiv \dfrac{e}{f} \pmod{m} \end{cases}$$

Линейное сравнение

Линейное сравнение вида $ax \equiv b \pmod{m}$ разрешимо относительно x, когда $(m, a) \mid b$. *(по соотношению Безу)*

План решения:

- — упростить линейное сравнение;
- — рассчитать (m, a) по алгоритму Евклида;
- — выразить (m, a) через полученные остатки;
- — домножить соотношение Безу на b.

Пример. Решить линейное сравнение: $4x \equiv 4 \pmod 6$.

Упростим сравнение:

$$\begin{aligned} 4x &\equiv 4 \pmod 6 \ \mid \cdot 1/2 \\ 2x &\equiv 2 \pmod 3 \end{aligned}$$

Применим *алгоритм Евклида* в алгебраическом виде:

«Прямой» алгоритм:

$$\begin{aligned} 3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\ 2 &= \mathbf{1} \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

«Обратный» алгоритм:

$$\begin{aligned} 1 &= 3 \cdot \mathbf{1} + 2 \cdot (\mathbf{-1}) \mid \cdot 2 \\ 2 &= 3 \cdot \mathbf{2} + 2 \cdot (\mathbf{-2}) \end{aligned}$$

Итак, коэффициенты Безу найдены: $x = -2,\ y = 2$.

Ответ: $x = -2$.

Китайская теорема об остатках

Сравнения можно объединять в *систему*:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ \quad \dots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

Она разрешима относительно x по модулю $[m_1, \dots, m_n]$, когда разрешима каждая пара сравнений, в частности $(m_1, m_2) \mid a_1 - a_2$.

Доказательство. Рассмотрим пару сравнений из системы:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = a_1 + m_1 j, & j \in \mathbb{Z} \\ x = a_2 - m_2 k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff$$

$$m_1 j + m_2 k = a_2 - a_1$$

Данное соотношение Безу имеет целые коэффициенты j, k, когда $(m_1, m_2) \mid (a_1 - a_2)$. □

По индукции, система будет разрешима относительно x, когда будет разрешима каждая пара сравнений.

Допустим, $x \equiv y \equiv a_i \pmod{m_i}$, $i \in \{i\}_{i=1}^n$ — решение всей системы. Значит, $m_i \mid x - y \implies [m_1, \dots, m_n] \mid x - y \iff x \equiv y \pmod{[m_1, \dots, m_n]}$. ■

План решения каждой пары сравнений:

— упростить линейные сравнения;
— преобразовать их в соотношения Безу, приравнять их;
— решить полученное выражение как линейное сравнение.

Пример. Решить систему сравнений:

$$\begin{cases} x \equiv 2 & \pmod 3 \\ x \equiv 2 & \pmod 4 \\ 2x \equiv -3 & \pmod 5 \end{cases}$$

Упростим последнее сравнение:

$$2x \equiv -3 \pmod 5 \iff x \equiv 1 \pmod 5)$$

Преобразуем первую пару сравнений в соотношения Безу:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 2 \pmod 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 + 3j, & j \in \mathbb{Z} \\ x = 2 + 4k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Приравняем их и решим как сравнение:

$$2 + 3j = 2 + 4k \iff 2 \equiv 2 + k \pmod 3 \iff k \equiv 0 \pmod 3$$

Значит, $x = 2 + 4k \equiv 2 \pmod{12}$ — решение первой пары.

Аналогично решив следующую *(и последнюю)* пару, получим решение всей системы: $x \equiv 26 \pmod{60}$.

Ответ: $x \equiv 26 \pmod{60}$.

Сравнение по составному модулю

Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$. Тогда для $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ разрешимо

$$f(x) \equiv 0 \pmod m,$$

если разрешимы $f(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, $i \in [1; r] \cap \mathbb{Z}$.

Доказательство $\implies$. Пусть $x \in \mathbb{Z}$ — решение

$$f(x) \equiv 0 \pmod m, \; p_i^{\alpha_i} \mid m \implies f(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}. \blacksquare$$

Доказательство $\impliedby$. Пусть x_i — решение

$$f(x_i) \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

По китайской теореме об остатках:

$$\forall i_1, i_2 \in [1; r], \; i_1 \neq i_2 \; (p_{i1}^{\alpha_{i1}}, p_{i2}^{\alpha_{i2}}) = 1 \implies$$

$$\exists x\colon x \equiv x_i \pmod{p_i^{\alpha_i}} \implies f(x) \equiv 0 \pmod{[p_1^{\alpha_1}, \dots, p_r^{\alpha_r}]} \implies f(x) \equiv 0 \pmod{m} \ \blacksquare$$

Сравнение по степени простого модуля

Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$. Тогда для простого p разрешимо

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha},$$

если разрешимы $f(x) \equiv 0 \pmod{p^i}$, $i \in [1; \alpha] \cap \mathbb{Z}$.

Доказательство. Аналогично прошлому пункту.

Лемма Гензеля

Пусть для $f \in \mathbb{Z}[x]$ верно *(К. Гензель)*:

$$f(a) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}, \quad f'(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$$

Тогда существует такое уникальное t, что:

$$f(a + tp^\alpha) \equiv 0 \pmod{p^{\alpha+1}}$$

Доказательство. Пусть a — решение $f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$, которое можно представить в виде $x = a + tp^\alpha$.

По теореме Тейлора:

$$f(a + tp^\alpha) = f(a) + tp^\alpha f'(a) + t^2 p^{2\alpha} f''(a)/2! + \dots$$
$$+ t^n p^{n\alpha} f^{(n)}(a)/n! \equiv f(a) + tp^\alpha f'(a) \pmod{p^{\alpha+1}} \ \blacksquare$$

Следствие. Пусть для $f \in \mathbb{Z}[x]$ верно

$$f(x_\alpha) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}, \quad f'(x_\alpha) \not\equiv 0 \pmod{p^\alpha}.$$

Тогда решение сравнения по модулю $p^{\alpha+1}$ имеет вид:

$$x_{\alpha+1} \equiv x_\alpha - \frac{f(x_\alpha)}{f'(x_\alpha)} \pmod{p^{\alpha+1}}$$

Доказательство. По лемме Гензеля:

$$f(x_\alpha) + tp^\alpha f'(x_\alpha) \equiv 0 \pmod{p^{\alpha+1}} \iff$$
$$tp^\alpha \equiv -\frac{f(x_\alpha)}{f'(x_\alpha)} \pmod{p^{\alpha+1}} \iff$$
$$x_\alpha + tp^\alpha \equiv x_{\alpha+1} \equiv x_\alpha - \frac{f(x_\alpha)}{f'(x_\alpha)} \pmod{p^{\alpha+1}} \ \blacksquare$$

Тригонометрия

Основные функции

Единичной называется окружность, которая задаётся уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

Тригонометрические функции соотносят *координаты* точки единичной окружности и *градусную меру дуги*, образуемой ей с начальным радиусом.

Синус — нечётная функция с периодом 2π; график — *синусоида*:

$$\sin\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha \mapsto y} [-1; 1]$$

Обратная нечётная функция к $\sin|_{[-\pi/2;\pi/2]}$ — **арксинус**:

$$\sin^{-1} = \arcsin\colon [-1; 1] \xrightarrow{\alpha \mapsto y} [-\pi/2; \pi/2]$$

Косинус — чётная функция с периодом 2π; график — *синусоида* со смещением влево на $\pi/2$ *(«косинусоида»)*:

$$\cos\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha \mapsto x} [-1; 1]$$

Обратная функция к $\cos|_{[0;\pi]}$ — **арккосинус**:

$$\cos^{-1} = \arccos\colon [-1; 1] \xrightarrow{\alpha \mapsto x} [0; \pi]$$

Тангенс — нечётная функция с периодом π; график — *тангенсоида*:

$$\mathrm{tg}\colon \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} \xrightarrow{\alpha \mapsto y/x} \mathbb{R}$$

Обратная нечётная функция к $\mathrm{tg}|_{(-\pi/2;\pi/2)}$ — **арктангенс**:

$$\mathrm{tg}^{-1} = \mathrm{arctg}\colon \mathbb{R} \xrightarrow{y/x \mapsto \alpha} (-\pi/2; \pi/2)$$

Котангенс — нечётная функция с периодом π; график — *тангенсоида* с симметрией относительно оси Ox и смещением вправо на $\pi/2$ *(«котангенсоида»)*:

$$\mathrm{ctg}\colon \mathbb{R}\backslash\{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} \xrightarrow{\alpha \mapsto x/y} \mathbb{R}$$

Обратная функция к $\mathrm{ctg}|_{(0;\pi)}$ — **арккотангенс**:

$$\mathrm{ctg}^{-1} = \mathrm{arcctg}\colon \mathbb{R} \xrightarrow{x/y \mapsto \alpha} (0; \pi)$$

Основные тождества

Из определений тригонометрических функций следует:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \arccos x=\arcsin(\sqrt{1-x^2})$$
$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=1/\cos^2\alpha \qquad \arccos x=\operatorname{arctg}(\sqrt{1-x^2}/x)$$
$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=1/\sin^2\alpha \qquad \arcsin y=\operatorname{arcctg}(\sqrt{1-y^2}/y)$$

Сумма и разность двух углов

Из скалярного произведения векторов следует:

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\mp1}{\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta}$$

Доказательство. Пусть $\vec{A}=\langle\cos\alpha;\sin\alpha\rangle$, $\vec{B}=\langle\cos\beta;\sin\beta\rangle$.

Рассмотрим их скалярное произведение:

$$+\begin{cases}\vec{A}\cdot\vec{B}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\ \vec{A}\cdot\vec{B}=\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta)\end{cases}\implies$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\ \square$$

Затем полезно применить эти четыре формулы:

$$\alpha+\beta=\alpha-(-\beta)$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\cos((\pi/2-\alpha)+\beta)$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\sin\alpha/\cos\alpha \qquad \operatorname{ctg}\alpha=\cos\alpha/\sin\alpha\ \blacksquare$$

Двойной угол

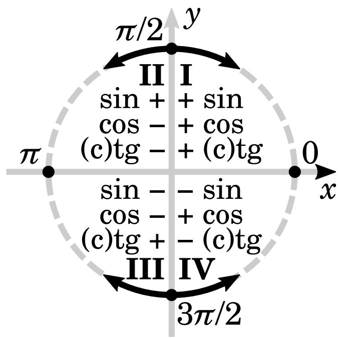
Из формул суммы и разности двух углов следует:

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \qquad \sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$
$$(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm\sin2\alpha$$

Формулы приведения

Из формул суммы и разности двух углов следуют *формулы приведения*, которые имеют вид:

$$f(\pi n/2 \pm \alpha) = \pm co f(\alpha), \ n \in \mathbb{Z}$$



Конечная функция и её знак определяются по графику; стрелками обозначены места смены функции на *кофункцию*.

Следствие. Для обратных функций верно:

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2 \qquad \arccos x + \arccos(-x) = \pi$$
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2 \qquad \operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg}(-x) = \pi$$

Формулы понижения степени

Из формул двойного угла и основного тригонометрического тождества следует:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha + 1}{2} \qquad \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha+1}$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha+1}$$

Из них легко выводятся формулы *половинного угла*.

Сумма и разность двух функций

Из формул суммы и разности двух углов следует:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = c\sin(\alpha+\phi) = c\cos(\alpha-\phi), \ c = \sqrt{a^2+b^2}$$

Из них можно вывести формулы *произведения двух функций*.

Доказательство. Рассмотрим сумму синусов:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) =$$

$$\sin x \cos y + \sin y \cos x + \sin x \cos y - \sin y \cos x = 2 \sin x \cos y$$

Введём обозначения:

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ x-y=\beta \end{cases} \iff \begin{cases} 2x=\alpha+\beta \\ 2y=\alpha-\beta \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{\alpha+\beta}{2} \\ y=\frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$$

Таким образом,

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \ \square$$

Похожие формулы доказываются аналогично. $\square$

Рассмотрим синус суммы двух углов:

$$c\sin(\alpha+\phi) = c\sin\alpha\cos\phi + c\sin\phi\cos\alpha$$

Обозначим $a = c\cos\phi$, $b = c\sin\phi$ и найдём сумму квадратов:

$$a^2+b^2 = c^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = c^2 \iff c = \sqrt{(a^2+b^2)} \ \square$$

Случай с косинусом доказывается аналогично. $\blacksquare$

Подстановка Вейерштрасса

Тригонометрические функции от α можно выразить через тангенс от $\alpha/2$ *(К. Вейерштрасс)*:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

Доказательство. Распишем каждую функцию:

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \ \square$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \ \blacksquare$$

Общая алгебра

Соответствие

Соответствие *(бинарное отношение)* между множествами X и Y — произвольное множество $\rho \subseteq X \times Y$.

Упрощённая запись $x \in X,\ y \in Y,\ \langle x, y\rangle \in \rho =: x\rho y$.

$X \supseteq D_\rho$ — область определения *(прообраз)* соответствия;
$Y \supseteq E_\rho$ — область значений *(образ)* соответствия.

Соответствие ρ *инъективно*, когда

$$\forall x_1, x_2 \in D_\rho\ \exists y \in E_\rho : x_1\rho y,\ x_2\rho y \iff x_1 = x_2.$$

Соответствие ρ *функционально*, когда

$$\forall x \in D_\rho\ \exists! y \in E_\rho : x\rho y.$$

Такое соответствие называется **отображением** *(функцией)* и обозначается:

$$\rho : X \xrightarrow{x \mapsto y} Y$$

Соответствие ρ *сюръективно*, когда

$$\forall y \in Y\ \exists x \in D_\rho : x \mapsto y.$$

Соответствие ρ *всюду определено*, когда

$$\forall x \in X\ \exists y \in E_\rho : x \mapsto y.$$

Свойства соответствий

Пусть $* \subseteq X \times X$, $\circ \subseteq X \times X$ — произвольные соответствия.

Соответствие $*$ *ассоциативно*, когда

$$\forall x, y, z \in X \implies (x * y) * z = x * (y * z).$$

Соответствие $*$ *коммутативно*, когда

$$\forall x, y \in X \implies x * y = y * x.$$

Соответствие $*$ *дистрибутивно* относительно $\circ$, когда

$$\forall x, y, z \in X \implies \begin{cases} x * (y \circ z) = x * y \circ x * z \\ (y \circ z) * x = y * x \circ z * x \end{cases}.$$

Композиция отображений

Для отображений $f: X \to Y,\ g: Y \to Z$ существует $h: X \to Z$, которое называется их **композицией**.

Упрощённая запись $\forall x \in X\ h(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.

Композиция *ассоциативна*, однако *не коммутативна*.

Ограничение и продолжение

Ограничением отображения $f: X \to Y$ на $S \subseteq D_f$ называется такое $f|_S: S \to Y$, что

$$\forall s \in S: f|_S(s) = f(s).$$

В свою очередь, f является *продолжением* отображения $f|_S$.

Метрическое пространство

Метрическое пространство — алгебраическая структура $\langle M;\ d\rangle$, где d — метрика.

Метрика d множества M — функция $d: M \times M \to R_0^+$, которая определяет *расстояние* между его двумя элементами.

Например, *евклидова метрика* использует теорему Пифагора в n-мерном пространстве:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

Для метрического пространства $\langle M;\ d\rangle,\ x,y,z \in M$ выполняются следующие *аксиомы*:

— $d(x,y) = 0 \iff x = y$ — *тождество*;
— $d(x,y) = d(y,x)$ — *симметрия*;
— $d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z)$ — *«неравенство треугольника»*.

Алгебраическая операция

Отображение $*: X^n \to X$ называется n-местной *алгебраической операцией* на X.

Нейтральным называется такой элемент $e \in X$, что

$$\forall x \in X \implies e * x = x \text{ и } x * e = x.$$

Левым или **правым** *нейтральным* называется такой элемент $e \in X$, что

$$\forall x \in X \implies e * x = x \text{ или } x * e = x.$$

Если $x * y = e$, то x — **левый** *обратный* элемент к y, а y — **правый** *обратный* к x.

Стоит отметить, что если $y \colon X \to Y$ и $x \colon Y \to X$ — отображения, то y *инъективно*, а x *сюръективно*.

Доказательство. По условию, множество X накладывается на себя. Значит, f *всюду определено*.

Так как g функционально, то

$$\forall x_1, x_2 \in X \; \exists y \in E_f \colon x_1 f y,\ x_2 f y \iff x_1 = x_2,$$

то есть f *инъективно*. $\square$

Когда X накладывается на себя, то

$$\forall x \in E_g \; \exists y \in D_g \colon x \mapsto y,$$

то есть g *сюръективно*. $\blacksquare$

Элементы x и y **взаимно** *обратны*, когда $x * y = y * x = e$.

Алгебраическая структура

Алгебраическая структура *(система)* — множество X с введёнными на нём алгебраическими операциями:

$$\langle X;\ *_1, *_2, \dots, *_n \rangle$$

Полугруппа — алгебраическая структура $\langle X;\ * \rangle$ с двухместной ассоциативной операцией $*$.

Группа — полугруппа, для которой существуют нейтральный и обратный элементы.

Кольцо — коммутативная аддитивная группа, мультипликативная полугруппа, где $\times$ дистрибутивно относительно $+$.

Поле — коммутативное кольцо с обратным элементом для $\times$.

Числовые системы

Система натуральных чисел — коммутативная аддитивная и мультипликативная полугруппа $\langle \mathbb{N};\ +, \times \rangle$.

Система целых чисел — коммутативное кольцо $\langle \mathbb{Z};\ +, \times \rangle$.

Система рациональных чисел — упорядоченное поле $\langle \mathbb{Q};\ +, \times \rangle$.

Система действительных чисел — непрерывное упорядоченное поле $\langle \mathbb{R};\ +, \times \rangle$.

Проективно расширенная числовая прямая — расширение множества действительных чисел $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$:

$$a \pm \infty = \infty \pm a = \infty, \quad a \neq \infty$$
$$b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty, \quad b \neq 0$$

$$\frac{a}{\infty} = 0 \qquad \frac{b}{0} = \infty$$

Комплексные числа

Система компле́ксных чисел — непрерывное поле $\langle \mathbb{C};\ +, \times \rangle$, в котором есть *мнимая единица* i:

$$i^2 = -1$$

Плоскость комплексных чисел — декартова система координат Oab с биективным соответствием вида:

$$z = a + bi \leftrightarrow M\langle a, b\rangle \equiv M\langle z\rangle$$

Oa — действительная ось $(a \equiv \mathfrak{Re}\ z)$;
Ob — мнимая ось $(b \equiv \mathfrak{Im}\ z)$.

Модуль $z \in \mathbb{C}$ — расстояние от O до $M(z)$:

$$|z| = r = |OM| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

Тригонометрическая форма $z \in \mathbb{C}$ —

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \ \varphi \in (-\pi; \pi]$$

$\varphi \equiv \arg z$ — *аргумент комплексного числа*, или угол, образованный $\overrightarrow{OM}$ с действительной осью.

Сопряжение — операция смены знака мнимой части $z \in \mathbb{C}$:

$$z = a + bi \to \bar{z} = a - bi$$

Она *дистрибутивна* относительно $+,\ \times$.

Извлечение квадратного корня из $z = a + bi$:

$$\sqrt{z} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} + \operatorname{sgn}(b)\, i\sqrt{\frac{|z| - a}{2}}\right)$$

Доказательство. По определению нужно найти такое v, что

$$v^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = a + bi = z.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \iff +\begin{cases} (x^2 - y^2)^2 = a^2 \\ 4x^2y^2 = b^2 \end{cases} \iff (x^2 + y^2)^2 = |z|^2$$

Извлечём корень из обеих частей уравнения:

$$\pm\begin{cases}x^2+y^2=|z|\\x^2-y^2=a\end{cases}\iff\begin{cases}2x^2=|z|+a\\2y^2=|z|-a\end{cases}\iff$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{|z|+a}{2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}$$

Так как $xy=b/2$, то при $b\geq 0\implies \operatorname{sgn}x=\operatorname{sgn}y$, иначе $\operatorname{sgn}x=-\operatorname{sgn}y$. В общем виде это записывается так:

$$v=\pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}}+\operatorname{sgn}(b)\,i\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)\ \blacksquare$$

Произведение чисел $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ — число с модулем $|z_1z_2|=||z_1|\cdot|z_2||$ и аргументом $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$.

Следствие. Возведение в степень числа $z=r(\cos\phi+i\sin\phi)$:

$$z^n=r^n(\cos n\phi+i\sin n\phi),\ n\in\mathbb{Z}$$

Частное чисел $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ — число с модулем $|z_1/z_2|=||z_1|\,/\,|z_2||$ и аргументом $\arg(z_1/z_2)=\arg z_1-\arg z_2$.

Извлечение корня n степени из $z=r(\cos\phi+i\sin\phi)$:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\phi+2\pi k}{n}\right),\ k\in\{m\}_{m=0}^{n-1}$$

Доказательство. По определению нужно найти такое v, что

$$v^n=\rho^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)=r(\cos\phi+i\sin\phi)=z$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\rho^n=r\\n\alpha=\phi+2\pi k\end{cases}\iff\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{r}\\\alpha=(\phi+2\pi k)/n,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Значит,

$$v=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\phi+2\pi k}{n}\right).\ \blacksquare$$

Деление отрезка в отношении

Точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda \in \mathbb{R}$, если:

$$\begin{cases} C \in AB \\ \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB} \\ \lambda \neq -1 \end{cases}$$

> **Теорема.** Пусть C делит AB в отношении $\lambda \in \mathbb{R}$; $A = A\langle a \rangle$, $B = B\langle b \rangle$. Тогда комплексная координата точки C равна:
>
> $$c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}$$

Также формула является достаточным *критерием принадлежности трёх точек одной прямой*.

Доказательство. По условию:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB} \iff \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \lambda \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \right) \iff$$

$$c - a = \lambda (b - c) \iff c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda} \blacksquare$$

Причём если C — середина AB, то:

$$\lambda = 1 \implies c = \frac{a + b}{2}$$

Длина отрезка

Расстояние между точками $A\langle a \rangle$ и $B\langle b \rangle$ —

$$\left| \overrightarrow{AB} \right| = |a - b| \implies AB^2 = (a - b)(\bar{a} - \bar{b})$$

Уравнение окружности с центром $A\langle a \rangle$ радиуса r —

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^2$$

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение радиус-векторов —

$$2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = a\bar{b} + \bar{a}b$$

Доказательство. Пусть $A\langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$, $a = x_1 + y_1 i$,

$b = x_2 + y_2 i$. Тогда:

$$a\bar{b} + \bar{a}b = (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) + (x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i) =$$

$$2(x_1 x_2 + y_1 y_2) = 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \blacksquare$$

Пусть $A\langle a\rangle$, $B\langle b\rangle$, $C\langle c\rangle$, $D\langle d\rangle$ — четыре различные точки. Тогда *скалярное произведение произвольных векторов* —

$$2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (b-a)(\bar{d}-\bar{c}) + (\bar{b}-\bar{a})(d-c)$$

Доказательство. По условию:

$$2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) =$$

$$2(\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) =$$

$$\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}(b\bar{d} + \bar{b}d - b\bar{c} - \bar{b}c - a\bar{d} - \bar{a}d + a\bar{c} + \bar{a}c) =$$

$$(a-b)(\bar{c}-\bar{d}) + (\bar{a}-\bar{b})(c-d) \blacksquare$$

Коллинеарность

Коллинеарными называются:

— *точки*, которые лежат на одной прямой;

— *векторы*, которые лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

> *Критерий коллинеарности* точек O, A, B:
>
> $$\frac{a}{b} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$$

Доказательство. Пока не завезли.

> *Критерий параллельности* векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$:
>
> $$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \iff \frac{b-a}{d-c} = \frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{d}-\bar{c}}$$

Доказательство. Пока не завезли.

Если A, B, C, D лежат на одной окружности, то:

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \iff \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$$

Критерий принадлежности трёх точек одной прямой:

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{c}-\bar{a}}$$

Доказательство. Пока не завезли.

Уравнение секущей AB, где $A\langle a\rangle$, $B\langle b\rangle$:

$$(\bar{a}-\bar{b})z + (b-a)\bar{z} + a\bar{b} - b\bar{a} = 0$$

Доказательство. Пока не завезли.

Предел последовательности

Определение

Предел последовательности $\{x_n\}$ — такое a, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n \in U_\varepsilon(a).$$

Упрощённая запись $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ или $n \to \infty, x_n \to a$.

Этот оператор *«дистрибутивен»* относительно *сложения*, *умножения* и *деления* *(предел знаменателя не равен нулю)*.

Частичным называется предел подпоследовательности.

Свойства

Сходимость $\implies$ ограниченность.

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. По определению:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n \in U_\varepsilon(a)$$

По «дистрибуции» модуля относительно сложения:

$$|x_n| = |x_n - a + a| \le |x_n - a| + |a| < \varepsilon + |a|$$

Положим, что $\forall m \le N\ L = \max(|\{x_m\}|, \varepsilon + |a|) \implies |x_n| \le L$. ■

> **Предельный переход.** Пусть $n \to \infty$, $x_n \to a$, $y_n \to b$. Тогда справедливо следствие:
>
> $$x_n \le y_n \text{ или } x_n < y_n \implies a \le b$$

Доказательство. По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n \in U_\varepsilon(a),\ y_n \in U_\varepsilon(b)$$

Следовательно,

$$+\begin{cases} x_n \le y_n \\ a - x_n < \varepsilon \\ y_n - b < \varepsilon \end{cases} \iff \begin{cases} y_n - x_n \ge 0 \\ y_n - x_n < 2\varepsilon + b - a \end{cases} \iff \frac{a-b}{2} < \varepsilon$$

Так как ε — сколь угодно малое положительное число, то $a - b \le 0 \iff a \le b$. □

При $x_n < y_n$ доказательство аналогично. ■

Теорема о промежуточной функции. Пусть $n \to \infty$, $x_n, y_n \to a$. Тогда справедливо следствие:

$$\forall \{z_n\}\colon x_n \le z_n \le y_n \implies z_n \to a$$

Доказательство. По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n, y_n \in U_\varepsilon(a)$$

Следовательно,

$$a - \varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a + \varepsilon \implies z_n \in U_\varepsilon(a) \implies \lim_{n\to\infty} z_n = a. \blacksquare$$

Условие Коши

Последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет *условию Коши* *(является фундаментальной)*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n, m > N\ |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Фундаментальность $\implies$ ограниченность.

Доказательство. По условию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n, m > N\ |x_n - x_m| < \varepsilon$$

По «дистрибуции» модуля относительно сложения:

$$\begin{cases} |x_n - x_m| < \varepsilon \\ |x_n| = |x_n - x_m + x_m| \end{cases} \iff \begin{cases} |x_n - x_m| < \varepsilon \\ |x_n| \le |x_n - x_m| + |x_m| \end{cases} \iff$$

$$|x_n| < \varepsilon + |x_m|$$

Положим, что $\forall k \le N\ L = \max(|\{x_k\}|, \varepsilon + |x_m|) \implies |x_n| \le L. \blacksquare$

Принцип компактности отрезка

Ограниченность $\implies$ частичная сходимость:

$$\forall \{x_n\} \in [a; b]\ \exists \{n_k\}\uparrow\colon \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$$

Доказательство. По принципу Кантора:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists! \xi \in [a_k; b_k] \subset [a_{k-1}; b_{k-1}] \iff$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_n = \xi$$

Образуем подпоследовательность:

$$\{x_{n_k} \mid \{n_k\}\uparrow,\ x_{n_k} \in [a_k; b_k]\}$$

По теореме о промежуточной функции:

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k \implies \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi \ \blacksquare$$

Частичный предел фундаментальной последовательности является её пределом.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ фундаментальна $\implies$ она ограничена.

По принципу компактности отрезка $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

По условию Коши:

$$\forall \varepsilon/2 > 0\ \exists N\colon \forall n, m > N\ \ |x_n - x_m| < \varepsilon/2$$

Зафиксируем n. При $x_m = x_{n_k} > N$ перейдём к пределу:

$$|x_n - a| \le \varepsilon/2 < \varepsilon \iff \lim_{k\to\infty} x_n = a \ \blacksquare$$

Критерий Коши

Сходимость $\iff$ фундаментальность.

Доказательство $\implies$. По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n \in U_{\varepsilon/2}(a)$$

Значит, $\forall n, m > N\ \ |x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)|$.

По «дистрибуции» модуля относительно сложения:

$$|x_n - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ \blacksquare$$

Доказательство $\impliedby$. Пусть $\{x_n\}$ фундаментальна $\implies$ она ограничена $\implies$ по принципу компактности отрезка она частично сходится к c $\implies$ по условию Коши и принципу компактности отрезка она сходится к c. $\blacksquare$

Теорема Вейерштрасса

Монотонность $\implies$ сходимость:

$$\left[\begin{array}{l} \forall\{x_n\}\nearrow \lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\} \\ \forall\{y_n\}\searrow \lim_{n\to\infty} y_n = \inf\{y_n\} \end{array}\right.$$

Доказательство. По определению точной верхней границы:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leq \sup\{x_n\}$$

Так как последовательность неубывает, то

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n \in U_\epsilon(\sup\{x_n\}) \implies$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}. \ \square$$

Для $\{y_n\}\searrow$ доказательство аналогично. $\blacksquare$

Предел функции

Определение

Предел функции f в точке x_0 — такое a, что *(О.Л. Коши)*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \colon\ \underbrace{\forall x \in \mathring{U}_{\delta}(x_0)}_{\mathrm{I}},\ \underbrace{f(x) \in U_{\varepsilon}(a)}_{\mathrm{II}}.$$

I — функция f определена в какой-либо проколотой δ-окрестности точки x_0;

II — функция f имеет образ в какой-либо проколотой ε-окрестности точки a.

Предел функции f в точке x_0 — такое a, что *(Э. Гейне)*

$$\forall \{x_n\} \in D_f \colon\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\ (x_n \neq x_0) \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

Упрощённая запись $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ или $x \to x_0, f(x) \to a$.

Бесконечно малая и большая

Бесконечно малой *(б.м.)* называется такая функция $\alpha(x)$ при $x \to x_0$, что:

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$$

> **Связь предела и б.м.** Если функция f имеет предел $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, то справедливо:
>
> $$f(x) = a + \underset{x\to x_0}{\alpha(x)},\ \ \alpha \text{ — б.м.}$$

Бесконечно большой *(б.б.)* называется такая функция $y(x)$ при $x \to x_0$, что:

$$\lim_{x\to x_0} y(x) = \infty$$

> **Связь бесконечно малой и большой.**
>
> $$\underset{x\to x_0}{\alpha(x)} \text{ — б.м.},\ \forall x \in \mathring{U}_{x_0}\ \alpha(x) \neq 0 \iff \frac{1}{\alpha} \text{ — б.б.}$$

Композиция функций

Пусть f, g — функции. Тогда:

$$\begin{cases} \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \\ \lim_{y\to y_0} g(x) = z_0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = z_0 \\ f(x) \neq y_0 \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $g\circ f = \varphi$; по определению предела:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon\ \forall y \in \mathring{U}_\delta(y_0) \subseteq D_g,\ f(x) \in U_\varepsilon(z_0) \\ \forall \delta > 0\ \exists \sigma > 0\colon\ \forall x \in \mathring{U}_\sigma(x_0) \subseteq D_f,\ g(x) \in U_\delta(y_0) \end{cases}$$

Из $\mathring{U}_\delta(y_0) \cap U_\delta(y_0) = \mathring{U}_\delta(y_0)$ следует:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma > 0\colon\ \forall x \in \mathring{U}_\sigma(x_0) \subseteq D_f,\ \ \varphi(x) \in U_\varepsilon(z_0) \\ y \neq y_0 \implies f(x) \neq y_0 \end{cases} \iff$$

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = z_0,\ f(x) \neq y_0\ \blacksquare$$

Односторонний предел

Односторонним *(правым или левым)* называется предел функции, который определён в терминах односторонних окрестностей *(монотонных последовательностей)*:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = a \quad \text{или} \quad x \to x_0 + 0,\ f(x) \to a$$

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = a \quad \text{или} \quad x \to x_0 - 0,\ f(x) \to a$$

Существование предела равносильно существованию *равных* односторонних пределов:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \iff \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

Асимптота

Асимптота — прямая, к которой *неограниченно* приближается кривая, но не сливается с ней.

Горизонтальная асимптота для графика функции f задаётся уравнением:

$$y = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

Наклонная асимптота для графика функции f задаётся уравнением $y = kx + b$, где

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \\ b &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx). \end{aligned}$$

Вертикальная асимптота для графика функции f задаётся уравнением $x = a$, где

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x\to a-0} f(x) = \infty.$$

Непрерывность

Пусть $f : X \to Y$ — функция. Тогда:

$$\begin{aligned} x - x_0 &=: \Delta x \text{ — *приращение аргумента* в точке } x_0 \\ f(x) - f(x_0) &=: \Delta f \text{ — *приращение функции* в точке } x_0 \end{aligned}$$

Функция f **непрерывна** *в точке* x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{или} \quad \Delta x \to 0,\ \Delta f \to 0.$$

Односторонняя непрерывность в точке x_0 определяется через односторонние пределы.

Непрерывными в точке x_0 являются *сумма*, *произведение*, *частное* *(предел знаменателя не равен нулю)* и *композиция* непрерывных в ней функций.

Функция f **непрерывна** *на промежутке* $[a; b]$, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка:

$$f \in \mathbb{C}[a; b] \text{ — нотация}$$

Теорема о промежуточном значении

Пусть $f \in \mathbb{C}[a; b]$. Тогда справедливо:

$$\forall c \in [f(a); f(b)]\ \exists \xi \in [a; b] : c = f(\xi)$$

Доказательство. По принципу Кантора:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \xi \in [a_n; b_n] \subset [a_{n-1}; b_{n-1}] \subseteq X \implies$$
$$n \to \infty,\ a_n, b_n \to \xi$$

По определению непрерывности функции на промежутке:

$$n \to \infty,\ f(a_n), f(b_n) \to f(\xi)$$

По теореме о промежуточной функции:

$$f(a_n) \leq c \leq f(b_n) \implies c = f(\xi) \ \blacksquare$$

> **Метод бисекции.** Пусть $f \in \mathbb{C}[a;b]$. Тогда справедливо:
> $$\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b) \implies \exists c \in [a;b] : f(c) = 0$$

Используется, если нужно найти *примерный* нуль функции.

Критерий Коши

Сходимость $\iff$ выполнение *условия Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \colon \forall x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0)\ \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Доказательство $\implies$. По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \colon \mathring{U}_\delta(x_0) \subseteq D_f,\ U_{\varepsilon/2}(a) \cap E_f \neq \emptyset$$

Пусть $x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0)$; по неравенству треугольника:

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - a| + |f(x'') - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ \blacksquare$$

Доказательство $\impliedby$. По условию Коши:

$$\exists \{x_n\} \in D_f \colon \lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ x_n \neq x_0$$

Последовательности $\{f(x_n)\}$ фундаментальны $\implies$ сходятся.

По фундаментальности и сходимости к одной точке x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \ \blacksquare$$

Теорема Вейерштрасса

Пусть $f \in C[a;b]$. Тогда в некоторых точках отрезка функция достигает своих точных верхней и нижней границ на $[a;b]$.

Доказательство. Пусть $\sup f([a;b]) =: M$, $\inf f([a;b]) =: m$.

По определению точных верхней и нижней границ:

$$\forall x \in [a;b]\ f(x) \in [m;M]$$

По принципу компактности отрезка:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M \qquad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$$

По определению непрерывности:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi) \implies f(\xi) = M \ \blacksquare$$

Бесконечно малая функция

Функция g *бесконечно мала* относительно f при $x \to x_0$, если

$$g(x) = \varepsilon(x) f(x) := \underset{x\to x_0}{o}(f), \qquad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Верно следующее утверждение:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff f(x) = a + \underset{x\to x_0}{o}(x)$$

Доказательство $\implies$. По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \colon 0 < |x - x_0| < \delta,\ |f(x) - a| < \varepsilon$$

По теореме о промежуточной функции:

$$0 \le |f(x) - a| < \varepsilon \implies \lim_{x\to x_0} (f(x) - a) = 0 \iff$$

$$f(x) - a = \underset{x\to x_0}{o}(x) \iff f(x) = a + \underset{x\to x_0}{o}(x) \ \blacksquare$$

Доказательство $\impliedby$. По условию:

$$f(x) = a + o(x) \iff |f(x) - a| = |o(x)|$$

По определению бесконечно малой функции:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \colon 0 < |x - x_0| < \delta,\ |o(x)| < \varepsilon$$

По определению предела:

$$|f(x) - a| < \varepsilon \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = a \ \blacksquare$$

Дифференциальное исчисление

Дифференцируемость

Дифференцируемой *(«линейной в малом») в точке* x_0 называется такая функция f, для которой справедливо:

$$\Delta f = (k + \underset{\Delta x \to 0}{\alpha(x)})\Delta x, \ \alpha \text{ — б.м.}$$

Односторонняя дифференцируемость в точке x_0 определяется через односторонние пределы.

Дифференциал *функции* f — линейная часть Δf:

$$k\Delta x =: \mathrm{d}f$$

Производная *в точке* x_0 — предел вида: *(Ж.Л. Лагранж)*

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =: f'(x_0)$$

Свойства

Таблица *«дистрибуции»* производной:

$$(f+g)' = f' + g' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$
$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g' \qquad (kf)' = kf', \ k = \mathrm{const}$$

> Дифференцируемость $\implies$ непрерывность.

Доказательство. По определению производной:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) \iff \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \underset{\Delta x \to 0}{\alpha(x)}\Delta x \iff$$
$$\Delta f = \Delta x(f'(x_0) + \alpha(x)\Delta x) \implies \Delta x \to 0, \ \Delta f \to 0 \ \blacksquare$$

> **Производная обратной функции.** Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемая функция. Тогда справедливо:
>
> $$f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(x)}, \ f'(x) \neq 0$$

Доказательство. По условию запишем тождество:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 1 : \frac{\Delta x}{\Delta f}$$

По предельному переходу и непрерывности функций:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 1 : \lim_{\Delta f \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta f} \overset{\text{опр}}{\iff} f'(x) = 1 : f^{-1'}(y) \iff$$

$$\iff f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(x)}, \ f'(x) \neq 0 \ \blacksquare$$

Элементарные производные

Таблица производных элементарных функций:

$$C' = 0 \qquad (x^n)' = nx^{n-1}, \ n \neq 0 \qquad \ln' x = 1/x$$

$$\sin' \alpha = \cos \alpha \qquad \cos' \alpha = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}' \alpha = 1/\cos^2 \alpha \qquad \operatorname{ctg}' \alpha = -1/\sin^2 \alpha$$

$$\arcsin' x = 1/\sqrt{1-x^2} \qquad \arccos' x = -1/\sqrt{1-x^2}$$

$$\operatorname{arctg}' x = 1/(1+x^2) \qquad \operatorname{arcctg}' x = -1/(1+x^2)$$

Касательная

Касательная — прямая, которая проходит через точку x_0 кривой и представляет *предельное* положение секущей при $x \to x_0$, или $\Delta x \to 0$.

> **Геометрический смысл производной.** Угловой коэффициент *(тангенс)* касательной к графику функции f равен *производной* в этой точке:
>
> $$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

Доказательство. По определению касательной:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k$$

По определению производной:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k \ \blacksquare$$

> *Уравнение касательной* к графику функции f в точке x_0 имеет вид:
> $$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Доказательство. По уравнению секущей:

$$A\langle x_0, f(x_0)\rangle,\ B\langle x, y\rangle \implies y - f(x_0) = k(x - x_0)$$

По геометрическому смыслу производной:

$$k = f'(x_0) \implies y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \iff$$
$$\iff y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\ \blacksquare$$

Промежутки монотонности

Если функция f дифференцируема в точке x_0, то

$$\begin{cases} f'(x_0) > 0 \implies f\uparrow \text{ около } x_0 \\ f'(x_0) < 0 \implies f\downarrow \text{ около } x_0 \end{cases}.$$

Доказательство. По определению производной:

$$f'(x_0) > 0 \iff \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} > 0 \iff \frac{\Delta f}{\Delta x} > o(\Delta x)$$

При достаточно малом Δx верно:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0 \iff \left[\begin{array}{l} \Delta f, \Delta x > 0 \\ \Delta f, \Delta x < 0 \end{array}\right. \iff f\uparrow \text{ около } x_0\ \square$$

Для $f'(x_0) < 0$ доказательство аналогично. $\blacksquare$

Условие существования экстремума

Точка локального экстремума $\implies$ критическая точка.

Доказательство. По определению локального максимума:

$$\exists \delta > 0\colon \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)\ f(x_0) > f(x)$$

Производная в точке x_0 либо существует, либо нет. $\square$

Допустим, она существует; по определению производной:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$$

По предельному переходу:

$$\left[\begin{aligned}&\Delta x > 0 \implies \Delta f/\Delta x < 0 \implies f'(x_0) \le 0\\&\Delta x < 0 \implies \Delta f/\Delta x > 0 \implies f'(x_0) \ge 0\end{aligned}\right. \iff$$

$$0 \le f'(x_0) \le 0 \iff f'(x_0) = 0 \ \square$$

Для локального минимума доказательство аналогично. ■

Если в критической точке производная меняет знак, она является локальным экстремумом.

Доказательство. По определению критической точки:

$$\left[\begin{aligned}&f'(x_0) = 0\\&f'(x_0) = \text{undefined}\end{aligned}\right.$$

Допустим для определённости:

$$\begin{cases}\exists\delta > 0\colon \forall x \in \mathring{U}_{\delta-}(x_0)\ f'(x) > 0\\\exists\delta > 0\colon \forall x \in \mathring{U}_{\delta+}(x_0)\ f'(x) < 0\end{cases}$$

По промежуткам монотонности:

$$\begin{cases}f\uparrow \text{ на } U_{\delta-}(x_0)\\f\downarrow \text{ на } U_{\delta+}(x_0)\end{cases} \iff x_0 \text{ — локальный максимум } \square$$

Для локального минимума доказательство аналогично. ■

Теорема Ролля

Пусть f дифференцируема на $(a;b)$, непрерывна на $f[a;b]$, и $f(a) = f(b)$. Тогда: *(М. Ролль)*

$$\exists\xi \in (a;b) : f'(\xi) = 0$$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса:

$$f(m) = \inf f([a;b]) \qquad f(M) = \sup f([a;b])$$

При $f(a) = f(b) = f(m)$ по условию существования экстремума:

$$f'(M) = 0 \ \square$$

При $f(m) = f(M)$ функция — константа на $[a;b]$, производная которой равна нулю. ■

Теорема Лагранжа

Пусть f дифференцируема на $(a;b)$ и непрерывна на $f[a;b]$. Тогда: *(Ж.Л. Лагранж)*

$$\exists \xi \in (a;b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x) := f(x) - \lambda x$; подберём λ так, чтобы $\varphi(a) = \varphi(b)$:

$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b \iff (b - a)\lambda = f(b) - f(a) \iff$$

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

По теореме Ролля:

$$\exists \xi \in (a;b) : \varphi'(\xi) = 0 \iff f'(\xi) - \lambda = 0 \iff$$

$$\lambda = f'(\xi) \implies f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \blacksquare$$

Условие постоянства функции

Пусть f непрерывна на $[a;b]$ и состоит из стационарных точек на $(a;b)$. Тогда $f([a;b]) = C$.

Доказательство. По теореме Лагранжа:

$$\forall x', x'' \in [a;b] \; \exists \xi \in (x';x'') : f'(\xi) = \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$$

По определению стационарной точки:

$$f'(\xi) = 0 \implies \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = 0 \iff f(x'') = f(x') \blacksquare$$

Пусть f, g непрерывны на $[a;b]$ и $f' = g'$. Тогда:

$$\forall x \in [a;b] \; f(x) - g(x) = C$$

Доказательство. Пусть $\varphi := f - g$; по условию:

$$\forall x \in (a;b) \; \varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

По условию постоянства функции:

$$\varphi'(x) = 0 \iff \varphi(x) = C \iff f(x) - g(x) = C \blacksquare$$

Интегральное исчисление

Неопределённый интеграл

Первообразная для функции f на множестве X — такая функция F, что:

$$\forall x \in X\ F'(x) = f(x)$$

> Если у функции f есть первообразная F, то для любой константы C функция $F+C$ тоже первообразная, причём других нет.

Доказательство. По определению первообразной:

$$F' = f$$

По дистрибуции производной:

$$(F+C)' = f \implies F + C \text{ — первообразная для } f\ \square$$

Пусть Φ — другая первообразная для f:

$$\begin{cases} \Phi' = f \\ F' = f \end{cases} \implies \Phi' - F' = (\Phi - F)' = f - f = 0$$

По условию постоянства функции:

$$\Phi - F = C \iff \Phi = F + C\ \blacksquare$$

Неопределённый интеграл — множество всех первообразных функции f:

$$F(x) + C =: \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

f — подынтегральная функция;
$f(x)\,\mathrm{d}x$ — подынтегральное выражение;
x — переменная интегрирования;
C — постоянная интегрирования.

Свойства

Операция интегрирования *дистрибутивна* относительно *сложения*, а также:

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \quad \mathrm{d}\left(\int F(x)\,\mathrm{d}x\right) = F(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\left(\int F(x)\,\mathrm{d}x\right)' = F(x) + C \quad \int kF(x)\,\mathrm{d}x = k\int F(x)\,\mathrm{d}x,\ k \neq 0$$

Интегрирование по частям. Пусть $u\mathrm{d}v$ — подынтегральная функция. Тогда справедливо:

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

Доказательство. По «дистрибуции» производной:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

По определению интеграла:

$$\int (u'v + uv')\mathrm{d}x = uv + C \iff \int u'v\mathrm{d}x + \int uv'\mathrm{d}x = uv + C$$

По определению дифференциала:

$$\begin{cases} \mathrm{d}u = u'\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = v'\mathrm{d}x \end{cases} \implies \int v\mathrm{d}u + \int u\mathrm{d}v = uv + C \iff$$

$$\iff \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u \ \blacksquare$$

Инвариантность. Смена переменной интегрирования на другую дифференцируемую функцию является *равносильным* переходом:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \iff \int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$$

Теория графов

Ориентированный граф

Граф *(ориентированный граф или орграф)* — упорядоченная пара $G = \langle V, E \rangle$, где

V — непустое множество *вершин* *(узлов)*;
E — конечное множество *рёбер*, $E \subseteq V \times V$.

Порядок графа G — число его вершин $n = |V|$.

Размер графа G — число его рёбер $m = |E|$.

Ребро $e = \langle v,\ w \rangle$ задаётся вершинами $v,\ w$, где v — начало ребра, а w — его конец; вершины $v,\ w$ являются *соседними*.

Входящая валентность вершины v графа G — число рёбер, чей конец в v:

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{\langle u, v \rangle \mid \langle u, v \rangle \in E\}|$$

Исходящая валентность вершины v графа G — число рёбер, чьё начало в v:

$$\mathrm{outdeg}(v) = |\{\langle v, u \rangle \mid \langle v, u \rangle \in E\}|$$

Валентность вершины v графа G — сумма входящей и исходящей валентностей вершины:

$$\deg(v) = \mathrm{indeg}(v) + \mathrm{outdeg}(v)$$

Свойство. Пусть $G = \langle V, E \rangle$ — граф с n вершинами и m рёбрами, причём $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Тогда:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{indeg}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{outdeg}(v_i) = m$$

Подграф $G = \langle V, E \rangle$, *порождённый* на $W \subset V$, — граф вида

$$G_W = \langle W, E \cap W \times W \rangle.$$

Последовательность вершин

Маршрут от вершины v_i до вершины v_j графа G — последовательность вершин или рёбер:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} [v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j] \text{ вершины} \\ [e_i, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_j] \text{ рёбра} \end{array}\right. \\ e_k = \langle v_{k-1}, v_k \rangle, k \in \{i+1, \dots, j\} \end{cases}$$

Закрытым называется такой маршрут, где начальная и конечная вершины совпадают.

Цепь — маршрут без повтора рёбер; *простая цепь* — маршрут без повтора рёбер и вершин *(кроме, возможно, первой и последней вершины)*; *цикл* — закрытая простая цепь.

Ациклическим *(лесом)* называется граф без циклов.

Неориентированный граф

Неорграф *(неориентированный граф)* — такой граф $G = \langle V, E \rangle$, что $\forall v, w \in V \ \langle v, w \rangle \in E \implies \langle w, v \rangle \in E$.

Валентность вершины v неорграфа — число рёбер, которые связаны с v.

Связным называется такой неорграф, между любыми вершинами которого есть маршрут.

Компонент связности неорграфа — связный подграф, который не входит в состав такого же подграфа.

Связность графа

Связным называется такой орграф, у которого аналогичный неорграф связный.

Орграф $G = \langle V, E \rangle$ называется *сильно связным*, если

$$\forall v, w \in V \ \exists \begin{cases} \text{маршрут от v до w} \\ \text{маршрут от w до v} \end{cases}$$

Компонент сильной связности графа — сильно связный подграф, который не входит в состав такого же подграфа.

Виды неориентированных графов

Неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle =: K_n,\ n = |V|$ называется *полным*, если $\forall v, w \in V, v \neq w\ \langle v, w \rangle \in E$.

Неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$ называется *однородным*, если $\forall v, w \in V\ \deg(v) = \deg(w)$.

Свободное дерево

Дерево *(свободное)* — компонент связности леса $T = \langle V, E \rangle$.

Свойство. Пусть $T = \langle V, E \rangle$. Тогда $|E| = |V| - 1$.

Поддерево $T = \langle V, E \rangle$, порождённое на $W \subset V$, — дерево вида:

$$T_W = \langle W, E \cap W \times W \rangle$$

Корневое дерево

Корневое дерево *(ориентированное дерево или ордерево)* — такой орграф, у которого:

— аналогичный неорграф есть свободное дерево;
— есть единственная вершина с нулевой входящей валентностью, или *корень*.

Пусть $T = \langle V, E \rangle$ — дерево, $\langle v, w \rangle \in E$:

$v =: \mathrm{parent}_w$ — *родитель* вершины w.

$w \in \mathrm{children}_v$ — *ребёнок* вершины v.

Корневым называется узел без родителей.

Листовым называется узел без детей.

Родственными называются вершины с общими родителями.

Первый в памяти ребёнок узла v — first_v, *последний* — last_v; *следующий* в памяти родственник узла v — next_v.

Уровень вершины v дерева T — длина простой цепи от root_T до v; обозначается depth_v.

Способы представления графа

Матрица смежности для $G = \langle V, E \rangle$ — булева матрица V^2, элементы которой равны логическому значению выражения:

$$\langle v, w \rangle \in E \mid v, w \in V$$

Матрица занимает $\mathcal{O}(V^2)$ места; проверка смежности проходит за $\mathcal{O}(1)$.

Список смежности для $G = \langle V, E \rangle$ — множество вершин $v \in V$, которым соответствует другое множество вершин:

$$\{w \in V \mid \langle v, w \rangle \in E\}$$

Список занимает $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ места; проверка смежности проходит за $\mathcal{O}(\mathrm{outdeg}(v))$.

Способы представления дерева

Массив родителей для $T = \langle V, E \rangle$ — массив вершин $v \in V$, которым соответствует их родитель.

Массив занимает $\mathcal{O}(|V|)$ места; вывод родителя и порядка дерева проходят за $\mathcal{O}(1)$.

«Первый ребёнок, следующий родственник» для $T = \langle V, E \rangle$ — такая упорядоченная пара массивов вершин $\langle F, N \rangle$, что

F — массив из первых детей для всех вершин;
N — массив из следующих родственников для всех вершин.

Массив занимает $\mathcal{O}(|V|)$ места; вывод первого ребёнка, следующего родственника и порядка дерева проходят за $\mathcal{O}(1)$.

Редактирование дерева

К **элементарным операциям** редактирования дерева относятся:

— *удаление* листового узла v с ребром $\langle \mathrm{parent}_v, v \rangle$: $v \mapsto \lambda$;
— *вставка* листового узла v с ребром $\langle \mathrm{parent}_v, v \rangle$: $\lambda \mapsto v$;
— *замещение* вершины v другой вершиной w: $v \mapsto w$.

Пусть $T_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $T_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ — корневые деревья.

Трансформация T_1 в T_2 — упорядоченное биективное отображение $E \subseteq V_1 \cup \{\lambda\} \times V_2 \cup \{\lambda\}$.

Биективное *отображение* T_1 в T_2 — такое $M \subseteq W_1 \times W_2$

для $W_1 \subseteq V_1,\ W_2 \subseteq V_2$, что:

$$\begin{cases} \langle \mathrm{root}_{T_1}, \mathrm{root}_{T_2} \rangle \in M \neq \emptyset \\ \langle \mathrm{parent}_v, \mathrm{parent}_w \rangle \in M \iff \langle v, w \rangle \in M \\ v_2 = \mathrm{next}_{v_1},\ w_2 = \mathrm{next}_{w_1} \iff \langle v_1, w_1 \rangle, \langle v_2, w_2 \rangle \in M \end{cases}$$

Лемма. Пусть M — отображение T_1 в T_2. Тогда:

$$\forall \langle v, w \rangle \in M \ \mathrm{depth}_v = \mathrm{depth}_w$$

Стоимость элементарной операции над T_1 и T_2 задаётся метрикой $\gamma\colon V_1 \cup V_2 \cup \{\lambda\} \times V_1 \cup V_2 \cup \{\lambda\} \to \mathbb{R}_0^+$.

Стоимость трансформации T_1 в T_2 (E) задаётся метрикой:

$$\gamma(E) = \sum_{\langle v, w \rangle \in E} \gamma(v, w)$$

Редакционная дистанция между T_1 и T_2 — функция:

$$\gamma_{\min} = \min(\{\gamma(E) \mid \forall E\})$$

Редакционный граф для T_1 и T_2 — неорграф $G = \langle V, E \rangle$ с вершинами вида vw, $v \in V_1 \cup \{v_0\}$, $w \in V_2 \cup \{w_0\}$ (v_0, w_0 — *мнимые узлы*), рёбра которого определяются по правилу:

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{depth}_{v_{i+1}} \geq \mathrm{depth}_{w_{j+1}} \iff \langle v_i w_j, v_{i+1} w_j \rangle \in E \ (v_{i+1} \mapsto \lambda) \\ \mathrm{depth}_{v_{i+1}} = \mathrm{depth}_{w_{j+1}} \iff \langle v_i w_j, v_{i+1} w_{j+1} \rangle \in E \ (v_{i+1} \mapsto w_{j+1}) \\ \mathrm{depth}_{v_{i+1}} \leq \mathrm{depth}_{w_{j+1}} \iff \langle v_i w_j, v_i w_{j+1} \rangle \in E \ (\lambda \mapsto w_{j+1}) \end{array}\right.$$

Лемма. Пусть G — редакционный граф для T_1 и T_2. Тогда маршрут P от $v_0 w_0$ до $v_{n_1} w_{n_2}$ задаёт трансформацию:

$$\begin{gathered} E = \{\langle v_{i+1}, \lambda \rangle \mid \langle v_i w_j, v_{i+1} w_j \rangle \in P\} \cup \ldots \\ \ldots \{\langle v_{i+1} w_{j+1} \rangle \mid \langle v_i w_j, v_{i+1} w_{j+1} \rangle \in P\} \cup \ldots \\ \ldots \{\langle \lambda, w_{j+1} \rangle \mid \langle v_i w_j, v_i w_{i+1} \rangle \in P\} \end{gathered}$$

Алгоритм редактирования дерева занимает $\mathcal{O}(n_1 n_2)$ места, используя $\mathcal{O}(n_1 n_2)$ времени.

Обход дерева

Обход дерева $T = \langle V, E \rangle$ — биективное отображение:

$$\mathrm{order}\colon V \to \{1, \ldots, |V|\}$$

Прямым называется такой обход дерева $T = \langle V, E\rangle$, что:

$$\begin{cases} \mathrm{order}(\mathrm{root}_T) = 1 \\ \mathrm{order}(\mathrm{first}_v) = \mathrm{order}(v) + 1,\ \mathrm{first}_v \neq \emptyset \\ \mathrm{order}(\mathrm{next}_v) = \mathrm{order}(v) + \mathrm{size}(v),\ \mathrm{next}_v \neq \emptyset \end{cases}$$

Алгоритм прямого обхода дерева занимает линейное место, используя линейное время.

Поиск с возвратом

Поиск с возвратом — метод нахождения решений задачи полным перебором всех допустимых расстановок элементов конечного множества:

— в качестве *частичного решения* используется пустое упорядоченное множество M, которое расширяется до полного по одному элементу за операцию;

— если решение *полное* или *не удовлетворяет условию*, алгоритм приступает к другому частичному решению.

Пусть $T_1 = \langle V_1, E_1\rangle$, $T_2 = \langle V_2, E_2\rangle$ — корневые деревья.

Кандидат для $v \in V_1$ — элемент множества

$$C_v := \{w \mid w \in V_2,\ \mathrm{depth}_v = \mathrm{depth}_w\} \cup \{\lambda\}.$$

Возвратное дерево для T_1 и T_2 — такое дерево $T = \langle V, E\rangle$ с мнимым корнем, что:

$$\begin{cases} M \subseteq V_1 \times W \ \textit{(упорядочено, биективно)} \\ \left.\begin{array}{l} W = [\mathrm{root}_T, \dots, w] \setminus \{\mathrm{root}_T\} \subseteq V_2 \cup \{\lambda\} \subseteq V \\ \mathrm{children}_w = \emptyset \end{array}\right\} \mathrm{I} \\ \left.\begin{array}{l} \forall \langle w_1, w_2\rangle \subseteq W\ \mathrm{order}(w_1) < \mathrm{order}(w_2) \\ w_1, w_2 \neq \lambda \end{array}\right\} \mathrm{II} \\ \left.\forall \langle v_i, w_j\rangle \in M\ w_j \in C_{v_i} \right\} \mathrm{III} \end{cases}$$

I — всякая простая цепь возвратного дерева от корня до листа без корня соответствует *уникальному* отображению T_1 в T_2;

II — индекс узлов одной простой цепи от корня до листа без корня *строго возрастает*;

III — всякий узел простой цепи от корня до листа без корня является *кандидатом* для соответствующего узла T_1.

Итерация построения полного решения M для условия P:

$$\begin{cases} \forall c \in C_{W.\mathrm{last}()}\ W := W \cup \{c\} \\ T(M) := M \text{ — частичное решение} \\ M \wedge P(M) \wedge T(M) \neq \emptyset \implies \text{расширить M} \\ M \wedge P(M) \wedge T(M) = \emptyset \implies \text{следующее M} \end{cases}$$

Дерево ветвей и границ для T_1 и T_2 — такое возвратное дерево для T_1 и T_2, что $P := P \wedge R$, где:

$$R(M_i) = \begin{cases} \alpha_{\min} = \emptyset \implies \alpha_{\min} := \max \\ \alpha_{\min} \geq \gamma(M_i) \implies \text{True}, \alpha_{\min} := \gamma(M_i) \\ \alpha_{\min} < \gamma(M_i) \implies \text{False} \end{cases}$$

«Разделяй и властвуй»

«Разделяй и властвуй» — метод рекурсивного нахождения решений задачи:

— задача делится на меньшие, *независимые* друг от друга подзадачи, пока они не будут сведены к *тривиальным*;

— решения тривиальных подзадач *комбинируются* в единое к исходной задаче.

Пусть $T_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $T_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ — корневые деревья, $A_1 = T_{1W_1}$, $A_2 = T_{2W_2}$, $B_1 = T_1 \backslash A_1$, $B_2 = T_2 \backslash A_2$ — их поддеревья:

$$\begin{cases} W_1 = \{v_m \in V_1 \mid \mathrm{order}(v_m) < \mathrm{order}(v)\} \\ W_2 = \{w_n \in V_2 \mid \mathrm{order}(w_p) < \mathrm{order}(w)\} \\ v := \mathrm{last}_{v_i},\ w := \mathrm{last}_{w_k} \end{cases}$$

Дерево «разделяй и властвуй» для T_1 и T_2 — такое ордерево $T = \langle V, E \rangle$ с вершинами вида $v_i v_j w_k w_l$, что:

$$\begin{cases} v_i, v_j \in V_1,\ w_k, w_l \in V_2 \\ \mathrm{root}_T = v_1 v_{n_1} w_1 w_{n_2}\ (T_1 \to T_2) \end{cases}$$

Шаг рекурсивного построения решения M:

$$\begin{cases} v_i = v_j,\ w_k = w_l \implies v_i \mapsto w_k, \text{комбинировать} \\ v_i \neq v_j,\ w_k = w_l \implies A_1 \to T_2\ (B_1 \to \lambda) \\ v_i = v_j,\ w_k \neq w_l \implies T_1 \to A_2\ (\lambda \to B_2) \\ v_i \neq v_j,\ w_k \neq w_l \implies \left[\begin{array}{l} A_1 \to A_2 \text{ или } A_1 \to T_2 \\ B_1 \to B_2 \text{ или } T_1 \to A_2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Динамическое программирование

Динамическое программирование — метод рекурсивного нахождения решений задачи:

— задача делится на меньшие, *зависимые* друг от друга подзадачи, пока они не будут сведены к *тривиальным*;

— решения тривиальных подзадач *комбинируются* в единое к исходной задаче.

Мемоизация («сверху вниз») — кеширование и повторное использование ранее подсчитанных результатов.

Табуляция («снизу вверх») — заполнение кеша на основе тривиальных подзадач.

Лучшее решение выбирается из матрицы лучших решений его подграфов *(у них по рекурсии есть свои матрицы)*:

$$\begin{matrix} \langle v_i, w_k \rangle & \langle v_i, w_k w_{k+1} \rangle & \cdots & \langle v_i, w_k \dots w_l \rangle \\ \langle v_i v_{i+1}, w_k \rangle & \langle v_i v_{i+1}, w_k w_{k+1} \rangle & \cdots & \langle v_i v_{i+1}, w_k \dots w_l \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_i \dots v_j, w_k \rangle & \langle v_i \dots v_j, w_k w_{k+1} \rangle & \cdots & \langle v_i \dots v_j, w_k \dots w_l \rangle \end{matrix}$$

$$\begin{cases} v \in V_1,\ w \in V_2 \\ \mathrm{depth}_v = \mathrm{depth}_w \\ \{v_i, \dots, v_j\} = \mathrm{children}_v \\ \{w_k, \dots, w_l\} = \mathrm{children}_w \\ \langle v_i \dots v_j, w_k \dots w_l \rangle \sim \gamma_{\min}(G_1 \to G_2) \\ G_1 = T_{1W_i} \cup \dots \cup T_{1W_j} \\ G_2 = T_{2W_k} \cup \dots \cup T_{2W_l} \\ \forall s \in \{i, \dots, j\}\ \mathrm{root}_{T_{1Ws}} = v_s \\ \forall t \in \{k, \dots, l\}\ \mathrm{root}_{T_{2Wt}} = w_t \end{cases}$$

Алгоритм табуляции занимает $\mathcal{O}(n_1 n_2)$ места, используя $\mathcal{O}(n_1 n_2)$ времени.

Динамическое программирование

Динамическое программирование — метод решения задач на оптимизацию *по принципу оптимальности*:

«оптимальная структура имеет оптимальные подструктуры» *(Р. Беллман)*

Уравнение Беллмана

Введём задачу на оптимизацию вида:

$$\operatorname*{opt}_{d\in\Delta}\{H(d)\}$$

d — выбор;
Δ — допустимое множество;
H — целевая функция одной переменной.

Оптимум — оптимальное значение целевой функции *(выбор d^* оптимизирует H)*:

$$H^* := H(d^*) \qquad d^* := \arg\operatorname*{opt}_{d\in\Delta}\{H(d)\}$$

Пусть H — целевая функция нескольких переменных.

Оптимум такой задачи можно найти либо *полным перебором*, либо *последовательным принятием решений*:

$$\begin{aligned}
H^* &= \operatorname*{opt}_{\langle d_1,\dots,d_n\rangle\in\Delta}\{H(d_1,\dots,d_n)\}\\
&= \operatorname*{opt}_{d_1\in D_1}\{\operatorname*{opt}_{d_2\in D_2}\{\dots\{\operatorname*{opt}_{d_n\in D_n}\{h(d_1,\dots,d_n)\}\}\dots\}\}\\
&= \operatorname*{opt}_{d_1\in D_1}\{H(d_1,d_2^*(d_1),\dots,d_n^*(d_1))\}
\end{aligned}$$

$\Delta = D_1\times\dots\times D_n$ — пространство решений;
$D_n(d_1,\dots,d_{n-1})$ — множество решений, которое зависит от предыдущих $\langle d_1,\dots,d_{n-1}\rangle$ решений;
$d_i^*(d_1,\dots,d_{i-1})$ — локальный выбор d, оптимизирующий H.

Распределение ресурсов

В задаче на *оптимальное распределение ресурсов* требуется разделить ограниченное число ресурсов на множество их потребителей, у которых есть стоимость.

Общая формула:

$$f(k, m) = \min_{d \in \{0, \ldots, m\}} \{C(k, d) + f(k + 1, m - d)\}$$

Теория множеств

Открытое множество

ε-окрестность точки $x_0 \in X$ метрического пространства $\langle X, d \rangle$ — такое множество точек $x \in X$, что $d(x_0, x) < \varepsilon$.

Упрощённая запись $\{x \mid d(x_0, x) < \varepsilon\} =: U_\varepsilon(x_0)$.

Особые случаи:

$$U_\varepsilon(+\infty) := (1/\varepsilon; +\infty)$$
$$U_\varepsilon(-\infty) := (-\infty; -1/\varepsilon)$$

Проколотой называется ε-окрестность точки x_0 без неё:

$$\mathring{U}_\varepsilon(x_0) := U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$$

Правосторонней (левосторонней) называется ε-окрестность точки x_0 без левой (правой) половины:

$$U_{\varepsilon+}(x_0) := [x_0; \varepsilon) \qquad U_{\varepsilon-}(x_0) := (\varepsilon; x_0]$$

Ограниченное множество

Множество M ограничено *сверху*, если

$$\forall m \in M \ \exists C \in \mathbb{R} : m \leq C.$$

Точной *(минимальной*, англ. *supremum)* называется такая *верхняя* граница множества M — $\sup M$, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in M : m \in U_{\varepsilon-}(\sup M).$$

Множество M ограничено *снизу*, если

$$\forall m \in M \ \exists C \in \mathbb{R} : m \geq C.$$

Точной *(максимальной*, англ. *infimum)* называется такая *нижняя* граница множества M — $\inf M$, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in M : m \in U_{\varepsilon+}(\inf M).$$

Принцип Кантора

Последовательность вложенных отрезков содержит точки ξ, которые принадлежат им всем:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists \xi \in [a_n; b_n] \subset [a_{n-1}; b_{n-1}]$$

Если $n \to \infty$, $(b_n - a_n) \to 0$, то ξ единственна:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n\} = \xi$$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n\}$$

Значит, $\forall (n \in \mathbb{N},\ \xi \in [\sup\{a_n\}; \inf\{b_n\}])\ \xi \in [a_n; b_n]$. $\square$

Если $\inf\{b_n\} = \sup\{a_n\}$, то ξ единственна:

$$0 = \inf\{b_n\} - \sup\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n)\ \blacksquare$$

Локальный экстремум

Локальный **максимум** функции f — такая точка x_0, что

$$\exists \delta > 0\colon\ \sup U_\delta(x_0) = f(x_0).$$

Локальный **минимум** функции f — такая точка x_0, что

$$\exists \delta > 0\colon\ \inf U_\delta(x_0) = f(x_0).$$

Их объединяют в точки *локального* **экстремума**.

Критической называется такая точка x_0, что

$$\left[\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \text{ \textit{(стационарна)}} \\ f'(x_0) = \text{undefined} \end{array}\right.$$

Комбинаторика

Принципы подсчёта

Правило сложения. Пусть S — конечное множество, образованное объединением подмножеств $S_1, \dots, S_k$. Тогда:

$$|S| = |S_1| + \dots + |S_k|$$

Правило умножения. Пусть S — конечное множество, кото-рое есть декартово произведение $S_1 \times \dots \times S_k$. Тогда:

$$|S| = |S_1| \times \dots \times |S_k|$$

Правило вычитания. Пусть S — подмножество конечного множества T, $\bar{S}$ — его комплемент. Тогда:

$$|S| = |T| - |\bar{S}|$$

Принцип Дирихле. Пусть $S_1, \dots, S_m$ — конечные непересекающиеся множества, причём:

$$|S_1| + \dots + |S_m| = n$$

Тогда существуют такие $i, j \in [1; m] \cap \mathbb{N}$, что:

$$|S_i| \geq \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \quad |S_j| \leq \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$$

Основные понятия

Пусть X — конечное множество, $n := |X|$, $[m] := [1; m] \cap \mathbb{N}$.

Упорядоченное разбиение m элементов из X — соответствие

$$s\colon [m] \to X.$$

Неупорядоченное разбиение m элементов из X — множество S мощностью m с элементами из X.

Перестановка — упорядоченное биективное разбиение:

$$P_n\colon [n] \to X, \quad P_n = n!$$

k-Размещение — упорядоченное инъективное разбиение:

$$A_n^k\colon [k] \to X, \quad A_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}}$$

k-Сочетание — неупорядоченное инъективное разбиение:

$$C_n^k\colon [k] \to X, \quad C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}, \quad C_n^k \equiv \binom{n}{k}$$

Полиномиальная теорема

Полиномиальными называются коэффициенты $\binom{n}{k_1, \dots, k_r}$ многочлена при $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}_0$:

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_r = n}} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$$

Теорема. Для $k_1, \dots, k_r \geq 0$ с $k_1 + \dots + k_r = n$ справедливо:

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \binom{n}{k_1}\binom{n - k_1}{k_2} \dots \binom{n - k_1 - \dots - k_{r-1}}{k_r}$$
$$= \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!}$$

Доказательство. Раскроем скобки:

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{i_1 = 1}^{r} \dots \sum_{i_n = 1}^{r} x_{i_1} \dots x_{i_n}$$

Одночлен $x_1 \dots x_r$ равен $x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$, если среди индексов $i_1, \dots, i_n$ ровно k_j равны $j \in [1; r] \cap \mathbb{Z}$.

Выбор k_j индексов происходит среди $n - k_1 - \dots - k_{j-1}$ оставшихся. Поэтому таких упорядоченных выборок $\binom{n - k_1 - \dots - k_{j-1}}{k_j}$:

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \binom{n}{k_1}\binom{n - k_1}{k_2} \dots \binom{n - k_1 - \dots - k_{r-1}}{k_r} \square$$

По формуле сочетаний:

$$\frac{n!}{k_1! \cancel{(n - k_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n - k_1)!}}{k_2! \cancel{(n - k_1 - k_2)!}} \cdot \dots \cdot \frac{\cancel{(n - k_1 - \dots - k_{r-1})!}}{k_r! (n - k_1 - \dots - k_r)}$$
$$= \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r! \cdot 0!} = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!} \blacksquare$$

Формула Паскаля

Для $n \geq 1$ и $0 \leq k \leq n$ справедливо:

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \sum_{i=1}^{r} \binom{n-1}{k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_r}$$

Доказательство. Раскроем скобки:

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \\ k_1 + \dots + k_r = n}} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$$

Раскроем скобки иначе:

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = (x_1 + \dots + x_r)\,(x_1 + \dots + x_r)^{n-1}$$

$$= (x_1 + \dots + x_r) \cdot \sum_{\substack{k'_1, \dots, k'_r \\ k'_1 + \dots + k'_r = n-1}} \binom{n-1}{k'_1, \dots, k'_r} x_1^{k'_1} \dots x_r^{k'_r}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{\substack{k'_1, \dots, k'_r \\ k'_1 + \dots + k'_r = n-1}} \binom{n-1}{k'_1, \dots, k'_r} x_1^{k'_1} \dots x_i^{k'_i + 1} \dots x_r^{k'_r}$$

Произведём замену индексов $k_i := k'_i + 1$, $k_j := k'_j \ (i \neq j)$:

$$(x_1 + \dots + x_r)^n =$$

$$\sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \\ k_1 + \dots + k_r = n-1}} \sum_{i=1}^{r} \binom{n-1}{k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_r} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r} \ \blacksquare$$

Принцип включения-исключения

Пусть $A_1, \dots, A_n$ — конечные множества. Тогда верно:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left| \bigcap_{j=1}^{n} A_j \right|$$

Доказательство. Пусть $x \in \bigcup_i^n A_i$, причём x содержится в k множествах $A_1, \dots, A_k$.

Левая часть формулы — 1. Докажем, что правая часть тоже:

$\binom{k}{1}$ раз x встречается во множествах мощностью 1;

...

$\binom{k}{k}$ раз x встречается во множестввх мощностью k.

Подставляем биномиальные коэффициенты в формулу:

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \dots + (-1)^{k+1}\binom{k}{k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i}(-1)^{i+1}$$

По определению биномиальных коэффициентов:

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i}(-1)^{i+1} = \binom{k}{0} - \sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}1^{k-i} = \binom{k}{0} - (1-1)^{k} = 1 \blacksquare$$

Правило биекции

Пусть $f : X \to Y$ — биективное соответствие, где X, Y — конечные множества. Тогда:

$$|X| = |Y|$$

Задача. *Сколько подмножеств имеет n-множество?*

Решение. Пусть Y — n-множество.

Пусть $\overline{x_1 \dots x_n}$ — бинарная n-строка, где x_i указывает на наличие i-го элемента в произвольном множестве $\mathcal{P}(Y)$.

Пусть $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ — соответствие, где X — множество всех возможных бинарных n-строк. Очевидно, что:

$$f \text{ — биекция} \implies |Y| = |X|$$

По правилу умножения:

$$|X| = 2^n \implies |\mathcal{P}(Y)| = 2^n$$

Ответ: $|\mathcal{P}(Y)| = 2^n$.

Биномиальные коэффициенты

Свойство 1. Для $n \in \mathbb{N}$ и $r \in [0; n] \cap \mathbb{Z}$ верно:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Доказательство. Пусть A — n-множество, из которого нужно выбрать B — r-подмножество.

По определению биномиальных коэффициентов:

$$\text{число неупорядоченных выборок } B = \binom{n}{r}$$

С другой стороны, рассмотрим комплемент $A \setminus B$:

$$\text{число неупорядоченных выборок } A \setminus B = \binom{n}{n-r}$$

Пусть $f : A_1 \to A_2$ — биективное соответствие, $A_1 = A_2 = A$.

Любой элемент $x \in B \subset A_1$ можно сопоставить $x \in A \setminus B \subset A_2$. Значит, числа таких сопоставлений равны:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \ \blacksquare$$

Свойство 2. Для $n \in \mathbb{N}$ верно:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$$

Доказательство. Пусть A — n-множество, для которого посчитаем $|\mathcal{P}(A)|$.

С одной стороны, $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ по доказанному.

С другой стороны, посчитаем $|\mathcal{P}(A)|$ через биномиальные коэффициенты: есть $\binom{n}{r}$ способов выбрать r-подмножество.

По правилу сложения:

$$|\mathcal{P}(A)| = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \implies \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n \ \blacksquare$$

Метод шаров и перегородок

Число способов составить r-мультимножество из n-множества равно:

$$\left(\!\!\binom{n}{r}\!\!\right) := \binom{n+r-1}{r} = \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right)$$

Доказательство. Для подсчёта числа всех возможных r-мультимножеств введём $n-1$ *перегородок* — считается, что элементы между двумя соседними перегородками равны.

Таким образом, число способов заполнить $n+r-1$ позиций с выбором r шаров *(или вставкой n-1 перегородок)* равно:

$$\binom{n+r-1}{r} \square$$

По формуле Паскаля:

$$\begin{aligned}\left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) &= \binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-2}{k} \\ &= \binom{n+k-1}{k} \blacksquare\end{aligned}$$

Задача. Посчитать число неотрицательных целых решений

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 22.$$

Решение. Методом полного перебора, $x_4 \in \{0, 1, 2, 3\}$.

По методу шаров и перегородок:

$$\left[\begin{aligned} &x_4 = 0 \implies 3(x_1+x_2+x_3) = 22 &&\iff \text{решений нет} \\ &x_4 = 1 \implies 3(x_1+x_2+x_3) = 15 &&\iff x_1+x_2+x_3 = 5 \\ &x_4 = 2 \implies 3(x_1+x_2+x_3) = 8 &&\iff \text{решений нет} \\ &x_4 = 3 \implies 3(x_1+x_2+x_3) = 1 &&\iff \text{решений нет} \end{aligned}\right.$$

$$\iff \left(\!\!\binom{3}{5}\!\!\right) = \binom{7}{5} = 21$$

Ответ: 21 решение.

Правило деления

Пусть $f : X \to Y$ — отображение *k-к-одному*, где X, Y — конечные множества. Тогда:

$$|X| = 4\,|Y|$$

Задача. Сколько существует рассадок 4 рыцарей вокруг стола? Две рассадки эквивалентны, если одну можно получить из другой поворотом.

Решение. Пусть $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ — множество рыцарей, X — множество 4-строк вида $\overline{x_j \ldots x_k},\ 1 \le j, k \le 4,\ i \ne j$.

Пусть $f : X \to Y$ — соответствие, где Y — множество всех возможных рассадок для A. Очевидно, что:

$$f \text{ — } n\text{-к-одному} \implies 4\,|Y| = |X| \iff |Y| = |X|\,/4$$

По правилу умножения:

$$|X| = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_4 = 24 \implies |Y| = 24/4 = 6$$

Ответ: $|Y| = 6$.

Число Стирлинга

Число Стирлинга второго порядка — количество способов разбить n-множество на k подмножеств:

$$C(n,k) \equiv \left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$

Частные случаи:

$$\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0 \qquad \left\{ {n \atop 1} \right\} = 1 \qquad \left\{ {n \atop n} \right\} = 1 \qquad \left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$$

Доказательство. Скоро... наверное.