Элементарная теория чисел

Делимость

Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$. Тогда a — **делитель** b, когда

$$ax = b,\ x \in \mathbb{Z} \iff a \mid b \iff |a| \leq |b|$$

Отношение делимости *транзитивно*, такое выражение можно *перемножить* с другим:

$$\times \begin{cases} a \mid b \\ c \mid d \end{cases} \implies ac \mid bd$$

Общий делитель чисел делит их *линейную комбинацию*:

$$a \mid b, c \implies a \mid bx + cy, \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

Заметим, что $a = bx + cy$*, когда $(b, c) \mid a$.

Доказательство. Пусть $d := (b, c)$, тогда:

$$d \mid b, c \implies d \mid (bx + cy) \implies d \mid a \ \blacksquare$$

Коэффициенты Безу (x, y) *неуникальны* и легко выражаются *(доказывается подстановкой в соотношение)*:

$$(x + mk, y - ak),\ k \in \mathbb{Z}$$

* Такое уравнение называют *соотношением Безу*, а x и y — *коэффициентами Безу (Э. Безу)*.

Наибольший общий делитель

*Наибольший общий делитель** для $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — такое $gcd(\{a_k\})$, что

$$\exists d\colon d \mid gcd(\{a_k\}) \mid \{a_k\}.$$

Упрощённая запись $gcd(\{a_k\}) = (\{a_k\})$.

Этот бинарный оператор *коммутативен*, *ассоциативен* и *дистрибутивен*.

Наименьшее общее кратное

*Наименьшее общее кратное*** для $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — такое $lcm(\{a_k\})$, что

$$\exists m\colon \{a_k\} \mid lcm(\{a_k\}) \mid m.$$

Упрощённая запись $lcm(\{a_k\}) = [\{a_k\}]$.

Этот бинарный оператор *коммутативен* и *ассоциативен*, однако *не дистрибутивен*.

Двойственность

НОД и НОК *двойственны* друг другу:

$$(a,b)\cdot[a,b] = ab$$

Доказательство. Пусть $m := [a,b]$, тогда:

$$a,b \mid m \iff ab \mid am, bm \iff ab \mid (am,bm) \iff ab \mid (a,b)m$$

Так как $(a,b) \mid [a,b] \mid ab$, то $ab/(a,b) \mid [a,b]$.

Значит, $ab/(a,b) \le [a,b]$. Но $[a,b]$ — *наименьшее* общее кратное a, b. Следовательно, $ab/(a,b) \not< [a,b]$, поэтому:

$$ab/(a,b) = [a,b] \iff ab = (a,b)\cdot[a,b] \blacksquare$$

---

* Сокращённо *НОД*, или *Greatest Common Divisor* (*GCD*).

** Сокращённо *НОК*, или *Least Common Multiple* (*LCM*).

Элементарная алгебра

Свойства неравенств

Отношение сравнения *транзитивно*; неравенства можно *складывать* *(не вычитать)*, а также *перемножать* и возводить в натуральную степень k *(без смены знака)*:

$$\begin{cases} a < b \\ c \le d \end{cases} \implies \begin{cases} a + c < b + d \\ ac < bd \\ a^k < b^k \end{cases}$$

При умножении на отрицательное число m знак неравенства *инвертируется*:

$$a < b \iff am > bm$$

Неравенство Коши

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^+$. Тогда верно *(О.Л. Коши)*:

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$$

Доказательство.

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \iff a + b \ge 2\sqrt{ab} \iff a - 2\sqrt{ab} + b \ge 0 \iff (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \ge 0 \blacksquare$$

Неравенство Бернулли

Пусть $n \ge 2,\ x > 0$. Тогда верно *(Я. Бернулли)*:

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

Доказательство. Проверим базис индукции $n = 2$:

$$(1+x)^2 > 1 + 2x \iff 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x \square$$

Проверим индукционный шаг $n + 1$. Пусть утверждение верно для некоторого $n > 2$, тогда:

$$(1+x)^n > 1 + nx \iff (1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x) \iff (1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x + nx^2 \iff (1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x \blacksquare$$

Свойства функций

Функция f *возрастает*, когда

$$\forall x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Максимумом функции f называется такая точка x_0, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists U_\varepsilon(x_0) \colon \forall x \in U\ f(x) < f(x_0).$$

Функция f *убывает*, когда

$$\forall x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

Минимумом функции f называется такая точка x_0, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists U_\varepsilon(x_0) \colon \forall x \in U\ f(x) > f(x_0).$$

Функция f *чётна*, когда

$$\forall x \in D_f \implies f(-x) = f(x).$$

Функция f *нечётна*, когда

$$\forall x \in D_f \implies f(-x) = -f(x).$$

Функция f *периодична*, когда

$$\forall x \in D_f\ \exists T \neq 0 \colon f(x) = f(x \pm T),$$

где T — **период** функции; наименьший положительный период называется *основным*.

Функция модуля

Модуль *(абсолютная величина)* — чётная функция $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, которая задаётся формулой:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Свойства:

— $|x| = |y| \iff (x = y) \lor (x = -y)$
— дистрибутивность относительно *умножения* $\cdot$ *(деления)*
— *неравенство треугольника:*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|x - y| \geq ||x| - |y||$$

Она *дистрибутивна* относительно умножения, отчасти — относительно сложения: $|a + b| \le |a| + |b|$.

Степенная функция

Возведение в чётную степень — чётная функция; график — *парабола*:

$$f\colon \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto x^n} \mathbb{R}_0^+,\ n \in \mathbb{N}$$

Обратная функция к $f\,|_{\mathbb{R}_0^+}$ — **арифметический корень**:

$$f^{-1}\colon \mathbb{R}_0^+ \xrightarrow{x \mapsto \sqrt[n]{x}} \mathbb{R}_0^+$$

Возведение в нечётную степень — нечётная функция; график — *кубическая парабола*:

$$g\colon \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto x^n} \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

Обратная функция к g — **арифметический корень**:

$$g^{-1}\colon \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto \sqrt[n]{x}} \mathbb{R}$$

Функция знака

Функция знака *(сигнум-функция)* — нечётная функция $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1; 0; 1\}$, которая определяет знак аргумента:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Функция натурального логарифма

Функция натурального логарифма — значение интеграла:

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}, \quad \ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

Свойства:

$$\ln ax = \ln a + \ln x$$

$$\ln x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \ln x$$

Логарифмическая функция

Логарифмическая функция по основанию a — отношение:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad \log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad a \neq 1$$

Логарифмические тождества:

$$\log_a a^\beta = \beta \qquad a^{\log_a b} = b$$

Переход к новому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Свойства:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b \log_c d = \log_c b \log_a d$$

$$\log_a b \log_b c = \log_a c$$

Теория функций

Монотонность

> **Встречная монотонность.** Да.

> **Теорема.** Выражение вида $f(f(x))$...

> **Метод рационализации.** Пусть f — монотонно возрастающая функция. Тогда справедливо:
> $$f(a) - f(b) \vee 0 \implies a - b \vee 0$$
> Его можно применять к отдельному *множителю* или в составе *дроби*.

Теория многочленов

Многочлен

Многочлен $f(x)$ от переменной x — выражение вида:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Коэффициенты многочлена — элементы $a_0, \dots, a_n$ некоторого кольца $\mathbb{R}$:

$$(\mathbb{R}[x], +, \cdot) \text{ — } \textbf{кольцо многочленов}$$

Старшим называется *коэффициент* многочлена $a_n \neq 0$.

Степень многочлена — натуральное число n:

$$n \equiv \deg f$$

Виды многочленов:

— *нулевой* — *ноль* ненулевых коэффициентов
— *одночлен* — *один* ненулевой коэффициент
— *двучлен* — *два* ненулевых коэффициента
— *трёхчлен* — *три* ненулевых коэффициента

Деление с остатком

> **Теорема.** Пусть $f(x)$, $g(x)$ — многочлены, причём $g(x)$ ненулевой. Тогда существуют многочлены $u(x)$ и $r(x)$:
>
> $$f(x) = u(x)g(x) + r(x), \quad \deg r < \deg u$$

Схема Горнера — алгоритм, при помощи которого многочлен $f(x)$ можно разделить с остатком на линейный двучлен $x - c$.

Коэффициенты частного рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= a_1 + cb_0 \\ &\dots \\ b_n &= a_n + cb_{n-1} \end{aligned}$$

Корни многочлена

> **Теорема.** Значение многочлена $f(x)$ при $x = c$ совпадает с остатком от деления $f(x)$ на $x - c$:
>
> $$f(c) = f(x) \mod (x - c)$$

Доказательство. По теореме о делении с остатком:

$$f(x) = u(x)(x - c) + r(x) \implies f(c) = r(c) \ \blacksquare$$

> **Теорема Безу.** Число c — корень многочлена тогда и только тогда, когда $x - c$ делит $f(x)$:
>
> $$f(c) = 0 \iff (x - c) \mid f(x)$$

Доказательство. По определению делимости:

$$(x - c) \mid f(x) \iff f(x) = u(x)(x - c) \implies f(c) = 0 \ \blacksquare$$

Кратность корня

Корень кратности k многочлена $f(x)$ — такое число c, что:

$$(x - c)^k \mid f(x) \quad \textit{(k максимально)}$$

> **Теорема.** Пусть $f(x)$ — многочлен степени $n \geq 1$. Тогда $f(x)$ имеет не более n корней с учётом их кратности.

Доказательство. Докажем по индукции:

1) $n = 1 \implies f(x)$ — линейный многочлен $\implies$ 1 корень. $\square$
2) $n > 1 \implies$ допустим, теорема верна для кратности $n - 1$:
   > $f(x)$ не имеет корней; $\square$
   > $f(x)$ имеет корень $c \implies f(x) = (x - c)g(x)$, где $g(x)$ имеет не более $n - 1$ по допущению. $\blacksquare$

> **Теорема.** Пусть c — кратный корень многочлена $f(x)$. Тогда справедливо:
>
> $$(x - c)^k \mid f(x) \iff (x - c)^{k-1} \mid f'(x)$$

Доказательство $\implies$. По дистрибуции производной:

$$f(x) = (x-c)^k g(x) \implies f'(x) = (x-c)^{k-1}[g(x) + (x-c)g'(x)]$$
$$\implies (x-c)^{k-1} \mid f'(x) \;\square$$

Доказательство $\impliedby$. Пусть c — корень кратности m многочлена $f(x)$ и кратности $k-1$ его производной $f'(x)$.

По прямой теореме:

$$(x-c)^m \mid f(x) \implies \begin{cases} (x-c)^{m-1} \mid f'(x) \\ (x-c)^{n-1} \mid f'(x) \end{cases} \implies m = n \;\blacksquare$$

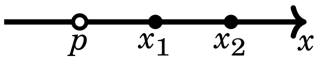
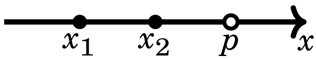
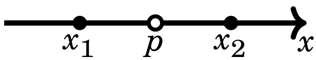
Рациональные корни

> **Теорема.** Пусть $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Если несократимая дробь p/q — корень, то справедливо:
>
> $$p \mid a_n, \quad q \mid a_0, \quad p - mq \mid f(m),\; m \in \mathbb{Z}$$

Доказательство. Да.

Квадратный трёхчлен

Расположение корней относительно числа p:

Расположение корней	**Равносильно**
	$\begin{cases} D > 0 \\ af(p) > 0 \\ p < x_0 \end{cases}$
	$\begin{cases} D > 0 \\ af(p) > 0 \\ x_0 < p \end{cases}$
	$af(p) < 0$

Метод неопределённых коэффициентов

Метод неопределённых коэффициентов применяется для вычисления коэффициентов выражений, вид которых *заранее известен*.

> **Теорема.** Пусть $P(x)$, $G(x)$ — многочлены одинаковой степени. Они *равны*, если:
>
> $$p_i = g_i, \ \forall i \in [0; n]$$

Формулы Виета

> **Формулы Виета.** Для многочлена n-ой степени и его n корней справедливы соотношения:
>
> $$x_1 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0} \qquad x_1 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$
> $$x_1 x_2 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

Идея. Разложим многочлен на *линейные множители* с неизвестными корнями.

После упрощения воспользуемся *методом неопределённых* *коэффициентов*.

Избавление от иррациональности

> **Факт.** Дробь с иррациональностью в знаменателе можно представить в виде *комбинации* иррациональностей:
> $$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = A + B\sqrt{2} + C\sqrt{3} + D\sqrt{6}$$
> $$\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}} = A + B\sqrt[3]{2} + C\sqrt[3]{4}$$

Этот факт имеет сложное доказательство, которое косвенно есть на сайте МГУ.

Модульная арифметика

Конгруэнтность

Два целых числа **конгруэнтны** *(сравнимы)* по модулю m, когда их разность кратна m *(К.Ф. Гаусс)*:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid (a-b) \iff a = b + mk,\ k \in \mathbb{Z}$$

Отношение конгруэнтности *транзитивно*, поэтому числа образуют *систему остаточных классов* $\mathbf{Z}_m$ по модулю m. Например, $\mathbf{Z}_3$:

$$\{\dots, -6, -3, \mathbf{0}, 3, 6, \dots\} \text{ класс } r_0$$
$$\{\dots, -5, -2, \mathbf{1}, 4, 7, \dots\} \text{ класс } r_1$$
$$\{\dots, -4, -1, \mathbf{2}, 5, 8, \dots\} \text{ класс } r_2$$

Свойства сравнения

Конгруэнтные числа можно *складывать*, *перемножать* и передавать *многочлену* $f \in \mathbb{Z}[x]$:

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \implies \begin{cases} a + c \equiv b + d & \pmod{m} \\ ac \equiv bd & \pmod{m} \\ f(a) \equiv f(b) & \pmod{m} \end{cases}$$

Конгруэнтные числа можно *умножать* *(делить)* на одно число с *увеличением* *(сокращением)* модуля:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff ad \equiv bd \pmod{md}$$

$$ad \equiv bd \pmod{m} \iff a \equiv b \left(\bmod \frac{m}{(m,d)}\right)$$

Из транзитивности делимости следует:

$$a \equiv b \pmod{m},\ n \mid m \implies a \equiv b \pmod{n}$$

Признаки делимости

Для вывода признаков делимости лучше использовать *десятичное представление* числа $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$:

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} 10^i$$

— При модуле $m = 2^k; 5^k; 10^k$ одночлены $a_{n-i}10^i \equiv a_{n-i}0 = = 0$ $(i \geq k)$. Значит, число $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ кратно m, когда последние k цифры кратны m:

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv 0 \iff \overline{a_{n-k+1} \dots a_{n-1} a_n} \equiv 0$$

— При модуле $m = 3; 9$ одночлены $a_{n-i}10^i \equiv a_{n-i}1^i = a_{n-i}$. Значит, число $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ кратно m, когда сумма цифр кратна m:

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv 0 \iff a_1 + a_2 + \dots + a_n \equiv 0$$

— При модуле $m = 11$ одночлены $a_{n-i}10^i \equiv a_{n-i}(-1)^i$. Значит, число $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ кратно 11, когда знакочередующаяся сумма цифр кратна 11:

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv 0 \iff a_1 - a_2 + \dots - a_n \equiv 0$$

— При модуле $m = 7$ вычтем из числа n последнюю цифру; останется $\lfloor n/10 \rfloor$. Последняя цифра равна $n - 10\lfloor n/10 \rfloor$. Вычтем из числа удвоенную последнюю цифру:

$$\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor - 2(n - 10\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor) \equiv 0 \iff 21\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor - 2n \equiv 0$$

Одночлен $21\lfloor n/10 \rfloor \equiv 0$. Значит, число $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ кратно 7, когда удвоенная разность последней цифры числа и самого числа без этой цифры кратна 7:

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv 0 \iff \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} - 2a_n \equiv 0$$

Функция Эйлера

Функция $\phi(m)$ считает количество положительных целых чисел, меньших m и взаимно простых с ним *(для малых и простых m целесообразно перебрать вручную)*:

$$\phi(m) = m \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

p — простой делитель m;
$1/p$ — часть чисел, кратных p;
$1 - 1/p$ — часть чисел, взаимно простых с p.

Функция Эйлера *мультипликативна (только для взаимно простых натуральных чисел)*.

Теорема Эйлера

> **Теорема.** Пусть $a \in \mathbb{Z},\ (a, m) = 1$. Тогда: *(Л. Эйлер)*
> $$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}, \quad a \not\equiv 0 \pmod{m}$$

Доказательство. Введём систему остаточных классов $\mathbf{Z}_m$. В ней есть m классов: $r_0, r_1, \dots, r_{m-1}$.

Пусть множество Φ содержит в себе $\phi(m)$ остатков, взаимно простых с m. Домножим каждый элемент на a и образуем новое множество Φ_a. Заметим, что:

Элементы Φ_a из разных классов.

Допустим, это не так. Тогда:

$$ar_k \equiv ar_l \implies r_k \equiv r_l$$

Но $r_k \not\equiv r_l \implies ar_k \not\equiv ar_l$ □

Φ и Φ_a конгруэнтны.

Пусть $ar_k \equiv r_l,\ r_l \in \mathbf{Z}_m$.

Так как $m \nmid ar_k$, то:

$$r_l \in \Phi \implies \Phi \equiv \Phi_a \ \square$$

Перемножим элементы множеств Φ и Φ_a:

$$r_0 r_1 \dots r_{\phi(m)} \equiv ar_0 ar_1 \dots ar_{\phi(m)} \implies$$
$$r_0 r_1 \dots r_{\phi(m)} \equiv a^{\phi(m)} r_0 r_1 \dots r_{\phi(m)} \implies a^{\phi(m)} \equiv 1 \ \blacksquare$$

> **Следствие.** Пусть $a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ (m, a) = 1$. Тогда:
> $$a^b \equiv a^{b \bmod \phi(m)} \pmod{m}, \quad a \not\equiv 0 \pmod{m}$$

Доказательство. Представим b в арифметическом виде:

$$b = \phi(m) \left\lfloor \frac{b}{\phi(m)} \right\rfloor + b \bmod \phi(m)$$

$\phi(m)$ — модуль деления.

$\lfloor b/\phi(m) \rfloor$ — целое частное.

$b \bmod \phi(m)$ — остаток.

Подставим полученное выражение:

$$a^{\phi(m)\lfloor b/\phi(m)\rfloor + b \bmod \phi(m)} = (a^{\phi(m)})^{\lfloor b/\phi(m)\rfloor} a^{b \bmod \phi(m)}$$

Так как $a^{\phi(m)} \equiv 1$, получается $a^b \equiv a^{b \bmod \phi(m)}$. ■

Алгоритм Евклида

Пусть $a, b \in \mathbb{N}_0 \ (a > b)$, тогда:

$$(a, b) = (a \bmod b, b)$$

Доказательство. Пусть $m \mid a - b, b$:

$$+\begin{cases} a - b \equiv 0 & \pmod m \\ b \equiv 0 & \pmod m \end{cases} \implies \begin{cases} a \equiv 0 & \pmod m \\ b \equiv 0 & \pmod m \end{cases}$$

Значит, любой общий делитель $a - b, b$ имеется у a, b.

По определению НОД:

$$(a, b) = (a - b, b)$$

По определению конкруэнтных чисел:

$$(a, b) = (a \bmod b, b)$$

Мультипликативная инверсия

Пусть $ab \equiv 1 \pmod m$ — линейное сравнение, где b — **мультипликативная инверсия** числа a по модулю m:

$$b \equiv a^{-1} \equiv \frac{1}{a} \pmod m, \quad (a, m) = 1$$

«Дробные» числа можно *складывать*, *перемножать* и *сокращать* как рациональные:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} \equiv \dfrac{ad + bc}{cd} & \pmod m \\ \dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} \equiv \dfrac{ac}{bd} & \pmod m \\ \dfrac{eg}{fg} \equiv \dfrac{e}{f} & \pmod m \end{cases}$$

Линейное сравнение

Линейное сравнение вида $ax \equiv b \pmod m$ разрешимо относительно x, когда $(m, a) \mid b$. *(по соотношению Безу)*

План решения:

— упростить линейное сравнение
— рассчитать (m, a) по алгоритму Евклида
— выразить (m, a) через полученные остатки
— домножить соотношение Безу на b

Пример. Решить линейное сравнение: $4x \equiv 4 \pmod 6$.

Упростим сравнение:

$$4x \equiv 4 \pmod 6 \ \mid \cdot 1/2$$
$$2x \equiv 2 \pmod 3$$

Применим *алгоритм Евклида* в алгебраическом виде:

«Прямой» алгоритм:

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$
$$2 = \mathbf{1} \cdot 2 + 0$$

«Обратный» алгоритм:

$$1 = 3 \cdot \mathbf{1} + 2 \cdot (-\mathbf{1}) \mid \cdot 2$$
$$2 = 3 \cdot \mathbf{2} + 2 \cdot (-\mathbf{2})$$

Итак, коэффициенты Безу найдены: $x = -2,\ y = 2$.

Ответ: $x = -2$.

Китайская теорема об остатках

Сравнения можно объединять в *систему*:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ \quad \dots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

Она разрешима относительно x по модулю $[m_1, \dots, m_n]$, когда разрешима каждая пара сравнений, в частности $(m_1, m_2) \mid a_1 - a_2$.

Доказательство. Рассмотрим пару сравнений из системы:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = a_1 + m_1 j, & j \in \mathbb{Z} \\ x = a_2 - m_2 k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff$$

$$m_1 j + m_2 k = a_2 - a_1$$

Данное соотношение Безу имеет целые коэффициенты j, k, когда $(m_1, m_2) \mid (a_1 - a_2)$. $\square$

По индукции, система будет разрешима относительно x, когда будет разрешима каждая пара сравнений.

Допустим, $x \equiv y \equiv a_i \pmod{m_i}$, $i \in \{i\}_{i=1}^n$ — решение всей системы. Значит, $m_i \mid x - y \implies [m_1, \dots, m_n] \mid x - y \iff x \equiv y \pmod{[m_1, \dots, m_n]}$. $\blacksquare$

План решения каждой пары сравнений:

— упростить линейные сравнения;

— преобразовать их в соотношения Безу, приравнять их;

— решить полученное выражение как линейное сравнение.

Пример. Решить систему сравнений:

$$\begin{cases} x \equiv 2 & \pmod 3 \\ x \equiv 2 & \pmod 4 \\ 2x \equiv -3 & \pmod 5 \end{cases}$$

Упростим последнее сравнение:

$$2x \equiv -3 \pmod 5 \iff x \equiv 1 \pmod 5$$

Преобразуем первую пару сравнений в соотношения Безу:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 2 \pmod 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 + 3j, & j \in \mathbb{Z} \\ x = 2 + 4k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Приравняем их и решим как сравнение:

$$2 + 3j = 2 + 4k \iff 2 \equiv 2 + k \pmod 3 \iff k \equiv 0 \pmod 3$$

Значит, $x = 2 + 4k \equiv 2 \pmod{12}$ — решение первой пары.

Аналогично решив следующую *(и последнюю)* пару, получим решение всей системы: $x \equiv 26 \pmod{60}$.

Ответ: $x \equiv 26 \pmod{60}$.

Сравнение по составному модулю

Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$. Тогда для $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ разрешимо

$$f(x) \equiv 0 \pmod{m},$$

если разрешимы $f(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, $i \in [1; r] \cap \mathbb{Z}$.

Доказательство $\implies$. Пусть $x \in \mathbb{Z}$ — решение

$$f(x) \equiv 0 \pmod{m},\ p_i^{\alpha_i} \mid m \implies f(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}. \blacksquare$$

Доказательство $\impliedby$. Пусть x_i — решение

$$f(x_i) \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

По китайской теореме об остатках:

$$\forall i_1, i_2 \in [1; r],\ i_1 \neq i_2\ (p_{i1}^{\alpha_{i1}}, p_{i2}^{\alpha_{i2}}) = 1 \implies$$

$$\exists x \colon x \equiv x_i \pmod{p_i^{\alpha_i}} \implies f(x) \equiv 0 \pmod{[p_1^{\alpha_1}, \dots, p_r^{\alpha_r}]} \implies$$
$$f(x) \equiv 0 \pmod{m} \blacksquare$$

Сравнение по степени простого модуля

Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$. Тогда для простого p разрешимо

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha},$$

если разрешимы $f(x) \equiv 0 \pmod{p^i}$, $i \in [1; \alpha] \cap \mathbb{Z}$.

Доказательство. Аналогично прошлому пункту.

Лемма Гензеля

Пусть для $f \in \mathbb{Z}[x]$ верно *(К. Гензель)*:

$$f(a) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}, \quad f'(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$$

Тогда существует такое уникальное t, что:

$$f(a + tp^\alpha) \equiv 0 \pmod{p^{\alpha+1}}$$

Доказательство. Пусть a — решение $f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$, которое можно представить в виде $x = a + tp^\alpha$.

По теореме Тейлора:

$$f(a + tp^\alpha) = f(a) + tp^\alpha f'(a) + t^2 p^{2\alpha} f''(a)/2! + \dots$$
$$+ t^n p^{n\alpha} f^{(n)}(a)/n! \equiv f(a) + tp^\alpha f'(a) \pmod{p^{\alpha+1}} \blacksquare$$

Следствие. Пусть для $f \in \mathbb{Z}[x]$ верно

$$f(x_\alpha) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}, \quad f'(x_\alpha) \not\equiv 0 \pmod{p^\alpha}.$$

Тогда решение сравнения по модулю $p^{\alpha+1}$ имеет вид:

$$x_{\alpha+1} \equiv x_\alpha - \frac{f(x_\alpha)}{f'(x_\alpha)} \pmod{p^{\alpha+1}}$$

Доказательство. По лемме Гензеля:

$$\begin{aligned} f(x_\alpha) + tp^\alpha f'(x_\alpha) \equiv 0 \pmod{p^{\alpha+1}} &\iff \\ tp^\alpha \equiv -\frac{f(x_\alpha)}{f'(x_\alpha)} \pmod{p^{\alpha+1}} &\iff \\ x_\alpha + tp^\alpha \equiv x_{\alpha+1} \equiv x_\alpha - \frac{f(x_\alpha)}{f'(x_\alpha)} \pmod{p^{\alpha+1}} &\ \blacksquare \end{aligned}$$

Тригонометрия

Основные функции

Единичной называется окружность, которая задаётся уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

Тригонометрические функции соотносят *координаты* точки единичной окружности и *градусную меру дуги*, образуемой ей с начальным радиусом.

Синус — нечётная функция с периодом 2π; график — *синусоида*:

$$\sin\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha \mapsto y} [-1;1]$$

Обратная нечётная функция к $\sin|_{[-\pi/2;\pi/2]}$ — **арксинус**:

$$\sin^{-1} = \arcsin\colon [-1;1] \xrightarrow{\alpha \mapsto y} [-\pi/2;\pi/2]$$

Косинус — чётная функция с периодом 2π; график — *синусоида* со смещением влево на $\pi/2$ *(«косинусоида»)*:

$$\cos\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha \mapsto x} [-1;1]$$

Обратная функция к $\cos|_{[0;\pi]}$ — **арккосинус**:

$$\cos^{-1} = \arccos\colon [-1;1] \xrightarrow{\alpha \mapsto x} [0;\pi]$$

Тангенс — нечётная функция с периодом π; график — *тангенсоида*:

$$\operatorname{tg}\colon \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} \xrightarrow{\alpha \mapsto y/x} \mathbb{R}$$

Обратная нечётная функция к $\operatorname{tg}|_{(-\pi/2;\pi/2)}$ — **арктангенс**:

$$\operatorname{tg}^{-1} = \operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \xrightarrow{y/x \mapsto \alpha} (-\pi/2;\pi/2)$$

Котангенс — нечётная функция с периодом π; график — *тангенсоида* с симметрией относительно оси Ox и смещением вправо на $\pi/2$ *(«котангенсоида»)*:

$$\operatorname{ctg}\colon \mathbb{R}\backslash\{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} \xrightarrow{\alpha \mapsto x/y} \mathbb{R}$$

Обратная функция к $\operatorname{ctg}|_{(0;\pi)}$ — **арккотангенс**:

$$\operatorname{ctg}^{-1} = \operatorname{arcctg}\colon \mathbb{R} \xrightarrow{x/y \mapsto \alpha} (0;\pi)$$

Основные тождества

Из определений тригонометрических функций следует:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \arccos x = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1/\cos^2\alpha \qquad \arccos x = \operatorname{arctg}(\sqrt{1-x^2}/x)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1/\sin^2\alpha \qquad \arcsin y = \operatorname{arcctg}(\sqrt{1-y^2}/y)$$

Сумма и разность углов

Из скалярного произведения векторов следует:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta}$$

Доказательство. Пусть $\vec{A} = \langle\cos\alpha; \sin\alpha\rangle$, $\vec{B} = \langle\cos\beta; \sin\beta\rangle$.

Рассмотрим их скалярное произведение:

$$+\begin{cases}\vec{A}\cdot\vec{B} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha-\beta)\end{cases} \Longrightarrow$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \ \square$$

Затем полезно применить эти четыре формулы:

$$\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos((\pi/2 - \alpha) + \beta)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \cos\alpha/\sin\alpha \ \blacksquare$$

Двойной угол

Из формул суммы и разности двух углов следует:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

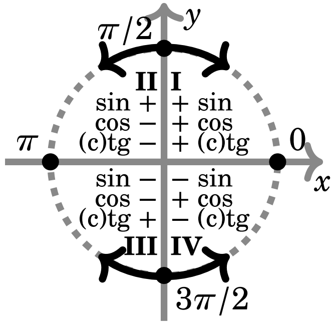
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$(\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2 = 1 \pm \sin 2\alpha$$

Формулы приведения

Из формул суммы и разности двух углов следуют *формулы приведения*, которые имеют вид:

$$f(\pi n/2 \pm \alpha) = \pm co f(\alpha),\ n \in \mathbb{Z}$$



Конечная функция и её знак определяются по графику; стрелками обозначены места смены функции на *кофункцию*.

Следствие. Для обратных функций верно:

$$\arcsin x = \pi/2 - \arccos x \qquad \arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$\operatorname{arctg} x = \pi/2 - \operatorname{arcctg} x \qquad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$$

Понижение степени

Из формул двойного угла и основного тригонометрического тождества следует:

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha \qquad \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha \qquad \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$$

Из них легко выводятся формулы *половинного угла*.

Сумма и разность функций

Из формул суммы и разности двух углов следует:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Из них можно вывести формулы *произведения двух функций*.

Доказательство. Рассмотрим сумму синусов:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y) =$$
$$\sin x\cos y+\sin y\cos x+\sin x\cos y-\sin y\cos x = 2\sin x\cos y$$

Введём обозначения:

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ x-y=\beta \end{cases} \iff \begin{cases} 2x=\alpha+\beta \\ 2y=\alpha-\beta \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ y=\dfrac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$$

Таким образом:

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \ \square$$

Остальные формулы доказываются аналогично. ■

Для $c=\sqrt{a^2+b^2}$ справедливо:

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha = c\sin(\alpha+\phi) = c\cos(\alpha-\phi)$$
$$|a\sin\alpha+b\cos\alpha| \le c$$

Доказательство. Рассмотрим синус суммы двух углов:

$$c\sin(\alpha+\phi) = c\sin\alpha\cos\phi+c\sin\phi\cos\alpha$$

Обозначим $a=c\cos\phi$, $b=c\sin\phi$ и найдём сумму квадратов:

$$a^2+b^2=c^2(\sin^2\phi+\cos^2\phi)=c^2 \iff c=\sqrt{(a^2+b^2)} \ \square$$

Случай с косинусом доказывается аналогично. ■

Подстановка Вейерштрасса

Тригонометрические функции от 2α можно выразить через тангенс от α *(К. Вейерштрасс)*:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Доказательство. Распишем каждую функцию:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha} \ \square$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha} \ \blacksquare$$

Теория множеств

Определение

Множеством называется объединение *различных* объектов — *элементов* множества — в единое целое.

> **Способы задания множеств.**
>
> 1) Перечислением *(списком элементов)*
> 2) Порождающей процедурой
> 3) Разрешающей процедурой

Множество A есть **подмножество** B, если все элементы A являются элементами B:

$$A \subseteq B$$

Множество A есть **надмножество** B, если все элементы B являются элементами A:

$$A \supseteq B$$

Подмножество **собственное** *(строгое)*, если оно *не равно* исходному множеству:

$$A \subseteq B \wedge A \neq B \implies A \subset B$$

> **Булеан** множества $\mathcal{B}(A)$ — множество всех его подмножеств:
>
> $$\mathcal{B}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$
>
> *Мощность* булеана определяется формулой:
>
> $$|\mathcal{B}(A)| = 2^{|A|}$$

> **Метод взаимного включения.** Множества A и B *равны*, если они содержат одни и те же элементы:
>
> $$A \subseteq B \wedge A \supseteq B$$

> **Пустое множество** $\emptyset$ не содержит *ни одного элемента* и есть подмножество любого множества.
>
> **Универсум** $\mathbb{U}$ — широкое множество, которое состоит из всех элементов *исследуемой области*.

Конечным множество состоит из *конечного* числа элементов, а **бесконечное** множество — из *бесконечного*.

> *Бесконечные* множества делятся на два вида:
>
> — **счётное**: равномощно множеству $\mathbb{N}$ *(его можно пронумеровать)*
>
> — **несчётное**: не равномощно $\mathbb{N}$ *(его нельзя пронумеровать)*

Мощность *конечного* множества — число его элементов.

Вектор

Вектор *(кортеж, или упорядоченная n-ка)* — упорядоченный набор элементов — *координат (компонент)* вектора.

Размерность вектора — число его координат.

> **Декартово** *(прямое)* **произведение** множеств $X_1, \dots, X_n$ — множество векторов вида:
>
> $$X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}$$
>
> Свойства:
>
> — дистрибутивность относительно *пересечения* $\cap$
>
> — дистрибутивность относительно *разности* $\setminus$
>
> — **не коммутативность*
>
> — **не ассоциативность*
>
> — $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

Декартова степень множества — прямое произведение одинаковых множеств:

$$A^3 = A \times A \times A$$

> **Теорема.** Мощность декартова произведения конечных множеств равна *произведению мощностей* данных множеств:
> $$|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times \dots \times |A_n|$$

Отношение

Отношение ρ между множествами $X_1, \dots, X_n$ — подмножество их *декартова произведения*.

> **Бинарное** отношение включает *два* множества, что можно упрощённо записать:
> $$x \in X,\ y \in Y, \langle x, y \rangle \in \rho =: x\rho y$$
> **Унарное** отношение *(свойство)* включает в себя...?

$X \supseteq D_\rho$ — область определения **(прообраз)** отношения
$Y \supseteq E_\rho$ — область значений **(образ)** отношения.

Наложение *(сюръекция)* — бинарное отношение с $Y = E_\rho$:

$$\forall y \in Y\ \exists x \in D_\rho : x\rho y$$
$$\rho : X \twoheadrightarrow Y$$

У **частично определённого** бинарного отношения $X \neq D_\rho$:

$$\exists x \in X\ \forall y \in E_\rho : x \not\rho y$$

Виды отношений

Вложение *(инъекция, мономорфизм)* — бинарное отношение ρ вида:

$$\forall x_1, x_2 \in D_\rho\ \exists y \in E_\rho : x_1\rho y,\ x_2\rho y \iff x_1 = x_2$$
$$\rho : X \hookrightarrow Y$$

Функция *(отображение)* — бинарное отношение ρ вида:

$$\forall x \in D_\rho\ \exists! y \in E_\rho : x\rho y$$
$$\rho : X \xrightarrow{x \mapsto y} Y$$

Изоморфизм *(биекция)* — бинарное отношение, которое является *и вложением, и наложением*:

$$\rho\colon X \xrightarrow{\sim} Y$$

Композиция *(суперпозиция)* бинарных отношений $f \subseteq X \times Y$, $g \subseteq Y \times Z$ — такое $h \subseteq X \times Z \iff f \circ g$, что:

$$\forall x \in X,\ z \in Z \exists y \in Y\ x(f \circ g)z \iff xfy \land ygz$$

Свойства:

— ассоциативность

— **не коммутативность*

Обратное бинарное отношение ρ^{-1} получается перестановкой исходных множеств в декартовом произведении:

$$\rho \subseteq X \times Y \iff \rho^{-1} \subseteq Y \times X$$

Свойства:

— инволютивность

— дистрибутивность относительно *пересечения* $\cap$

— дистрибутивность относительно *объединения* $\cup$

— дистрибутивность относительно *композиции* $\circ$:

$$(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ R^{-1}$$

Свойства отношений

Пусть $* \subseteq X^2$ — произвольное бинарное отношение.

Отношение $*$ **симметрично**, когда

$$\forall x, y \in X\ x * y = y * x.$$

Отношение $*$ **антисимметрично**, когда

$$\forall x, y \in X\ x * y \land y * x \implies x = y$$

Отношение $*$ **транзитивно**, когда

$$\forall x, y, z \in X\ x * y \land y * z \implies x * z$$

Отношение $*$ **рефлексивно**, когда

$$\forall x \in X\ x * x$$

Отношение $*$ **антирефликсивно**, когда

$$\forall x \in X \neg(x * x)$$

Эквиваленция

Эквиваленция $\sim$ — бинарное отношение на M
со свойствами:

1) Рефлексивность.
2) Симметричность.
3) Транзитивность.

Класс эквивалентности — множество вида:

$$[a] = \{b \in M \mid a \sim b\}$$

> **Свойство.** Два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются.

Фактормножество множества M — множество, которое состоит из классов эквивалентности отношения $\sim$:

$$N/\sim \text{ — обозначение}$$

Отображение факторизации — отображение вида:

$$N \xrightarrow{a \mapsto [a]} M/\sim$$

Эквиваленция **согласована** с операцией $*$ в M, если:

$$a \sim a' \wedge b \sim b' \implies a * b \sim a' * b'$$

$$[a] * [b] = [a * b]$$

Ограничение и продолжение

Ограничением отображения $f : X \to Y$ на $S \subseteq D_f$ называется такое $f|_S : S \to Y$, что

$$\forall s \in S : f|_S(s) = f(s).$$

В свою очередь, f является *продолжением* отображения $f|_S$.

Промежутки числовой прямой

Отрезок — множество вида:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Интервал — множество вида:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Полуинтервал — множества вида:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Луч — множества вида:

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

> ***ε*-окрестность** точки $x_0 \in \mathbb{R}$ — интервал вида:
>
> $$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \colon\ |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$
>
> Особые случаи:
>
> $$U_\varepsilon(+\infty) = (1/\varepsilon, +\infty)$$
>
> $$U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -1/\varepsilon)$$

Проколотая ε-окрестность точки x_0 не включает саму точку:

$$\mathring{U}_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$$

Правосторонняя (левосторонняя) ε-окрестность точки x_0 не содержит свою *левую (правую)* половину:

$$U_{\varepsilon+}(x_0) = [x_0; \varepsilon) \qquad U_{\varepsilon-}(x_0) = (\varepsilon; x_0]$$

Ограниченное множество

Множество M **ограничено сверху**, если:

$$\forall m \in M\ \exists C \in \mathbb{R} \colon m \leq C$$

Верхняя граница множества M — такое $N \in \mathbb{R}$, что:

$$\forall x \in M : x \leq N$$

Наибольший элемент *(максимум)* множества M — такое $\max M \in M$, что:

$$\forall x \in M \; x \leq \max M$$

Супремум *(точная верхняя граница)* — такая верхняя граница множества M — $\sup M$, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists m \in M : m \in U_{\varepsilon-}(\sup M)$$

> **Связь супремума с максимумом.** Если у множества M существует $\max M$, то:
>
> $$\sup M = \max M$$

> **Принцип точной грани.** Если непустое множество M ограничено сверху, то существует *единственный* $\sup M$.

Множество M **ограничено снизу**, если:

$$\forall m \in M \; \exists C \in \mathbb{R} : m \geq C$$

Нижняя граница множества M — такое $N \in \mathbb{R}$, что:

$$\forall x \in M : x \geq N$$

Наименьший элемент *(минимум)* множества M — такое $\min N \in M$, что:

$$\forall x \in M \; x \geq \min M$$

Инфимум *(точная нижняя граница)* — такая нижняя граница множества M — $\inf M$, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists m \in M : m \in U_{\varepsilon+}(\inf M)$$

> **Связь инфимума с минимумом.** Если у множества M существует $\min M$, то:
>
> $$\inf M = \min M$$

> **Принцип точной грани.** Если непустое множество M ограничено снизу, то существует *единственный* $\inf M$.

Ограниченное множество M ограничено *и сверху, и снизу*:

$$\exists N \in \mathbb{R}\colon \forall x \in M \ \ |x| \leq N$$

Принцип Архимеда. Пусть $x \in \mathbb{R}^+$. Тогда справедливо:

$$\forall y \in \mathbb{R} \ \exists! k \in \mathbb{Z}\colon (k-1)x < y \leq kx$$

Следствие. Для $x \in \mathbb{R}$ существует такое $k \in \mathbb{Z}$, что:

$$k \leq x < k+1 \qquad (k = [x])$$

Принцип Кантора

Последовательность вложенных отрезков содержит точки ξ, которые принадлежат им всем:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists \xi \in [a_n; b_n] \subset [a_{n-1}; b_{n-1}]$$

Если $n \to \infty$, $(b_n - a_n) \to 0$, то ξ единственна:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n\} = \xi$$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n\}$$

Значит, $\forall (n \in \mathbb{N},\ \xi \in [\sup\{a_n\}; \inf\{b_n\}])\ \xi \in [a_n; b_n]$. □

Если $\inf\{b_n\} = \sup\{a_n\}$, то ξ единственна:

$$0 = \inf\{b_n\} - \sup\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) \ \blacksquare$$

Алгебра логики

Определение

Алгебра логики — алгебраическая структура, которая образована двухэлементным множеством $\{0; 1\}$.

Высказывание — повествовательное предложение, о котором можно сказать в данный момент, *истинно* ли оно или *ложно*.

Предикат *(одноместный)* — функция переменной x, которое принимает значение из множества $\{0; 1\}$.

> Высказывание — *нуль*-местный предикат.

Логическая связка — операция алгебры логики:

1) *Инверсия* «$\neg$» — логическое *«не»*.
2) *Конъюнкция* «$\wedge$» — логическое *«и»*.
3) *Дизъюнкция* «$\vee$» — логическое *«или»*.
4) *Строгая дизъюнкция* «$\dot\vee$» — логическое *«искл. или»*.
5) *Импликация* «$\rightarrow$» — логическое *«$\implies$»*.
6) *Эквиваленция* «$\equiv$» — логическое *«$\iff$»*.

Квантор — логическая операция:

— *квантор всеобщности* «$\forall$»
— *квантор существования* «$\exists$»

Свойства

Конъюнкция и дизъюнкция *коммутативны*, *ассоциативны* и *дистрибутивны* относительно друг друга.

> **Идемпотентность.** *(Тавтология)*
>
> $$A \wedge A = A \qquad A \vee A = A$$

> **Инволютивность.**
>
> $$\bar{\bar{A}} = A$$

Закон противоречия и **исключённого третьего.**

$$A \wedge \overline{A} = 0 \qquad A \vee \overline{A} = 1$$

Закон поглощения.

$$A \wedge 1 = A \qquad A \wedge 0 = 0$$
$$A \vee 1 = 1 \qquad A \vee 0 = A$$
$$A \wedge (A \vee B) = A \qquad A \vee (A \wedge B) = A$$

Закон де Мóргана. *(Двойственность)*

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B} \qquad \overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

Закон склеивания.

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) = A$$
$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) = A$$

Закон сокращения. *(Порецкий)*

$$A \vee (\bar{A} \wedge B) = A \vee B$$
$$A \wedge (\bar{A} \vee B) = A \wedge B$$

Силлогизм.

$$(A \to B) \wedge (B \to C) = A \to C$$

Булева функция

Булева функция — функция вида:

$$f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

Причём справедливы утверждения:

$$|\{0,1\}^n| = 2^n$$
$$|\{f \mid f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}\}| = 2^{2^n}$$

У **вырожденной** булевой функции по аргументу x_i значение *не зависит* от x_i при любом наборе аргументов:

$$f(x_1, \dots, 0, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, 1, \dots, x_n)$$

К таким бинарным функциям относятся *6 отображений*:

— **тавтология**, логическая единица
— **противоречие**, логический нуль
— **повтор** x_1 и x_2
— **отрицание** x_1 и x_2

Нормальная форма

Элементарная конъюнкция *(конъюнктивный терм)* — конъюнкция попарно различимых переменных или их отрицаний.

Элементарная дизъюнкция *(дизъюнктивный терм)* — дизъюнкция попарно различимых переменных или их отрицаний.

Ранг терма — число переменных, которые в него входят.

Дизъюнктивная нормальная форма *(ДНФ)* — дизъюнкция конъюнктивных термов.

Конъюнктивная нормальная форма *(КНФ)* — конъюнкция дизъюнктивных термов:

> $$A \dot{\vee} B = (A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$$
> $$A \equiv B = (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$$
> $$A \to B = \overline{A} \vee B$$

Импликативная нормальная форма *(INF)* — конъюнкция дизъюнктивных термов любого ранга, которые заменены импликацией:

$$A \vee B = (\overline{A} \to B) \wedge (\overline{B} \to A)$$

Конституента единицы *(нуля)* — конъюнктивный *(дизъюнктивный)* терм максимального ранга.

> **Свойство.** Конституента единицы *(нуля)* принимает значение единицы *(нуля)* на одном и только на одном наборе аргументов.

В **канонической** *(совершенной)* **КНФ** все входящие дизъюнктивные термы — конституенты нуля.

> **Теорема.** Всякая булева функция, кроме 1, имеет единственную СКНФ.

В **канонической** *(совершенной)* **ДНФ** все входящие конъюнктивные термы — конституенты единицы.

> **Теорема.** Всякая булева функция, кроме 0, имеет единственную СДНФ.

> **Следствие.** Любая булева функция может быть записана в *булевом базисе* $\{\land, \lor, \neg\}$.

Способы задания функции

Пусть $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

К *основным способам* задания функции относятся:

— аналитическая форма
— таблица истинности

Числовая форма — перечисление множества десятичных эквивалентов набора аргументов, на котором функция равна единице *(нулю)*:

$$f^3(X) = \lor(0,2,6,7)$$

$$f^3(X) = \land(1,3,4,5)$$

Символическая форма — десятичный эквивалент упорядоченного набора значений функции:

$$f(X) = f^3_{105} \text{ (чтение с конца)}$$

Графическая форма — отображение множества векторов из области определения во множество вершин n-мерного *булевого куба*.

Существенной называется такая вершина n-куба, в чьих координатах функция *истинна*.

Такие вершины образуют **0-кубы**, для которых определены следующие отношения:

— **отношение соседства**: 0-кубы отличаются лишь *одной* координатой:
  > *независимая координата (X)* различается с соседом
  > *зависимая координата* совпадает с соседом
— **операция склеивания**: соседние вершины образуют 1-куб
— **отношение покрытия**: 0-куб является частью куба большей размерности

Кубический комплекс $K^n(f)$ — множество всех n-кубов функции f.

Максимальным называется такой куб кубического комплекса, который *нельзя склеить* с другими кубами.

Сокращённой наз-ся такая нормальная форма, которая соответствует множеству *максимальных* кубов.

Покрытие $C(f)$ — подмножество $K(f)$, которое покрывает все существенные вершины функции f.

Ядро покрытия $T(f)$ — множество максимальных кубов, без которых $C(f)$ не будет образовано.

Минимизация булевой функции

Цена схемы — количество оборудования, которое использовано в схеме:

$$S = \sum s_i n_i$$

— s_i — цена i-го компонента
— n_i — количество i-го компонента

Цена схемы по Квайну S_Q — суммарное число входов у логических элементов.

Цена n-куба — число его независимых координат.

Минимальной называется такая нормальная форма, которая *минимизирует* цену схемы.

Минимальным называется такое покрытие, которое состоит из *минимальных* нормальных форм.

Цена покрытия S^a — сумма цен кубов, которые входят в покрытие.

Цена покрытия S^b — сумма S^a и количества кубов, которые входят в покрытие.

> **Теорема.** Связь цены схемы по Квайну с ценой покрытия:
> $$S^a \leq S_Q \leq S^b$$

Общая алгебра

Алгебраическая операция

n-местная **алгебраическая операция** $*$ — отображение:

$$*\colon X_1 \times \dots \times X_n \to Y$$

Операция $*$ **внутренняя** для множества X *(множество X **замкнуто** относительно операции $*$)*, если:

$$X_i \subseteq X \land Y \subseteq X$$

Иначе операция $*$ **внешняя** для множества X *(множество X **не замкнуто** относительно операции $*$)*.

Нейтральным от-но $*$ наз-ся такой элемент $e \in X$, что:

$$\forall x \in X \; e * x = x * e = x$$

> Если нейтральный элемент e от-но $*$ существует, то он *единственный*.

Поглощающим от-но $*$ наз-ся такой элемент $w \in X$, что:

$$\forall x \in X \; w * x = x * w = w$$

> Если поглощающий элемент w от-но $*$ существует, то он *единственный*.

Симметричным *(противоположным, обратным)*
к элементу $x \in X$ от-но $*$ наз-ся такой элемент $x^{-1} \in X$, что:

$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e \text{ (нейтр.)}$$

> Если симметричный элемент x^{-1} к элементу x от-но ассоциативной $*$ существует, то он *единственный*.

> **Теорема.** Если $y\colon X \to Y$ и $x\colon Y \to X$ — отображения, то y *инъективно*, а x *сюръективно*.

Доказательство. По условию, множество X накладывается на себя. Значит, f *всюду определено*.

Так как g функционально, то

$$\forall x_1, x_2 \in X \; \exists y \in E_f\colon x_1 f y,\ x_2 f y \iff x_1 = x_2,$$

то есть f *инъективно*. $\square$

Когда X накладывается на себя, то

$$\forall x \in E_g \ \exists y \in D_g : x \mapsto y,$$

то есть g *сюръективно*. $\blacksquare$

Свойства операций

Пусть $* : X^2 \to X$, $\circ : X^2 \to X$ — алгебраические операции.

Операция $*$ **коммутативна**, когда

$$\forall x, y \in X \ x * y = y * x$$

Операция $*$ **ассоциативна**, когда

$$\forall x, y, z \in X \ \ (x * y) * z = x * (y * z)$$

Операция $*$ **дистрибутивна** относительно $\circ$, когда

$$\forall x, y, z \in X \ \begin{cases} x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z) & \textit{(дистр. справа)} \\ (x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z) & \textit{(дистр. слева)} \end{cases}$$

> **Теорема.** Пусть e — нейтральный элемент от-но операции $*$, дистрибутивной от-но операции $\circ$. Тогда e — *поглощающий элемент* от-но $\circ$.

(Работает ли теорема выше в обратную сторону?)

Алгебраическая структура

Алгебраическая структура *(система)* — множество X с введёнными на нём алгебраическими операциями:

$$(X, *_1, \ldots, *_n)$$

Для **голоморфных** структур $(M, \circ)$, $(N, *)$ существует отображение f вида:

$$f : M \to N \iff \forall x, y \in M \ f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

Для **изоморфных** структур $(M, \circ)$, $(N, *)$ существует изоморфизм f вида:

$$f : M \xrightarrow{\sim} N \iff \forall x, y \in M \ f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

$$(M, \circ) \simeq (N, *)$$

Виды структур

Магма *(группоид)* — алгебраическая структура $(X, *)$ с внутренней бинарной операцией $*$.

Группа — магма, для которой справедливо:

1) Ассоциативность $*$ — для **полугруппы**.
2) $\exists$ нейтральный элемент от-но $*$ — для **моноида**.
3) $\forall x \in G$ $\exists$ симметричный элемент от-но $*$.
4) Коммутативность $*$ — для **абелевой** группы.

Кольцо — такая алгебраическая структура $(X, +, \cdot)$, что:

1) Абелева группа относительно *сложения* $+$.
2) Дистрибутивность *умножения* относительно *сложения*.
3) Ассоциативность *умножения* $\cdot$ — для **ассоциативного кольца**.
4) Коммутативность *умножения* — для **коммутативного кольца**.
5) $\exists$ нейтральный элемент от-но $\cdot$ — для **кольца с единицей**.
6) Группа относительно *умножения* — для **поля**.

Подгруппа — подмножество H аддитивной абелевой группы G, которое замкнуто по сложению на всей группе G:

$$+: H \times G \to H$$

Идеал — подмножество I кольца A, которое замкнуто по умножению на всём кольце A:

$$\cdot: I \times A \to I$$

Числовые системы

Система натуральных чисел — коммутативная аддитивная и мультипликативная полугруппа $\langle \mathbb{N};\ +, \times \rangle$.

Система целых чисел — коммутативное кольцо $\langle \mathbb{Z};\ +, \times \rangle$.

Система рациональных чисел — упорядоченное поле $\langle \mathbb{Q};\ +, \times \rangle$.

Система действительных чисел — непрерывное упорядоченное поле $\langle \mathbb{R};\ +, \times \rangle$.

Действительные числа

Система действительных чисел — алгебраическая структура $\langle \mathbb{R};\ +, \cdot, \leq \rangle$, в которой выполняется следующая *аксиоматика*.

Аксиомы сложения. *Сложение* — алгебраическая операция $+\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Свойства:

1) коммутативность
2) ассоциативность
3) существование нейтрального элемента
4) существование противоположного *(симметричного)* элемента

Следствия из аксиом:

1) Единственность нуля *(нейтрального элемента)*.
2) Единственность противоположного *(симметричного)* элемента.
3) Умножение на -1 порождает противоположный элемент.

Аксиомы умножения. *Умножение* — алгебраическая операция $\cdot\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Свойства:

1) коммутативность
2) ассоциативность
3) существование нейтрального элемента
4) существование обратного *(симметричного)* элемента

Следствия из аксиом:

1) Единственность единицы *(нейтрального элемента)*.
2) Единственность обратного *(симметричного)* элемента.
3) Нуль — поглощающий элемент.

Связь сложения и умножения. *(Дистрибутивность $\cdot$ от-но $+$)*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Аксиомы порядка. *Неравенство* — алгебраическая операция $\leq$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Свойства:

1) рефлексивность
2) антисимметричность
3) транзитивность
4) *линейная упорядоченность:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ (x \leq y) \vee (y \leq x)$$

Связь сложения и порядка.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ x \leq y \iff x + z \leq y + z$$

Следствие.

$$(x \leq y) \wedge (z \leq k) \implies x + z \leq y + k$$

Связь умножения и порядка.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \ (0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \implies 0 \leq x \cdot y$$

Следствия.

$$0 > x \wedge 0 > y \implies 0 < xy$$
$$0 > x \wedge 0 < y \implies 0 > xy$$
$$x < y \wedge z > 0 \implies xz < yz$$
$$x < y \wedge z < 0 \implies xz > yz$$

Аксиома полноты. Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$ и $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$.

$$(\forall x \in X,\ y \in Y\ x \leq y) \implies \exists c \in \mathbb{R}\ x \leq c \leq y$$

> **Лемма.** *(Сравнение нуля и единицы)*
> $$0 < 1$$

Доказательство леммы следует из *аксиом порядка*.

Подмножества $\mathbb{R}$

Для **индуктивного** множества $X \subset \mathbb{R}$ справедливо:

$$\forall x \in X \ (x+1) \in X$$

Примеры индуктивных множеств: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$.

> **Принцип математической индукции.** Пусть $X \subset \mathbb{N}$:
> $$(\underbrace{1 \in X}_{1} \wedge \underbrace{\forall x \in X \ (x+1) \in X}_{2}) \implies X = \mathbb{N}$$
>
> 1) Базис индукции.
> 2) Индукционный шаг.

Целые числа $\mathbb{Z}$ — объединение $\mathbb{N}$ с множеством чисел, противоположных к $\mathbb{N}$, и нулём.

Рациональные числа $\mathbb{Q}$ — множество чисел вида:

$$m \cdot n^{-1}, \quad m, n \in \mathbb{Q}$$

Иррациональные числа $\mathbb{I}$ — множество вида:

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$$

Расширенная числовая прямая

Расширенная числовая прямая — расширение множества действительных чисел:

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Свойства бесконечности:

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty, & x > 0 \\ \mp\infty, & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{x}{0} = \begin{cases} +\infty, & x > 0 \\ -\infty, & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{x}{\infty} = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Комплексные числа

Система компле́ксных чисел — непрерывное поле:

$$\langle \mathbb{C} = \mathbb{R}^2;\ +, \cdot \rangle$$

Комплексное число — элемент $z = (a, b) \in \mathbb{C}$.

> **Свойство.** Множество $\mathbb{C}$ включает в себя множество $\mathbb{R}$:
>
> $$\forall a \in \mathbb{R}\ (a, 0) \leftrightarrow a \implies \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Мнимая единица — комплексное число вида:

$$(0, 1) \leftrightarrow i, \quad i^2 = -1$$

Плоскость комплексных чисел — декартова система координат Oab с биекцией вида:

$$z = (a, b) \leftrightarrow M(a, b)$$

— Oa есть действительная ось $(a = \mathfrak{Re}\, z)$
— Ob есть мнимая ось $(b = \mathfrak{Im}\, z)$

> **Свойство.** Комплексные числа *равны*, если соответственно равны их действительные и мнимые части:
>
> $$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \iff a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

> **Формы записи.** Пусть $z = (a, b) \in \mathbb{C}$.
>
> — алгебраическая форма: $z = a + bi$
> — тригонометрическая форма: $z = |z|\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

Операции комплексных чисел

> **Сложение и умножение.** Пусть $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$:
>
> $$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
> $$z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bd)$$
>
> Свойства операций *индуцируются* из множества действительных чисел $\mathbb{R}$.

Сопряжение — операция смены знака $\Im\mathrm{m}\, z$:

$$z = (a, b) \to \bar{z} = (a, -b)$$

Свойства:

— дистрибутивность относительно *сложения* $+$
— дистрибутивность относительно *умножения* $\cdot$

Модуль комплексного числа z — расстояние $\rho(O; M)$:

$$|z| = r = |OM| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

Свойства:

— дистрибутивность относительно *умножения* $\cdot$ *(деления* $:$ *)*

Аргумент комплексного числа — угол, образованный $\overrightarrow{OM}$ с действительной осью:

$$\arg z = \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, \quad \varphi \in (-\pi; \pi]$$

Свойства:

— $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
— $\arg(z_1 / z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$
— $\arg z^n = n \arg z,\ n \in \mathbb{Z}$

Формула Муавра. Возведение в степень числа $z \in \mathbb{C}$:

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Следствие. Корень n-й степени из числа $z \in \mathbb{C}$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Квадратный корень. Корень из числа $z \in \mathbb{C}$:

$$\sqrt{z} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} + \operatorname{sgn}(b)\, i \sqrt{\frac{|z| - a}{2}}\right)$$

Метрическое пространство

Метрическое пространство — алгебраическая структура $\langle M;\ d\rangle$, где d — метрика.

Метрика d множества M — функция $d\colon M \times M \to R_0^+$, которая определяет *расстояние* между его двумя элементами.

Например, *евклидова метрика* использует теорему Пифагора в n-мерном пространстве:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

Для метрического пространства $\langle M;\ d\rangle$, $x, y, z \in M$ выполняются следующие *аксиомы*:

— $d(x,y) = 0 \iff x = y$ — *тождество*;
— $d(x,y) = d(y,x)$ — *симметрия*;
— $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ — *«неравенство треугольника»*.

Длина отрезка

Расстояние между точками $A\langle a\rangle$ и $B\langle b\rangle$ —

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = |a - b| \implies AB^2 = (a-b)(\bar{a} - \bar{b})$$

Уравнение окружности с центром $A\langle a\rangle$ радиуса r —

$$(z-a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^2$$

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение радиус-векторов —

$$2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = a\bar{b} + \bar{a}b$$

Доказательство. Пусть $A\langle a\rangle$, $B = \langle b\rangle$, $a = x_1 + y_1 i$, $b = x_2 + y_2 i$. Тогда:

$$a\bar{b} + \bar{a}b = (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) + (x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i) =$$

$$2(x_1 x_2 + y_1 y_2) = 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}\ \blacksquare$$

Пусть $A\langle a\rangle$, $B\langle b\rangle$, $C\langle c\rangle$, $D\langle d\rangle$ — четыре различные точки.

Тогда *скалярное произведение произвольных векторов* —

$$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = (b-a)(\bar{d}-\bar{c}) + (\bar{b}-\bar{a})(d-c)$$

Доказательство. По условию:

$$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}) =$$

$$2(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}) =$$

$$\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(b\bar{d}+\bar{b}d-b\bar{c}-\bar{b}c-a\bar{d}-\bar{a}d+a\bar{c}+\bar{a}c) =$$

$$(a-b)(\bar{c}-\bar{d}) + (\bar{a}-\bar{b})(c-d) \ \blacksquare$$

Коллинеарность

Коллинеарными называются:

— *точки*, которые лежат на одной прямой;

— *векторы*, которые лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

> *Критерий коллинеарности* точек A, B с O:
>
> $$\frac{a}{b} = \overline{\left(\frac{a}{b}\right)} \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$$

Доказательство. Очевидно, что:

$$\left[\begin{array}{l} \arg a - \arg b = 0 \\ \arg a - \arg b = \pm\pi \end{array}\right. \implies \arg\frac{a}{b} = 0; \pm\pi$$

По определению аргумента комплексного числа:

$$\frac{a}{b} \text{ — действительное число} \implies \frac{a}{b} = \overline{\left(\frac{a}{b}\right)} \ \blacksquare$$

> *Критерий коллинеарности* векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$:
>
> $$\frac{b-a}{d-c} = \overline{\left(\frac{b-a}{d-c}\right)} \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=\vec{0} \\ \overrightarrow{CD}=\vec{0} \end{array}\right.$$

Доказательство. По определению комплексных чисел:

$$\overrightarrow{AB} \sim b - a,\ \overrightarrow{CD} \sim d - c$$

По критерию коллинеарности двух точек с O:

$$\frac{b-a}{d-c} = \overline{\left(\frac{b-a}{d-c}\right)} \blacksquare$$

Если A, B, C, D лежат на одной окружности, то:

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \iff \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$$

> *Критерий коллинеарности* трёх точек:
>
> $$\frac{b-a}{c-a} = \overline{\left(\frac{b-a}{c-a}\right)} \quad \text{или} \quad \left[\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{AC} &= \vec{0} \end{aligned}\right.$$

Доказательство. Очевидно, что:

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \iff A, B, C \text{ коллинеарны}$$

По критерию коллинеарности векторов:

$$\frac{b-a}{c-a} = \overline{\left(\frac{b-a}{c-a}\right)} \blacksquare$$

> *Уравнение секущей* AB:
>
> $$(\bar{a} - \bar{b})z + (b - a)\bar{z} + a\bar{b} - b\bar{a} = 0$$

Доказательство. Нет и не будет: раздел будет снесён.

Вычислительная геометрия

Деление отрезка в отношении

Точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda \in \mathbb{R}$, если:

$$\begin{cases} C \in AB \\ \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB} \\ \lambda \neq -1 \end{cases}$$

> **Теорема.** Пусть C делит AB в отношении $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда координаты точки C равны:
>
> $$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda} \qquad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}$$

Доказательство. По условию:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB} \iff \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \lambda \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \right)$$

По теореме Фалеса:

$$\begin{cases} x_C - x_A = \lambda \left(x_B - x_C \right) \\ y_C - y_A = \lambda \left(y_B - y_C \right) \end{cases} \iff \begin{cases} x_C = \dfrac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda} \\ y_C = \dfrac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda} \end{cases} \blacksquare$$

Направляющий вектор

Направляющим называется вектор, параллельный данной прямой:

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \end{cases}$$

> **Теорема.** Уравнение прямой по точке и направляющему вектору:
>
> $$\frac{A}{B} = \frac{x - x_0}{y - y_0}$$

Уравнение легко выводится из определения направляющего вектора.

Свойство. Связь угла между прямыми и их направляющими векторами:

$$\cos\angle(a,b) = \left|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})\right|$$

Коллинеарность

Коллинеарными называются:

— *точки*, которые лежат на одной прямой;

— *векторы*, которые лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Критерий коллинеарности двух векторов:

$$\vec{a} = \lambda\vec{b},\ \lambda \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x_a = \lambda x_b \\ y_a = \lambda y_b \end{cases}$$

В частности, нулевой вектор коллинеарен *любому* вектору:

$$\vec{0} = 0\vec{a}$$

Уравнение секущей по двум известным точкам:

$$A\langle x_a, y_a\rangle,\ B\langle x_b, y_b\rangle \implies \frac{x - x_a}{x_b - x_a} = \frac{y - y_a}{y_b - y_a}$$

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{AB}$ — коллинеарные векторы.

По критерию коллинеарности двух векторов:

$$\begin{cases} x - x_a = \lambda\,(x_b - x_a) \\ y - y_a = \lambda\,(y_b - y_a) \end{cases} \iff \lambda = \frac{x - x_a}{x_b - x_a} = \frac{y - y_a}{y_b - y_a} \ \blacksquare$$

Скалярное произведение

Теорема. Косинус угла α между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен:

$$\cos\alpha = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}$$

Доказательство. Отложим векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$ от начала координат.

По теореме косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\alpha \implies$$

$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

По теореме Пифагора:

$$\begin{cases} AB^2 = x_a^2 + y_a^2 \\ AC^2 = x_b^2 + y_b^2 \\ BC^2 = (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 \end{cases} \implies$$

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2(x_a x_b + y_a y_b) \implies$$

$$\cos\alpha = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} \blacksquare$$

Скалярное произведение *векторов* $\vec{a}, \vec{b}$ — величина:

$$x_a x_b + y_a y_b =: \vec{a} \cdot \vec{b}$$

> **Теорема.** Скалярное произведение двух векторов равно:
>
> $$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\alpha,$$
>
> α — угол между векторами.

> **Следствие.** Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *коллинеарны*, то:
>
> — $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \implies$ векторы *сонаправлены*
>
> — $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \implies$ векторы *несонаправлены*
>
> — $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \implies$ один из векторов *нулевой*

Ориентированный угол

Ориентированным называется угол α между $\vec{a}$ и $\vec{b}$, на который нужно повернуть $\vec{a}$, чтобы он был сонаправлен с $\vec{b}$:

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) \text{ — обозначение, } \alpha \in (-\pi; \pi]$$

Знак ориентированного угла:

— **пололжительный**, если поворот происходит в *положительном* направлении системы координат;
— **отрицательный**, если поворот происходит в *отрицательном* направлении системы координат;
— **нуль**, если вектора *сонаправлены*.

Косое произведение

Косое произведение *векторов* $\vec{a}, \vec{b}$ — величина:

$$x_a x_b - y_a y_b =: \vec{a} \wedge \vec{b}$$

> **Теорема.** Косое произведение двух векторов равно:
>
> $$\vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin \alpha,$$
>
> α — угол между векторами.

> **Теорема.** Знак косого произведения векторов *совпадает* со знаком ориентированного угла.

Доказательство вытекает из *чётности* синуса угла между векторами.

Взаимное расположение

Расположение *точки* A относительно *прямой, луча или отрезка* BC:

— $\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) > 0 \implies A$ лежит в **левой** полуплоскости;
— $\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) < 0 \implies A$ лежит в **правой** полуплоскости;
— $\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 0 \implies A$ **коллинеарна** прямой BC.

Взаимное расположение *двух отрезков или лучей* AB и CD:

— концы обоих отрезков лежат в *разных* полуплоскостях относительно друг друга $\implies$ отрезки **пересекаются**;
— концы одного отрезка лежат в *одной* полуплоскости относительно другого $\implies$ отрезки **не пересекаются**;
— концы одного отрезка лежат *на* прямой другого отрезка:

> конец одного отрезка лежит *на* другом $\implies$ отрезки имеют **общий подотрезок**;
> концы одного отрезка *не* лежат на другом $\implies$ отрезки **не пересекаются**.

Ориентированная площадь

Ориентированной называется площадь многоугольника, которая обладает знаком его ориентированных углов.

> **Теорема.** Ориентированная площадь треугольника равна половине *косого произведения* векторов ориентированного угла.

Ориентированная площадь — *аддитивная* величина, к основным методам её расчёта относят:

— метод трапеций;
— метод треугольников.

Метод трассировки луча

> **Задача.** На плоскости даны многоугольник и точка. Решить вопрос о принадлежности точки многоугольнику.

Алгоритм трассировки луча:

1) Проверить принадлежность точки стороне многоугольника: если *истина*, остановить алгоритм.
2) Выпустить из точки в случайном направлении луч.
3) Посчитать число n пересечений луча со сторонами многоугольника:

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod 2 \implies \text{точка снаружи} \\ n \equiv 1 \pmod 2 \implies \text{точка внутри} \end{cases}$$

Метод заметающей прямой

Да.

Уравнения кривых

Алгебраическая кривая — это...

Кривые первого порядка — прямая.

Уравнение ромба

Кривые второго порядка *(коники)* — эллипс, парабола, гипербола.

ГМТ

Биссектриса — это

Биссекторная плоскость — это...

Свойство равноудалённости, расстояния и пр..

Гомотетия также

Геометрические тела

Правильный тетраэдр, пирамида...

Прямые в пространстве

По взаимному расположению прямые бывают трёх видов:

— **пересекающиеся**: имеют *общую точку*
— **параллельные**: *лежат* в одной плоскости и *не имеют* общих точек
— **скрещивающиеся**: *не лежат* в одной плоскости

> **Свойство.** Угол между скрещивающимися прямыми равен углу между двумя *пересекающимися* прямыми, которые соответственно им параллельны.

Сонаправленные *лучи* лежат в одной полуплоскости на параллельных прямых.

> **Свойство.** Углы с сонаправленными сторонами *равны*.

Предел последовательности

Определение

Предел последовательности $\{x_n\}$ — такое a, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon\ \forall n > N\ x_n \in U_\varepsilon(a).$$

Упрощённая запись $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ или $n \to \infty, x_n \to a$.

Этот оператор *«дистрибутивен»* относительно *сложения*, *умножения* и *деления* *(предел знаменателя не равен нулю)*.

Частичным называется предел подпоследовательности.

Свойства

> Сходимость $\implies$ ограниченность.

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. По определению:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon\ \forall n > N\ x_n \in U_\varepsilon(a)$$

По «дистрибуции» модуля относительно сложения:

$$|x_n| = |x_n - a + a| \le |x_n - a| + |a| < \varepsilon + |a|$$

Положим, что $\forall m \le N\ L = \max(|\{x_m\}|, \varepsilon + |a|) \implies |x_n| \le L$. ■

> **Предельный переход.** Пусть $n \to \infty$, $x_n \to a$, $y_n \to b$. Тогда справедливо следствие:
>
> $$x_n \le y_n \text{ или } x_n < y_n \implies a \le b$$

Доказательство. По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon\ \forall n > N\ x_n \in U_\varepsilon(a),\ y_n \in U_\varepsilon(b)$$

Следовательно,

$$+\begin{cases} x_n \le y_n \\ a - x_n < \varepsilon \\ y_n - b < \varepsilon \end{cases} \iff \begin{cases} y_n - x_n \ge 0 \\ y_n - x_n < 2\varepsilon + b - a \end{cases} \iff \frac{a-b}{2} < \varepsilon$$

Так как ε — сколь угодно малое положительное число, то $a - b \le 0 \iff a \le b$. □

При $x_n < y_n$ доказательство аналогично. ■

> **Теорема о промежуточной функции.** Пусть $n \to \infty$, $x_n, y_n \to a$. Тогда справедливо следствие:
> $$\forall \{z_n\}: x_n \le z_n \le y_n \implies z_n \to a$$

Доказательство. По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > N\ x_n, y_n \in U_\varepsilon(a)$$

Следовательно,

$$a - \varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a + \varepsilon \implies z_n \in U_\varepsilon(a) \implies \lim_{n\to\infty} z_n = a.\ ■$$

Условие Коши

Последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет **условию Коши** *(является фундаментальной)*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n, m > N\ |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

> Фундаментальность $\implies$ ограниченность.

Доказательство. По условию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n, m > N\ |x_n - x_m| < \varepsilon$$

По «дистрибуции» модуля относительно сложения:

$$\begin{cases} |x_n - x_m| < \varepsilon \\ |x_n| = |x_n - x_m + x_m| \end{cases} \iff \begin{cases} |x_n - x_m| < \varepsilon \\ |x_n| \le |x_n - x_m| + |x_m| \end{cases} \iff$$
$$|x_n| < \varepsilon + |x_m|$$

Положим, что $\forall k \le N\ L = \max(|\{x_k\}|, \varepsilon + |x_m|) \implies |x_n| \le L.$ ■

Принцип компактности отрезка

> Ограниченность $\implies$ частичная сходимость:
> $$\forall \{x_n\} \in [a; b]\ \exists \{n_k\}\uparrow: \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$$

Доказательство. По принципу Кантора:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists! \xi \in [a_k; b_k] \subset [a_{k-1}; b_{k-1}] \iff$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_n = \xi$$

Образуем подпоследовательность:

$$\{x_{n_k} \mid \{n_k\}\uparrow,\ x_{n_k} \in [a_k; b_k]\}$$

По теореме о промежуточной функции:

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k \implies \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi \ \blacksquare$$

> Частичный предел фундаментальной последовательности является её пределом.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ фундаментальна $\implies$ она ограничена.

По принципу компактности отрезка $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

По условию Коши:

$$\forall \varepsilon/2 > 0\ \exists N\colon \forall n, m > N\ |x_n - x_m| < \varepsilon/2$$

Зафиксируем n. При $x_m = x_{n_k} > N$ перейдём к пределу:

$$|x_n - a| \le \varepsilon/2 < \varepsilon \iff \lim_{k\to\infty} x_n = a \ \blacksquare$$

Критерий Коши

> Сходимость $\iff$ фундаментальность.

Доказательство $\implies$. По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n \in U_{\varepsilon/2}(a)$$

Значит, $\forall n, m > N\ |x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)|$.

По «дистрибуции» модуля относительно сложения:

$$|x_n - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ \blacksquare$$

Доказательство $\impliedby$. Пусть $\{x_n\}$ фундаментальна $\implies$ она ограничена $\implies$ по принципу компактности отрезка она частично сходится к c $\implies$ по условию Коши и принципу компактности отрезка она сходится к c. $\blacksquare$

Теорема Вейерштрасса

> Монотонность $\implies$ сходимость:
> $$\left[\begin{array}{l}\forall\{x_n\}\nearrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\} \\ \forall\{y_n\}\searrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \inf\{y_n\}\end{array}\right.$$

Доказательство. По определению точной верхней границы:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leq \sup\{x_n\}$$

Так как последовательность неубывает, то

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n \in U_\epsilon(\sup\{x_n\}) \implies$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}. \ \square$$

Для $\{y_n\}\searrow$ доказательство аналогично. ■

Предел функции

Определение

Предел функции f в точке x_0 — такое a, что *(О.Л. Коши)*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon\ \underbrace{\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)}_{\text{I}},\ \underbrace{f(x) \in U_\varepsilon(a)}_{\text{II}}.$$

I — функция f определена в какой-либо проколотой δ-окрестности точки x_0;

II — функция f имеет образ в какой-либо проколотой ε-окрестности точки a.

Предел функции f в точке x_0 — такое a, что *(Э. Гейне)*

$$\forall \{x_n\} \in D_f\colon\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\ (x_n \neq x_0) \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

Упрощённая запись $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ или $x \to x_0, f(x) \to a$.

Бесконечно малая и большая

Бесконечно малой *(б.м.)* называется такая функция $\alpha(x)$ при $x \to x_0$, что:

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$$

> **Связь предела и б.м.** Если функция f имеет предел $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, то справедливо:
>
> $$f(x) = a + \underset{x\to x_0}{\alpha(x)},\ \ \alpha \text{ — б.м.}$$

Бесконечно большой *(б.б.)* называется такая функция $y(x)$ при $x \to x_0$, что:

$$\lim_{x\to x_0} y(x) = \infty$$

> **Связь бесконечно малой и большой.** Верен факт:
>
> $$\underset{x\to x_0}{\alpha(x)} \text{ — б.м.},\ \forall x \in \mathring{U}_{x_0}\ \alpha(x) \neq 0 \iff \frac{1}{\alpha} \text{ — б.б.}$$

Композиция функций

> Пусть f, g — функции. Тогда:
>
> $$\begin{cases} \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \\ \lim_{y\to y_0} g(x) = z_0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = z_0 \\ f(x) \neq y_0 \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $g \circ f = \varphi$; по определению предела:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \colon \forall y \in \mathring{U}_\delta(y_0) \subseteq D_g, \; f(x) \in U_\varepsilon(z_0) \\ \forall \delta > 0 \; \exists \sigma > 0 \colon \forall x \in \mathring{U}_\sigma(x_0) \subseteq D_f, \; g(x) \in U_\delta(y_0) \end{cases}$$

Из $\mathring{U}_\delta(y_0) \cap U_\delta(y_0) = \mathring{U}_\delta(y_0)$ следует:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \sigma > 0 \colon \forall x \in \mathring{U}_\sigma(x_0) \subseteq D_f, \; \varphi(x) \in U_\varepsilon(z_0) \\ y \neq y_0 \implies f(x) \neq y_0 \end{cases} \iff$$

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = z_0, \; f(x) \neq y_0 \; \blacksquare$$

Односторонний предел

Односторонним *(правым или левым)* называется предел функции, который определён в терминах односторонних окрестностей *(монотонных последовательностей)*:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = a \quad \text{или} \quad x \to x_0 + 0, \; f(x) \to a$$

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = a \quad \text{или} \quad x \to x_0 - 0, \; f(x) \to a$$

Существование предела равносильно существованию *равных* односторонних пределов:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \iff \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

Асимптота

Асимптота — прямая, к которой *неограниченно* приближается кривая, но не сливается с ней.

Горизонтальная асимптота для графика функции f задаётся уравнением:

$$y = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

Наклонная асимптота для графика функции f задаётся уравнением $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx).$$

Вертикальная асимптота для графика функции f задаётся уравнением $x = a$, где

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x\to a-0} f(x) = \infty.$$

Непрерывность

Пусть $f : X \to Y$ — функция. Тогда:

$x - x_0 =: \Delta x$ — *приращение аргумента* в точке x_0
$f(x) - f(x_0) =: \Delta f$ — *приращение функции* в точке x_0

Функция f **непрерывна** *в точке* x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{или} \quad \Delta x \to 0,\ \Delta f \to 0.$$

Односторонняя непрерывность в точке x_0 определяется через односторонние пределы.

Непрерывными в точке x_0 являются *сумма*, *произведение*, *частное* *(предел знаменателя не равен нулю)* и *композиция* непрерывных в ней функций.

Функция f **непрерывна** *на промежутке* $[a; b]$, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка:

$$f \in \mathbb{C}[a; b] \text{ — нотация}$$

> **Предел под непрерывной функцией.** Пусть f, g — функции, g непрерывна в точке x_0. Тогда:
>
> $$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \implies \lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x\to x_0} f(x))$$

Доказательство схоже с теоремой о пределе *композиции функций*.

Замечательные пределы

Когда-нибудь это будет пояснено *(я надеюсь)*:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Теорема о промежуточном значении

> Пусть $f\in\mathbb{C}[a;b]$. Тогда справедливо:
> $$\forall c\in[f(a);f(b)]\ \exists\xi\in[a;b]: c=f(\xi)$$

Доказательство. По принципу Кантора:

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists\xi\in[a_n;b_n]\subset[a_{n-1};b_{n-1}]\subseteq X \implies$$
$$n\to\infty,\ a_n,b_n\to\xi$$

По определению непрерывности функции на промежутке:

$$n\to\infty,\ f(a_n),f(b_n)\to f(\xi)$$

По теореме о промежуточной функции:

$$f(a_n)\le c\le f(b_n) \implies c=f(\xi)\ \blacksquare$$

> **Метод бисекции.** Пусть $f\in\mathbb{C}[a;b]$. Тогда справедливо:
> $$\operatorname{sgn} f(a)\ne\operatorname{sgn} f(b) \implies \exists c\in[a;b]: f(c)=0$$

Используется, если нужно найти *примерный* нуль функции.

Критерий Коши

> Сходимость $\iff$ выполнение *условия Коши*:
> $$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x',x''\in\mathring{U}_\delta(x_0)\ \ |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

Доказательство $\implies$. По определению предела:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \mathring{U}_\delta(x_0)\subseteq D_f,\ U_{\varepsilon/2}(a)\cap E_f\ne\emptyset$$

Пусть $x',x''\in\mathring{U}_\delta(x_0)$; по неравенству треугольника:

$$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-a|+|f(x'')-a|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon\ \blacksquare$$

Доказательство $\Longleftarrow$. По условию Коши:

$$\exists\{x_n\} \in D_f:\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ x_n \neq x_0$$

Последовательности $\{f(x_n)\}$ фундаментальны $\implies$ сходятся.

По фундаментальности и сходимости к одной точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \ \blacksquare$$

Теорема Вейерштрасса

> Пусть $f \in C[a;b]$. Тогда в некоторых точках отрезка функция достигает своих точных верхней и нижней границ на $[a;b]$.

Доказательство. Пусть $\sup f([a;b]) =: M$, $\inf f([a;b]) =: m$.

По определению точных верхней и нижней границ:

$$\forall x \in [a;b]\ f(x) \in [m;M]$$

По принципу компактности отрезка:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M \qquad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$$

По определению непрерывности:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi) \implies f(\xi) = M \ \blacksquare$$

Дифференциальное исчисление

Дифференцируемость

Дифференцируемой *(«линейной в малом») в точке x_0* называется такая функция f, для которой справедливо:

$$\Delta f = (k + \underset{\Delta x \to 0}{\alpha(x)})\,\Delta x,\ \alpha \text{ — б.м.}$$

Односторонняя дифференцируемость в точке x_0 определяется через односторонние пределы.

Дифференциал *функции f* — линейная часть Δf:

$$k\,\Delta x =: \mathrm{d}f$$

Производная *в точке x_0* — предел вида: *(Ж.Л. Лагранж)*

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =: f'(x_0)$$

Свойства

Таблица *«дистрибуции»* производной:

$$(f+g)' = f' + g' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g' \qquad (kf)' = kf',\ k = \mathrm{const}$$

> Дифференцируемость $\implies$ непрерывность.

Доказательство. По определению производной:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) \iff \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \underset{\Delta x \to 0}{\alpha(x)}\,\Delta x \iff$$

$$\Delta f = \Delta x(f'(x_0) + \alpha(x)\,\Delta x) \implies \Delta x \to 0,\ \Delta f \to 0 \ \blacksquare$$

> **Производная обратной функции.** Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемая функция. Тогда справедливо:
>
> $$f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(x)},\ f'(x) \neq 0$$

Доказательство. По условию запишем тождество:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 1 : \frac{\Delta x}{\Delta f}$$

По предельному переходу и непрерывности функций:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 1 : \lim_{\Delta f \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta f} \overset{\text{опр}}{\iff} f'(x) = 1 : f^{-1'}(y) \iff$$

$$\iff f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(x)}, \; f'(x) \neq 0 \; \blacksquare$$

> **Инвариантность.** Пусть $f(x)$, $g(x)$ — дифференцируемые функции. Тогда верно:
>
> $$\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x \implies \mathrm{d}(f \circ g) = f'(g(x))\mathrm{d}g$$

Доказательство. По правилам дифференцирования:

$$\mathrm{d}(f \circ g) = f'(g(x))\mathrm{d}x = f'(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = f'(g(x))\mathrm{d}g \; \blacksquare$$

Элементарные производные

Таблица производных элементарных функций:

$$C' = 0 \qquad (x^n)' = nx^{n-1}, \; n \neq 0 \qquad \ln' x = 1/x$$

$$\sin' \alpha = \cos \alpha \qquad \cos' \alpha = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}' \alpha = 1/\cos^2 \alpha \qquad \operatorname{ctg}' \alpha = -1/\sin^2 \alpha$$

$$\arcsin' x = 1/\sqrt{1 - x^2} \qquad \arccos' x = -1/\sqrt{1 - x^2}$$

$$\operatorname{arctg}' x = 1/(1 + x^2) \qquad \operatorname{arcctg}' x = -1/(1 + x^2)$$

Касательная

Касательная к кривой в точке x_0 — прямая, которая проходит через x_0 и представляет *предельное* положение секущей при $x \to x_0$, или $\Delta x \to 0$.

> **Геометрический смысл производной.** Угловой коэффициент *(тангенс)* касательной к графику функции f равен *производной* в этой точке:
>
> $$k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$

Доказательство. По определению касательной:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha = k$$

По определению производной:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = k \;\blacksquare$$

> **Уравнение касательной** к графику функции f в точке x_0 имеет вид:
>
> $$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

Доказательство. По уравнению секущей графика f:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \implies y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

По определению касательной:

$$y - f(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \;\blacksquare$$

Нормаль

Нормаль к кривой в точке x_0 — прямая, которая проходит через x_0 и образует с касательной в x_0 *прямой угол*:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \text{ для } Ax + By + C = 0$$

Доказательство. По скалярному произведению векторов:

$$(\vec{f}' \cdot \vec{n}) = 0 \implies A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$
$$Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0$$

Пусть $C = -(Ax_0 + By_0)$, тогда:

$$Ax + By + C = 0 \;\blacksquare$$

> **Теорема.** Прямые f_1 и f_2 перпендикулярны, если:
>
> $$(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = 0, \text{ или } k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

Доказательство. По скалярному произведению векторов:

$$(\vec{n_1} \cdot \vec{n}_2) = 0 \implies \cos\alpha = 0 \implies \alpha = \frac{\pi}{2} \ \square$$

$$(\vec{n_1} \cdot \vec{n}_2) = 0 \implies k_1 k_2 + 1 = 0 \implies k_1 = -\frac{1}{k_2} \ \blacksquare$$

> **Теорема.** Уравнение прямой по точке и нормальному вектору:
>
> $$(\vec{n} \cdot \vec{l}) = 0, \text{ или } A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Промежутки монотонности

> Если функция f дифференцируема в точке x_0, то
>
> $$\begin{cases} f'(x_0) > 0 \implies f\uparrow \text{ около } x_0 \\ f'(x_0) < 0 \implies f\downarrow \text{ около } x_0 \end{cases}.$$

Доказательство. По определению производной:

$$f'(x_0) > 0 \iff \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} > 0 \iff \frac{\Delta f}{\Delta x} > o(\Delta x)$$

При достаточно малом Δx верно:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0 \iff \left[\begin{aligned} &\Delta f, \Delta x > 0 \\ &\Delta f, \Delta x < 0 \end{aligned}\right. \iff f\uparrow \text{ около } x_0 \ \square$$

Для $f'(x_0) < 0$ доказательство аналогично. $\blacksquare$

Экстремум

Локальный **максимум** функции f — такая точка x_0, что:

$$\exists \delta > 0 \colon \ \sup U_\delta(x_0) = f(x_0)$$

Локальный **минимум** функции f — такая точка x_0, что:

$$\exists\delta > 0\colon\ \inf U_\delta(x_0) = f(x_0)$$

Их объединяют в точки **экстремума**.

Критической называется такая точка x_0, в которой:

$$\left[\begin{aligned} &f'(x_0) = 0 \ \textit{(стационарна)} \\ &f'(x_0) = \text{undefined} \end{aligned}\right.$$

> Экстремум — *критическая точка* первого порядка.
> *(не наоборот)*

Доказательство. По определению локального максимума:

$$\exists\delta > 0\colon\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)\ f(x_0) > f(x)$$

Производная в точке x_0 либо существует, либо нет. □

Допустим, она существует; по определению производной:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$$

По предельному переходу:

$$\left[\begin{aligned} &\Delta x > 0 \implies \Delta f/\Delta x < 0 \implies f'(x_0) \le 0 \\ &\Delta x < 0 \implies \Delta f/\Delta x > 0 \implies f'(x_0) \ge 0 \end{aligned}\right. \iff$$

$$0 \le f'(x_0) \le 0 \iff f'(x_0) = 0\ \square$$

Для локального минимума доказательство аналогично. ■

> **Условие.** Критическая точка — *экстремум*, если в ней первая производная *меняет знак*.

Доказательство. По определению критической точки:

$$\left[\begin{aligned} &f'(x_0) = 0 \\ &f'(x_0) = \text{undefined} \end{aligned}\right.$$

Допустим для определённости:

$$\begin{cases} \exists\delta > 0\colon\ \forall x \in \mathring{U}_{\delta-}(x_0)\ f'(x) > 0 \\ \exists\delta > 0\colon\ \forall x \in \mathring{U}_{\delta+}(x_0)\ f'(x) < 0 \end{cases}$$

По промежуткам монотонности:

$$\begin{cases} f\uparrow \text{ на } U_{\delta-}(x_0) \\ f\downarrow \text{ на } U_{\delta+}(x_0) \end{cases} \iff x_0 \text{ — локальный максимум } \square$$

Для локального минимума доказательство аналогично. ■

> **Условие.** Критическая точка — *экстремум*, если в ней вторая производная *ненулевая*, причём:
>
> $$f''(x_0) < 0 \implies x_0 \text{ — локальный максимум}$$
> $$f''(x_0) > 0 \implies x_0 \text{ — локальный минимум}$$

Выпуклость

Кривая f **выпукла вверх** в точке M, если в окрестности точки f лежит *ниже* своей касательной в этой точке.

Кривая f **выпукла вниз** в точке M, если в окрестности точки f лежит *выше* своей касательной в этой точке.

Кривая f **выпукла** на интервале $(a;b)$, если она выпукла в *каждой* её точке.

> **Условие.** Пусть f дважды дифференцируема на $(a;b)$:
>
> $$\forall x \in (a;b)\ f''(x) \leq 0 \implies f \text{ выпукла вверх}$$
> $$\forall x \in (a;b)\ f''(x) \geq 0 \implies f \text{ выпукла вниз}$$

В **точке перегиба** происходит смена *характера выпуклости* функции.

> Точка перегиба — *критическая точка* второго порядка. *(не наоборот)*

> **Условие.** Критическая точка — *точка перегиба*, если в ней вторая производная *меняет знак*.

Теоремы о среднем

> **Теорема Ролля.** Пусть f дифференцируема на $[a;b]$. Тогда:
> $$f(a)=f(b) \implies \exists \xi \in (a;b): f'(\xi)=0$$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса:

$$f(m)=\inf f([a;b]) \qquad f(M)=\sup f([a;b])$$

По условию существования экстремума:

$$f(a)=f(b)=f(m) \implies f'(M)=0 \ \square$$

При $f(m)=f(M)$ функция — константа на $[a;b]$, производная которой равна нулю. ■

> **Теорема Лагранжа.** Пусть f дифференцируема на $[a;b]$. Тогда верно:
> $$\exists \xi \in (a;b): f'(\xi)=\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x) := f(x)-\lambda x$.

Подберём λ так, чтобы $\varphi(a)=\varphi(b)$:

$$f(a)-\lambda a=f(b)-\lambda b \iff (b-a)\lambda=f(b)-f(a) \iff$$
$$\iff \lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

По теореме Ролля:

$$\exists \xi \in (a;b): \varphi'(\xi)=0 \iff f'(\xi)-\lambda=0 \iff$$
$$\iff \lambda=f'(\xi) \implies f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\Delta f}{\Delta x} \ ■$$

Постоянство функции

> Пусть $f \in \mathbb{C}[a;b]$ и состоит из стационарных точек на $(a;b)$. Тогда:
> $$f([a;b])=C$$

Доказательство. По теореме Лагранжа:

$$\forall x', x'' \in [a;b]\ \exists \xi \in (x';x''): f'(\xi) = \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$$

По определению стационарной точки:

$$f'(\xi) = 0 \implies \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = 0 \iff f(x'') = f(x') \blacksquare$$

Пусть $f, g \in \mathbb{C}[a;b]$ и $f' = g'$. Тогда:

$$\forall x \in [a;b]\ f(x) - g(x) = C$$

Доказательство. Пусть $\varphi := f - g$; по условию:

$$\forall x \in (a;b)\ \varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

По условию постоянства функции:

$$\varphi'(x) = 0 \iff \varphi(x) = C \iff f(x) - g(x) = C \blacksquare$$

Частные производные

Функция нескольких переменных $x_1, \dots, x_n$ задана соответствием вида:

$$f: \mathbb{R}^n \xrightarrow{x_1,\dots,x_n \to y} \mathbb{R}$$

Частная производная функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по x_i — производная f с переменной x_i и др. *фикс. аргументами*:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ — нотация}$$

Вторая частная производная по x:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ — нотация}$$

Смешанная частная производная по x, y:

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} \text{ — нотация}$$

Условие. Критическая точка M — *экстремум* $f(x, y)$, если верно:

$$B^2 - AC < 0$$

$$A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_M \quad B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_M \quad C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_M$$

Причём:

$$A < 0 \implies M \text{ — локальный максимум}$$

$$A > 0 \implies M \text{ — локальный минимум}$$

Неявная производная

Неявной называется функция...

Устойчивость

Пусть дано дифференциальное уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n$$

Нейтрально устойчивым называется такое *стационарное* решение $\tilde{\varphi}(t)$ дифференциального уравнения, что:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon\ \forall x_t \in U_\delta(x^*)\ x_t \in U_\varepsilon(x^*)$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon\ \forall x_t \in U_\delta(x^*)\ x_t \in U_\varepsilon(x^*)$$

> Малые отклонения от решения не выводят систему из окрестност
> стационарного решения.

Асимптотически устойчивым называется такое *нейтрально устойчивое* решение x^* дифференциального уравнения, что:

$$t \to +\infty,\ |x_t - x^*| \to 0$$

> Малые отклонения от нейтрально устойчивого решения со временем затухают.

Решения дифференциального уравнения делятся на:

— **притягивающие** — асимптотически устойчивые;
— **отталкивающие** — неустойчивые.

> **Линеаризация Ляпунова.** Устойчивость стационарного состояния уравнения определяется знаком производной правой части в стационарной точке:
>
> $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$$

Интегральное исчисление

Неопределённый интеграл

Первообразная для функции f на множестве X — такая функция F, что:

$$\forall x \in X\ F'(x) = f(x)$$

> Если у функции f есть первообразная F, то для любой константы C функция $F + C$ тоже первообразная, причём других нет.

Доказательство. По определению первообразной:

$$F' = f$$

По дистрибуции производной:

$$(F + C)' = f \implies F + C \text{ — первообразная для } f\ \square$$

Пусть Φ — другая первообразная для f:

$$\begin{cases} \Phi' = f \\ F' = f \end{cases} \implies \Phi' - F' = (\Phi - F)' = f - f = 0$$

По условию постоянства функции:

$$\Phi - F = C \iff \Phi = F + C\ \blacksquare$$

Неопределённый интеграл — множество всех первообразных функции f:

$$F(x) + C =: \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

f — подынтегральная функция;
$f(x)\,\mathrm{d}x$ — подынтегральное выражение;
x — переменная интегрирования;
C — постоянная интегрирования.

Свойства

Операция интегрирования *дистрибутивна* относительно *сложения*, а также:

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \quad \mathrm{d}\left(\int F(x)\,\mathrm{d}x\right) = F(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\left(\int F(x)\,\mathrm{d}x\right)' = F(x) + C \quad \int kF(x)\,\mathrm{d}x = k\int F(x)\,\mathrm{d}x,\ k \neq 0$$

Интегрирование по частям. Пусть $u\mathrm{d}v$ — подынтегральная функция. Тогда справедливо:

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

Доказательство. По «дистрибуции» производной:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

По определению интеграла:

$$\int (u'v + uv')\mathrm{d}x = uv + C \iff \int u'v\mathrm{d}x + \int uv'\mathrm{d}x = uv + C$$

По определению дифференциала:

$$\begin{cases} \mathrm{d}u = u'\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = v'\mathrm{d}x \end{cases} \implies \int v\mathrm{d}u + \int u\mathrm{d}v = uv + C \iff$$

$$\iff \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u \ \blacksquare$$

Дифференциальное уравнение

Дифференциальным называется уравнение с неизвестной функцией под знаком *производной* или *дифференциала*.

Интегральная кривая — график решения дифференциального уравнения.

Метод Фурье. Решение дифференциального уравнения $y' = \varphi(x)\psi(y)$ удовлетворяет условию: *(Ж. Фурье)*

$$\left[\begin{array}{ll} \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)} = \int \varphi(x)\mathrm{d}x, & \psi(y) \neq 0 \\ y = y_0, & \psi(y_0) = 0 \end{array}\right.$$

Доказательство. По условию:

$$y' = \varphi(x)\psi(y) \iff \frac{y'}{\psi(y)} = \varphi(x),\ \psi \neq 0$$

Возьмём интеграл от обеих частей уравнения:

$$\frac{y'\mathrm{d}x}{\psi(y)} = \varphi(x)\mathrm{d}x \implies \int \frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)} = \int \varphi(x)\mathrm{d}x \ \square$$

По условию:

$$\psi(y_0) = 0 \implies (y_0)' = 0 \implies 0 = 0 \blacksquare$$

Площадь плоской фигуры

Вложеннной *в фигуру F* называется такая фигура P, которая целиком лежит внути F:

$$S_*(F) \text{ — } \textit{внутренняя площадь } F$$

Объемлющей *фигуру F* называется такая фигура Q, которая целиком содержит F:

$$S^*(F) \text{ — } \textit{внешняя площадь } F$$

Квадрируемой называется такая фигура F, у которой множества $S_*(F)$ и $S^*(F)$ имеют единую точную границу:

$$\sup S_*(F) = \inf S^*(F) = S(F) \text{ — } \textit{площадь } F$$

Спрямляемой называется кривая с *конечной* длиной.

Свойства квадрируемости

> **Критерий квадрируемости.** Фигура F квадрируема тогда и только тогда, когда:
>
> $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ P \subseteq F \subseteq Q : S(Q) - S(P) < \varepsilon$$

Доказательство $\implies$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$.

По определению точных границ множеств $S(P)$, $S(Q)$:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon/2 > 0 \ \exists \ P \subseteq F : S(F) - S(P) < \varepsilon/2 \\ \forall \varepsilon/2 > 0 \ \exists \ Q \supseteq F : S(Q) - S(F) < \varepsilon/2 \end{cases} \implies$$

$$\implies S(Q) - S(P) < \varepsilon \blacksquare$$

Доказательство $\impliedby$. По определению точных верхних границ множеств $S(P)$, $S(Q)$:

$$S(Q) - S(P) < \varepsilon \implies 0 \leq \inf_{Q \supseteq F} S(Q) - \sup_{P \subseteq F} S(P) < \varepsilon$$

По определению квадрируемой фигуры:

$$\inf S^*(F) - \sup(S_*(F)) = 0 \iff \inf S^*(F) = \sup S_*(F) \implies$$
$$\implies F \text{ квадрируема} \blacksquare$$

> **Признак квадрируемости.** Если граница фигуры F — спрямляемая кривая, то F квадрируема.

Доказательство. По условию:

$$S^*(F) - S_*(F) \text{ — S фигуры, объемлющей границу } F$$

По определению точных границ множеств $S^*(F)$, $S_*(F)$:

$$\inf S^*(F) - \sup S_*(F) = S_{\text{гр}} = 0 \implies F \text{ квадрируема} \blacksquare$$

> **Аддитивность.** Пусть F_1 и F_2 квадрируемы, причём $F_1 \cup F_2 = F$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Тогда F *тоже* квадрируема.

Доказательство. По условию:

$$F = F_1 \cup F_2 \implies S_{\text{гр}} \le S_{\text{гр}1} + S_{\text{гр}2}$$

По критерию квадрируемости:

$$S_{\text{гр}1} + S_{\text{гр}2} = 0 \implies S_{\text{гр}} = 0 \implies F \text{ квадрируема} \blacksquare$$

> Пересечение квадрируемых фигур *квадрируемо*.

Доказательство *аналогично* предыдущему свойству.

Определённый интеграл

Разбиение отрезка $[a;b]$ — конечное упорядоченное множество $X \subseteq [a;b]$, причём $a, b \in X$.

Частичным называется отрезок, составленный из *соседних* элементов разбиения:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \text{ — \textit{длина} частичного отрезка } [x_{k-1}; x_k]$$

Интегральная сумма функции f на $[a;b]$ имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,\ \xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$$

Нижней (верхней) называется такая интегральная сумма, в которой ξ_k *минимизирует (максимизирует)* значение f на частичном отрезке.

Определённый интеграл — предел интегральной суммы:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k =: \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Криволинейная трапеция — подграфик неотрицательной и непрерывной функции на $[a;b]$.

> **Геометрический смысл.** Пусть f задаёт криволинейную трапецию T на $[a;b]$. Тогда её площадь равна:
>
> $$S(T) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Доказательство. По признаку квадрируемости:

$$f \in \mathbb{C}[a;b] \implies T \text{ квадрируема}$$

По определению интегральных сумм:

$$S^*(T) \text{ — \textit{верхняя} сумма;} \quad S_*(T) \text{ — \textit{нижняя} сумма}$$

По определению квадрируемости:

$$S^*(T) - S_*(T) < \varepsilon \implies \inf S^*(T) = \sup S_*(T) = S(T) \implies$$
$$\implies \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = S(T)$$

По определению определённого интеграла:

$$S(T) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \blacksquare$$

> Непрерывность $\implies$ интегрируемость.

Доказательство. Когда-нибудь...

Оценка определённого интеграла. Пусть функция f на отрезке $[a;b]$ принимает значения из $[m;M]$. Тогда:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

Очевидным является *геометрическое* доказательство через площади фигур.

Свойства

Операция интегрирования *дистрибутивна* относительно *сложения*, а также:

$$\int_a^a F(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a F(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b kF(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x,\ k \ne 0$$

Аддитивность. Пусть $f \in [a;b],\ c \in [a;b]$. Тогда верно:

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c F(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b F(x)\,\mathrm{d}x$$

Интегрировать можно *неравенства*, если они непрерывны на области интегрирования:

$$\begin{cases} f,g \in \mathbb{C}[a;b] \\ f(x) \le g(x) \end{cases} \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Интеграл с переменным пределом

Теорема о среднем. Пусть $f \in \mathbb{C}[a;b]$. Тогда верно:

$$\exists \xi \in [a;b]\colon\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

Доказательство. По оценке определённого интеграла:

$$m \le f(x) \le M \implies m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a) \implies$$

$$\implies m \le \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} \le M,\ a \ne b$$

По теореме о промежуточном значении:

$$\exists \xi \in [a;b]: f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \ \blacksquare$$

Интеграл с переменным верхним пределом — функция вида:

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ x \in [a;b]$$

> Пусть функция f непрерывна в окрестности точки $t = x$. Тогда в x функция $S(x)$ дифференцируема, причём
>
> $$S'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x).$$

Доказательство. По геометрическому смыслу определённого интеграла:

$$\Delta S = S(x+\Delta x) - S(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

По теореме о среднем:

$$\exists \xi \in [x; x+\Delta x]: \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x$$

По предельному переходу:

$$\Delta S = f(\xi)\Delta x \iff \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(\xi) \implies \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) \implies$$
$$\implies S'(x) = f(x) \ \blacksquare$$

Формула Ньютона—Лейбница

> Пусть F — первообразная для функции f. Тогда верно:
>
> $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Доказательство. По свойству интеграла с переменным верхним пределом:

$$S'(x) = f(x) \implies S(x) = F(x) + C \text{ — первообразные}$$

По определению определённого интеграла:

$$S(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0 \implies C = -F(a) \implies S(x) = F(x) - F(a)$$

По условию:

$$x = b \implies S(b) = F(b) - F(a) \iff \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \blacksquare$$

Длина кривой

> Пусть график функции f — кривая. Тогда её длина на промежут
> $[a;b]$ равна:
> $$L = \int_a^b \sqrt{1 - f'^2(x)}\mathrm{d}x$$

Доказательство. Пусть задано *разбиение* $X \subseteq [a;b]$.

Тогда длина хорды в точках $x_k,\ x_{k-1}$ равна:

$$l_k = \sqrt{(\Delta f_k)^2 + (\Delta x_k)^2} = \Delta x_k \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta f_k}{\Delta x_k}\right)^2}$$

По теореме Лагранжа:

$$\exists \xi \in [x_{k-1}; x_k] : l_k = \Delta x_k \sqrt{1 - f'^2(\xi)}$$

По предельному переходу:

$$L \geq \sum_{k=0}^{n} \Delta x_k \sqrt{1 - f'^2(\xi)} \implies L = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \Delta x_k \sqrt{1 - f'^2(\xi)}$$

По определению определённого интеграла:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \Delta x_k \sqrt{1 - f'^2(\xi)} = \int_a^b \sqrt{1 - f'^2(x)}\mathrm{d}x \implies$$

$$\implies L = \int_a^b \sqrt{1 - f'^2(x)}\mathrm{d}x \blacksquare$$

Среднее значение

> **Теорема.** *Среднее значение* $f(x)$ на $[a;b]$ равно:
> $$f_{\text{avg}}(x) = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$$

Доказательство. По определению среднего значения:

$$f_{\text{avg}}(x) \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)}{n}, \quad \xi_k \in \Delta x_k$$

Допустим, что все частичные отрезки *равны*:

$$n = \frac{b-a}{\Delta x} \implies f_{\text{avg}}(x) \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x}{b-a}$$

По предельному переходу:

$$f_{\text{avg}}(x) = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} \blacksquare$$

> **Следствие.** *Среднее значение* $f(x)$ на $[a;b]$ равно угловому коэффициенту прямой, которая проходит через точки $\langle a, f(a)\rangle$ и $\langle b, f(b)\rangle$.

Это видно, если расписать утверждение выше по *формуле Ньютона-Лейбница*.

Поиск с возвратом

Поиск с возвратом — метод нахождения решений задачи полным перебором допустимых расстановок элементов конечного множества:

- в качестве *частичного решения* используется пустое упорядоченное множество M, которое расширяется до полного по одному элементу за операцию;
- если решение *полное* или *не удовлетворяет условию*, алгоритм приступает к другому частичному решению.

Пусть $T_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $T_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ — корневые деревья.

Кандидат для $v \in V_1$ — элемент множества

$$C_v := \{w \mid w \in V_2,\ \mathrm{depth}_v = \mathrm{depth}_w\} \cup \{\lambda\}.$$

Возвратное дерево для T_1 и T_2 — такое дерево $T = \langle V, E \rangle$ с мнимым корнем, что:

$$\begin{cases} M \subseteq V_1 \times W \ \textit{(упорядочено, биективно)} \\ \left.\begin{array}{l} W = [\mathrm{root}_T, \dots, w] \setminus \{\mathrm{root}_T\} \subseteq V_2 \cup \{\lambda\} \subseteq V \\ \mathrm{children}_w = \emptyset \end{array}\right\} \mathrm{I} \\ \left.\begin{array}{l} \forall \langle w_1, w_2 \rangle \subseteq W \ \mathrm{order}(w_1) < \mathrm{order}(w_2) \\ w_1, w_2 \neq \lambda \end{array}\right\} \mathrm{II} \\ \left.\forall \langle v_i, w_j \rangle \in M \ w_j \in C_{v_i} \right\} \mathrm{III} \end{cases}$$

I — всякая простая цепь возвратного дерева от корня до листа без корня соответствует *уникальному* отображению T_1 в T_2;

II — индекс узлов одной простой цепи от корня до листа без корня *строго возрастает*;

III — всякий узел простой цепи от корня до листа без корня является *кандидатом* для соответствующего узла T_1.

Итерация построения полного решения M для условия P:

$$\begin{cases} \forall c \in C_{W.\text{last}()}\ W := W \cup \{c\} \\ T(M) := M \text{ — частичное решение} \\ M \wedge P(M) \wedge T(M) \neq \emptyset \implies \text{расширить M} \\ M \wedge P(M) \wedge T(M) = \emptyset \implies \text{следующее M} \end{cases}$$

Дерево ветвей и границ для T_1 и T_2 — такое возвратное дерево для T_1 и T_2, что $P := P \wedge R$, где:

$$R(M_i) = \begin{cases} \alpha_{\min} = \emptyset \implies \alpha_{\min} := \max \\ \alpha_{\min} \geq \gamma(M_i) \implies \text{True}, \alpha_{\min} := \gamma(M_i) \\ \alpha_{\min} < \gamma(M_i) \implies \text{False} \end{cases}$$

«Разделяй и властвуй»

«**Разделяй и властвуй**» — метод рекурсивного нахождения решений задачи:

— задача делится на меньшие, *независимые* друг от друга подзадачи, пока они не будут сведены к *тривиальным*;

— решения тривиальных подзадач *комбинируются* в единое к исходной задаче.

Пусть $T_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $T_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ — корневые деревья, $A_1 = T_{1W_1}$, $A_2 = T_{2W_2}$, $B_1 = T_1 \backslash A_1$, $B_2 = T_2 \backslash A_2$ — их поддеревья:

$$\begin{cases} W_1 = \{v_m \in V_1 \mid \text{order}(v_m) < \text{order}(v)\} \\ W_2 = \{w_n \in V_2 \mid \text{order}(w_p) < \text{order}(w)\} \\ v := \text{last}_{v_i},\ w := \text{last}_{w_k} \end{cases}$$

Дерево «разделяй и властвуй» для T_1 и T_2 — такое ордерево $T = \langle V, E \rangle$ с вершинами вида $v_i v_j w_k w_l$, что:

$$\begin{cases} v_i, v_j \in V_1,\ w_k, w_l \in V_2 \\ \text{root}_T = v_1 v_{n_1} w_1 w_{n_2}\ (T_1 \to T_2) \end{cases}$$

Шаг рекурсивного построения решения M:

$$\begin{cases} v_i = v_j,\ w_k = w_l \implies v_i \mapsto w_k, \text{комбинировать} \\ v_i \neq v_j,\ w_k = w_l \implies A_1 \to T_2\ (B_1 \to \lambda) \\ v_i = v_j,\ w_k \neq w_l \implies T_1 \to A_2\ (\lambda \to B_2) \\ v_i \neq v_j,\ w_k \neq w_l \implies \begin{cases} A_1 \to A_2 \text{ или } A_1 \to T_2 \\ B_1 \to B_2 \text{ или } T_1 \to A_2 \end{cases} \end{cases}$$

Динамика

Динамическое программирование — метод рекурсивного нахождения решений задачи:

— задача делится на меньшие, *зависимые* друг от друга подзадачи, пока они не будут сведены к *тривиальным*;

— решения тривиальных подзадач *комбинируются* в единое к исходной задаче.

Мемоизация *(«сверху вниз»)* — кеширование и повторное использование ранее подсчитанных результатов.

Табуляция *(«снизу вверх»)* — заполнение кеша на основе тривиальных подзадач.

Лучшее решение выбирается из матрицы лучших решений его подграфов *(у них по рекурсии есть свои матрицы)*:

$$\begin{matrix} \langle v_i, w_k \rangle & \langle v_i, w_k w_{k+1} \rangle & \cdots & \langle v_i, w_k \ldots w_l \rangle \\ \langle v_i v_{i+1}, w_k \rangle & \langle v_i v_{i+1}, w_k w_{k+1} \rangle & \cdots & \langle v_i v_{i+1}, w_k \ldots w_l \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_i \ldots v_j, w_k \rangle & \langle v_i \ldots v_j, w_k w_{k+1} \rangle & \cdots & \langle v_i \ldots v_j, w_k \ldots w_l \rangle \end{matrix}$$

$$\begin{cases} v \in V_1,\ w \in V_2 \\ \text{depth}_v = \text{depth}_w \\ \{v_i, \dots, v_j\} = \text{children}_v \\ \{w_k, \dots, w_l\} = \text{children}_w \\ \langle v_i \dots v_j, w_k \dots w_l \rangle \sim \gamma_{\min}(G_1 \to G_2) \\ G_1 = T_{1W_i} \cup \dots \cup T_{1W_j} \\ G_2 = T_{2W_k} \cup \dots \cup T_{2W_l} \\ \forall s \in \{i, \dots, j\}\ \text{root}_{T_{1Ws}} = v_s \\ \forall t \in \{k, \dots, l\}\ \text{root}_{T_{2Wt}} = w_t \end{cases}$$

Алгоритм табуляции занимает $\mathcal{O}(n_1 n_2)$ места, используя $\mathcal{O}(n_1 n_2)$ времени.

Уравнение Беллмана

Введём задачу на оптимизацию вида:

$$\underset{d \in \Delta}{\text{opt}}\{H(d)\} \qquad \begin{aligned} d &\text{ — выбор;} \\ \Delta &\text{ — допустимое множество;} \\ H &\text{ — целевая функция одной переменной.} \end{aligned}$$

Оптимум — оптимальное значение целевой функции *(выбор d^* оптимизирует H)*:

$$H^* := H(d^*) \qquad d^* := \arg \underset{d \in \Delta}{\text{opt}}\{H(d)\}$$

Пусть H — целевая функция нескольких переменных.

Оптимум такой задачи можно найти либо *полным перебором*, либо *последовательным принятием решений*:

$$\begin{aligned} H^* &= \underset{\langle d_1, \dots, d_n \rangle \in \Delta}{\text{opt}} \{H(d_1, \dots, d_n)\} \\ &= \underset{d_1 \in D_1}{\text{opt}} \{ \underset{d_2 \in D_2}{\text{opt}} \{ \dots \{ \underset{d_n \in D_n}{\text{opt}} \{h(d_1, \dots, d_n)\}\} \dots \}\} \\ &= \underset{d_1 \in D_1}{\text{opt}} \{H(d_1, d_2^*(d_1), \dots, d_n^*(d_1))\} \end{aligned}$$

$\Delta = D_1 \times \dots \times D_n$ — пространство решений;

$D_n(d_1, \dots, d_{n-1})$ — множество решений, которое зависит от предыдущих $\langle d_1, \dots, d_{n-1} \rangle$ решений;

$d_i^*(d_1, \dots, d_{i-1})$ — локальный выбор d, оптимизирующий H.

Распределение ресурсов

В задаче на *оптимальное распределение ресурсов* требуется разделить ограниченное число ресурсов на множество их потребителей, у которых есть стоимость.

Общая формула:

$$f(k, m) = \min_{d \in \{0, \dots, m\}} \{C(k, d) + f(k+1, m-d)\}$$

Жадные алгоритмы

Список жадных алгоритмов:

— перевод числа из десятичной системы счисления в m-ичную:
  > задача о размене монет.
— что-то...

Бинарный поиск

Бинарный поиск на отрезке $[a; b]$ — метод поиска корня монотонной функции $f \in \mathbb{C}[a; b]$.

Правым называется такой бинарный поиск, который ищет *верхнюю границу* монотонной функции *(максимальное x, при котором есть корни)*:

$$mid = \left\lceil \frac{l+r}{2} \right\rceil$$

Левым называется такой бинарный поиск, который ищет *нижнюю границу* монотонной функции *(минимальное x, при котором есть корни)*:

$$mid = \left\lfloor \frac{l+r}{2} \right\rfloor$$

> **Задача.** Один принтер печатает лист раз в x мин., другой — раз в y мин. За сколько минут они напечатают N листов? *(задача имеет решение за константу)*

Идея. Решим обратную задачу бинарным поиском по j:

— сколько листов напечатают оба принтера за j мин.?

Значит, ищем такое минимальное j, что верно:

$$\left\lfloor \frac{j}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{j}{y} \right\rfloor \geq N$$

> **Задача.** На прямой есть N стойл. Максимизировать минимальное расстояние между $K < N$ коровами.

Идея. Решим обратную задачу бинарным поиском по j:

— расположить K коров так, чтобы минимальное расстояние между ними было не больше j

Коровы расположим *жадно*: в самых левых свободных стойлах, расстояние между которыми *не больше* j.

> **Задача.** Дано N отрезков различных длин. Получить разрезаниями K равных отрезков максимальной длины.

Идея. Решим обратную задачу бинарным поиском по j:

— разрезать N отрезков разных длин на K отрезков длины j

Значит, ищем такое максимальное j, что верно:

$$\sum_{i=1}^{N} \left\lfloor \frac{a_i}{j} \right\rfloor \geq K$$

> **Задача.** Есть N дипломов $h \times w$. Минимизировать сторону квадратной стены, на которой они будут размещены в целых координатах без поворотов.

Идея. Решим обратную задачу бинарным поиском по j:

— Разместить N дипломов на квадратной стене со стороной j

Разместим дипломы *жадно*: в самых верхних левых свободных координатах, иначе спустимся на уровень ниже.

> **Задача.** Исследовательские модули с защитой толщины d — прямоугольники $(a+2d) \times (b+2d)$. Максимизировать d для размещения модулей в поле $w \times h$.

Идея. Решим обратную задачу бинарным поиском по j:

— Разместить модули размеров $(a + 2j) \times (b + 2j)$ в поле $w \times h$.

Разместим модули *жадно*: в самых верхних левых свободных координатах, иначе спустимся на уровень ниже.

> **Задача.** Два лесоруба срубают A и B деревьев в день, но отдыхают каждый K-ый и M-ый дни соответственно. За сколько дней они управятся с X деревьями?

Идея. Решим обратную задачу бинарным поиском по j:

— сколько деревьев лесорубы срубят за j дней?

Значит, ищем такое минимальное j, что верно:

$$(A+B)j - A\left\lfloor\frac{j}{K}\right\rfloor - B\left\lfloor\frac{j}{M}\right\rfloor \geq X \iff$$
$$A\left(j - \left\lfloor\frac{j}{K}\right\rfloor\right) + B\left(j - \left\lfloor\frac{j}{M}\right\rfloor\right) \geq X$$

> **Задача.** В классе учатся N человек различного роста. Составить R бригад по C человек так, чтобы максимальная разница в росте одной бригады была минимальна.

Идея. Решим обратную задачу бинарным поиском по j:

— составить R бригад по C человек с максимальной разницей в росте j.

Выберем бригады *жадно*: отсортируем школьников по росту, выберем самую левую бригаду, удовлетворяющую условиям.

Продолжим цикл, пока не *наберётся* нужное число бригад, либо школьники не *закончатся*.

> **Задача.** Бетси может делать печенье за t_C ед. времени и булочку за t_M. Заказ выполняется не дольше C_i. Бетси может улучшить свою печь за монету, чтобы она производила печенье или булочку на единицу быстрее *(за положительное время)*. Минимизировать количество монет, чтобы выполнить все заказы.

Идея. Пусть в оптимальном случае было затрачено w монет, и печь производит печенье за x ед. времени, а булочку — за y.

По условию задачи составим систему:

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq t_C \\ 1 \leq y \leq t_M \\ x + y = t_C + t_M - w \\ Ax + By \leq C \end{cases}$$

Из двух последних выражений следует:

$$(A-B)x \leq C - B(t_C + t_M - w)$$

При делении неравенства на $A - B$ с учётом знака получим одну границу x *(случай $A = B$ обрабатывается отдельно)*.

Из первых трёх выражений найдём другую границу для x:

$$\begin{cases} 1 \le x \le t_C \\ t_C - w \le x \le t_C + t_M - w - 1 \end{cases}$$

Задача решается бинарным поиском по w: если множество допустимых x непустое, то w подходит.

> **Задача.** Найти медиану таблица умножения $N \times N$.

Идея. Пусть $f(x)$ — количество натуральных чисел, не больших x.

По определению медианы m:

$$f(m) \ge \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$$

Количество элементов строки, кратных её номеру i и не больших медианы m, равно:

$$j_{\max} = \left\lfloor \frac{m}{i} \right\rfloor$$

Задача решается бинарным поиском по m.

Тернарный поиск

Бинпоиск по производной?

Унимодальной на отрезке $[a; b]$ называется такая функция $f \in \mathbb{C}[a; b]$, которая имеет на нём *один экстремум*.

Тернарный поиск — метод поиска экстремума унимодальной функции.

> **Теорема.** Вдоль прямой дороги расположились друзья в некоторых координатах. Каждый из них может идти с максимальной скоростью v_i. Найти минимальное время встречи всех друзей в одной точке с точностью до 10^{-6}.

Идея. Переформулируем задачу:

— найти координату x_0 места встречи, до которой все друзья дойдут за минимальное время

Тернарным поиском по x_0 с $\varepsilon < 10^{-6}$ найдём минимальное время:

$$v_i = \frac{|x_0 - x_i|}{\tau_i} \implies \tau_i = \frac{|x_0 - x_i|}{v_i} \implies \tau = \max\{\tau_i \mid \forall i\}$$

Структуры данных

Стек

> **Задача.** Вычислить область самого большого прямоугольника в гистограмме, который находится на общей базовой линии.

Идея. Введём два фиктивных столбца: один отрицательной высоты *(в начало)*, другой — нулевой *(в конец)*.

Пока гистограмма *строго возрастает*, добавлять столбцы в стек.

В противном случае, если высота i-го столбца $\leq$ вершины стека:

1) Убирать из стека столбцы, пока гистограмма не станет *строго возрастающей*.
2) Считать площадь прямоугольника от $i-1$ до последнего убранного столбца x:

$$S = h_x(i - x)$$

3) По достижении строго возрастающей последовательности добавить в стек столбец с параметрами:

— h текущего столбца
— x последнего удалённого столбца

Ближайшее меньшее

> **Задача.** Дан массив чисел. Для каждого элемента x найти такое ближайшее число y слева, что $x < y$.

Идея. Введём вспомогательный массив и *стек*, в который постепенно будем помещать все элементы массива, большие вершины.

Если элемент массива a_i меньше вершины стека a_j, то для элемента i ближайшим большим числом будет являться вершина стека.

За счёт вспомогательного массива после линейной обработки исходного массива можно добиться *константного* времени.

Префиксная сумма

Префиксная сумма — это...

> **Задача.** Дан массив целых чисел. Найти подотрезок с максимальной суммой.

Идея. Составим массив префиксных сумм π.

Начнём перебирать правую границу r искомого отрезка, так что остаётся найти величину:

$$\min\{\pi_r - \pi_i \mid i \in [0; r)\}$$

Заметим, что оптимальный вариант левой границы искомого отрезка — *глобальный минимум* на интервале $[0; r)$.

Таким образом, задача решается за *линейное* время.

Стек рекордов

Стек рекордов — монотонная подпоследовательность массива, для любых элементов которой верно:

$$i \leq j,\ a_i < a_j \quad \text{или} \quad i \leq j,\ a_i > a_j$$

> **Задача.** Дан массив чисел. Найти минимумы для всех отрезков длины K.

Идея. Введём стек минимумов, в который будем добавлять элементы по правилу:

1) Элемент $>$ вершины $\implies$ добавить в стек
2) Элемент $\leq$ вершины $\implies$ убирать верхние элементы до достижения возрастающей последовательности

Если последний элемент стека не входит в K-отрезок, то убрать его *(для этого лучше подходит очередь)*.

Дерево отрезков

Дерево отрезков — бинарное дерево для массива arr, на котором можно реализовать массовые ассоциативные операции f за *логарифмическое время*:

1) Листья — элементы массива arr
2) Родитель содержит *результат операции* от своих детей
3) Корень содержит *результат операции* от arr на $[0; n)$

Два вида:

— ДО сверху — рекурсивный вариант
— ДО снизу — итеративный вариант

Одиночное обновление

Построение. По принципу *«разделяй и властвуй»*:

```
def build(v, l, r):
  if l == r:
    verts[v].val = arr[l]
  else:
    mid = (l + r) // 2
    build(2 * v, l, mid)
    build(2 * v + 1, mid + 1, r)
    verts[v].val = f(verts[2 * v].val, \
                     verts[2 * v + 1].val)
```

Обновление. По принципу *«разделяй и властвуй»*:

```
def update(v, l, r, idx, val):
  if l == r:
    verts[v].val = val
  else:
    mid = (l + r) // 2
    if idx <= mid:
      update(2 * v, l, mid, idx, val)
    else:
      update(2 * v + 1, mid + 1, r, idx, val)
    verts[v].val = f(verts[2 * v].val, \
```

```
                       verts[2 * v + 1].val)
```

Запрос. По принципу *«разделяй и властвуй»*:

```
def get(v, l, r, L, R):
  if L > R:
    return # neutral element
  if l == L and r == R:
    return verts[v].val
  mid = (l + r) // 2
  return f(get(2 * v, l, mid, L, min(R, mid)), \
           get(2 * v + 1, mid + 1, r, \
                                  max(L, mid+1), R))
```

Массовое обновление

Обновление. По принципу *«разделяй и властвуй»* с применением *отложенных операций*:

```
def update(v, l, r, L, R, push):
  if L > R:
    return
  if l == L and r == R:
    verts[v].val = push
  else:
    mid = (l + r) // 2
    update(2 * v, l, mid, L, min(R, mid), push)
    update(2 * v + 1, \
           mid + 1, r, max(L, mid + 1), R, push)
```

Запрос. По принципу *«разделяй и властвуй»* — это для одного элемента, а мне нужна сумма на отрезке!!!!!!!!:

```
def get(v, l, r, idx):
  if l == r:
    return verts[v].val
  mid = (l + r) // 2
  if idx <= mid:
    return verts[v].val + get(2 * v, l, mid, idx)
```

```
else:
  return verts[v].val + get(2 * v + 1, \
                            mid + 1, r, idx)
```

Алгоритмы сортировки

Merge Sort

Сортировка слиянием основана на принципе *«разделяй и властвуй»*:

1) Выбрать опорный элемент mid.
2) Разделить массив на две части:

$0 \dots mid - 1$	$mid \dots N - 1$

3) Запустить сортировку в обеих частях.
4) Объединить два отсортированных массива *(2P-метод)*.

Инверсия

Инверсия — такая пара чисел a_i, a_j из массива a, что:

$$i < j, \quad a_i > a_j$$

Разделённой называется такая *инверсия*, которая относится к двум элементам *разных* массивов.

Модификация *сортировки слиянием* считает количество инверсий в массиве:

— алгоритм обрабатывает элемент из отсортированного правого массива;

— к счётчику инверсий добавляется количество необработанных элементов отсортированного левого массива *(разделённые инверсии)*.

Quicksort

Быстрая сортировка основана на принципе *«разделяй и властвуй»*:

1) Выбрать опорный элемент $pivot$.
2) Разделить массив на три части:

$< pivot$	$pivot$	$> pivot$

3) Запустить сортировку в крайних частях.

Алгоритм реализации:

```
def quick_sort(low, high):
```

```
  i, j = low, high
  pivot = arr[(i + j) // 2]
  while i <= j:
    while arr[i] < pivot:
      i += 1
    while arr[j] > pivot:
      j -= 1
    if i <= j:
      arr[i], arr[j] = arr[j], arr[i]
      i += 1
      j -= 1
  if j > low:
    quick_sort(low, j)
  if i < high:
    quick_sort(i, high)
```

> **Задача.** Дано $N \leq 10^5$ чисел длины $[1; 100]$. Составить из них конкатенацией максимальное число. *(одно из них точно начинается не с нуля)*

Идея. Отсортировать числа быстрой сортировкой с *компаратором*:

```
def compare(num1, num2):
  if str1 + str2 > str2 + str1:
    return True
  return False
```

k-Порядковая статистика

***k*-Порядковая статистика** — элемент линейно упорядоченного множества, который стоит на k-ом месте.

Quickselect — модификация *быстрой сортировки*, которая ищет k-порядковую статистику за $\mathcal{O}(n)$:

— сортируется лишь та крайная часть, в которую входит k.

Radix Sort

Поразрядная сортировка предназначена для больших объектов *(чисел, строк)*, которые можно разбить на *разряды*:

— LSD *(least significant digit)* — от младших к старшим разрядам;
— MSD *(most significant digit)* — от старших к младшим разрядам.

Алгоритм LSD-сортировки:

> yes

Алгоритм MSD-сортировки:

> yes

Теория графов

Ориентированный граф

Граф *(ориентированный граф или орграф)* — упорядоченная пара $G = \langle V, E \rangle$, где

V — непустое множество *вершин* *(узлов)*;
E — конечное множество *рёбер*, $E \subseteq V \times V$.

Порядок графа — число его вершин.

Размер графа — число его рёбер.

Ребро $e = \langle v,\ w \rangle$ задаётся вершинами $v,\ w$, где v — начало ребра, а w — его конец; вершины $v,\ w$ являются *соседними*.

Входящая *валентность* вершины v графа G — число рёбер, чей конец в v:

$$\operatorname{indeg}(v) = |\{\langle u, v \rangle \mid \langle u, v \rangle \in E\}|$$

Исходящая *валентность* вершины v графа G — число рёбер, чьё начало в v:

$$\operatorname{outdeg}(v) = |\{\langle v, u \rangle \mid \langle v, u \rangle \in E\}|$$

Валентность вершины v графа G — сумма входящей и исходящей валентностей вершины:

$$\deg(v) = \operatorname{indeg}(v) + \operatorname{outdeg}(v)$$

> **Свойство.** Пусть $G = \langle V, E \rangle$ — граф с n вершинами и m рёбрами. Тогда:
>
> $$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{indeg}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{outdeg}(v_i) = m$$

Подграф $G = \langle V, E \rangle$, *порождённый* на $W \subset V$, — граф вида

$$G_W = \langle W, E \cap W \times W \rangle.$$

Неориентированный граф

Неорграф *(неориентированный граф)* — такой граф $G = \langle V, E \rangle$, что:

$$\forall v, w \in V \ \langle v, w \rangle \in E \implies \langle w, v \rangle \in E$$

Валентность вершины v неорграфа — число рёбер, которые связаны с v.

Кратными называются два и более рёбер, которые образованы *одинаковыми* вершинами.

Последовательность вершин

Путь от вершины v_i до вершины v_j графа G — последовательность вершин или рёбер:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} [v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j] \text{ вершины} \\ [e_i, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_j] \text{ рёбра} \end{array}\right. \\ e_k = \langle v_{k-1}, v_k \rangle, k \in \{i+1, \dots, j\} \end{cases}$$

Закрытым называется такой путь, где начальная и конечная вершины совпадают.

Цепь — путь без повтора рёбер.

Простая цепь — путь без повтора рёбер и вершин *(кроме, возможно, первой и последней вершины)*.

Цикл — закрытая простая цепь.

Паросочетание — множество попарно несмежных рёбер.

Эйлеровой называется такая последовательность вершин, которая проходит по всем *рёбрам* графа.

> **Критерий эйлеровости.** Связный неорграф *эйлеров*, если валентность всех его вершин чётна.

> **Критерий полуэйлеровости.** Связный неорграф *полуэйлеров*, если:
>
> — валентность всеъ вершин *чётна*;
> — ноль или две вершины имеют *нечётную* валентность.

Ациклическим *(лесом)* называется граф без циклов.

Виды графов

Полным называется такой неорграф $G = \langle V, E \rangle$, что:

$$E = V \times V$$

Однородным называется такой неорграф, у которого *валентности* всех вершин равны.

Транспонированным называется такой граф G^T по отношению к G, у которого все рёбра *инвертированы*.

Взвешенным называется такой граф, в котором каждому ребру сопоставляется число — *вес, длина, стоимость*.

Связность

Связным называется:

— *неорграф*, между любыми вершинами которого есть маршрут;

— *орграф*, у которого аналогичный неорграф *связный*.

Сильно связным называется такой *орграф* $G = \langle V, E \rangle$, что:

$$\forall v, w \in V \ \exists \begin{cases} \text{маршрут от } v \text{ до } w \\ \text{маршрут от } w \text{ до } v \end{cases}$$

Точка сочленения — вершина, удаление которой делает граф *несвязным*.

Мост — ребро, удаление которого делает граф *несвязным*.

Компонента связности *неорграфа* — связный подграф, который не входит в состав такого же подграфа.

Компонента сильной связности *орграфа* — сильно связный подграф, который не входит в состав такого же подграфа.

Дерево

Свободное дерево T — компонента связности леса.

Свойство. Пусть $T = \langle V, E\rangle$. Тогда $|E| = |V| - 1$.

Поддерево $T = \langle V, E\rangle$, *порождённое* на $W \subset V$, — дерево вида:

$$T_W = \langle W, E \cap W \times W\rangle$$

Корневое дерево *(ориентированное дерево или ордерево)* — такой орграф, у которого:

— аналогичный неорграф есть свободное дерево;
— есть **корень** — единственная вершина с нулевой входящей валентностью.

Остовное дерево — ациклический связный подграф неорграфа, в который входят все его вершины.

Минимальным (миностовом) называется такое *остовное дерево*, суммарный вес рёбёр которого минимален.

Вершины дерева

Пусть T — корневое дерево, причём $\langle v, w\rangle \in E_T$:

— **родитель** вершины w — это $v =: \mathrm{parent}_w$;
— **ребёнок** вершины v — это $w \in \mathrm{children}_v$.

Корневым называется узел без родителей *(с нулевой входящей валентностью)*.

Листовым называется узел без детей *(с нулевой исходящей валентностью)*.

Сиблинги — вершины с общими родителями.

Уровень вершины v — длина простой цепи от root_T до v:

$$\mathrm{depth}_v \text{ — обозначение}$$

Диаметр дерева T — максимальная длина *(в рёбрах)* кратчайшего пути в T между любыми двумя вершинами.

Рёбра леса

Пусть $G = \langle V, E\rangle$ — лес:

— **обратное** ребро соединяет вершину с её *предком*;

— **прямое** ребро соединяет вершину с её *потомком*;
— **перекрёстное** ребро принадлежит множеству $V \times V \setminus E$.

Способы представления графа

Матрица смежности для $G = \langle V, E \rangle$ — булева матрица V^2, элементы которой равны логическому значению выражения:

$$\langle v, w \rangle \in E \mid v, w \in V$$

Матрица занимает $\mathcal{O}(V^2)$ места; проверка смежности проходит за $\mathcal{O}(1)$.

Список смежности — хеш-таблица вида:

$$\text{вершина} \;\mapsto\; \text{смежные узлы}$$

Список занимает $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ места; проверка смежности проходит за $\mathcal{O}(\operatorname{outdeg}(v))$.

Способы представления дерева

Массив родителей — хеш-таблица вида:

$$v \mapsto \text{children}_v$$

Массив занимает $\mathcal{O}(|V|)$ места; вывод родителя и порядка дерева проходят за $\mathcal{O}(1)$.

«**Первый ребёнок, следующий сиблинг**» — хеш-таблица вида:

$$v \mapsto \langle \text{first}_v, \text{next}_v \rangle$$

Первый в памяти ребёнок узла v — first_v, *последний* — last_v; *следующий* в памяти родственник узла v — next_v.

Массив занимает $\mathcal{O}(|V|)$ места; вывод первого ребёнка, следующего родственника и порядка дерева проходят за $\mathcal{O}(1)$.

Редактирование дерева

К **элементарным операциям** редактирования дерева относятся:

— *удаление* листового узла v с ребром $\langle \text{parent}_v, v \rangle$: $v \mapsto \lambda$;
— *вставка* листового узла v с ребром $\langle \text{parent}_v, v \rangle$: $\lambda \mapsto v$;
— *замещение* вершины v другой вершиной w: $v \mapsto w$.

Пусть $T_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $T_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ — корневые деревья.

Трансформация T_1 в T_2 — упорядоченное биективное отображение $E \subseteq V_1 \cup \{\lambda\} \times V_2 \cup \{\lambda\}$.

Биективное *отображение* T_1 в T_2 — такое $M \subseteq W_1 \times W_2$ для $W_1 \subseteq V_1,\ W_2 \subseteq V_2$, что:

$$\begin{cases} \langle \mathrm{root}_{T_1}, \mathrm{root}_{T_2} \rangle \in M \neq \emptyset \\ \langle \mathrm{parent}_v, \mathrm{parent}_w \rangle \in M \iff \langle v, w \rangle \in M \\ v_2 = \mathrm{next}_{v_1},\ w_2 = \mathrm{next}_{w_1} \iff \langle v_1, w_1 \rangle, \langle v_2, w_2 \rangle \in M \end{cases}$$

Лемма. Пусть M — отображение T_1 в T_2. Тогда:

$$\forall \langle v, w \rangle \in M\ \mathrm{depth}_v = \mathrm{depth}_w$$

Стоимость элементарной операции над T_1 и T_2 задаётся метрикой $\gamma\colon V_1 \cup V_2 \cup \{\lambda\} \times V_1 \cup V_2 \cup \{\lambda\} \to \mathbb{R}_0^+$.

Стоимость трансформации T_1 в T_2 (E) задаётся метрикой:

$$\gamma(E) = \sum_{\langle v,w \rangle \in E} \gamma(v, w)$$

Редакционная дистанция между T_1 и T_2 — функция:

$$\gamma_{\min} = \min(\{\gamma(E) \mid \forall E\})$$

Редакционный граф для T_1 и T_2 — неорграф $G = \langle V, E \rangle$ с вершинами вида vw, $v \in V_1 \cup \{v_0\}$, $w \in V_2 \cup \{w_0\}$ (v_0, w_0 — *мнимые узлы*), рёбра которого определяются по правилу:

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{depth}_{v_{i+1}} \geq \mathrm{depth}_{w_{j+1}} \iff \langle v_i w_j, v_{i+1} w_j \rangle \in E\ (v_{i+1} \mapsto \lambda) \\ \mathrm{depth}_{v_{i+1}} = \mathrm{depth}_{w_{j+1}} \iff \langle v_i w_j, v_{i+1} w_{j+1} \rangle \in E\ (v_{i+1} \mapsto w_{j+1}) \\ \mathrm{depth}_{v_{i+1}} \leq \mathrm{depth}_{w_{j+1}} \iff \langle v_i w_j, v_i w_{j+1} \rangle \in E\ (\lambda \mapsto w_{j+1}) \end{array}\right.$$

Лемма. Пусть G — редакционный граф для T_1 и T_2. Тогда маршрут P от $v_0 w_0$ до $v_{n_1} w_{n_2}$ задаёт трансформацию:

$$E = \{\langle v_{i+1}, \lambda \rangle \mid \langle v_i w_j, v_{i+1} w_j \rangle \in P\} \cup \ldots$$
$$\ldots \{\langle v_{i+1} w_{j+1} \rangle \mid \langle v_i w_j, v_{i+1} w_{j+1} \rangle \in P\} \cup \ldots$$
$$\ldots \{\langle \lambda, w_{j+1} \rangle \mid \langle v_i w_j, v_i w_{i+1} \rangle \in P\}$$

Алгоритм редактирования дерева занимает $\mathcal{O}(n_1 n_2)$ места, используя $\mathcal{O}(n_1 n_2)$ времени.

Обход дерева

Обход дерева $T = \langle V, E \rangle$ — биективное отображение:

$$\operatorname{order}\colon V \to \{1, \ldots, |V|\}$$

Прямым называется такой обход дерева $T = \langle V, E \rangle$, что:

$$\begin{cases} \operatorname{order}(\operatorname{root}_T) = 1 \\ \operatorname{order}(\operatorname{first}_v) = \operatorname{order}(v) + 1,\ \operatorname{first}_v \neq \emptyset \\ \operatorname{order}(\operatorname{next}_v) = \operatorname{order}(v) + \operatorname{size}(v),\ \operatorname{next}_v \neq \emptyset \end{cases}$$

Алгоритм прямого обхода дерева занимает линейное место, используя линейное время.

Динамическое программирование

Модель динамики

Целевой называется функция, у которой нужно найти *экстремум* *(оптимальное значение)*.

Состояние системы зависит от конечного числа *параметров* *(часто от одного или двух)*.

> **Принцип оптимальности**. Оптимальное решение зависит лишь от текущего состояния и цели, а не от предыстории. *(Р. Беллман)*

Сертификат *решения* — последовательность управляющих шагов, которые оптимизируют целевую функцию.

Типы задач на динамику:

— оптимизация целевой функции;
— подсчёт количества вариантов решения;
— составление сертификата решения.

Подходы динамики

Мемоизация — *рекурсивный* подход динамики, при котором подсчитанные результаты *кешируются* и используются повторно *(вычисления отложены)*.

Табуляция — *итеративный* подход динамики, при котором кеш заполняется сразу, на основе тривиальных подзадач.

Также пояснить про одномерный и двумерный кеш, определение кеша?

Задача о рюкзаке

Задача о рюкзаке — множество задач *комбинаторной оптимизации*, которые сводятся к выбору подмножества:

— с максимальной *стоимостью*
— с соблюдением ограничения на *вес*

Типы задач о рюкзаке:

— 0/1 *(каждый предмет в одном экземпляре)*
— неограниченный *(каждый предмет бесконечен)*
— задача размена монет
— разбиение N-множества *(balanced / unbalanced)*

> **Задача.** Дан рюкзак вместимостью $C \le 10^9$ и N вещей, которые имеют *вес* и *стоимость*. Максимизировать стоимость рюкзака, если $\sum c_i \le 10^4$.

Идея. Из-за ограничений на вместимость *обратим логику*.

Пусть $f(c, i)$ — минимальный суммарный вес первых i вещей, которые стоят не менее c.

Очевидно, что $f(0, i) = 0$ для любых i.

Тогда верно рекуррентное соотношение:

$$f(c, i) = \min\{f(c, i-1),\ f(c - c_{i-1}, i-1) + w_{i-1}\}$$

> **Задача.** Дан набор N гирек, которые имеют *вес*. Можно ли разбить гирьки на две кучи, равные по *количеству гирек* и *массе*?

Идея. Пусть $f(w, n, i)$ — возможность составить кучу массой w из n гирек, используя первые i гирек из набора.

Очевидно, что $f(0, 0, i) = 1$ для любых i.

Тогда верно рекуррентное соотношение:

$$f(w, n, i) = f(w, n, i-1) \vee f(w - w_{i-1}, n-1, i-1)$$

Ответ будет лежать в $f(\frac{\sum w_i}{2}, \frac{N}{2}, N)$.

> **Задача.** Дан набор N гирек, которые имеют *вес*. Можно ли разбить гирьки на три кучи, равные по *массе*?

Идея. Пусть $f(w_1, w_2, i)$ — возможность составить две кучи массами w_1 и w_2, используя первые i гирек из набора.

Очевидно, что $f(0, 0, i) = 1$ для любых i.

Тогда верно рекуррентное соотношение:

$$f(w_1, w_2, i) = \left[\begin{array}{l} f(w_1, w_2, i-1) \\ f(w_1 - w_{i-1}, w_2, i-1) \\ f(w_1, w_2 - w_{i-1}, i-1) \end{array}\right.$$

Ответ будет лежать в $f(\frac{\sum w_i}{3}, \frac{\sum w_i}{3}, N)$.

Счастливые билеты

> **Задача.** Дано натуральное число n. Найти количество $2n$-значных счастливых билетов.

Идея. Пусть D_n^k — количество n-значных чисел с суммой цифр k.

Легко проверить, что счастливых билетов ровно D_{2n}^{9n}:

$$\overline{a_1 \dots a_n b_1 \dots b_n} \mapsto \overline{a_1 \dots a_n (9-b_1) \dots (9-b_n)}$$

Очевидно, что $D_0^0 = 1, D_0^k = 0,\ k > 0$.

Тогда D_n^k можно выразить через $(n-1)$-значное число, добавив любую цифру j:

$$D_n^k = \sum_{j=0}^{9} D_{n-1}^{k-j}$$

> **Задача.** Пусть натуральное число *красивое*, если сумма квадратов его цифр — полный квадрат. Найти количество красивых чисел в диапазоне $[1; N]$.

Идея. Пусть D_n^k — количество n-значных чисел с суммой квадратов цифр k.

Тогда верна рекуррентная формула:

$$D_n^{k+j^2} \mathrel{+}= D_{n-1}^k,\ j \in \{0, \dots, 9\}$$

Заметим, что для фиксированного n верно:

$$1 \le k \le 81n$$

Для каждого *полного квадрата* $k \in [1; 81n]$ найдём все числа из диапазона $[1; N]$, опираясь на определение D_n^k:

— в ответ пойдёт $D_{n-1}^{k-d^2}$, $d < d_1$ — первая цифра числа;

— в ответ пойдёт $D_{n-2}^{k-d^2}$, $d < d_2$ — вторая цифра числа;

— в ответ пойдёт $D_{n-i-1}^{k-d^2}$, $d < d_i$ — i-ая цифра числа.

LIS

> **Задача.** Дана последовательность целых чисел. Найти длину её наибольшей возрастабщей подпоследовательности *(longest increasing subsequence, LIS)*.

Идея. Что-то...

Числа Фибоначчи

> **Задача.** На прямой дощечке вбиты гвозди. Соединить пары гвоздей нитками так, чтобы к каждому гвоздю была привязана хотя бы одна нитка, а суммарная длина всех ниток была минимальна.

Идея. Пусть $f(i)$ — суммарная длина ниток для $1 \dots i$ гвоздей.

Определим базовые случаи:

$$f(2) = x_2 - x_1 \qquad f(3) = x_3 - x_1$$

Добавим один гвоздь к текущим:

1) Оптимально соединяем первые $i-1$ гвоздей, а последний гвоздь — с $i-1$-ым:

$$f(i-1) + x_i - x_{i-1}$$

2) Оптимально соединями первые $i-2$ гвоздей, а последний гвоздь — с $i-1$-ым:

$$f(i-2) + x_i - x_{i-1}$$

Тогда значение $f(i)$ — *минимум* среди всех случаев.

Наибольшая подматрица

> **Задача.** В прямоугольной таблице $N \times M$ клетки раскрашены в белый и чёрный цвета. Найти наибольшую по площади прямоугольную область белого цвета.

Идея. Пусть $f(x, k)$ — наибольший номер строки из отрезка $[-1; x]$, на которой в k-ом столбце есть клетка *чёрного* цвета.

Для хранения этой динамики достаточно *одномерного* массива длины N.

Так, для прямоугольника уже определены *две границы*: верхняя и нижняя.

Пусть $\langle i, j \rangle$ — правая нижняя граница прямоугольника.

По условию, нужно расширить прямоугольник влево до *первой* клетки $\langle k, j \rangle$, для которой верно:

$$f(k, j) > f(i, j)$$

За счёт линейного алгоритма поиска *ближайшего большего* за константу конечный алгоритм станет *линейным*.

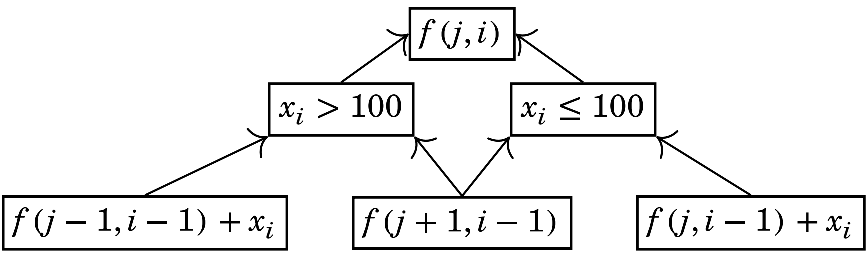
Двумерная динамика

> **Задача.** Дан массив x прейскуранта кафе на N дней. За чек свыше 100 единиц выдаётся купон на бесплатный обед. Минимизировать суммарный чек.

Решение. Пусть $f(j, i)$ — минимальная суммарная стоимость обедов на i-й день включительно при оставшихся j купонах.

Очевидно, что $f(0, 0) = 0$.

Используем принцип оптимальности на префиксе:



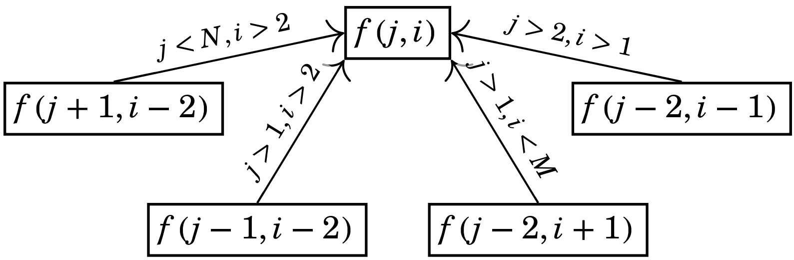
Минимизируя f, ответ будет лежать в $f(i, N)$ при определённом i.

> **Задача.** Дана шахматная доска $N \times M$. Сколькими способами конь из $(1,1)$ может добраться до (N,M), если он ходит из клетки (j,i) в клетки $(j+2,i-1)$, $(j+2,i+1)$, $(j+1,i+2)$, $(j-1,i+2)$.

Решение. Пусть $f(j,i)$ — число способов добраться до клетки (j,i) из начальной.

Очевидно, что $f(0,0) = 1$.

Используем принцип оптимальности на префиксе:



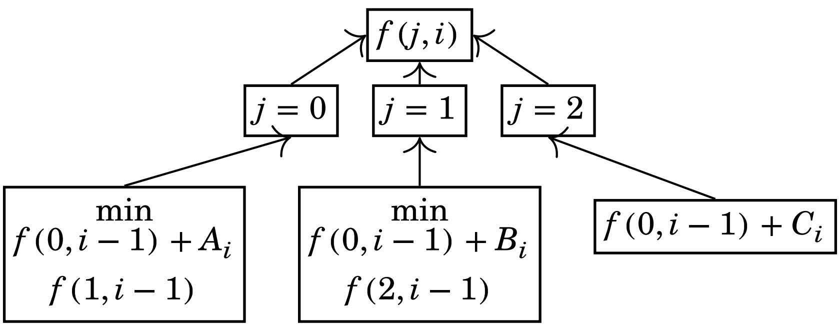
Суммируя f, ответ будет лежать в $f(N,M)$.

> **Задача.** Очередь из N человек покупает билеты в театр. i-ый человек покупает 1 билет за A_i времени, 2 билета — за B_i, 3 билета — за C_i. Минимизировать время.

Решение. Пусть $f(j,i)$ — минимальное время, за которое обслужат i-го человека, причём у него останется j билетов.

Очевидно, что $f(0,0) = 0$.

Используем принцип оптимальности на префиксе:



Минимизируя f, ответ будет лежать в $f(0, N-1)$.

Алгоритмы на графах

Обход в глубину

Обход в глубину *(Depth-First Search, DFS)* — метод, при котором граф обходят сначала по детям, потом по сиблингам.

Алгоритмы:

— поиск эйлерового пути, цикла
— тест ацикличности
— поиск мостов, точек сочленения
— топологическая сортировка
— построение компонент связности:
  > обыкновенных *(грядки, водостоки)*
  > сильных *(алгоритм Косараджу, конденсация)*
— 2-SAT
— алгоритм Куна

> **Маркировка.** Когда нужно найти *циклы*, вершины маркируются в зависимости от типа графа:
>
> — неорграф $\implies$ *бинарные* метки
> — орграф $\implies$ *тернарные* метки

Обход в ширину

Обход в ширину *(Breadth-First Search, BFS)* — метод, при котором граф обходят сначала по сиблингам, потом по детям.

Алгоритмы:

— алгоритм Кана
— проверка графа на двудольность
— поиск кратчайших рёберных путей

Нет циклов $\implies$ не требуется массив *visited*.

Также были задачи на потоки. Рассмотреть их!

Поиск эйлерового пути

Алгоритм поиска эйлерового *цикла*:

```python
if is_eulerian(graph): #1
  ecirc = graph.get_ecirc(v) #2
else:
  ecirc = -1

def get_ecirc(v): # DFS
  ecirc = list()
  for n in edges[v]:
    if edges[v][n] > 0:
      edges[v][n] -= 1
      ecirc += get_ecirc(n)
  return ecirc + [v] #3
```

1) Проверить граф на *эйлеровость*.
2) Начать с любой вершины v.
3) Если дан орграф, ответ нужно *инвертировать*.

Алгоритм поиска эйлерового *пути*:

```python
if is_semi_eulerian(graph): #1
  epath = graph.get_epath(v) #2
else:
  epath = -1

def get_epath(v): # DFS
  epath = list()
  for n in edges[v]:
    if edges[v][n] > 0:
      edges[v][n] -= 1
      epath += get_epath(n)
  return epath + [v] #3
```

1) Проверить граф на *полуэйлеровость*.
2) Начать с вершины нечётной степени v.

   НО: если дан орграф, выбрать вершину большей *исходящей* валентности.
3) Если дан орграф, ответ нужно *инвертировать*.

Применяется в **задачах**:

— китайский почтальон;
— домино, восстановление строки.

Топологическая сортировка

Топологическая сортировка — упорядочивание вершин ориентированного леса согласно *частичному порядку*, который задан рёбрами орграфа.

Алгоритм Тарьяна — реализация через *DFS*:

```
def topo_sort(v): # DFS
  vertices[v].visited = 1
  stack = list()
  for n in vertices[v].adjacent:
    if not vertices[n].visited:
      stack += topo_sort(n)
  return stack + [v]
```

Алгоритм Кана — реализация через *BFS*:

```
def topo_sort(queue=deque()): # BFS
  for v in vertices: #1
    if vertices[v].indegree == 0:
      queue.append(v)
  order = list()
  while queue:
    q = queue.popleft()
    order.append(q)
    for n in vertices[q].adjacent_out:
      vertices[n].indegree -= 1
      if vertices[n].indegree == 0: #2
        queue.append(n)
  return order
```

1) Найти *корни* графа, добавить их в очередь.
2) Если какая либо из соседних вершин стала *корнем*.

Применяется в **задачах**:

— лексикографическая сортировка;
— топологическое маркирование;
— тест ацикличности.

> **Задача.** В игре есть N уровней, соединённых M телепортами. Сколько есть способов добраться от первого уровня до N-го? *(телепорты не образуют циклов)*

Идея. Представим уровни как вершины, а телепорты как рёбра графа.

Пусть каждая вершина маркирована числом путей, исходящих от первой вершины *(оно не всегда равно входящей валентности)*.

Запустим алгоритм Кана из первой вершины, и при обработке ребёнка очередной вершины будем добавлять к его маркировке родителькую.

Ответ к задаче — значение маркировки вершины N.

> **Задача.** Требуется выполнить N курсов. Есть M требований вида *«курс a должен быть выполнен до курса b»*. Составить, если возможно, порядок прохождения курсов.

Идея. Представим курсы как вершины, а требования как рёбра графа.

Проверим, что граф *ацикличен*: иначе решение составить невозможно.

Запустим алгоритм Кана из корневой вершины — полученная последовательность удовлетворяет условию.

> **Задача.** Леви нужно добраться от города 1 до N, но он хочет это сделать через наибольшее количество промежуточных городов. Составить, если возможно, такой маршрут.

Идея. Представим города как вершины, а рейсы как рёбра графа.

Проверим, что граф *ацикличен*: иначе решение составить невозможно.

Пусть каждая вершина маркирована максимальным путём, исходящих от первой вершины.

Запустим алгоритм Кана из первой вершины, и при обработке ребёнка очередной вершины будем добавлять к его маркировке максимальный путь из родительских с инкрементом.

Ответ к задаче — значение маркировки вершины N.

Алгоритм Косараджу

Алгоритм поиска компонент сильной связности:

```
reverse = graph.transpose() #1
order = reverse.topo_sort() #2
mark = 0
for v in order[::-1]: #3
  if not graph.vertices[v].visited:
    mark_component(v, mark)
    mark += 1

def mark_component(v, mark): # DFS
  vertices[v].visited = 1
  vertices[v].mark = mark
  for n in vertices[v].adjacent:
    if not vertices[n].visited:
      mark_component(n, mark)
```

1) Построить *транспонированный* граф *reverse*.
2) Применить *топологическую сортировку* к *reverse*.
3) Применить *DFS* на *graph* в обратном порядке топологической сортировки:

   цикл поиска в глубину ≡ сильная компонента связности

2-SAT

Алгоритм решения:

1) Перевести CNF в INF.
2) Построить граф импликаций.

3) Найти компоненты сильной связности в графе.
4) Проверить, что для любой вершины x графа справедливо:

$$c[x] \neq c[\neg x]$$

5) Если требуется вывести ответ, то воспользоваться формулой:

$$x = \begin{cases} \text{true}, & c[x] < c[\neg x] \\ \text{false}, & c[x] > c[\neg x] \end{cases}$$

Поиск мостов

Алгоритм поиска мостов на неорграфе:

```
def get_bridges(v, parent=-1): # DFS
  vertices[v].visited = 1
  time += 1
  vertices[v].ord = time #1
  vertices[v].min = time
  bridges = set()
  for n in vertices.adjacent:
    if n == parent: #2
      continue
    if vertices[n].visited: #3
      vertices[v].min = min(vertices[v].min, \
                            vertices[n].ord)
    else: #4
      bridges |= get_bridges(n, v) #5
      vertices[v].min = min(vertices[v].min, \
                            vertices[n].min)
      if vertices[n].min > vertices[v].ord and \
         parent != -1: #6
           bridges.add((v, n))
  return bridges
```

1) Запись текущего порядка захода в вершину.
2) Если $\langle v, n \rangle$ — ребро в *обратную сторону*.
3) Если $\langle v, n \rangle$ — *обратное ребро*.
4) Если $\langle v, n \rangle$ — *ребро дерева*.

5) Мост может быть отмечен *несколько раз* за алгоритм.
6) Критерий моста:

$$[\langle v, neigh\rangle \text{ — мост}] = \begin{cases}\text{true}, & \min[neigh] > \text{ord}[v] \\ \text{false}, & \min[neigh] \leq \text{ord}[v]\end{cases}$$

Поиск точек сочленения

Алгоритм поиска точек сочленения на неорграфе:

```
def get_cuts(v, parent=-1): # DFS
  vertices[v].visited = 1
  time += 1
  vertices[v].ord = time #1
  vertices[v].min = time
  children, cuts = 0, set()
  for n in vertices.adjacent:
    if n == parent: #2
      continue
    if vertices[n].visited: #3
      vertices[v].min = min(vertices[v].min, \
                            vertices[n].ord)
    else: #4
      children += 1
      cuts |= get_cuts(n, v) #5
      vertices[v].min = min(vertices[v].min, \
                            vertices[n].min)
      if vertices[n].min >= vertices[v].ord and \
         parent != -1: #6
           cuts.add(v)
  if children > 1 and parent == -1:
    cuts.add(v)
  return cuts
```

1) Запись текущего порядка захода в вершину.
2) Если $\langle v, n\rangle$ — ребро в *обратную сторону*.
3) Если $\langle v, n\rangle$ — *обратное ребро*.
4) Если $\langle v, n\rangle$ — *ребро дерева*.

5) Вершина может быть отмечена *несколько раз* за алгоритм.
6) Критерий точки сочленения:

$$[v \text{ — т. сочленения}] = \begin{cases} \text{true}, & \min[neigh] \geq \text{ord}[v] \\ \text{false}, & \min[neigh] < \text{ord}[v] \end{cases}$$

Алгоритм Куна

Алгоритм поиска максимального паросочетания на двудольном графе:

```
for v in vertices.part: #1
  if has_ichain(v):
    null_all_visited(vertices)

matching = dict() # empty == None
def has_ichain(v): # DFS
  if vertices[v].visited:
    return False
  vertices[v].visited = 1
  for n in vertices[v].adjacent:
    if matching[n] == None or \
       has_ichain(matching[n]): #2
         matching[n] = v
         return True
  return False
```

1) Рассматриваются все вершины *одной доли* двудольного графа.
2) Если пары нет или если есть *увеличивающаяся цепь*.

Алгоритм Дейкстры

Алгоритм Дейкстры ищёт кратчайшие пути из заданной вершины до всех остальных вершин взвешенного графа *(вес рёбер неотрицательный)*.

Наивная реализация за $\mathcal{O}(n^2 + m)$:

```python
def dijkstra(root): # tabulation
  # base (default = INF)
  verts[root].min = 0
  while True:
    # minimization - O(N)
    v = -1
    for i in verts:
      if not verts[i].visited and \
         (v == -1 or verts[i].min < verts[v].min):
           v = i
    if v == -1: # reachable vertices are visited
      break
    verts[v].visited = 1
    # relaxation
    for n in verts[v].adjacent:
      curr_cost = verts[v].min + edges[n][v].cost
      if curr_cost < verts[n].min:
        verts[n].min = curr_cost
        verts[n].parent = v # certificate
```

Кучная реализация за $\mathcal{O}(m \log n)$:

```python
def dijksrta(root):
  # base (default = INF)
  verts[root].min = 0
  queue = [(0, root)]
  heapq.heapify(queue)
  while queue:
    # minimization - O(log N)
    dist, v = heapq.heappop(queue)
    if dist > verts[v].min:
      continue
    # relaxation
    verts[v].visited = True
    for n in verts[v].adjacent:
      if verts[n].visited:
        continue
```

```
      curr_cost = verts[v].min + edges[v][n].cost
      if curr_cost < verts[n].min:
        verts[n].min = curr_cost
        verts[n].parent = v # certificate
        heapq.heappush((verts[n].min, n))
```

Алгоритм A*

Алгоритм A* ищет кратчайший путь между двумя заданными вершинами взвешенного графа на основе *эвристики* *(вес рёбер неотрицательный)*.

Кучная реализация алгоритма за $\mathcal{O}(m \log n)$:

```
def a_star(start, goal):
  # base (default = INF)
  verts[start].min = 0
  queue = [(eur(start), start)]
  heapq.heapify(queue)
  while queue:
    # minimization - O(log N)
    heur, v = heapq.heappop(queue)
    if v == goal:
      break
    if heur != verts[v].heur:
      continue
    # relaxation
    verts[v].visited = True
    for n in verts[v].adjacent:
      if verts[n].visited:
        continue
      curr = verts[v].min + edges[v][n].cost
      if curr < verts[n].min:
         verts[n].min = curr
         verts[n].heur = verts[n].min + heur(n)
         verts[n].parent = v # certificate
         heapq.heappush(queue, (verts[n].heur, n))
```

Кратчайший путь

Волновой алгоритм — да.

Алгоритм Беллмана-Форда — да.

Алгоритм Прима

Алгоритм поиска *миностова*:

```
def prim(start): # greedy
  # base (default = INF)
  verts[start].min = 0
  while True:
    # minimization
    v = -1
    for i in verts:
      if not verts[i].visited and \
         (v == -1 or verts[i].min < v[1]):
           v = i
    if v == -1: # reachable vertices are visited
      break
    verts[v].visited = 1
    if verts[v].parent != -1: # got safe edge
      add_safe_edge(v, verts[v].parent)
    # relaxation
    for n in verts[v].adjacent:
      curr_cost = edges[v][n].cost
      if curr_cost < verts[n].min:
        verts[n].min = curr_cost
        verts[n].parent = v # certificate
```

Структура идентична *алгоритму Дейкстры*.

Disjoint Set Union

Система непересекающихся множеств *(СНМ, или DSU)* — дерево, которое обладает операциями:

— `make_set(v)` — создать новое множество за $\mathcal{O}(1)$

— `find_set(v)` — найти множество элемента за $\mathcal{O}(\log n)$

— `union(v, u)` — объединить два множества за $\mathcal{O}(\log n)$

Создание нового множества:

```
def make_set(v):
  prev[v] = v # tree root
  rank[v] = 0 # tree depth (~log n)
```

Определение множества элемента:

```
def find_set(v): # path compression heurisitc
  if v == prev[v]:
    return v
  return find_set(prev[v])
```

Объединение двух множеств:

```
def unite(v, u):
  v, u = find_set(v), find_set(u)
  if v != u:
    if rank[v] < rank[u]: # rank heurisitc
      v, u = u, v
    prev[u] = v
    if rank[v] == rank[u]:
      rank[v] += 1
```

> **Задача.** Дан взвешенный неорграф $G\langle N, M\rangle$. Цена пути между вершинами — вес его максимального ребра. Найти число пар с мин. ценой пути между ними, равной X.

Идея. Добавим «рёбра» весом $< X$ в СНМ, метрикой которого является *количество вершин*.

Искомое число — суммарная *разница* числа новых и старых связей* при добавлении рёбер весом X *(так исключатся их внутренние связи)*.

* — число пар всех вершин в n-компоненте:

$$S_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

Алгоритм Краскала

Алгоритм Краскала помогает составить *миностов* на основе DSU.

В СНМ хранятся вершины графа, которые объединяются *безопасными рёбрами* в порядке *возрастания веса*.

Безопасным называется ребро, которое соединяет *разные* компоненты связности.

Алгоритм поиска миностова:

```
def kraskal():
  span = list()
  edges.sort()
  for i in range(len(edges)):
    e = edges[i]
    if find_set(e.start) != find_set(e.end):
      union(e.start, e.end)
      span.append(i)
```

> **Задача.** Дан архипелаг из N островов с M мостами. Стоимость постройки моста — *расстояние* между островами. Объединить архипелаг мостами за *минимальную* стоимость.

Идея. Представим архипелаг как несвязный неорграф, который нужно сделать связным.

Сделаем граф полным, добавив все отсутствующие рёбра.

Ответ на задачу — стоимость *миностова*, который можно составить *алгоритмом Краскала*.

Дерево отрезков

Дерево отрезков *(segment tree)* — бинарное дерево, которое обладает операциями:

— `build(arr)` — построить дерево на массиве arr за $\mathcal{O}(n)$

— `get(l, r)` — вернуть $f(arr[l:r])$ за $\mathcal{O}(\log n)$

— `get(i)` — вернуть $f(arr[i])$ за $\mathcal{O}(\log n)$

— `update(i, val)` — обновить $arr[i]$ за $\mathcal{O}(\log n)$

— `update(l, r, val)` — обновить $arr[l:r]$ за $\mathcal{O}(\log n)$

Требования к операции f:

— ассоциативность

— наличие нейтрального элемента $\perp$

Построение дерева *«сверху»*:

```
def build(root, tl, tr):
  if tl + 1 == tr: # we use [tl; tr)
    verts[root].value = arr[tl]
  else:
    tm = (tl + tr) // 2
    build(2 * root, tl, tm)
    build(2 * root + 1, tm, tr)
    verts[root].value = f(verts[2 * v].value, \
                          verts[2 * v + 1].value)
```

Получение значения функции на отрезке:

```
def get(root, tl, tr, ql, qr):
  if [t_l;t_r) ∩ [q_l;q_r) = ∅: # don't go further
    return ⊥
  if [t_l;t_r) ⊆ [q_l;q_r): # subtree is covered
    return verts[root].value
  tm = (tl + tr) // 2
  return f(get(2 * root, tl, tm, ql, qr), \
           get(2 * root + 1, tm, tr, ql, qr))
```

Обновление элемента массива:

```
def update(root, tl, tr, i, val):
  if tl + 1 == tr:
    verts[root] = val
    return
  tm = (tl + tr) // 2
  if i < tm:
    update(2 * root, tl, tm, i, val)
```

```
  else:
    update(2 * root + 1, tm, tr, i, val)
  verts[root].value = f(verts[2 * root].value, \
                        verts[2 * root + 1].value)
```

Несогласованные поддеревья

Отложенной (массовой) называется операция, которая применяется к *подотрезку* массива в дереве отрезков.

Несогласованным называется поддерево, которое хранит в своих вершинах *частичный* результат выполнения отложенной операции.

Проталкивание массовой операции g:

```
def push(root, tl, tr):
  if tl + 1 != tr:
    verts[2 * root] = g(verts[2 * root], \
                        verts[root].diff)
    verts[2 * root + 1] = g(verts[2 * root + 1], \
                            verts[root].diff)
  verts[root].diff = 0
```

Обновление отрезка массива:

```
def update(root, tl, tr, ql, qr, val):
  push(root, tl, tr) # ???
  if [t_l;t_r) ∩ [q_l;q_r) = ∅: # don't go further
    return ⊥
  if [t_l;t_r) ⊆ [q_l;q_r): # subtree is covered
    verts[root].diff = g(verts[root].diff, val)
    return
  push(root, tl, tr) # ???
  tm = (tl + tr) // 2
  update(2 * root, tl, tm, ql, qr)
  update(2 * root + 1, tm, tr, ql, qr)
  verts[root].val = f(g(verts[2 * root].val, \
                        verts[2 * root].diff), \
                      g(verts[2 * root + 1].val, \
```

```
                         verts[2 * root + 1].diff))
```

Получение значения функции на отрезке:

```
def get(root, tl, tr, ql, qr):
  if qr <= tl or tr <= ql: # don't go further
    return ⊥
  if ql <= tl and tr <= qr: # subtree is covered
    return g(verts[root].val, verts[root].diff)
  push(root, tl, tr)
  ans = f(get(2 * root, tl, tm, ql, qr), \
          get(2 * root + 1, tm, tr, ql, qr))
  verts[root].val = f(g(verts[2 * root].val, \
                        verts[2 * root].diff), \
                      g(verts[2 * root + 1].val, \
                        verts[2 * root + 1].diff))
  return ans
```

Корневая декомпозиция

Да.

Алгоритмы на строках

Префикс-функция

Собственным называется *префикс*, который не совпадает со всей строкой.

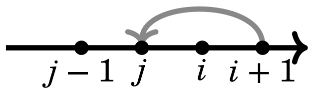
Грань — собственный префикс строки, который равен её суффиксу.

Префикс-функция строки S — массив, i-ый элемент которого равен длине максимальной грани подстроки $S[0 \dots i]$.

Алгоритм реализации *префикс-функции*:

```
prefixes = [0] * len(S)
def fill_prefixes(S, prefixes):
  for i in range(len(S) - 1):
    j = 0
    while j and S[i + 1] != S[j]: # I
      j = prefixes[j - 1]
    if S[i + 1] == S[j]:
      j += 1
    prefixes[i + 1] = j
```

I



Цикл смены индекса j идёт до равенства с $S(i+1)$ или до границ индексации.

Алгоритм КМП

> **Задача.** Даны строки $text$ и $search$. Найти позиции всех вхождений $search$ в $text$.

Идея. Образовать новую строку конкатенацией:

$$search + \# + text$$

Вычислить *префикс-функцию* от новой строки: индексы элементов, которые численно равны длине $search$, будут ответом.

Алгоритм *онлайновый*...

Вхождения префиксов

> **Задача.** Дана строка S. Посчитать для каждого префикса S, сколько раз он встречается в S.

Идея. Вычислить префикс-функцию от S. Затем составить отдельный массив $occur$ по принципу:

1) Посчитать для каждого значения π, сколько раз оно встречалось в π.
2) Посчитать *динамику*: вхождения большего префикса i добавить к наибольшему собственному суффиксу этого префикса $prefixes[i-1]$.

```
fill_prefixes()
for i in range(len(S)):
  occur[prefixes[i]] += 1
for i in range(len(S) - 1, 0, -1):
  occur[prefixes[i - 1]] += occur[i]
```

Учёт различных подстрок

> **Задача.** Дана строка S. Посчитать количество её различных подстрок.

Идея. Добавим один символ в конец неполной строки: появятся новые подстроки, которые оканчиваются в новом символе. Нужно найти *уникальные* среди них.

Инвертируем строку, чтобы символ стал префиксом. Тогда число уникальных подстрок равно числу элементов π с нулевым значением:

$$\operatorname{len}(S) - \pi_{\max}$$

Аналогично можно дописывать символы в начало или удалять символы с конца или с начала.

Сжатие строки

> **Задача.** Дана строка S. Найти такую строку наименьшей длины, что S можно представить в виде конкатенации её копий.

Идея. Пусть $n = \operatorname{len}(S)$, $k = n - \pi[n-1]$. Тогда верно:

$$k \mid n \implies k \text{ — длина искомой строки}$$

Иначе S *невозможно* сжать.

Z-функция

Блок строки S — подстрока S, которая равна её собственному префиксу.

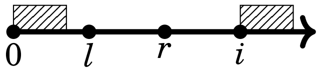
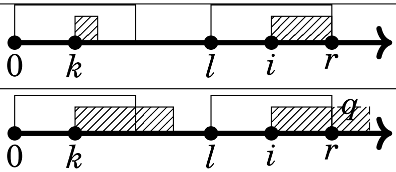
Z-функция строки S — массив, i-ый элемент которого равен длине максимального блока с началом в i.

Алгоритм реализации *z-функции*:

```
def get_block(S, l, r):
  idx = 0
  while S[l + idx] == S[r + idx]:
    if r + idx < len(S):
      break
    idx += 1
  return idx

blocks = [0] * len(S)
def fill_blocks(string, blocks):
  l, r = 0, 0
  for i in range(len(S)):
    if i > r: # I
      value = get_block(S, 0, i)
      if value:
        l, r = i, value
    else: # II
      k = i - l
      if blocks[k] < r - i + 1:
```

```
      blocks[i] = blocks[k]
    else:
      blocks[i] = r - i + 1
      l, q = i, get_block(S, blocks[i], r + 1)
      if q:
        blocks[i] += q
        r = i + blocks[i] - 1
```

<table>
<tr><td>I</td><td>
</td><td>Поиск нового блока с позиций 0 и i, обновление l, r при нахождении</td></tr>
<tr><td>II</td><td>
</td><td>Рассмотреть две ситуации</td></tr>
</table>

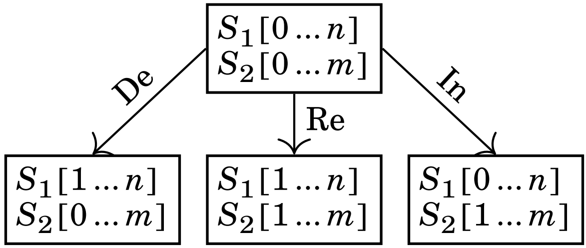
Редакционное расстояние

К **элементарным операциям редактирования** строки относятся:

— *удаление* символа;
— *вставка* символа;
— *замещение* символа.

Редакционное расстояние между строками S_1 и S_2 — минимальное количество *элементарных операций редактирования*, которые нужно совершить, чтобы перевести S_1 в S_2.

Редакционный граф для строк S_1 и S_2 — орграф с вершинами-состояниями строк, у которых есть до трёх рёбер, *эквивалентных* элементарным операциям редактирования:



Алгоритм Вагнера-Фишера

Редакционное предписание — сертификат редакционного расстояния между двумя строками:

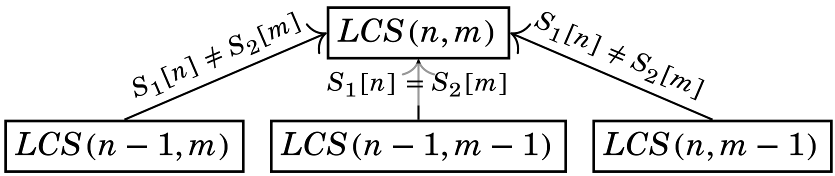
$$\mathbf{D}\text{elete}, \mathbf{I}\text{nsert}, \mathbf{R}\text{eplace}, \mathbf{M}\text{atch}.$$

Алгоритм Вагнера-Фишера находит редакционное предписание по *матрице расстояний*, минимизируя выбор элементарных операций редактирования.

Общая подпоследовательность

> **Задача.** Даны строки S_1 и S_2. Определить длину их наибольшей общей подпоследовательности $LCS(S_1, S_2)$.

Идея. Используем принцип оптимальности на префиксе:



1) $S_1[n] = S_2[m] \implies$ инкрементируем прошлый узел
2) $S_1[n] \neq S_2[m] \implies$ максимизируем прошлые узлы

Алгоритм Нидлмана-Вунша

> **Задача.** Даны две строки S_1 и S_2. Составить их оптимальное выравнивание.

Идея. Составить *матрицу схожести* с весовой функцией:

$+1$ — вес совпадения;
$-\mu$ — штраф за замену;
$-\delta$ — штраф за удаление, вставку.

Задача сводится к нахождению пути с *максимальным весом*.

Скобочная последовательность

Когда-нибудь...

Алгоритм сортировочной станции

Обратная польская нотация — форма записи математических выражений, в которой операторы расположены *после* операндов.

> **Задача.** Дано математическое выражение в инфиксной нотации. Перевести его в постфиксную нотацию.

Идея. Сначала запарсить строку *регулярным выражением*:

$$\backslash d+\backslash.?\backslash d^*|[+\backslash-*/\hat{}()]$$

Затем ввести две структуры: *строку* с ответом и *стек* для операторов. Их заполнение происходит при считывании по токену за раз:

1) Токен — *число* $\Longrightarrow$ добавить к строке.
2) Токен — *бинарный оператор*:
   > если приоритет последнего элемента в стеке $\geq$, чем у токена, то вытолкнуть его из стека в строку *(повторить при необходимости)*;
   > добавить токен в стек.
3) Токен — *открывающая скобка* $\Longrightarrow$ добавить в стек.
4) Токен — *закрывающая скобка* $\Longrightarrow$ вытолкнуть все операторы до «(» из стека в строку, а «(» удалить.

Для поддержки унарных операторов ввести флаги *next_unary* и *is_unary*.

DP по цифрам

> **Задача.** Найти количество двоичных последовательностей из n элементов без k единиц подряд.

Идея. Пусть $f(x)$ — количество двоичных последовательностей из x элементов без k единиц подряд.

Определим базовые случаи:

$$f(0) = 2^0 \qquad f(k-1) = 2^{k-1}$$
$$f(1) = 2^1 \qquad f(k) = 2^k - 1$$

Рассмотрим случаи, когда к последовательности дописывается одна цифра:

$$011\ldots010 + 0 = \underbrace{011\ldots010}_{f(x-1)\ \text{seq.}}0$$

$$011\ldots010 + 1 = \underbrace{011\ldots010}_{f(x-1)\ \text{seq.}}1$$

Но в конце предыдущей последовательности может находиться $k-1$ единиц, поэтому исключим её:

$$\underbrace{011\ldots010}_{f(x-k-1)\ \text{seq.}}0\underbrace{1\ldots1}_{k-1}1$$

Значит, конечная рекуррентная формула имеет вид:

$$f(x) = 2f(x-1) - f(x-k-1)$$

> **Задача.** Найти количество n-значных чисел, у которых сумма любых двух соседних цифр — простое число.

Идея. Пусть $f(x,k)$ — количество x-значных чисел, у которых сумма любых двух соседних цифр — простое число, причём они оканчиваются на k.

Определим базовые случаи:

$$f(0,i) = 0 \qquad f(1,j) = 1, \text{но}\, f(1,0) = 0$$

Тогда рекуррентная формула примет вид:

$$f(x,k) = \sum_{j+k\ \text{— простое}} f(x-1,j)$$

> **Задача.** Найти количество строк длины n, которые состоят из символов a, b, c и не содержат подстроки ab.

Идея. Пусть $f(x,k)$ — количество строк длины x, которые оканчиваются символом k.

Определим базовые случаи:

$$f(0,k) = 1 \qquad f(1,k) = 1$$

Тогда рекуррентная формула примет вид:

$$f(x,k) = \begin{cases} f(x-1,a) + f(x-1,c), & k = a \\ f(x-1,a) + f(x-1,b) + f(x-1,c), & k = b,c \end{cases}$$

Ответ — сумма $f(n,a) + f(n,b) + f(n,c)$.

> **Задача.** Назовём число *интересным*, если его цифры идут в неубывающем порядке. Сколько интересных положительн чисел лежит в диапазоне $[L;R]$?

Идея. Пусть $f(x,k)$ — количество x-значных интересных чисел, которые оканчиваются на k *(ведущие нули допускаются)*.

Представим R в виде $\overline{a_1 \ldots a_n}$. Пусть y — интересное число в диапазоне $[1;R]$, причём $y = \overline{b_1 \ldots b_n}$:

1) Если $b_i = a_i$, то $b_{i+1} \le a_{i+1}$.
2) Если $b_i < a_i$, то последующие цифры интересного числа — любые.

Когда-нибудь... возможно...

> **Задача.** Назовём число *гладким*, если его цифры идут в неубывающем порядке. Вывести N-ое гладкое число.

Идея. Пусть $f(x,k)$ — количество x-значных гладких чисел с цифрой k в x-ом разряде *(отсчёт справа)*.

Определим базовый случай:

$$f(1,k) = 1 \text{ (нуль считается)}$$

Тогда рекуррентная формула имеет вид:

$$f(x,k) = \sum_{j=k}^{9} f(n-1,j)$$

Определимся с числом разрядов у искомого числа:

$$\begin{cases} f(n,0) \le N \\ f(n+1,0) > N \end{cases} \implies n+1 \text{ — число разрядов}$$

Каждую цифру N-го числа найдём при помощи цикла:

1) $count + f(x,k) \le N \implies count \mathrel{+}= f(x,k)$
2) $count + f(x,k) > N \implies k$ — x-ая цифра

> **Задача.** Назовём число *плавным*, если две соседние цифры различаются не более, чем на 1. Определить количество плавных натуральных чисел длины n.

Идея. Когда-нибудь...

> **Задача.** Дан диапазон чисел $[L;R]$. Посчитать сумму *цифр* всех его натуральных чисел.

Идея. Пусть $f(x)$ — сумма цифр всех натуральных чисел из диапазона $[1;x]$.

Посчитаем некоторые значения:

$$\begin{aligned}
f(9) &= 1 + \dots + 9 = 45 \\
f(99) &= f(9) + (10 + f(9)) + \dots + (90 + f(9)) \\
&= 10f(9) + 10 \cdot 45 \\
f(999) &= f(99) + (100 + f(99)) + \dots + (900 + f(99)) \\
&= 10f(99) + 100 \cdot 45
\end{aligned}$$

Заметим, что $f(10^k - 1) = 10f(10^{k-1} - 1) + 10^{k-1} \cdot 45$.

Тут ещё добавить пример для $f(328)$...

Допустим, k — количество разрядов числа x, m — его MSD. Тогда искомая величина складывается из двух диапазонов:

$$[1; m10^{k-1} - 1] \cup [m10^{k-1}; x]$$

Посчитаем суммы цифр чисел на них:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= mf(10^{k-1} - 1) + \frac{m(m-1)}{2}10^{k-1} \\
f_2(x) &= m(x \bmod 10^{k-1} + 1) + f(x \bmod 10^{k-1})
\end{aligned}$$

Комбинаторное исчисление

Принципы подсчёта

Правило сложения. Пусть S — конечное множество, образованное объединением подмножеств $S_1, \dots, S_k$. Тогда:

$$|S| = |S_1| + \dots + |S_k|$$

Правило умножения. Пусть S — конечное множество, кото-рое есть декартово произведение $S_1 \times \dots \times S_k$. Тогда:

$$|S| = |S_1| \times \dots \times |S_k|$$

> **Правило вычитания.** Пусть S — искомое подмножество T, $\bar{S}$ — его дополнение. Тогда:
>
> $$S = T \backslash \bar{S}$$

> **Задача.** Сколько существует четырёхзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна цифра 7?

Идея. Пусть T — количество всех четырёхзначных чисел, S — количество четырёхзначных чисел, в записи которых *нет семёрки*.

Тогда искомое множество равно:

$$\bar{S} = T \backslash S$$

Принцип Дирихле. Пусть $S_1, \dots, S_m$ — конечные непересекающиеся множества, причём:

$$|S_1| + \dots + |S_m| = n$$

Тогда существуют такие $i, j \in [1; m] \cap \mathbb{N}$, что:

$$|S_i| \geq \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \quad |S_j| \leq \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$$

Основные понятия

Пусть X — конечное множество, $n := |X|$, $[m] := [1; m] \cap \mathbb{N}$.

Упорядоченное разбиение m элементов из X — соответствие

$$s\colon [m] \to X.$$

Неупорядоченное разбиение m элементов из X — множество S мощностью m с элементами из X.

Перестановка — упорядоченное биективное разбиение:

$$P_n\colon [n] \to X, \quad P_n = n!$$

k*-Размещение* — упорядоченное инъективное разбиение:

$$A_n^k\colon [k] \to X, \quad A_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}}$$

k*-Сочетание* — неупорядоченное инъективное разбиение:

$$C_n^k\colon [k] \to X, \quad C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}, \quad C_n^k \equiv \tbinom{n}{k}$$

Полиномиальная теорема

Полиномиальными называются коэффициенты $\binom{n}{k_1,\dots,k_r}$ многочлена при $k_1,\dots,k_r \in \mathbb{N}_0$:

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_1,\dots,k_r \geq 0 \\ k_1+\dots+k_r=n}} \binom{n}{k_1,\dots,k_r} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$$

Теорема. Для $k_1,\dots,k_r \geq 0$ с $k_1 + \dots + k_r = n$ справедливо:

$$\binom{n}{k_1,\dots,k_r} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{n-k_1-\dots-k_{r-1}}{k_r}$$

$$= \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!}$$

Доказательство. Раскроем скобки:

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{i_1=1}^{r} \dots \sum_{i_n=1}^{r} x_{i_1} \dots x_{i_n}$$

Одночлен $x_1 \dots x_r$ равен $x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$, если среди индексов $i_1,\dots,i_n$ ровно k_j равны $j \in [1;r] \cap \mathbb{Z}$.

Выбор k_j индексов происходит среди $n - k_1 - \dots - k_{j-1}$ оставшихся. Поэтому таких упорядоченных выборок

$\binom{n-k_1-\dots-k_{j-1}}{k_j}$:

$$\binom{n}{k_1,\dots,k_r} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\dots\binom{n-k_1-\dots-k_{r-1}}{k_r} \ \square$$

По формуле сочетаний:

$$\frac{n!}{k_1!\,\cancel{(n-k_1)!}}\cdot\frac{\cancel{(n-k_1)!}}{k_2!\,\cancel{(n-k_1-k_2)!}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{(n-k_1-\dots-k_{r-1})!}}{k_r!(n-k_1-\dots-k_r)}$$

$$= \frac{n!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_r!\cdot 0!} = \frac{n!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_r!} \ \blacksquare$$

Формула Паскаля

Для $n \geq 1$ и $0 \leq k \leq n$ справедливо:

$$\binom{n}{k_1,\dots,k_r} = \sum_{i=1}^{r}\binom{n-1}{k_1,\dots,k_i-1,\dots,k_r}$$

Доказательство. Раскроем скобки:

$$(x_1+\dots+x_r)^n = \sum_{\substack{k_1,\dots,k_r \\ k_1+\dots+k_r=n}}\binom{n}{k_1,\dots,k_r}x_1^{k_1}\dots x_r^{k_r}$$

Раскроем скобки иначе:

$$(x_1+\dots+x_r)^n = (x_1+\dots+x_r)\,(x_1+\dots+x_r)^{n-1}$$

$$=(x_1+\dots+x_r)\cdot\sum_{\substack{k'_1,\dots,k'_r \\ k'_1+\dots+k'_r=n-1}}\binom{n-1}{k'_1,\dots,k'_r}x_1^{k'_1}\dots x_r^{k'_r}$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{\substack{k'_1,\dots,k'_r \\ k'_1+\dots+k'_r=n-1}}\binom{n-1}{k'_1,\dots,k'_r}x_1^{k'_1}\dots x_i^{k'_i+1}\dots x_r^{k'_r}$$

Произведём замену индексов $k_i := k'_i + 1$, $k_j := k'_j$ $(i \neq j)$:

$$(x_1+\dots+x_r)^n =$$

$$\sum_{\substack{k_1,\dots,k_r \\ k_1+\dots+k_r=n-1}} \sum_{i=1}^{r} \binom{n-1}{k_1,\dots,k_i-1,\dots,k_r} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r} \blacksquare$$

Принцип включения-исключения

Пусть $A_1, \dots, A_n$ — конечные множества. Тогда верно:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left|\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right|$$

Доказательство. Пусть $x \in \bigcup_i^n A_i$, причём x содержится в k множествах $A_1, \dots, A_k$.

Левая часть формулы — 1. Докажем, что правая часть тоже:

$\binom{k}{1}$ раз x встречается во множествах мощностью 1;

…

$\binom{k}{k}$ раз x встречается во множествввх мощностью k.

Подставляем биномиальные коэффициенты в формулу:

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \dots + (-1)^{k+1}\binom{k}{k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+1}$$

По определению биномиальных коэффициентов:

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+1} = \binom{k}{0} - \sum_{i=0}^{k} (-1)^i 1^{k-i} = \binom{k}{0} - (1-1)^k = 1 \blacksquare$$

Беспорядок

Беспорядок — перестановка *без инвариантов*:

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Доказательство. Да.

> **Факт.** Из разложения e в ряд Тейлора следует:
> $$D_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rfloor$$

Правило биекции

Пусть $f : X \to Y$ — биективное соответствие, где X, Y — конечные множества. Тогда:

$$|X| = |Y|$$

Задача. *Сколько подмножеств имеет n-множество?*

Решение. Пусть Y — n-множество.

Пусть $\overline{x_1 \dots x_n}$ — бинарная n-строка, где x_i указывает на наличие i-го элемента в произвольном множестве $\mathcal{P}(Y)$.

Пусть $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ — соответствие, где X — множество всех возможных бинарных n-строк. Очевидно, что:

$$f \text{ — биекция} \implies |Y| = |X|$$

По правилу умножения:

$$|X| = 2^n \implies |\mathcal{P}(Y)| = 2^n$$

Ответ: $|\mathcal{P}(Y)| = 2^n$.

Биномиальные коэффициенты

Свойство 1. Для $n \in \mathbb{N}$ и $r \in [0; n] \cap \mathbb{Z}$ верно:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Доказательство. Пусть A — n-множество, из которого нужно выбрать B — r-подмножество.

По определению биномиальных коэффициентов:

$$\substack{\text{число неупорядоченных} \\ \text{выборок } B} = \binom{n}{r}$$

С другой стороны, рассмотрим комплемент $A \setminus B$:

$$\text{число неупорядоченных выборок } A\setminus B = \binom{n}{n-r}$$

Пусть $f : A_1 \to A_2$ — биективное соответствие, $A_1 = A_2 = A$.

Любой элемент $x \in B \subset A_1$ можно сопоставить $x \in A \setminus B \subset A_2$. Значит, числа таких сопоставлений равны:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \blacksquare$$

Свойство 2. Для $n \in \mathbb{N}$ верно:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$$

Доказательство. Пусть A — n-множество, для которого посчитаем $|\mathcal{P}(A)|$.

С одной стороны, $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ по доказанному.

С другой стороны, посчитаем $|\mathcal{P}(A)|$ через биномиальные коэффициенты: есть $\binom{n}{r}$ способов выбрать r-подмножество.

По правилу сложения:

$$|\mathcal{P}(A)| = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \implies \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n \blacksquare$$

Метод шаров и перегородок

Число способов составить r-мультимножество из n-множества равно:

$$\left(\!\binom{n}{r}\!\right) := \binom{n+r-1}{r} = \left(\!\binom{n}{k-1}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right)$$

Доказательство. Для подсчёта числа всех возможных r-мультимножеств введём $n-1$ *перегородок* — считается, что элементы между двумя соседними перегородками равны.

Таким образом, число способов заполнить $n+r-1$ позиций с выбором r шаров *(или вставкой n-1 перегородок)* равно:

$$\binom{n+r-1}{r} \square$$

По формуле Паскаля:

$$\left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-2}{k}$$
$$= \binom{n+k-1}{k} \blacksquare$$

Задача. Посчитать число неотрицательных целых решений

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 22.$$

Решение. Методом полного перебора, $x_4 \in \{0, 1, 2, 3\}$.

По методу шаров и перегородок:

$$\left[\begin{array}{llll} x_4 = 0 & \Longrightarrow \; 3(x_1 + x_2 + x_3) = 22 & \Longleftrightarrow & \text{решений нет} \\ x_4 = 1 & \Longrightarrow \; 3(x_1 + x_2 + x_3) = 15 & \Longleftrightarrow & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_4 = 2 & \Longrightarrow \; 3(x_1 + x_2 + x_3) = 8 & \Longleftrightarrow & \text{решений нет} \\ x_4 = 3 & \Longrightarrow \; 3(x_1 + x_2 + x_3) = 1 & \Longleftrightarrow & \text{решений нет} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left(\!\!\binom{3}{5}\!\!\right) = \binom{7}{5} = 21$$

Ответ: 21 решение.

Правило деления

Пусть $f : X \to Y$ — отображение *k-к-одному*, где X, Y — конечные множества. Тогда:

$$|X| = 4\,|Y|$$

Задача. Сколько существует рассадок 4 рыцарей вокруг стола? Две рассадки эквивалентны, если одну можно получить из другой поворотом.

Решение. Пусть $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ — множество рыцарей, X — множество 4-строк вида $\overline{x_j \dots x_k}$, $1 \le j, k \le 4$, $i \ne j$.

Пусть $f : X \to Y$ — соответствие, где Y — множество всех возможных рассадок для A. Очевидно, что:

$$f\text{ — }\textit{n-к-одному} \implies 4\,|Y| = |X| \iff |Y| = |X|\,/4$$

По правилу умножения:

$$|X| = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_4 = 24 \implies |Y| = 24/4 = 6$$

Ответ: $|Y| = 6$.

Разбиение множеств

Разбиение множества A — его представление в виде k непересекающихся непустых подмножеств:

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} B_i \quad \begin{cases} B_i \neq \emptyset \\ B_i \cap B_j = \emptyset,\ i \neq j \end{cases}$$

Число Белла — количество разбиений n-множества.

Число Стирлинга второго порядка — количество разбиений n-множества на k подмножеств:

$$C(n,k) \equiv \left\{ {n \atop k} \right\} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$

Частные случаи:

$$\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0 \qquad \left\{ {n \atop 1} \right\} = 1 \qquad \left\{ {n \atop n} \right\} = 1 \qquad \left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$$

Доказательство. Да

Материал к ЕГЭ

16 задание

Величина	Название
S	первоначальная сумма долга
B_i	размер долга на конец i-го периода
X_i, x	размер платежа в i-ый период
n	число платёжных периодов
r	учётная ставка *(в %)*
$p = 1 + 0.01r$	повышающий коэффициент

Аннуитетный платёж — долг выплачивается *равными платежами*.

> Уравнение аннуитетного платежа:
> $$p^n S = x\left(\frac{p^n - 1}{p - 1}\right)$$

Дифференцированный платёж — долг *уменьшается равномерно*, при этом платежи в каждый период *разные*.

> Рекуррентные формулы дифференцированного платежа:
> $$\begin{cases} B_i = pB_{i-1} - X_i \\ B_i = \dfrac{n-i}{n}S \end{cases}$$
> X_i образует *арифметическую прогрессию*.