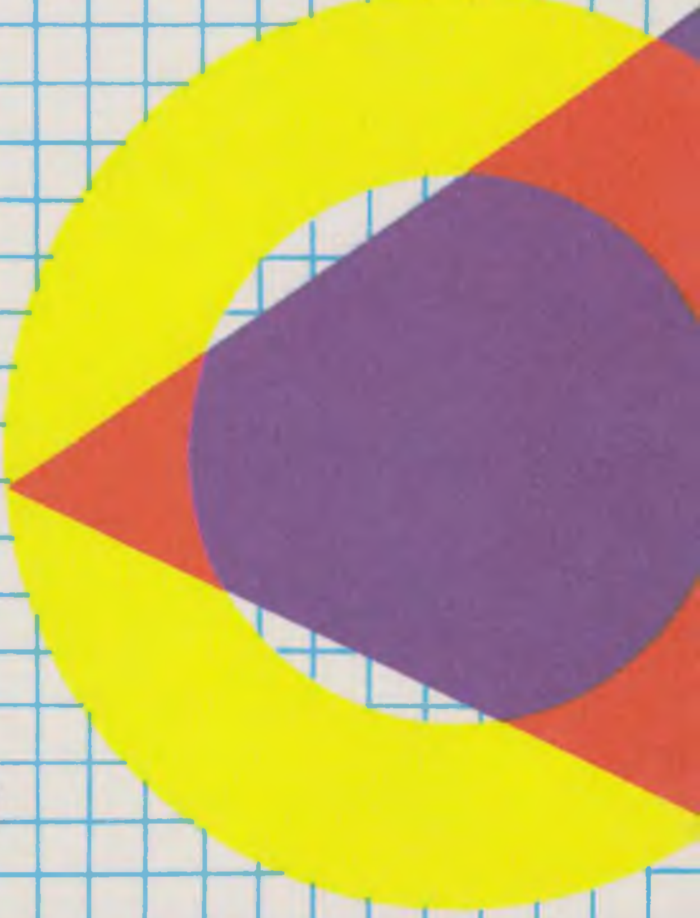
ГЕОМЕТРИЯ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ К ШКОЛЬНОМУ УЧЕБНИКУ

8



ПРОСВЕЩЕНИЕ

ГЕОМЕТРИЯ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ К ШКОЛЬНОМУ УЧЕБНИКУ 8 КЛАССА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ШКОЛ И КЛАССОВ
С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ

ДОПУЩЕНО
МИНИСТЕРСТВОМ ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Москва
«Просвещение»
1996

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72
Г36

Авторы:
Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев,
С. А. Шестаков, И. И. Юдина

Рецензенты:
учитель-методист школы № 1857 Москвы *Е. С. Смирнова,*
старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ
Д. А. Терешин,
учитель школы № 420 Москвы *Б. П. Пигарев*

Г36 **Геометрия:** Доп. главы к шк. учеб. 8 кл.: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.— М.: Просвещение, 1996.— 205 с.: ил.— ISBN 5-09-007089-X.

Настоящее пособие является дополнением к учебнику «Геометрия, 7—9» авторов Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова и др. (М.: Просвещение, 1990 и последующие издания). Оно полностью соответствует программе углубленного изучения математики.

Книга может быть использована также в классах общеобразовательных учреждений для индивидуальной работы с учащимися, проявляющими интерес к математике.

Г $\frac{4306020500—610}{103(03)—96}$ План выпуска 1996 г., № 187 ББК 22.151я72

ISBN 5-09-007089-X

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для школ (классов) с углубленным изучением математики и написано как дополнение к основному учебнику «Геометрия,7—9» Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Э. Г. Позняка, И. И. Юдиной (М.: Просвещение, 1990 г. и последующие издания).

Пособие содержит дополнительные главы к курсу геометрии 8-го класса. Каждой главе основного учебника соответствует дополнительная глава в пособии. В дополнительных главах, как правило, не повторяется материал, изложенный в основном учебнике, но этот материал широко используется, поэтому, прежде чем приступить к изучению той или иной дополнительной главы, учащимся необходимо изучить соответствующую главу основного учебника.

Содержание дополнительных глав расширяет и углубляет геометрические сведения, представленные в главах основного учебника: вводятся новые понятия, рассматриваются новые интересные геометрические факты, дается обоснование некоторых утверждений, которые в рамках основного учебника принимались на основе наглядных представлений либо предлагались в виде задач повышенной трудности.

Так, например, в главе «Четырехугольники» введено понятие характеристического свойства фигуры, рассмотрены характеристические свойства некоторых четырехугольников, в частности, доказано, что характеристическим свойством выпуклого четырехугольника является пересечение его диагоналей. Понятие характеристического свойства фигуры активно используется и в других главах.

В главе «Площадь» введены понятия равносоставленных и равновеликих многоугольников и в связи с этим уделено внимание весьма увлекательным задачам на разрезание многоугольников. Здесь же представлены замечательные задачи о площадях некоторых фигур, расположенных на целочисленной решетке. В главе «Окружность» вводится ряд новых понятий, связанных с окружностью: радикальная ось и радикальный центр окружностей, окружность Аполлония, вневписанные окружности, рассматриваются разнообразные характеристические свойства окружности. В этой главе доказан ряд теорем и даны задачи с решениями о замечательных свойствах окружности, которые не вошли в основной учебник.

Для ряда известных теорем в пособии приведены различные способы доказательства. Например, теорема о точке пересечения медиан треугольника доказана сначала на основе формулы площади треугольника, затем как следствие из теоремы Чевы и, наконец, в главе V с помощью векторов. Указано несколько способов доказательства теоремы Пифагора. Теорема Менелая доказана сначала с использованием теории подобия, а затем с помощью векторов.

В каждой главе по ходу изложения теоретического материала даются задачи с решениями, иллюстрирующие применение тех или иных утверждений. В общей сложности по всем главам таких задач около 40. К каждому параграфу главы даны задачи для самостоятельной работы. Их уровень, как правило, превышает средний уровень задач основного учебника. К этим задачам имеются ответы и указания.

Таким образом, практически по каждой теме, затронутой в основном учебнике, пособие предоставляет учителю и ученикам дополнительные материалы теоретического характера и набор соответствующих задач.

На наш взгляд, пособие может оказаться полезным и в тех классах, где основным учебником по геометрии является учебник А. В. Погорелова «Геометрия, 7—11» (М.: Просвещение, 1990 и последующие издания). Кроме того, отдельные параграфы или пункты пособия могут послужить основой для докладов на математических кружках. Как пример укажем пункт о различных средних в геометрии (среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое, среднее квадратичное) или параграф, посвященный радикальной оси и радикальному центру окружностей.

Мы надеемся также, что наша книга окажется интересной не только для учителей и учеников из классов с углубленным изучением математики, но и для всех читателей, которых привлекает красота геометрии.

Замысел этой книги возник давно, когда еще был жив наш коллега, известный советский математик и педагог Эдуард Генрихович Позняк. Он принимал активное участие в обсуждении вопросов, связанных с написанием дополнительных глав к основному учебнику геометрии, сделал много интересных предложений. Мы считаем его полноправным соавтором этой книги и посвящаем наш труд его светлой памяти.

Авторы

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

§ 1. Выпуклые и невыпуклые четырехугольники

1. Ломаная. Многоугольник. Рассмотрим фигуру, составленную из отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. Точки A_1 и A_n могут быть различными (рис. 1, *а*) и могут совпадать (рис. 1, *б*). Будем считать, что соседние отрезки не лежат на одной прямой. (В противном случае их можно объединить в один отрезок.) Такая фигура, составленная из отрезков, называется *ломаной*, а отрезки, из которых составлена ломаная, называются ее *звеньями*. Если точки A_1 и A_n различные, то говорят, что ломаная соединяет точки A_1 и A_n, а если точки A_1 и A_n совпадают, то ломаная называется *замкнутой*. Два соседних звена ломаной имеют общий конец. Ломаная называется *простой*, если ее несоседние звенья не имеют общих точек. Ломаные на рисунках 1, *а* и 1, *б* простые, а на рисунке 1, *в* — непростая ломаная.

Простая замкнутая ломаная называется *многоугольником*. Такая ломаная разделяет плоскость на две части — внутреннюю и внешнюю области многоугольника. На рисунке 2 внутренняя область пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ заштрихована. Простую замкнутую ломаную вместе с внутренней областью также называют многоугольником. Отрезок, соединяющий любые две несоседние вершины, называется *диагональю* многоугольника.

2. Выпуклые и невыпуклые многоугольники. *Многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.* Любой треугольник является выпуклым, а многоугольники с четырьмя

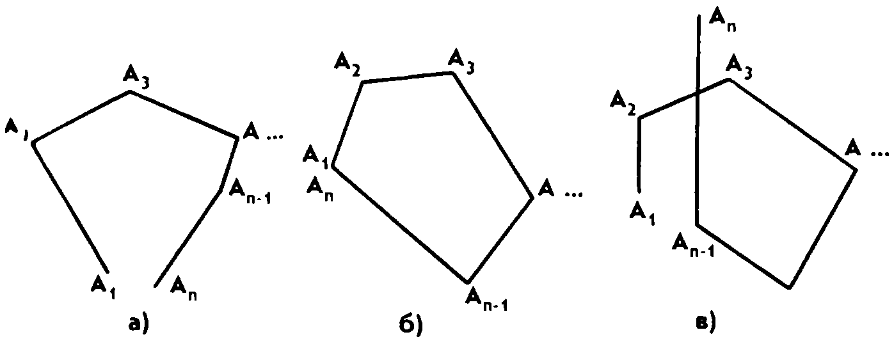


Рис. 1

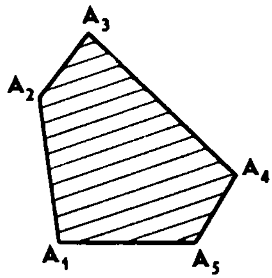


Рис. 2

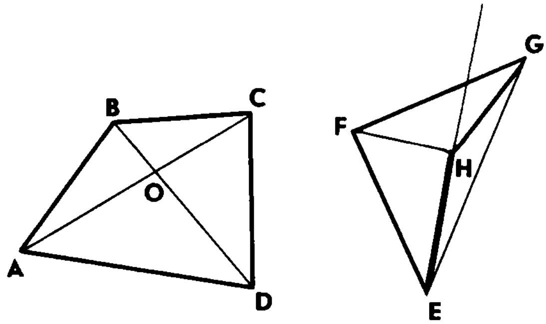


Рис. 3

и более вершинами могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми. На рисунке 3 изображены выпуклый четырехугольник $ABCD$ и невыпуклый четырехугольник $EFGH$. Очевидно, вершины F и G лежат по разные стороны от прямой, проходящей через соседние вершины E и H.

Напомним свойство углов выпуклого многоугольника: *сумма углов выпуклого n-угольника равна 180°* $(n-2)$.

Задача 1. Можно ли выпуклый стоугольник разрезать на 97 треугольников?

Решение. Сумма углов выпуклого стоугольника равна

$$180°(100-2)=180°\cdot 98.$$

При разрезании выпуклого многоугольника на треугольники сумма углов всех полученных треугольников не может оказаться меньше суммы углов исходного многоугольника (объясните почему), поэтому в данном случае она не может быть меньше $180°\cdot 98$. Но сумма углов 97 треугольников равна $180°\cdot 97$, т. е. меньше чем $180°\cdot 98$.

Таким образом, указанное разрезание невозможно.

Задача 2. Доказать, что два выпуклых многоугольника равны, если их стороны и углы соответственно равны.

Решение. Напомним, что два многоугольника равны, если их можно совместить наложением. Рассмотрим два выпуклых многоугольника $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$, у которых стороны и углы соответственно равны (рис. 4):

$$A_1A_2=B_1B_2, ..., A_nA_1=B_nB_1; \ \angle A_1=\angle B_1, ..., \angle A_n=\angle B_n. \quad (1)$$

Наложим многоугольник $A_1A_2...A_n$ на многоугольник $B_1B_2...B_n$ так, чтобы вершина A_1 совместилась с вершиной B_1, а стороны A_1A_2 и A_1A_n наложились соответственно на лучи B_1B_2 и B_1B_n Такое наложение возможно, так как по условию $\angle A_1=\angle B_1$.

Поскольку $A_1A_2=B_1B_2$ и $A_1A_n=B_1B_n$, то сторона A_1A_2 совместится со стороной B_1B_2, а сторона A_1A_n совместится со стороной B_1B_n, при этом, в частности, совместятся вершины A_2 и B_2, A_n и B_n.

Так как данные многоугольники выпуклые, то вершины A_3 и B_3 окажутся при этом наложении по одну сторону от совместившихся прямых A_1A_2 и B_1B_2. В самом деле, если допустить, что

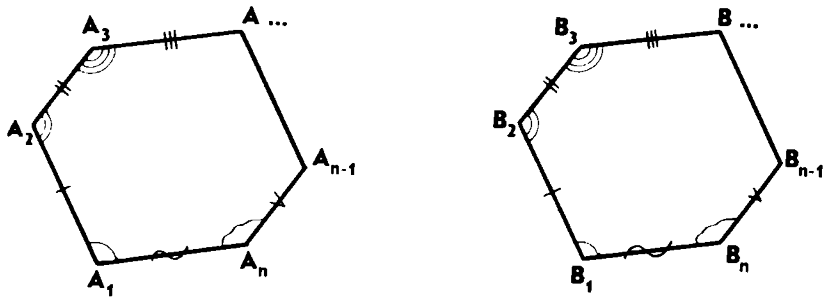


Рис. 4

вершины A_3 и B_3 окажутся по разные стороны от прямой A_1A_2 (или, что то же самое, от прямой B_1B_2), то либо вершины A_3 и A_n, либо вершины B_3 и B_n будут лежать по разные стороны от прямой A_1A_2 (от прямой B_1B_2). Но этого не может быть, поскольку данные многоугольники выпуклые.

В силу равенства $\angle A_2 = \angle B_2$ сторона A_2A_3 наложится на луч B_2B_3, а так как $A_2A_3 = B_2B_3$, то сторона A_2A_3 совместится со стороной B_2B_3, в частности совместятся вершины A_3 и B_3.

Таким же образом можно доказать, что совместятся все следующие соответственные стороны и вершины многоугольников.

Итак, данные многоугольники полностью совместятся, поэтому они равны.

Введем понятие правильного многоугольника.

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

На рисунке 5 изображены правильные треугольник, четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник. Найдите углы в каждом из этих многоугольников.

Задача 3. Доказать, что в правильном пятиугольнике любые две пересекающиеся диагонали делятся точкой пересечения на четыре отрезка, два из которых равны стороне пятиугольника.

Решение. Рассмотрим правильный пятиугольник $ABCDE$, в котором диагонали AD и BE пересекаются в точке O (рис. 6).

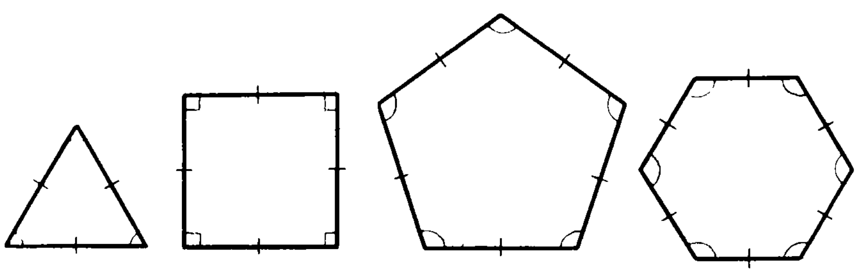


Рис. 5

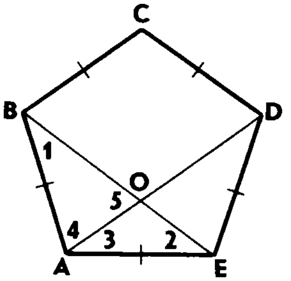


Рис. 6

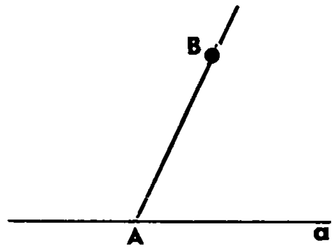


Рис. 7

Докажем, что отрезки OB и OD равны стороне пятиугольника. Воспользуемся тем, что угол правильного пятиугольника, в частности угол BAE, равен 108°. Так как треугольник BAE равнобедренный, то

$$\angle 1 = \angle 2 = \frac{180° - 108°}{2} = 36°.$$

Рассматривая таким же образом равнобедренный треугольник ADE, получаем $\angle 3 = \angle 36°$. Следовательно,

$$\angle 4 = 108° - 36° = 72°,\ \angle 5 = 180° - (\angle 1 + \angle 4) = 180° - 108° = 72°.$$

Итак, $\angle 4 = \angle 5$, поэтому треугольник ABO равнобедренный и $OB = AB$. Аналогично доказывается, что $OD = ED$. Тем самым доказано, что отрезки OB и OD равны стороне пятиугольника.

3. Свойство диагоналей выпуклого четырехугольника. На рисунке 3 диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, а диагонали EG и FH невыпуклого четырехугольника $EFGH$ не пересекаются. Это свойство диагоналей характерно для любого выпуклого (и соответственно невыпуклого) четырехугольника. Однако при всей его очевидности строгое обоснование этого свойства оказывается достаточно сложным. Предварительно рассмотрим два вспомогательных утверждения. Напомним, что согласно одной из аксиом планиметрии каждая прямая a разделяет плоскость на две *полуплоскости* так, что любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой a, а любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от прямой a. Прямая a называется *границей* каждой из этих полуплоскостей, ее точки не принадлежат ни одной из полуплоскостей.

Утверждение 1. *Если начало луча AB (точка A) лежит на прямой a, а точка B — в какой-то полуплоскости с границей a, то и весь луч лежит в этой полуплоскости* (рис. 7).

Второе утверждение связано с понятием внутренней области неразвернутого угла. Это понятие было введено в 7-м классе на основе наглядных представлений. Дадим точное определение.

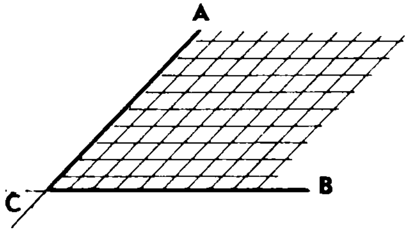


Рис. 8

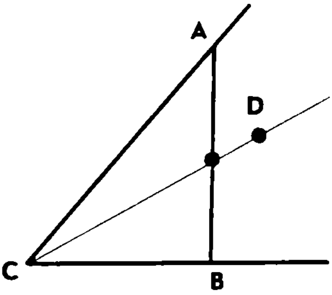


Рис. 9

Рассмотрим неразвернутый угол ACB (рис. 8). Прямая BC разделяет всю плоскость на две полуплоскости. В одной из них лежит луч CA. Обозначим эту полуплоскость буквой α. Точно так же прямая AC разделяет всю плоскость на две полуплоскости, в одной из которых лежит луч CB. Обозначим эту полуплоскость буквой β. Общая часть полуплоскостей α и β называется *внутренней областью угла ACB*.

Утверждение 2. *Если точки A и B лежат на разных сторонах неразвернутого угла с вершиной C, а точка D лежит внутри угла ACB (т. е. в его внутренней области), то луч CD пересекает отрезок AB* (рис. 9).

С наглядной точки зрения утверждения 1 и 2 совершенно очевидны. Строгое обоснование можно провести на основе аксиом планиметрии (попробуйте это сделать). Вернемся теперь к свойствам диагоналей выпуклого и невыпуклого четырехугольников.

Теорема. ***Диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются, а невыпуклого не пересекаются.***

Доказательство. 1) Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$ (рис. 10). Докажем сначала, что вершина C лежит внутри угла BAD. Прямая AD разделяет плоскость на две полуплоскости. Так как четырехугольник выпуклый, то его вершины B и C лежат в одной из этих полуплоскостей и, значит, вершина C лежит в той же полуплоскости, что и луч AB. Обозначим эту полуплоскость буквой α. Аналогично прямая AB разделяет плоскость на две полуплоскости, причем вершина C и луч AD лежат в одной из этих полуплоскостей. Обозначим ее β. Таким образом, точка C лежит как в полуплоскости α, так и в полуплоскости β. Но общая часть этих полуплоскостей и есть внутренняя область угла BAD, поэтому точка C лежит внутри угла BAD.

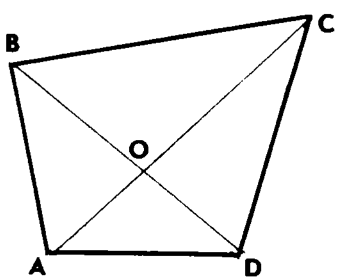


Рис. 10

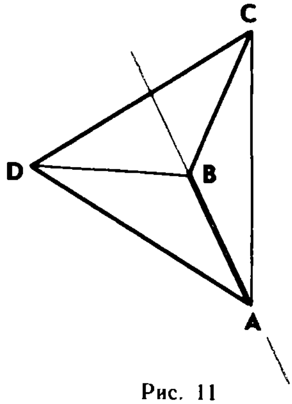


Рис. 11

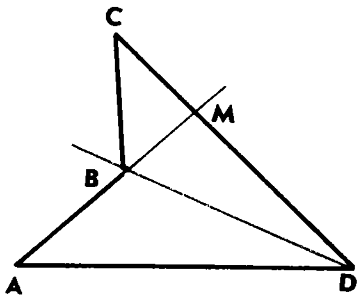


Рис. 12

Точки B и D лежат на разных сторонах угла BAD. Отсюда следует (в силу утверждения 2), что луч AC пересекает отрезок BD в некоторой точке O.

Точно так же можно доказать, что луч DB пересекает отрезок AC. Ясно, что точкой их пересечения является та же самая точка O.

Итак, точка O — общая точка отрезков AC и BD, т. е. диагонали AC и BD пересекаются в точке O.

2) Рассмотрим теперь невыпуклый четырехугольник $ABCD$. В таком четырехугольнике какие-то две соседние вершины лежат по разные стороны от прямой, проходящей через две другие соседние вершины.

Пусть вершины C и D лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 11). Тогда в силу утверждения 1 лучи AC и BD лежат в разных полуплоскостях с границей AB и, следовательно, не имеют общих точек. Значит, и отрезки AC и BD не имеют общих точек, т. е. диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ не пересекаются. Теорема доказана.

Следствие. *Если диагонали четырехугольника пересекаются, то этот четырехугольник выпуклый.*

Задача 4. Доказать, что в любом четырехугольнике какие-то две противоположные вершины лежат по разные стороны от прямой, проходящей через две другие вершины.

Решение. Если четырехугольник $ABCD$ выпуклый, то согласно доказанной теореме его диагонали AC и BD пересекаются (см. рис. 10) и, следовательно, отрезок AC пересекается с прямой BD. Это и означает, что противоположные вершины A и C лежат по разные стороны от прямой BD.

Пусть четырехугольник $ABCD$ невыпуклый и прямая AB пересекает сторону CD в точке M. Возможны два случая:

1) Точка B лежит на отрезке AM (рис. 12). В этом случае точки A и M лежат по разные стороны от прямой BD. Отрезок MC не пересекается с прямой BD, поэтому точка C лежит по ту же сторону от прямой BD, что и точка M. Итак, вершина A лежит

по одну сторону от прямой BD, а противоположная вершина C по другую сторону от этой прямой.

2) Точка A лежит на отрезке BM (рис. 13). В этом случае, так же как и в случае 1, можно доказать, что противоположные вершины B и D лежат по разные стороны от прямой AC (проведите доказательство самостоятельно).

Задача 5. Доказать, что сумма длин диагоналей выпуклого четырехугольника больше полупериметра, но меньше периметра этого четырехугольника.

Решение. 1) Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O (рис. 14). Согласно неравенству треугольника имеем:

$$OA+OB>AB,$$
$$OB+OC>BC,$$
$$OC+OD>CD,$$
$$OD+OA>DA.$$

Сложив эти неравенства (с учетом того, что $OA+OC=AC$, $OB+OD=BD$), получим:

$$2(AC+BD)>AB+BC+CD+DA,$$

откуда

$$AC+BD>\frac{P}{2},$$

где $P=AB+BC+CD+DA$ — периметр четырехугольника. Первое утверждение доказано.

2) Для доказательства второго утверждения снова воспользуемся неравенством треугольника:

$$AC<AB+BC,$$
$$AC<AD+DC.$$

Складывая, получаем $2\cdot AC<P$, или $AC<\frac{P}{2}$. Аналогично $BD<\frac{P}{2}$. Поэтому $AC+BD<P$, что и требовалось доказать.

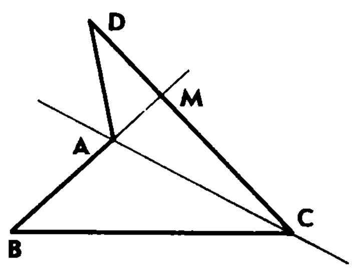


Рис. 13

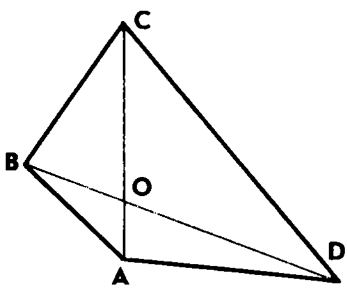


Рис. 14

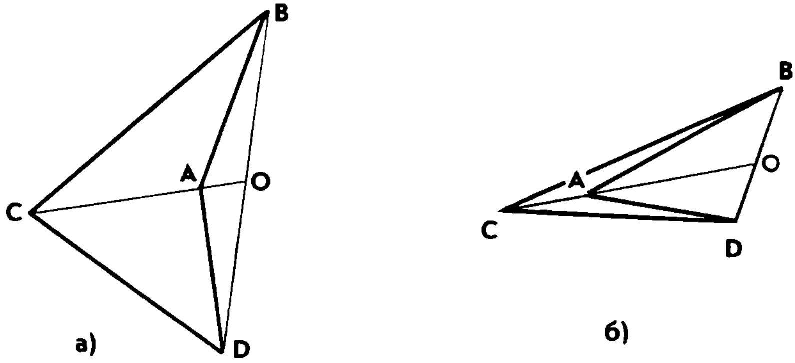


Рис. 15

Замечание. Если четырехугольник $ABCD$ невыпуклый, то второе неравенство (сумма диагоналей меньше периметра) имеет место и доказывается так же, как для выпуклого четырехугольника, но первое неравенство может не выполняться.

В самом деле, обратимся к рисунку 15, *а*. Представим себе, что точка A движется по прямой CO и приближается к точке C, а точки B и D движутся по прямой BD и приближаются к точке O. Тогда диагонали AC и BD невыпуклого четырехугольника $ABCD$ становятся сколь угодно малыми (рис. 15, *б*) и, следовательно, их сумма не будет больше половины периметра. Более того, сумма диагоналей может быть сделана меньше любой доли периметра.

4. Характеристическое свойство фигуры. В п. 3 было доказано, что диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются, и обратно, если диагонали четырехугольника пересекаются, то этот четырехугольник выпуклый. Таким образом, выпуклые четырехугольники обладают определенным свойством, которое выделяет их среди всех четырехугольников, отличает от других (невыпуклых) четырехугольников. Такое свойство геометрических фигур называется *характеристическим свойством.*

Характеристическое свойство может быть положено в основу определения геометрической фигуры. Например, можно дать та-

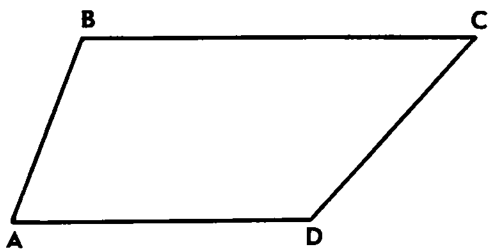


Рис. 16

кое определение выпуклого четырехугольника: четырехугольник называется *выпуклым*, если его диагонали пересекаются.

Это определение равносильно «старому» определению выпуклого четырехугольника, данному в п. 2 (напомним, что «старое» определение относилось к любым многоугольникам, в том числе и к четырехугольникам). В самом деле, если четырехугольник является выпуклым по «старому» определению, то по доказанной в п. 3 теореме его диагонали пересекаются и, значит, он является выпуклым по «новому» определению. И обратно, если четырехугольник является выпуклым по «новому» определению, т. е. его диагонали пересекаются, то согласно следствию из той же теоремы он является выпуклым и по «старому» определению.

Утверждение о характеристическом свойстве фигуры можно сформулировать с использованием словосочетания «тогда и только тогда». Например:

диагонали четырехугольника пересекаются тогда и только тогда, когда он является выпуклым.

В этом предложении содержатся два утверждения. Первое (оно связано со словом «тогда») выражает *свойство* выпуклого четырехугольника: если четырехугольник выпуклый, то его диагонали пересекаются. Второе (обратное) утверждение связано со словами «только тогда», оно выражает *признак* выпуклого четырехугольника: если диагонали четырехугольника пересекаются, то четырехугольник выпуклый.

Задача 6. Доказать, что четырехугольник, две стороны которого параллельны, является выпуклым.

Решение. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, стороны AD и BC которого параллельны (рис. 16). Для решения задачи достаточно доказать, что любые две соседние вершины четырехугольника лежат по одну сторону от прямой, проходящей через две другие вершины. Так как $AD \parallel BC$, то точки B и C лежат по одну сторону от прямой AD. Аналогично точки A и D лежат по одну сторону от прямой BC. Далее, точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB, так как в противном случае отрезки CD и AB пересекались бы, что невозможно. Аналогично точки A и B лежат по одну сторону от прямой CD. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ выпуклый.

Вопросы и задачи

1. Может ли прямая:

а) проходить ровно через три вершины выпуклого многоугольника (невыпуклого многоугольника);

б) пересекать ровно три стороны выпуклого многоугольника (невыпуклого многоугольника)?

2. Может ли общей частью двух выпуклых многоугольников быть:

а) пятиконечная звезда;

б) невыпуклый многоугольник?

3. Верно ли, что любой многоугольник лежит по одну сторону по крайней мере от одной прямой, проходящей через две соседние вершины?

4. Докажите, что по крайней мере одно из оснований перпендикуляров, проведенных из внутренней точки выпуклого многоугольника к прямым, содержащим его стороны, принадлежит самой стороне, а не лежит на ее продолжении.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC равна стороне AD. Докажите, что BC меньше BD.

6. Докажите, что расстояние от одной из вершин выпуклого четырехугольника до не содержащей ее диагонали не превосходит половины этой диагонали.

7. Внутри выпуклого многоугольника лежит другой выпуклый многоугольник:

а) Докажите, что периметр внутреннего многоугольника не больше периметра внешнего.

б) Справедливо ли это утверждение, если внутренний многоугольник не является выпуклым?

8. Периметр выпуклого многоугольника равен 10 см. Может ли одна из его диагоналей быть равной 5 см?

9. Внутри выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин четырехугольника минимальна.

10. Докажите, что в любом выпуклом пятиугольнике найдутся три диагонали, из которых можно составить треугольник.

11. Докажите, что сумма двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника меньше суммы длин его диагоналей.

12. Длины сторон выпуклого четырехугольника выражаются различными целыми числами. Докажите, что хотя бы одна из его диагоналей больше $\frac{5}{2}$.

13. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Периметр треугольника ABD меньше периметра треугольника ACD. Докажите, что AB меньше AC.

14. Внутри выпуклого четырехугольника, сумма длин диагоналей которого равна P, расположен выпуклый четырехугольник, сумма длин диагоналей которого равна p. Докажите, что $p<2P$.

15. На плоскости даны n синих и n красных точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести n непересекающихся отрезков с разноцветными концами.

16. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого равны?

17. Докажите, что длина любой стороны многоугольника меньше суммы длин остальных его сторон.

18. Может ли длина одной из сторон выпуклого десятиугольника быть больше длины любой другой его стороны: а) в 10 раз; б) в 9 раз?

19. Докажите, что длина любой диагонали выпуклого многоугольника меньше половины его периметра.

20. Периметр выпуклого семиугольника равен 1 см. Может ли сумма длин всех его диагоналей быть равной 7 см?

21. Сумма длин диагоналей выпуклого двадцатиугольника равна 85 см. Может ли его периметр быть равным 1 см?

22. Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике с четным числом сторон найдется диагональ, не параллельная ни одной из сторон многоугольника.

23. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого пятиугольника меньше удвоенного периметра этого пятиугольника.

24. Докажите, что в любом выпуклом n-угольнике ($n \geqslant 5$) найдутся n диагоналей, сумма длин которых больше периметра этого n-угольника, но меньше его удвоенного периметра.

25. Докажите, что в любом выпуклом n-угольнике ($n \geqslant 4$) с периметром P найдется диагональ, длина которой больше чем $\frac{P}{n}$, и найдется диагональ, длина которой меньше чем $\frac{2P}{n}$.

26. Существует ли выпуклый пятиугольник, периметр которого равен 30 см, а длина наибольшей диагонали равна 6 см?

27. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри выпуклого многоугольника, до его вершин больше полупериметра этого многоугольника.

28. Может ли сумма расстояний от некоторой точки, лежащей внутри выпуклого четырехугольника, до его вершин быть больше периметра этого четырехугольника?

29. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри выпуклого пятиугольника, до его вершин больше полусуммы длин диагоналей этого пятиугольника.

30. Точка O лежит внутри выпуклого n-угольника $A_1A_2 \dots A_n$ с периметром P. Докажите неравенство $OA_1 + OA_2 < P - A_1A_2$.

31. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри выпуклого n-угольника с периметром P, до его вершин меньше чем $\frac{P(n-1)}{2}$.

32. Докажите, что расстояния от произвольной внутренней точки правильного шестиугольника со стороной 1 до каждой из каких-нибудь трех его вершин не меньше 1.

33. Внешние углы выпуклого четырехугольника находятся в отношении 1:2:3:4. В каком отношении находятся его внутренние углы?

34. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол A больше угла C. Докажите, что один из углов, образованных биссектрисами углов B и D, равен полуразности углов A и C.

35. Докажите, что у выпуклого шестиугольника, все углы которого равны, стороны попарно параллельны.

36. Докажите, что у выпуклого пятиугольника, все углы которого равны, нет параллельных сторон.

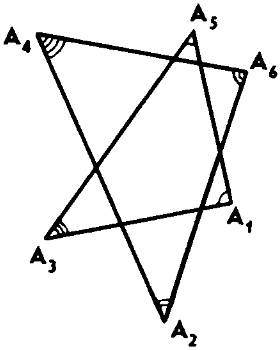


Рис. 17

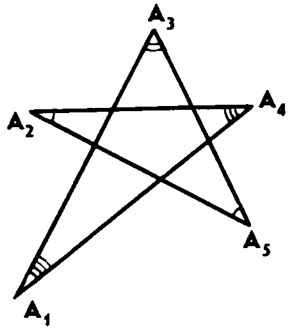


Рис. 18

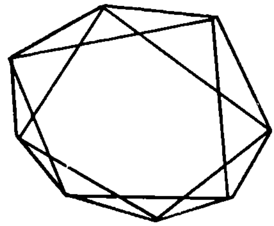


Рис. 19

37. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, все углы которого равны. Докажите, что $AB+BC=DE+EF$.

38. На плоскости даны четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что хотя бы один из треугольников с вершинами в этих точках не является остроугольным.

39. Докажите, что выпуклый четырехугольник, у которого не все углы равны друг другу, имеет хотя бы один тупой угол.

40. Может ли выпуклый семиугольник иметь 4 прямых угла?

41. Докажите, что любой выпуклый n-угольник при $n \geqslant 5$ имеет не более трех нетупых углов.

42. Можно ли выпуклый тринадцатиугольник разрезать: а) на 10 треугольников; б) на 5 выпуклых четырехугольников?

43. Можно ли из треугольника и выпуклых четырехугольника, пятиугольника и шестиугольника составить выпуклый тринадцатиугольник так, что при этом исходные многоугольники не будут иметь общих внутренних точек?

44. Докажите, что в любом выпуклом семиугольнике имеются две диагонали, такие, что угол между прямыми, содержащими эти диагонали, меньше 13° (угол между параллельными прямыми считается равным 0°).

45. Найдите сумму углов при вершинах:

а) шестиконечной звезды (рис. 17);

б) пятиконечной звезды (рис. 18);

в) произвольной звезды, вершинами которой являются вершины некоторого выпуклого n-угольника ($n \geqslant 5$), а сторонами — отрезки диагоналей этого n-угольника, соединяющих каждую его вершину с двумя ближайшими несоседними с ней вершинами (рис. 19).

46. Какое наименьшее число точек достаточно отметить внутри выпуклого n-угольника, чтобы внутри любого треугольника, вершины которого совпадают с вершинами этого n-угольника, содержалась хотя бы одна отмеченная точка?

47. Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму произвольного выпуклого четырехугольника, можно сделать паркет, полностью покрывающий любую часть плоскости.

48. Существует ли выпуклый пятиугольник, копиями которого можно полностью покрыть любую часть плоскости?

49. Разрезать правильный шестиугольник на три равных пятиугольника.

50. Существует ли выпуклый пятиугольник, никакие две стороны которого не параллельны и копиями которого можно полностью покрыть любую часть плоскости?

§ 2. Параллелограмм

5. Параллелограмм, его свойства и признаки. Напомним определение, свойства и признаки параллелограмма. *Параллелограммом* называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (рис. 20). Из утверждения, доказанного в задаче 6 п. 4, следует, что параллелограмм — выпуклый четырехугольник.

Свойства параллелограмма. *В параллелограмме:*

1) *противоположные стороны равны;*

2) *противоположные углы равны;*

3) *диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.*

Признаки параллелограмма. *Четырехугольник является параллелограммом, если выполнено любое из следующих условий:*

1) *противоположные стороны четырехугольника попарно равны;*

2) *противоположные углы четырехугольника попарно равны;*

3) *диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;*

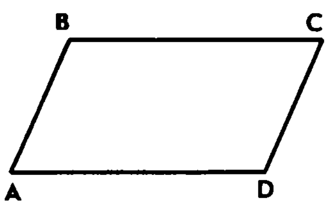
4) *две стороны четырехугольника равны и параллельны.*

Заметим, что каждому из отмеченных трех свойств параллелограмма соответствует обратное утверждение, выражающее признак параллелограмма. Таким образом, каждое из этих свойств является характеристическим свойством параллелограмма. Можно объединить каждое из свойств с соответствующим признаком в одно утверждение с использованием слов «тогда и только тогда». Например:

противоположные стороны четырехугольника попарно равны тогда и только тогда, когда четырехугольник является параллелограммом.

Это же утверждение допускает и такую формулировку:

четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны попарно равны.



$AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$

Рис. 20

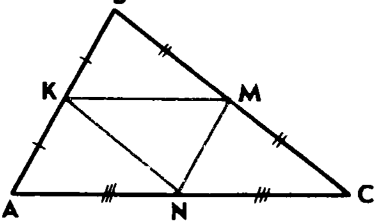


Рис. 21. Отрезки KM, MN, NK — средние линии треугольника ABC

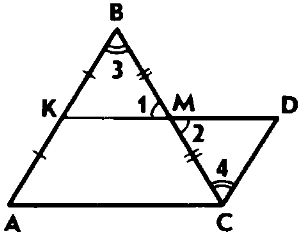


Рис. 22

6. Средняя линия треугольника. Введем еще одно понятие, связанное с треугольником. *Средней линией треугольника* называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

В каждом треугольнике имеются три средние линии (рис. 21). Докажем теорему о средней линии треугольника.

Теорема. ***Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.***

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC, в котором точки K и M — середины сторон AB и BC (рис. 22). Докажем, что $KM \parallel AC$ и $KM=\frac{1}{2}AC$. Проведем через точку C прямую, параллельную AB. Она пересекается с прямой KM в некоторой точке D. Треугольники BMK и CMD равны по стороне и двум прилежащим углам ($BM=MC$ по условию, углы 1 и 2 равны как вертикальные, углы 3 и 4 равны как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей BC). Из равенства треугольников следует: $KB=CD$, $KM=MD$, а так как $AK=KB$, то $AK=CD$.

Итак, $AK \parallel CD$ и $AK=CD$, поэтому четырехугольник $AKDC$ — параллелограмм, и, значит, $KM \parallel AC$. Кроме того, так как $KM=MD$, то $KM=\frac{1}{2}KD$. Но $KD=AC$ (противоположные стороны параллелограмма равны), поэтому $KM=\frac{1}{2}AC$. Теорема доказана.

Следствие. *Прямая, проходящая через середину стороны треугольника параллельно другой ее стороне, делит третью сторону пополам.*

В самом деле, пусть прямая p проходит через середину K стороны AB треугольника ABC и параллельна стороне AC, а KM — средняя линия, которая параллельна стороне AC. По аксиоме параллельных прямых через точку K проходит только одна прямая, параллельная прямой AC, поэтому прямые p и KM совпадают, т. е. прямая p проходит через точку M.

7. Теоремы Фалеса и Вариньона. Рассмотрим еще две теоремы, доказательство которых основано на свойствах и признаках параллелограмма, а также на теореме о средней линии треугольника. Первая теорема носит имя древнегреческого математика, астронома, физика и философа Фалеса Милетского (ок. 625—547 гг. до н. э.). Он жил и творил на несколько веков раньше, чем Евклид, Архимед, Аполлоний и другие известные древнегреческие математики. Предполагают, что он был первым древнегреческим геометром.

Теорема (Фалеса). ***Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.***

Доказательство. Пусть на прямой l_1 отложены равные отрезки A_1A_2, A_2A_3, $A_3A_4, \ldots$ и через их концы проведены параллельные прямые, которые пересекают прямую l_2 в точках B_1, B_2, B_3, B_4, ... (рис. 23, 24). Требуется доказать, что отрезки B_1B_2, B_2B_3, $B_3B_4 \ldots$ равны друг другу. Докажем, например, что $B_1B_2 = B_2B_3$.

Если прямые l_1 и l_2 параллельны (рис. 23), то $A_1A_2 = B_1B_2$ и $A_2A_3 = B_2B_3$ как противоположные стороны параллелограммов $A_1B_1B_2A_2$ и $A_2B_2B_3A_3$. Так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$.

Если прямые l_1 и l_2 не параллельны, то через точку B_1 проведем прямую l, параллельную прямой l_1 (рис. 24). Она пересечет прямые A_2B_2 и A_3B_3 в некоторых точках C и D. Так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то по доказанному $B_1C = CD$. Отсюда следует, что отрезок CB_2 — средняя линия треугольника B_1DB_3 (следствие из теоремы о средней линии треугольника), и поэтому $B_1B_2 = B_2B_3$. Теорема доказана.

Вторая теорема связана с именем французского математика и механика Пьера Вариньона (1654—1722).

Теорема (Вариньона). ***Середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.***

Доказательство. Рассмотрим произвольный четырехугольник $ABCD$, в котором точки K, L, M, N — середины сторон

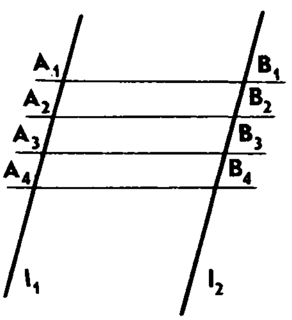


Рис. 23

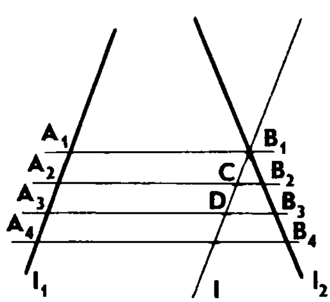


Рис. 24

AB, BC, CD и DA. Пусть вершины B и D лежат по разные стороны от прямой AC (см. задачу 4 из п. 3). Тогда точки K и L лежат по одну сторону от прямой AC, а точки M и N — по другую сторону от этой прямой (рис. 25). По теореме о средней линии треугольника имеем:

$$KL \parallel AC \text{ и } KL=\frac{1}{2}AC, \quad NM \parallel AC \text{ и } NM=\frac{1}{2}AC.$$

Отсюда следует, что $KL \parallel NM$ и $KL=NM$, т. е. две стороны четырехугольника $KLMN$ равны и параллельны. Значит, четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм. Теорема доказана.

Рассмотрим задачу, решаемую с помощью теоремы Вариньона и теоремы о средней линии треугольника.

Задача 1. Середины сторон AB и CD, BC и ED выпуклого пятиугольника $ABCDE$ соединены отрезками. Точки H и K соответственно — середины этих отрезков. Доказать, что отрезок HK параллелен стороне AE и равен одной четверти этой стороны.

Решение. Пусть точки L, M, N и P — середины сторон AB, BC, CD и DE, точка H — середина отрезка LN, точка K — середина отрезка MP, точка T — середина диагонали AD (рис. 26). Применяя теорему Вариньона к четырехугольнику $ABCD$, заключаем, что четырехугольник $LMNT$ — параллелограмм и H — точка пересечения его диагоналей. Поэтому HK — средняя линия треугольника TMP и, значит,

$$HK \parallel TP \text{ и } HK=\frac{1}{2}TP. \tag{1}$$

В свою очередь, TP — средняя линия треугольника ADE, и, следовательно,

$$TP \parallel AE \text{ и } TP=\frac{1}{2}AE. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) следует:

$$HK \parallel AE \text{ и } HK=\frac{1}{4}AE,$$

что и требовалось доказать.

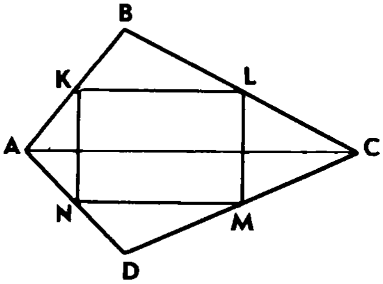


Рис. 25

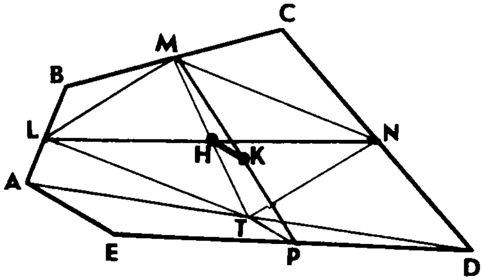


Рис. 26

Задачи

51. Точки E и P являются основаниями перпендикуляров, проведенных к прямой, содержащей диагональ BD выпуклого четырехугольника $ABCD$, из вершин A и C соответственно. Докажите, что если $AE=CP$ и $\angle BAC=\angle ACD$, то четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

52. Даны параллелограмм и прямая, параллельная одной из его диагоналей. Докажите, что продолжения параллельных сторон параллелограмма отсекают от этой прямой равные отрезки.

53. Докажите, что если в шестиугольнике $ABCDEF$ $AB=DE$, $BC=EF$, $CD=EA$, $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel EA$, то диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

54. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине A параллелограмма $ABCD$ при пересечении с прямыми BC и CD образует равнобедренный треугольник, сумма длин боковых сторон которого равна периметру параллелограмма.

55. Дан выпуклый многоугольник. Известно, что внутри него есть такая точка, что любые три последовательные вершины многоугольника и эта точка являются вершинами некоторого параллелограмма. Сумма длин сторон всех этих параллелограммов равна p. Найдите периметр многоугольника.

56. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане к третьей стороне.

57. Постройте отрезок с концами на сторонах данного угла так, чтобы он делился данной точкой, лежащей внутри угла, пополам.

58. Внутри треугольника ABC взята точка M и построены параллелограммы $AMBM_1$, $BMCM_2$, $CMAM_3$. Докажите, что прямые AM_2, BM_3, CM_1 пересекаются в одной точке.

59. Докажите, что сумма длин медиан треугольника больше его полупериметра, но меньше периметра.

60. Докажите, что в четырехугольнике с непараллельными противоположными сторонами середины диагоналей и середины двух противоположных сторон являются вершинами параллелограмма.

61. Докажите, что точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника, отличного от параллелограмма, делит пополам отрезок, соединяющий середины его диагоналей.

62. Середина каждой стороны выпуклого многоугольника соединена отрезками с серединами двух смежных с нею сторон. Докажите, что периметр получившегося многоугольника больше полупериметра исходного.

63. В выпуклом многоугольнике отметили середины сторон и провели отрезки, соединяющие середины каждых двух ближайших друг к другу несмежных сторон. Докажите, что периметр получившейся «звезды» (сумма длин указанных отрезков) больше полупериметра многоугольника.

64. Середина каждой стороны выпуклого восьмиугольника соединена отрезками с серединами двух ближайших к этой стороне несмежных с нею сторон. Середины указанных отрезков являются вершинами некоторого нового восьмиугольника.

а) Докажите, что противоположные стороны этого нового восьмиугольника попарно параллельны и равны.

б) Докажите, что четыре диагонали этого нового восьмиугольника, соединяющие его противоположные вершины, пересекаются в одной точке, а для каждой из оставшихся диагоналей найдется параллельная и равная ей диагональ.

65. Середина каждой стороны выпуклого n-угольника ($n>4$, $n \neq 8$) соединена отрезками с серединами двух ближайших к этой стороне несмежных с нею сторон. Середины указанных отрезков являются вершинами некоторого нового n-угольника. Докажите, что в исходном n-угольнике найдутся n диагоналей, сумма длин которых ровно в 4 раза больше периметра этого нового n-угольника.

66. Докажите, что если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырехугольника равна его полупериметру, то этот четырехугольник — параллелограмм.

67. Точки M и T — середины сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AT и CM делят диагональ BD на три равные части.

68. Даны три точки — A, M и P, не лежащие на одной прямой. Известно, что точка A — вершина некоторого параллелограмма, а точки M и P — середины двух его сторон, не содержащих точку A. Постройте этот параллелограмм.

69. Даны два непараллельных отрезка. Найдите множество середин всех отрезков, концы которых лежат на двух данных отрезках (по одному концу на каждом из данных отрезков).

§ 3. Прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция

8. Характеристические свойства прямоугольника, ромба и квадрата. Прямоугольник и ромб — частные виды параллелограмма. Квадрат является как прямоугольником, так и ромбом. Поэтому прямоугольник, ромб и квадрат обладают всеми теми свойствами, которыми обладает любой параллелограмм (см. § 2). Но у них есть и свои особые (характеристические) свойства, выделяющие их среди всех параллелограммов. Напомним определения этих фигур и рассмотрим их характеристические свойства.

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

В этом определении слово «параллелограмм» можно заменить словом «четырехугольник», т. е. можно дать такое определение:

прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые.

Если же оставить в первом определении слово «параллелограмм», то можно не требовать, чтобы все углы были прямыми. Достаточно потребовать, чтобы всего лишь один из углов был прямым. Иначе говоря, определение прямоугольника можно дать в такой форме:

прямоугольником называется параллелограмм, у которого один из углов прямой.

Попробуйте доказать равносильность этих трех определений.

Заметим, что каждое из данных определений использует то или иное характеристическое свойство прямоугольника, выделяющее его из всех параллелограммов (первое и третье определения) или даже из всех четырехугольников (второе определение). Все эти характеристические свойства связаны с углами прямоугольника. Но у прямоугольника есть характеристическое свойство, связанное не с углами, а с отрезками, именно с его диагоналями:

диагонали прямоугольника равны (свойство прямоугольника);

если диагонали в параллелограмме равны, то этот параллелограмм — прямоугольник (признак прямоугольника).

Свойство и признак прямоугольника можно объединить в одном утверждении:

Параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали равны.

Перейдем теперь к определению ромба и его характеристическим свойствам.

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

В этом определении слово «параллелограмм» можно заменить словом «четырехугольник». Получится такое определение:

ромбом называется четырехугольник, у которого все стороны равны.

Если же оставить в первом определении слово «параллелограмм», то можно не требовать равенства всех сторон. Достаточно потребовать, чтобы были равны какие-то две смежные стороны, т. е. можно дать такое определение:

ромбом называется параллелограмм, у которого две смежные стороны равны.

Докажите самостоятельно равносильность этих трех определений.

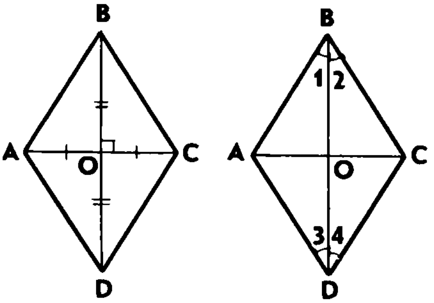
Рассмотрим характеристические свойства ромба, связанные с его диагоналями. Напомним свойства диагоналей ромба.

Диагонали ромба: а) взаимно перпендикулярны; б) делят его углы пополам.

Сформулируем и докажем обратные утверждения (признаки ромба).

З а д а ч а 1. Доказать, что параллелограмм является ромбом, если выполнено любое из следующих условий:

1) диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны;



а) б)

Рис. 27

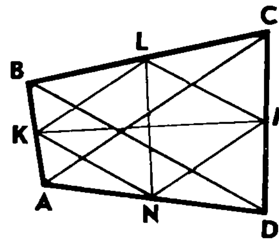


Рис. 28

2) диагональ параллелограмма делит пополам углы при вершинах, которые она соединяет.

Решение. 1) Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны (рис. 27, *а*). Так как точкой пересечения они делятся пополам, то прямоугольные треугольники AOB, BOC, COD и DOA равны друг другу по двум катетам. Отсюда следует, что гипотенузы этих треугольников равны: $AB = BC = CD = DA$, т. е. равны стороны параллелограмма, и, значит, параллелограмм $ABCD$ — ромб.

2) Пусть диагональ BD параллелограмма $ABCD$ делит углы B и D пополам (рис. 27, *б*). Так как противоположные углы B и D параллелограмма равны, то углы 1, 2, 3 и 4 равны друг другу. Следовательно, равнобедренные треугольники ABD и CBD равны по стороне (BD — общая сторона) и двум прилежащим углам. Отсюда следует, что $AB = BC = CD = DA$, т. е. параллелограмм $ABCD$ — ромб, что и требовалось доказать.

Итак, можно сформулировать такое утверждение о характеристических свойствах ромба:

параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:

1) его диагонали взаимно перпендикулярны;

2) его диагональ делит пополам углы при вершинах, которые она соединяет.

Как уже было отмечено, квадрат является и прямоугольником и ромбом. Поэтому квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, прямоугольника и ромба. Можно дать различные определения квадрата. Приведем два определения.

1) ***Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.***

2) Квадратом называется ромб, у которого все углы прямые.

Придумайте сами еще несколько определений квадрата и докажите их равносильность. Сформулируйте несколько утверждений о характеристических свойствах квадрата.

Рассмотрим задачу, в решении которой используется характеристическое свойство ромба.

Задача 2. Доказать, что диагонали четырехугольника равны тогда и только тогда, когда отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, взаимно перпендикулярны.

Решение. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA (рис. 28).

1) Пусть $KM \perp LN$. Докажем, что $AC = BD$. Четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм (по теореме Вариньона), причем $KL = \frac{1}{2} AC$, $LM = \frac{1}{2} BD$ (по теореме о средней линии треугольника). Так как диагонали KM и LN параллелограмма $KLMN$ взаимно перпендикулярны, то $KLMN$ — ромб (задача 1 этого пункта) и, значит, $KL = LM$. Следовательно, $AC = BD$.

2) Обратно, пусть $AC = BD$. Докажем, что $KM \perp LN$. Снова воспользуемся тем, что четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм (теорема Вариньона), причем $KL = \frac{1}{2} AC$, $LM = \frac{1}{2} BD$ (по теореме о средней линии треугольника). Так как $AC = BD$, то $KL = LM$ и, значит, $KLMN$ — ромб. Поэтому его диагонали взаимно перпендикулярны: $KM \perp LN$, что и требовалось доказать.

9. Трапеция. Напомним, что *трапецией* называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

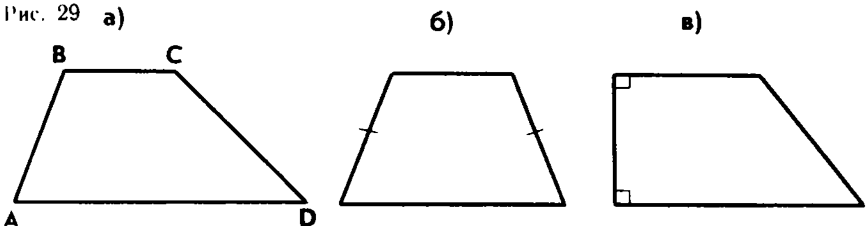
Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, а две другие стороны — *боковыми сторонами* (рис. 29, *а*). Из утверждения, доказанного в задаче 6 п. 4, следует, что трапеция — выпуклый четырехугольник.

Трапеция называется *равнобедренной*, если ее боковые стороны равны (рис. 29, *б*). Трапеция называется *прямоугольной*, если один из ее углов прямой. Отметим, что в прямоугольной трапеции ровно два угла являются прямыми. Эти углы прилегают к боковой стороне, перпендикулярной к основаниям трапеции (рис. 29, *в*).

Задача 3. Доказать, что трапеция является равнобедренной тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий: 1) углы при одном из оснований трапеции равны; 2) диагонали трапеции равны.

Решение. 1) Пусть в трапеции $ABCD$ углы при одном из оснований равны. Тогда равны углы и при другом основании

Рис. 29



Трапеция $ABCD$: AD и BC — основания, AB и CD — боковые стороны

Равнобедренная трапеция

Прямоугольная трапеция

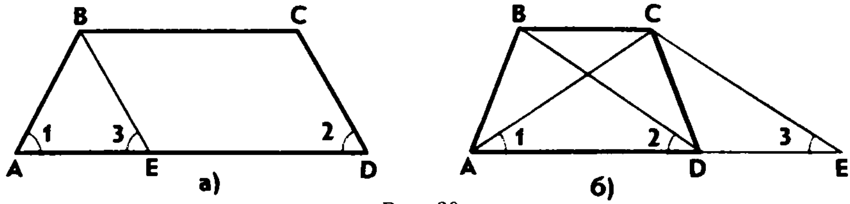


Рис. 30

(объясните почему). Докажем, что трапеция $ABCD$ — равнобедренная. Пусть AD — большее основание и $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 30, *а*). Проведем отрезок BE, параллельный CD. Тогда $BE = CD$ (как противоположные стороны паралеллограмма) и $\angle 2 = \angle 3$ (как соответственные углы при параллельных прямых CD и BE и секущей AD). Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$, и, значит, треугольник ABE равнобедренный. Поэтому $AB = BE = CD$, т. е. трапеция равнобедренная.

Обратно, пусть трапеция $ABCD$ равнобедренная: $AB = CD$. Докажем, что углы при каждом основании трапеции равны. Пусть AD — большее основание (рис. 30, *а*). Проведем отрезок BE, параллельный CD. Тогда $BE = CD$ и $\angle 3 = \angle 2$. Поэтому $AB = BE$, т. е. треугольник ABE равнобедренный. Следовательно, $\angle 1 = \angle 3 = \angle 2$. Итак, углы при основании AD равны. Отсюда следует, что углы при основании BC также равны.

2) Пусть в трапеции $ABCD$ диагонали равны: $AC = BD$ (рис. 30, *б*). Докажем, что трапеция — равнобедренная. Проведем отрезок CE, параллельный BD (см. рис. 30, *б*). Тогда $CE = BD$ и $\angle 3 = \angle 2$. Следовательно, $AC = CE$, т. е. треугольник ACE равнобедренный. Поэтому $\angle 1 = \angle 3 = \angle 2$. Треугольники ACD и ABD равны по двум сторонам и углу между ними ($AC = BD$, AD — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$). Из равенства этих треугольников следует, что $AB = CD$, т. е. трапеция равнобедренная.

Обратно, пусть трапеция $ABCD$ равнобедренная: $AB = CD$ (рис. 30, *б*). Докажем, что диагонали AC и BD равны. По доказанному в первом пункте углы A и D при основании трапеции равны. Поэтому треугольники ABD и ACD равны по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$, AD — общая сторона, $\angle A = \angle D$). Из равенства этих треугольников следует, что $AC = BD$, что и требовалось доказать.

Введем еще одно определение, связанное с трапецией:

средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.

Теорема. ***Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.***

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$, в которой точка M — середина боковой стороны AB (рис. 31). Проведем через точку M прямую, параллельную основаниям трапеции. Пусть эта прямая пересекает диагональ AC в точке P, а сторону

CD в точке N. Применим следствие из теоремы о средней линии треугольника последовательно к треугольникам ABC и CAD. Согласно этому следствию точка P — середина стороны AC треугольника ABC. Но тогда согласно тому же следствию точка N — середина стороны CD треугольника ACD. Поэтому отрезки MP и PN являются средними линиями треугольников ABC и ACD, а отрезок MN — средней линией трапеции $ABCD$. Тем самым доказано, что средняя линия трапеции параллельна ее основаниям.

Далее, по теореме о средней линии треугольника

$$MP=\frac{1}{2}BC, \quad PN=\frac{1}{2}AD.$$

Следовательно,

$$MN=MP+PN=\frac{1}{2}(BC+AD).$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Приведенное доказательство теоремы о средней линии трапеции опирается на теорему о средней линии треугольника. В свою очередь, теорема о средней линии треугольника может быть получена из теоремы о средней линии трапеции следующим образом. Пусть в трапеции $ABCD$ (см. рис. 31) вершины A, B и D неподвижны, а вершина C приближается к B. При любом положении вершины C справедливы соотношения:

$$MN \parallel AD \text{ и } MN=\frac{1}{2}(BC+AD).$$

Когда вершина C совпадет с вершиной B, трапеция $ABCD$ перейдет в треугольник ABD, а ее средняя линия MN — в среднюю линию этого треугольника. При этом BC станет равным нулю и мы получим:

$$MN \parallel AD \text{ и } MN=\frac{1}{2}AD,$$

т. е. средняя линия MN треугольника ABD параллельна стороне AD этого треугольника и равна ее половине.

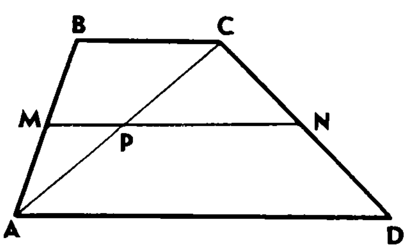


Рис. 31

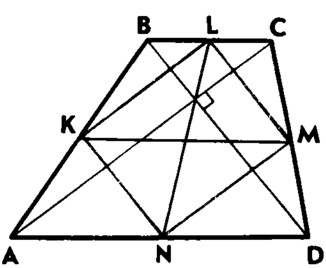


Рис. 32

З а д а ч а 4. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а длина ее средней линии равна c. Найти длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеций.

Р е ш е н и е. Рассмотрим трапецию $ABCD$, в которой диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны. Пусть точки K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA (рис. 32). По теореме Вариньона четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм. Но $KL \parallel AC$, $LM \parallel BD$, а $AC \perp BD$. Поэтому $KL \perp LM$, и, следовательно, параллелограмм $KLMN$ является прямоугольником. В прямоугольнике диагонали равны: $LN = KM$. Отрезок KM — средняя линия трапеции, причем по условию $KM = c$. Поэтому и искомый отрезок LN равен c.

Рассмотрим еще одно свойство трапеции. В § 1 мы доказали, что два выпуклых многоугольника равны, если их стороны и углы соответственно равны (задача 2 п. 2). Оказывается, что для равенства двух трапеций можно не требовать равенства углов, а достаточно потребовать лишь, чтобы стороны трапеций были соответственно равны, и тогда трапеции будут равны. Этот факт интересен потому, что для многих других видов четырехугольников (для произвольных четырехугольников, для параллелограммов, для ромбов) равенство только соответствующих сторон не обеспечивает равенства четырехугольников. Например, два параллелограмма могут иметь соответственно равные стороны, но быть неравными (рис. 33). Докажем, что трапеции обладают указанным свойством.

З а д а ч а 5. Доказать, что две трапеции равны, если их стороны соответственно равны.

Р е ш е н и е. Рассмотрим трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, у которых стороны соответственно равны: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$, $DA = D_1A_1$. Пусть BC, AD и B_1C_1, A_1D_1 — основания этих трапеций. Предположим для определенности, что $AD > BC$, тогда $A_1D_1 > B_1C_1$ (рис. 34). Отметим на отрезках AD и A_1D_1 соответственно точки E и E_1 так, чтобы $ED = BC$ и $E_1D_1 = B_1C_1$. Тогда $ED = E_1D_1$, и, значит, $AE = A_1E_1$, а четырехугольники $BCDE$ и $B_1C_1D_1E_1$ являются параллелограммами (объясните почему). Поэтому $BE = CD$, $B_1E_1 = C_1D_1$ (противоположные стороны параллелограмма равны), и так как $CD = C_1D_1$, то $BE = B_1E_1$. Таким образом, в треугольниках ABE и $A_1B_1E_1$ стороны соответственно равны ($AB = A_1B_1$, $AE = A_1E_1$, $BE = B_1E_1$), поэтому эти треугольники равны, откуда следует, что $\angle BAE = \angle B_1A_1E_1$ и $\angle BEA = \angle B_1E_1A_1$. Но $\angle BEA = \angle CDA$,

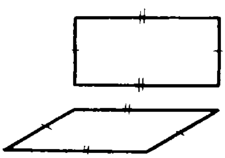


Рис. 33

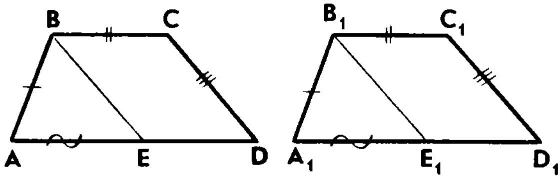


Рис. 34

$\angle B_1E_1A_1 = \angle C_1D_1A_1$ (объясните почему), следовательно, $\angle CDA = \angle C_1D_1A_1$. Тем самым доказано, что в данных трапециях $\angle A = \angle A_1$, $\angle D = \angle D_1$. Так как $AD \parallel BC$, то из равенства $\angle A = \angle A_1$ следует, что $\angle B = \angle B_1$, а из равенства $\angle D = \angle D_1$, что $\angle C = \angle C_1$.

Итак, в трапециях $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ стороны и углы соответственно равны, поэтому согласно задаче 2 п. 2 эти трапеции равны, что и требовалось доказать.

Задачи

70. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его углы пополам. Докажите, что этот четырехугольник — ромб.

71. Диагонали выпуклого четырехугольника разбивают его на четыре треугольника, периметры которых равны. Докажите, что этот четырехугольник — ромб.

72. Докажите, что прямые, содержащие диагонали четырехугольника, взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, равны.

73 Докажите, что треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда середина его большей стороны равноудалена от всех его вершин.

74. Докажите, что биссектрисы внутренних (внешних) углов параллелограмма, отличного от ромба, в пересечении образуют прямоугольник, длина диагонали которого равна разности (сумме) смежных сторон параллелограмма.

75. Докажите, что длина диагонали прямоугольника не превосходит полусуммы расстояний от произвольной точки, лежащей внутри прямоугольника, до его вершин.

76. В прямоугольнике $ABCD$ $AB:AD = 1:3$. Сторона AD точками E и M делится на три равные части. Найдите сумму углов BEA, BMA и BDA.

77. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка K и на отрезке AK как на стороне построен квадрат $AKPM$, у которого сторона KP пересекает отрезок AD. Докажите, что $BK = DM$.

78. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что точки пересечения диагоналей квадратов являются вершинами квадрата.

79. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены вне его квадраты $ABDE$ и $BCPT$. Докажите, что отрезок DT вдвое больше медианы BM треугольника ABC.

80. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена точка M. Биссектриса угла BAM пересекает сторону BC в точке K. Докажите, что $AM = BK + DM$.

81. На катетах прямоугольного треугольника ABC построены вне его квадраты, центры O_1 и O_2 которых соединены между собой и соединены с серединой O гипотенузы AC. Докажите, что треугольник O_1O_2O — прямоугольный и его гипотенуза проходит через вершину B.

82. Докажите, что два взаимно перпендикулярных отрезка равны, если концы одного из них лежат на противоположных сторонах квадрата (или их продолжениях), а концы другого — на двух других противоположных сторонах (или их продолжениях).

83. На каждой из сторон квадрата отметили по точке, а затем стороны квадрата стерли. С помощью циркуля и линейки восстановите квадрат по этим четырем точкам.

84. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и B равны, а сторона AD меньше стороны BC. Докажите, что угол D больше угла C.

85. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике равны диагонали и равны две противоположные стороны, а две другие противоположные стороны не равны, то этот четырехугольник — равнобедренная трапеция.

86. Биссектрисы равных углов A и C равнобедренного треугольника ABC пересекают боковые стороны треугольника в точках E и P соответственно. Докажите, что четырехугольник $APEC$ — трапеция с тремя равными сторонами.

87. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки M плоскости до любых трех вершин равнобедренной трапеции больше расстояния от этой точки до четвертой вершины.

88. Докажите, что в равнобедренной трапеции отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, взаимно перпендикулярны.

89. На основании AD трапеции $ABCD$ имеется точка E, такая, что периметры треугольников ABE, BCE, CDE равны. Докажите, что $BC=\frac{1}{2}AD$.

90. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M, биссектриссы углов C и D пересекаются в точке T. Докажите, что отрезок MT параллелен основаниям трапеции, и найдите его длину, если $AD+BC=a$, $AC+BD=b$.

91. Постройте трапецию: а) по четырем сторонам; б) по двум основаниям и двум углам при одном из них; в) по двум основаниям и двум диагоналям.

92. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник — трапеция.

93. Докажите, что в трапеции середины диагоналей и середины боковых сторон лежат на одной прямой.

94. Основания трапеции равны a и b ($a>b$). Найдите: а) длину отрезка, высекаемого диагоналями на средней линии; б) длину отрезка, соединяющего середины оснований, если дополнительно известно, что сумма углов при одном из них равна $90°$.

95. Разрежьте правильный шестиугольник: а) на восемь равных трапеций; б) на шесть равных трапеций.

§ 4. Симметрия четырехугольников и других фигур

10. Осевая симметрия. *Серединным перпендикуляром к отрезку* называется прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная к нему. На рисунке 35 прямая a — серединный перпендикуляр к отрезку AA_1.

Две точки A и A_1 называются *симметричными относительно прямой* a, если эта прямая является серединным перпендикуляром к отрезку AA_1. Точки A и A_1 на рисунке 35 симметричны относительно прямой a. Каждая точка прямой a (например, точка M на рис. 35) считается симметричной самой себе относительно a.

Фигура называется *симметричной относительно прямой* a, если для каждой точки фигуры симметричная ей относительно прямой a точка также принадлежит этой фигуре. Прямая a называется *осью симметрии* фигуры. Говорят также, что фигура обладает *осевой симметрией.*

На рисунке 36 изображена фигура, обладающая осевой симметрией. Если перегнуть этот рисунок по оси симметрии (прямой a), то левая по отношению к прямой a часть фигуры в точности совместится с правой частью фигуры, в частности, произвольная точка A фигуры наложится на симметричную ей точку A_1.

З а д а ч а 1. Доказать, что серединный перпендикуляр к отрезку является его осью симметрии.

Р е ш е н и е. Обратимся к рисунку 37, на котором прямая a является серединным перпендикуляром к отрезку AB: она проходит через середину O этого отрезка и перпендикулярна к нему. Возьмем произвольную точку M отрезка AB (она может совпадать с A или B) и отметим точку M_1, также лежащую на отрезке AB и такую, что $OM_1 = OM$ (см. рис. 37). Прямая a является серединным перпендикуляром к отрезку MM_1, и, значит, точки M и

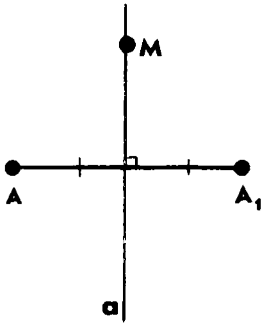


Рис. 35

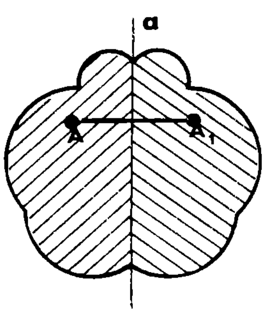


Рис. 36. Прямая a — ось симметрии фигуры

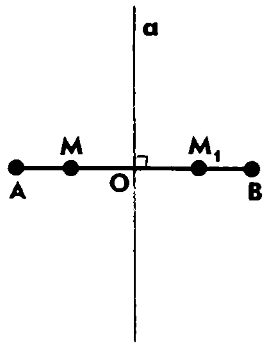


Рис. 37

M_1 симметричны относительно этой прямой. Итак, для каждой точки M отрезка AB симметричная ей относительно прямой a точка M_1 также лежит на отрезке AB. Следовательно, прямая a — ось симметрии отрезка AB, что и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать, что прямая, проходящая через середины противоположных сторон прямоугольника, является его осью симметрии.

Решение. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, в котором точки M и N — середины сторон BC и AD (рис. 38). Докажем, что прямая MN — ось симметрии этого прямоугольника. Согласно определению нужно доказать, что для любой точки K прямоугольника $ABCD$ симметричная ей относительно прямой MN точка K_1 также принадлежит прямоугольнику. Заметим прежде всего, что прямая MN перпендикулярна к сторонам BC и AD (объясните почему) и, следовательно, является серединным перпендикуляром к этим сторонам. Поэтому для любой точки K, взятой на стороне BC или AD, симметричная ей относительно прямой MN точка K_1 также лежит на этой стороне (это доказано в задаче 1 этого пункта). Пусть точка K лежит на стороне AB или CD. Возьмем, например, точку K на отрезке AB (рис. 38) и проведем через точку K прямую, перпендикулярную к прямой MN. Она пересекает сторону CD в точке K_1, а прямую MN в точке O. Так как прямые AB, MN и CD параллельны (объясните почему) и $AN=ND$, то по теореме Фалеса $KO=OK_1$. Поэтому прямая MN — серединный перпендикуляр к отрезку KK_1, и, значит, точка K_1 симметрична точке K относительно прямой MN, причем точка K_1 принадлежит прямоугольнику $ABCD$.

Итак, для каждой точки K прямоугольника $ABCD$ симметричная ей относительно прямой MN точка K_1 также принадлежит прямоугольнику $ABCD$, т. е. прямая MN — ось симметрии прямоугольника, что и требовалось доказать.

Задача 3. Доказать, что прямая, содержащая диагональ ромба, является его осью симметрии.

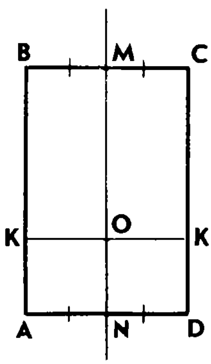


Рис. 38

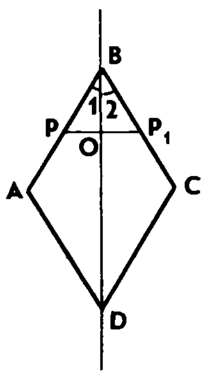


Рис. 39

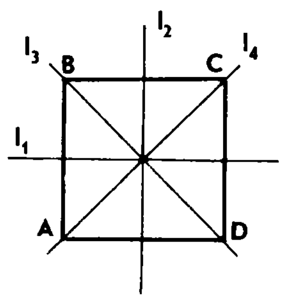


Рис. 40

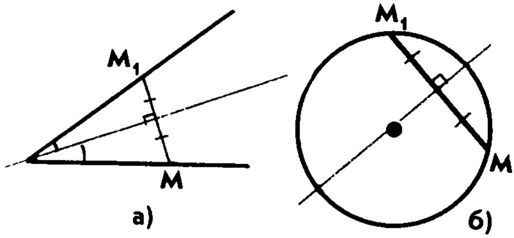


Рис. 41

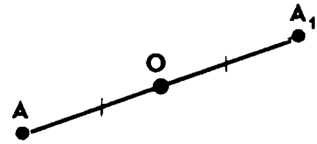


Рис. 42

Решение. Рассмотрим ромб $ABCD$ и докажем, что прямая BD — ось симметрии ромба. Возьмем произвольную точку P, принадлежащую ромбу. Пусть она лежит, например, на стороне AB (рис. 39). Проведем через точку P прямую, перпендикулярную прямой BD. Она пересекает прямую BD в точке O, а сторону BC в точке P_1. Прямоугольные треугольники POB и P_1OB равны по катету и острому углу (OB — общий катет, углы 1 и 2 равны, так как диагональ BD ромба делит угол B пополам). Из равенства треугольников следует, что $PO = OP_1$. Таким образом, прямая BD — серединный перпендикуляр к отрезку PP_1, и, значит, точка P_1, лежащая на стороне BC, симметрична точке P относительно прямой BD.

Мы доказали, что для любой точки P ромба симметричная ей относительно прямой BD точка P_1 также принадлежит ромбу. Это означает, что прямая BD — ось симметрии ромба, что и требовалось доказать.

Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и всеми свойствами ромба. Поэтому у него есть такие же две оси симметрии, как у любого прямоугольника, и еще такие же две оси симметрии, как у любого ромба. Таким образом, квадрат имеет четыре оси симметрии (рис. 40).

Фигура может иметь только одну ось симметрии. Примером такой фигуры является неразвернутый угол. Его осью симметрии является прямая, содержащая биссектрису угла (рис. 41, *а*).

Существуют фигуры, не имеющие ни одной оси симметрии (например, параллелограмм, отличный от прямоугольника и ромба), и фигуры, имеющие бесконечно много осей симметрии (например, окружность: для нее любая прямая, проходящая через центр, является осью симметрии, рис. 41, *б*).

11. Центральная симметрия. Две точки A и A_1 называются *симметричными относительно точки O*, если точка O — середина отрезка AA_1 (рис. 42). Точка O считается симметричной самой себе.

Фигура называется *симметричной относительно точки O*, если для каждой точки фигуры симметричная ей относительно точки O точка также принадлежит этой фигуре. Точка O называется *центром симметрии* фигуры. Говорят также, что фигура обладает *центральной симметрией*.

2 Заказ 127

На рисунке 43 изображена фигура, обладающая центральной симметрией. Если повернуть эту фигуру на 180° вокруг центра симметрии — точки O, то она совместится сама с собой, в частности, произвольная точка A фигуры перейдет в симметричную ей точку A_1, а точка A_1 — в точку A.

З а д а ч а 4. Доказать, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

Р е ш е н и е. Пусть диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 44). Докажем, что точка O — центр симметрии этого параллелограмма.

Возьмем произвольную точку M, принадлежащую параллелограмму. Если она совпадает с вершиной параллелограмма, то симметричной ей относительно точки O является противоположная вершина. Пусть точка M лежит, например, на стороне BC. Проведем прямую MO. Она пересекает сторону AD в некоторой точке M_1. Треугольники BOM и DOM_1 равны по стороне и двум прилежащим углам ($BO=OD$, так как точка O делит диагональ BD пополам; углы 1 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей BD; углы 3 и 4 равны как вертикальные). Из равенства треугольников следует, что $MO=OM_1$, и, значит, точка M_1 симметрична точке M относительно точки O.

Итак, для каждой точки M параллелограмма $ABCD$ симметричная ей относительно O точка M_1 также принадлежит параллелограмму. Следовательно, точка O — центр симметрии параллелограмма, что и требовалось доказать.

Фигура может иметь центр симметрии, как, например, параллелограмм, и может не иметь центра симметрии. Примером фигуры, не имеющей центра симметрии, является треугольник.

З а д а ч а 5. Доказать, что если фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то точка их пересечения является центром симметрии фигуры.

Р е ш е н и е. Пусть взаимно перпендикулярные прямые l_1 и l_2 — оси симметрии фигуры F. Докажем, что точка O пересечения прямых l_1 и l_2 является центром симметрии этой фигуры.

Возьмем сначала произвольную точку A фигуры F, не лежащую на прямых l_1 и l_2. Построим точку A', симметричную точке A относительно l_1, а затем точку A_1, симметричную точке A' отно-

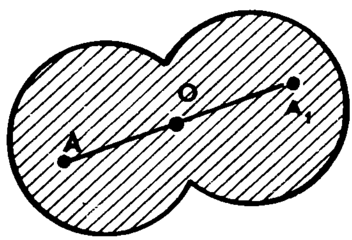


Рис. 43

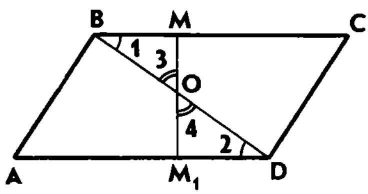


Рис. 44

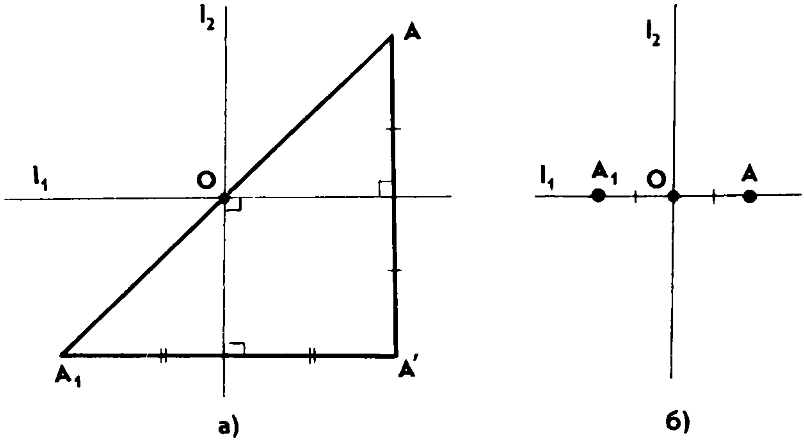


Рис. 45

сительно l_2 (рис. 45, *а*). Так как l_1 и l_2 — оси симметрии фигуры F, то точки A' и A_1 принадлежат этой фигуре. Рассмотрим треугольник $AA'A_1$. Согласно следствию из теоремы о средней линии треугольника прямые l_1 и l_2 проходят через середину стороны AA_1. Следовательно, середина отрезка AA_1 совпадает с точкой O, и, значит, точка A_1 симметрична точке A относительно точки O.

Тем самым мы доказали, что точка A_1, симметричная точке A фигуры F относительно точки O, также принадлежит этой фигуре. При этом мы рассмотрели случай, когда точка A не лежит на прямых l_1 и l_2. Если точка A фигуры F лежит на какой-то из этих прямых, например на прямой l_1 (рис. 45, *б*), то симметричная ей относительно точки O точка A_1 является также симметричной точке A относительно прямой l_2 и, значит, точка A_1 принадлежит фигуре F. Таким образом, для любой точки A фигуры F симметричная ей относительно O точка A_1 также принадлежит этой фигуре. Это и означает, что точка O — центр симметрии фигуры F.

Задачи

96. Приведите примеры фигур, имеющих бесконечно много центров симметрии.

97. Существует ли многоугольник, имеющий ровно два центра симметрии?

98. Сколько осей симметрии имеет правильный n-угольник?

99. Докажите, что четырехугольник, имеющий центр симметрии, является параллелограммом.

100. Может ли многоугольник иметь две параллельные оси симметрии?

ПЛОЩАДЬ

§ 1. Равносоставленные многоугольники

12. Задачи на разрезание многоугольников. Пусть M и N — какие-нибудь точки, лежащие на сторонах многоугольника. Если все точки ломаной (или отрезка), соединяющей точки M и N (кроме самих точек M и N), лежат внутри многоугольника, то говорят, что ломаная (отрезок) разбивает многоугольник на два многоугольника. На рисунке 46 ломаная MN разбивает многоугольник F на многоугольники F_1 и F_2. На рисунке 47, *а* многоугольник F разбит на многоугольники F_1, F_2, F_3, а на рисунке 47, *б* шестиугольник разбит на треугольники $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$.

Пусть многоугольник F разбит на многоугольники F_1, F_2, .., F_k. Рассмотрим какие-нибудь многоугольники F'_1, F'_2, ..., F'_k, соответственно равные F_1, F_2, ... ,F_k. Говорят, что *многоугольник F можно разрезать на многоугольники F'_1, F'_2, ... ,F'_k,* а *из многоугольников F'_1, F'_2, ... F'_k можно составить многоугольник F.* Задачи, в которых требуется разрезать данный многоугольник на какие-то определенные части (многоугольники) или, наоборот, составить из данных многоугольников новый многоугольник с заданными свойствами, называются *задачами на разрезание многоугольников.* Рассмотрим несколько примеров таких задач.

Задача 1. Разрезать треугольник на четыре равных треугольника.

Решение. Проведем средние линии данного треугольника (рис. 48). В результате треугольник окажется разбитым (разрезанным) на четыре равных треугольника. Эти треугольники равны друг другу по трем сторонам (стороны каждого из них в два раза меньше сторон данного треугольника).

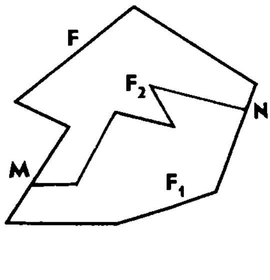


Рис. 46

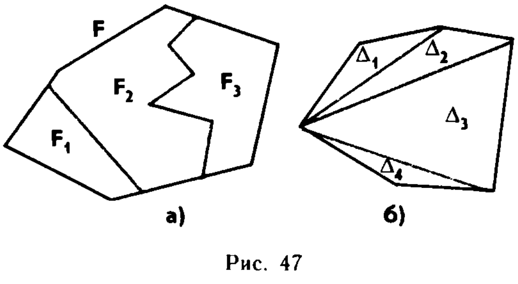


Рис. 47

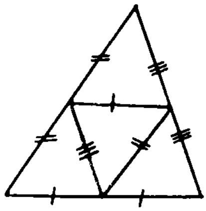


Рис. 48

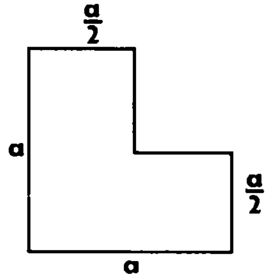


Рис. 49

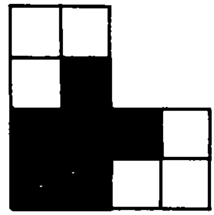
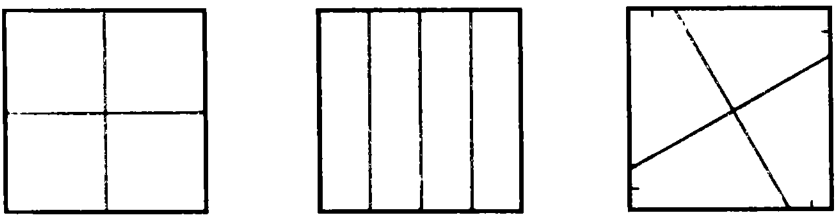


Рис. 50



а) б) в)

Рис. 51

Задача 2. Из квадрата со стороной a вырезан квадрат со стороной $\frac{a}{2}$ так, как показано на рисунке 49. Разрезать полученную фигуру на четыре равных многоугольника.

Решение. Данная фигура состоит из трех квадратов со стороной $\frac{a}{2}$. Разрежем каждый из них на четыре квадрата со стороной $\frac{a}{4}$ (рис. 50). В результате наша фигура окажется разрезанной на четыре равные части, каждая из которых состоит из трех квадратов со стороной $\frac{a}{4}$.

Отметим, что задачи на разрезание не всегда имеют единственное решение. Так, рисунок 51, *а, б, в* иллюстрирует три различных решения задачи о разрезании данного квадрата на четыре равные части (доказательство проведите самостоятельно).

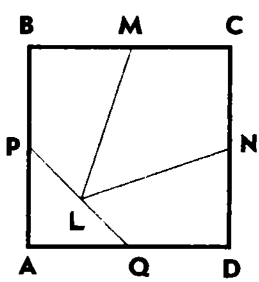


Рис. 52

В задачах 1 и 2 требовалось разрезать данный многоугольник на какие-то определенные части. Приведем теперь пример обратной задачи: из данных многоугольников требуется составить многоугольник с заданными свойствами.

Задача 3. На рисунке 52 изображен квадрат $ABCD$, разрезанный на четыре части (точки P, M, N и Q — середины его сторон, L — середина отрезка PQ). Требуется составить из этих частей равнобедренный треугольник.

Решение. Обратимся к рисунку 53. По условию

$$AP = BP = BM = CM = CN = DN = DQ = AQ,$$

углы A, B, C и D прямые, $\angle APQ + \angle BPL = 180°$, $\angle AQP + \angle DQL = 180°$, $\angle LMB + \angle LMC = 180°$, $\angle LND + \angle LNC = 180°$. Поэтому если сдвинуть четырехугольники в направлениях, указанных стрелками, то они составят с треугольником APQ один равнобедренный треугольник с основанием, равным диагонали квадрата.

13. Равносоставленные многоугольники. Задачу на разрезание многоугольника можно существенно усложнить, если поставить ее так: разрезать данный многоугольник на такие части, из которых можно составить другой многоугольник с определенными свойствами. Например, задачу 3 из предыдущего пункта можно было бы сформулировать так: доказать, что квадрат можно разрезать на такие части, из которых можно составить равнобедренный треугольник с основанием, равным диагонали квадрата. Решить такую задачу было бы значительно труднее — ведь надо было бы еще догадаться, как именно нужно разрезать квадрат!

Если один многоугольник можно разрезать на части и составить из них другой многоугольник, то такие многоугольники называются *равносоставленными*. Например, рассмотренные в задаче 3 квадрат и равнобедренный треугольник являются равносоставленными.

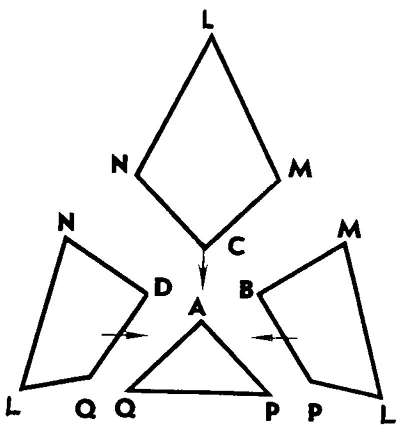


Рис. 53

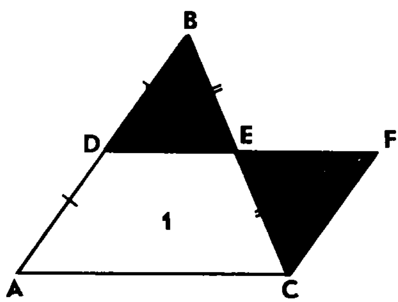


Рис. 54

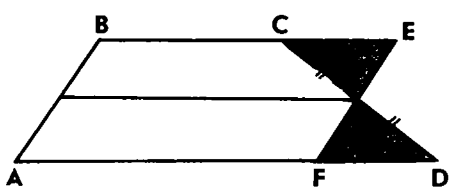


Рис. 55

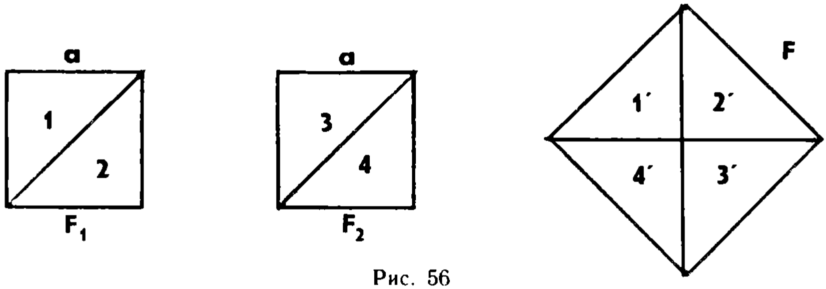


Рис. 56

Рассмотрим еще два примера равносоставленных многоугольников.

Задача 4. Доказать, что любой треугольник равносоставлен с параллелограммом, у которого основание совпадает с одной из сторон треугольника, а высота равна половине соответствующей высоты треугольника.

Решение. Проведем среднюю линию DE данного треугольника ABC (рис. 54) и продолжим ее до пересечения в точке F с прямой CF, параллельной AB. Треугольник DBE равен треугольнику FCE (объясните почему), следовательно, параллелограмм $ADFC$ равносоставлен с треугольником ABC, причем высота параллелограмма равна половине высоты треугольника (докажите это).

Задача 5. Доказать, что трапеция равносоставлена с параллелограммом, основание которого равно средней линии трапеции, а высота — высоте трапеции.

Используя рисунок 55, самостоятельно докажите это утверждение.

14. Задачи на разрезание нескольких фигур. Задачи на разрезание допускают дальнейшее усложнение: можно разрезать несколько данных многоугольников на части и составлять из них новый многоугольник. Или, наоборот, можно разрезать данный многоугольник на части и составлять из них несколько новых многоугольников. Эти задачи обычно формулируют так: доказать, что многоугольник F равносоставлен с многоугольниками F_1, F_2, ..., F_k.

На рисунке 56 изображены два равных квадрата F_1 и F_2 со стороной a и третий квадрат F с диагоналями, равными $2a$. Мы видим, что квадрат F равносоставлен с квадратами F_1 и F_2, так как все треугольники, обозначенные цифрами 1, 2, 3, 4 и 1′, 2′, 3′, 4′, соответственно равны друг другу.

Задача 6. Доказать, что пять равных квадратов равносоставлены с одним квадратом.

Решение. Возьмем четыре из пяти данных квадратов и разрежем каждый из них на треугольник и трапецию так, как показано на рисунке 57. Четыре трапеции приложим к сторонам пятого квадрата так, как показано на рисунке 58. Наконец, при-

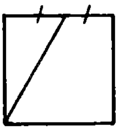


Рис. 57

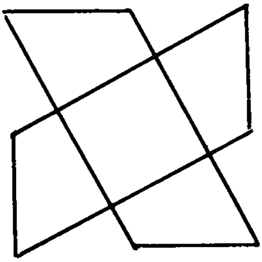


Рис. 58

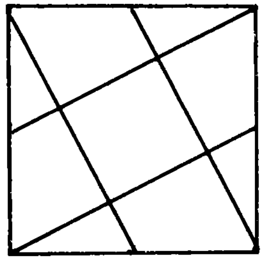


Рис. 59

ложим треугольники катетами к основаниям трапеций (рис. 59). Полученная фигура — квадрат (объясните почему).

Задача 7. Доказать, что квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равносоставлен с квадратами, построенными на катетах.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB=c$ и катетами $AC=b$ и $BC=a$. На сторонах треугольника построим квадраты $ABMD$, $BCEB_1$ и ACC_1A_1 так, как показано на рисунке 60. Можно доказать (сделайте это сами), что при таком расположении квадратов точка M окажется на отрезке B_1E, а точка D — на прямой A_1C_1. На рисунке одной дугой отмечены равные острые углы, а цифрами 1 и 1′, 2 и 2′, 4 и 4′ обозначены равные треугольники (докажите самостоятельно равенство отмеченных треугольников). Рисунок 60 показывает способ разрезания двух квадратов со сторонами a и b на части, из которых можно составить квадрат со стороной c. В самом деле, разрежем квадрат $BCEB_1$ со стороной a на части 1, 2 и 3, а квадрат ACC_1A_1 со стороной b на части 4 и 5. Затем треугольник 1 поместим на место треугольника 1′, треугольник 2 поместим временно на место треугольника 2′, а четырехугольник 3 оставим на месте. Далее треугольник 4 поместим на место треугольника 4′ и, наконец, треугольник ADA_1, состоящий из частей 2′ и 5, поместим на место равного ему треугольника ADD_1. В результате из частей 1, 2, 3 и 4, 5, на которые были разрезаны два квадрата со сторонами a и b, мы составим квадрат со стороной c. Итак, квадрат со стороной c равносоставлен с квадратами со сторонами a и b, что и требовалось доказать.

Сформулированное в этой задаче утверждение представляет собой знаменитую *теорему Пифагора* (VI в. до н. э.). В настоящее время известно более ста ее доказательств. Рисунок 61 иллюстрирует еще одно доказательство теоремы Пифагора (на этом рисунке через точку пересечения диагоналей нижнего квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые, одна из которых параллельна гипотенузе; доказательство проведите самостоятельно). Это доказательство было опубликовано лишь в 1873 г. Его автор — лондонский биржевой маклер Генри Перигел — был в таком восторге от своего открытия, что приказал отпечатать схему разрезания квадрата на своей визитной карточке.

Задача 8. Доказать, что два данных квадрата можно разрезать на треугольники, из которых можно составить квадрат.

Решение. Мы уже рассмотрели частный случай этой задачи, когда данные квадраты равны (см. рис. 56). Рассмотрим теперь случай, когда стороны a и b данных квадратов не равны. В этом случае отыскать способ разрезания квадратов на треугольники, из которых можно составить квадрат, совсем непросто. Однако задача 7 указывает путь решения данной задачи. В самом деле, рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=b$ и $BC=a$. Согласно задаче 7 квадрат, построенный на гипотенузе AB треугольника ABC, можно составить из многоугольников, которые получены разрезанием квадратов, построенных на катетах (рис. 60). Правда, по условию нашей задачи требуется разрезать два данных квадрата на треугольники, а части 3 и 5 на рисунке 60 — четырехугольники. Но каждую из этих частей можно разрезать на два треугольника. Таким образом, мы получили способ разрезания двух данных квадратов на треугольники, из которых можно составить квадрат.

Задача о разрезании двух квадратов допускает обобщение на случай любого числа квадратов: любые n данных квадратов ($n \geqslant 2$) можно разрезать на треугольники, из которых можно составить квадрат.

В самом деле, для двух квадратов это утверждение доказано. Пусть нам даны три квадрата 1, 2 и 3. Возьмем два из них, например 1 и 2, разрежем их на треугольники указанным выше способом и составим из них квадрат 4. Теперь у нас два квадрата 3 и 4. Разрежем их на треугольники и составим из них квадрат.

Итак, для трех квадратов это утверждение доказано. Далее аналогичным образом можно доказать это утверждение для че-

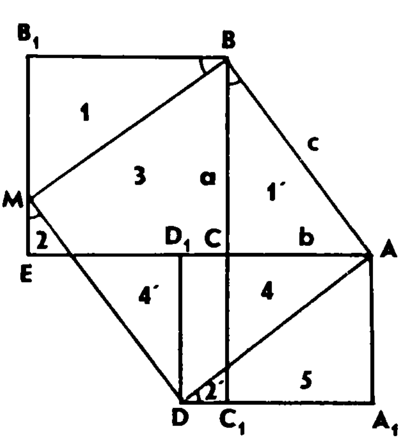


Рис. 60

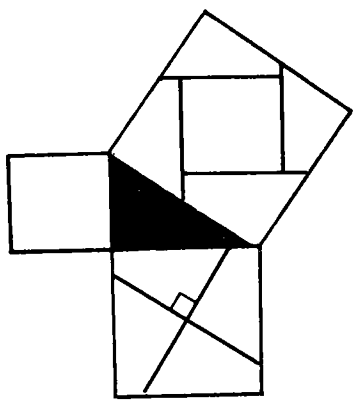


Рис. 61

тырех квадратов, затем для пяти и т. д. Общее рассуждение, позволяющее доказать, что любые n данных квадратов ($n \geqslant 2$) можно разрезать на треугольники, из которых можно составить квадрат, проводится с помощью *метода математической индукции.*

Поясним на примере нашей задачи, в чем состоит этот метод.

Мы знаем, что наше утверждение верно при $n=2$.

Предположим, что оно верно при $n=k$, и докажем, что тогда оно верно и при $n=k+1$.

Возьмем какие-нибудь два из данных $(k+1)$ квадратов, разрежем их известным нам способом на треугольники и составим из них новый квадрат. Теперь у нас стало k квадратов. Но по предположению k квадратов можно разрезать на треугольники и сложить из них один квадрат. Итак, если наше утверждение верно для $n=k$, то он верно и для $n=k+1$.

Теперь можно сделать вывод: утверждение доказано. В самом деле, наше утверждение верно для $n=2$. Но тогда оно верно и для $n=2+1=3$, а значит, и для $n=3+1=4$ и т. д.

Метод математической индукции состоит в следующем.

Пусть требуется доказать, что данное утверждение справедливо для любого натурального числа n. Для этого:

1^0. Проверяется справедливость этого утверждения для самого маленького n, при котором утверждение имеет смысл (в нашем случае для $n=2$);

2^0. Доказывается, что если утверждение верно для $n=k$, то оно верно и для $n=k+1$.

Тогда данное утверждение будет верным для любого n.

15. Разрезание квадрата на неравные квадраты. Среди всевозможных задач на разрезание многоугольников следует отметить задачу *о разрезании квадрата на меньшие квадраты, любые два из которых не равны друг другу.* Эта простая по формулировке задача оказалась в действительности очень трудной. До конца 30-х годов XX в. многие геометры считали, что она вообще не имеет решения. Лишь в 1939 г. немецкий математик Р. Шпраг сумел разбить квадрат на 55 попарно неравных квадратов. Приблизительно в это же время группа ученых Кембриджского университета в Англии установила глубокую связь между задачей о разрезании квадрата и теорией электрических цепей в физике[1]. Это позволило им в 1940 г. разрезать квадрат на 28 попарно неравных квадратов, чуть позже — на 26. Наконец, в 1948 г. англичанин Ф. Г. Уилкокс сумел снизить число квадратов до 24. Это разбиение квадрата изображено на рисунке 62.

Любопытно, что задача о разбиении куба на попарно неравные кубы меньших размеров значительно проще. Такое разбиение осуществить нельзя. Докажем это методом от противного. Предположим, что на столе перед нами лежит куб, разбитый на

[1] Об этом можно прочитать в книге Б. А. Кордемского и Н. В. Русалева «Удивительный квадрат» (М.: Столетие, 1994).

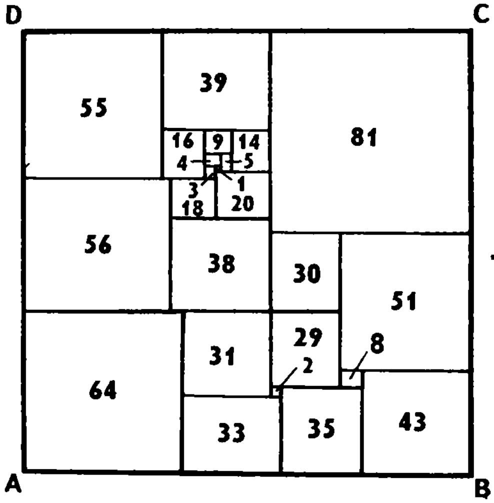


Рис. 62. Квадрат $ABCD$ разбит на 24 попарно неравных квадрата, где $AB = 175$, а числа указывают длины сторон соответствующих квадратов

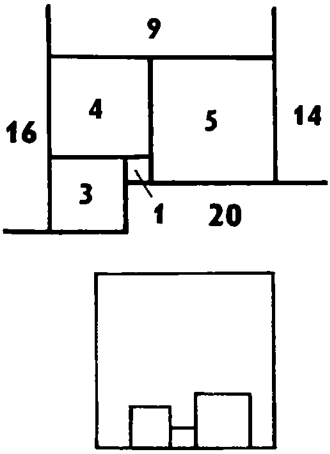


Рис. 63
Нижняя грань куба и лежащие на ней основания кубиков

попарно неравные кубики. Ясно, что нижняя грань куба будет при этом разбита нижними кубиками на попарно неравные квадраты. Самый маленький из этих квадратов не может прилегать к стороне нижней грани куба, так как в противном случае нельзя будет заполнить зазор между прилегающими к нему большими квадратами (рис. 63). Следовательно, самый маленький из кубиков, примыкающих к нижнему основанию, окружен со всех сторон другими кубами больших размеров. Эти кубы создают вокруг него своеобразный «забор», поэтому сверху на него могут опираться только кубы еще более меньших размеров. Выберем из них самый маленький и применим к нему те же рассуждения, что и к его предшественнику. Мы получим, что он тоже должен быть обложен кубами больших размеров, создающих вокруг него «забор», и т. д. Повторяя рассуждения, мы получим неограниченную последовательность все меньших и меньших кубов. Но это противоречит нашему предположению о том, что куб разбит на конечное число попарно неравных кубиков. Итак, наше предположение ошибочно и куб нельзя разбить на попарно неравные кубы.

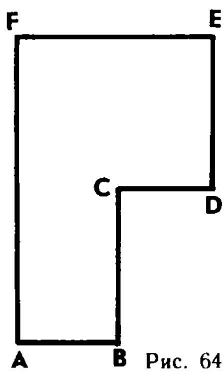


Рис. 64

Задачи

101. Докажите, что два параллелограмма с общим основанием и равными высотами равносоставлены.

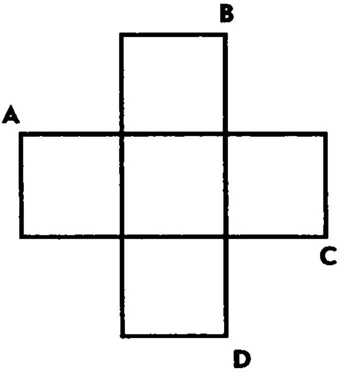


Рис. 65

102. В шестиугольнике $ABCDEF$, $AB=\frac{1}{2}EF$, $BC=\frac{1}{2}AF$, $\angle A=\angle B=\angle BCD=\angle D=\angle E=\angle F=90°$ (рис. 64). Разрежьте его на четыре равных многоугольника, из которых можно составить прямоугольник.

103. Разрежьте произвольный треугольник на три многоугольника. Составьте из них прямоугольник.

104. Прямоугольный треугольник с острым углом в 30° разрежьте: а) на три равных прямоугольных треугольника; б) на четыре равных прямоугольных треугольника.

105. Прямоугольник, стороны которого равны 4 и 9, разрежьте на два равных многоугольника так, чтобы из этих частей можно было составить квадрат.

106. Даны два квадрата со сторонами 6 и 8. Разрежьте каждый из квадратов на два многоугольника так, чтобы из полученных четырех частей можно было составить квадрат со стороной 10.

107. а) Фигуру, составленную из пяти равных квадратов, изображенную на рисунке 65, разрежьте на такие части, из которых можно составить квадрат. б) Из четырех частей квадрата (рис. 66, $BC=0{,}5AD$) составьте прямоугольный треугольник (рис. 67), меньший катет которого равен AD, а гипотенуза равна удвоенной гипотенузе треугольника 3.

108. Докажите, что произвольный разносторонний треугольник нельзя разрезать на два равных треугольника.

109. Через вершины A и D параллелограмма $ABCD$ проведены две параллельные прямые AE и DK, где E и K — точки прямой BC. Из точек A и E проведены перпендикуляры AF и EG к прямой DK. Докажите, что параллелограмм $ABCD$ и прямоугольник $AEGF$ равносоставлены.

110. Рисунок 68 иллюстрирует один из способов доказательства теоремы Пифагора. Пользуясь рисунком, докажите теорему.

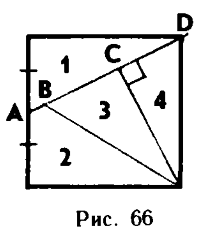


Рис. 66

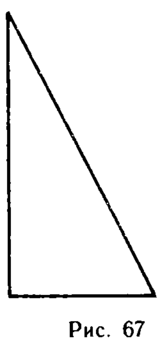


Рис. 67

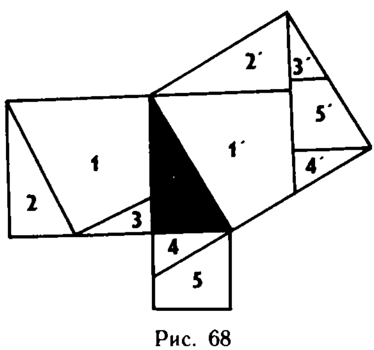


Рис. 68

16. Измерение площади многоугольника. Измерение площадей многоугольников проводится аналогично измерению длин отрезков. За единицу измерения площадей принимается квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков. Площадь этого квадрата считается равной единице. Измерить площадь многоугольника — значит узнать, сколько раз единица измерения и ее части укладываются в данном многоугольнике,— это число и принимается за его площадь.

Практически измерение площади многоугольника можно осуществить так. Расчертим лист бумаги на квадраты со стороной, равной единице измерения отрезков, и наложим на него данный многоугольник. Пусть m — число квадратов, полностью покрытых многоугольником, а n — число квадратов, покрытых многоугольником лишь частично (рис. 69). Число S, выражающее площадь многоугольника, заключено, таким образом, между числами $S_1=m$ и $S_1'=m+n$:

$$S_1 \leqslant S \leqslant S_1'.$$

Каждое из чисел S_1 и S_1' может рассматриваться как приближенное значение числа S (S_1 — с недостатком, S_1' — с избытком).

Для более точного измерения площади многоугольника разобьем каждый из n частично покрытых квадратов на 100 равных квадратиков. Ясно, что площадь каждого из них равна $\frac{1}{100}$. Пусть m_1 — число квадратиков, полностью покрытых нашим многоугольником, n_1 — число частично покрытых квадратиков. Очевидно, $m_1+n_1 \leqslant 100n$ (разность $100n-m_1-n_1$ представляет собой число квадратиков, не покрытых многоугольником даже частично). Теперь можно сказать, что число S заключено между числами $S_2=m+\frac{m_1}{100}$ и $S_2'=m+\frac{m_1+n_1}{100}$, т. е. $S_2 \leqslant S \leqslant S_2'$. При этом, очевидно, $S_2 \geqslant S_1$. С другой стороны, поскольку

$$m_1+n_1 \leqslant 100n, \text{ то } \frac{m_1+n_1}{100} \leqslant n$$

и поэтому

$$S_2' \leqslant S_1'.$$

Разобьем теперь каждый из n_1 частично покрытых квадратиков на 100 еще меньших равных квадратиков и повторим наши рассуждения. В результате получим новые неравенства: $S_3 \leqslant S \leqslant S_3'$, причем $S_3 \geqslant S_2$, а $S_3' \leqslant S_2'$. Вновь повторим аналогичные рассуждения и т. д. При этом будут получаться все новые и новые неравенства вида

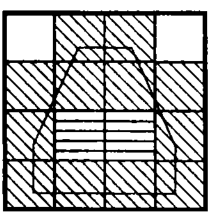


Рис. 69.

$m=2$, $n=10$

$$S_k \leqslant S \leqslant S_k', \quad S_1 \leqslant S_2 \leqslant \ldots \leqslant S_k, \quad S_1' \geqslant S_2' \geqslant \ldots \geqslant S_k',$$

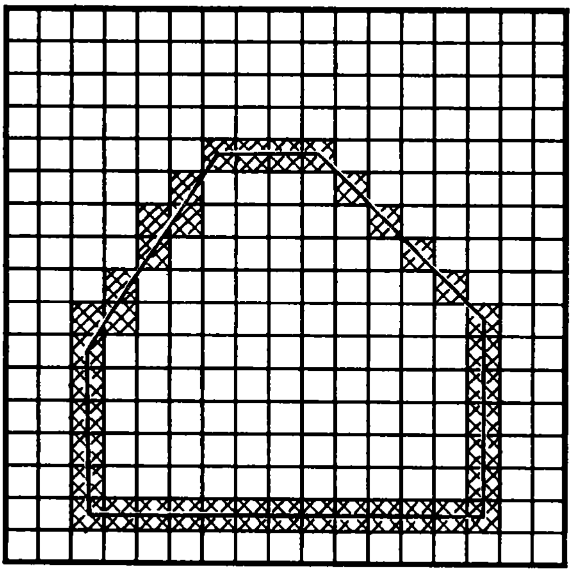


Рис. 70

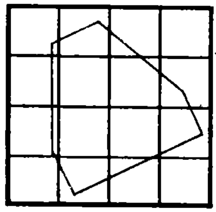


Рис. 71

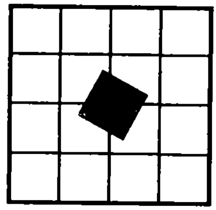


Рис. 72

причем разность $S'_k - S_k$ с увеличением k будет приближаться к нулю. Это следует из того, что разность $S'_k - S_k$ равна площади фигуры, составленной из квадратиков и покрывающей ломаную, ограничивающую многоугольник (на рисунке 70 многоугольник представлен в увеличенном масштабе). С увеличением k эта фигура все ближе и ближе «сжимается к ломаной» и поэтому ее площадь приближается к нулю. Следовательно, числа S_k и S'_k будут приближаться к S. В этом и состоит процесс измерения площади многоугольника, позволяющий найти приближенное значение S с произвольной точностью.

В связи с описанным процессом измерения площади многоугольника возникает вопрос: а если с самого начала положить данный многоугольник на расчерченный лист бумаги иначе (рис. 71), будет ли результат тот же? Ответ на этот вопрос положительный: результат измерения площади многоугольника, т. е. число S, не зависит от того, как мы положим его на лист бумаги, расчерченный на квадраты. Однако доказать это утверждение трудно даже в случае самых простых многоугольников, например квадрата (рис. 72). Мы не будем здесь приводить доказательства. Перейдем к свойствам площадей.

Рассмотрим два равных многоугольника и докажем, что их площади равны. Совместим многоугольники наложением и измерим их площади одновременно — результат, естественно, получится один и тот же. Итак:

1^0. *Равные многоугольники имеют равные площади.*

Рассмотрим теперь многоугольник F, составленный из многоугольников F_1 и F_2. При измерении его площади каждый квадрат, содержащийся целиком в многоугольнике F, либо целиком

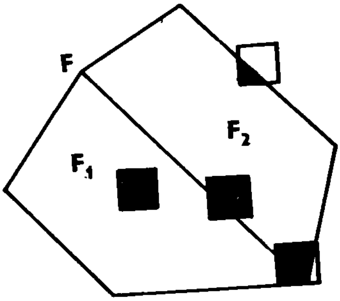


Рис. 73

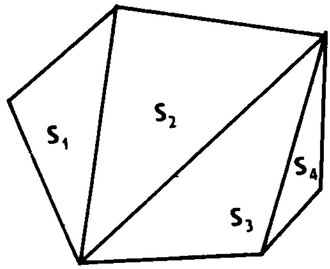


Рис. 74

содержится в одном из многоугольников F_1, F_2, либо часть его содержится в многоугольнике F_1, а другая часть — в многоугольнике F_2. То же относится и к частям квадратов, содержащихся в многоугольнике F лишь частично (рис. 73). Поэтому:

2^0. *Если многоугольник составлен из двух многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.*

Из этого следует, что

если многоугольник разбит на несколько многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

Так, на рисунке 74 многоугольник составлен из четырех многоугольников. Поэтому согласно свойству 2^0 его площадь равна сумме площадей S_1+S_2 и S_3+S_4, а значит, равна

$$S_1+S_2+S_3+S_4.$$

На основе свойств 1^0 и 2^0 можно вывести все формулы, выражающие площади многоугольников через их элементы (например, так, как это делается в школьных учебниках).

17. Равновеликие многоугольники. Два многоугольника называются *равновеликими*, если их площади равны. Примером равновеликих многоугольников могут служить (согласно свойству 1^0) любые равные многоугольники. Обратное утверждение, конечно, неверно: равновеликие многоугольники могут быть неравными. Так, изображенные на рисунке 75 прямоугольник и квадрат равновелики (площадь каждого из них равна 4 см^2), но они, очевидно, не равны друг другу.

В силу свойства 2^0 два равносоставленных многоугольника равновелики. А верно ли обратное утверждение: любые два рав-

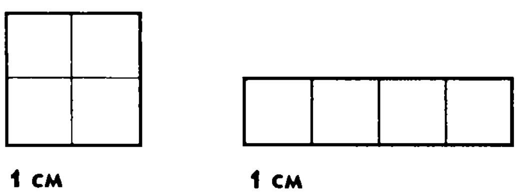


Рис. 75

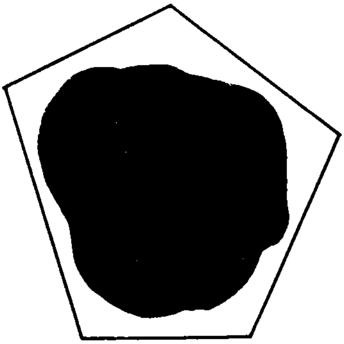


Рис. 76

новеликих многоугольника равносоставлены? Оказывается, верно. Это утверждение называется теоремой Бойяи-Гервина. Ф. Бойяи — венгерский математик — доказал эту теорему в 1832 г., а П. Гервин — немецкий математик-любитель — независимо от Ф. Бойяи доказал ее в 1833 г. Из этой теоремы, в частности, следует, что

любой многоугольник можно разрезать на такие части, из которых можно составить равновеликий этому многоугольнику квадрат.

Доказательство Гервина не очень сложное (в отличие от доказательства Бойяи), однако здесь мы его приводить не будем. Интересующиеся могут найти это доказательство в брошюре В. Ф. Кагана «О преобразовании многогранников» (Гостехиздат, 1933) или в брошюре В. Г. Болтянского «Равновеликие и равносоставленные фигуры» (Гостехиздат, 1956).

18. Площадь произвольной фигуры. Для измерения площади произвольной фигуры F поступают так. Рассматривают множество всех многоугольников, целиком содержащихся в фигуре F, и множество всех многоугольников, целиком содержащих в себе фигуру F (рис. 76). Ясно, что площадь каждого многоугольника из первого множества не превосходит площади любого многоугольника из второго множества (объясните почему). Если существует величина S, для которой как в первом, так и во втором множестве найдутся многоугольники, площади которых сколь угодно мало отличаются от S, то величина S и принимается за площадь данной фигуры. В качестве иллюстрации понятия площади произвольной фигуры рассмотрим одну задачу. Представим себе, что плоскость разбита на квадраты со стороной, равной единице измерения отрезков (рис. 77). Вершины этих квадратов образуют так называемую целочисленную решетку (рис. 78). Сформулируем теперь нашу задачу.

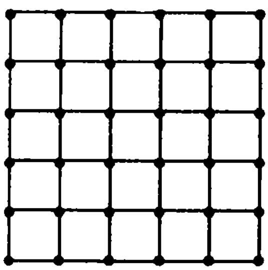


Рис. 77

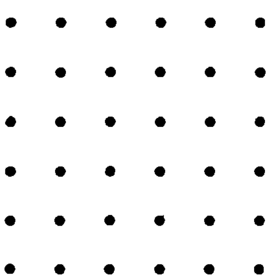


Рис. 78

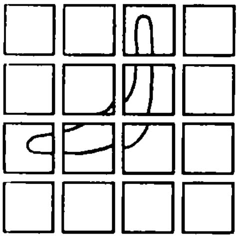


Рис. 79

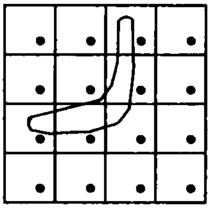


Рис. 80

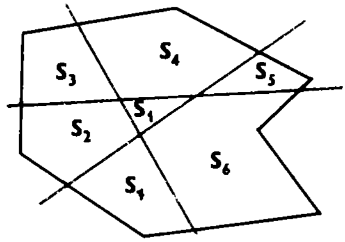


Рис. 81

З а д а ч а. Дана произвольная фигура, площадь которой (при выбранной единице измерения) меньше 1. Доказать, что фигуру можно расположить так, что ни одна из точек решетки не попадет на фигуру.

Р е ш е н и е. Представим себе, что решетка нарисована на прозрачной бумаге. Наложим эту бумагу на фигуру произвольным образом, скопируем на нее данную фигуру и закрасим копию в какой-то цвет. Затем разрежем бумагу на квадратики вдоль линий решетки (рис. 79), аккуратно, не переворачивая, положим эти квадратики один на другой (наподобие колоды карт) и посмотрим на образовавшуюся стопку квадратиков на просвет. Мы увидим что в некоторых местах закрашенные области квадратиков накладываются друг на друга, в других местах закрашенную область имеет лишь один квадрат, и обязательно найдутся прозрачные области, поскольку площадь каждого из квадратиков равна 1, а площадь фигуры меньше 1. Вооружимся иголкой и проткнем все наши квадратики в какой-нибудь точке прозрачной области.

Теперь разложим все квадратики так, как они лежали до разрезания (рис. 80). Мы увидим в каждом квадратике один след от нашего прокола. Следы эти образуют новую целочисленную решетку (объясните почему), причем ни одна из точек этой новой решетки не попадает на фигуру. Утверждение доказано.

Задачи

111. Каждая из трех прямых на рисунке 81 делит площадь многоугольника пополам. Докажите, что площадь треугольника, образованного этими прямыми, не превосходит $\frac{1}{4}$ площади многоугольника.

112. Площадь произвольной фигуры (при выбранной единице измерения) меньше целого числа k. Докажите, что на нее можно наложить целочисленную решетку так, что не более $(k-1)$ точек этой решетки попадет на фигуру.

113. Площадь произвольной фигуры (при выбранной единице измерения) больше целого числа k. Докажите, что на нее можно наложить целочисленную решетку так, что по крайней мере k точек этой решетки попадет на фигуру.

§ 3. Площади простейших многоугольников

19. Площадь треугольника. Напомним, что *площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту*. Из этого, в частности, следует, что

площади треугольников, имеющих одинаковые основания, относятся как их высоты, а площади треугольников, имеющих одинаковые высоты, относятся как их основания.

Эти следствия из теоремы о площади треугольника часто используются при решении задач. Приведем примеры.

Задача 1. Два непересекающихся отрезка делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника на три равные части. Доказать, что площадь той части четырехугольника, которая заключена между этими отрезками, в три раза меньше площади самого четырехугольника.

Решение. Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$ и проведем непересекающиеся отрезки PT и QR, делящие каждую из сторон AD и BC на три равные части (рис. 82). Требуется доказать, что $S_{PQRT}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$.

Проведем отрезки BT, PR, QD и обозначим площади шести образовавшихся треугольников так, как показано на рисунке 82. Треугольники ABT, TPR и RQD имеют равные основания, поэтому их площади относятся как высоты BB_1, PP_1 и QQ_1. Но четырехугольник BQQ_1B_1 — трапеция (или прямоугольник), а PP_1 — ее средняя линия. Поэтому

$$PP_1=\frac{BB_1+QQ_1}{2}.$$

Следовательно,

$$S_3=\frac{S_1+S_5}{2}.$$

Аналогично доказывается, что

$$S_4=\frac{S_2+S_6}{2}.$$

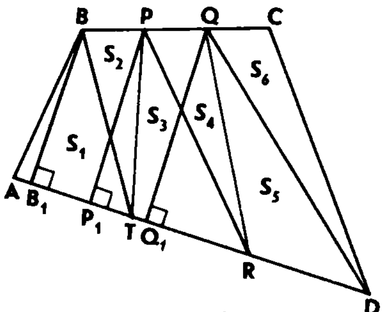


Рис. 82

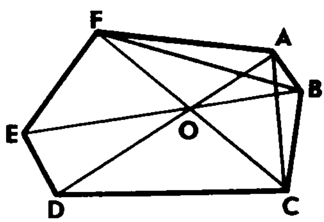


Рис. 83

Таким образом,

$$S_{PQRT}=S_3+S_4=\frac{S_1+S_2+S_5+S_6}{2}=\frac{S_{ABCD}-S_{PQRT}}{2}.$$

Из полученного равенства находим:

$$S_{PQRT}=\frac{1}{3}S_{ABCD},$$

и что требовалось доказать.

Задача 2. Доказать, что в выпуклом шестиугольнике, три диагонали которого пересекаются в одной точке, найдется диагональ, отсекающая от него треугольник, площадь которого не превосходит $\frac{1}{6}$ площади шестиугольника.

Решение. Пусть в выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ диагонали AD, BE и CF пересекаются в точке O (рис. 83). Тогда площадь по крайней мере одного из шести образовавшихся треугольников не превосходит $\frac{1}{6}S_{ABCDEF}$. Пусть это будет, например, треугольник AOB. В этом случае площадь хотя бы одного из треугольников ABC и AFB не превосходит площади треугольника AOB, так как эти треугольники имеют общее основание AB, а противолежащие этому основанию вершины лежат на одной прямой, причем точка O лежит между точками C и F. Если, например,

$$S_{ACB}\leqslant S_{AOB}, \text{ то } S_{ACB}\leqslant\frac{1}{6}S_{ABCDEF},$$

т. е. диагональ AC отсекает от шестиугольника $ABCDEF$ треугольник, площадь которого не превосходит $\frac{1}{6}$ площади шестиугольника.

Задача 3. На плоскости расположены n точек так, что площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не превосходит 1. Доказать, что все эти точки можно покрыть треугольником площади 4.

Решение. Среди всех треугольников с вершинами в данных точках выберем треугольник, площадь которого не меньше площади любого из остальных треугольников, и обозначим его ABC. Проведем прямую CD, параллельную прямой AB (рис. 84). Все данные точки будут лежать по ту же сторону от прямой CD, что и точки A и B (либо на прямой CD). В самом деле, если бы это было не так и нашлась бы какая-нибудь данная точка K по другую сторону от прямой CD, то мы получили бы,

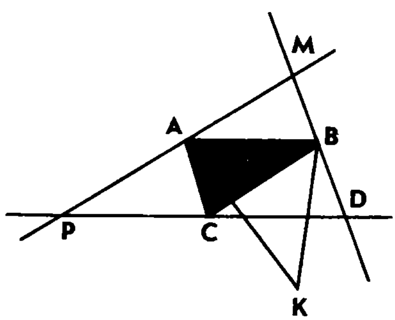


Рис. 84

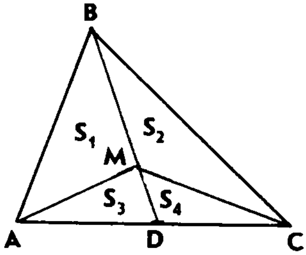


Рис. 85

что $S_{ABK} > S_{ABC}$, т. е. площадь треугольника ABC не была бы наибольшей. Аналогично, проведя прямые AP и BM, параллельные BC и AC соответственно, получим, что все данные точки лежат внутри треугольника, ограниченного прямыми CD, AP и BM, либо на его сторонах. Площадь этого треугольника в четыре раза больше площади треугольника ABC (докажите это), а последняя не превосходит 1 по условию. Следовательно, все n данных точек можно покрыть треугольником площади 4.

20. Теорема о точке пересечения медиан треугольника. Прежде чем сформулировать теорему, о которой говорится в названии пункта, решим следующую задачу:

Задача 4. Внутри треугольника ABC взята точка M. Доказать, что площади треугольников BAM и BCM равны тогда и только тогда, когда точка M лежит на медиане треугольника ABC, проведенной из вершины B.

Решение. Пусть луч BM пересекает сторону AC треугольника ABC в точке D (рис. 85). Тогда точка M лежит на отрезке BD. Обозначим через S_1, S_2, S_3 и S_4 площади треугольников BAM, BCM, ADM и CDM соответственно. Так как площади треугольников с равными высотами относятся как основания, то

$$S_1+S_3=\frac{AD}{DC}(S_2+S_4) \text{ и } S_3=\frac{AD}{DC}S_4.$$

Из этих равенств получаем:

$$S_1=\frac{AD}{DC}S_2. \qquad (1)$$

Если BD — медиана треугольника ABC, то $AD=DC$ и из равенства (1) имеем:

$$S_1=S_2.$$

Обратно, если $S_1=S_2$, то из равенства (1) имеем:

$$AD=DC,$$

т. е. BD — медиана треугольника ABC. Задача решена.

Сформулируем и докажем теперь теорему о точке пересечения медиан треугольника.

Теорема. ***Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.***

Доказательство. Обозначим буквой O точку пересечения двух медиан AA_1 и CC_1 треугольника ABC (рис. 86). Согласпо задаче 4 $S_{ABO}=S_{ACO}$ и $S_{CBO}=S_{CAO}$, поэтому $S_{ABO}=S_{CBO}$. Из этого равенства согласно той же задаче следует, что точка O лежит на медиане, проведенной из вершины B. Итак, три медианы треугольника пересекаются в точке O.

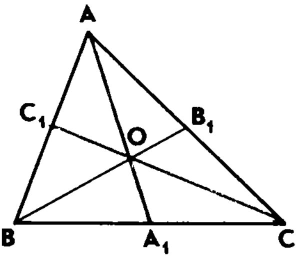


Рис. 86

Докажем, что $AO:OA_1=2:1$. Так как $S_{ABO}=S_{CBO}=S_{A_1BO}+S_{A_1CO}=2S_{A_1BO}$ и треугольники ABO и A_1BO имеют общую высоту, проведенную из вершины B, то их основания AO и OA_1 относятся как $2:1$. Это означает, что точка O пересечения медиан делит медиану AA_1 в отношении $2:1$, считая от вершины A. Аналогично можно доказать, что каждая из двух других медиан делится точкой O в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника. Теорема доказана.

Замечание. Эта теорема может быть «доказана», исходя из физических соображений. Предположим, что в вершинах треугольника ABC сосредоточены одинаковые массы m, и найдем центр масс системы точек A, B и C. Из курса физики известно, что центром масс системы двух точек M_1 и M_2, в которых сосредоточены соответственно массы m_1 и m_2, является точка O, лежащая на отрезке M_1M_2 и такая, что $m_1 \cdot OM_1=m_2 \cdot OM_2$. Поэтому центр масс системы двух точек B и C находится в середине A_1 отрезка BC (рис. 86), а центр масс системы трех точек A, B и C находится в той же точке, что и центр масс двух точек: точки A с массой m и точки A_1 с массой $2m$. Таким образом, центр масс системы трех точек A, B и C находится на медиане AA_1 треугольника ABC и делит эту медиану в отношении $2:1$, считая от вершины.

Но мы могли начать с масс, сосредоточенных в точках A и C (или A и B). Тогда мы обнаружили бы, что центр масс системы точек A, B и C находится на медиане BB_1 (или CC_1) и делит эту медиану в отношении $2:1$, считая от вершины. Следовательно, все медианы треугольника пересекаются в этой точке.

21. Треугольники, имеющие по равному углу. Напомним теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу.

Теорема. ***Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.***

Приведем два примера использования этой теоремы при решении задач и доказательстве теорем. Начнем с того, что докажем теорему о средней линии треугольника новым способом.

Теорема. ***Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.***

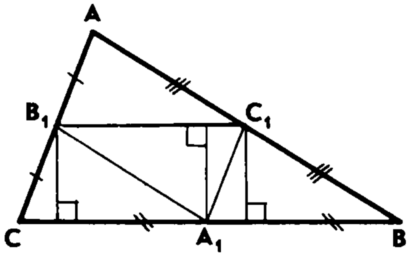


Рис. 87

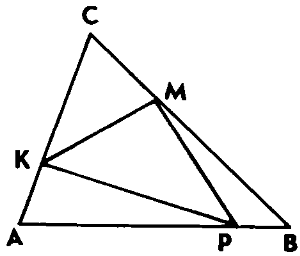


Рис. 88

Доказательство. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC (рис. 87). Треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общий угол A, поэтому их площади относятся как $\frac{AB\cdot AC}{AB_1\cdot AC_1}$. Но $AB_1=\frac{AC}{2}$, $AC_1=\frac{AB}{2}$.

Следовательно, $S_{AB_1C_1}=\frac{1}{4}S_{ABC}$.

Аналогично $S_{BA_1C_1}=\frac{1}{4}S_{ABC}$ и $S_{CA_1B_1}=\frac{1}{4}S_{ABC}$, а значит,

$$S_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{4}S_{ABC}.$$

Треугольники CA_1B_1 и BA_1C_1 имеют равные основания ($CA_1=A_1B$) и равные площади, поэтому их высоты равны. Следовательно, средняя линия B_1C_1 параллельна BC. Из этого следует, что такую же высоту, проведенную из вершины A_1, имеет и треугольник $A_1B_1C_1$. Но площади треугольников $A_1B_1C_1$ и A_1B_1C равны. Значит, основания этих треугольников также равны: $B_1C_1=A_1C=\frac{BC}{2}$. Теорема доказана.

Задача 5. Точки M, K и P лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC, причем $AK=\frac{1}{2}KC$, $CM=\frac{1}{3}MB$, $BP=\frac{1}{4}AP$ (рис. 88). Найти отношение площадей треугольников MPK и ABC.

Решение. По теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, получаем:

$$\frac{S_{APK}}{S_{ABC}}=\frac{AP\cdot AK}{AB\cdot AC}=\frac{\frac{4}{5}AB\cdot\frac{1}{3}AC}{AB\cdot AC}=\frac{4}{15},\text{ откуда } S_{APK}=\frac{4}{15}S_{ABC}.$$

Аналогично находим, что $S_{BMP}=\frac{3}{20}S_{ABC}$, $S_{CKM}=\frac{1}{6}S_{ABC}$.

Следовательно,

$$S_{MKP}=S_{ABC}-(S_{APK}+S_{BMP}+S_{CKM})=S_{ABC}-\frac{7}{12}S_{ABC}=\frac{5}{12}S_{ABC}.$$

Потому $S_{MKP}:S_{ABC}=5:12$.

22. Свойство средней линии треугольника. Мы неоднократно отмечали, что площадь треугольника, отсекаемого от данного треугольника его средней линией, в четыре раза меньше площади данного треугольника. Этот факт широко используется при решении задач. Приведем несколько примеров.

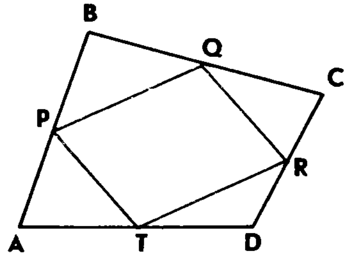


Рис. 89

Напомним, что по теореме Вариньона четырехугольник с вершинами в серединах сторон произвольного четырехугольника является параллелограммом. А можно ли связать площадь этого параллелограмма с площадью данного четырехугольника? Мы ответим на этот вопрос для выпуклого четырехугольника. Для невыпуклого ответ найдите сами.

З а д а ч а 6. Найти площадь параллелограмма, вершинами которого являются середины сторон выпуклого четырехугольника с площадью S.

Р е ш е н и е. Пусть P, Q, R, T — середины сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (рис. 89). Четырехугольник $PQRT$ получается из четырехугольника $ABCD$ отсечением четырех треугольников, поэтому для нахождения его площади достаточно найти сумму площадей этих треугольников. Отрезок PQ — средняя линия треугольника ABC, поэтому

$$S_{PBQ}=\frac{1}{4}S_{ABC}.$$

Аналогично

$$S_{TRD}=\frac{1}{4}S_{ADC}.$$

Складывая эти равенства, получаем:

$$S_{PBQ}+S_{TRD}=\frac{1}{4}(S_{ABC}+S_{ADC})=\frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

Точно так же

$$S_{TPA}+S_{QRC}=\frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

Следовательно,

$$S_{PQRT}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{2}S.$$

Решим еще две задачи.

З а д а ч а 7. Доказать, что из медиан данного треугольника можно построить треугольник, и найти отношение его площади к площади данного треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC. Достроим данный треугольник ABC до параллелограмма

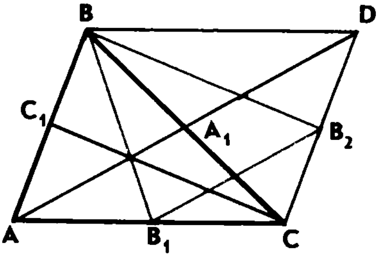


Рис. 90

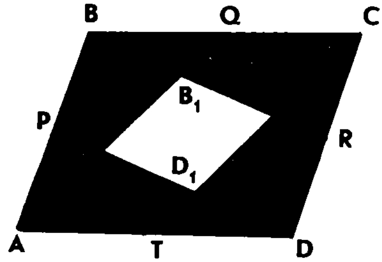


Рис. 91

$ABDC$ так, как показано на рисунке 90. Из равенства треугольников ABC и DCB следует, что медиана CC_1 треугольника ABC равна медиане BB_2 треугольника DBC. Отрезок B_1B_2 — средняя линия треугольника ADC, поэтому $B_1B_2=\frac{1}{2}AD=AA_1$. Итак, треугольник BB_1B_2 построен из медиан треугольника ABC. Осталось найти отношение его площади к площади треугольника ABC.

Пусть S — площадь треугольника ABC. Тогда площадь параллелограмма $ABDC$ равна $2S$. Треугольник BB_1B_2 получается из этого параллелограмма отсечением трех треугольников. Найдем их площади. Имеем:

$$\frac{S_{ABB_1}}{S}=\frac{AB_1}{AC}=\frac{1}{2}, \text{ откуда } S_{ABB_1}=\frac{S}{2}.$$

Аналогично

$$S_{BDB_2}=\frac{S}{2}.$$

Наконец,

$$S_{CB_1B_2}=\frac{1}{4}S_{CAD}=\frac{1}{8}S_{ABCD}=\frac{S}{4}.$$

Окончательно получаем:

$$S_{BB_1B_2}=2S-\frac{S}{2}-\frac{S}{2}-\frac{S}{4}=\frac{3}{4}S,$$

откуда

$$\frac{S_{BB_1B_2}}{S}=\frac{3}{4}.$$

Задача 8. Точки P, Q, R и T соответственно середины сторон AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$. Доказать, что при пересечении прямых AQ, BR, CT и DP образуется параллелограмм, и найти отношение его площади к площади параллелограмма $ABCD$.

Решение. Обратимся к рисунку 91. Противоположные стороны AT и QC четырехугольника $AQCT$ равны и параллельны, поэтому этот четырехугольник — параллелограмм. Следовательно, $AQ \parallel TC$. Аналогично $BR \parallel PD$, а значит, четырехугольник

$A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм. Найдем отношение его площади к площади параллелограмма $ABCD$.

Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ получается из параллелограмма $ABCD$ отсечением четырех треугольников (на рисунке 91 эти треугольники заштрихованы). Обозначим площадь параллелограмма $ABCD$ буквой S, а площади заштрихованных треугольников — S_1, S_2, S_3 и S_4 (см. рис. 91). Отрезок PA_1 — средняя линия треугольника ABB_1, поэтому $S_{AA_1P}=\frac{S_2}{4}$, а значит,

$$S_{APD}=S_1+\frac{1}{4}S_2.$$

С другой стороны,

$$S_{APD}=\frac{1}{2}S_{ABD}=\frac{1}{4}S_{ABCD}=\frac{1}{4}S.$$

Итак,

$$S_1+\frac{1}{4}S_2=\frac{1}{4}S.$$

Аналогично

$$S_2+\frac{1}{4}S_3=\frac{1}{4}S,\quad S_3+\frac{1}{4}S_4=\frac{1}{4}S,\quad S_4+\frac{1}{4}S_1=\frac{1}{4}S.$$

Складывая эти четыре равенства и вынося множитель $S_1+S_2+S_3+S_4$ за скобки, получим:

$$(S_1+S_2+S_3+S_4)\left(1+\frac{1}{4}\right)=S,$$

откуда

$$S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{4}{5}S,$$

а значит, $S_{A_1B_1C_1D_1}=\frac{1}{5}S$.

Таким образом, $\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S}=\frac{1}{5}$.

23. Площади параллелограмма и трапеции. Для нахождения площади произвольного многоугольника его обычно разбивают на треугольники и находят площадь каждого из них. Сумма площадей этих треугольников равна площади данного многоугольника. Этот прием, в частности, можно использовать для нахождения площадей параллелограмма и трапеции (рис. 92, *а*, *б*).

Площадь многоугольника можно найти и другими способами. Один из таких способов был указан Евклидом. Он состоит в построении треугольника, равновеликого данному многоугольнику. Поясним этот способ на примере выпуклого пятиугольника $ABCDE$, изображенного на рисунке 93. Построим равновеликий ему треугольник. Для этого через вершину B проведем прямую, параллельную диагонали AC пятиугольника. Она пересекает

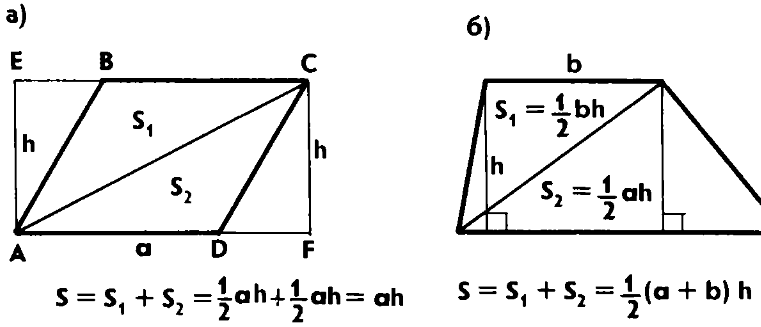


Рис. 92

прямую AE в точке F. Треугольники ABC и AFC равновелики, так как у них общее основание AC, а вершины B и F лежат на прямой, параллельной основанию AC. Итак, треугольник ABC можно заменить равновеликим ему треугольником AFC, в результате получим четырехугольник $FCDE$, равновеликий данному пятиугольнику. Далее аналогичным образом заменим треугольник CDE на равновеликий треугольник CEK. Получившийся в итоге треугольник CFK равновелик пятиугольнику $ABCDE$.

Применяя метод Евклида к трапеции, получаем другой способ вывода формулы площади трапеции. Действительно, рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями $AD=a$, $BC=b$ и высотой h (рис. 94). Проведем через вершину C прямую, параллельную диагонали BD, и обозначим буквой E точку пересечения этой прямой с прямой AD. Тогда $S_{ABCD}=S_{ABE}$. Четырехугольник $BCED$ — параллелограмм, поэтому $DE=BC=b$. Итак,

$$S_{ABCD}=S_{ABE}=\frac{1}{2}(a+b)\,h.$$

Установим еще одну формулу для площади трапеции.

Задача 9. Доказать, что площадь трапеции равна произведению боковой стороны и перпендикуляра, проведенного из середины другой боковой стороны на прямую, содержащую первую сторону.

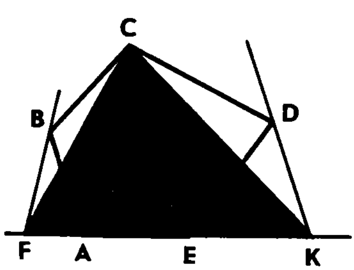


Рис. 93

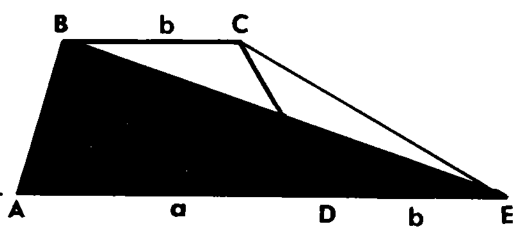


Рис. 94

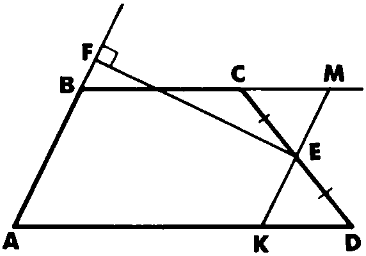


Рис. 95

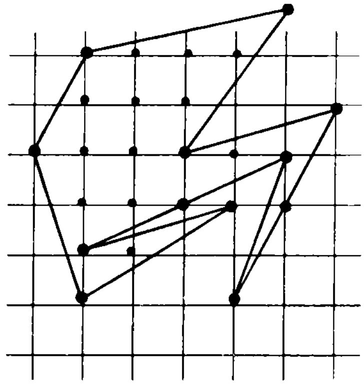


Рис. 96

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ точка E — середина боковой стороны CD, а EF — перпендикуляр к прямой AB (рис. 95). Через точку E проведем прямую, параллельную прямой AB и пересекающую прямые AD и BC в точках K и M соответственно. Четырехугольник $ABMK$ — параллелограмм, площадь которого равна $AB \cdot EF$. Этот параллелограмм и трапеция $ABCD$ равносоставлены, следовательно, равновелики, поэтому $S_{ABCD} = AB \cdot EF$, что и требовалось доказать.

24. Неожиданный способ нахождения площадей некоторых многоугольников. На рисунке 96 изображен десятиугольник, все вершины которого находятся в точках целочисленной решетки. Напомним, что площадь каждой клетки равна 1. Чему равна площадь десятиугольника? Ответ на этот вопрос можно дать почти сразу, проделав небольшие вычисления в уме! Для этого нужно воспользоваться следующей теоремой:

Теорема. ***Площадь многоугольника, все вершины которого расположены в точках целочисленной решетки, выражается числом $\left(m + \frac{n}{2} - 1\right)$, где m — количество точек решетки, находящихся внутри многоугольника, а n — количество точек решетки, лежащих на его границе.***

Доказательство. Для многоугольника с вершинами в точках целочисленной решетки условимся обозначать буквой R число $\left(m + \frac{n}{2} - 1\right)$, а буквой S число, выражающее его площадь. Наша задача тем самым — доказать, что для любого многоугольника указанного вида эти числа совпадают.

Центральное место в наших рассуждениях будет занимать следующий факт. Если два данных многоугольника с вершинами в точках целочисленной решетки составляют один многоугольник, то соответствующие им числа R_1 и R_2 связаны с числом R для многоугольника, составленного из двух данных, равенством $R = R_1 + R_2$. Докажем это утверждение. Пусть $(k+2)$ — количество точек решетки, лежащих на общей ломаной многоугольни-

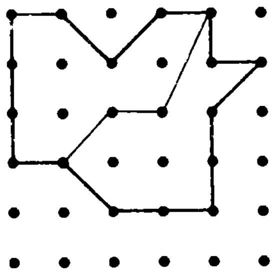


Рис. 97

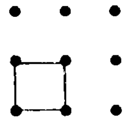


Рис. 98

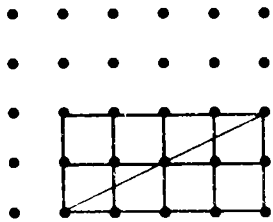


Рис. 99

ков (два конца и k внутренних точек этой ломаной). Тогда внутри большого многоугольника окажется (m_1+m_2+k) точек решетки, где m_1 — число точек решетки, лежащих внутри первого, а m_2 — внутри второго многоугольника (рис. 97). Иными словами, $m=m_1+m_2+k$. На границу большого многоугольника попадут два конца ломаной, а также все точки решетки, лежащие на границах данных многоугольников, за исключением k точек, находящихся на общей ломаной. На границе первого многоугольника таких точек будет (n_1-k-2), на границе второго многоугольника (n_2-k-2). Таким образом,

$$n=2+(n_1-k-2)+(n_2-k-2)=n_1+n_2-2k-2.$$

Для числа R тем самым получаем:

$$R=m+\frac{n}{2}-1=(m_1+m_2+k)+\left(\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}-k-1\right)-1=$$
$$=\left(m_1+\frac{n_1}{2}-1\right)+\left(m_2+\frac{n_2}{2}-1\right)=R_1+R_2.$$

Итак,

$$R=R_1+R_2.$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Прежде всего, заметим, что для квадрата со стороной 1 (рис. 98) $R=0+\frac{4}{2}-1=1$. Но и площадь этого квадрата равна 1. Следовательно, для такого квадрата $R=S$.

Рассмотрим теперь прямоугольник, стороны которого лежат на линиях решетки (рис. 99). В силу доказанного число R для такого прямоугольника равно $(1+1+\ldots+1)=N$, где N — число единичных квадратов, содержащихся в этом прямоугольнике. Но и площадь прямоугольника равна N. Поэтому для такого прямоугольника $R=S$. Из этого следует, что аналогичное равенство имеет место и для прямоугольного треугольника, катеты которого лежат на линиях решетки (рис. 99), так как рассмотренный прямоугольник состоит из двух таких треугольников с общей гипотенузой.

Следовательно, это равенство верно и для любого треугольника (рис. 100), так как его можно получить из прямоугольника, последовательно отсекая от него прямоугольные треугольники, катеты которых лежат на линиях решетки.

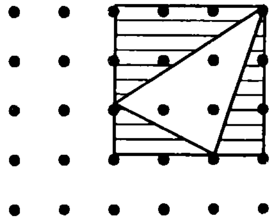


Рис. 100

Наконец, перейдем к заключительной части доказательства. Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что для произвольного $(n-1)$-угольника теорема уже доказана. Докажем, что в этом случае она верна и для произвольного n-угольника. Пусть $A_1A_2A_3 \dots A_n$ — такой n-угольник. Проведем в нем диагональ A_1A_3 (на рисунке 101, *а* эта диагональ лежит внутри многоугольника, а на рисунке 101, *б* — вне его). Согласно предположению для $(n-1)$-угольника $A_1A_3 \dots A_n$ формула $R=S$ верна. Аналогичная формула верна и для треугольника $A_1A_2A_3$. Число R для n-угольника отличается от числа R для $(n-1)$-угольника на соответствующее число для треугольника $A_1A_2A_3$. Но такими же соотношениями связаны и площади этих многоугольников. Следовательно, для n-угольника соотношение $R=S$ также верно. Теорема доказана.

Замечания. 1. Если бы мы ограничились рассмотрением только выпуклых многоугольников, то последняя часть доказательства значительно упростилась бы, поскольку всякий выпуклый многоугольник можно разрезать на треугольники диагоналями, проведенными из одной вершины (рис. 102).

2. Вернемся к десятиугольнику, изображенному на рисунке 96. Для него $m=12$, $n=12$, и, следовательно, $S=12+\frac{12}{2}-1=$ $=17$. Как видим, площадь этого десятиугольника легко вычисляется в уме.

Задачи

114. Может ли площадь треугольника быть: а) меньше 2 см^2, если любая его высота больше 2 см; б) больше 100 см^2, если любая его высота меньше 1 см; в) больше площади второго тре-

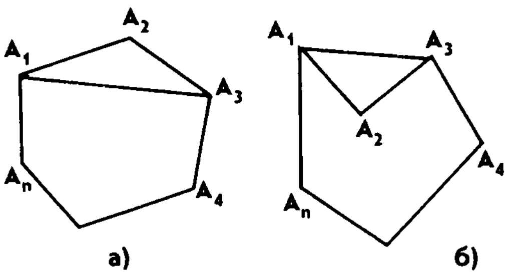


Рис. 101

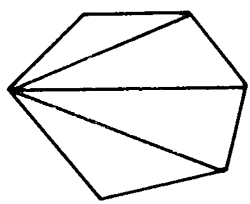


Рис. 102

угольника, если каждая сторона первого меньше 1 см, а каждая сторона второго больше 1 км?

115. Докажите, что площадь треугольника не превосходит половины произведения длин двух любых его сторон.

116. Длины двух сторон треугольника равны a и b, а высоты, проведенные к этим сторонам, равны h_a и h_b. Докажите, что $a:b=h_b:h_a$ (отношение двух сторон треугольника обратно пропорционально отношению высот, проведенных к этим сторонам).

117. Дан треугольник ABC. На продолжениях стороны AB за точку B, стороны BC за точку C и стороны CA за точку A отмечены соответственно точки C_1, A_1 и B_1 так, что $AB=BC_1$, $BC=CA_1$, $CA=AB_1$. Докажите, что отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равно $1:7$.

118. Сумма длин двух сторон треугольника равна p. Найдите наибольшее возможное значение его площади.

119. Докажите, что: а) сумма расстояний от любой точки основания равнобедренного треугольника до его боковых сторон равна высоте треугольника, проведенной к боковой стороне; б) разность расстояний от любой точки, лежащей на продолжении основания равнобедренного треугольника, до прямых, содержащих его боковые стороны,равна высоте треугольника, проведенной к боковой стороне; в) сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри равностороннего треугольника, до его сторон равна высоте треугольника.

120. Произвольная точка M, лежащая внутри правильного шестиугольника, соединена с его вершинами. Образовавшиеся при этом шесть треугольников с вершиной в точке M раскрашены попеременно в красный и синий цвета. Докажите, что сумма площадей красных треугольников равна сумме площадей синих треугольников.

121. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре части, площади которых, взятые последовательно, равны S_1, S_2, S_3, S_4. Докажите, что $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

122. Сторона AB треугольника ABC продолжена за точку A на отрезок AD, равный AC. На продолжении отрезка AD за точку D отмечена точка K, а на продолжении стороны BC за точку C — точка M так, что площади треугольников BDM и BKC равны. Найдите угол BKM, если $\angle BAC=\alpha$.

123. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равновелики, если $\angle A=\angle A_1$ и $AB:A_1B_1=A_1C_1:AC$.

124. Дан произвольный треугольник ABC. Докажите, что существует треугольник $A_1B_1C_1$, равновеликий треугольнику ABC, у которого $\angle A_1=\angle A$, а сторона A_1B_1 равна данному отрезку MN.

125. Докажите, что если в треугольнике площади S одну сторону увеличить в n раз, а другую — в k раз, то площадь нового треугольника будет равна nkS.

126. На стороне AB треугольника ABC взята точка K, а на стороне BC — точка M так, что $BK:KA=2:5$, $BM:MC=7:3$.

Найдите отношение площади треугольника BKM к площади четырехугольника $AKMC$.

127. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки M и K, а на отрезке MK — точка P так, что $AM:MC=CK:KB=$ $=MP:PK=m:n$. Найдите отношение площадей треугольников AMP и BKP.

128. Точки M и K — середины сторон BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$, отрезки AM и BK пересекаются в точке P, отрезки DM и KC пересекаются в точке T. Докажите, что площадь четырехугольника $PMTK$ равна сумме площадей треугольников ABP и CDT.

129. На отрезке PQ прямой, проходящей через середину диагонали BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ и параллельной диагонали AC, отмечена произвольная точка M. Точка P принадлежит стороне AD, точка Q — стороне CD. а) Докажите, что площадь четырехугольника $ABCM$ равна площади четырехугольника $ADCM$. б) Найдите множество всех точек M, для которых выполняется равенство пункта а). в) Найдите внутри четырехугольника $ABCD$ точку M, такую, что отрезки, соединяющие эту точку с серединами сторон четырехугольника, делят его на четыре равновеликие части.

130. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ через середину O диагонали BD проведена прямая, параллельная диагонали AC. Она пересекает сторону AD в точке E. Докажите, что площади треугольника CDE и четырехугольника $ABCE$ равны.

131. Докажите, что медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников.

132. В параллелограммах $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ углы A и A_1 равны. Докажите, что данные параллелограммы равновелики тогда и только тогда, когда $AB:A_1B_1=A_1D_1:AD$.

133. Середины двух боковых сторон трапеции являются вершинами параллелограмма, две другие вершины которого лежат на прямой, содержащей основание трапеции. Докажите, что площадь параллелограмма равна половине площади трапеции.

134. Точка O лежит на прямой, содержащей диагональ AC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что площади треугольников AOB и AOD равны.

135. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята произвольная точка K. Докажите, что $S_{ADK}+S_{BCK}=S_{ABK}+S_{DCK}$.

136. Через точку D стороны BC треугольника ABC проведены прямые, параллельные двум другим сторонам и пересекающие стороны AB и AC в точках E и P соответственно. Докажите, что треугольники CDE и BDP равновелики.

137. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ взята точка M. Докажите, что площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки, симметричные точке M относительно середин сторон четырехугольника $ABCD$, вдвое больше площади четырехугольника $ABCD$.

138. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равны. Найдите площадь четырехугольника, если: а) его диагонали равны a и b; б) указанные отрезки взаимно перпендикулярны и равны c.

139. Диагонали четырехугольника равны. Найдите его площадь, если отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, равны a и b.

140. Площади двух треугольников с общим основанием равны S_1 и S_2, где $S_1 \neq S_2$. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах их боковых сторон.

141. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Одна из диагоналей четырехугольника с вершинами в этих точках параллельна стороне параллелограмма. Докажите, что площадь четырехугольника равна половине площади параллелограмма.

142. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ продолжена за точку B на отрезок BE, а сторона AD — за точку D на отрезок DK, причем точка C не лежит на прямой KE. Прямые ED и BK пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольники $ABOD$ и $CEOK$ равновелики.

143. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$ площади S и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найдите площадь четырехугольника $OMCD$.

144. В параллелограмме $ABCD$ точки P и K делят диагональ BD на три равные части. Точки M и E — середины сторон DC и CB. Найдите отношение площади четырехугольника $MEPK$ к площади параллелограмма.

145. Середина M боковой стороны CD трапеции $ABCD$ соединена отрезками с вершинами A и B. Докажите, что площадь треугольника AMB равна половине площади трапеции.

146. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. а) Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны. б) Найдите площадь трапеции, если площади треугольников BOC и AOD равны S_1 и S_2.

147. Найдите площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, а длина средней линии равна m.

148. Через концы меньшего основания трапеции проведены параллельные прямые, пересекающие большее основание. Эти прямые и диагонали трапеции разбивают эту трапецию на семь треугольников и один пятиугольник. Докажите, что площадь пятиугольника равна сумме площадей трех треугольников, примыкающих соответственно к боковым сторонам и меньшему основанию трапеции (рис. 103).

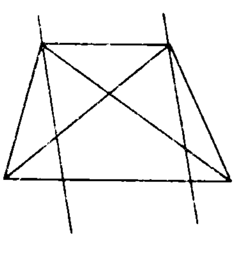


Рис. 103

149. Через вершины треугольника ABC проведены параллельные друг другу прямые, пересекающие противоположные сто-

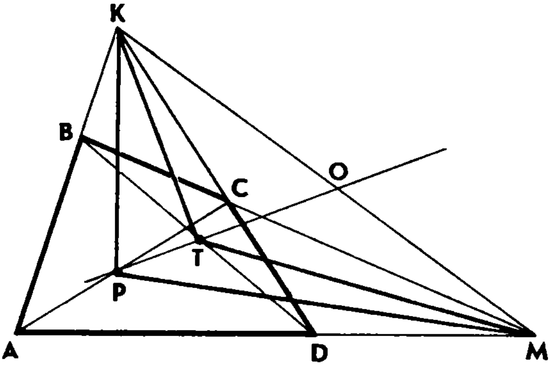


Рис. 104

роны или их продолжения соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$ равно $1:2$.

150. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника отсекает от него треугольник, площадь которого равна единице. Найдите площадь пятиугольника.

151. В параллелограмме $ABCD$ точки M и K — середины сторон CD и AD соответственно, P — точка пересечения отрезков AM и BK. Найдите отношение площади треугольника APK к площади параллелограмма.

152. В ромбе $ABCD$ угол A равен 60°, серединный перпендикуляр к стороне AD пересекает диагональ AC в точке M, а серединный перпендикуляр к стороне CD пересекает AC в точке P. Найдите отношение площади треугольника DMP к площади ромба.

153. Прямые, содержащие противоположные стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$, пересекаются в точках M и K, точки P и T — середины его диагоналей (рис. 104). Докажите, что: а) $S_{PMT}=S_{PKT}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$ (теорема Гаусса); б) середина O отрезка MK и точки P и T лежат на одной прямой (прямая Гаусса).

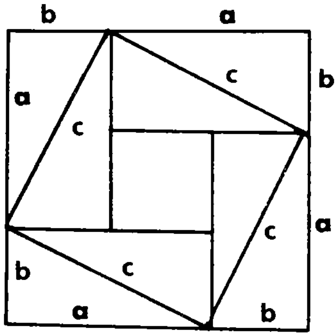
§ 4. Теорема Пифагора и ее приложения

25. Теорема Пифагора. Приведем три эквивалентные формулировки теоремы Пифагора.

1^0. *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

2^0. *Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.*

3^0. *Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равносоставлен с квадратами, построенными на катетах.*



$1^\circ\ (a+b)^2 = c^2 + 4\cdot\frac{ab}{2}$

$2^\circ\ c^2 = (a-b)^2 + 4.\frac{ab}{2}$

Рис. 105

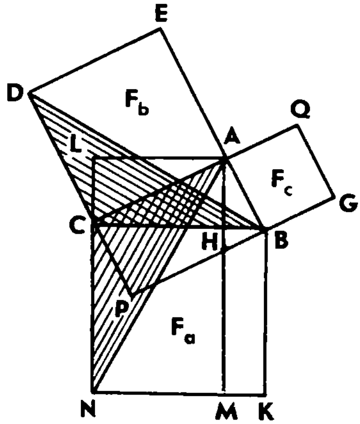


Рис. 106

Объясните, почему эти формулировки эквивалентны друг другу. Рисунок 105 иллюстрирует сразу два доказательства теоремы Пифагора.

Приведем еще одно доказательство этой замечательной теоремы, принадлежащее Евклиду. Введем обозначения для вершин квадратов F_a, F_b, F_c, построенных на сторонах прямоугольного треугольника ABC, как показано на рисунке 106. Проведем $AM \perp BC$. Тогда квадрат F_a разбивается на два прямоугольника. Докажем, что прямоугольник $CHMN$ равновелик квадрату F_b, а прямоугольник $MHBK$ равновелик квадрату F_c. Проведем отрезки DB и AN и рассмотрим треугольники BCD и ACN, заштрихованные на рисунке. Площадь треугольника BCD, имеющего основание CD, совпадающее со стороной квадрата $ACDE$, и высоту BP, равную стороне AC этого квадрата, равна половине площади квадрата $ACDE$. Площадь треугольника ACN, имеющего основание CN, общее с прямоугольником $CHMN$, и высоту AL, равную высоте CH этого прямоугольника, равна половине площади прямоугольника $CHMN$. Сравнивая эти два треугольника между собой, находим, что у них $CD = CA$ и $BC = CN$ (как стороны квадратов), и, кроме того, $\angle DCB = \angle ACN$, так как каждый из них состоит из общей части — угла ACB и прямого угла. Значит, треугольники DCB и ACN равны. Отсюда следует, что прямоугольник $CHMN$ равновелик квадрату F_b. Если провести отрезки GC и AK, то можно аналогично доказать, что прямоугольник $MHBK$ равновелик квадрату F_c. Отсюда следует, что площадь квадрата F_a равна сумме площадей квадратов F_b и F_c.

Замечательно, что свойство, указанное в теореме Пифагора, является характеристическим свойством прямоугольного треугольника. Это следует из теоремы, обратной теореме Пифагора.

Теорема. ***Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.***

26. Приложения теоремы Пифагора. Теорема Пифагора, а также теорема, обратная к ней, широко используются при доказательстве других теорем и решении задач. Рассмотрим примеры.

1) **Формула Герона.** Выведем формулу, выражающую площадь треугольника через длины его сторон. Эту формулу связывают с именем Герона Александрийского — древнегреческого математика и механика, жившего, вероятно, в I в. н. э. (годы его жизни точно не установлены). Герон уделял много внимания практическим приложениям геометрии.

Теорема. ***Площадь S треугольника, стороны которого равны a, b и c, вычисляется по формуле***

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p — полупериметр треугольника.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. Во всяком треугольнике по крайней мере два угла острые. Пусть A и B — острые углы треугольника ABC. Тогда основание H высоты CH треугольника лежит на стороне AB. Введем обозначения: $CH=h$, $AH=y$, $HB=x$ (рис. 107). По теореме Пифагора

$$a^2-x^2=h^2=b^2-y^2,$$

откуда

$$y^2-x^2=b^2-a^2, \text{ или } (y-x)(y+x)=b^2-a^2,$$

а так как $y+x=c$, то $y-x=\frac{1}{c}(b^2-a^2)$. Складывая два последних равенства, получаем:

$$2y=\frac{b^2-a^2}{c}+c, \text{ откуда } y=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c},$$

и, значит,

$$h^2=b^2-y^2=(b-y)(b+y)=\left(b-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b+\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)=$$
$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{2c}\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{2c}=$$
$$=\frac{(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)\,2p}{4c^2}=$$
$$=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}.$$

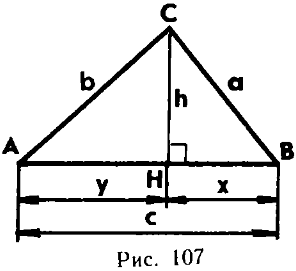


Рис. 107

Следовательно,

$$h=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}.$$

Но $S=\frac{1}{2}hc$, откуда и получаем формулу Герона. Теорема доказана.

Следствие. *Площадь равностороннего треугольника со стороной a выражается формулой* $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

2) **Существование треугольника, стороны которого равны данным отрезкам.** Воспользуемся теоремой Пифагора для решения следующей задачи:

Задача 1. Доказать, что если длины a, b и c трех отрезков удовлетворяют неравенствам $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$, то существует треугольник, стороны которого соответственно равны данным отрезкам.

Решение. Будем считать, что обозначения длин данных отрезков выбраны так, что $a \geqslant b \geqslant c$. Пусть $d=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$. Так как $b \geqslant c$, то $d>0$. Докажем, что $d<b$. По условию $b+c>a$, поэтому $a-b<c$, а так как $a-b \geqslant 0$, то $(a-b)^2<c^2$, откуда $a^2+b^2-c^2<2ab$. Разделив обе части на $2a$, получим:

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}<b, \text{ т. е. } d<b.$$

Построим теперь отрезок BC, равный a. На луче CB от его начала отложим отрезок CH, равный d (рис. 108). Так как $d<b \leqslant a$, то точка H лежит на отрезке BC. Через точку H проведем прямую, перпендикулярную к прямой BC, и на ней от точки H отложим отрезок HA, равный $\sqrt{b^2-d^2}$. Докажем, что треугольник ABC искомый. В самом деле, $BC=a$ по построению,

$$AC=\sqrt{CH^2+AH^2}=\sqrt{d^2+b^2-d^2}=b,$$
$$AB=\sqrt{AH^2+HB^2}=\sqrt{b^2-d^2+(a-d)^2}=$$
$$=\sqrt{b^2-d^2+a^2-2ad+d^2}=\sqrt{b^2+a^2-2ad}=$$
$$=\sqrt{b^2+a^2-2a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}}=\sqrt{b^2+a^2-b^2+c^2-a^2}=c.$$

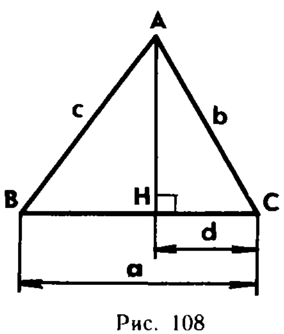


Рис. 108

Итак, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, т. е. стороны треугольника ABC равны данным отрезкам.

27. Изопериметрическая задача. Из формулы Герона следует, что если задать одну из сторон треугольника и его периметр, то его площадь будет принимать наибольшее значение в том случае, когда этот треугольник равнобедренный. В самом деле, если, например, заданы сторона a и периметр $2p$, то в выражении $p(p-a)(p-b)(p-c)$ два первых сомножителя окажутся заданными. Заданной

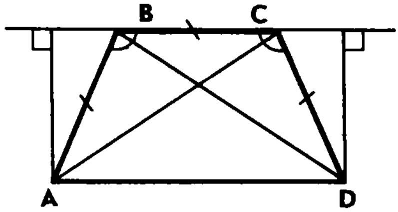


Рис. 109

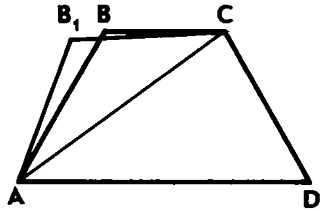


Рис. 110

окажется и сумма двух других сомножителей (она равна $2p-b-c=a+b+c-b-c=a$). Следовательно, все произведение принимает наибольшее значение тогда, когда эти два сомножителя равны: $p-b=p-c$. Отсюда следует, что $b=c$. Итак, из всех треугольников с данным основанием и данным периметром наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

Из этого, в свою очередь, следует, что из всех треугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник (объясните почему). Ниже мы докажем более общее утверждение. Но сначала решим следующую задачу:

Задача 2. Доказать, что из всех четырехугольников с данной стороной и данным периметром наибольшую площадь имеет трапеция с тремя равными сторонами (или квадрат, если данная сторона в четыре раза меньше данного периметра).

Решение. Пусть $ABCD$ — четырехугольник с данной стороной AD и данным периметром, имеющий наибольшую площадь (рис. 109). Этот четырехугольник, очевидно, выпуклый (объясните почему). Докажем, что $AB=BC=CD$ и $\angle B=\angle C$. Начнем с доказательства равенства сторон.

Допустим, например, что $AB\neq BC$ (рис. 110). Рассмотрим равнобедренный треугольник AB_1C, у которого $AB_1=B_1C$ и $AB_1+B_1C=AB+BC$. Этот треугольник имеет то же основание AC и тот же периметр, что и треугольник ABC, поэтому, согласно ранее доказанному, его площадь больше чем S_{ABC}. Рассмотрим четырехугольник AB_1CD с той же стороной AD и тем же периметром, что и у $ABCD$. Его площадь, очевидно, будет больше, чем S_{ABCD}. Полученное противоречие означает, что среди сторон AB, BC и CD рассматриваемого четырехугольника не может быть двух неравных.

Итак,

если четырехугольник с данной стороной и данным периметром имеет наибольшую площадь, то три другие стороны этого четырехугольника равны друг другу.

Перейдем теперь к доказательству равенства углов B и C, имея в виду, что $AB=BC=CD$. Предположим, что $\angle B\neq\angle C$ (рис. 111). Продолжим стороны AB и CD до пересечения в точке E (если прямые AB и CD пересекаются) и рассмотрим отрезок B_1C_1, симметричный отрезку BC относительно биссектрисы l угла

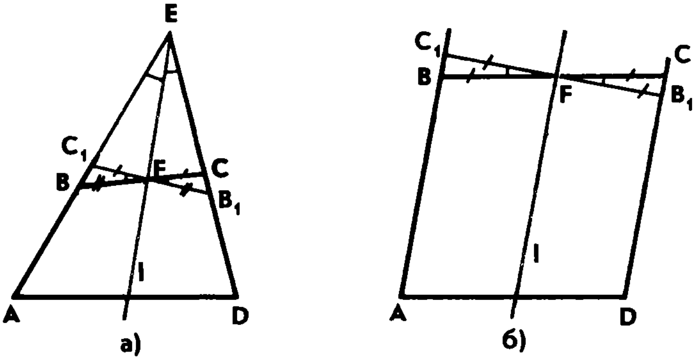


Рис. 111

AED (рис. 111, *а*); если же прямые AB и CD параллельны, то возьмем в качестве l параллельную им прямую, проходящую через середину отрезка BC (рис. 111, *б*). Треугольники BC_1F и B_1CF равны ($FC_1=FC$, так как эти отрезки симметричны относительно прямой l; аналогично $FB_1=FB$; углы при вершине F равны как вертикальные). Следовательно, $BC_1=B_1C$, $BC=B_1C_1$ и $S_{BC_1F}=S_{B_1CF}$. Рассмотрим четырехугольник AC_1B_1D. Он имеет ту же сторону AD, что и четырехугольник $ABCD$. Его периметр равен

$$AD+(AB+BC_1)+(CD-B_1C)+B_1C_1=AD+AB+CD+BC,$$

т. е. равен периметру четырехугольника $ABCD$. Его площадь, очевидно, также равна площади S_{ABCD}, и, следовательно, он также имеет наибольшую площадь. Но его стороны AC_1, B_1C_1 и B_1D уже не равны друг другу, что противоречит ранее доказанному. Следовательно, наше предположение ошибочно и $\angle B=\angle C$ (в этом случае два рассмотренных четырехугольника, очевидно, совпадают).

Из доказанных равенств $AB=BC=CD$ и $\angle B=\angle C$ следует, что $\triangle ABC=\triangle BCD$, а значит, высоты этих треугольников, проведенные из вершин A и D, также равны (см. рис. 109). Поэтому $ABCD$ — трапеция с тремя равными сторонами либо квадрат, если $AB=BC=CD=DA$.

Теорема. ***Из всех n-угольников с данным периметром наибольшую площадь имеет правильный n-угольник.***

Доказательство. Начнем со случая $n=4$. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, имеющий наибольшую площадь при данном периметре P. Докажем, что этот четырехугольник — квадрат. В самом деле, если $ABCD$ не квадрат, то он является трапецией с тремя равными сторонами (объясните почему). Пусть, например, $AB=BC=CD$, $DA\neq AB$ (рис. 112). Из всех четырехугольников со стороной AB и данным периметром P

наибольшую площадь имеет трапеция ABC_1D_1, у которой $BC_1 = C_1D_1 = D_1A$. Четырехугольник $ABCD$ таковой трапецией не является. Следовательно, его площадь меньше, чем $S_{ABC_1D_1}$. Но периметры четырехугольников $ABCD$ и ABC_1D_1 одинаковые, а значит, площадь четырехугольника $ABCD$ не является наибольшей при данном периметре. Полученное противоречие означает, что $ABCD$ — квадрат.

Рассмотрим теперь n-угольник ($n > 4$), который имеет наибольшую площадь при данном периметре (рис. 113). Любые его четыре последовательные вершины являются вершинами трапеции с тремя равными сторонами (иначе можно было бы отрезать четырехугольник с вершинами в этих точках и заменить его равнобедренной трапецией с тем же периметром, но большей площади). Но это и означает, что все стороны нашего n-угольника равны и все его углы также равны. Теорема доказана.

Замечание. Доказанная теорема представляет собой пример так называемой *изопериметрической задачи*: при заданном периметре (отсюда и название — изопериметрическая) ищется n-угольник с наибольшей площадью. Более сложная изопериметрическая задача состоит в отыскании такой замкнутой линии, которая при заданной длине ограничивает фигуру наибольшей площади. Этой линией оказывается окружность. В курсе высшей математики рассматривается широкий класс задач, в определенном смысле похожих на эти две. Имея в виду это сходство, все такие задачи называют изопериметрическими.

Задачи

154. Точка A лежит внутри угла C, равного 60°. Расстояния от точки A до сторон этого угла равны a и b. Найдите: а) расстояние от точки A до вершины C; б) площадь четырехугольника $ABCD$, если AB и AD — перпендикуляры, проведенные к сторонам угла.

155. В треугольнике ABC проведена высота BD. Отрезок AK перпендикулярен прямой AB и равен DC, отрезок CM перпендикулярен BC и равен AD. Докажите, что отрезки BM и BK равны.

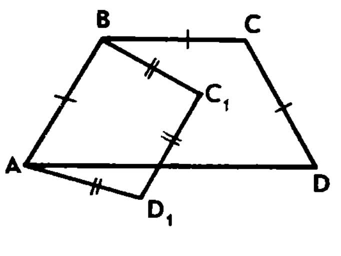


Рис. 112

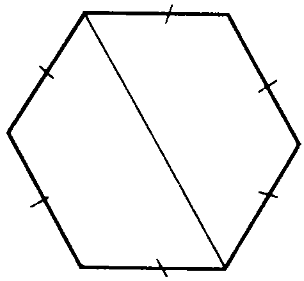


Рис. 113

156. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M так, что $MA=a$, $MB=b$, $MC=c$. Найдите MD.

157. Найдите площадь квадрата, вписанного в равносторонний треугольник со стороной a так, что две вершины квадрата лежат на одной стороне треугольника, а две другие — на двух других сторонах квадрата.

158. Докажите, что сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.

159. Отрезок AM — медиана треугольника ABC. Докажите, что

$$AM^2=\frac{1}{4}(2AB^2+2AC^2-BC^2).$$

160. Внутри прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB выбрана точка O так, что площади треугольников AOB, BOC и AOC равны. Докажите, что $OA^2+OB^2=5\cdot OC^2$.

161. Докажите, что в любом треугольнике квадрат стороны, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения какой-нибудь из этих сторон на отрезок ее от вершины острого угла до основания высоты, проведенной к этой стороне.

162. Докажите, что в тупоугольном треугольнике квадрат стороны, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон, сложенной с удвоенным произведением какой-нибудь из этих сторон на отрезок ее от вершины тупого угла до основания высоты, проведенной к этой стороне.

163. Докажите, что для любой точки M, лежащей на высоте AH треугольника ABC, выполняется условие

$$MB^2+AC^2=MC^2+AB^2.$$

164. Найдите площадь треугольника, если его высоты равны 3 см, 4 см и 6 см.

165. В треугольнике ABC $AB=13$ см, $BC=14$ см, $AC=15$ см. Внутри треугольника взята точка M, которая отстоит от прямой AB на 6 см, а от прямой BC на 3 см. Найдите расстояние от точки M до прямой AC.

166. В треугольнике ABC медианы AM и BN взаимно перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $AM=3$ см, $BN=4$ см.

167. Найдите площадь треугольника, если его медианы равны 9 см, 12 см и 15 см.

168. Диагонали трапеции равны 6 см и 8 см, а отрезок, соединяющий середины ее оснований, равен 5 см. Найдите площадь трапеции.

ГЛАВА III

ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

§ 1. Признаки подобия треугольников

28. Три признака подобия треугольников. Напомним определение подобных треугольников: *два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого* (рис. 114). Отношение сходственных сторон называется *коэффициентом подобия треугольников*. Оказывается, что у подобных треугольников не только отношение сходственных сторон, но и отношение любых других сходственных отрезков равно коэффициенту подобия. Например, отношение сходственных биссектрис AD и A_1D_1, т. е. биссектрис равных углов A и A_1 в подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 115), равно коэффициенту подобия k, отношение сходственных медиан AM и A_1M_1 равно k и точно так же отношение сходственных высот AH и A_1H_1 равно k. Для доказательства этих утверждений нам понадобятся признаки подобия треугольников. Вы знакомы с тремя признаками.

Первый признак подобия треугольников:

если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

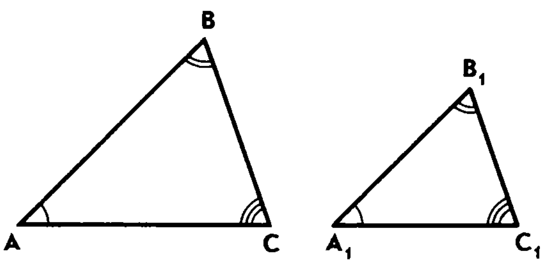


Рис. 114. $\triangle ABC \infty \triangle A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k,$$

k — коэффициент подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$

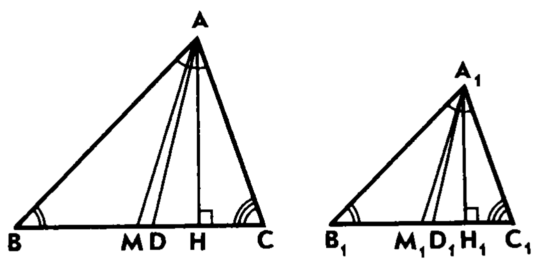


Рис. 115. AD и A_1D_1 — сходственные биссектрисы, AM и A_1M_1 — сходственные медианы, AH и A_1H_1 — сходственные высоты

Второй признак подобия треугольников:

если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны

Третий признак подобия треугольников:

если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Используя признаки подобия треугольников, докажем утверждения об отношении сходственных биссектрис, сходственных медиан и сходственных высот.

Задача 1. Доказать, что в подобных треугольниках: а) отношение сходственных биссектрис равно коэффициенту подобия; б) отношение сходственных медиан равно коэффициенту подобия; в) отношение сходственных высот также равно коэффициенту подобия треугольников.

Решение. Пусть AD и A_1D_1 — сходственные биссектрисы (рис. 116, *а*), AM и A_1M_1 — сходственные медианы (рис. 116, *б*), AH и A_1H_1 — сходственные высоты (рис. 116, *в*) в подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, а коэффициент подобия равен k.

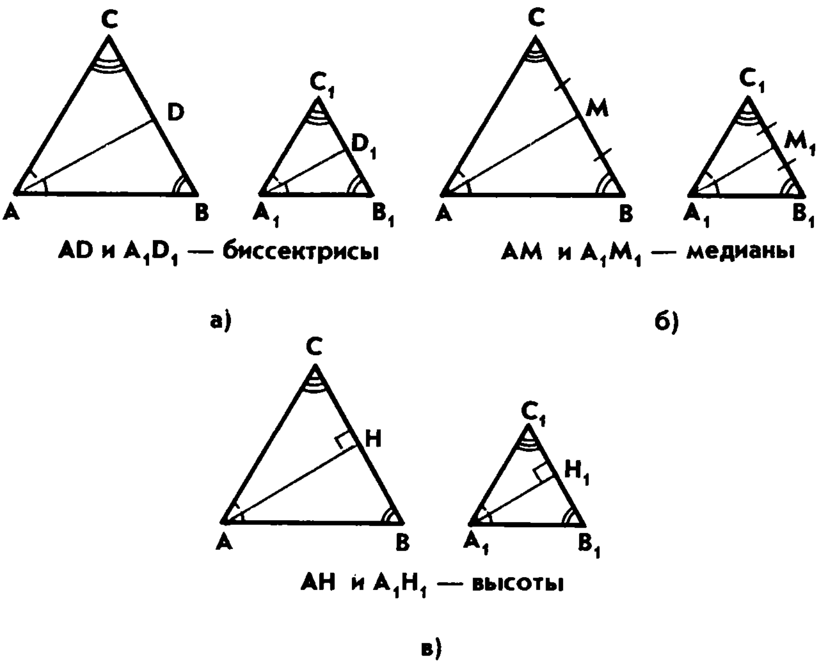


Рис. 116

а) Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ (рис. 116, *а*) подобны по двум углам ($\angle DAB = \angle D_1A_1B_1$, так как эти углы равны половинам равных углов A и A_1, $\angle B = \angle B_1$). Из подобия треугольников ABD и $A_1B_1D_1$ следует, что $\frac{AD}{A_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$. Но отношение $\frac{AB}{A_1B_1}$ равно коэффициенту k подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Следовательно, $\frac{AD}{A_1D_1} = k$.

б) Рассмотрим треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ (рис. 116, *б*). В этих треугольниках

$$\frac{AB}{A_1B_1} = k, \quad \frac{BM}{B_1M_1} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}B_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k,$$

откуда следует, что

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BM}{B_1M_1} = k.$$

Кроме того, $\angle B = \angle B_1$. Следовательно, треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ подобны по второму признаку и коэффициент подобия этих треугольников равен k. Отсюда следует, что $\frac{AM}{A_1M_1} = k$.

в) Пусть равные углы B и B_1 острые (рис. 116, *в*). Рассмотрим треугольники ABH и $A_1B_1H_1$. Эти треугольники подобны по двум углам ($\angle B = \angle B_1$, $\angle AHB = \angle A_1H_1B_1 = 90°$). Следовательно,

$$\frac{AH}{A_1H_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = k.$$

Если равные углы B и B_1 прямые или тупые, то равенство $\frac{AH}{A_1H_1} = k$ следует из подобия треугольников ACH и $A_1C_1H_1$. Итак, отношение сходственных высот равно коэффициенту подобия треугольников. Задача решена.

29. Другие признаки подобия треугольников. Рассмотренные признаки подобия треугольников (назовем их основными признаками) опираются на равенство некоторых углов в этих треугольниках и пропорциональность некоторых сторон. Поставим такой вопрос: а есть ли другие признаки, позволяющие установить подобие треугольников на основе равенства каких-то углов и пропорциональности каких-то сторон? Например, имеет ли место следующий признак подобия треугольников: если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и один из углов одного треугольника равен какому-то углу другого, то такие треугольники подобны?

Покажем, что такого признака подобия нет, т. е. указанные здесь условия не обеспечивают подобия треугольников. Для этого достаточно привести пример двух треугольников, у которых

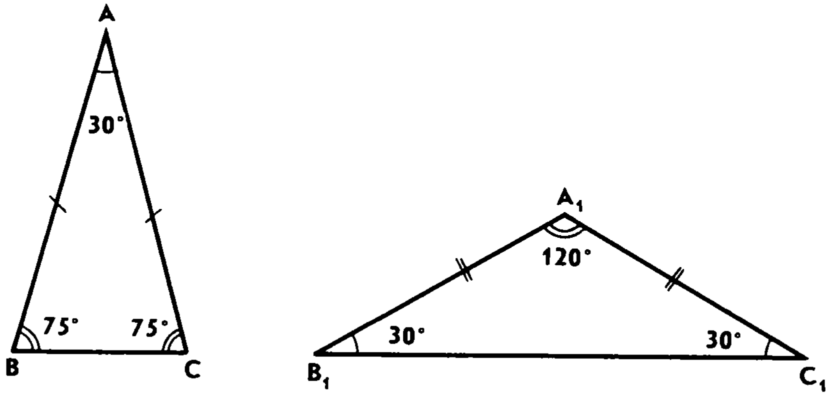


Рис. 117

две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и один из углов одного треугольника равен какому-то углу другого, но треугольники не являются подобными. Такой пример называется контрпримером для сформулированного «признака подобия». Слова «контрпример для какого-то утверждения» означают, что этот пример противоречит данному утверждению, что и доказывает неверность этого утверждения.

Контрпримеров для сформулированного «признака подобия» можно привести сколько угодно. Мы укажем вполне конкретный контрпример. Рассмотрим два равнобедренных треугольника (рис. 117). В треугольнике ABC $AB=AC$, $\angle A=30°$;

в треугольнике $A_1B_1C_1$ $A_1B_1=A_1C_1$, $\angle B_1=30°$ (вместо угла в $30°$ можно было бы взять любой угол α, такой, что $\angle A= =\angle B_1=\alpha<90°$, $\alpha\neq 60°$).

Так как $AB=AC$ и $A_1B_1=A_1C_1$, то $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$,

т. е. стороны AB и AC треугольника ABC пропорциональны сторонам A_1B_1 и A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, $\angle A=\angle B_1$, т. е. данные треугольники имеют по равному углу. Однако эти треугольники не являются подобными, поскольку углы B и C равны $75°$, а в треугольнике $A_1B_1C_1$ таких углов нет: $\angle B_1=\angle C_1=30°$, $\angle A_1=120°$. Итак, из построенного контрпримера следует, что указанный признак подобия не существует.

Сформулируем теперь другое утверждение, которое действительно выражает еще один признак подобия треугольников.

Задача 2. Доказать, что если $\angle A=\angle A_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1}= =\frac{AC+CB}{A_1C_1+C_1B_1}$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

Решение. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, для которых выполнено условие задачи (рис. 118). Отметим точку D на

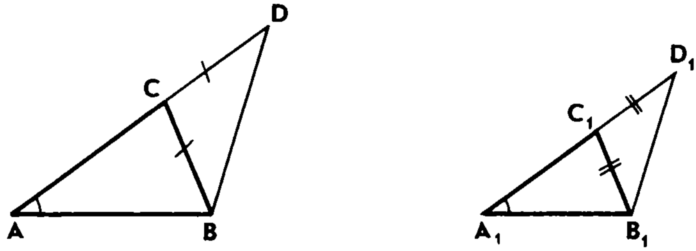


Рис. 118

продолжении стороны AC за точку C и точку D_1 на продолжении A_1C_1 за точку C_1 так, что $CD=CB$, $C_1D_1=C_1B_1$. Тогда

$$AD=AC+CD=AC+CB,\ A_1D_1=A_1C_1+C_1D_1=A_1C_1+C_1B_1,$$

и поэтому

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AD}{A_1D_1}.$$

Кроме того, по условию $\angle A=\angle A_1$. Следовательно, $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$ (по второму признаку). Из подобия треугольников ABD и $A_1B_1D_1$ следует, что $\angle D=\angle D_1$, а так как треугольники BCD и $B_1C_1D_1$ равнобедренные, то внешние углы этих треугольников при вершинах C и C_1 равны, т. е. $\angle ACB=\angle A_1C_1B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют соответственно равные углы A и A_1, C и C_1 и потому $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.

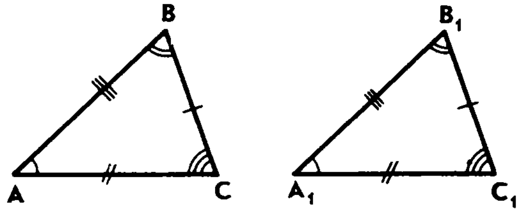
Конечно, установленный признак подобия треугольников менее удобен и менее употребителен, нежели три основных признака. Тем не менее он позволяет утвердительно ответить на поставленный вопрос о других признаках подобия. Напомним, что речь шла о признаках подобия, основанных на равенстве углов и пропорциональности сторон. Если же использовать не только углы и стороны, а также и другие отрезки, связанные с треугольником (биссектрисы, медианы, высоты), то можно сформулировать и доказать немало новых признаков подобия. Такие признаки имеются в задачах к данному параграфу. Но еще до того как вы обратитесь к этим задачам, попробуйте самостоятельно сформулировать какие-то новые признаки подобия треугольников.

30. Подобие и равенство треугольников. Если два треугольника равны, то их углы и стороны соответственно равны. На рисунке 119 изображены равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых

$$\angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1,\ \angle C=C_1,\ AB=A_1B_1,\ BC=B_1C_1,\ CA=C_1A_1. \quad (1)$$

Из равенства соответствующих сторон следует:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}=1. \quad (2)$$



$\Delta\ ABC = \Delta\ A_1B_1C_1$

Рис. 119

Соотношения (1) и (2) показывают, что равные треугольники являются подобными, причем коэффициент подобия равен 1. Очевидно, верно и обратное: если два треугольника подобны и коэффициент подобия равен 1, то эти треугольники равны. Таким образом равенство треугольников можно рассматривать как частный случай подобия треугольников, когда коэффициент подобия равен 1. В соответствии с этим признаки подобия треугольников переходят в признаки равенства треугольников, если дополнительно потребовать, чтобы отношение сходственных сторон равнялось 1. В самом деле, пусть два угла треугольника ABC соответственно равны двум углам треугольника $A_1B_1C_1$, например $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Тогда эти треугольники подобны (по двум углам). Если дополнительно потребовать, чтобы отношение сторон AB и A_1B_1, к которым прилегают указанные углы, было равно 1, т. е. чтобы эти стороны были равны, то треугольники будут равны (по стороне и двум прилежащим углам). Аналогично пусть две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, например $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, и углы A и A_1, заключенные между этими сторонами, равны. Тогда треугольники подобны. Если дополнительно потребовать, чтобы отношение сходственных сторон было равно 1:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 1,$$

т. е. $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$, то треугольники будут равны (по двум сторонам и углу между ними). Точно так же можно показать, как третий признак подобия треугольников переходит в признак равенства треугольников по трем сторонам.

Отметим, что каждый из трех признаков равенства треугольников позволяет установить равенство треугольников на основе соответственного равенства трех элементов: либо двух сторон и угла между ними, либо стороны и прилежащих к ней углов, либо трех сторон. Вместе с тем попарное равенство каких-то трех элементов одного треугольника каким-то трем элементам другого треугольника не всегда обеспечивает равенство треугольников. Более того, как ни удивительно, может оказаться так, что пять

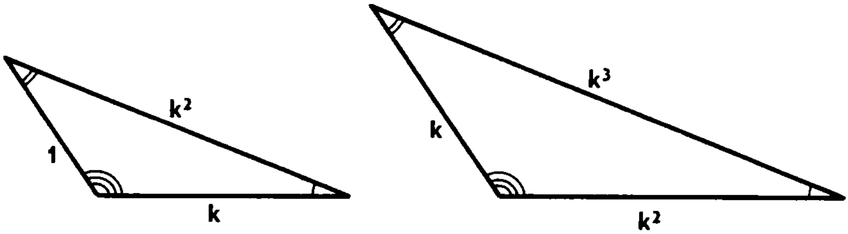


Рис. 120

(из шести!) элементов одного треугольника соответственно равны пяти элементам другого треугольника, а треугольники не равны. Такой пример нетрудно привести, используя подобие треугольников. Пусть длины сторон одного треугольника выражаются числами 1, k, k^2, а длины сторон другого — числами k, k^2, k^3 (рис. 120). Здесь k — некоторое число, не равное 1, например $k = 1{,}5$. Тогда три стороны второго треугольника пропорциональны трем сторонам первого и, значит, треугольники подобны (коэффициент подобия равен k). Поэтому углы одного треугольника соответственно равны углам другого. Кроме того, две стороны одного треугольника, а именно стороны, длины которых выражены числами k и k^2, соответственно равны двум сторонам другого.

Таким образом, пять элементов (три угла и две стороны) одного треугольника соответственно равны пяти элементам другого треугольника, но при этом треугольники лишь подобны, но не равны.

31. Чем геометрия Лобачевского отличается от евклидовой геометрии. Геометрия, которую мы изучаем, называется евклидовой геометрией. В евклидовой геометрии фундаментальную роль играет аксиома параллельных прямых:

через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, не пересекающая данную прямую.

Эта аксиома у самого Евклида в его знаменитом сочинении «Начала» выступала в виде эквивалентного аксиоме параллельных 5-го постулата:

если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов меньше двух прямых, то эти прямые пересекаются с той стороны от секущей, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Евклид разделял исходные положения на постулаты и аксиомы, в современной математике все исходные положения называют аксиомами. На протяжении двух тысяч лет 5-й постулат Евклида был объектом внимания ученых. Многим казалось, что его можно доказать на основе других постулатов и аксиом Евклида. Но все попытки доказательства 5-го постулата были безуспешными — либо в представленных доказательствах обнаруживались ошибки, либо оказывалось, что доказательство опирается на некоторый наглядно очевидный факт, который принимался без доказательства, а по существу являлся новой аксиомой, эквивалентной 5-му постулату. Попытку доказать 5-й постулат предпринял и наш соотечественник, профессор математики Казанского университета Николай Иванович Лобачевский (1793—1852). В основу своих рассуждений он положил предположение, противоположное аксиоме параллельных, а именно он предположил, что

через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную прямую.

Если бы на основе этого предположения получилось противоречие с другими аксиомами или какими-то теоремами, выведенными из аксиом, то это означало бы, что 5-й постулат Евклида доказан. Но противоречия не получилось. Напротив, получилась другая (неевклидова) геометрия, в которой многие теоремы отличаются от соответствующих теорем евклидовой геометрии.

Отметим лишь некоторые факты, отличающие геометрию Лобачевского от геометрии Евклида. Первый факт связан с подобием треугольников и состоит в следующем: *в геометрии Лобачевского не существует подобных треугольников, которые были бы не равны.* С позиций привычной для нас евклидовой геометрии это представляется удивительным: в евклидовой геометрии существуют подобные треугольники с произвольным коэффициентом подобия. Оказывается, что аксиома параллельных прямых евклидовой геометрии эквивалентна предположению о том, что существует хотя бы одна пара подобных, но неравных треугольников. Если принять это предположение, то можно доказать, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, не пересекающая данную, т. е. можно доказать то утверждение, которое в евклидовой геометрии обычно принимается в качестве аксиомы параллельных.

С отсутствием в геометрии Лобачевского подобных неравных треугольников связан еще один удивительный факт: *два треугольника равны, если их углы попарно равны.* В евклидовой геометрии, как мы знаем, равенство углов обеспечивает лишь подобие, но не равенство треугольников. Наконец, в геометрии Лобачевского не выполняется привычное соотношение для суммы углов треугольника — эта сумма не равна, а меньше 180°. Более того, сумма углов треугольника в геометрии Лобачевского зависит от его размеров: чем больше площадь треугольника, тем сильнее отличается сумма его углов от 180° и, наоборот, чем меньше треугольник, тем ближе сумма его углов к 180°. Более подробно с геометрией Лобачевского, ее приложениями и значением для современного естествознания можно познакомиться по специальной литературе. К сожалению, при жизни Николая Ивановича Лобачевского созданная им новая геометрия, которую он называл *воображаемой*, не была понята и по достоинству оценена. Напротив, ему пришлось выдержать недоброжелательную критику со стороны многих современников. Но, несмотря на неприязненное отношение к результатам его геометрических исследований, Н. И. Лобачевский до конца дней своих продолжал отстаивать и развивать новые идеи. Настоящая слава пришла к нему лишь после смерти. Открытие Н. И. Лобачевским новой геометрии по праву стоит в одном ряду с самыми великими достижениями человеческого разума.

Задачи

169. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны если:

а) $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{AM}{A_1M_1}$, где AM и A_1M_1 — медианы треугольников;

б) $\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AM}{A_1M_1}=\frac{AH}{A_1H_1}$, где AM и A_1M_1 — медианы, AH и A_1H_1 — высоты треугольников;

в) $\angle A=\angle A_1$, $\frac{AH}{A_1H_1}=\frac{AD}{A_1D_1}$, где AH и A_1H_1 — высоты, AD и A_1D_1 — биссектрисы треугольников;

г) $\frac{m_1}{m_1'}=\frac{m_2}{m_2'}=\frac{m_3}{m_3'}$, где m_1, m_2, m_3 — длины медиан треугольника ABC, m_1', m_2', m_3' — длины медиан треугольника $A_1B_1C_1$;

д) $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{AD}{A_1D_1}$, где AD и A_1D_1 — биссектрисы треугольников.

170. Докажите, что прямая, пересекающая две стороны треугольника, параллельна третьей его стороне тогда и только тогда, когда она отсекает на этих двух сторонах пропорциональные отрезки.

171. В треугольнике ABC все углы различны. Прямая, проходящая через вершину B, разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника. Найдите величину угла B.

172. Прямая BE разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника. Коэффициент подобия равен $\sqrt{3}$. Найдите углы треугольника ABC.

173. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD равны, диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники BOC и AOD подобны.

174. Вершины A, B, C треугольника ABC лежат на сторонах A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно. Докажите, что если углы B_1AB, C_1BC и A_1CA равны, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

175. Отрезки AH и BP — высоты треугольника ABC. Докажите, что треугольники PCH и ABC подобны.

176. Отрезок BH — высота треугольника ABC, точки K и M — основания перпендикуляров, проведенных из точки H к прямым AB и CB соответственно. Докажите, что треугольники MBK и ABC подобны.

177. Высоты треугольника равны 3, 4, 5. Определите вид треугольника (остроугольный, прямоугольный, тупоугольный).

178. Докажите, что отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, образуют треугольник, в котором эти высоты являются биссектрисами.

179. В равнобедренном треугольнике ABC из середины H основания BC проведен перпендикуляр HE к прямой AC. Точка O — середина отрезка HE. Докажите, что прямые AO и BE перпендикулярны.

180. Из точки M внутренней области угла AOB проведены перпендикуляры MP и MQ к прямым OA и OB. Из точек P и Q проведены перпендикуляры PR и QS соответственно к OB и OA. Докажите, что прямая RS перпендикулярна OM.

181. На сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ взяты точки M, K, T, P соответственно, причем $AM:CT=$ $=AP:CK\neq 1$. Докажите, что четырехугольник $MKTP$ — трапеция.

182. Дан параллелограмм $ABCD$. Отрезки AM и AP — перпендикуляры, проведенные к прямым BC и CD. Докажите, что треугольники MAP и ABC подобны.

183. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что произведение длин оснований трапеции равно сумме произведений длин отрезков одной ее диагонали и длин отрезков другой ее диагонали, на которые диагонали делятся точкой пересечения.

184. Докажите, что если в треугольнике ABC угол A в два раза больше угла B, то $BC^2=AC^2+AC\cdot AB$.

185. В треугольнике ABC углы A, B, C равны соответственно α, β, γ, причем $3\alpha+2\beta=180°$. Докажите, что $BC^2+AB\cdot AC=$ $=AB^2$.

186. Прямая, параллельная основанию треугольника площади S_1, отсекает от него треугольник площади S_2. Найдите площадь четырехугольника, три вершины которого совпадают с вершинами меньшего треугольника, а четвертая вершина лежит на основании большего треугольника.

187. Через точку K, взятую на стороне AC треугольника ABC, проведены прямые, параллельные двум другим его сторонам. Эти прямые разбивают треугольник ABC на параллелограмм и два треугольника, площади которых равны S_1 и S_2. Найдите площадь параллелограмма.

188. Через точку O, лежащую внутри треугольника ABC, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Площади образовавшихся при этом треугольников равны S_1, S_2, S_3. Найдите площадь треугольника ABC.

189. Основания трапеции равны a и b $(a>b)$. Прямые, соединяющие середину большего основания с концами меньшего, пересекают диагонали в точках M и P. Найдите длину отрезка MP.

§ 2. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач

32. Обобщение теоремы Фалеса. Прежде чем рассмотреть обобщение теоремы Фалеса, напомним содержание самой этой теоремы. Обратимся к рисунку 121, *а*, на котором несколько параллельных прямых пересекают прямые a и b. Пусть параллельные прямые отсекают на прямой a равные отрезки: $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{n-1}A_n$. Тогда и на прямой b эти прямые отсекают равные отрезки, т. е. $B_1B_2 = B_2B_3 = ... = B_{n-1}B_n$. В этом состоит теорема Фалеса. Обобщением этой теоремы является утверждение:

Теорема. ***Параллельные прямые, пересекающие две данные прямые, отсекают на этих прямых пропорциональные отрезки.***

Доказательство. Обратимся к рисунку 121, *б*, на котором прямая a рассечена параллельными прямыми на отрезки A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, а прямая b — на отрезки B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{n-1}B_n$. Требуется доказать, что

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = ... = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}.$$

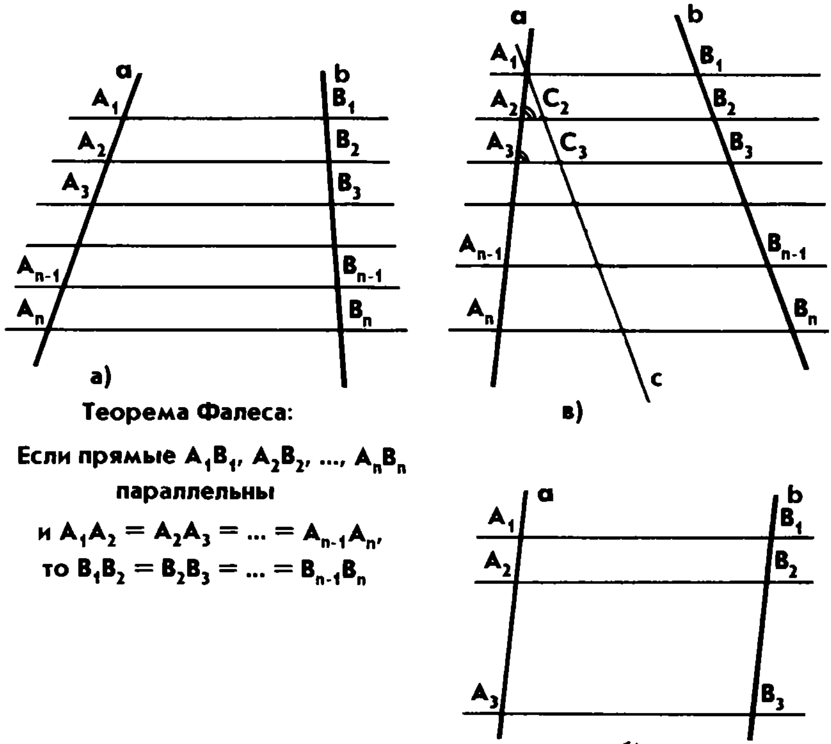


Рис. 121

Докажем, например, что

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}.$$

Рассмотрим два случая: 1) Прямые a и b параллельны (рис. 121, *б*). Тогда четырехугольники $A_1A_2B_2B_1$ и $A_2A_3B_3B_2$ — параллелограммы. Поэтому $A_1A_2=B_1B_2$ и $A_2A_3=B_2B_3$, откуда следует, что

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}.$$

2) Прямые a и b не параллельны (рис. 121, *в*). Через точку A_1 проведем прямую c, параллельную прямой b. Она пересечет прямые A_2B_2 и A_3B_3 в некоторых точках C_2 и C_3. Треугольники $A_1A_2C_2$ и $A_1A_3C_3$ подобны по двум углам (угол A_1 общий, углы $A_1A_2C_2$ и $A_1A_3C_3$ равны как соответственные при пересечении параллельных прямых A_2B_2 и A_3B_3 секущей A_2A_3), поэтому

$$\frac{A_1A_2}{A_1C_2}=\frac{A_1A_3}{A_1C_3}.$$

Отсюда по свойству пропорций получаем:

$$\frac{A_1A_2}{A_1C_2}=\frac{A_1A_3-A_1A_2}{A_1C_3-A_1C_2},$$

или

$$\frac{A_1A_2}{A_1C_2}=\frac{A_2A_3}{C_2C_3}. \qquad (1)$$

С другой стороны, по доказанному в первом случае имеем $A_1C_2=B_1B_2$, $C_2C_3=B_2B_3$. Заменяя в пропорции (1) A_1C_2 на B_1B_2 и C_2C_3 на B_2B_3, приходим к равенству

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3} \qquad (2)$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Доказанное утверждение мы назвали обобщением теоремы Фалеса, поскольку теорема Фалеса содержится в этом утверждении как частный случай. В самом деле, если отрезки A_1A_2 и A_2A_3 равны, то из (2) последует, что отрезки B_1B_2 и B_2B_3 также равны. Это и есть теорема Фалеса.

33. Задачи на нахождение отношений отрезков. Доказанная в п. 32 теорема полезна при доказательстве теорем и решении задач на нахождение отношений отрезков. Рассмотрим примеры.

Теорема. ***Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.***

Доказательство. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC. Проведем прямые CE и BF, параллельные прямой AD

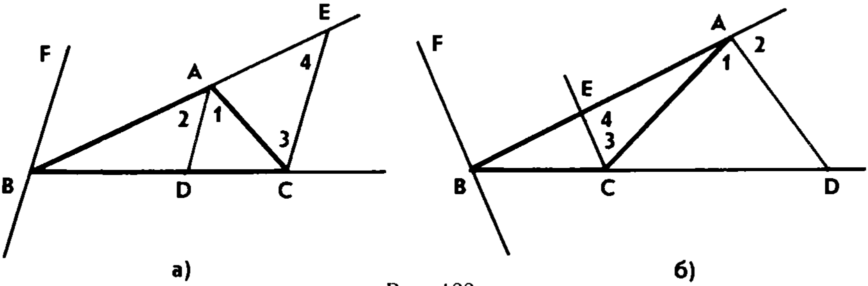


Рис. 122

(E — точка на прямой AB) (рис. 122, *а*). Согласно обобщению теоремы Фалеса

$$\frac{BD}{BA}=\frac{DC}{AE}.$$

Докажем, что $AE=AC$. Для этого заметим, что $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 1$, $\angle 4=\angle 2$, откуда следует, что $\angle 3=\angle 4$. Таким образом, треугольник AEC равнобедренный, поэтому $AE=AC$. Следовательно,

$$\frac{BD}{BA}=\frac{DC}{AC}.$$ Теорема доказана.

Отметим, что утверждение теоремы было доказано в учебнике другим способом — с помощью теории площадей (см. задачу 535 с решением). Докажем теперь теорему о биссектрисе внешнего угла треугольника.

Теорема. ***Если биссектриса внешнего угла при вершине A треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D, то*** $\boldsymbol{\frac{BD}{BA}=\frac{DC}{AC}}$.

Доказательство. Проведем прямые CE и BF, параллельные прямой AD (E — точка на стороне AB, рис. 122, *б*). Согласно обобщению теоремы Фалеса $\frac{BC}{BE}=\frac{CD}{EA}$. Отсюда получаем:

$$\frac{BC}{CD}=\frac{BE}{EA},\quad \frac{BC}{CD}+1=\frac{BE}{EA}+1,$$

т. е.

$$\frac{BD}{CD}=\frac{BA}{EA},\ \text{или}\ \frac{BD}{BA}=\frac{DC}{EA}.$$

Докажем, что $EA=AC$. Для этого заметим, что $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 1$, $\angle 2=\angle 4$, откуда следует, что $\angle 3=\angle 4$. Таким образом, треугольник AEC равнобедренный, поэтому $EA=AC$. Следовательно,

$$\frac{BD}{BA}=\frac{DC}{AC},$$

что и требовалось доказать.

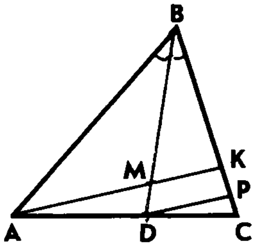


Рис. 123

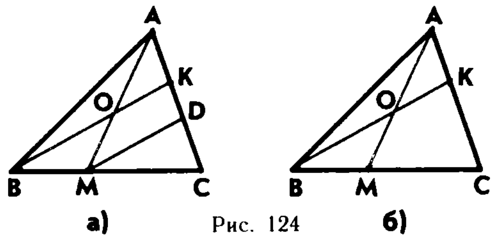


Рис. 124

Задача 1. На биссектрисе BD треугольника ABC отмечена точка M, так, что $BM:MD=m:n$. Прямая AM пересекает сторону BC в точке K (рис. 123). Найти отношение $BK:KC$, если $AB:BC=p:q$.

Решение. Проведем через точку D прямую, параллельную прямой AK. Она пересекает сторону BC в точке P (см. рис. 123). Воспользуемся обобщением теоремы Фалеса: отрезки BM и MD пропорциональны отрезкам BK и KP, откуда следует, что

$$\frac{BK}{KP}=\frac{BM}{MD}=\frac{m}{n}.$$

Точно так же отрезки AD и DC пропорциональны отрезкам KP и PC, откуда получаем:

$$\frac{KP}{PC}=\frac{AD}{DC}. \text{ Но } \frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$$

(биссектриса BD треугольника делит противоположную сторону AC на отрезки AD и DC, пропорциональные прилежащим сторонам AB и BC), и так как $\frac{AB}{BC}=\frac{p}{q}$, то

$$\frac{AD}{DC}=\frac{KP}{PC}=\frac{p}{q}.$$

Пусть $KP=px$, тогда $PC=qx$, $KC=(p+q)x$, а из равенства $\frac{BK}{KP}=\frac{m}{n}$ получаем $BK=\frac{mp}{n}x$. Следовательно,

$$BK:KC=mp:(p+q)n.$$

Задача 2. На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки K и M так, что $AK:KC=m:n$, $BM:MC=p:q$. Отрезки AM и BK пересекаются в точке O (рис. 124). Доказать, что $AO:OM=\frac{m}{n}\left(\frac{q}{p}+1\right)$, $BO:OK=\frac{p}{q}\left(\frac{n}{m}+1\right)$. (Это утверждение назовем *теоремой о пропорциональных отрезках в треугольнике.)*

Решение. Применим тот же прием, что и при решении предыдущей задачи: через точку M проведем прямую, параллельную BK. Она пересекает сторону AC в точке D (см. рис. 124, a), и согласно обобщению теоремы Фалеса

$$KD:DC=BM:MC=p:q.$$

Пусть $AK = mx$. Тогда в соответствии с условием задачи $KC = nx$, а так как $KD:DC = p:q$, то $KD = \frac{pn}{p+q}x$. Снова воспользуемся обобщением теоремы Фалеса:

$$AO:OM = AK:KD = mx:\frac{p}{p+q}nx = \frac{m}{n}\left(\frac{q}{p}+1\right).$$

Аналогично доказывается, что $BO:OK = \frac{p}{q}\left(\frac{n}{m}+1\right)$. Проведите доказательство самостоятельно.

Замечание. Существует простой способ, позволяющий запомнить полученные формулы. Например, чтобы написать формулу отношения $AO:OM$, нужно, «двигаясь» от точки A к точке B по отрезкам AK, KC, CM и MB (см. рис. 124, *б*), взять отношение первого отрезка ко второму, т. е. $\frac{AK}{KC}$, и умножить его на отношение третьего отрезка к четвертому, сложенное с единицей, т. е. на $\left(\frac{CM}{MB}+1\right)$. В результате получим:

$$AO:OM = \frac{AK}{KC}\left(\frac{CM}{MB}+1\right) = \frac{m}{n}\left(\frac{q}{p}+1\right).$$

Формула для отношения $BO:OK$ получается по тому же правилу, но нужно «двигаться» от точки B к точке A:

$$BO:OK = \frac{p}{q}\left(\frac{n}{m}+1\right).$$

34. Теоремы Чевы и Менелая. Рассмотрим треугольник ABC и отметим на его сторонах AB, BC и CA точки C_1, A_1, B_1 (рис. 125). Поставим такой вопрос: при каком расположении этих точек отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке?

Ответ на поставленный вопрос дает теорема, которую связывают с именем итальянского инженера и математика Джованни Чевы (1648—1734).

Теорема Чевы. ***Если на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, то отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда***

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A} = 1. \qquad (3)$$

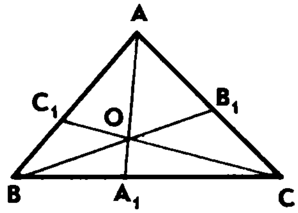


Рис. 125

Доказательство. 1. Пусть отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O (рис. 125). Докажем, что выполнено равенство (3). По теореме о пропорциональных отрезках в треугольнике (задача 2 из п. 33) имеем:

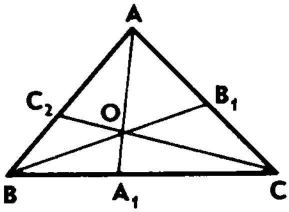


Рис. 126

$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{AB_1}{B_1C}\left(1+\frac{CA_1}{A_1B}\right)$$

и $$\frac{AO}{OA_1}=\frac{C_1A}{BC_1}\left(1+\frac{A_1B}{CA_1}\right).$$

Левые части этих равенств одинаковы, значит, равны и правые части. Приравнивая их, получаем

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{BC}{A_1B}=\frac{C_1A}{BC_1}\cdot\frac{BC}{CA_1}.$$

Разделив обе части на правую часть, приходим к равенству (3).

2. Докажем обратное утверждение. Пусть точки C_1, A_1 и B_1 взяты на сторонах AB, BC и CA так, что выполнено равенство (3). Докажем, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Обозначим буквой O точку пересечения отрезков AA_1 и BB_1 и проведем прямую CO (рис. 126). Она пересекает сторону AB в некоторой точке, которую обозначим C_2. Так как отрезки AA_1, BB_1 и CC_2 пересекаются в одной точке, то по доказанному в первом пункте

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_2}{C_2A}=1\,. \qquad (4)$$

Итак, имеют место равенства (3) и (4).

Сопоставляя их, приходим к равенству $\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BC_2}{C_2A}$, которое показывает, что точки C_1 и C_2 делят сторону AB в одном и том же отношении. Следовательно, точки C_1 и C_2 совпадают, и, значит, отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Теорема доказана.

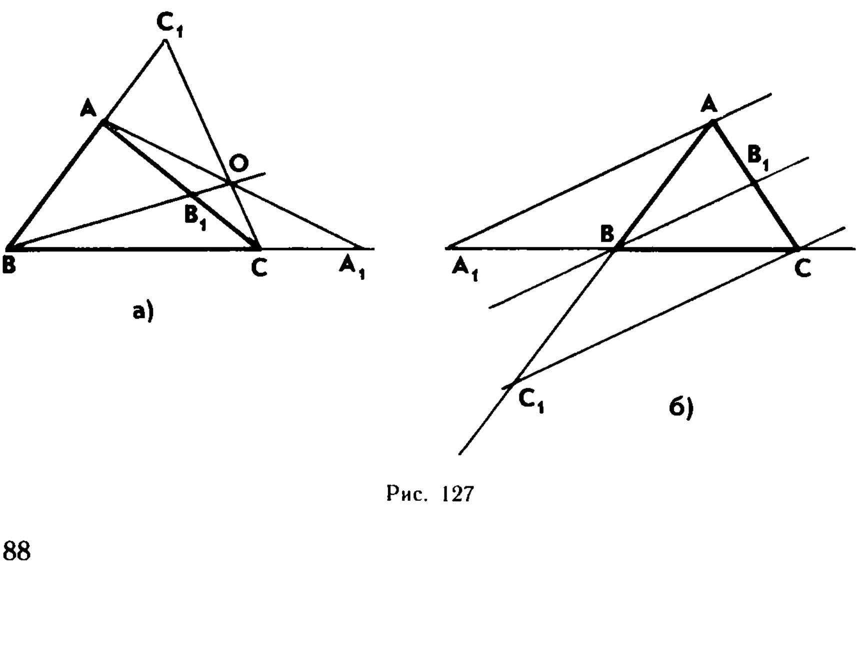


Рис. 127

З а м е ч а н и е. Мы брали точки A_1, B_1 и C_1 на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC. Если же только одна из этих точек берется на соответствующей стороне, а две другие — на продолжениях сторон, то справедливо следующее утверждение:

если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (рис. 127, а) либо параллельны (рис. 127, б), то выполняется равенство (3) и, обратно, если выполняется равенство (3), то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

Докажите это утверждение самостоятельно.

Перейдем теперь к теореме, которая связана с именем Менелая Александрийского, древнегреческого математика и астронома, жившего в I в. н. э. Снова рассмотрим треугольник ABC и не совпадающие с вершинами точки A_1, B_1 и C_1 на его сторонах BC, CA и AB или на продолжениях этих сторон. Теорема Менелая дает ответ на вопрос о том, при каком условии точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. При этом возможны два случая: либо две точки берутся на соответствующих сторонах, а еще одна — на продолжении третьей стороны (рис. 128, *а*), либо все три точки берутся на продолжениях соответствующих сторон (рис. 128, *б*).

Оказывается, что в каждом из этих случаев точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполнено то же самое равенство (3), что и в теореме Чевы.

Т е о р е м а М е н е л а я. ***Если на сторонах AB и BC и продолжении стороны AC (либо на продолжениях сторон AB, BC и AC) взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, то эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда***

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1. \qquad (5)$$

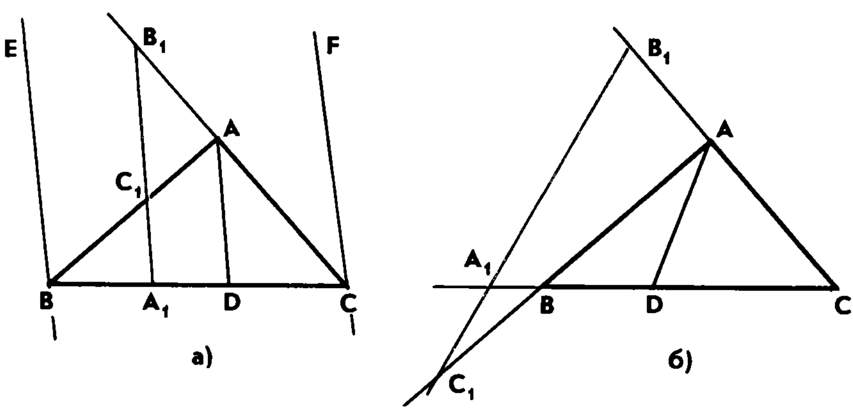


Рис. 128

Доказательство. 1. Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой (рис. 128). Докажем, что выполнено равенство (5). Проведем прямые AD, BE и CF параллельно прямой B_1A_1 (точка D лежит на прямой BC). Согласно обобщению теоремы Фалеса имеем:

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{DA_1}{A_1C} \text{ и } \frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BA_1}{A_1D}.$$

Перемножая левые и правые части этих равенств, получаем:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{A_1B}{CA_1}, \text{ откуда } \frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1,$$

т. е. выполнено равенство (5).

2. Докажем обратное утверждение. Пусть точка B_1 взята на продолжении стороны AC, а точки C_1 и A_1 — на сторонах AB и BC, причем так, что выполнено равенство (5). Докажем, что точки A_1, B_1, и C_1 лежат на одной прямой.

Прямая B_1C_1 пересекает сторону BC в некоторой точке A_2 (рис. 129). Так как точки B_1, C_1 и A_2 лежат на одной прямой, то по доказанному в первом пункте

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_2}{A_2B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1. \qquad (6)$$

Сопоставляя (5) и (6), приходим к равенству $\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{CA_2}{A_2B}$, которое показывает, что точки A_1 и A_2 делят сторону BC в одном и том же отношении. Следовательно, точки A_1 и A_2 совпадают, и, значит, точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Аналогично доказывается обратное утверждение в случае, когда все три точки A_1, B_1 и C_1 лежат на продолжениях соответствующих сторон. Теорема доказана.

Замечание. Если ввести некоторые величины, связанные с направленными отрезками, то вместо соотношения (5), общего для теорем Чевы и Менелая, можно написать равенства, отличающиеся друг от друга в этих теоремах. Это будет сделано в главе V.

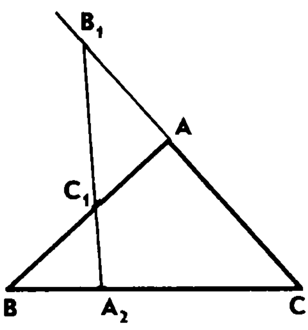


Рис. 129

Задачи

190. На медиане BD треугольника ABC отмечена точка M так, что $BM:MD=m:n$. Прямая AM пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение $BK:KC$.

191. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC и делящая медиану BM в отношении $1:2$, считая от вершины, пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение площадей треугольников ABK и ABC.

192. Через середину M стороны BC треугольника ABC, в котором $AB \neq AC$, проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A и пересекающая прямые AB и AC соответственно в точках D и E. Докажите, что $BD = CE$.

193. На биссектрисе угла C взята точка P. Прямая, проходящая через точку P, отсекает на сторонах угла отрезки с длинами a и b. Докажите, что величина $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ не зависит от выбора прямой.

194. В треугольнике ABC медиана BM и биссектриса AK пересекаются в точке O, $AC:AB = k$. Найдите отношение площадей треугольника AOB и четырехугольника $MOKC$.

195. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке P, а диагональ BD — в точке T. Известно, что $AB : AD = k (0 < k < 1)$. Найдите отношение площадей треугольника BTP и параллелограмма $ABCD$.

196. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки H и E так, что $AH = HE = EC$, на стороне BC — точки P и T так, что $BP = PT = TC$. Отрезок BH пересекает отрезки AP и AT в точках K и D соответственно, а отрезок BE пересекает отрезки AP и AT в точках M и O соответственно. Найдите отношение площадей четырехугольника $DKMO$ и треугольника ABC.

/ **197.** Используя теорему Чевы, докажите, что в произвольном треугольнике прямые, проходящие через вершины и делящие периметр треугольника пополам, пересекаются в одной точке.

198. На стороне AC треугольника ABC взяты точки P и E, на стороне BC — точки M и K, причем $AP:PE:EC = CK:KM:MB$. Отрезки AM и BP пересекаются в точке O, отрезки AK и BE — в точке T. Докажите, что точки O, T и C лежат на одной прямой.

199. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с попарно непараллельными сторонами расположены так, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке O. Докажите, что точки M, K, P пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 соответственно лежат на одной прямой. *(Теорема Дезарга.)*

200. На основании AD трапеции $ABCD$ взяты точки K и T так, что $AK = TD$. Отрезки AC и BT пересекаются в точке M, отрезки KC и BD — в точке P. Докажите, что отрезок MP параллелен основаниям трапеции.

201. Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений ее боковых сторон лежат на одной прямой.

202. Через точку, взятую на продолжении одной из диагоналей трапеции, и середину каждого основания проведены прямые, пересекающие боковые стороны трапеции в точках K и H. Докажите, что отрезок KH параллелен основаниям трапеции.

§ 3. Замечательные точки треугольника

35. Четыре замечательные точки треугольника. Теорема Чевы дает возможность весьма просто доказать утверждения о точке пересечения медиан, точке пересечения биссектрис и точке пересечения высот (или их продолжений) треугольника. Рассмотрим доказательства этих утверждений. Напомним, что утверждение о пересечении медиан треугольника в одной точке уже было доказано в главе II (п. 20). Здесь будет дано другое доказательство — с помощью теоремы Чевы.

Теорема. ***Медианы треугольника пересекаются в одной точке.***

Доказательство. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC (рис. 130). Тогда $AB_1=B_1C$, $CA_1=A_1B$, $BC_1=C_1A$, и поэтому

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$$

Отсюда по теореме Чевы следует, что медианы пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

Замечание. Отношение, в котором точка M пересечения медиан делит каждую медиану, можно найти с помощью теоремы о пропорциональных отрезках в треугольнике. Согласно этой теореме для медианы AA_1 имеем:

$$\frac{AM}{MA_1}=\frac{AB_1}{B_1C}\left(\frac{CA_1}{A_1B}+1\right)=2.$$

Аналогично получаем:

$$\frac{BM}{MB_1}=2,\ \frac{CM}{MC_1}=2,$$

т. е. каждая медиана делится точкой M в отношении 2:1, считая от вершины.

Теорема. ***Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.***

Доказательство. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — биссектрисы треугольника ABC (рис. 131). Воспользуемся тем, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Согласно этому свойству

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AB}{BC},\ \frac{CA_1}{A_1B}=\frac{AC}{AB},\ \frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BC}{AC}.$$

Перемножив эти равенства, получим:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$$

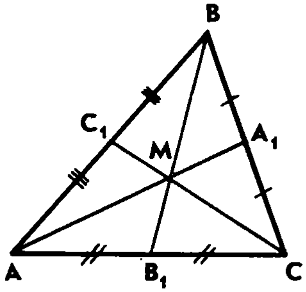


Рис. 130

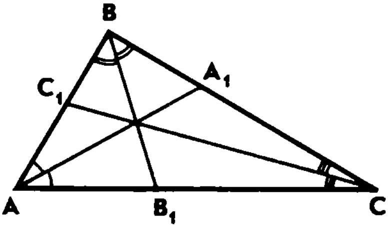


Рис. 131

Отсюда по теореме Чевы следует, что биссектрисы пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

Теорема. ***Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.***

Доказательство. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC. Рассмотрим три случая:

1) Если треугольник ABC остроугольный (рис. 132, *а*), то точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB. Прямоугольные треугольники AA_1C и BB_1C подобны (так как имеют общий острый угол C), поэтому

$$\frac{CA_1}{B_1C}=\frac{CA}{BC}. \qquad (1)$$

Аналогично из подобия треугольников AA_1B и CC_1B следует:

$$\frac{BC_1}{A_1B}=\frac{BC}{AB}, \qquad (2)$$

а из подобия треугольников BB_1A и CC_1A — равенство

$$\frac{AB_1}{C_1A}=\frac{AB}{CA}. \qquad (3)$$

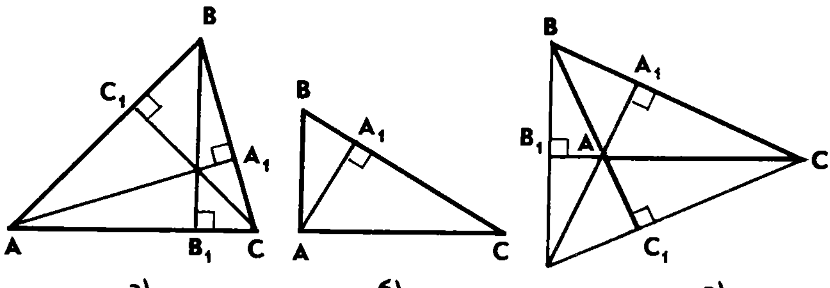


Рис. 132

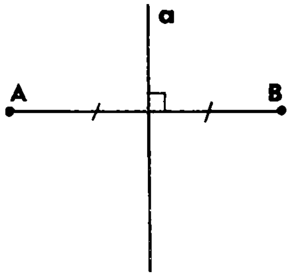


Рис. 133. Прямая a — серединный перпендикуляр к отрезку AB

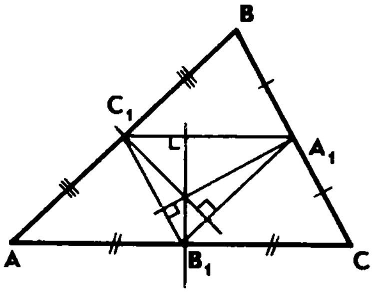


Рис. 134

Перемножив равенства (1), (2) и (3), получим:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1. \qquad (4)$$

Отсюда по теореме Чевы следует, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

2) Если треугольник ABC прямоугольный, причем угол A прямой, то его высоты, очевидно, пересекаются в точке A (рис. 132, *б*).

3) Наконец, если треугольник ABC тупоугольный, причем угол A тупой (рис. 132, *в*), то, как и в первом случае, из подобия прямоугольных треугольников AA_1C и BB_1C, AA_1B и CC_1B, BB_1A и CC_1A получаем соответственно равенства (1), (2), (3). Перемножив их, приходим к равенству (4). Однако в данном случае лишь точка A_1 лежит на стороне BC, а точки B_1 и C_1 лежат соответственно на продолжениях сторон AC и AB. Поэтому нужно воспользоваться не самой теоремой Чевы, а замечанием к этой теореме, согласно которому прямые AA_1, BB_1 и CC_1, содержащие высоты треугольника, либо пересекаются в одной точке, либо параллельны. Если бы эти прямые были параллельны, то и перпендикулярные к ним стороны треугольника были бы параллельны друг другу. Но это не так. Значит, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

Точка пересечения медиан, точка пересечения биссектрис и точка пересечения высот треугольника (или их продолжений) называются *замечательными точками треугольника*. Четвертой замечательной точкой треугольника является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная к нему (рис. 133).

Теорема. ***Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.***

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC, в котором точки A_1, B_1 и C_1 — соответственно середины сторон BC, CA и AB (рис. 134). Средняя линия A_1B_1 параллельна стороне AB, поэтому серединный перпендикуляр к стороне AB содержит высоту треугольника $A_1B_1C_1$, проведенную из вершины C_1. Аналогично серединные перпендикуляры к сторонам BC и CA содержат две другие высоты треугольника $A_1B_1C_1$. Но прямые, содержащие высоты треугольника $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке. Это означает, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника ABC пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

36. Свойства замечательных точек треугольника.

Теорема. ***Во всяком треугольнике точка пересечения медиан, точка пересечения высот (или их продолжений) и точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника лежат на одной прямой (эта прямая называется прямой Эйлера).***

Доказательство. Если треугольник ABC равнобедренный, причем $AB = BC$, то медиана BD является также высотой треугольника, а прямая BD — серединным перпендикуляром к стороне AC (рис. 135, *а*). Ясно, что в этом случае точка M пересе-

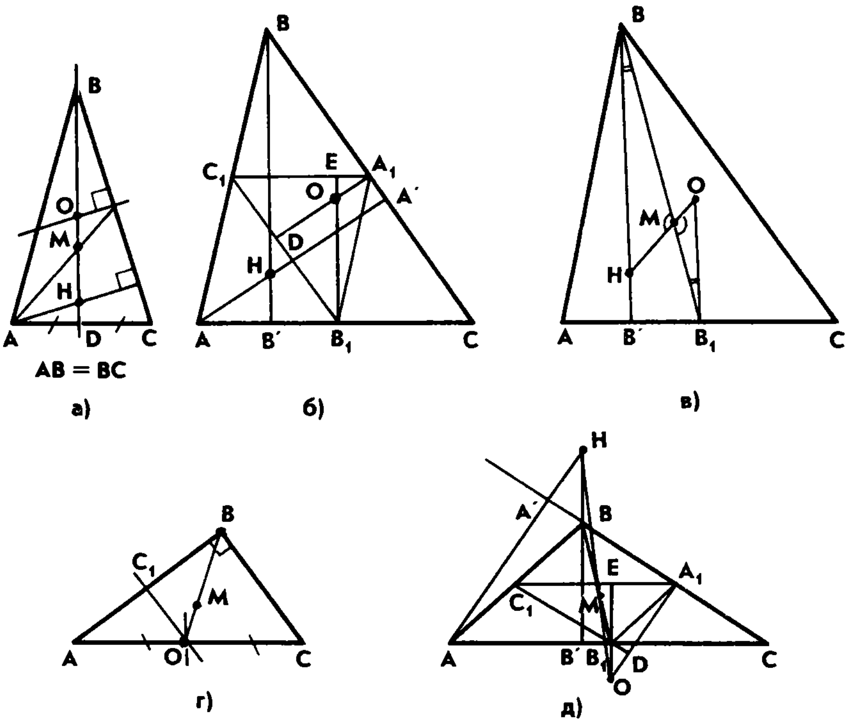


Рис. 135

чения медиан, точка H пересечения высот и точка O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника лежат на прямой BD. Это и есть в данном случае прямая Эйлера.

Рассмотрим теперь неравнобедренный треугольник ABC. Проведем подробное доказательство для случая, когда треугольник ABC остроугольный (рис. 135, *б*).

Пусть H — точка пересечения высот AA' и BB', точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB, точка O — точка пересечения серединных перпендикуляров A_1D и B_1E к сторонам BC и AC треугольника ABC.

Заметим, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, а коэффициент подобия равен 2:

$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}=2$ (свойство средней линии треугольника).

Далее, высоты A_1D и B_1E треугольника $A_1B_1C_1$ являются отрезками серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC, и потому эти высоты пересекаются в точке O.

Высоты BB' и B_1E в подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ являются сходственными. Точно так же сходственными являются отрезки этих высот BH и B_1O. Поэтому $\frac{BH}{B_1O}=2$.

Проведем медиану BB_1 треугольника ABC и отрезок HO (рис. 135, *в*). Пусть M — точка их пересечения. Треугольники BMH и B_1MO подобны по двум углам (углы при вершине M равны как вертикальные, а углы при вершинах B и B_1 равны как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых BB' и OB_1 секущей BB_1). Коэффициент подобия этих треугольников равен 2, так как $\frac{BH}{B_1O}=2$.

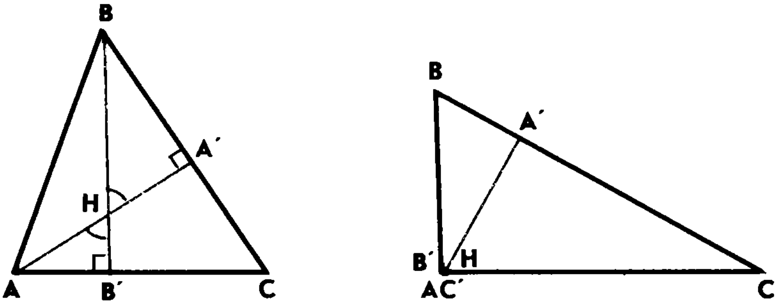
Поэтому и $\frac{BM}{MB_1}=2$, т. е. точка M делит медиану BB_1 в отношении $2:1$, считая от вершины B. Следовательно, точка M является точкой пересечения медиан треугольника ABC.

Итак, точки M, H и O лежат на одной прямой. Для остроугольных треугольников теорема доказана.

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B (рис. 135, *г*) точка H пересечения высот совпадает с вершиной B, точка O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника совпадает с серединой гипотенузы AC, и так как точка M пересечения медиан лежит на медиане BO, то все три точки H, M и O лежат на прямой BO.

Для тупоугольного неравнобедренного треугольника ABC с тупым углом B доказательство теоремы можно провести таким же образом, как и для остроугольного треугольника. Пользуясь рисунком 135, *д*, сделайте это самостоятельно.

Замечание. Отметим, что если треугольник неравносторонний, то точка M пересечения медиан лежит на отрезке OH, причем $HM:MO=2:1$.



а) б)

Рис. 136

Рассмотрим еще одно свойство точки пересечения высот треугольника (или их продолжений).

Задача 1. Пусть высоты AA', BB' и CC' непрямоугольного треугольника ABC (или их продолжения) пересекаются в точке H. Доказать, что

$$AH \cdot HA' = BH \cdot HB' = CH \cdot HC'. \quad (5)$$

Это свойство можно сформулировать и таким образом: *во всяком непрямоугольном треугольнике произведение расстояний от точки пересечения высот (или их продолжений) до концов высоты есть величина постоянная* (т. е. одна и та же для всех высот данного треугольника).

Решение. Обратимся к рисунку 136, *а* на котором изображен остроугольный треугольник ABC и проведены высоты AA' и BB', пересекающиеся в точке H. Треугольники AHB' и BHA' подобны по двум углам, поэтому $\frac{AH}{BH} = \frac{HB'}{HA'}$. Отсюда следует, что $AH \cdot HA' = BH \cdot HB'$. Аналогично доказывается, что $BH \cdot HB' = CH \cdot HC'$.

Для случая тупоугольного треугольника докажите равенства (5) самостоятельно.

Отметим, что если треугольник ABC прямоугольный и угол A прямой, то точки B', C' и H совпадают с точкой A (рис. 136, *б*). Поэтому можно считать, что $AH=0$, $HB'=0$, $HC'=0$, и тогда равенства (5) также выполняются.

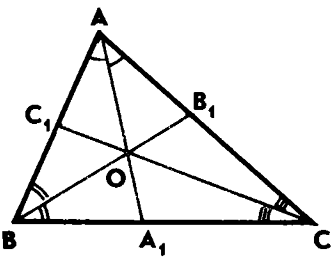


Рис. 137

Мы знаем, что точка пересечения медиан треугольника делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины. Рассмотрим теперь задачу, в которой выясняется, в каком отношении делит каждую биссектрису точка пересечения биссектрис треугольника.

Задача 2. В треугольнике ABC (рис. 137) биссектрисы AA_1, BB_1 и

CC_1 пересекаются в точке O, $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Доказать, что

$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{b+c}{a},\ \frac{BO}{OB_1}=\frac{a+c}{b},\ \frac{CO}{OC_1}=\frac{a+b}{c}. \qquad (6)$$

Решение. Так как биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, то

$$AB_1:B_1C=c:a,\ BA_1:A_1C=c:b.$$

Для нахождения отношения $\frac{AO}{OA_1}$ остается воспользоваться теоремой о пропорциональных отрезках в треугольнике (задача 2 из п. 33):

$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{c}{a}\left(1+\frac{b}{c}\right)=\frac{b+c}{a}.$$

Аналогично доказываются два других соотношения в (6).

Задачи

203. Доказать, что если какие-нибудь две из четырех замечательных точек треугольника совпадают, то совпадают все четыре замечательные точки и треугольник является равносторонним.

204. Отрезок CP — высота треугольника ABC, H — точка пересечения высот этого треугольника. Докажите, что $CP\cdot HP=$ $=AP\cdot BP$.

205. Биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O.

а) Докажите, что $\frac{AO}{AA_1}+\frac{BO}{BB_1}+\frac{CO}{CC_1}=2$; $\frac{OA_1}{AA_1}+\frac{OB_1}{BB_1}+\frac{OC_1}{CC_1}=1$.

б) Может ли хотя бы одна из биссектрис треугольника делиться точкой O пополам?

в) Докажите, что одна из биссектрис делится точкой O в отношении 2 : 1, считая от вершины, тогда и только тогда, когда одна из сторон треугольника равна полусумме двух других сторон.

§ 4. Среднее геометрическое и другие средние

37. Среднее геометрическое. Напомним, что *средним геометрическим* или *средним пропорциональным* для двух отрезков AB и CD называется такой отрезок XY, длина которого является средним геометрическим для длин отрезков AB и CD, т. е.

$$XY=\sqrt{AB\cdot CD}.$$

Известные примеры среднего геометрического связаны с прямоугольным треугольником. На рисунке 138 катеты прямоугольного треугольника ABC равны a и b, гипотенуза AB равна c, высота CD равна h, а отрезки, на которые точка D делит гипотену-

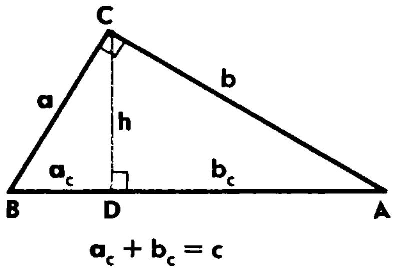


Рис. 138

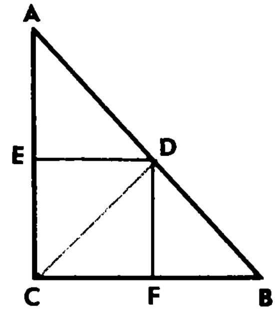


Рис. 139

зу, равны a_c и b_c. Треугольники ABC, ACD и BCD подобны друг другу. Из их подобия вытекают равенства

$$h=\sqrt{a_c b_c},\quad a=\sqrt{ca_c},\quad b=\sqrt{cb_c}. \qquad (1)$$

Используя понятие среднего геометрического, дайте словесную формулировку утверждений, выраженных этими равенствами.

Понятие среднего геометрического вводится не только для двух, но и для любых n положительных чисел. *Средним геометрическим для n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется такое положительное число a, что $a^n=a_1a_2\ldots a_n$. Число a называется также корнем n-й степени из произведения $a_1a_2\ldots a_n$ и обозначается так:*

$$a=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

В соответствии с этим определением *средним геометрическим для n отрезков* с длинами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ назовем отрезок с длиной $a=\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}$. Рассмотрим примеры среднего геометрического для трех и четырех отрезков.

Задача 1. В прямоугольном треугольнике ABC отрезок CD — высота, проведенная из вершины прямого угла C, а DE и DF — высоты в треугольниках ACD и BCD (рис. 139). Доказать, что

$$CD=\sqrt[4]{AC\cdot BC\cdot AE\cdot BF}, \qquad (2)$$

$$CD=\sqrt[3]{AB\cdot AE\cdot BF}. \qquad (3)$$

Решение. Воспользуемся формулами (1). Применяя первую формулу к треугольнику ABC, получаем $CD=\sqrt{AD\cdot BD}$, откуда $CD^4=AD^2\cdot BD^2$. Используя вторую (или третью) формулу, из треугольников ACD и BCD находим: $AD^2=AE\cdot AC$, $BD^2=BF\cdot BC$. Следовательно,

$$CD^4=AC\cdot BC\cdot AE\cdot BF, \qquad (4)$$

$$CD=\sqrt[4]{AC\cdot BC\cdot AE\cdot BF}.$$

Формула (2) доказана. Для доказательства формулы (3) воспользуемся равенством $CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}$ (оно следует из соотношений $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot BC$). Разделив равенство (4) на это равенство, получим $CD^3=AB\cdot AE\cdot BF$, откуда

$$CD=\sqrt[3]{AB\cdot AE\cdot BF}.$$

Формула (3) доказана.

38. Среднее арифметическое, среднее гармоническое и среднее квадратичное для двух отрезков. В математике наряду со средним геометрическим используют другие средние.

Средним арифметическим двух чисел a и b называется их полусумма $\frac{a+b}{2}$.

Средним гармоническим для чисел a и b называется число c, определяемое равенством $\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

Из этого равенства можно выразить c через a и b:

$$c=\frac{2ab}{a+b}. \qquad (5)$$

Средним квадратичным для чисел a и b называется число $c=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$, т.е. число c равно квадратному корню из среднего арифметического для квадратов чисел a и b. В соответствии с этими определениями средним арифметическим для двух отрезков с длинами a и b будем называть отрезок с длиной $\frac{a+b}{2}$, средним гармоническим — отрезок с длиной $\frac{2ab}{a+b}$ и средним квадратичным — отрезок с длиной $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Рассмотрим примеры среднего арифметического, среднего гармонического и среднего квадратичного двух отрезков.

Мы знаем, что средняя линия трапеции равна полусумме оснований. Это означает, что *средняя линия трапеции является средним арифметическим ее оснований* (рис. 140).

Оказывается, что среднее гармоническое и среднее квадратичное для оснований трапеции также имеют простой геометрический смысл.

Задача 2. Доказать, что отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный ее основаниям и проходящий через точку пересечения диагоналей, является средним гармоническим для оснований трапеции.

Решение. Пусть основания трапеции $ABCD$ равны a и b, а отрезок MN, параллельный основаниям, проходит через точку O пересечения диагоналей трапеции (рис. 141). Положим $MO=x$,

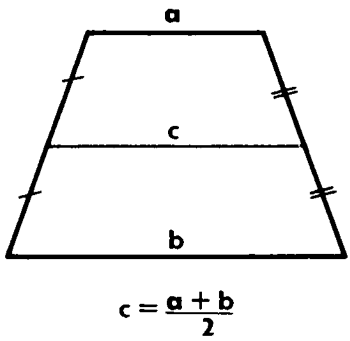


Рис. 140

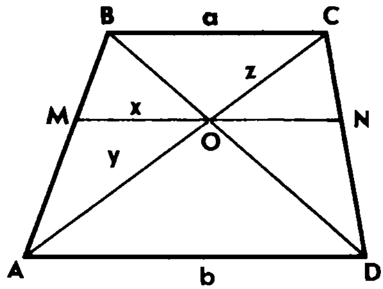


Рис. 141

$AO = y$, $OC = z$. Тогда из подобия треугольников AMO и ABC получим:

$$\frac{a}{x} = \frac{y+z}{y}, \text{ или } \frac{a}{x} = 1 + \frac{z}{y},$$

а из подобия треугольников BOC и AOD следует $\frac{z}{y} = \frac{a}{b}$. Поэтому

$$\frac{a}{x} = 1 + \frac{a}{b},$$

откуда

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$

Итак, $MO = \frac{ab}{a+b}$. Аналогично получается, что $ON = \frac{ab}{a+b}$. Следовательно,

$$MN = \frac{2ab}{a+b},$$

т. е. отрезок MN является средним гармоническим для оснований трапеции (см. формулу (5)). Задача решена.

Задача 3. Доказать, что отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный ее основаниям и разбивающий трапецию на две равновеликие трапеции, является средним квадратичным для оснований трапеции.

Решение. Пусть основания трапеции равны a и b, а отрезок MN, параллельный основаниям, разбивает трапецию на две равновеликие трапеции (рис. 142). Положим $MN = x$, а высоты в двух

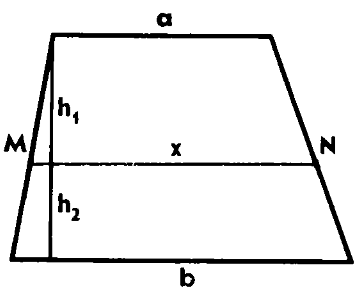


Рис. 142

получившихся трапециях обозначим через h_1 и h_2. Площадь верхней трапеции равна $\frac{1}{2}(a+x)h_1$, площадь нижней равна $\frac{1}{2}(b+x)h_2$, а площадь всей трапеции $\frac{1}{2}(a+b)(h_1+h_2)$. Используя равновеликость верхней и нижней трапеций, получаем систему двух уравнений:

$$\frac{1}{2}(a+x)h_1=\frac{1}{2}(b+x)h_2,$$

$$\frac{1}{2}(a+b)(h_1+h_2)=2\cdot\frac{1}{2}(a+x)h_1.$$

Разделив оба уравнения на $\frac{1}{2}h_1$ и обозначив отношение $\frac{h_2}{h_1}$ буквой y, приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$a+x=(b+x)y, \quad (a+b)(1+y)=2(a+x).$$

Решая эту систему, находим:

$$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

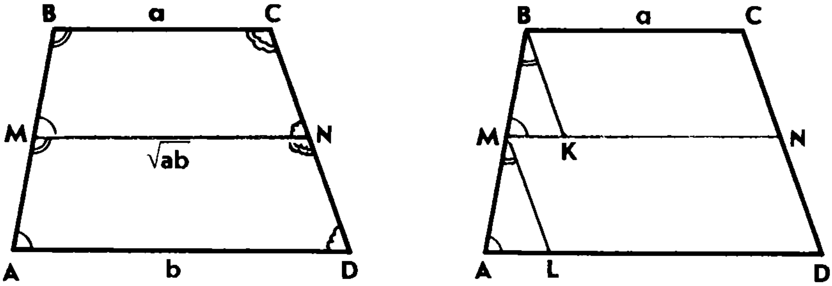
Итак, $MN=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, т. е. отрезок MN является средним квадратичным для оснований трапеции. Задача решена.

Мы рассмотрели различные средние для оснований трапеции — среднее арифметическое, среднее гармоническое, среднее квадратичное. Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный основаниям трапеции и равный одному из этих средних, обладает, как мы установили, определенным свойством: среднее арифметическое — это средняя линия, среднее гармоническое — это отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей, среднее квадратичное — отрезок, делящий трапецию на две равновеликие трапеции.

Вернемся теперь к среднему геометрическому и поставим такой вопрос: каким свойством обладает отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный ее основаниям и равный среднему геометрическому оснований? Оказывается, этот отрезок разбивает трапецию на две такие трапеции, что стороны одной пропорциональны сторонам другой. Иначе говоря, если основания трапеции $ABCD$ равны a и b, а отрезок MN, параллельный основаниям, равен $\sqrt{ab}$ (рис. 143, a), то

$$\frac{AD}{MN}=\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{MB}=\frac{DN}{NC}. \tag{6}$$

Заметим, что в трапециях $AMND$ и $MBCN$ углы соответственно равны. Поэтому эти трапеции можно назвать *подобными*. Докажем, что равенства (6) действительно верны. Так как $BC=a$, $AD=b$, $MN=\sqrt{ab}$, то $\frac{AD}{MN}=\sqrt{\frac{b}{a}}$ и $\frac{MN}{BC}=\sqrt{\frac{b}{a}}$, т. е. первое равенство в (6) имеет место.



а) б)

Рис. 143

Докажем, что $\frac{AM}{MB}$ также равно $\sqrt{\frac{b}{a}}$. С этой целью проведем $BK \parallel CD$ и $ML \parallel CD$ (рис. 143, *б*). Тогда

$$MK = MN - KN = \sqrt{ab} - a, \quad AL = AD - LD = b - \sqrt{ab}.$$

Треугольники AML и MBK подобны (по двум углам), поэтому

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AL}{MK} = \frac{b - \sqrt{ab}}{\sqrt{ab} - a} = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Аналогично доказывается, что $\frac{DN}{NC} = \sqrt{\frac{b}{a}}$. Итак, равенства (6) справедливы.

Таким образом,

отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный ее основаниям и равный среднему геометрическому оснований, разбивает трапецию на две подобные трапеции.

Интересно сравнить величины всех четырех средних для оснований трапеции. Нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что если положительные числа a и b не равны, то

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

т. е. среднее гармоническое для неравных чисел a и b меньше среднего геометрического, которое меньше среднего арифметического, а среднее арифметическое в свою очередь меньше среднего квадратичного для этих чисел. Если же $b = a$, то и каждое среднее равно a. На рисунке 144 изображены отрезки, являющиеся различными средними для оснований трапеции:

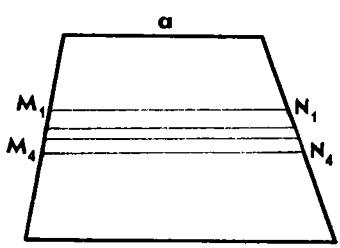


Рис. 144

$$M_1N_1=\frac{2ab}{a+b} \text{ — среднее гармоническое,}$$

$$\sqrt{ab} \text{ — среднее геометрическое,}$$

$$\frac{a+b}{2} \text{ — среднее арифметическое,}$$

$$M_4N_4=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ — среднее квадратичное.}$$

39. Различные средние для нескольких отрезков. Подобно среднему геометрическому, понятия среднего арифметического, среднего гармонического и среднего квадратичного можно ввести для n чисел и соответственно для n отрезков.

Если имеется n отрезков с длинами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то *средним арифметическим для этих отрезков называется отрезок с длиной*

$$\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n),$$

средним гармоническим — отрезок, длина с которого определяется равенством

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right),$$

и, наконец, *средним квадратичным — отрезок с длиной*

$$\sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)}.$$

Трапеция дает возможность наглядно проиллюстрировать эти средние с помощью отрезков, параллельных ее основаниям. Начнем со среднего квадратичного.

Рассмотрим два отрезка, параллельных основаниям трапеции, равным a и b, и разбивающих ее на три равновеликие трапеции: $S_1=S_2=S_3$ (рис. 145, a). Обозначим длины этих отрезков через x_1 и x_2. Используя результат задачи 3 из п. 38, получаем:

так как $S_1=S_2$, то $x_1=\sqrt{\frac{a^2+x_2^2}{2}}$,

а так как $S_2=S_3$, то $x_2=\sqrt{\frac{x_1^2+b^2}{2}}$.

Из этих двух равенств выражаем x_1 и x_2 через a и b:

$$x_1=\sqrt{\frac{2a^2+b^2}{3}}=\sqrt{\frac{a^2+a^2+b^2}{3}},$$

$$x_2=\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{3}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+b^2}{3}}.$$

Таким образом,

отрезок с длиной x_1 есть среднее квадратичное для трех отрезков, два из которых равны a и один равен b, а отрезок с длиной x_2 есть среднее квадратичное также для трех отрезков, один из которых равен a, а два равны b.

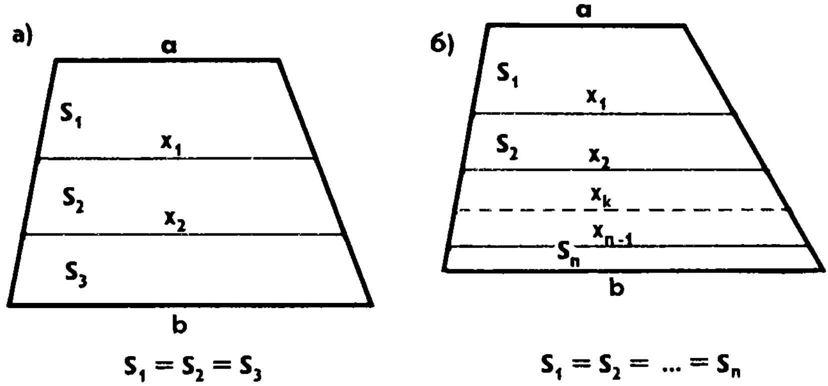


Рис. 145

Рассмотрим теперь $(n-1)$ отрезков, которые параллельны основаниям трапеции и разбивают ее на n равновеликих трапеций:

$$S_1 = S_2 = \ldots = S_n \qquad \text{(рис. 145, } б\text{).}$$

Нетрудно убедиться в том, что *каждый из этих отрезков является средним квадратичным для n отрезков,* часть из которых равна основанию a, а другая часть — основанию b. Более точно, отрезок с длиной x_1 (см. рис. 145, *б*) является средним квадратичным для n отрезков, из которых $(n-1)$ отрезков равны a, а один отрезок равен b; отрезок с длиной x_2 является средним квадратичным для n отрезков, из которых $(n-2)$ отрезка равны a, а два отрезка равны b, и т. д.; отрезок с длиной x_k является средним квадратичным для n отрезков, из которых $(n-k)$ отрезков равны a и k отрезков равны b. Этот факт можно выразить следующей формулой:

$$x_k = \sqrt{\frac{(n-k)\,a^2 + kb^2}{n}}, \quad k = 1,\ 2, \ldots, n-1.$$

Проверьте самостоятельно справедливость этой формулы.

Покажем теперь, какие отрезки в трапеции являются средними арифметическими, средними геометрическими и средними гармоническими для нескольких отрезков, часть из которых равна одному основанию, а другая часть — другому основанию трапеции.

Пусть $(n-1)$ отрезков, параллельных основаниям трапеции, разделяют ее боковые стороны на n равных частей. Длины этих отрезков обозначим $x_1, \ldots, x_{n-1}$ (рис. 146, *а*). Тогда справедлива формула

$$x_k = \frac{1}{n}((n-k)\,a + kb), \quad k = 1,\ 2, \ldots,\ n-1, \qquad (7)$$

т. е. *k-й отрезок является средним арифметическим n отрезков,* из которых $(n-k)$ равны a и k отрезков равны b.

Рис. 146

Рассмотрим теперь $(n-1)$ отрезков, параллельных основаниям трапеции и разбивающих ее на n подобных друг другу трапеций (рис. 146, *б*). Длина y_k k-го отрезка выражается формулой

$$y_k=\sqrt[n]{a^{n-k}b^k},\quad k=1,\ 2,\ ...,\ n-1, \tag{8}$$

т. е. *k-й отрезок является средним геометрическим для n отрезков,* из которых $(n-k)$ равны a и k отрезков равны b.

Докажите самостоятельно формулы (7) и (8).

Обратимся, наконец, к рисунку 147, на котором изображена трапеция $ABCD$ с основаниями, равными a и b. Как было показано в п. 38 (задача 2), отрезок M_1N_1, проходящий через точку O_1 пересечения диагоналей трапеции и параллельный ос-

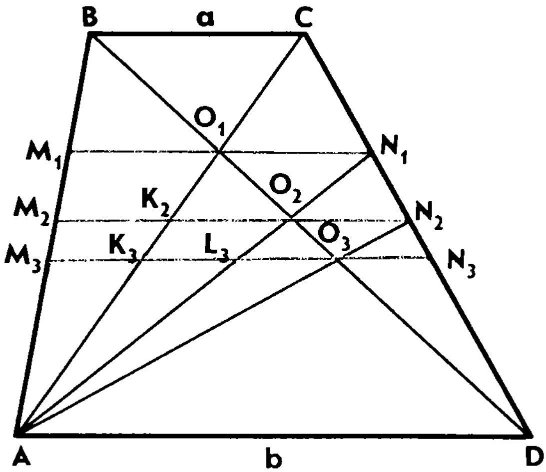


Рис. 147

нованиям, является средним гармоническим для оснований трапеции:

$$\frac{1}{M_1N_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Проведем отрезок AN_1 и обозначим через O_2 точку пересечения AN_1 с диагональю BD. Через точку O_2 проведем отрезок M_2N_2, параллельный основаниям трапеции (см. рис. 147). Далее проведем отрезок AN_2 и через точку O_3 пересечения AN_2 и BD проведем отрезок M_3N_3, параллельный основаниям трапеции. Продолжая этот процесс, мы построим отрезки $M_4N_4, \ldots, M_kN_k$ для любого k. Нетрудно доказать, что

$$\frac{1}{M_2N_2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right),$$

т. е. отрезок M_2N_2 является средним гармоническим для трех отрезков, один из которых равен a и два отрезка равны b. Аналогичная формула получается для любого отрезка M_kN_k:

$$\frac{1}{M_kN_k}=\frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{a}+\frac{k}{b}\right),\ k=1,\ 2,\ 3, \ldots, \tag{9}$$

т. е. *отрезок* M_kN_k *является средним гармоническим для* $(k+1)$ *отрезков*, один из которых равен a и k отрезков равны b.

Докажите формулу (9) самостоятельно.

Задачи

206. Используя рисунок 147, докажите, что:

а) $M_2K_2=K_2O_2=O_2N_2$;

б) $M_3K_3=K_3L_3=L_3O_3=O_3N_3$;

в) точки K_2 и L_3 лежат на отрезке M_1D;

г) отрезок M_2K_2 является средним гармоническим для отрезков M_1O_1 и M_3K_3;

д) отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции $M_1N_1N_3M_3$ ($M_1N_1N_2M_2$) параллельно ее основаниям, является средним гармоническим для восьми (двенадцати) отрезков, из которых три (пять) равны a и пять (семь) равны b.

207. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые BD, CD и BC соответственно в точках M, N и P. Докажите, что отрезок AM является средним геометрическим для отрезков MN и MP.

208. Докажите, что диагональ делит трапецию на два подобных треугольника тогда и только тогда, когда она равна среднему геометрическому оснований трапеции.

209. Основания трапеции равны 4 и 9, одна из ее диагоналей равна 6. Найдите площадь трапеции, если известно, что длины всех ее сторон выражаются различными целыми числами.

210. Величины углов треугольника относятся как 1:2:4. Докажите, что меньшая сторона треугольника равна половине среднего гармонического двух других сторон.

§ 5. Метод подобия в задачах на построение

40. Примеры решения задач на построение методом подобия. Метод подобия при решении задач на построение треугольников с помощью циркуля и линейки состоит в том, что сначала, используя некоторые данные, строят треугольник, подобный искомому, а затем, привлекая остальные данные, строят искомый треугольник. Этот прием применяется и при построении других фигур. Понятие подобия для произвольных фигур вводится на основе преобразования подобия. Не останавливаясь пока более детально на этом вопросе, отметим лишь, что любые два квадрата являются подобными; две трапеции, у которых углы соответственно равны, а стороны одной пропорциональны сторонам другой трапеции, подобны; любые две окружности подобны.

Рассмотрим примеры решения задач на построение методом подобия.

Задача 1. В данный треугольник ABC вписать квадрат так, чтобы две его вершины лежали на прямой AB и еще по одной — на сторонах AC и BC.

Решение. Данный треугольник ABC изображен на рисунке 148, *а*. С помощью циркуля и линейки нужно построить квадрат $DEFG$, расположенный так, как показано на этом рисунке.

Сначала построим какой-нибудь квадрат, у которого две вершины лежат на прямой AB и еще одна — на стороне AC. С этой целью возьмем произвольную точку E_1 на стороне AC, проведем перпендикуляр E_1D_1 к прямой AB и далее построим квадрат $D_1E_1F_1G_1$, у которого вершина G_1 лежит на прямой AB, как показано на рисунке 148, *б*.

Затем проведем прямую AF_1 и обозначим буквой F точку пересечения этой прямой со стороной BC (см. рис. 148, *в*). Через точку F проведем прямую, параллельную AB, и прямую, перпендикулярную к AB. Получим точки E и G на сторонах AC и AB. Из точки E проведем перпендикуляр ED к AB. Получился прямоугольник $DEFG$, который и есть искомый квадрат. В самом деле,

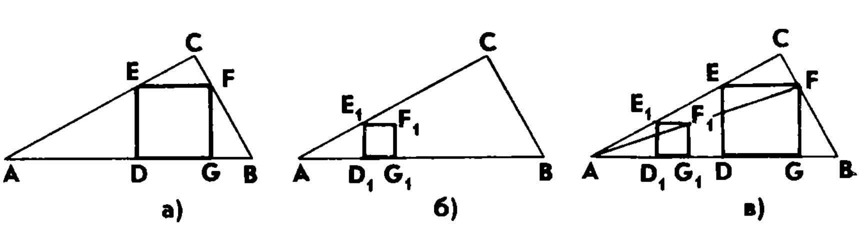


Рис. 148

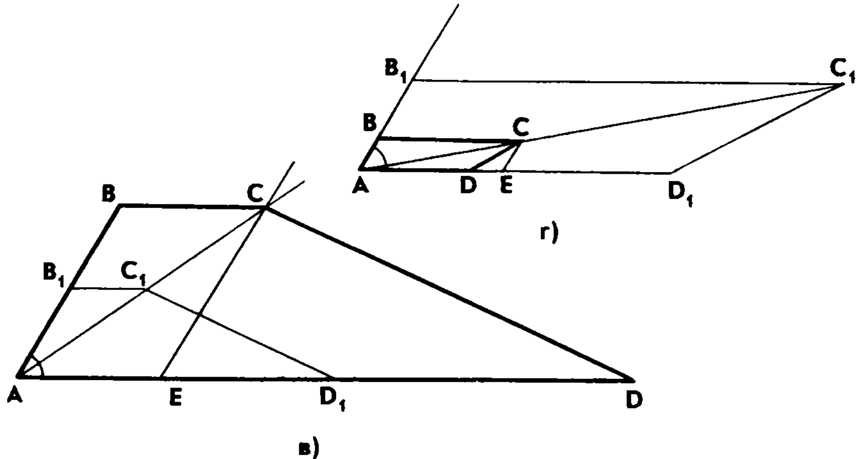


Рис. 149

из подобия треугольников AE_1F_1 и AEF следует, что

$$\frac{EF}{E_1F_1}=\frac{AF}{AF_1},$$

а из подобия треугольников AF_1G_1 и AFG получаем:

$$\frac{FG}{F_1G_1}=\frac{AF}{AF_1}.$$

Следовательно, $\frac{EF}{E_1F_1}=\frac{FG}{F_1G_1}$, а так как $E_1F_1=F_1G_1$, то $EF=FG$. Итак, в прямоугольнике $DEFG$ смежные стороны равны, значит, это квадрат. Задача решена.

Задача 2. Построить трапецию $ABCD$ по углу A и основанию BC, если известно, что $AB:CD:AD=1:2:3$.

Решение. Задачу надо понимать так: даны угол hk и отрезок PQ (рис. 149, *а*). Требуется построить с помощью циркуля и линейки трапецию $ABCD$, у которой $\angle A=\angle hk$, $BC=PQ$, а остальные три стороны AB, CD и AD относятся как $1:2:3$.

Построим сначала какую-нибудь трапецию $AB_1C_1D_1$, у которой $\angle A=\angle hk$ и $AB_1:C_1D_1:AD_1=1:2:3$. Это сделать совсем не трудно. Строим угол A, равный данному углу, и на его сторонах откладываем произвольный отрезок AB_1 и отрезок $AD_1 = 3AB_1$ (рис. 149, *б*). После этого через точку B_1 проводим прямую l, параллельную AD_1, и строим окружность радиуса $2AB_1$ с центром в точке D_1. Эта окружность пересекает прямую l в двух точках C_1 и C_1'.

Итак, мы построили две трапеции $AB_1C_1D_1$ и $AB_1C_1'D_1$, у которых $\angle A = \angle hk$ и стороны AB_1, BC_1 (B_1C_1') и C_1D_1 ($C_1'D_1$) относятся как $1:2:3$.

Возьмем одну из этих трапеций, например $AB_1C_1D_1$, проведем прямую AC_1 и построим отрезок BC с концами на сторонах угла B_1AC_1, который параллелен B_1C_1 и равен PQ. Это можно сделать так: на луче AD_1 откладываем отрезок $AE = PQ$ и через точку E проводим прямую, параллельную AB_1. Она пересекается с прямой AC_1 в точке C (рис. 149, *в*). Через точку C проводим прямую, параллельную B_1C_1, и получаем точку B. Очевидно, отрезок BC равен PQ. Остается провести через точку C прямую, параллельную C_1D_1. Она пересекает луч AD_1 в точке D. Трапеция $ABCD$ искомая. В самом деле,

$$\angle A = \angle hk, \quad BC = PQ \quad \text{и} \quad \frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{AD}{AD_1}$$

(это следует из подобия треугольников ABC и AB_1C_1, ACD и AC_1D_1). Отсюда получаем, что

$$AB:CD:AD = AB_1:C_1D_1:AD_1 = 1:2:3.$$

Построенная трапеция $ABCD$ удовлетворяет всем условиям задачи. Если вместо трапеции $AB_1C_1D_1$ взять трапецию $AB_1C_1'D_1$ и проделать такие же построения, то получим второе решение задачи (рис. 149, *г*). Итак, данная задача имеет два решения.

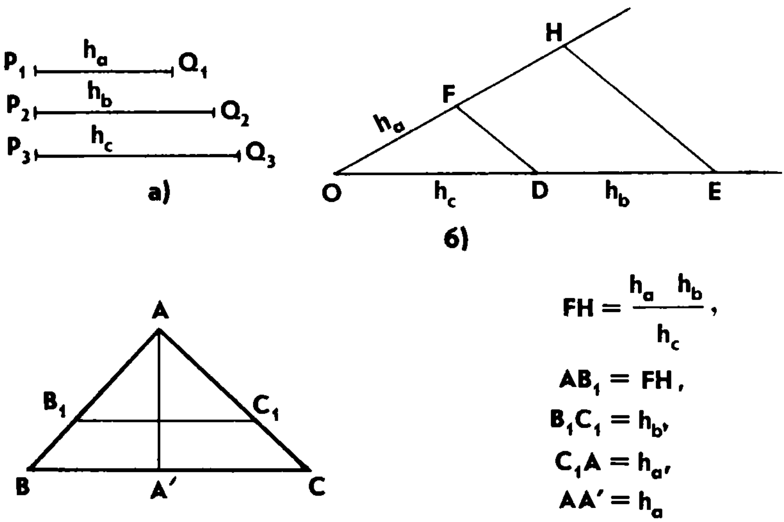


Рис. 150

З а д а ч а 3. Построить треугольник по трем высотам.

Р е ш е н и е. Задачу надо понимать так: даны три отрезка P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 (рис. 150, *а*), требуется с помощью циркуля и линейки построить треугольник ABC, высоты которого, проведенные из вершин A, B и C, соответственно равны P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3.

А н а л и з з а д а ч и. Обозначим через a, b и c длины сторон искомого треугольника, противолежащих углам A, B и C, а через h_a, h_b и h_c длины отрезков P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3. Воспользуемся равенствами $ah_a = bh_b = ch_c$ (каждое из произведений равно удвоенной площади треугольника). Из первого равенства получаем пропорцию

$$\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a},$$

а из второго равенства имеем $b = \frac{h_c}{h_b} \cdot c$ и поэтому

$$\frac{b}{h_a} = \frac{c}{\left(\frac{h_a h_b}{h_c}\right)}.$$

Таким образом,

$$\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\left(\frac{h_a h_b}{h_c}\right)}.$$

Полученные равенства показывают, что искомый треугольник со сторонами a, b, c подобен треугольнику со сторонами h_b, h_a, $\frac{h_a h_b}{h_c}$. Это дает ключ к решению задачи.

П о с т р о е н и е. По данным отрезкам P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 с длинами h_a, h_b, h_c построим отрезок, длина которого равна $\frac{h_a \cdot h_b}{h_c}$. Это можно сделать следующим образом: построим какой-нибудь угол и отложим от его вершины O на одной стороне угла последовательно отрезки $OD = P_3Q_3$ и $DE = P_2Q_2$, а на другой стороне угла отрезок $OF = P_1Q_1$ (рис. 150, *б*).

Проведем прямую DF, а затем через точку E — прямую, параллельную DF. Она пересекает луч OF в точке H. Отрезок FH равен $\frac{h_a h_b}{h_c}$, что следует из пропорции $\frac{OF}{OD} = \frac{FH}{DE}$.

Далее построим треугольник AB_1C_1 по трем сторонам $AB_1 = FH$, $B_1C_1 = P_2Q_2$, $C_1A = P_1Q_1$ (рис. 150, *в*). Этот треугольник, как уже было отмечено, подобен искомому треугольнику. Через вершину A проведем высоту треугольника AB_1C_1 и отложим на ней (или ее продолжении) отрезок AA', равный P_1Q_1. Через точку A' проведем прямую, параллельную B_1C_1. Точки B и C пересечения этой прямой с лучами AB_1 и AC_1 являются вершинами искомого треугольника ABC.

Доказательство. Построенный треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 и, следовательно, подобен искомому треугольнику. Высота, проведенная из вершины A в построенном треугольнике ABC, равна h_a, как и должно быть в искомом треугольнике, т. е. сходственные высоты в треугольнике ABC и искомом треугольнике равны. Значит, коэффициент подобия равен 1, а это и означает, что треугольник ABC есть искомый.

Исследование. Искомый треугольник ABC можно построить в том случае, если можно построить треугольник AB_1C_1, стороны которого равны соответственно h_a, h_b, $\frac{h_a h_b}{h_c}$. Следовательно, данные отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 должны быть такими, чтобы из отрезков с длинами h_a, h_b, $\frac{h_a h_b}{h_c}$ можно было построить треугольник. В таком случае задача имеет решение. Докажите самостоятельно единственность решения.

Задачи

211. Постройте треугольник ABC по углу A, биссектрисе, проведенной из вершины B, и заданному отношению двух сторон: $AB:AC=1:3$.

212. Постройте треугольник ABC по углу A, высоте, проведенной из вершины C, и заданному отношению двух сторон: $AB:AC=m:n$, где m и n — целые числа.

213. Постройте равнобедренный треугольник по углу между боковыми сторонами и сумме основания и высоты, проведенной к основанию.

214. Постройте треугольник ABC, если даны углы A и B и отрезок, равный сумме стороны AC и медианы BM.

215. Постройте трапецию $ABCD$ по основанию AD и углам A и D, если известно, что $AB:BC=1:2$.

216. Постройте трапецию $ABCD$ по углу A и боковой стороне CD, если известно, что $AB:BC:AD=1:1:2$.

217. Даны отрезок и параллельная ему прямая. С помощью одной линейки (т. е. не пользуясь циркулем) разделите данный отрезок: а) на две равные части; б) на три равные части.

218. Постройте прямую, параллельную основаниям данной трапеции и пересекающую ее так, чтобы отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами трапеции, делился ее диагоналями: а) на три равных отрезка; б) на три отрезка, два из которых равны, а третий равен сумме двух других.

219. Даны три отрезка PQ, M_1N_1 и M_2N_2. Постройте ромб, стороны которого равны отрезку PQ, а отношение диагоналей равно отношению $M_1N_1:M_2N_2$.

220. Постройте прямую, проходящую через данную точку M, которая лежит внутри данного угла, и пересекающую стороны угла в точках A и B так, чтобы: а) $AM=MB$; б) $AM:MB=P_1Q_1:P_2Q_2$, где P_1Q_1 и P_2Q_2 — данные отрезки.

ОКРУЖНОСТЬ

§ 1. Взаимное расположение прямых и окружностей

41. Касательная к окружности. Напомним выводы, к которым мы пришли, исследуя взаимное расположение прямой и окружности. Пусть дана окружность с центром O радиуса r и прямая l, расположенная на расстоянии d от точки O (если точка O лежит на прямой l, то считаем, что $d=0$). Тогда если $d<r$, то прямая и окружность имеют две общие точки. В этом случае прямая называется *секущей* (рис. 151, *а*). Если $d=r$, то прямая и окружность имеют только одну общую точку и данная прямая называется *касательной* к окружности (рис. 151, *б*). Если, наконец, $d>r$, то прямая и окружность не имеют общих точек (рис. 151, *в*).

Далее мы доказали, что *касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания* (свойство касательной), и, обратно, *прямая, проходящая через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярная к этому радиусу, является касательной* (признак касательной). Таким образом, это свойство касательной является ее *характеристическим свойством.*

42. Касательная к кривой линии. Заметим, что ни определение касательной к окружности, ни ее характеристическое свойство не годятся для введения понятия касательной к кривой линии произвольного вида. Действительно, из рассмотрения спирали, изображенной на рисунке 152, ясно, что касательная к ней может пересекать ее в нескольких точках, и, следовательно, такое же определение касательной, как для окружности, для нее не годится. С другой стороны, неясно, что назвать радиусом спирали, и, следовательно, неясно, как применить к ней характери-

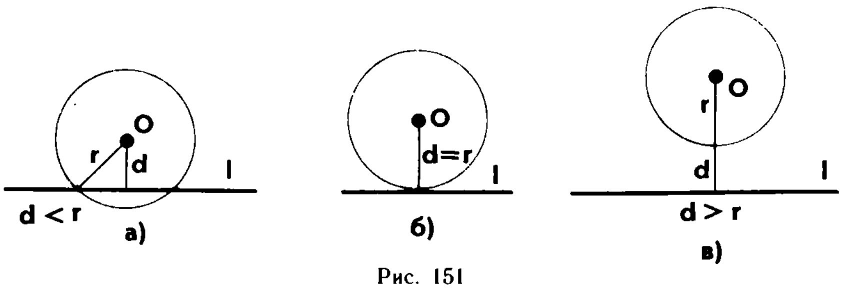


Рис. 151

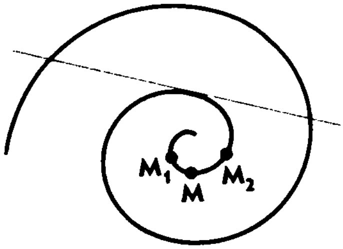


Рис. 152

стическое свойство касательной. Поэтому при определении касательной к кривой линии произвольного вида поступают иначе.

Рассмотрим произвольную кривую линию и возьмем на ней какую-нибудь точку M. Далее возьмем еще одну точку M_1 данной линии и проведем прямую MM_1 (рис. 153, *а*). Эту прямую естественно назвать *секущей*. Теперь представим себе, что точка M_1, двигаясь по кривой, приближается к M. При этом секущая MM_1 будет как-то поворачиваться и займет определенное положение (прямая l), когда точка M_1 совпадет с M. Полученную таким образом прямую l и называют *касательной* к данной кривой в точке M. Итак, *касательная к кривой в точке M — это предельное положение секущей MM_1 при стремлении точки M_1 к точке M по данной кривой.*

Возьмем в качестве кривой линии окружность с центром O и попробуем применить к ней это определение. Обозначим буквой α угол MOM_1 (рис. 153, *б*). Треугольник MOM_1 равнобедренный, поэтому $\angle OMM_1=\frac{1}{2}(180°-\alpha)=90°-\frac{\alpha}{2}$. Будем приближать точку M_1 к точке M. Тогда угол α будет становиться все меньше и меньше, а значит, угол OMM_1 — все ближе и ближе к прямому. Ясно, что, когда M_1 совпадет с M, этот угол станет прямым. Следовательно, касательной к окружности в точке M в смысле нового определения будет прямая, проходящая через M и перпендикулярная к радиусу OM. Но эта прямая согласно характеристическому свойству является касательной и в смысле старого определения, поэтому применительно к окружности новое определение дает тот же результат, что и старое.

С понятием касательной тесно связано понятие выпуклости: кривая линия называется *выпуклой*, если она лежит по одну сторону от любой своей касательной. Примером выпуклой линии является окружность. В самом деле, все точки окружности находятся на расстоянии R от центра, а все точки касательной, отличные от точки касания,— на расстоянии, большем R. Поэтому окружность лежит по одну сторону от касательной.

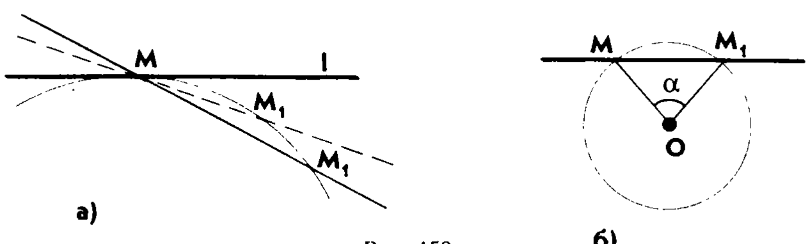


Рис. 153

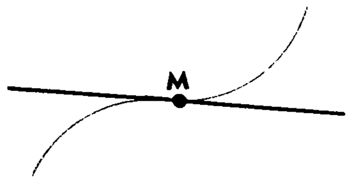


Рис. 154

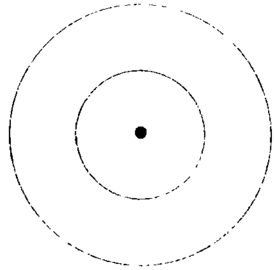


Рис. 155

Спираль, изображенная на рисунке 152, не является выпуклой. Однако для любой ее точки M можно указать такие две (достаточно близкие к M) точки M_1 и M_2 по разные стороны от M, что заключенная между ними часть кривой линии будет выпуклой. Такие линии называются *локально выпуклыми*. На рисунке 154 изображена линия, не являющаяся локально выпуклой: от нее нельзя «отрезать» кусок, содержащий точку M, который был бы выпуклой линией.

43. Взаимное расположение двух окружностей. Выясним, сколько общих точек могут иметь две окружности в зависимости от их взаимного расположения. Рассмотрим две окружности с центрами O_1 и O_2 радиусов r_1 и r_2. Для определенности будем считать, что $r_1 \geqslant r_2$. Если точки O_1 и O_2 совпадают и $r_1 \neq r_2$, то окружности не имеют ни одной общей точки (рис. 155). Такие окружности (с общим центром) называются *концентрическими*.

Предположим теперь, что точки O_1 и O_2 не совпадают, и обозначим буквой d длину отрезка O_1O_2. Прямая O_1O_2 называется *линией центров* данных окружностей. Рассмотрим три возможных случая:

1) $d < r_1 + r_2$ и $d > r_1 - r_2$. Тогда, очевидно, выполняются неравенства $d < r_1 + r_2$, $r_1 < d + r_2$ и так как $r_2 \leqslant r_1$, то $r_2 < r_1 + d$. Следовательно, существует треугольник O_1O_2A, такой, что $O_1A = r_1$, $O_2A = r_2$, а значит, A — общая точка данных окружностей (рис. 156). Если B — точка, симметричная точке A относительно линии центров O_1O_2, то $O_1B = O_1A = r_1$, $O_2B = O_2A = r_2$, поэтому точка B также является общей точкой данных окружностей.

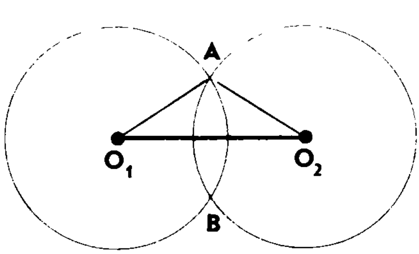


Рис. 156

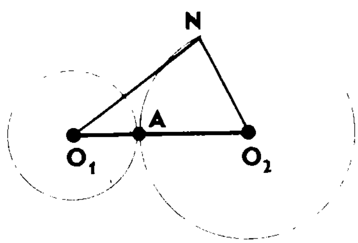


Рис. 157

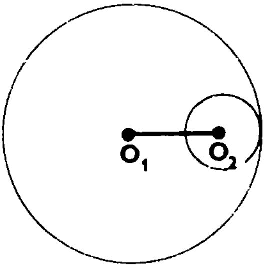


Рис. 158

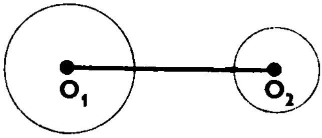


Рис. 159

Данные окружности не могут иметь более двух общих точек. В самом деле, если допустить, что A, B и C — три общие точки этих окружностей, то эти точки не лежат на одной прямой (объясните почему), поэтому обе окружности являются описанными около треугольника ABC. Но мы знаем, что около треугольника можно описать только одну окружность. Следовательно, две окружности не могут иметь более двух общих точек.

Итак, *если расстояние между центрами двух окружностей меньше суммы радиусов и больше разности радиусов, то они имеют две общие точки, которые симметричны относительно линии центров окружностей.*

2) $d=r_1+r_2$ или $d=r_1-r_2$. Пусть $d=r_1+r_2$. Тогда на отрезке O_1O_2 существует и притом единственная точка A, такая, что $O_1A=r_1$ и $O_2A=r_2$, поэтому A — общая точка данных окружностей. Для любой точки M плоскости, не принадлежащей отрезку O_1O_2, имеем $O_1M+O_2M>O_1O_2$, поэтому точка M не может быть общей точкой данных окружностей. В этом случае окружности имеют только одну общую точку (рис. 157).

Отметим, что все точки любой из двух окружностей, отличные от их общей точки, лежат вне круга, ограниченного другой окружностью (говорят также, что окружности лежат одна вне другой). В самом деле, если, например, N — точка окружности с центром O_1, отличная от точки A, то $O_1N+O_2N>O_1O_2$, или $O_1N+r_2>d$. Отсюда следует, что $O_1N>r_1$.

Если $d=r_1-r_2$, то по аналогии с предыдущим нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что и в этом случае окружности имеют только одну общую точку, а все точки окружности радиуса r_2, отличные от общей точки, лежат внутри круга, ограниченного окружностью радиуса r_1 (говорят, что окружность радиуса r_2 лежит внутри окружности радиуса r_1) (рис. 158).

Итак, *если $d=r_1+r_2$ или $d=r_1-r_2$, то окружности имеют только одну общую точку, лежащую на линии центров.*

3) $d>r_1+r_2$ или $d<r_1-r_2$. Пусть $d>r_1+r_2$ (рис. 159). Если M — какая-либо точка плоскости, то ясно, что $O_1M+O_2M\geqslant O_1O_2$, или $O_1M+O_2M\geqslant d$. Отсюда заключаем, что окружности не имеют ни одной общей точки. В самом деле, если предположить, что M — их общая точка, то предыдущее соотношение запишется так: $r_1+r_2\geqslant d$, что противоречит неравенству $d>r_1+r_2$.

Итак, *если $d>r_1+r_2$ или $d<r_1-r_2$, то окружности не имеют общих точек.*

Говорят, что две окружности *касаются друг друга,* если они имеют только одну общую точку. Из предыдущего изложения следует, что две окружности касаются друг друга тогда и только тогда, когда $d=r_1+r_2$ или $d=r_1-r_2$ (см. рис. 157 и 158).

44. Общие касательные к двум окружностям. Прямая, касающаяся каждой из двух данных окружностей, называется их *общей касательной.* Если при этом центры окружностей лежат по одну сторону от касательной, то касательная называется *внешней,* а если по разные стороны — *внутренней.* На рисунке 160 изображены две окружности, для которых AB и A_1B_1 — внешние касательные, а CD и C_1D_1 — внутренние.

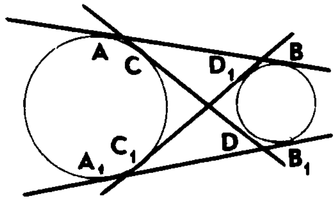


Рис. 160

Задача. Даны две окружности, лежащие одна вне другой. Построить: а) их общие внешние касательные; б) их общие внутренние касательные.

Решение. а) Рассмотрим две окружности с центрами O_1 и O_2 радиусов r_1 и r_2. В случае $r_1=r_2$ решение задачи очевидно (рис. 161, *а*). Пусть $r_1>r_2$ (рис. 161, *б*). Проведем окружность с центром O_1 радиуса r_1-r_2 и построим к ней касательную O_2M (M — точка касания). По свойству касательной $O_1M \perp O_2M$. Проведем через точку M радиус O_1A одной окружности, а через точку O_2 радиус O_2B другой окружности, перпендикулярный к O_2M, как показано на рисунке 161, *б*. Прямая AB — искомая касательная.

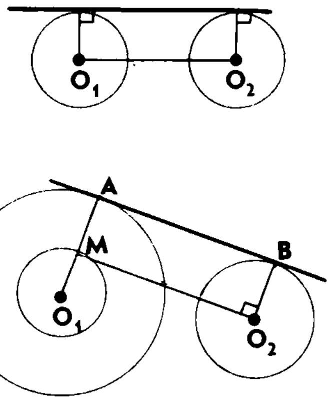
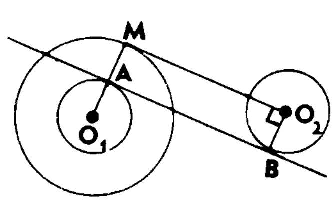


Рис. 161

В самом деле, в четырехугольнике $MABO_2$ противоположные стороны MA и O_2B равны (по построению) и параллельны ($MA \perp O_2M$ и $O_2B \perp O_2M$). Следовательно, этот четырехугольник — параллелограмм. Кроме того, угол MO_2B прямой. Значит, этот параллелограмм является прямоугольником. Поэтому углы A и B параллелограмма также прямые. Но это и означает, что прямая AB — общая касательная двух окружностей. Из построения ясно, что эта касательная внешняя. Вторая внешняя касательная строится аналогично.



б) Пользуясь рисунком 162, решите эту задачу самостоятельно.

Рис. 162

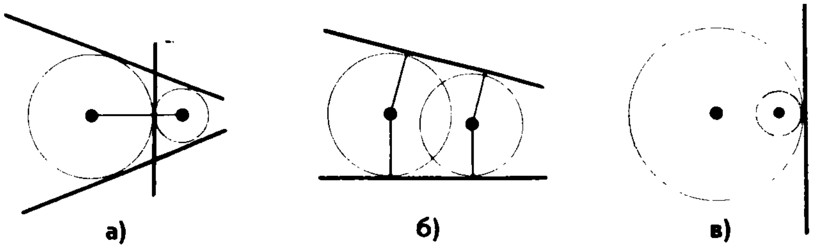


Рис. 163

Замечание. В рассмотренном случае (окружности лежат одна вне другой) общих касательных четыре. Если окружности касаются друг друга извне, то общих касательных будет три (рис. 163, *а*) — две внешние и одна внутренняя, проходящая через точку касания окружностей и перпендикулярная к линии центров. Две пересекающиеся окружности имеют только две общие внешние касательные (рис. 163, *б*); если окружности касаются друг друга изнутри, то они имеют только одну общую касательную (рис. 163, *в*); наконец, если одна окружность лежит внутри другой, то общих касательных у них вообще нет.

Задачи

221. Прямые AB и AC — касательные в точках B и C к окружности с центром в точке O. Через произвольную точку X дуги BC проведена касательная к окружности, пересекающая отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Найдите: а) периметр треугольника AMP, если $AB=a$; б) угол MOP, если $\angle A=\alpha$.

222. В трапецию $ABCD$ с основаниями AB и CD $(AB>CD)$ вписана окружность. Найдите площадь трапеции, если $CD=a$, $DK=b$ и $AK=d$, где K — точка касания окружности и боковой стороны AD.

223. Докажите, что любая секущая, проведенная через центр вписанной в треугольник окружности, делит площадь и периметр треугольника в равных отношениях.

224. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB, BC и AC в точках K, M и P соответственно. Докажите, что отрезки AM, BP и CK пересекаются в одной точке.

225. Медиана треугольника ABC, проведенная из вершины B, проходит через центр O описанной окружности. Определите вид этого треугольника.

226. Докажите, что если через точку P, взятую вне окружности с центром O, проведены к окружности касательные PA и PB (A и B — точки касания), а также проведен перпендикуляр AC к диаметру BD, то прямая PD делит отрезок AC пополам.

227. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B, через точку A проведена секущая MP (M и P — две другие точки пересечения с окружностями). Докажите, что отрезок MP будет наибольшим, если $MP \parallel O_1O_2$.

228. Докажите, что если на одной из двух окружностей имеются внутренняя и внешняя точки относительно другой окружности, то эти окружности пересекаются.

229. Даны две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами r_1 и r_2, причем точка O_1 лежит на второй окружности. Докажите, что если $2r_2 > r_1$, то окружности пересекаются, если $2r_2 = r_1$, то они касаются друг друга, а если $2r_2 < r_1$, то они не имеют общих точек.

230. К двум окружностям проведены две общие внешние касательные и одна внутренняя. Внутренняя касательная пересекает внешние в точках A, B и касается окружностей в точках A_1, B_1. Докажите, что $AA_1 = BB_1$.

231. Прямая пересекает две концентрические окружности. Докажите, что отрезки прямой, заключенные между этими окружностями, равны.

232. Через точки пересечения двух окружностей проведены две пересекающие их параллельные прямые. Докажите, что части этих прямых, заключенные внутри окружностей, равны.

233. К двум окружностям проведены две общие внешние касательные, A, B, C, D — точки касания. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

234. Две окружности, лежащие одна вне другой, пересечены прямой, не проходящей ни через один из их центров. Через точки пересечения проведены четыре касательные к окружностям. Докажите, что если две из них параллельны, то две другие также параллельны.

235. К двум окружностям, касающимся друг друга извне, проведена общая внешняя касательная, A и B — точки касания. Докажите, что окружность с диаметром AB касается линии центров данных окружностей.

236. Окружность пересекает одну из двух концентрических окружностей в точках A и B, а другую — в точках C и D. Докажите, что $AB \parallel CD$.

237. Постройте секущую, проходящую через данную точку, лежащую вне данной окружности так, чтобы ее внешняя часть (т. е. отрезок с концами в данной точке и ближайшей к ней точке пересечения) равнялась внутренней (т. е. отрезку секущей, являющемуся хордой окружности).

238. Постройте секущую, проходящую через точку пересечения двух данных окружностей так, чтобы ее внутренняя часть (лежащая внутри данных окружностей) равнялась данному отрезку.

239. Постройте прямую, пересекающую две данные концентрические окружности так, чтобы ее часть, заключенная внутри внешней окружности, была вдвое больше части, заключенной внутри внутренней окружности. При каком условии задача имеет решение?

240. Постройте две параллельные хорды, проходящие через две данные точки данной окружности так, чтобы их сумма равнялась данному отрезку.

241. На продолжении диаметра окружности постройте точку, для которой отрезок касательной, проведенной из нее к окружности с концами в этой точке и точке касания, равен диаметру.

242. Постройте прямую, проходящую через данную точку вне данной окружности так, чтобы она отсекала дугу данной величины.

§ 2. Углы, связанные с окружностью

45. Вписанные углы. Мы знаем, что вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. В частности, вписанный угол, опирающийся на полуокружность, прямой. Этот факт широко используется при решении разнообразных задач. Например, он позволяет дать простое решение задачи о построении касательной, проходящей через данную точку M. Это решение проиллюстрировано рисунком 164. Приведем еще один пример задачи, решение которой основано на указанном свойстве.

Задача 1. Даны окружность с диаметром AB и точка C, не лежащая на этой окружности и не лежащая на прямой AB. Провести из точки C перпендикуляр к прямой AB с помощью одной линейки.

Решение. Проведем прямые CA и CB. Если какая-то из этих прямых имеет только одну общую точку с окружностью, т. е. является касательной к окружности, то отрезок этой прямой (CA или CB) и есть искомый перпендикуляр. Если же обе прямые не являются касательными, то они пересекают окружность еще в двух точках B_1 и A_1 (рис. 165). Углы AA_1B и BB_1A прямые, поскольку они опираются на полуокружность. Тем са-

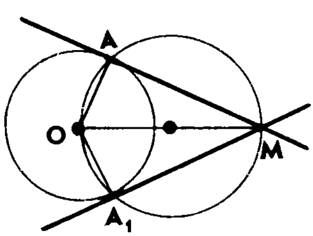
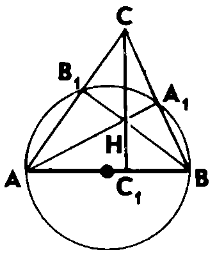


Рис. 164



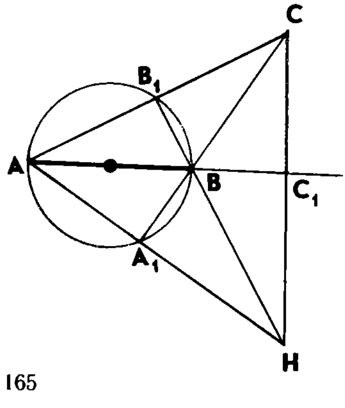


Рис. 165

мым отрезки AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC. Проведя прямые AA_1 и BB_1, найдем их точку пересечения H. Искомый перпендикуляр CC_1 также является высотой треугольника ABC, и, следовательно, прямая CC_1 проходит через точку H. Остается провести прямую CH, и тем самым перпендикуляр CC_1 будет построен. Задача решена.

46. Углы между хордами и секущими. Поставим теперь вопросы: как определить величину угла между 1) двумя пересекающимися хордами; 2) двумя пересекающимися секущими? Ответы на эти вопросы дает следующая теорема:

Теорема. ***Угол между двумя пересекающимися хордами окружности измеряется полусуммой заключенных между ними дуг; угол между двумя секущими, которые пересекаются вне окружности, измеряется полуразностью заключенных в нем дуг.***

Доказательство. 1) Обратимся к рисунку 166, на котором изображены пересекающиеся в точке M хорды AB и CD, между которыми заключены дуги с градусными мерами α и β. Интересующий нас угол AMC — внешний угол треугольника MBC, поэтому он равен сумме углов B и C этого треугольника. Но по теореме о вписанном угле $\angle B=\frac{\alpha}{2}$, $\angle C=\frac{\beta}{2}$, а значит, $\angle AMC=\frac{\alpha+\beta}{2}$.

2) Обратимся к рисунку 167, на котором изображены две секущие, проведенные через точку M. Градусные меры дуг, заключенных внутри угла BMD, обозначим буквами α и β, как показано на рисунке. Проведем отрезок AD. Угол BAD — внешний угол треугольника ADM, поэтому $\angle BAD=\angle AMD+\angle ADM$. Но $\angle BAD=\frac{\beta}{2}$, $\angle ADM=\frac{\alpha}{2}$. Отсюда находим: $\angle AMD=\frac{\beta-\alpha}{2}$. Теорема доказана.

Воспользуемся доказанной теоремой для решения следующей задачи:

Задача 2. Найти множество всех точек M, из которых данный отрезок виден под данным углом α ($\alpha\neq 180°$).

Решение. Пусть AB — данный отрезок. Предположим сначала, что данный угол α острый. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABO, углы при основании AB которого равны

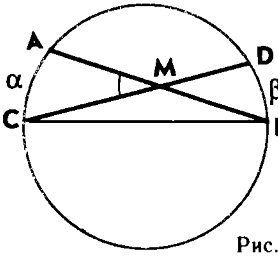


Рис. 166

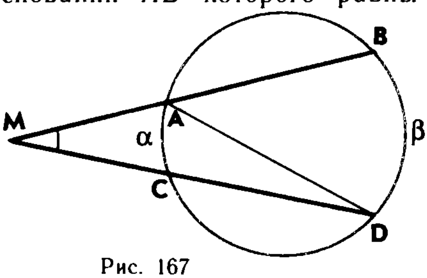


Рис. 167

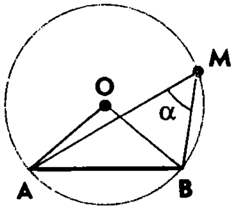
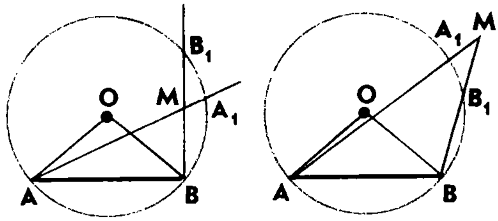


Рис. 168



а) б)

Рис. 169

$90° - \alpha$ (рис. 168). Тогда угол при его вершине O равен 2α. Проведем окружность с центром O и радиусом OA. По теореме о вписанном угле для любой точки M этой окружности, лежащей по ту же сторону от прямой AB, что и O, угол AMB равен α. Следовательно, любая такая точка M принадлежит искомому множеству.

С другой стороны, любая точка, лежащая по ту сторону от прямой AB, что и O, и не лежащая на построенной окружности, не принадлежит искомому множеству. В самом деле, для точек M, лежащих внутри окружности, $\angle AMB = \alpha + \frac{\smile A_1B_1}{2} > \alpha$ (рис. 169, *а*), а для точек M, лежащих вне окружности, $\angle AMB = \alpha - \frac{\smile A_1B_1}{2} < \alpha$ (рис. 169, *б*). Таким образом, из всех точек плоскости, лежащих по ту же сторону от прямой AB, что и O, в искомое множество входят те и только те точки, которые лежат на дуге AB с градусной мерой $360° - 2\alpha$. Ясно, что аналогичная картина наблюдается и для точек, лежащих по другую сторону от прямой AB. Осталось заметить, что сами точки A и B, равно как и все точки прямой AB, в искомое множество не входят — из них отрезок AB виден либо под «нулевым», либо под развернутым углом.

Итак, искомое множество точек в случае острого угла α представляет собой две симметричные дуги AB (градусной мерой $360° - 2\alpha$) без своих концов. Если угол α прямой, то искомое множество точек представляет собой окружность с диаметром AB, из которой исключены сами точки A и B (объясните почему). В случае тупого угла ответ найдите самостоятельно.

47. Угол между касательной и хордой. Докажем теперь теорему об угле между касательной и хордой.

Теорема. ***Угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, измеряется половиной заключенной внутри угла дуги.***

Доказательство. Пусть AB — данная хорда, CC_1 — касательная, проходящая через точку A (рис. 170). Если AB — диаметр (рис. 170, *а*), то заключенная внутри угла BAC (а также угла BAC_1) дуга является полуокружностью. С другой стороны, уг-

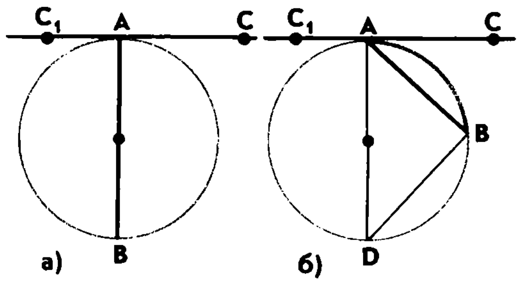


Рис. 170

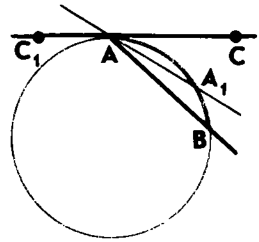


Рис. 171

лы BAC и BAC_1 в этом случае прямые, поэтому утверждение теоремы верно.

Допустим, что AB не диаметр. Ради определенности будем считать, что точки C и C_1 на касательной выбраны так, что угол CAB острый, а величина заключенной в нем дуги равна α (рис. 170, *б*). Проведем диаметр AD и заметим, что треугольник ABD прямоугольный, поэтому $\angle ADB = 90° - \angle DAB = \angle BAC$. Поскольку угол ADB вписанный, то $\angle ADB = \frac{\alpha}{2}$, а значит, и $\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$.

Углы BAC и BAC_1 смежные, поэтому $\angle BAC_1 = 180° - \frac{\alpha}{2} = \frac{360° - \alpha}{2}$. С другой стороны, $(360° - \alpha)$ — величина дуги ADB, заключенной внутри угла BAC_1. Теорема доказана.

Замечание. Пользуясь общим определением касательной, можно доказать эту теорему иначе. Действительно, рассмотрим секущую AA_1 (рис. 171). Угол A_1AB вписанный, поэтому он равен $\frac{1}{2}(\alpha - \smile AA_1)$. Будем теперь приближать точку A_1 к A. Тогда величина дуги AA_1 будет становиться все меньше и меньше, а когда точки A_1 и A совпадут, прямая AA_1 совпадет с касательной CC_1, угол A_1AB перейдет в угол CAB, а величина дуги AA_1 обратится в нуль. Следовательно, $\angle CAB = \frac{\alpha}{2}$.

48. Теорема о квадрате касательной. Важным следствием из доказанной теоремы является теорема о квадрате касательной.

Теорема. ***Если через точку M проведены касательная MK (K — точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках A и B, то***

$$MK^2 = MA \cdot MB.$$

Кратко эту теорему формулируют так:

квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть.

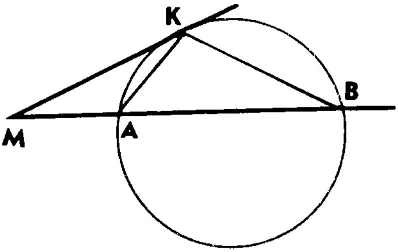


Рис. 172

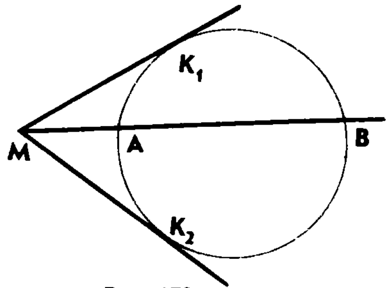


Рис. 173

Доказательство. Проведем отрезки AK и BK (рис. 172). Треугольники AKM и BKM подобны: угол M у них общий, а углы AKM и B равны, так как каждый из них измеряется половиной дуги AK. Следовательно, $\frac{MK}{MA}=\frac{MB}{MK}$, или $MK^2=MA\cdot MB$. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что *отрезки MK_1 и MK_2 касательных, проведенных из точки M к окружности, равны* (рис. 173).

Задачи

243. Биссектрисы треугольника ABC продолжены до пересечения с окружностью, описанной около этого треугольника, в точках A_1, B_1, C_1. Выразите углы треугольника $A_1B_1C_1$ через углы треугольника ABC.

244. Докажите, что для всякой хорды AB данной окружности отношение $AB^2:AD$, где AD — расстояние от точки A до касательной к окружности в точке B, имеет одно и то же значение.

245. Две окружности касаются друг друга изнутри в точке A. Отрезок AB является диаметром большей окружности. Хорда BD большей окружности касается меньшей окружности в точке C. Докажите, что отрезок AC — биссектриса треугольника ABD.

246. Стороны треугольника равны a, b, c, радиусы описанной и вписанной окружностей равны R и r. Докажите, что:

а) площадь треугольника выражается формулой $\frac{abc}{4R}$;

б) $abc=2(a+b+c)rR$.

247. Докажите, что квадрат биссектрисы треугольника равен разности между произведением прилежащих сторон и произведением отрезков, на которые эта биссектриса делит третью сторону.

248. На окружности даны четыре точки A, B, C и D в указанном порядке; K, L, M и N — середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что KM и LN перпендикулярны.

249. По данным углам α и β, образованным продолжениями противоположных сторон вписанного в окружность четырехугольника, определите углы этого четырехугольника.

250. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковой стороной AB пересекаются в точке P. Докажите, что центр O описанной около нее окружности лежит на окружности, описанной около треугольника APB.

251. На окружности даны четыре точки A, B, C и D в указанном порядке. Точка M — середина дуги AB, K — точка пересечения хорд AB и MD, E — точка пересечения хорд AB и MC. Докажите, что около четырехугольника $CDKE$ можно описать окружность.

252. Через данную точку M проведены всевозможные прямые, на которых данная окружность с центром O отсекает отрезки, являющиеся ее хордами. Найдите геометрическое место середин таких хорд, если точка M лежит: а) вне окружности; б) внутри окружности и не совпадает с центром; в) на окружности.

253. Отрезок AB является диаметром окружности с центром O. На каждом радиусе OM окружности отложен отрезок OX, равный перпендикуляру, проведенному из точки M к прямой AB. Найдите множество точек X.

254. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите CD, если $AB=a$, а площадь четырехугольника AO_1BO_2 равна S.

255. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает описанную окружность с центром O в точке D. Докажите, что прямая DO делит сторону AB пополам.

256. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через эти точки проведены секущие MAP и CBD (точки M и C лежат на одной окружности, а точки P и D — на другой). Докажите, что если секущие не пересекаются внутри окружности, то $MC \parallel PD$.

257. Дан треугольник ABC. а) Биссектрисы углов A, B, C пересекают описанную около треугольника ABC окружность в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 содержат высоты треугольника $A_1B_1C_1$. б) Продолжения высот треугольника, проведенных из его вершин A, B, C, пересекают описанную около него окружность в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 содержат биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$.

258. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены биссектрисы углов. Докажите, что четыре точки пересечения биссектрис углов A и C с биссектрисами углов B и D лежат на одной окружности.

259. Отрезок AH — высота треугольника ABC. Из вершин B и C проведены перпендикуляры BB_1 и CC_1 к прямой, проходящей через точку A. Докажите, что треугольники ABC и HB_1C_1 подобны.

260. Внутри угла ABC равностороннего треугольника ABC взята точка M так, что $\angle BMC=30°$, $\angle BMA=17°$. Найдите $\angle BAM$ и $\angle BCM$.

261. Вокруг правильного треугольника APE описан прямоугольник $ABCD$, причем точки P и E лежат на сторонах BC и CD

соответственно; точки K и M — середины сторон AE и AP. Докажите, что треугольники BKC и CMD правильные.

262. Окружность с центром в точке O разделена на равные дуги n диаметрами. Докажите, что основания перпендикуляров, проведенных из произвольной точки M, лежащей внутри окружности, к этим диаметрам, являются вершинами правильного многоугольника.

263. Из точки M, лежащей внутри данного острого угла с вершиной A, проведены перпендикуляры MP и ME к сторонам этого угла. Известно, что $AP=a$, $AE=b$, $AM=c$. Найдите расстояние от точки A до прямой PE.

264. Вершины A и B треугольника ABC с прямым углом C скользят по сторонам прямого угла с вершиной P. Докажите, что точка C перемещается при этом по отрезку.

265. Серединный перпендикуляр к стороне AB треугольника ABC пересекает прямую AC в точке M, а серединный перпендикуляр к стороне AC пересекает прямую AB в точке P. Известно, что $MP=BC$ и прямая MP перпендикулярна к прямой BC. Найдите углы треугольника ABC.

266. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и K соответственно, P — точка пересечения прямой MK и биссектрисы угла B (или ее продолжения). Докажите, что $\angle BPC=90°$.

267. Точки A_1, B_1, C_1 взяты произвольно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AB_1C_1, BA_1C_1 и CA_1B_1, пересекаются в одной точке.

268. Противоположные стороны четырехугольника продолжены до пересечения и около четырех образовавшихся треугольников описаны окружности. Докажите, что все они пересекаются в одной точке.

269. Касательная в точке A к описанной около треугольника ABC окружности пересекает прямую BC в точке E; AD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AE=ED$.

270. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и P. Через точку A проведена касательная к окружности S_1, пересекающая окружность S_2 в точке B, а через точку P — прямая, параллельная прямой AB и пересекающая окружности S_1 и S_2 в точках D и C соответственно. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

271. Две окружности пересекаются в точках M и P. Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AM, пересекающие вторую окружность в точках B и C. Докажите, что касательная в точке A к первой окружности параллельна прямой BC.

272. Докажите, что расстояние от точки окружности до хорды есть среднее пропорциональное между расстояниями от концов хорды до касательной к окружности в этой точке.

273. Каждая из боковых сторон равнобедренного треугольника ABC с основанием AC разделена на три равные части и через четыре точки деления проведена окружность, высекающая на основании AC хорду DE. Найдите отношение площадей треугольников ABC и DBE, если $AB=BC=3$, $AC=4$.

274. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены хорды AC и AD, касающиеся данных окружностей. Прямые BC и BD пересекают окружности в точках P и Q. Докажите, что $CP=DQ$.

275. а) Выразите сторону правильного десятиугольника через радиус R описанной около него окружности. б) В окружности проведены два взаимно перпендикулярных радиуса. Докажите, что расстояние от конца одного радиуса до середины другого больше радиуса на длину стороны правильного десятиугольника, вписанного в окружность. в) В данную окружность впишите правильный пятиугольник.

§ 3. Радикальная ось и радикальный центр окружностей

49. Радикальная ось двух окружностей. Из теоремы о квадрате касательной следует, что если точка M лежит вне окружности и через нее проведена секущая, пересекающая окружность в точках A и B, то произведение $MA\cdot MB$ не зависит от положения секущей — это произведение равно квадрату касательной. С другой стороны, квадрат касательной равен OM^2-R^2, где O — центр окружности, R — ее радиус (рис. 174). Итак,

$$MA\cdot MB=OM^2-R^2. \qquad (1)$$

Рассмотрим теперь точку M, лежащую внутри окружности. Проведем через нее какую-нибудь хорду AB. Из теоремы о произведении отрезков пересекающихся хорд следует, что произведение $MA\cdot MB$ не зависит от положения хорды — оно равно произведению отрезков диаметра, т. е. равно $(R+OM)(R-OM)=R^2-OM^2$ (рис. 175). Итак, в этом случае

$$MA\cdot MB=R^2-OM^2. \qquad (2)$$

Выражения (1) и (2) похожи друг на друга. Можно придать им еще большее сходство, если договориться понимать под про-

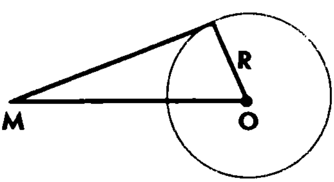


Рис. 174

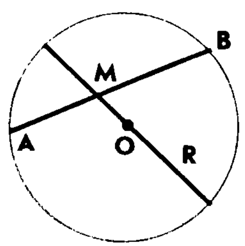


Рис. 175

изведением $\overline{MA}\cdot\overline{MB}$ произведение длин отрезков MA и MB, взятое со знаком «плюс», если точки A и B лежат по одну сторону от точки M, и со знаком «минус», если по разные стороны от точки M (при этом, конечно, предполагается, что точки A, B и M лежат на одной прямой). Тогда формулы (1) и (2) можно объединить в одну:

$$\overline{MA}\cdot\overline{MB}=OM^2-R^2.$$

Отметим, что эта формула справедлива и в том случае, когда точка M лежит на окружности и, следовательно, совпадает с одной из точек A и B. В этом случае обе части равенства равны нулю.

Величина $\delta=\overline{MA}\cdot\overline{MB}=OM^2-R^2$ называется *степенью точки M относительно данной окружности.*

Замечание. Как мы вскоре увидим, иногда бывает удобно рассматривать точку как окружность нулевого радиуса. Степенью точки M относительно такой «вырожденной» окружности естественно назвать величину $\delta=OM^2$, где O — центр «окружности».

Рассмотрим теперь две окружности. Множество всех точек, для каждой из которых степени относительно этих окружностей равны, называется *радикальной осью данных окружностей.* Что представляет собой это множество?

Если данные окружности концентрические, то это множество не содержит ни одной точки (объясните почему). В дальнейшем, говоря о радикальной оси двух окружностей, мы будем предполагать, что эти окружности не являются концентрическими. Прежде чем доказать теорему о радикальной оси таких окружностей, решим вспомогательную задачу.

Задача 1. Доказать, что на прямой AB существует единственная точка M, такая, что $AM^2-BM^2=k^2$, где k — данное число.

Решение. Из условия задачи следует, что $AM^2\geqslant BM^2$, т. е. $AM\geqslant BM$. Поэтому искомая точка M, если она существует, лежит на луче AB, так как для любой точки M, лежащей на продолжении этого луча, $AM<BM$. Допустим, что на луче AB имеется точка M, удовлетворяющая условию задачи. Тогда либо $AM+MB=AB$, либо $AM-MB=AB$. В любом из этих случаев $MB^2=(AB-AM)^2$. Следовательно,

$$k^2=AM^2-BM^2=AM^2-(AB-AM)^2=2AB\cdot AM-AB^2,$$

откуда

$$AM=\frac{k^2+AB^2}{2AB}. \qquad (3)$$

Итак, если на луче AB существует точка M, удовлетворяющая условию задачи, то она находится на вполне определенном расстоянии от точки A, т. е. такая точка M единственная. Докажем теперь, что искомая точка M существует. Возьмем точку M на луче AB, для которой выполнено условие (3), и проверим, что она удовлетворяет условию задачи. В самом деле,

$$AM^2-BM^2=AM^2-(AB-AM)^2=$$
$$=2AB\cdot AM-AB^2=k^2.$$

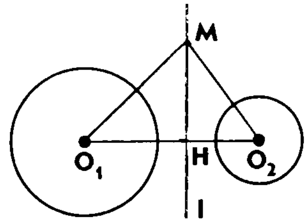


Рис. 176

Теорема. ***Радикальная ось двух неконцентрических окружностей есть прямая, перпендикулярная к линии центров этих окружностей.***

Доказательство. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, r_1 и r_2 — их радиусы. Для определенности предположим, что $r_1 \geqslant r_2$. По определению радикальная ось есть множество всех точек M, для каждой из которых $O_1M^2-r_1^2=O_2M^2-r_2^2$, или $O_1M^2-O_2M^2=r_1^2-r_2^2$.

Согласно задаче 1 на прямой O_1O_2 существует одна и только одна точка H, принадлежащая радикальной оси данных окружностей, т. е. для точки H выполнено равенство

$$O_1H^2-O_2H^2=r_1^2-r_2^2.$$

Докажем, что прямая l, проходящая через точку H и перпендикулярная к O_1O_2, есть радикальная ось данных окружностей (рис. 176).

В самом деле, для каждой точки M прямой l, отличной от точки H, по теореме Пифагора имеем

$$O_1M^2-MH^2=O_1H^2,\ O_2M^2-MH^2=O_2H^2.$$

Отсюда получаем:

$$O_1M^2-O_2M^2=O_1H^2-O_2H^2=r_1^2-r_2^2,$$

т. е. точка M принадлежит радикальной оси данных окружностей.

Обратно, пусть M — точка плоскости, принадлежащая радикальной оси и не лежащая на прямой O_1O_2, а MH_1 — перпендикуляр к прямой O_1O_2. Тогда

$$O_1M^2=O_1H_1^2+MH_1^2,\ O_2M^2=O_2H_1^2+MH_1^2,$$

поэтому

$$r_1^2-r_2^2=O_1M^2-O_2M^2=O_1H_1^2-O_2H_1^2,$$

т. е. $O_1H_1^2-O_2H_1^2=r_1^2-r_2^2$. Согласно задаче 1 точки H и H_1 совпадают, и, следовательно, M — точка прямой l. Теорема доказана.

50. Расположение радикальной оси относительно окружностей. Напомним, что степень точки, лежащей вне окружности, равна квадрату касательной, проведенной к окружности из данной точки. Поэтому *для каждой точки радикальной оси двух окружностей, лежащей вне этих окружностей, касательные, про-*

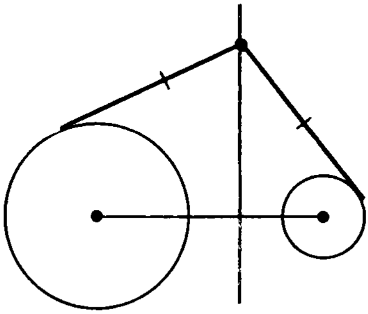


Рис. 177

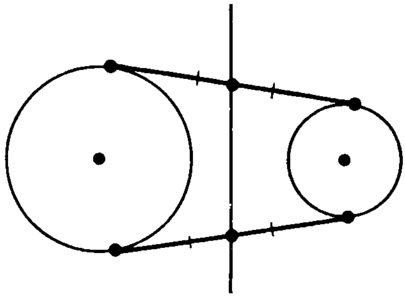


Рис. 178

веденные из этой точки к окружностям, равны (рис. 177). Этот факт позволяет легко построить радикальную ось двух данных окружностей почти при любом их взаимном расположении.

В самом деле, если окружности лежат одна вне другой, то для построения радикальной оси достаточно провести две их общие касательные, тогда радикальная ось будет прямой, проходящей через середины этих касательных (рис. 178).

Далее, если данные окружности касаются друг друга извне или изнутри, то их радикальной осью является общая касательная, проходящая через точку касания окружностей (рис. 179). В самом деле, степень точки касания окружностей относительно каждой из них равна нулю, поэтому точка касания лежит на радикальной оси. Согласно теореме п. 49 радикальная ось представляет собой прямую, проходящую через эту точку и перпендикулярную к линии центров. А это и есть указанная общая касательная.

Рассмотрим теперь две пересекающиеся окружности. Поскольку степень каждой из точек пересечения относительно обеих окружностей равна нулю, то эти точки принадлежат радикальной оси. Следовательно, радикальная ось представляет собой прямую, проходящую через точки пересечения окружностей (рис. 180).

Осталось рассмотреть две окружности, одна из которых лежит внутри другой. В этом случае построить радикальную ось

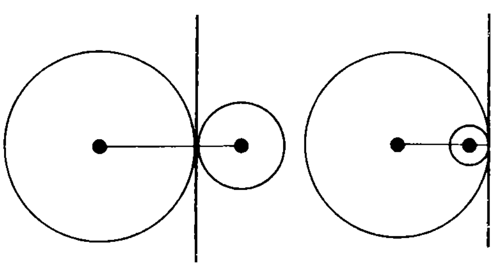


Рис. 179

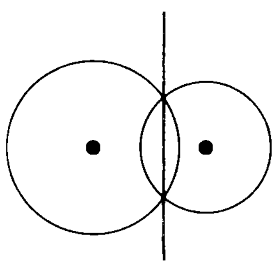


Рис. 180

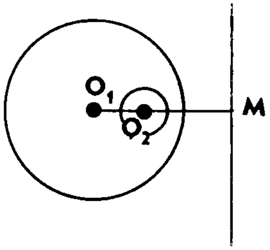


Рис. 181

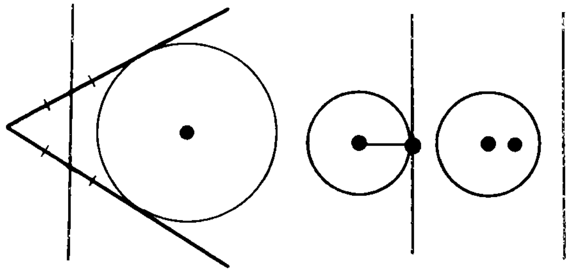


Рис. 182

труднее. Мы это сделаем в следующем пункте. Здесь же отметим лишь, что радикальная ось проходит вне окружностей (рис. 181). В самом деле, в рассматриваемом случае $O_1O_2<r_1-r_2$, или $r_2<r_1-O_1O_2$. Используя это неравенство и формулу (3) п. 49, для точки M пересечения радикальной оси и линии центров получаем

$$O_1M=\frac{(r_1^2-r_2^2)+O_1O_2^2}{2O_1O_2}>\frac{r_1^2-(r_1-O_1O_2)^2+O_1O_2^2}{2O_1O_2}=r_1,$$

т. е. $O_1M>r_1$. Следовательно, точка пересечения радикальной оси и линии центров лежит вне окружностей, а значит, и радикальная ось проходит вне окружностей.

Расположение радикальной оси в случае, когда радиус одной из окружностей равен нулю, показано на рисунке 182.

Сформулируем два следствия из наших рассуждений:

Следствие 1. *Прямая, проходящая через середины двух внутренних касательных данных окружностей, проходит через середины их внешних касательных* (рис. 183). Это следует из того, что указанная прямая является радикальной осью данных окружностей.

Следствие 2. *Если две окружности касаются друг друга извне, то их общая внутренняя касательная делит пополам обе общие внешние касательные* (рис. 184).

51. Радикальный центр трех окружностей. Рассмотрим три окружности и проведем радикальные оси каждых двух из них.

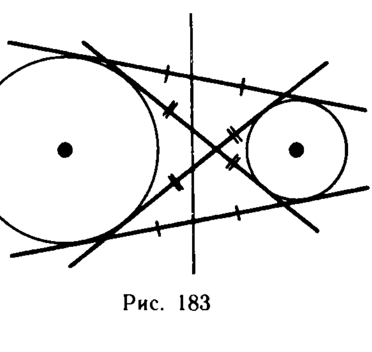


Рис. 183

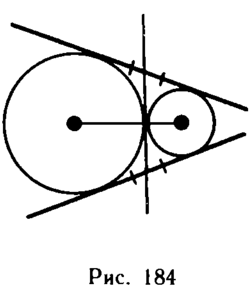


Рис. 184

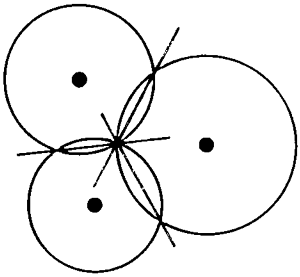


Рис. 185

Если центры окружностей лежат на одной прямой, то три проведенные радикальные оси либо параллельны друг другу, либо две из них, или все три совпадают, поскольку каждая из них перпендикулярна к общей линии центров. Если же центры окружностей не лежат на одной прямой, то, как мы сейчас увидим, три радикальные оси пересекаются в одной точке, называемой *радикальным центром трех окружностей* (рис. 185). Итак, мы хотим доказать утверждение:

Теорема. ***Радикальные оси трех окружностей, центры которых не лежат на одной прямой, пересекаются в одной точке.***

Доказательство. Проведем сначала две радикальные оси — первой и второй окружностей и также второй и третьей. Поскольку центры трех данных окружностей не лежат на одной прямой, то проведенные радикальные оси пересекаются в некоторой точке M. Степени точки M относительно первой и второй окружностей равны, так как она лежит на радикальной оси этих окружностей. По аналогичной причине ее степени относительно второй и третьей окружностей также равны. Следовательно, ее степени относительно первой и третьей окружностей равны. Но это означает, что точка M лежит на радикальной оси первой и третьей окружностей, а значит, все три радикальные оси пересекаются в точке M. Теорема доказана.

Из этой теоремы можно вывести большое число следствий, каждое из которых было бы весьма сложной теоремой, если бы мы не знали свойств радикальных осей. Несколько таких следствий проиллюстрировано рисунками 186, 187. Воспользуемся одним из них для решения задачи, упомянутой в предыдущем пункте.

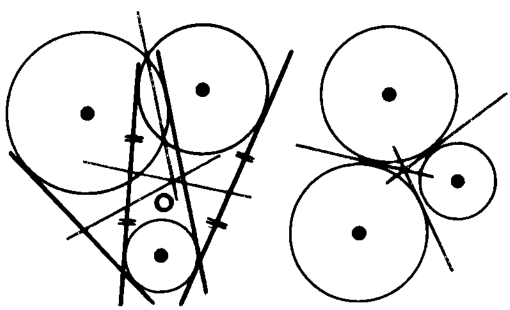


Рис. 186

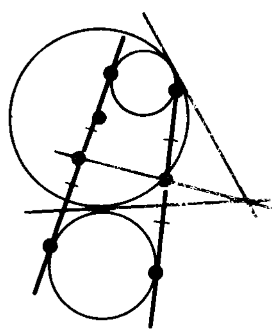


Рис. 187

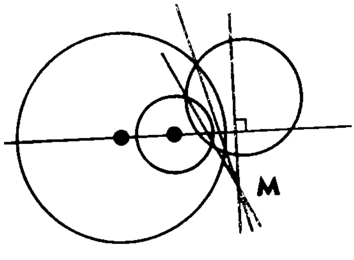


Рис. 188

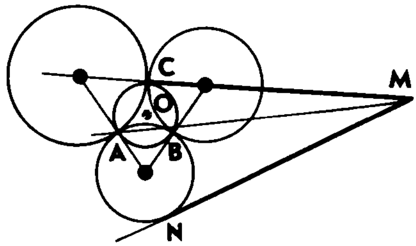


Рис. 189

З а д а ч а 2. Построить радикальную ось двух окружностей, одна из которых лежит внутри другой.

Р е ш е н и е. Проведем сначала какую-нибудь третью окружность так, чтобы она пересекла каждую из данных окружностей, а ее центр не лежал бы на линии центров данных окружностей (рис. 188). Затем проведем те две радикальные оси, которые проходят через точки пересечения окружностей. Тогда точка M их пересечения — радикальный центр трех окружностей, а значит, искомая радикальная ось проходит через точку M. Тем самым осталось провести через эту точку прямую, перпендикулярную к линии центров данных окружностей,— это и есть искомая радикальная ось. Задача решена.

Воспользуемся еще одним следствием для решения следующей задачи:

З а д а ч а 3. Три окружности касаются друг друга извне в точках A, B и C (рис. 189). Прямая AB пересекает линию центров, проходящую через C, в точке M. Доказать, что касательная MN к окружности, проходящей через точки A и B, равна MC.

Р е ш е н и е. Радикальный центр O данных окружностей представляет собой точку пересечения общих внутренних касательных. Поскольку $OA = OB = OC$ (объясните почему), то окружность с центром O радиуса OA проходит и через точки B и C. Далее, $MC \perp OC$. Следовательно, MC — касательная к четвертой окружности. Но точка M лежит на радикальной оси четвертой и той из данных окружностей, которая проходит через точки A и B. Поэтому $MN = MC$, что и требовалось доказать.

Задачи

276. Найдите множество всех точек, имеющих одну и ту же степень относительно данной окружности.

277. Найдите множество точек, для каждой из которых касательные, проведенные к двум данным окружностям, равны.

278. В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка C_1, а на отрезке AC_1 — точка C_2 так, что треугольники ABC, ABC_1, ABC_2 подобны. Докажите, что точки C, C_1, C_2 и симметричные им относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB точки D, D_1, D_2 лежат на одной окружности.

279. Три окружности расположены так, что каждая из них лежит вне другой, а их центры не лежат на одной прямой. Докажите, что существует окружность, пересекающая каждую из них под прямым углом. (Две окружности пересекаются в точке M под прямым углом, если касательные к этим окружностям, проведенные через точку M, взаимно перпендикулярны.)

280. На двух сторонах треугольника как на диаметрах построены окружности. Докажите, что радикальная ось этих окружностей есть прямая, содержащая высоту треугольника, проведенную из общей вершины указанных сторон.

281. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1. На отрезках AA_1, BB_1 и CC_1 как на диаметрах построены три окружности. Докажите, что радикальный центр этих окружностей — точка пересечения высот треугольника ABC.

§ 4. Характеристические свойства окружности

52. Два характеристических свойства окружности. Вдумаемся в название параграфа: «Характеристические свойства окружности». Ясно, что речь здесь пойдет о таких свойствах, которыми, с одной стороны, окружность обладает; с другой стороны, любая кривая линия, обладающая такими свойствами, является окружностью. Из этого, в частности, следует, что если множеством точек, обладающих каким-либо свойством, оказывается окружность, то такое свойство является характеристическим — оно может быть положено в основу нового определения окружности (объясните почему). Мы приведем три примера такого рода свойств (два в этом пункте и один в следующем).

Прежде всего напомним, что множество точек, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом, представляет собой окружность с диаметром AB без точек A и B. Ясно, что это свойство окружности является характеристическим, его можно положить в основу нового определения, сказав:

окружность диаметра AB — это фигура, состоящая из точек A, B и всех точек плоскости, из которых отрезок AB виден под прямым углом.

Прежде чем сформулировать еще одно характеристическое свойство окружности, решим такую задачу:

Задача 1. Найти множество всех точек, для каждой из которых сумма квадратов расстояний до двух данных точек постоянна.

Решение. Пусть A и B — данные точки. Требуется найти множество всех таких точек M, для которых $AM^2+BM^2=k$, где k — данная величина.

Рассмотрим сначала точку M, принадлежащую искомому множеству и не лежащую на прямой AB. Пусть точка O — середина отрезка AB (рис. 190), а значит, MO — медиана треугольника ABM. Тогда $4MO^2=2AM^2+2BM^2-AB^2$ (см. задачу 159), откуда

$$MO^2=\frac{k}{2}-\frac{AB^2}{4}.$$

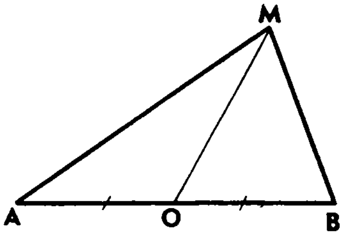


Рис. 190

То же равенство имеет место и в том случае, когда точка M искомого множества лежит на прямой AB. В самом деле, в этом случае либо $AM=\frac{AB}{2}+MO$, $BM=\left|\frac{AB}{2}-MO\right|$ (рис. 191, *а*), либо $AM=\left|\frac{AB}{2}-MO\right|$, $BM=\frac{AB}{2}+MO$ (рис. 191, *б*). И в том и в другом случае

$$AM^2+BM^2=\frac{AB^2}{2}+2MO^2,$$

откуда

$$MO^2=\frac{k}{2}-\frac{AB^2}{4}.$$

Итак, если точка M принадлежит искомому множеству, то квадрат расстояния от нее до точки O равен постоянной величине $\frac{k}{2}-\frac{AB^2}{4}$, т. е. точка M лежит на окружности радиуса $R=\sqrt{\frac{k}{2}-\frac{AB^2}{4}}$ с центром O. Нетрудно убедиться в том, что верно и обратное: любая точка M окружности радиуса R с центром O удовлетворяет условию $AM^2+BM^2=k$, т. е. принадлежит искомому множеству (убедитесь в этом самостоятельно). Из приведенных рассуждений следует, что если $k<\frac{AB^2}{2}$, то искомое множество не содержит ни одной точки; если $k=\frac{AB}{2}$, то искомое множество состоит из одной точки — середины данного отрезка; если же $k>\frac{AB^2}{2}$, то искомое множество точек — окружность радиуса $R=\sqrt{\frac{k}{2}-\frac{AB^2}{4}}$ с центром в середине данного отрезка. Задача решена.

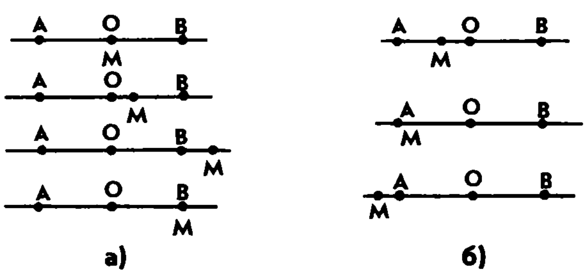


Рис. 191

Мы нашли еще одно характеристическое свойство окружности. Основываясь на этом свойстве, можно сказать так:

Окружность — фигура, состоящая из всех таких точек, для каждой из которых сумма квадратов расстояний до двух данных точек равна заданной величине, большей половины квадрата расстояния между данными точками.

53. Окружности Аполлония. Решим сначала вспомогательную задачу.

Задача 2. Даны две точки A и B и положительное число $k \neq 1$. Доказать, что множество таких точек M прямой AB, для которых $\frac{BM}{AM}=k$, состоит из двух точек, одна из которых лежит на отрезке AB, а другая — вне этого отрезка.

Решение. Рассмотрим сначала случай $k>1$. Пусть для точки M прямой AB выполнено равенство $\frac{BM}{AM}=k$. Тогда $AM<BM$, и, следовательно, точки A и M лежат по одну сторону от середины отрезка AB (рис. 192). Возможны два случая:

1. Точка M лежит на отрезке AB.
2. Точка M лежит вне отрезка AB (рис. 192).

Рассмотрим эти случаи отдельно.

1. Имеем $AM+BM=AB$, $BM=k \cdot AM$, откуда $AM=\frac{AB}{k+1}$. Итак, если на отрезке AB имеется точка M, удовлетворяющая условию $\frac{BM}{AM}=k$, то она находится на вполне определенном расстоянии $\frac{AB}{k+1}$ от точки A и, значит, на отрезке AB может быть только одна такая точка M. Нетрудно убедиться в том, что точка M, расположенная на отрезке AB так, что $AM=\frac{AB}{k+1}$, действительно удовлетворяет условию $\frac{BM}{AM}=k$. В самом деле, $BM=AB-AM=\frac{k}{k+1}AB$, и, следовательно, $\frac{BM}{AM}=k$.

2. Имеем $AM+AB=BM$, $BM=k \cdot AM$, откуда $AM=\frac{AB}{k-1}$. Таким же образом, как и в случае 1^0, можно убедиться в том, что точка M, расположенная на продолжении отрезка AB за точку A так, что $AM=\frac{AB}{k-1}$, удовлетворяет условию $\frac{BM}{AM}=k$, причем вне отрезка AB такая точка только одна. Итак, в случае $k>1$ утверждение доказано.

Если $0<k<1$, то $k'=\frac{1}{k}>1$, а условие $\frac{BM}{AM}=k$ можно записать в виде $\frac{AM}{BM}=k'>1$. Тем самым этот случай сводится к предыдущему, только точки A и B меняются ролями.

Перейдем теперь к решению основной задачи этого пункта.

Задача 3. Найти множество всех точек, для каждой из которых отношение расстояний до двух данных точек постоянно.

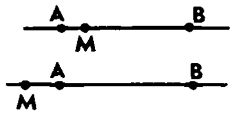


Рис. 192

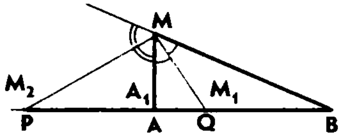


Рис. 193

Решение. Пусть A и B — данные точки. Требуется найти множество всех таких точек M, для которых $\frac{BM}{AM}=k$, где k — данное число. Ясно, что если $k=1$, то искомое множество представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку AB. Рассмотрим случай $k\neq 1$.

Как следует из предыдущей задачи, на прямой AB существуют ровно две точки, принадлежащие искомому множеству. Обозначим ту из них, которая лежит вне отрезка AB, буквой P, а лежащую на отрезке AB — буквой Q. Итак,

$$\frac{BP}{AP}=\frac{BQ}{AQ}=k. \qquad (1)$$

Пусть M — какая-либо точка, принадлежащая искомому множеству и не лежащая на прямой AB. Проведем биссектрису MM_1 треугольника ABM (рис. 193). По теореме о биссектрисе треугольника (см. гл. III, § 2) $\frac{BM_1}{AM_1}=\frac{BM}{AM}=k$. Согласно задаче 2 точки M_1 и Q совпадают. Аналогично проведем биссектрису MM_2 внешнего угла треугольника ABM (M_2 — точка пересечения этой биссектрисы с прямой AB). По теореме о биссектрисе внешнего угла треугольника (гл. III, § 2) $\frac{BM_2}{AM_2}=\frac{BM}{AM}=k$. Согласно задаче 2 точки M_2 и P совпадают.

Итак, MQ — биссектриса треугольника ABM, а MP — биссектриса внешнего угла этого треугольника. Поэтому $MP\perp MQ$. Но это означает, что отрезок PQ виден из точки M под прямым углом и, значит, точка M лежит на окружности с диаметром PQ.

Мы доказали, что любая точка искомого множества лежит на окружности с диаметром PQ. Рассмотрим теперь любую точку M этой окружности, отличную от P и Q, и убедимся в том, что она принадлежит искомому множеству точек. Проведем отрезок MA_1 так, чтобы отрезок MQ был биссектрисой треугольника A_1MB (рис. 193). Тогда MP — биссектриса внешнего угла этого треугольника (объясните почему). Докажем, что точки A и A_1 совпадают. По теоремам о биссектрисе треугольника и биссектрисе внешнего угла треугольника имеем:

$$\frac{BM}{A_1M}=\frac{BQ}{A_1Q} \text{ и } \frac{BM}{A_1M}=\frac{BP}{A_1P}, \qquad (2)$$

откуда $\frac{BQ}{A_1Q}=\frac{BP}{A_1P}$, или $\frac{BQ}{BP}=\frac{A_1Q}{A_1P}$. Но из равенства (1) следует, что $\frac{BQ}{BP}=\frac{AQ}{AP}$. Тем самым точки A и A_1 лежат на отрезке PQ и делят его в одинаковом отношении: $\frac{AQ}{AP}=\frac{A_1Q}{A_1P}$. Следовательно, точки A и A_1 совпадают. Поэтому первую из пропорций (2) можно записать так: $\frac{BM}{AM}=\frac{BQ}{AQ}$, а поскольку $\frac{BQ}{AQ}=k$ (см. (1)), то и $\frac{BM}{AM}=k$, т. е. точка M принадлежит искомому множеству.

Итак, искомое множество точек в случае $k \neq 1$ — окружность с диаметром PQ.

Радиус этой окружности выражается формулой $R=\frac{k}{|k^2-1|}AB$, ее центр O_1 лежит на прямой AB, причем $OO_1=\frac{k^2+1}{2(k^2+1)}AB$, где O — середина отрезка AB (соответствующие вычисления проведите самостоятельно). При $k>1$ окружности Аполлония расположены по ту же сторону от серединного перпендикуляра к отрезку AB, что и точка A, а при $0<k<1$ — по ту же сторону, что и точка B (рис. 194).

Окружности, соответствующие для данных точек A и B различным значениям $k \neq 1$ (рис. 194), рассматривались еще во II в. до н. э. древнегреческим математиком Аполлонием в его трактате «О кругах». Поэтому их называют *окружностями Аполлония*.

Мы получили еще одно характеристическое свойство окружности, позволяющее сказать так:

окружность — это фигура, состоящая из всех точек, для каждой из которых отношение расстояний до двух данных точек постоянно и не равно единице.

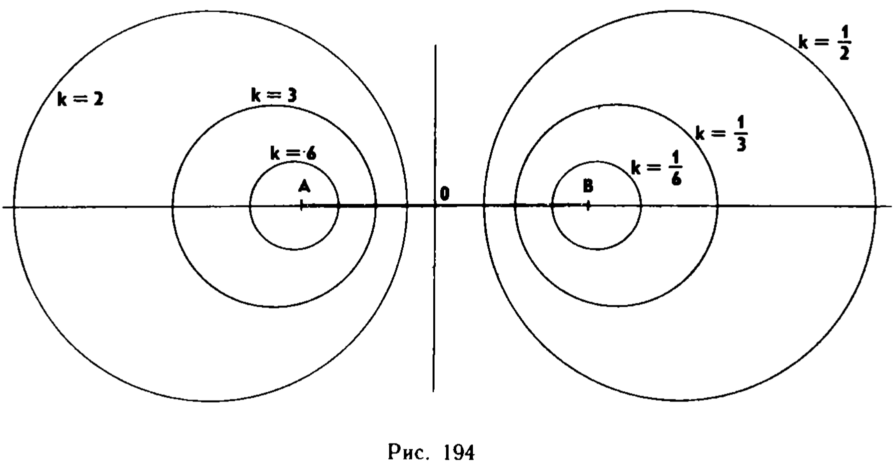


Рис. 194

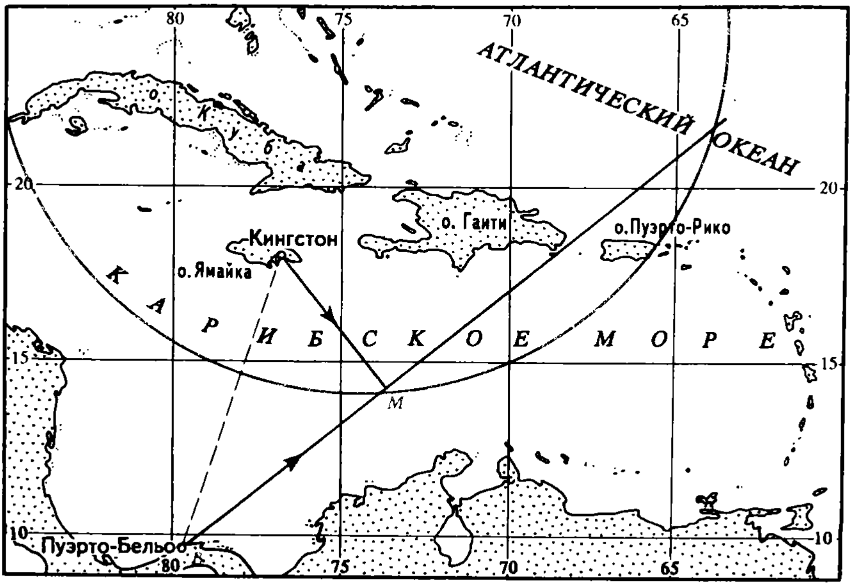


Рис. 195

54. Окружности Аполлония помогают флибустьерам. В замечательной книге Г. Штейнгауза «Математический калейдоскоп» (Библиотечка «Квант».— 1981.— Вып. 8) приведен ряд примеров использования окружностей Аполлония для решения задач, связанных с нахождением наилучшей тактики преследования одного корабля другим. Рассмотрим один из таких примеров.

Флибустьеры с острова Ямайка узнали, что на якоре перед Пуэрто-Бельо стоит испанский галион, груженный золотом. Как только закончится шторм, галион выйдет в Карибское море и возьмет курс на пролив между островами Гаити и Пуэрто-Рико (рис. 195). Флибустьеры тоже ждут конца шторма, поэтому выйти из Кингстона они могут лишь одновременно с испанцами. Какой курс следует взять флибустьерам, чтобы не разминуться с испанцами, если скорость флибустьерского судна вдвое меньше скорости галиона? (Здесь, конечно, мы упускаем существенный момент: во времена флибустьеров ходили под парусом, поэтому скорость движения существенно зависела от направления ветра. Мы сознательно упрощаем задачу и, погрешив против истории, предполагаем, что оба корабля снабжены двигателями. Впрочем, если угодно, можно считать, что после шторма наступил полный штиль и корабли вынуждены идти на веслах.)

Задача решается следующим образом. Флибустьеры при всех своих отрицательных качествах были непревзойденными мастерами в навигации. Поэтому они рассуждали так. Прежде всего, нужно найти все точки, в которые их корабль и галион могут попасть одновременно. Скорость их корабля вдвое меньше, чем испанского. Поэтому путь, который они пройдут до момента встречи, также вдвое меньше пути, пройденного испанцами. Значит, все возможные точки встречи лежат на окружности Аполлония, определяемой равенством $\frac{BM}{AM}=2$, где M — точка встречи, а точки A и B соответствуют Кингстону и Пуэрто-Бельо. Начертив на карте эту окружность, флибустьеры увидят, что курс галиона пересекает ее в двух точках. Поэтому, взяв курс на любую из них, они наверняка встретятся с испанцами, если, конечно, испанцев не перехватит кто-нибудь другой. Из этих последних соображений флибустьеры предпочтут ту из двух точек, которая ближе к Пуэрто-Бельо.

Итак, мы решили задачу. Испанцам в ней не повезло. Могло бы, однако, случиться (при других условиях задачи), что нарисованная на карте окружность Аполлония не пересекает курс галиона и даже не касается его. Какой бы вывод сделали флибустьеры в этом случае? Им пришлось бы признать, что догнать испанцев они не могут! Чтобы понять, почему это так, надо более обстоятельно изучить свойства окружностей Аполлония.

Прежде всего из определения окружности Аполлония, очевидно, следует, что для заданных точек A и B никакие две из окружностей Аполлония не могут иметь общих точек. Значит, либо одна из них лежит внутри другой, либо они лежат вне друг друга. Выясним, какому соотношению между числами k_1 и k_2, определяющими окружности, соответствует тот или иной случай.

Если оба числа k_1 и k_2 больше 1, то каждая из соответствующих им окружностей охватывает точку A. Следовательно, лежать вне друг друга они не могут. Значит, одна из них — та, у которой радиус меньше,— лежит внутри другой. Но

$$R=\frac{k}{k^2-1}AB=\frac{k-1+1}{(k-1)(k+1)}AB=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k^2-1}\right)AB,$$

поэтому, чем больше k, тем меньше радиус. Таким образом, если, например, $k_1<k_2$, то окружность, определяемая числом k_2, лежит внутри окружности, определяемой числом k_1.

Из этого можно сделать важный вывод: *множество всех точек M, определяемых неравенством $\frac{BM}{AM}>k>1$, представляет собой внутренность круга, ограниченного соответствующей окружностью Аполлония* (рис. 196, *а*). Следовательно, множество точек, для которых $\frac{BM}{AM}<k$, — внешняя часть этого круга.

По соображениям симметрии получим, что в случае $k_1<1$ и $k_2<1$ картина аналогичная. Но только в этом случае радиус окружности Аполлония тем больше, чем больше k, и, следовательно, внутри другой лежит та окружность, для которой число k меньше (рис. 196, *б*).

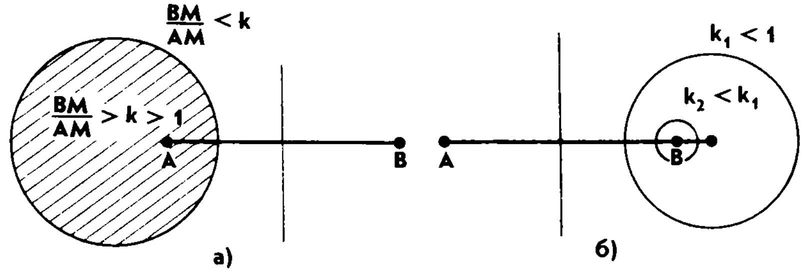


Рис. 196

Наконец, если одно из чисел k_1 или k_2 больше 1, а другое меньше 1, то соответствующие им окружности Аполлония лежат по разные стороны от серединного перпендикуляра отрезка AB и, следовательно, вне друг друга. Эти выводы иллюстрирует также рисунок 194.

Теперь нам ясны рассуждения флибустьеров. Действительно, если курс галиона не имеет общих точек с окружностью Аполлония, для которой $k=2$, то для любой точки M курса $\frac{BM}{AM}>2$. Значит, догнать галион нельзя.

Рассмотрим еще одно свойство окружностей Аполлония, не связанное непосредственно с проблемами флибустьеров. Возьмем окружность Аполлония с центром O_1, соответствующую какому-то числу k, и найдем степень δ середины отрезка AB, т. е. точки O, относительно этой окружности. Согласно определению степени имеем:

$$\delta = OO_1^2 - R^2 = \frac{(k^2+1)^2}{4(k^2-1)^2} AB^2 - \frac{k^2}{(k^2-1)^2} AB^2 = \frac{k^4-2k^2+1}{4(k^2-1)^2} AB^2 = \frac{1}{4} AB^2.$$

Мы видим, что величина δ не зависит от k! Таким образом, степень точки O относительно всех окружностей Аполлония одна и та же. Следовательно, серединный перпендикуляр к отрезку AB является радикальной осью любых двух из них. Иными словами, *все окружности Аполлония имеют общую радикальную ось — серединный перпендикуляр к отрезку AB.*

Из этого свойства, в свою очередь, вытекает еще одно. Рассмотрим какую-нибудь окружность Аполлония с центром O_1 и из произвольной ее точки M, не лежащей на прямой AB, проведем к ней касательную (рис. 197). Пусть C — точка пересечения этой касательной с серединным перпендикуляром к отрезку AB. Точка C лежит на радикальной оси нашей окружности и точек A и B (рассматриваемых как

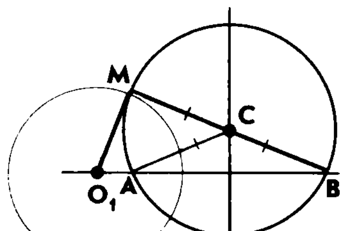


Рис. 197

окружности Аполлония нулевого радиуса). Следовательно, степени точки C относительно этих окружностей равны, т. е. $OC^2-OM^2=AC^2=BC^2$, откуда следует, что $AC=BC=MC$. Поэтому окружность с центром C радиуса AC проходит через точки A, B и M. По построению $MC \perp MO_1$. Таким образом, касательные к нашим окружностям в точке M их пересечения взаимно перпендикулярны. Обычно в таком случае говорят так: ***окружности пересекаются под прямым углом.*** Итак, мы установили еще одно замечательное свойство окружностей Аполлония:

любая окружность Аполлония пересекается с любой окружностью, проходящей через точки A и B, под прямым углом (рис. 198).

Решим еще одну задачу.

Задача 4. Даны две точки A, B и прямая l, не перпендикулярная к прямой AB. Для каждой точки M прямой l составим отношение $\frac{BM}{AM}$. Построить те точки, в которых это отношение принимает наибольшее и наименьшее значения.

Решение. Сначала проанализируем условие задачи. Рассмотрим какую-нибудь точку M_1 прямой l, не лежащую на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Вычислим отношение $k=\frac{BM_1}{AM_1}$ и рассмотрим окружность Аполлония, определяемую

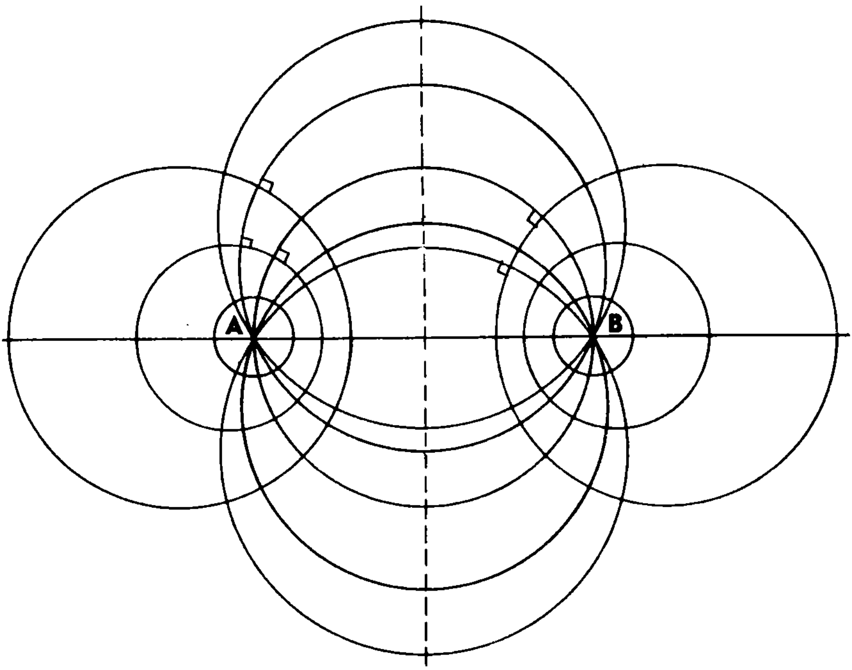


Рис. 198

Рис. 199

этим числом. Если прямая l и эта окружность пересекаются (рис. 199, *а*), то точки прямой l, лежащие по одну сторону от M_1 (а именно на хорде окружности), находятся внутри окружности, а лежащие по другую сторону от M_1 — вне этой окружности. Следовательно, для точек, лежащих по одну сторону от M_1, отношение $\frac{BM}{AM}$ больше k, а по другую сторону — меньше k. Поэтому отношение $\frac{BM}{AM}$ не может принимать в точке M_1 ни наибольшего, ни наименьшего значения. Ясно также, что аналогичная ситуация имеет место для точки C пересечения прямой l с серединным перпендикуляром к отрезку AB (объясните почему).

Итак, наибольшее и наименьшее значения отношения $\frac{BM}{AM}$ могут достигаться только в тех точках, в которых прямая l касается окружностей Аполлония (рис. 199, *б*). Следовательно, в этих точках окружность, проходящая через A и B, должна быть перпендикулярна к прямой l, а значит, прямая l проходит через ее центр.

Теперь нетрудно выполнить построение. Сначала построим серединный перпендикуляр к отрезку AB и отметим точку C его пересечения с данной прямой (рис. 200). Затем проведем окружность с центром C радиуса CA. Точки пересечения этой окружности с данной прямой — искомые.

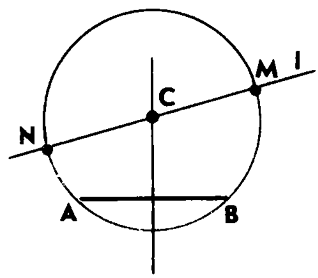


Рис. 200

З а м е ч а н и е. Решенная нами задача чрезвычайно полезна для флибустьеров. В самом деле, допустим, что они точно не знают, каково отношение скорости их корабля к скорости испанского галиона. Тогда им нужно построить на карте точку курса галиона, в которой это отношение принимает наименьшее значение (рис. 201). В этой точке им следует организовать засаду — встать на якорь и ждать прибытия галиона. Во всяком случае, если

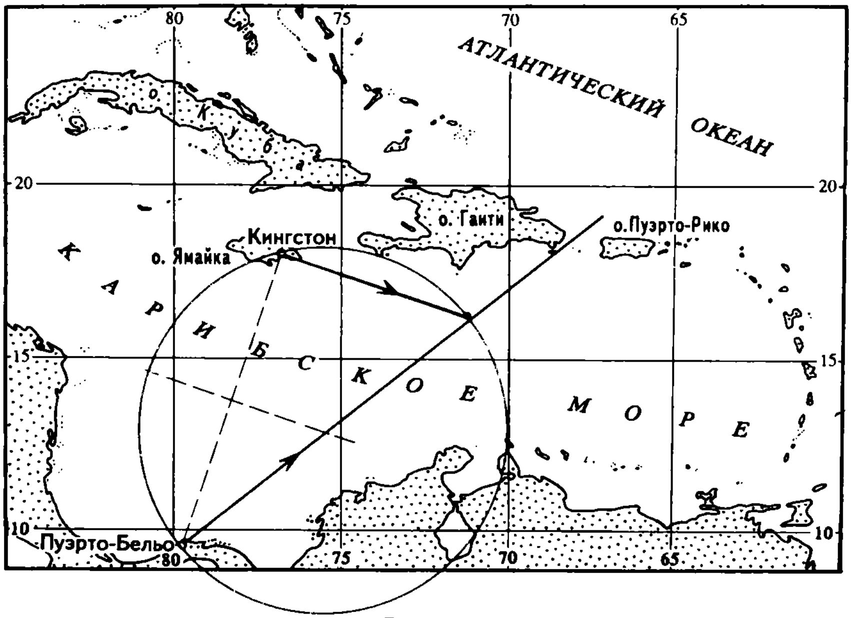


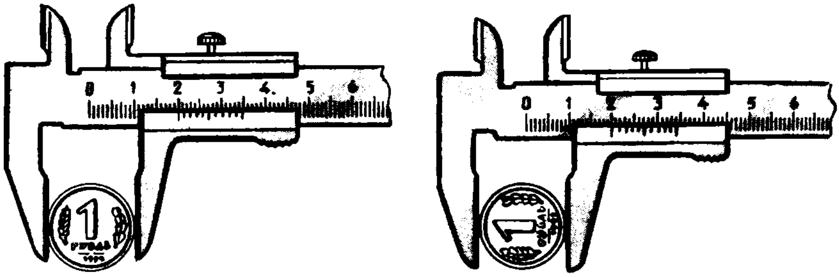
Рис. 201

в этой точке они не встретят галион, то в любой другой точке они его не встретят и подавно.

55. Еще одно характеристическое свойство окружности. До сих пор мы рассматривали такие характеристические свойства окружности, в которых она выступила как фигура, состоящая из всех точек, обладающих этим свойством. Здесь мы приведем пример характеристического свойства другого типа.

В п. 27, обсуждая изопериметрические задачи, мы говорили, что из всех кривых с данной длиной окружность ограничивает фигуру наибольшей площади. К сожалению, доказать это мы пока не можем — ведь мы еще ничего не знаем ни о длине окружности, ни о площади круга. Все эти вопросы мы подробно обсудим в 9-м классе. Здесь же заметим, что если принять изопериметрическое свойство на веру, то мы получим еще одно характеристическое свойство окружности. В самом деле, окружность обладает тем свойством, что площадь ограниченной ею фигуры больше площади фигуры, ограниченной любой другой кривой с той же длиной. Но тогда верно и обратное: если какая-нибудь замкнутая линия при заданной длине ограничивает фигуру наибольшей площади, то эта линия — окружность. Действительно, если бы линия не была окружностью, то нашлась бы окружность с той же длиной, ограничивающая фигуру еще большей площади. Итак,

окружность — это замкнутая линия, которая при заданной длине ограничивает фигуру наибольшей площади.



а) б)

Рис. 202

56. Кривые постоянной ширины. Если мы хотим измерить диаметр круглой монеты, то проще всего воспользоваться штангенциркулем (рис. 202, *а*). При этом достаточно одного измерения — любое другое измерение (рис. 202, *б*) даст тот же результат. Это свойство окружности называется *постоянством ширины*. Ширина фигуры — это и есть то, что измеряется штангенциркулем. Можно сказать, что ширина фигуры в данном направлении — это наименьшее расстояние между двумя параллельными прямыми, перпендикулярными к данному направлению, при котором данная фигура содержится в полосе между ними. Ясно, например, что квадрат не обладает постоянством ширины (рис. 203). А обладает ли этим свойством еще какая-нибудь кривая, кроме окружности?

Поставим вопрос иначе. У нас в руках монета, про которую неизвестно, круглая она или нет (некруглые монеты действительно бывают, например, в Великобритании). Можно ли, пользуясь только штангенциркулем, достоверно установить, что она круглая? Почти любой человек, подумав, даст утвердительный ответ. И ошибется! На самом деле кривых постоянной ширины бесконечно много! Поэтому *постоянство ширины окружности не является ее характеристическим свойством.*

Самый простой пример кривой постоянной ширины, отличной от окружности, получается, если равносторонний треугольник ABC дополнить тремя дугами окружностей с центрами A, B и C радиуса AB (рис. 204). Ширина полученного криволинейного «треугольника» постоянна и равна AB (докажите это). Примечательно, что этот пример впервые был найден в технике. Его обнаружил в конце прошлого века французский механик Франц Рело, который, классифицируя различные механизмы, заметил удивительный факт: построенная им фигура может свободно вращаться внутри квадрата, постоянно соприкасаясь с его сторона-

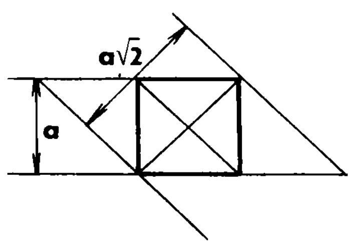


Рис. 203

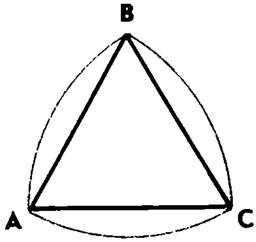


Рис. 204

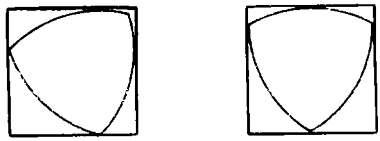


Рис. 205

ми (рис. 205). При этом вершины «треугольника» обходят почти весь периметр квадрата, лишь немного не доходя до его вершин. Рело назвал свою фигуру «искривленный треугольник». Теперь ее называют *треугольником Рело.*

Треугольник Рело — негладкая кривая, он имеет три угла. Однако их можно «загладить». Для этого нужно каждую из сторон исходного треугольника ABC продолжить на один тот же отрезок x, а затем провести шесть дуг: три — радиуса $AB+x$, а другие три — радиуса x (рис. 206). Полученная кривая также будет иметь постоянную ширину (попробуйте определить какую).

Как уже отмечалось, кривых постоянной ширины бесконечно много. Среди них есть и несимметричные кривые, есть кривые, никакая часть которых не является дугой окружности, и т. д. Обо всем этом и многом другом, связанном с кривыми постоянной ширины, можно прочитать в книге Г. Радемахера и О. Теплица «Числа и фигуры» (М.: Физматгиз, 1962).

Одно из самых неожиданных свойств кривых постоянной ширины установил французский математик С. Барбье:

любые две кривые одинаковой постоянной ширины имеют равные длины!

Таким образом, если, помимо штангенциркуля, у нас есть нить, позволяющая измерить периметр, мы все равно не сможем отличить одну кривую постоянной ширины от другой. Доказательство теоремы Барбье выходит за рамки школьной программы. Впрочем, в 9-м классе мы приведем «физическое доказательство» этой теоремы.

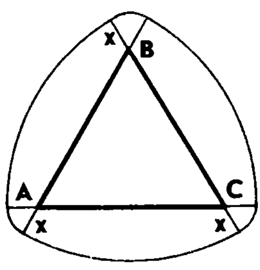


Рис. 206

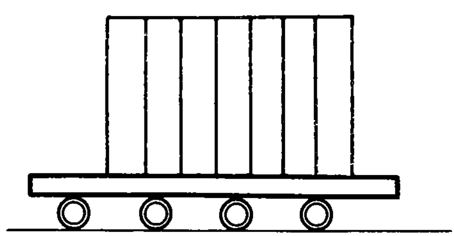


Рис. 207

Рис. 208

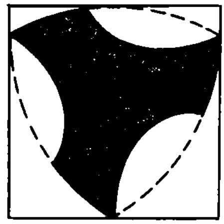


Рис. 209

Может возникнуть вопрос: а для чего используются кривые постоянной ширины? Один из ответов напрашивается сам собой. Каждый из нас не раз видел, как перетаскивают с места на место очень тяжелые предметы. Их устанавливают на плоскую подставку с подложенными под нее цилиндрическими катками (рис. 207). Затем толкают предмет и по мере освобождения задних катков переносят их и кладут спереди. Преимущество цилиндрических катков, например, перед шестигранными состоит в том, что предмет в процессе движения не испытывает перемещений вверх-вниз, что потребовало бы дополнительных усилий со стороны толкающих. Но с этой точки зрения катки, имеющие сечением фигуру, ограниченную кривой постоянной ширины, ничуть не хуже! На практике, впрочем, они вряд ли используются — ведь их еще нужно изготовить. И все же если не полениться и сделать такую модель, то ею можно поразить всех своих друзей (рис. 208).

А вот другой пример. В 1914 г. английский инженер Г. Д. Уаттс изобрел сверло, позволяющее делать квадратные отверстия! В сечении это сверло представляет собой треугольник Рело с вырезанными частями, так что острые края могут легко врезаться в металл (рис. 209). Перед началом работы сверло помещается внутрь специального шаблона — металлической пластины с вырезанным в ней отверстием в виде квадрата со стороной, равной ширине сверла. В процессе работы центр сверла, конечно, не остается на месте, поэтому для сверла Уаттса нужен специальный плавающий патрон. Такой патрон был разработан и запатентован одной из фирм, и в 1916 г. фирма приступила к производству сверла Уаттса.

Задачи

282. Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $MA^2 - MB^2 = k$, где k — данная величина.

283. Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$, где α, β — данные числа, k — данная величина.

284. Даны три точки A, B и C. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $MA^2+MB^2+MC^2=k$, где k — данная величина.

285. Даны три точки A, B и C. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $MA^2+MB^2-MC^2=k$, где k — данная величина.

286. Докажите, что любые две неконцентрические окружности, не имеющие общих точек, могут рассматриваться как две окружности Аполлония, соответствующие двум значениям отношения $\frac{BM}{AM}$, где A и B — некоторые точки.

287. Даны две точки A и B и окружность, не проходящая через эти точки, причем ее центр не лежит на прямой AB. Для каждой точки M окружности составляется отношение $\frac{BM}{AM}$. Постройте точки, в которых это отношение принимает наибольшее и наименьшее значения.

288. Два корабля находятся вблизи прямолинейного участка берега, один из них преследует другой. Скорости кораблей известны обоим капитанам. Какого курса следует держаться: а) преследуемому, чтобы увеличить время преследования; б) преследующему, чтобы уменьшить время преследования?

289. Два корабля преследуют третий в открытом море, скорости кораблей известны всем трем капитанам. Какой курс следует держать каждому из трех кораблей, исходя из интересов их команд?

290. Два корабля, сближаясь, движутся так, что курс каждого из них остается неизменным относительно прямой, соединяющей корабли. Постройте точку встречи кораблей, если их скорости известны.

291. Дан правильный пятиугольник. Проведите 5 дуг окружностей через его вершины так, чтобы кривая, образованная дугами, имела постоянную ширину и была отлична от окружности.

292. Дан правильный n-угольник. Какому условию должно удовлетворять число n, чтобы, проведя n дуг окружностей через его вершины, можно было бы получить кривую постоянной ширины, отличную от окружности?

293. Дан правильный пятиугольник. Проведите 10 дуг окружностей с центрами в его вершинах так, чтобы образованная дугами кривая была гладкой кривой постоянной ширины, отличной от окружности.

294. Докажите, что если A и B — данные точки, то радиус R окружности Аполлония выражается формулой $R=\frac{k}{|k^2-1|}AB$, где $k=\frac{BM}{AM}$, а M — произвольная точка этой окружности.

295. Даны три попарно пересекающиеся прямые, не проходящие через одну точку. Проведите 6 дуг окружностей с центрами в точках пересечения этих прямых так, чтобы образованная ими кривая имела постоянную ширину.

57. Формула Эйлера. Мы знаем, что в каждый треугольник можно вписать окружность и можно описать около него окружность. Ясно, что вписанная окружность лежит внутри описанной, поскольку вписанная окружность лежит внутри треугольника, а сам треугольник лежит внутри описанной окружности.

Поставим теперь такую задачу:

Задача 1. Даны две окружности, одна из которых лежит внутри другой. Требуется построить треугольник, для которого одна из этих окружностей является вписанной, а другая — описанной.

Решение этой задачи оказывается весьма неожиданным: либо задача вообще не имеет решений (такого треугольника не существует), либо решений бесконечно много. Объясняется это тем, что радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами всегда связаны между собой определенным соотношением. Точнее, справедлива следующая теорема:

Теорема. ***В треугольнике радиус R описанной окружности и радиус r вписанной окружности связаны с расстоянием d между их центрами соотношением***

$$d^2=R^2-2Rr. \qquad (1)$$

В частности, если $d=0$ *(центры окружностей совпадают), то* $R=2r$.

Эта формула называется *формулой Эйлера.*

Докажем сформулированную теорему, а затем вернемся к нашей задаче.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC, у которого точка O — центр описанной окружности, а точка O_1 — центр вписанной окружности. Будем считать пока, что $d\neq0$

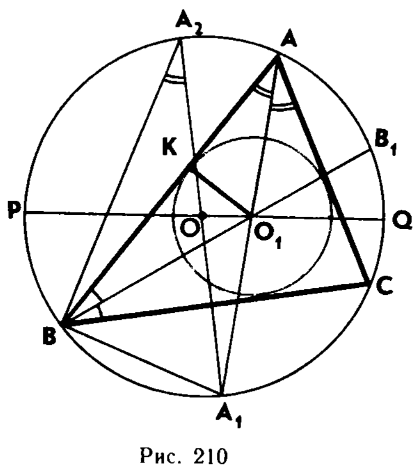


Рис. 210

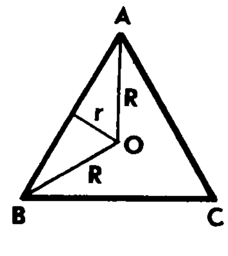


Рис. 211

(рис. 210). Проведем биссектрисы AO_1 и BO_1 углов A и B. Они пересекаются с описанной окружностью в некоторых точках A_1 и B_1. Пусть P и Q — точки пересечения прямой OO_1 с описанной окружностью. По теореме о произведении отрезков пересекающихся хорд $PO_1 \cdot O_1Q = AO_1 \cdot O_1A_1$, или

$$(R+d)(R-d) = AO_1 \cdot O_1A_1. \tag{2}$$

Заметим теперь, что поскольку AA_1 и BB_1 — биссектрисы углов A и B, то $\smile BA_1 = \smile A_1C$, а $\smile CB_1 = \smile B_1A$. Следовательно,

$$\angle BO_1A_1 = \frac{\smile BA_1 + \smile AB_1}{2} = \frac{\smile A_1C + \smile CB_1}{2} = \angle O_1BA_1.$$

Поэтому треугольник O_1A_1B равнобедренный: $O_1A_1 = BA_1$. Таким образом, соотношение (2) можно переписать так:

$$(R+d)(R-d) = AO_1 \cdot BA_1. \tag{3}$$

Проведем теперь диаметр A_1A_2 описанной окружности и обозначим буквой K точку касания вписанной окружности и стороны AB. Треугольники A_1A_2B и AO_1K подобны (они прямоугольные и имеют равные углы A и A_2), поэтому

$$\frac{O_1K}{BA_1} = \frac{AO_1}{A_1A_2}, \text{ или } \frac{r}{BA_1} = \frac{AO_1}{2R},$$

откуда $AO_1 \cdot BA_1 = 2Rr$. Подставив это выражение в соотношение (3), получим:

$$(R+d)(R-d) = 2Rr, \text{ или } d^2 = R^2 - 2Rr.$$

В случае $d=0$ (рис. 211) каждая из сторон треугольника ABC равна $2\sqrt{R^2-r^2}$ (объясните почему), а значит, этот треугольник равносторонний. Поэтому $\angle BAC = 60°$, $\angle BAO = 30°$, и, следовательно, $R = 2r$. Теорема доказана.

Вернемся теперь к нашей задаче. Пусть даны две окружности радиусов R и r, одна из которых лежит внутри другой, и расстояние OO_1 между их центрами равно d. Попробуем построить треугольник, в котором окружность радиуса R описанная, а радиуса r — вписанная. Ясно, что если $d^2 \neq R^2 - 2Rr$, то задача не имеет решений. В самом деле, если бы искомый треугольник существовал, то для него выполнялось бы равенство (1), но оно не выполняется.

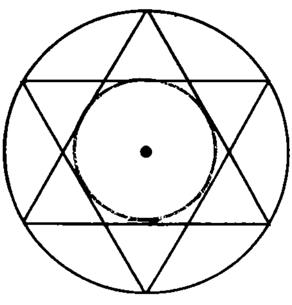


Рис. 212

Допустим, что $d^2 = R^2 - 2Rr$, и докажем, что тогда искомых треугольников бесконечно много. При $d=0$ это очевидно (рис. 212). Будем считать, что $d \neq 0$. Воспользуемся идеей доказательства теоремы. Возьмем на окружности радиуса R произвольную точку A и

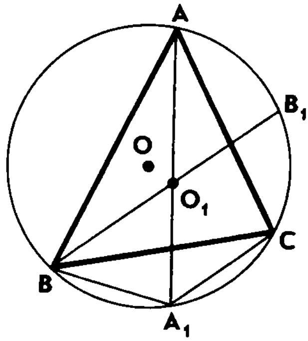


Рис. 213

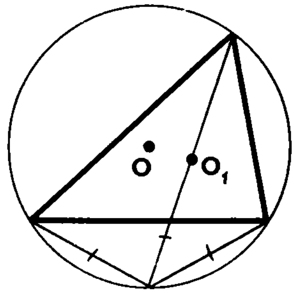


Рис. 214

проведем прямую AO_1. Она пересекает эту окружность в некоторой точке A_1 (рис. 213). Далее отметим на окружности точки B и C так, чтобы выполнялись равенства $A_1B=A_1C=A_1O_1$. Тогда треугольник ABC искомый. В самом деле, этот треугольник вписан в окружность радиуса R. Далее, по построению AA_1 — биссектриса угла A. Пусть прямая BO_1 пересекает описанную окружность в точке B_1. По построению $A_1O_1=A_1B$, поэтому $\angle A_1O_1B=\angle A_1BO_1$. Следовательно,

$$\frac{\smile BA_1+\smile B_1A}{2}=\frac{\smile A_1C+\smile CB_1}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{\smile BA_1+\smile B_1A}{2}=\frac{\smile BA_1+\smile CB_1}{2},$$

откуда $\smile B_1A=\smile CB_1$, а значит, BB_1 — биссектриса угла B. Итак, биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O_1, т. е. O_1 — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Радиус же этой окружности согласно формуле Эйлера равен r, т. е. вписанная в треугольник ABC окружность совпадает с данной окружностью радиуса r.

Таким образом, треугольник ABC искомый. Но при построении этого треугольника вершина A была выбрана произвольно. Следовательно, задача имеет бесконечно много решений.

Замечание. В ходе доказательства теоремы мы установили весьма полезный факт (рис. 214): *точка пересечения продолжения биссектрисы, проведенной из одной из вершин треугольника, с описанной окружностью равноудалена от двух других вершин и центра вписанной окружности* (с помощью этого факта было выведено соотношение (3)).

58. Прямая Симпсона. Отметим еще одно неожиданное свойство, связанное с описанной около треугольника окружностью.

Теорема. ***Основания перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника (или их продолжениям) из произвольной точки описанной окружности, лежат на одной прямой.***

Эта прямая называется *прямой Симпсона*.

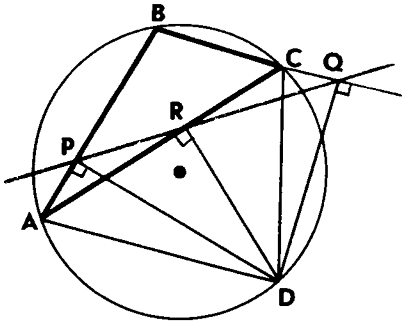


Рис. 215

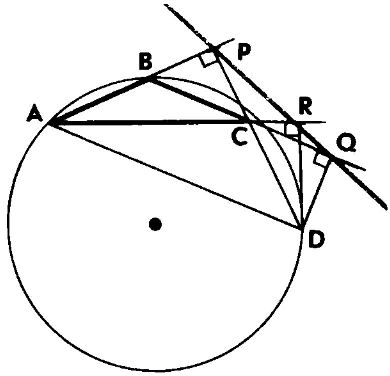


Рис. 216

Доказательство. Пусть D — произвольная точка описанной около треугольника окружности. Обозначим вершины треугольника буквами A, B и C так, чтобы получился четырехугольник $ABCD$. Так как $\angle A + \angle C = 180°$, то либо $\angle A = \angle C = 90°$ и тогда прямой Симпсона будет прямая AC, либо один из этих углов острый, а другой тупой. Пусть угол A острый. Рассмотрим два случая: угол ACD, а значит, и равный ему угол ABD острый (рис. 215); оба эти угла тупые (рис. 216) (случай прямых углов рассмотрите самостоятельно). В первом случае основание P перпендикуляра, проведенного из точки D к прямой AB, лежит между A и B, основание R перпендикуляра к AC лежит между A и C, а основание Q перпендикуляра к BC — вне отрезка BC. Во втором случае все три основания перпендикуляров лежат вне сторон треугольника. Ход рассуждений для этих двух случаев в основном одинаковый. Поэтому доказательство проведем для первого случая, отмечая при необходимости в скобках отличие ситуации во втором случае.

Отрезок AD виден из точек P и R под прямым углом, поэтому точки P, R, A и D лежат на окружности с диаметром AD. Следовательно, $\angle PRA = \angle PDA$ как углы, вписанные в эту окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу.

Отрезок CD виден из точек R и Q под прямым углом, поэтому точки R, Q, C и D лежат на окружности с диаметром CD. Следовательно, $\angle QRC = \angle QDC$ (во втором случае $\angle QRC + \angle QDC = 180°$).

Но $\angle PDA = 90° - \angle BAD$, а $\angle QDC = 90° - \angle QCD = 90° - (180° - \angle BCD) = 90° - \angle BAD$, поскольку $\angle BAD + \angle BCD = 180°$. Следовательно, $\angle PDA = \angle QDC$.

Из полученных равенств $\angle PRA = \angle PDA$, $\angle QRC = \angle QDC$ и $\angle PDA = \angle QDC$ следует: $\angle PRA = \angle QRC$ (во втором случае $\angle QRC + \angle PRA = 180°$). Но это и означает, что точки P, R и Q лежат на одной прямой. Теорема доказана.

59. Теорема Птолемея. В любой треугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Однако для других многоугольников это не так. Мы знаем, например, что в четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны. Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°. Эти утверждения очень похожи друг на друга. Используя скобки, их можно объединить в одно:

описанная (вписанная) окружность для данного четырехугольника существует тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов (сторон) равны.

Существуют и другие характеристические свойства вписанных и описанных четырехугольников. Наиболее известное основано на теореме Птолемея.

Теорема (Птолемея). ***Произведение диагоналей вписанного в окружность четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон.***

Доказательство. Рассмотрим вписанный четырехугольник $ABCD$. Для удобства введем обозначения: $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=m$, $BD=n$ (рис. 217) и докажем, что

$$mn=ac+bd. \qquad (1)$$

На диагонали AC возьмем такую точку M, что $\angle ABM = \angle DBC$. Треугольники ABM и DBC подобны по двум углам ($\angle ABM=\angle DBC$ по построению, а углы BAM и BDC равны как вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу). Следовательно, $\frac{AB}{BD}=\frac{AM}{CD}$, откуда $AB \cdot CD = AM \cdot BD$, или

$$ac=AM \cdot n. \qquad (2)$$

Далее, треугольники MBC и ADB также подобны, так как $\angle MBC=\angle ABD$, а углы BCM и BDA равны как вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу. Поэтому

$$\frac{BC}{MC}=\frac{BD}{AD},$$

откуда $BC \cdot AD = MC \cdot BD$, или

$$bd=MC \cdot n. \qquad (3)$$

Сложив равенства (2) и (3), получим $ac+bd=(AM+MC)n$, или

$$ac+bd=mn,$$

что и требовалось доказать.

Оказывается, что рассмотренное свойство вписанного четырехугольника является характеристическим, т. е. верно и обратное утверждение:

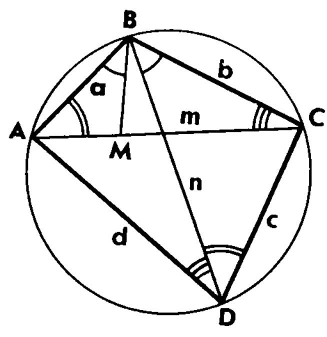


Рис. 217

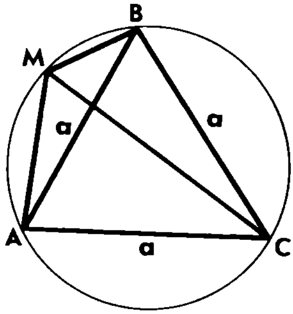


Рис. 218

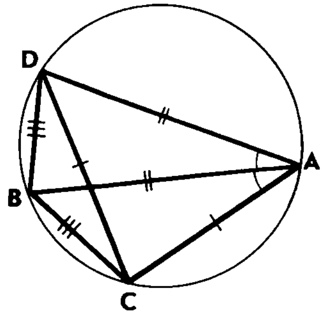


Рис. 219

если в выпуклом четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон, то около него можно описать окружность.

Попробуйте доказать это утверждение самостоятельно (хотя это и не просто).

Решим теперь две задачи с помощью теоремы Птолемея.

Задача 2. На окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята произвольная точка M, отличная от A, B и C. Доказать, что один из отрезков MA, MB и MC равен сумме двух других.

Решение. Пусть, например, точки M и C лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 218) и пусть сторона треугольника равна a. По теореме Птолемея $a \cdot MC = a \cdot MA + a \cdot MB$, откуда $MC = MA + MB$, что и требовалось доказать.

Задача 3. Углы A, B и C треугольника образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Доказать, что его стороны удовлетворяют соотношению $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$.

Решение. Поскольку сумма углов треугольника равна 180°, то $\angle A = \frac{180°}{7}$, $\angle B = 2 \cdot \frac{180°}{7}$, $\angle C = 4 \cdot \frac{180°}{7}$. Опишем около треугольника ABC окружность и построим угол BAD, равный углу BAC (рис. 219). По теореме Птолемея

$$AB \cdot CD = BC \cdot AD + BD \cdot AC. \qquad (4)$$

Но $CD = AC$, $AD = AB$, $BD = BC$ (объясните почему). Поэтому равенство (4) можно переписать так:

$$AB \cdot AC = BC \cdot AB + BC \cdot AC.$$

Разделив обе части последнего равенства на произведение $AB \cdot AC \cdot BC$, получим

$$\frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB},$$

что и требовалось доказать.

60. Замечательное свойство вписанного многоугольника. Рассмотрим два многоугольника $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$, стороны которых соответственно равны: $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3$, ..., $A_nA_1 = B_nB_1$. Если $n = 3$, то многоугольники (точнее, треугольники) равны; если же $n > 3$, то многоугольники могут быть и неравными (например, квадрат и ромб). В частности, если первый многоугольник вписанный, то второй может и не быть вписанным. Оказывается, что в этом случае площадь первого многоугольника больше площади второго. Итак, справедлива следующая теорема:

Теорема. ***Площадь данного вписанного n-угольника при n>3 больше площади любого другого n-угольника с соответственно равными сторонами, но не являющегося вписанным.***

Доказательство. Отметим, прежде всего, что площадь выпуклого многоугольника (рис. 220) всегда больше площади невыпуклого многоугольника с соответственно равными сторонами (пользуясь методом математической индукции, докажите это самостоятельно), поэтому при доказательстве теоремы достаточно ограничиться рассмотрением выпуклых многоугольников.

Если считать известным изопериметрическое свойство окружности, то доказать теорему можно очень легко. В самом деле, рассмотрим многоугольник $A_1A_2...A_n$, вписанный в окружность (рис. 221, *а*). Можно сказать, что круг составлен из многоугольника $A_1A_2...A_n$ и *n сегментов* — фигур, ограниченных дугой и хордой (на рисунке 221 один из сегментов заштрихован). Деформируем теперь нашу фигуру так, чтобы все сегменты не изменили своей формы (рис. 221, *б*). Новая фигура ограничена кривой линией, составленной из дуг сегментов, поэтому длина этой кривой такая же, как у исходной окружности, но сама кривая уже не является окружностью. Следовательно, площадь новой фигуры меньше, чем площадь исходной. С другой стороны, площади сегментов не изменились, так как не изменились сами сегменты. Следовательно, площадь уменьшилась за счет уменьшения площади многоугольника, т. е. площадь вписанного многоугольника

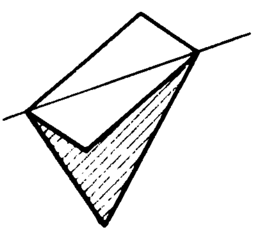
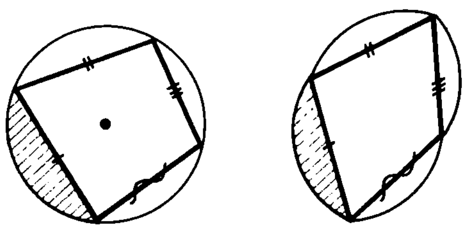


Рис. 220



а) б)

Рис. 221

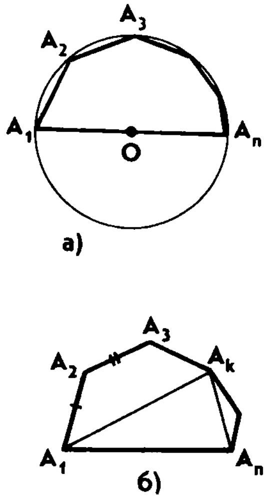


Рис. 222

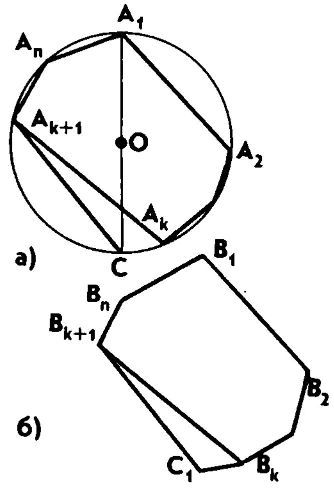


Рис. 223

больше площади любого другого многоугольника с соответственно равными сторонами.

Приведенное доказательство, однако, имеет тот недостаток, что мы еще не доказали изопериметрическое свойство окружности. Поэтому желательно было бы найти какое-нибудь другое доказательство, пусть не такое наглядное, но зато опирающееся только на доказанные утверждения. Приведем одно из таких доказательств.

Сначала докажем вспомогательное утверждение: *если заданы все стороны многоугольника, кроме одной, то наибольшую площадь он будет иметь в том случае, когда все его вершины лежат на полуокружности, диаметром которой является незаданная сторона* (рис. 222, *а*). Действительно, пусть $A_1A_2...A_n$ — многоугольник, стороны A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ которого заданы, а сторона A_nA_1 может меняться. Предположим, что его площадь имеет наибольшее из всех возможных значение, однако он не является вписанным в полуокружность с диаметром A_nA_1 (рис. 222, *б*). Тогда среди его вершин A_2, ..., A_{n-1} найдется такая вершина A_k, что $\angle A_1A_kA_n \neq 90°$ (иначе он был бы вписан в полуокружность). Весь многоугольник A_1A_2 ... A_n составлен из двух многоугольников A_1A_2 ... A_k и A_kA_{k+1} ... A_n и треугольника $A_1A_kA_n$. Не меняя формы двух указанных многоугольников, будем уменьшать или увеличивать сторону A_nA_1 так, чтобы сделать угол $A_1A_kA_n$ прямым. Полученный таким способом многоугольник будет составлен из тех же двух многоугольников и прямоугольного треугольника $A_1'A_k'A_n'$, площадь которого будет больше, чем у исходного треугольника $A_1A_kA_n$ (объясните почему). Следовательно, и весь новый многоугольник будет иметь площадь, большую площади исходного многоугольника. Но это противоречит условию.

Значит, наше предположение ошибочно и все вершины многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ лежат на полуокружности с диаметром A_nA_1.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ — вписанный многоугольник, а многоугольник $B_1B_2 \dots B_n$ имеет соответственно равные стороны, но не является вписанным (рис. 223, *а*). Проведем диаметр A_1C. Может случиться, что точка C совпадет с одной из вершин многоугольника. Этот случай разберите самостоятельно, но сначала дочитайте до конца доказательство теоремы для случая, когда точка C не совпадает с вершиной. Тогда она окажется лежащей между какими-то соседними вершинами A_k и A_{k+1}. «Пристроим» к многоугольнику $B_1B_2 \dots B_n$ треугольник $B_kC_1B_{k+1}$, равный треугольнику A_kCA_{k+1}, так как показано на рисунке 223, *б*. Согласно доказанному $S_{A_1A_2 \dots A_kC} \geqslant S_{B_1B_2 \dots B_kC}$ и $S_{CA_{k+1} \dots A_nA_1} \geqslant S_{C_1B_{k+1} \dots B_nB_1}$ причем хотя бы в одном из неравенств знак «=» невозможен, иначе многоугольник $B_1B_2 \dots B_n$ был бы вписанным. Поэтому, складывая эти неравенства, получим $S_{A_1 \dots C \dots A_n} > S_{B_1 \dots C_1 \dots B_n}$. Но величина, стоящая в левой части этого неравенства, представляет собой сумму площади данного многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ и площади треугольника A_kCA_{k+1}; величина же, стоящая в правой части неравенства,— сумма площади многоугольника $B_1B_2 \dots B_n$ и площади треугольника $B_kC_1B_{k+1}$, равного треугольнику A_kCA_{k+1}. Следовательно,

$$S_{A_1A_2 \dots A_n} > S_{B_1B_2 \dots B_n}.$$

Теорема доказана.

61. Вневписанные окружности. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и проведем его биссектрису AA_1. Затем продолжим эту биссектрису за точку A_1 до пересечения в точке O_a с биссектрисой внешнего угла при вершине B (рис. 224). По-

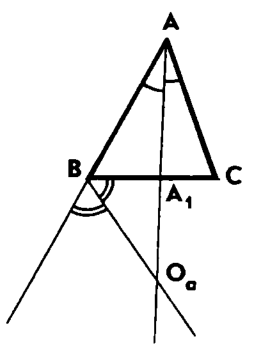


Рис. 224

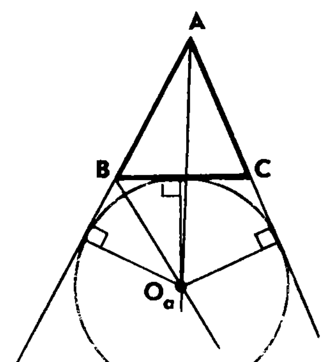


Рис. 225

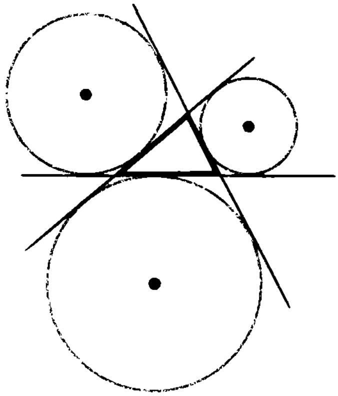


Рис. 226

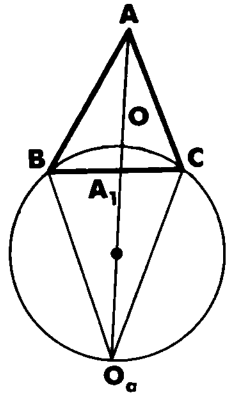


Рис. 227

скольку точка O_a лежит на биссектрисе угла A, то она равноудалена от прямых AB и AC. По аналогичной причине она равноудалена от прямых AB и BC. Следовательно, она равноудалена и от прямых AC и BC, а значит, лежит на биссектрисе внешнего угла при вершине C (объясните почему). Итак,

продолжение биссектрисы треугольника, проведенной из одной из вершин, пересекается с биссектрисами внешних углов при двух других вершинах в одной точке.

Поскольку точка O_a равноудалена от сторон внешних углов при вершинах B и C, то окружность с центром O_a, касающаяся стороны BC, касается также и продолжений сторон AB и AC (рис. 225). Эта окружность называется ***вневписанной окружностью*** треугольника ABC. Ясно, что любой треугольник имеет три вневписанные окружности (рис. 226).

Положение центра O_a вневписанной окружности можно охарактеризовать так: это точка пересечения биссектрис внешних углов при вершинах B и C. Можно охарактеризовать его и совершенно иначе, если заметить, что точки O_a, B, C и центр O вписанной в треугольник ABC окружности лежат на одной окружности с диаметром OO_a (рис. 227),— это следует из того, что углы OBO_a и OCO_a прямые. Можно сказать, таким образом, что точка O_a представляет собой точку пересечения прямой AA_1 и окружности, описанной около треугольника BOC.

Принимая во внимание замечание в конце п. 57, из этого можно сделать еще один вывод:

точки, в которых вписанная и вневписанная окружности касаются стороны треугольника, симметричны относительно середины этой стороны.

В самом деле, пусть D — точка пересечения продолжения биссектрисы AA_1 с описанной около треугольника ABC окружностью (рис. 228). Тогда согласно упомянутому замечанию $DB = DC = DO$. Следовательно, D — центр окружности, описан-

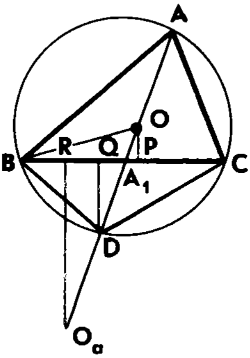


Рис. 228

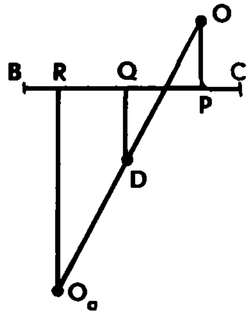


Рис. 229

ной около четырехугольника $BOCO_a$. Проведем из точек O, D и O_a перпендикулярны к стороне BC и обозначим их основания буквами P, Q и R соответственно (рис. 229). Точки P и R являются, очевидно, точками касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной BC, а точка Q — середина этой стороны (объясните почему). Но $OD = DO_a$, значит, и $PQ = QR$, т. е. точки P и R симметричны относительно точки Q.

Точка касания вневписанной окружности со стороной треугольника обладает еще одним замечательным свойством: *прямая, проведенная через вершину треугольника и точку, в которой вневписанная окружность касается противоположной стороны, делит периметр треугольника пополам.*

Пользуясь рисунком 230, убедитесь в этом самостоятельно.

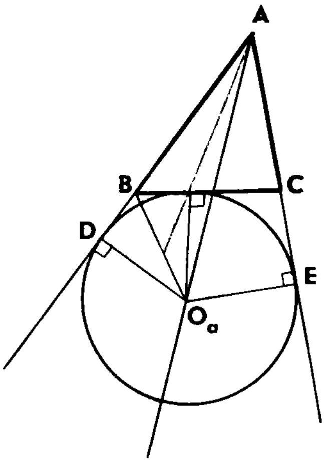


Рис. 230

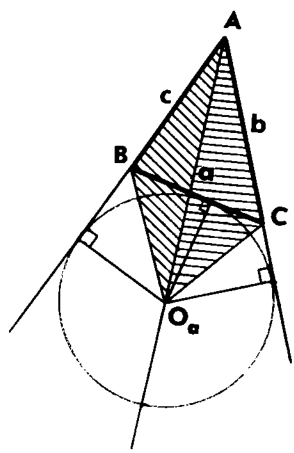


Рис. 231

При решении задач, связанных с нахождением площади S треугольника, часто полезной бывает следующая формула. Пусть R_a — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны треугольника, равной a, p — полупериметр треугольника. Тогда

$$S=R_a(p-a). \qquad (1)$$

Действительно, если две другие стороны данного треугольника равны b и c (рис. 231), то

$$S=S_{ACO_a}+S_{ABO_a}-S_{BCO_a}=$$
$$=\frac{1}{2}b\cdot R_a+\frac{1}{2}c\cdot R_a-\frac{1}{2}a\cdot R_a=R_a(p-a).$$

Замечание. Выпуклый четырехугольник может не иметь вписанной окружности, но он всегда имеет четыре вневписанные окружности (объясните почему). Любопытно, что для площади S такого четырехугольника имеет место соотношение, похожее на формулу (1). В самом деле, пусть стороны данного четырехугольника равны последовательно a, b, c и d, p — его полупериметр, R_a, и R_c — радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон, равных a и c. Допустим, что две другие стороны не параллельны (случай параллельных сторон рассмотрите самостоятельно). Продолжим их до пересечения в точке M (рис. 232). Пусть K_1 и K_2 — точки, в которых продолжения одной из сторон касаются вневписанных окружностей, причем K_1 лежит на окружности, вписанной в маленький треугольник. Площадь S четырехугольника равна, очевидно, разности площадей большого и маленького треугольников. Периметр маленького треугольника равен $2MK_1+2c$ (объясните почему), а периметр большого треугольника равен

$$(2MK_1+a+b+c+d)=2MK_1+2p.$$

Применяя к большому треугольнику формулу (1), а к меньшему — формулу, выражающую его площадь через радиус вписанной окружности и полупериметр, получаем:

$$S=R_a(MK_1+p-a)-R_c(MK_1+c). \qquad (2)$$

С другой стороны, из подобия треугольников MK_1O_c и MK_2O_a (O_c и O_a — центры вневписанных окружностей) находим $\frac{MK_1}{MK_2}=\frac{R_c}{R_a}$. Но отрезок MK_2 равен полупериметру большого треугольника (докажите это), т. е.

$$MK_2=MK_1+p.$$

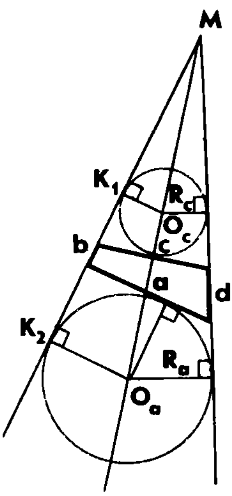


Рис. 232

Поэтому из полученной пропорции можно найти MK_1:

$$MK_1 = \frac{R_c}{R_a - R_c} p.$$

Подставляя это выражение в равенство (2), получим:

$$S = R_a(p-a) + R_c(p-c).$$

Задачи

296. Докажите, что диаметр окружности, вписанной в треугольник, не превосходит радиуса окружности, описанной около этого треугольника.

297. Докажите, что отношение произведения сторон треугольника к их сумме не превосходит квадрата радиуса описанной около треугольника окружности.

298. Пусть радиус вписанной в треугольник окружности равен r, а радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен R. Найдите степень центра вписанной окружности относительно описанной.

299. Треугольник ABC вписан в окружность. Для какой точки этой окружности прямая AB является прямой Симпсона?

300. Докажите, что если основания перпендикуляров, проведенных из некоторой точки к прямым, содержащим стороны треугольника, лежат на одной прямой, то эта точка лежит на окружности, описанной около данного треугольника.

301. Треугольник ABC вписан в окружность. Через точку D этой окружности проведена прямая, перпендикулярная к BC и пересекающая окружность в точке D_1. Докажите, что прямая AD_1 параллельна прямой Симпсона, соответствующей точке D.

302. Треугольник вписан в окружность и для двух точек этой окружности построены прямые Симпсона. Докажите, что угол между этими прямыми равен половине величины дуги, заключенной между указанными точками окружности.

303. Докажите, что две прямые Симпсона, соответствующие двум диаметрально противоположным точкам описанной около треугольника окружности, взаимно перпендикулярны.

304. Равносторонний треугольник вписан в окружность и для данной точки этой окружности построена прямая Симпсона. Докажите, что эта прямая делит пополам радиус, проведенный в данную точку.

305. Треугольник вписан в окружность и для данной точки окружности построена прямая Симпсона. Докажите, что эта прямая делит пополам отрезок, соединяющий данную точку с точкой пересечения высот треугольника.

306. Противоположные стороны четырехугольника продолжены до пересечения. Докажите, что четырехугольник является вписанным тогда и только тогда, когда биссектрисы образовавшихся углов взаимно перпендикулярны.

307. Противоположные стороны четырехугольника, вписанного в окружность, продолжены до пересечения. Докажите, что четыре точки, в которых биссектрисы двух образовавшихся углов пересекают стороны четырехугольника, являются вершинами ромба.

308. Докажите, что в остроугольном треугольнике сумма расстояний от центра описанной окружности до сторон равна сумме радиусов описанной и вписанной окружностей.

309. В шестиугольнике $ABCDEF$, вписанном в окружность, $AC = CE = EA$, $BE + DA + FC = p$. Найдите периметр шестиугольника.

310. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около треугольника окружность в точке D. Докажите, что $AB + AC \leqslant 2AD$.

311. На дуге CD описанной около квадрата $ABCD$ окружности взята точка P. Докажите, что:

а) $PA + PC = \sqrt{2}\, PB$;

б) $PA - PC = \sqrt{2}\, PD$;

в) $PC + PD = \dfrac{PA + PB}{\sqrt{2} + 1}$.

312. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность, проходящая через точку A, пересекает стороны AB, AC и AD в точках P, Q и R соответственно. Докажите, что

$$AP \cdot AB + AR \cdot AD = AQ \cdot AC.$$

313. Докажите, что длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда: а) прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей, перпендикулярна к одной из биссектрис; б) расстояние от центра вписанной окружности до одной из вершин равно среднему геометрическому для радиуса вписанной и диаметра описанной окружностей; в) расстояние от точки пересечения продолжения одной из биссектрис с описанной окружностью до стороны, за которую эта биссектриса продолжена, равно радиусу вписанной окружности; г) одна из биссектрис делится центром вписанной окружности в отношении $2:1$, считая от вершины.

314. Докажите, что в треугольнике три середины сторон, три основания высот и три точки, делящие пополам отрезки высот между точкой их пересечения и вершинами, лежат на одной окружности (она называется *окружностью Эйлера* или окружностью девяти точек).

315. Докажите, что три отрезка, каждый из которых соединяет вершину треугольника с точкой касания противоположной стороны с вневписанной окружностью, пересекаются в одной точке.

316. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиус вписанной в него окружности равен r, а радиус вневписанной окружности, касающейся гипотенузы, равен R.

317. Точки O_1, O_2 и O_3 — центры вневписанных окружностей треугольника ABC. Докажите, что:

а) вершины A, B, C лежат на прямых O_1O_2, O_2O_3, O_1O_3;

б) вершины A, B, C являются основаниями высот треугольника $O_1O_2O_3$;

в) треугольник $O_1O_2O_3$ остроугольный.

318. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Постройте треугольник, для которого эти точки являются основаниями высот. Сколько решений имеет задача?

319. Докажите, что $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник, r_a, r_b и r_c — радиусы вневписанных окружностей.

320. Докажите, что радикальная ось вписанной и вневписанной окружностей данного треугольника проходит через середину стороны треугольника и перпендикулярна к биссектрисе угла, противоположного этой стороне.

ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число

62. Равенство векторов. Напомним, что отрезком AB или BA называется фигура, содержащая точки A и B и все точки прямой AB, лежащие между A и B. Точки A и B будем называть граничными точками отрезка. *Вектором* или *направленным отрезком* называется отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая — концом. Любая точка плоскости также считается вектором, который называется *нулевым.* Мы будем пользоваться обычными обозначениями для векторов и их длин.

Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. На рисунке 233 изображена трапеция $ABCD$, диагонали которой пересекаются в точке O. Следующие векторы коллинеарны: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DO}$ и $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OO}$ и $\overrightarrow{AB}$. Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$ не коллинеарны, так как они лежат на пересекающихся прямых. Не коллинеарны также векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Два ненулевых коллинеарных вектора либо сонаправлены, либо противоположно направлены. Дадим точные определения этих понятий. Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на параллельных прямых, называются *сонаправленными*, если лучи $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат в одной полуплоскости с границей AC. Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на одной прямой, называются сонаправленными, если один из лучей AB или CD содержит другой. Условимся считать, что нулевой вектор сонаправлен с любым вектором плоскости.

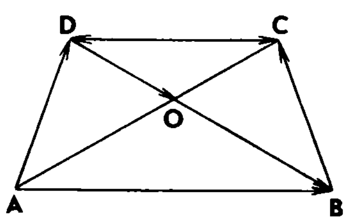


Рис. 233

Если два коллинеарных вектора не сонаправлены, то они называются *противоположно направленными.*

Для обозначения сонаправленных и противоположно направленных векторов мы будем пользоваться обычными символами: $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ — векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, $\vec{c}\uparrow\downarrow\vec{d}$ — векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ противоположно направлены. На рисунке 234 $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AE}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CE}$, $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, $\overrightarrow{AA}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CE}$.

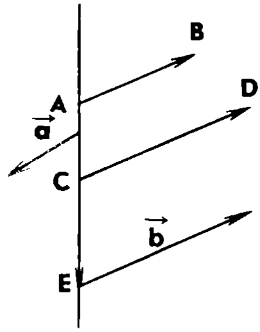


Рис. 234

Напомним определение равных векторов: *векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.* Равенство векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}=\vec{b}$. Равные векторы, начала которых не совпадают, часто обозначают одной и той же буквой. Заметим, что если $\vec{a}=\vec{b}$ и $\vec{b}=\vec{c}$, то $\vec{a}=\vec{c}$.

Докажем две леммы о равенстве векторов.

Лемма. *Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны тогда и только тогда, когда середины отрезков AD и BC совпадают.*

Доказательство. Докажем лемму для случая, когда прямые AB и CD параллельны (случай, когда эти прямые совпадают, рассмотрите самостоятельно, используя рисунок 235, *а*). Пусть $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Тогда $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$, поэтому точки B и D лежат по одну сторону от прямой AC (рис. 235, *б*). Луч AD проходит внутри угла BAC (так как в противном случае луч AB проходил бы внутри угла DAC и пересекал отрезок CD, что невозможно), поэтому он пересекает отрезок BC. Аналогично луч CB проходит внутри угла ACD, поэтому он пересекает отрезок AD. Отсюда следует, что отрезки AD и BC пересекаются в некоторой точке O. Углы 1 и 2 являются накрест лежащими углами при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AD, поэтому они равны: $\angle 1=\angle 2$. Аналогично $\angle 3=\angle 4$. Следовательно, треугольники AOB и DOC равны по второму признаку равенства треугольников ($AB=CD$, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$), а значит, $AO=OD$ и $BO=OC$. Мы доказали, что если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то сере-

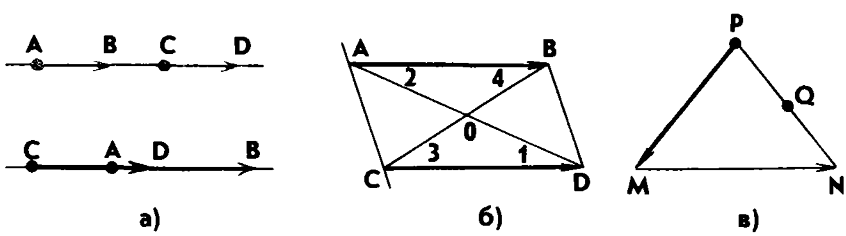


Рис. 235

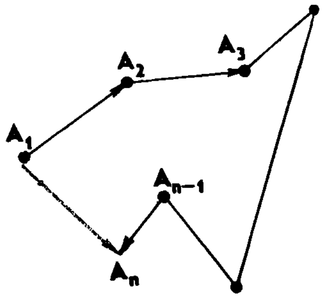


Рис. 236

дины отрезков AD и BC совпадают.

Докажем обратное утверждение. Пусть отрезки AD и BC пересекаются в точке O, которая является их общей серединой (см. рис. 235, *б*). Треугольники AOB и DOC равны по первому признаку равенства треугольников ($AO=DO$, $BO=CO$, $\angle AOB=\angle DOC$), поэтому $AB=CD$, $\angle 2=\angle 1$. Углы 1 и 2 являются накрест лежащими углами при пересечении прямых CD и AB секущей AD. По признаку параллельности двух прямых $AB \parallel CD$. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены, так как лучи AB и CD лежат в одной полуплоскости с границей AC (в той же полуплоскости, что и точка O). Итак, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены и их длины равны, следовательно, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Лемма доказана.

Заметим, что доказанное утверждение верно и в том случае, когда один из отрезков AD и BC или даже оба отрезка нулевые (серединой нулевого отрезка AA считается сама точка A). Например, на рисунке 235, *в* векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PM}$ не равны, так как точки M и Q не совпадают. Здесь Q — середина отрезка PN, а M — середина нулевого отрезка MM.

Лемма. *Если* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, *то* $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

Доказательство. Так как $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то середины отрезков AD и BC совпадают. Но тогда по предыдущей леме $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. Лемма доказана.

63. Сложение и вычитание векторов. Для сложения двух векторов пользуются правилом треугольника: *если A, B и C — произвольные точки, то* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Для сложения неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно пользоваться *правилом параллелограмма.* Для этого нужно отложить от какой-нибудь точки O векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ и построить параллелограмм $OACB$. Тогда $\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$. Суммой нескольких векторов называется вектор, полученный в результате последовательного прибавления каждого из векторов к сумме предшествующих векторов. Для построения суммы нескольких векторов пользуются правилом многоугольника.

Это правило можно сформулировать так:

если A_1, $A_2, \ldots, A_n$ — произвольные точки, где $n>2$, то $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$ (рис. 236).

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{x}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна $\vec{a}$: $\vec{x}+\vec{b}=\vec{a}$. Вектор $\vec{x}$ обозначается так: $\vec{a}-\vec{b}$. Напомним теорему о разности векторов: *для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$*. Здесь $(-\vec{b})$ — вектор, противоположный вектору $\vec{b}$. Он определяется так: если $\vec{b}\neq\vec{0}$, то $-\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{b}$ и $|-\vec{b}|=|\vec{b}|$, а если $\vec{b}=\vec{0}$, то и $(-\vec{b})=\vec{0}$.

Отметим, что если O, A и B — произвольные точки плоскости, то имеет место равенство

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}. \qquad (1)$$

В самом деле, по правилу треугольника $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ или $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$. Отсюда по определению разности двух векторов получаем равенство (1).

Для построения разности данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно использовать равенство (1). От произвольной точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA}=a$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, тогда вектор $\overrightarrow{BA}$ равен $\vec{a}-\vec{b}$.

64. Умножение вектора на число. Напомним, что произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\,|\vec{a}|$, причем $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ при $k\geqslant 0$ и $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ при $k<0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор. Произведение вектора $\vec{a}$ на число k обозначается так: $k\vec{a}$.

Вектор называется *единичным*, если его длина равна единице. Если $\vec{p}$ — ненулевой вектор, то $\vec{p}_0=\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором $\vec{p}$. Рассмотрим задачу, утверждение которой часто применяется при решении геометрических задач с использованием векторов.

Задача. Дан неразвернутый угол AOB, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Доказать, что вектор $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ направлен по биссектрисе данного угла.

Решение. Пусть $\overrightarrow{OA_1}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\overrightarrow{OB_1}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}$. Согласно правилу параллелограмма сложения векторов четырехугольник $OA_1C_1B_1$ — параллелограмм, а так как $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OB_1}$ — единичные векторы, то $OA_1=OB_1=1$,
поэтому $OA_1C_1B_1$ — ромб. Диагональ $\overrightarrow{OC_1}$ этого ромба делит угол A_1OC_1 пополам, следовательно, вектор $\overrightarrow{OC_1}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ направлен по биссектрисе угла AOB, что и требовалось доказать.

Задачи

321. Пользуясь первой леммой о равенстве векторов, докажите, что если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

322. Параллелограммы $ABCD$ и $ADKP$ с общей стороной AD расположены так, что точки B, C и K не лежат на одной прямой. Докажите, что $BCKP$ — параллелограмм.

323. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы. Как следует направить эти векторы, чтобы длина вектора $\vec{a}+\vec{b}$ была: а) наибольшей; б) наименьшей?

324. Может ли длина вектора $\vec{a}+\vec{b}$ быть меньше, чем длина каждого из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

325. Дан произвольный пятиугольник. Докажите, что существует замкнутая ломаная $A_1A_2A_3A_4A_5A_1$, такая, что отрезки A_1A_3, A_1A_4, A_2A_4, A_2A_5, A_3A_5 соответственно параллельны и равны сторонам данного пятиугольника.

326. Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите векторы $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

327. Даны параллелограмм $ABCD$ и произвольная точка O. Выразите вектор $\overrightarrow{OD}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$.

328. Докажите, что сумма двух векторов равна нулю тогда и только тогда, когда они являются противоположными векторами.

329. Дан отрезок AB. Докажите, что существует одна и только одна точка O, такая, что векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$ противоположны. Как расположена точка O по отношению к отрезку AB?

330. Докажите, что точка M лежит на серединном перпендикуляре к данному отрезку AB тогда и только тогда, когда $|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}|$, где O — произвольная точка плоскости.

331. Докажите, что четыре точки, которые симметричны произвольной точке M относительно середин сторон данного четырехугольника, являются вершинами параллелограмма.

332. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ с общей вершиной A. Докажите, что $BB_1 \leqslant CC_1+DD_1$.

333. Докажите, что: а) $-(-\vec{a})=\vec{a}$; б) $-(\vec{a}+\vec{b})=(-\vec{a})+(-\vec{b})$. Здесь $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы.

334. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и постройте векторы:

а) $\sqrt{2}\vec{a}$, $-\frac{3}{5}\vec{a}$, $-\sqrt{3}\,\vec{a}$, $-\sqrt{5}\cdot\vec{a}$;

б) $\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$, $\vec{a}-\sqrt{3}\cdot\vec{b}$, $-\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})$.

335. Середины сторон произвольного восьмиугольника обозначены последовательно через A_1, $A_2, \ldots, A_8$. Докажите, что $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{A_7A_8}=\vec{0}$.

336. Дан неразвернутый угол AOB. Докажите, что векторы $\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}-\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}$ и $\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}-\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$ направлены по биссектрисам углов, смежных с данным.

337. Даны ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. При каких условиях выполняется равенство: а) $\vec{a}+\vec{b}=k\cdot(\vec{a}-\vec{b})$, где k — некоторое число; б) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$?

§ 2. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

65. Теорема о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам. Сформулируем лемму о коллинеарных векторах, которая часто используется при доказательстве теорем и решении задач.

Лемма. *Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a}\neq\vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b}=k\vec{a}$.*

Эта лемма доказана в п. 86 учебника.

Докажем теперь лемму о неколлинеарных векторах.

Лемма. *Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то равенство $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$ возможно только при $x=y=0$.*

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно, т. е. что для каких-то неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существуют числа x и y, такие, что $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$, причем хотя бы одно из этих чисел, например x, не равно нулю. Разделив векторное равенство на x, получим $\vec{a}=-\frac{y}{x}\vec{b}$. Из этого равенства следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, что противоречит условию. Следовательно, наше допущение неверно, т. е. равенство $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$ выполняется только при $x=y=0$. Лемма доказана.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два данных вектора. Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$, где x и y — какие-то числа, то говорят, что *вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$*. Числа x и y называются *коэффициентами разложения*. Докажем теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.

Теорема ***Любой вектор $\vec{p}$ можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.***

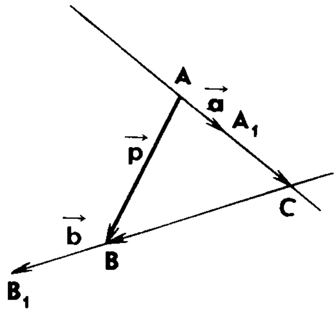


Рис. 237

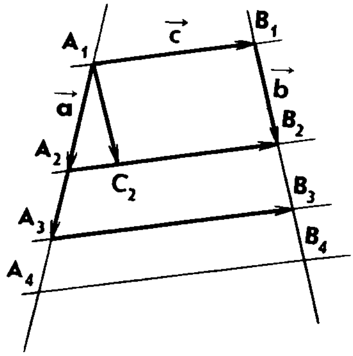


Рис. 238

Доказательство. Докажем сначала, что вектор $\vec{p}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если $\vec{p}=\vec{0}$, то это утвреждение очевидно, так как в этом случае вектор $\vec{p}$ можно представить в виде $\vec{p}=0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}$ Рассмотрим случай, когда $\vec{p}\neq\vec{0}$. Пусть $\vec{p}=\overrightarrow{AB}$. Отложим от точки A вектор $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$, а от точки B вектор $\overrightarrow{BB_1}=\vec{b}$ (рис. 237). Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в некоторой точке C. По правилу треугольника сложения векторов $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$. С другой стороны, векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{AC}$, а также $\vec{b}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны, поэтому по лемме о коллинеарных векторах существуют числа k_1 и k_2, такие, что $\overrightarrow{AC}=k_1\vec{a}_1$, $\overrightarrow{CB}=k_1\vec{b}$. Следовательно, $\vec{p}=k_1\vec{a}+k_2\vec{b}$, т. е. вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Докажем теперь, что коэффициенты разложения k_1 и k_2 определяются единственным образом. Допустим, что $\vec{p}=k_1\vec{a}+k_2\vec{b}$ и $\vec{p}=q_1\vec{a}+q_2\vec{b}$. Вычитая второе равенство из первого, получаем: $(k_1-q_1)\vec{a}+(k_2-q_2)\vec{b}=\vec{0}$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, поэтому по лемме о неколлинеарных векторах $k_1-q_1=0$, $k_2-q_2=0$, т. е. $k_1=q_1$, $k_2=q_2$. Это и означает, что коэффициенты разложения вектора $\vec{p}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяются единственным образом. Теорема доказана.

Воспользуемся данной теоремой для доказательства обобщенной теоремы Фалеса. Напомним, что она была доказана в главе III другим способом (с помощью подобия).

Теорема. ***Параллельные прямые, которые пересекают две данные прямые, отсекают на этих прямых пропорциональные отрезки.***

Доказательство. Пусть параллельные прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... пересекают одну из данных прямых в точках A_1, A_2,

A_3, ..., а в другую — в точках B_1, B_2, B_3, ... (рис. 238). Требуется доказать, что

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\frac{A_3A_4}{B_3B_4}=\ldots .$$

Докажем сначала, что $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}$. Введем обозначения: $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a}$, $\overrightarrow{B_1B_2}=\vec{b}$, $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{c}\neq\vec{0}$ (если $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{0}$, то в качестве вектора $\vec{c}$ возьмем $\overrightarrow{A_2B_2}$). Векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_2A_3}$, а также векторы $\overrightarrow{B_1B_2}$ и $\overrightarrow{B_2B_3}$ коллинеарны, поэтому по лемме о коллинеарных векторах существуют числа k и k', такие, что

$$\overrightarrow{A_2A_3}=k\vec{a},\ \overrightarrow{B_2B_3}=k'\vec{b}.$$

Докажем, что $k=k'$. Если прямые A_1A_2 и B_1B_2 параллельны, то очевидно, что $\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}=\overrightarrow{B_2B_3}$, т. е. $\vec{a}=\vec{b}$, $k\vec{a}=k'\vec{b}$. Из последних двух равенств следует, что $k=k'$.

Рассмотрим случай, когда прямые A_1A_2 и B_1B_2 не параллельны. Пусть $A_1C_2 \parallel B_1B_2$ (см. рис. 238), тогда $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{A_1A_2}-\overrightarrow{A_1C_2}=\overrightarrow{C_2A_2}$, т. е. вектор $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{c}$. Аналогично вектор $k\vec{a}-k'\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{c}$, следовательно, векторы $\vec{a}-\vec{b}$ и $k\vec{a}-k'\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a}-\vec{b}\neq\vec{0}$. По лемме о коллинеарных векторах существует число l, такое, что $k\vec{a}-k'\vec{b}=l(\vec{a}-\vec{b})$, или $(k-l)\vec{a}+(l-k')\vec{b}=\vec{0}$. Отсюда по лемме о неколлинеарных векторах $k-l=0$, $l-k'=0$, поэтому $k=k'$. Равенства $\overrightarrow{A_2A_3}=k\vec{a}$, $\overrightarrow{B_2B_3}=k'\vec{b}$ запишем теперь в виде $\overrightarrow{A_2A_3}=k\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_2B_3}=k\overrightarrow{B_1B_2}$. Отсюда следует, что $A_2A_3=kA_1A_2$, $\overrightarrow{B_2B_3}=kB_1B_2$ и поэтому $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}$.

Аналогично можно доказать, что $\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\frac{A_3A_4}{B_3B_4}$ и т. д.

Теорема доказана.

66. Деление отрезка в данном отношении. Пусть на прямой AB отмечена точка M, не совпадающая с точкой B. *Отношением, в котором точка M делит направленный отрезок* $\overrightarrow{AB}$, называется число k, такое, что $\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{MB}$. Если точка M лежит на отрезке AB, то векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ сонаправлены, поэтому $k=\frac{AM}{MB}>0$ (рис. 239, *а*). В частности, если M — середина отрезка AB, то

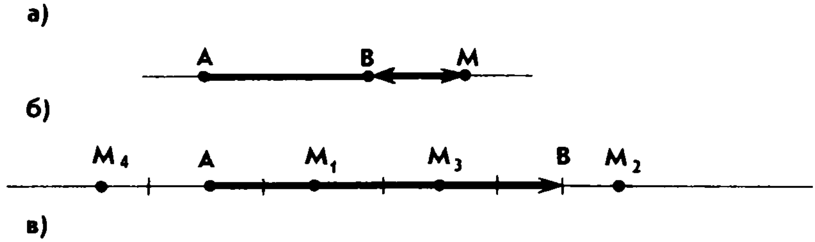


Рис. 239

$k=1$. Если же точка M находится вне отрезка AB, то векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ противоположно направлены, поэтому $k<0$ и $k=-\frac{AM}{MB}$ (рис. 239, *б*). Если, наконец, точка M совпадает с точкой A, то $k=0$. На рисунке 239, *в* точки M_1, M_2, M_3 и M_4 делят направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношениях: $k_1=\frac{1}{2}$, $k_2=-7$, $k_3=2$, $k_4=-\frac{1}{4}$.

Заметим, что на прямой AB не существует точки, которая делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $k=-1$. Действительно, если предположить, что такая точка M существует, то $\overrightarrow{AM}=(-1)\cdot\overrightarrow{MB}$, или $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, т. е. $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, что невозможно, так как точки A и B различны.

Пусть точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении k. Из равенства $\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{MB}$ следует, что

$$\overrightarrow{AM}+k\cdot\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{MB}+k\cdot\overrightarrow{AM},\ \text{или}\ (1+k)\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{AB}.$$

Разделив это равенство на $1+k$, получаем:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{k}{1+k}\overrightarrow{AB}. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что если на прямой AB существует точка M, которая делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в данном отношении k, то она единственная. Докажем теперь, что для любого данного числа $k\neq-1$ существует точка M, делящая направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении k. Возьмем точку M так, чтобы вектор $\overrightarrow{AM}$ определялся формулой (1). Тогда из равенства (1) получаем:

$$(1+k)\cdot\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{AB},\ \text{или}\ \overrightarrow{AM}+k\cdot\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{AM}+k\cdot\overrightarrow{MB},$$

т. е. $\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{MB}$. Следовательно, точка M, определяемая равенством (1), делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении k. Итак, для любого числа k, отличного от -1, на прямой AB существует одна и только одна точка, которая делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении k.

Задача 1. На прямой AB построить точки M_1, M_2 и M_3, которые делят направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношениях $k_1=\frac{3}{2}$, $k_1=-\sqrt{2}$, $k_3=-\frac{3}{4}$.

Решение Для решения задачи воспользуемся формулой (1).

При $k=\frac{3}{2}$ имеем: $\overrightarrow{AM_1}=\dfrac{\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{3}{5}\cdot\overrightarrow{AB}$. Для построения точки M_1 надо построить вектор, равный $\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$, и отложить его от точки A. Конец этого вектора и есть искомая точка M_1 (рис. 240, *а*).

При $k_2=-\sqrt{2}$ по формуле (1) получаем:

$$\overrightarrow{AM_2}=\frac{-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)}{1}\overrightarrow{AB},\text{ или}$$

$$\overrightarrow{AM_2}=2\cdot\overrightarrow{AB}+\sqrt{2}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

Для построения вектора, равного $\sqrt{2}\cdot\overrightarrow{AB}$, построим прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом A. Тогда $BC=\sqrt{2}\cdot AB$ (рис. 240, *б*). Отложим на продолжении луча BA сначала отрезок $BB_1=BA$, а затем отрезок $B_1M_2=BC$, как показано на рисунке 240, *б*. Точка M_2 является искомой.

На рисунке 240, *в* построена точка M_3, которая делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $k_3=-\frac{3}{4}$. В этом случае $\overrightarrow{AM_3}=-3\cdot\overrightarrow{AB}$, поэтому точка M_3 лежит на продолжении луча AB.

Рассмотрим еще две задачи.

Задача 2. Точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $k\neq-1$. Доказать, что

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+k\cdot\overrightarrow{OB}}{1+k}, \qquad (2)$$

где O — произвольная точка плоскости.

Решение. По формуле (1) из § 1 имеем:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}.$$

Подставим эти выражения в равенство $\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{MB}$:

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=k\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}).$$

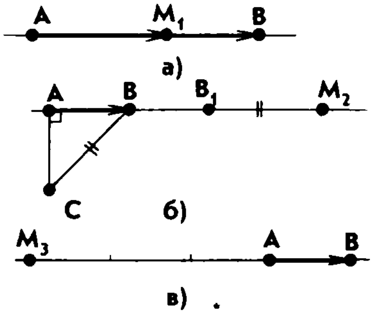


Рис. 240

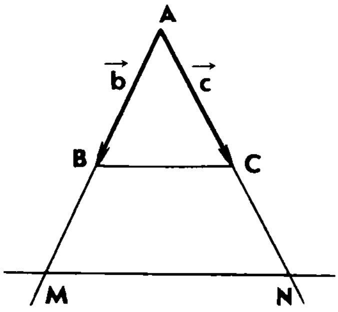


Рис. 241

Отсюда следует, что

$$(1+k)\cdot\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+k\cdot\overrightarrow{OB}.$$

Разделив на $1+k$ (заметим, что $k+1\neq 0$), получаем равенство (2). Задача решена.

Задача 3. Прямая MN параллельна стороне BC треугольника ABC. Точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении k_1, а точка N — направленный отрезок $\overrightarrow{CA}$ в отношении k_2 (рис. 241). Доказать, что $k_1k_2=1$.

Решение. Введем обозначения: $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. По формуле (2) имеем:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AA}+k_1\cdot\overrightarrow{AB}}{1+k_1}=\frac{k_1\vec{b}}{1+k_1},\quad \overrightarrow{AN}=\frac{\overrightarrow{AC}+k_2\cdot\overrightarrow{AA}}{1+k_2}=\frac{\vec{c}}{1+k_2}.$$

Векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны, поэтому существует число l, такое, что $\overrightarrow{MN}=l\cdot\overrightarrow{BC}$, или $\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=l(\vec{c}-\vec{b})$. Подставив сюда выражения для векторов $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{AM}$, после несложных преобразований получаем:

$$\vec{b}\left(l-\frac{k_1}{1+k_1}\right)+\vec{c}\left(\frac{1}{1+k_2}-l\right)=\vec{0}.$$

Отсюда по лемме о неколлинеарных векторах следует:

$$\frac{1}{1+k_2}-l=0 \text{ и } l-\frac{k_1}{1+k_1}=0.$$

Исключив из этих равенств l, получаем $k_1k_2=1$. Задача решена.

67. Центр масс системы точек. Рассмотрим k точек A_1, A_2, ..., A_k и предположим, что в этих точках сосредоточены соответственно массы m_1, m_2, ..., m_k. Возьмем произвольную точку O и составим равенство

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{m}(m_1\cdot\overrightarrow{OA_1}+m_2\cdot\overrightarrow{OA_2}+\ldots+m_k\cdot\overrightarrow{OA_k}), \qquad (3)$$

где $m=m_1+m_2+\ldots+m_k$. Точка M, определяемая этим равенством, называется *центром масс системы данных k точек*, в которых сосредоточены массы $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Докажем, что положение точки M не зависит от выбора точки O. Для этого возьмем точку O', отличную от точки O, и рассмотрим точку M', определяемую равенством

$$\overrightarrow{O'M'}=\frac{1}{m}(m_1\cdot\overrightarrow{O'A_1}+m_2\cdot\overrightarrow{O'A_2}+\ldots+m_k\cdot\overrightarrow{O'A_k}).$$

Докажем, что точки M и M' совпадают. По правилу треугольника

$$\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'A_1},\ \overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'A_2},\ \ldots,\ \overrightarrow{OA_k}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'A_k}.$$

Подставив эти значения в правую часть равенства (3), получаем:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{m}(m_1(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'A_1})+\ldots+m_k(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'A_k})=$$

$$=\frac{1}{m}(m_1+\ldots+m_k)\cdot\overrightarrow{OO'}+\frac{1}{m}(m_1\cdot\overrightarrow{O'A_1}+\ldots+m_k\cdot\overrightarrow{O'A_k}),$$

или

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M'}=\overrightarrow{OM'}.$$

Из равенства $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}$ следует, что точки M и M' совпадают.

Найдем центр масс системы двух точек A_1 и A_2 с массами m_1 и m_2. По формуле (3) имеем:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{m_1\cdot\overrightarrow{OA_1}+m_2\cdot\overrightarrow{OA_2}}{m_1+m_2}, \text{ или } \overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA_1}+k\cdot\overrightarrow{OA_2}}{1+k},$$

где $k=\frac{m_2}{m_1}$. Полученное равенство в точности совпадает с равенством (2), поэтому центр масс системы двух точек A_1, A_2 с массами m_1, m_2 есть точка M, которая делит направленный отрезок $\overrightarrow{A_1A_2}$ в отношении $k=\frac{m_2}{m_1}$. Так как $\frac{m_2}{m_1}>0$, то центр масс системы двух точек A_1 и A_2 лежит на отрезке A_1A_2.

Задачи

338. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существуют числа x и y, такие, что $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$, причем хотя бы одно из чисел x и y не равно нулю.

339. Докажите, что если $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные векторы на плоскости, то существуют числа x, y и z, такие, что $x\vec{a}+$

$+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$, причем хотя бы одно из чисел x, y и z не равно нулю.

340. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Укажите пары неколлинеарных векторов: а) $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$; г) $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OA}$; д) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$; е) $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{CD}$.

341. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Докажите, что не коллинеарны векторы: а) $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$; б) $2\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}+5\vec{b}$; в) $\vec{a}$ и $a+2\vec{b}$; г) $\vec{a}+3\vec{b}$ и $-\vec{a}+2\vec{b}$.

342. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Найдите числа x и y, если: а) $4\vec{a}-\vec{b}=x\vec{a}+(3y-1)\vec{b}$; б) $(x+y-3)\vec{a}+(4x-y-7)\vec{b}=\vec{0}$; в) $x\vec{a}+y\vec{b}=(y-1)\vec{a}+(x+1)\vec{b}$.

343. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5 лежат на прямой AB, первые три делят отрезок AB на четыре равные части. Точка M_4 симметрична точке A относительно точки B, а точка M_5 симметрична точке B относительно точки A. Найдите отношения, в которых каждая из данных точек делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$.

344. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причем $BC:AD=k$. Точка M — середина стороны CD. Разложите векторы $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

345. Концы отрезка MN лежат соответственно на сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$, $BM:MC=m:n$, $CN:ND=p:q$. Точка T — середина отрезка MN. Разложите векторы $\overrightarrow{AT}$ и $\overrightarrow{CT}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

346. Точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении k. Докажите, что точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{BA}$ в отношении $\frac{1}{k}$.

347. В произвольном четырехугольнике $ABCD$ точки M и N являются серединами диагоналей AC и BD, а точки K и S — серединами сторон AB и CD. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам AM, BN и KS.

348. Точка M не совпадает с серединой C отрезка AB и делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении k. Найдите отношение, в котором точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$.

349. Точки M и N делят направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ в одном и том же отношении k. Докажите, что

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{AC}+\frac{k}{1+k}\overrightarrow{BD}.$$

350. Прямая MN параллельна стороне BC треугольника ABC, точки M и N лежат соответственно на прямых AB и AC.

Докажите, что точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в том же отношении, что и точка N — направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$.

351. Дан треугольник ABC. Точка A_1 делит направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$ в отношении k_1, а точка B_1 — направленный отрезок $\overrightarrow{CA}$ в отношении k_2. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M и прямая MC параллельна AB. Докажите, что $k_1k_2 = -1$.

352. Точки E и F — середины сторон AD и DC параллелограмма $ABCD$. Найдите отношение, в котором делит точка пересечения прямых: а) BE и AC направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$; б) AF и BE направленный отрезок $\overrightarrow{AF}$.

353. Найдите центр масс: а) системы двух точек, в которых сосредоточены равные массы; б) системы трех точек, не лежащих на одной прямой, в которых сосредоточены равные массы.

354. Точка B является центром масс системы двух точек A_1 и A_2 с массами m_1 и m_2. Докажите, что центр масс системы трех точек A_1, A_2, A_3 с массами m_1, m_2, m_3 совпадает с центром масс системы двух точек B и A_3 с массами m_1+m_2 и m_3.

355. Точка M является центром масс системы точек A_1, A_2, ..., A_n, в которых сосредоточены равные массы. Выразите вектор $\overrightarrow{OM}$ через векторы $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, ..., $\overrightarrow{OA_n}$, где O — произвольная точка плоскости.

§ 3. Применение векторов к доказательству теорем и решению задач

68. Радиус-вектор точки. Векторная алгебра может с успехом использоваться в геометрии при доказательстве теорем и решении задач. Прежде чем рассмотреть примеры, укажем способ, позволяющий задавать точки плоскости с помощью векторов.

Выберем некоторую точку O, которую будем в дальнейшем называть начальной точкой. Для произвольной точки M плоскости вектор $\overrightarrow{OM}$ назовем *радиус-вектором точки* M. Так, например, на рисунке 242 векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — радиус-векторы вершин треугольника ABC. Если выбрана начальная точка O, то каждая точка плоскости имеет радиус-вектор; радиус-вектор самой точки O есть нулевой вектор.

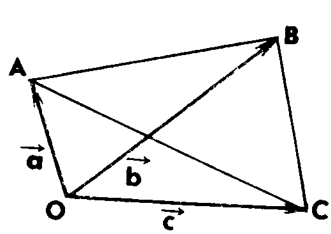


Рис. 242

Ясно, что точки A и B совпадают тогда и только тогда, когда их радиус-векторы относительно одной и той же начальной точки равны.

При доказательстве теорем и решении задач с помощью векторов будем пользоваться некоторыми равенствами, которые были выведены в § 1 и 2. Запишем их, используя радиус-векторы.

Пусть O — начальная точка, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — радиус-векторы точек A и B. Тогда равенство (1) из § 1 можно записать так:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}, \qquad (1)$$

т. е. *данный вектор равен разности радиус-векторов конца и начала этого вектора.*

Далее, равенство (2) из § 2 запишем так:

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+k\vec{b}}{1+k}. \qquad (2)$$

Здесь $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — радиус-векторы точек A и B, $\vec{m}$ — радиус-вектор точки M, которая делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении k. Если M — середина AB, то $k=1$, поэтому равенство (2) принимает вид:

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}. \qquad (3)$$

Таким образом,

радиус-вектор середины отрезка равен полусумме радиус-векторов концов отрезка.

Воспользуемся формулой (3) для решения следующей задачи:

Задача 1. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон произвольного четырехугольника, пересекаются в точке, которая является серединой каждого из этих отрезков, а также серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей этого четырехугольника.

Решение. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — данный четырехугольник, $B_1B_2B_3B_4$ — середины сторон A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1, а P и Q — середины диагоналей A_1A_3 и A_2A_4 (рис. 243). Возьмем произвольную точку O в качестве начальной точки и обозначим через $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$, $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$, $\vec{b}_4$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ радиус-векторы соответствующих точек (на рисунке 243 радиус-векторы точек не изображены).

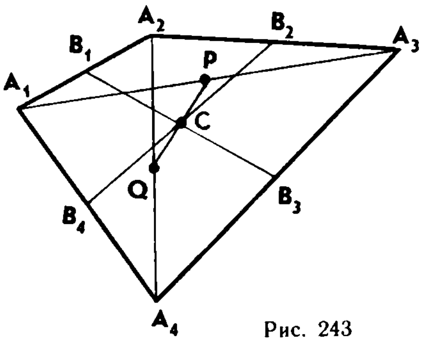


Рис. 243

Так как B_1 и B_3 — середины отрезков A_1A_2 и A_3A_4, то по формуле (3) имеем:

$$\vec{b}_1=\frac{1}{2}(\vec{a}_1+\vec{a}_2),\ \vec{b}_3=\frac{1}{2}(\vec{a}_3+\vec{a}_4).$$

По той же формуле находим радиус-вектор $\vec{c}$ середины C отрезка B_1B_3:

$$\vec{c}=\frac{\vec{b}_1+\vec{b}_3}{2}=\frac{1}{4}(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4).$$

Точно так же убеждаемся в том, что середина отрезка B_2B_4 имеет тот же радиус-вектор $\vec{c}$, поэтому точка C является также серединой отрезка B_2B_4.

Найдем теперь радиус-вектор середины отрезка PQ. По формуле (3) имеем:

$$\vec{p}=\frac{1}{2}(\vec{a}_1+\vec{a}_3),\ \vec{q}=\frac{1}{2}(\vec{a}_2+\vec{a}_4).$$

Следовательно, середина отрезка PQ имеет радиус-вектор

$$\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q})=\frac{1}{4}(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4)=\vec{c}.$$

Таким образом, точка C является также серединой отрезка PQ. Задача решена.

Отметим, наконец, что равенство (3) из § 2 позволяет найти радиус-вектор центра масс M системы точек A_1, A_2, ..., A_k, если даны радиус-векторы этих точек. Обозначим радиус-векторы точек A_1, A_2, ..., A_k, через $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$, а радиус-вектор точки M через $\vec{m}$. Тогда равенство (3) из § 2 запишется так:

$$\vec{m}=\frac{1}{G}(m_1\vec{a}_1+m_2\vec{a}_2+\ldots+m_k\vec{a}_k). \qquad (4)$$

69. Теорема о радиус-векторе точки, лежащей на прямой.

Теорема. ***Точка C с радиус-вектором $\vec{c}$ лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда существуют числа x и y, такие, что***

$$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b} \text{ и } x+y=1, \qquad (5)$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — радиус-векторы точек A и B.

Доказательство. Пусть точка C лежит на прямой AB. Докажем, что существуют числа x и y, удовлетворяющие равенствам (5). Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны, поэтому по лемме о коллинеарных векторах существует такое число k, что $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$. Пользуясь формулой (1), это равенство можно записать в виде $\vec{c}-\vec{a}=k(\vec{b}-\vec{a})$, откуда $\vec{c}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$. Таким образом, числа $x=1-k$ и $y=k$ удовлетворяют равенствам (5).

Обратно, предположим, что выполняются равенства (5), и докажем, что точка C лежит на прямой AB. Так как $x=1-y$,

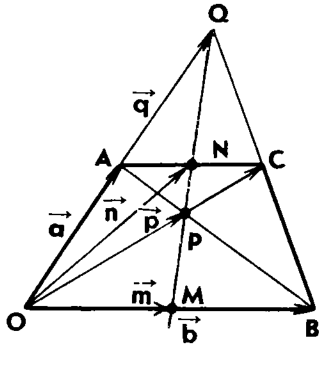


Рис. 244

то $\vec{c}=(1-y)\vec{a}+y\vec{b}$, откуда $\vec{c}-\vec{a}=$ $=y(\vec{b}-\vec{a})$, или $\overrightarrow{AC}=y\overrightarrow{AB}$. Из последнего равенства следует, что векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны, поэтому точка C лежит на прямой AB. Теорема доказана.

Рассмотрим задачу, при решении которой применяется доказанная теорема.

Задача 2. Доказать, что середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

Решение. Пусть $OACB$ — данная трапеция, M и N — середины ее оснований OB и AC, P — точка пересечения диагоналей, а Q — точка пересечения прямых OA и CB (рис. 244). Докажем, что точки M, N, P и Q лежат на одной прямой.

Примем O за начальную точку, обозначим радиус-векторы точек M, N, P, Q через $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ и выразим их через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. Точка M — середина отрезка OB, поэтому $\vec{m}=\frac{1}{2}\vec{b}$. Если $AC:OB=k$, то $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{OB}=k\vec{b}$. Отсюда следует, что $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+k\vec{b}$. По формуле (3) находим радиус-вектор точки N:

$$\vec{n}=\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}.$$

Итак,

$$\vec{m}=\frac{1}{2}\vec{b},\ \vec{n}=\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}. \qquad (6)$$

Векторы $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OC}$ коллинеарны, поэтому существует число t, такое, что $\overrightarrow{OP}=t\cdot\overrightarrow{OC}$, или $\vec{p}=t(\vec{a}+k\vec{b})$. Точка P лежит на прямой AB, следовательно, по доказанной в этом пункте теореме существуют числа x и y, сумма которых равна 1 и такие, что $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$. Сравнивая это равенство с предыдущим и учитывая единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам, получаем $x=t$, $y=tk$. Так как $x+y=1$, то $t=\frac{1}{1+k}$. Итак,

$$\vec{p}=\frac{1}{1+k}\vec{a}+\frac{k}{1+k}\vec{b}.$$

Аналогично, учитывая, что векторы $\vec{q}$ и $\vec{a}$ коллинеарны и точки Q, C, B лежат на одной прямой, нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что $\vec{q}=\frac{\vec{a}}{1-k}$. Воспользовавшись формулами (6), легко убедиться в том, что

$$\vec{p}=\frac{1}{1+k}\vec{n}+\frac{k}{1+k}\vec{m},\quad \vec{q}=\frac{1}{1-k}\vec{n}-\frac{k}{1-k}\vec{m}.$$

В каждом из этих выражений сумма коэффициентов при $\vec{n}$ и $\vec{m}$ равна 1, поэтому по предыдущей теореме точки P и Q лежат на прямой MN. Итак, все четыре точки M, N, P и Q лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

70. Применение векторов к доказательству свойств и признаков параллелограмма. Докажем некоторые известные вам утверждения, связанные с параллелограммом, используя векторы. Рассмотрим сначала два свойства параллелограмма.

1°. *В параллелограмме противоположные стороны равны.*

Рассмотрим параллелограмм $OADB$ и введем обозначения $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ (рис. 245). По определению параллелограмма $OA \parallel BD$, $OB \parallel AD$, поэтому векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{BD}$ коллинеарны, значит, существует число k_1, такое, что $\overrightarrow{BD}=k_1\vec{a}$. Аналогично существует число k_2, такое, что $\overrightarrow{AD}=k_2\vec{b}$.

Далее,

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+k_2\vec{b},\quad \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}=\vec{b}+k_1\vec{a},$$

откуда, учитывая единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам, получаем $k_1=1$ и $k_2=1$. Таким образом, $\overrightarrow{BD}=\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, поэтому $BD=OA$ и $OB=AD$, что и требовалось доказать.

2°. *Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.*

Рассмотрим параллелограмм $OADB$. Примем точку O за начальную точку и обозначим через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ радиус-векторы точек A и B (см. рис. 245). Пусть M и N — середины диагоналей AB и OD (на рисунке 245 точки M и N не изображены), а $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — их

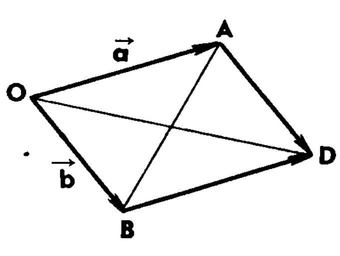


Рис. 245

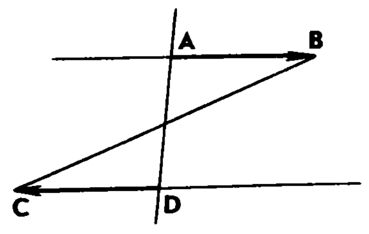


Рис. 246

радиус-векторы. Точки O и D имеют радиус-векторы $\vec{0}$ и $\vec{a}+\vec{b}$, поэтому по формуле (3) получаем:

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \vec{n}=\frac{\vec{0}+(\vec{a}+\vec{b})}{2}$$

и, значит, $\vec{m}=\vec{n}$. Отсюда следует, что точки M и N совпадают.

Итак, диагонали параллелограмма $OADB$ имеют общую середину.

Мы доказали два утверждения: а) диагонали параллелограмма пересекаются; б) диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Рассмотрим теперь два признака параллелограмма.

3°. *Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.*

Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AB=CD$ и $AB \parallel CD$. Докажем, что $ABCD$ — параллелограмм. С этой целью докажем, что $AD \parallel BC$. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$. Точки B и C лежат по одну сторону от прямой AD, так как в противном случае противоположные стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$ имели бы общую точку, что невозможно (рис. 246). Отсюда следует, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ сонаправлены, и по условию их длины равны, поэтому $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Поэтому согласно второй лемме из § 1 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, следовательно, $AD \parallel BC$. Итак, $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$, т. е. $ABCD$ — параллелограмм.

4°. *Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.*

Пусть в четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O, причем $AO=OC$ и $BO=OD$. Примем O за начальную точку и обозначим через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ радиус-векторы точек A и B: $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. Тогда $\overrightarrow{OC}=-\vec{a}$, $\overrightarrow{OD}=-\vec{b}$, поэтому $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{DC}=-\vec{a}-(-\vec{b})=\vec{b}-\vec{a}$. Следовательно, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Отсюда следует, что $AB=DC$ и $AB \parallel DC$. По признаку 3° $ABCD$ — параллелограмм.

71. Применение векторов к доказательству теорем о треугольниках. В главе I доказана теорема о средней линии треугольника. В главе II приведено другое доказательство теоремы. Рассмотрим еще одно доказательство — с помощью векторов.

Теорема. ***Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.***

Доказательство. Пусть MN — средняя линия треугольника ABC, M и N — середины сторон BA и BC. Докажем, что $MN \parallel AC$ и $MN=\frac{1}{2}AC$.

Выберем произвольную точку O в качестве начальной точки и обозначим через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{m}$ и $\vec{n}$ радиус-векторы точек A, B, C, M и N (рис. 247). По формулам (1) и (3) имеем:

$$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a},\ \overrightarrow{MN}=\vec{n}-\vec{m},$$

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \vec{n}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},$$

поэтому

$$\overrightarrow{MN}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a}).$$

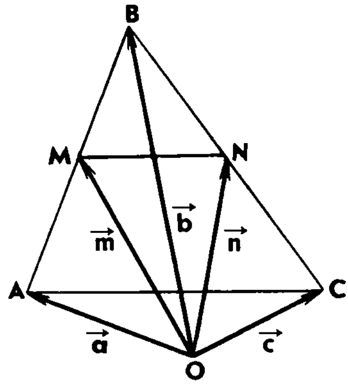


Рис. 247

Сопоставляя выражения для векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{MN}$, получаем $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Отсюда следует, что $MN \parallel AC$ и $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Теорема доказана.

В главе III была доказана теорема о биссектрисе треугольника. Докажем эту теорему с помощью векторов.

Теорема. ***Биссектриса треугольника, проведенная из данной вершины, делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.***

Доказательство. Пусть OAB — данный треугольник, а M — точка на стороне AB, такая, что $AM:MB=OA:OB$. Докажем, что отрезок OM — биссектриса треугольника OAB. Примем O за начальную точку и обозначим через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{m}$ радиус-векторы точек A, B и M, а через a и b длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $\frac{a}{b}$, поэтому по формуле (2)

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\frac{a}{b}\vec{b}}{1+\frac{a}{b}}=\frac{b\vec{a}+a\vec{b}}{a+b}.$$

Отсюда следует, что $\vec{m}=\frac{ab}{a+b}\left(\frac{\vec{a}}{a}+\frac{\vec{b}}{b}\right)$, следовательно, векторы $\vec{m}$ и $\frac{\vec{a}}{a}+\frac{\vec{b}}{b}$ коллинеарны. Согласно задаче из § 1 вектор $\frac{\vec{a}}{a}+\frac{\vec{b}}{b}$ направлен по биссектрисе угла O, значит, и вектор $\vec{m}=\overrightarrow{OM}$ направлен по биссектрисе этого угла. Итак, OM — биссектриса треугольника OAB. Теорема доказана.

Используя векторы, докажем теперь теорему о точке пересечения медиан треугольника. Напомним, что эту теорему мы уже доказали в главе II, используя теорему площадей, и в главе III как следствие из теоремы Чевы.

Теорема. ***Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.***

Доказательство. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы данного треугольника ABC. Выберем произвольную точку O в качестве начальной точки и обозначим через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}_1$ радиус-векторы точек A, B, C, A_1. Возьмем на медиане AA_1 точку M, которая делит ее в отношении 2 : 1, считая от вершины. Ясно, что точка M делит направленный отрезок AA_1 в отношении $k=2$. Обозначим через $\vec{m}$ радиус-вектор этой точки. По формуле (3) $\vec{a}_1=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$, а по формуле (2)

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+2\vec{a}_1}{3}.$$

Подставив сюда выражение для вектора $\vec{a}_1$, получим:

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

Возьмем теперь точки N и P на медианах BB_1 и CC_1, каждая из которых делит соответствующую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины, и обозначим через $\vec{n}$ и $\vec{p}$ их радиус-векторы. Аналогично предыдущему получаем:

$$\vec{n}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}, \quad \vec{p}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

Таким образом, $\vec{m}=\vec{n}=\vec{p}$, поэтому точки M, N и P совпадают. Теорема доказана.

Рассмотрим теорему о точке пересечения биссектрис треугольника. Она была доказана в главе III. Здесь мы дадим другое доказательство — с помощью векторов.

Теорема. ***Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит данную биссектрису в отношении $\frac{l_1+l_2}{l}$, считая от вершины. Здесь l — длина стороны треугольника, к которой проведена биссектриса, а l_1 и l_2 — длины двух других сторон.***

Доказательство. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — биссектрисы треугольника ABC, $AB=c$, $CA=b$, $BC=a$. Выберем произвольную точку O в качестве начальной точки и обозначим через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}_1$ радиус-векторы точек A, B, C, A_1. Возьмем на биссектрисе AA_1 точку M, которая делит направленный отрезок $\overrightarrow{AA_1}$ в отношении $\frac{b+c}{a}$, и обозначим через $\vec{m}$ радиус-вектор этой точки. Согласно второй теореме данного пункта точка A_1 делит направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$ в отношении $\frac{c}{b}$, поэтому по формуле (2) получаем:

$$\vec{a}_1=\frac{\vec{b}+\frac{c}{b}\vec{c}}{1+\frac{c}{b}}=\frac{b\vec{b}+c\vec{c}}{b+c}.$$

По формуле (2) находим:

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\frac{b+c}{a}\vec{a}_1}{1+\frac{b+c}{a}}=\frac{a\vec{a}+(b+c)\vec{a}_1}{a+b+c}.$$

Подставляя сюда выражение для вектора $\vec{a}_1$, получаем:

$$\vec{m}=\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}.$$

Возьмем теперь точки N и P на биссектрисах BB_1 и CC_1 так, чтобы точка N делила направленный отрезок $\overrightarrow{BB_1}$ в отношении $\frac{a+c}{b}$, а точка P — направленный отрезок $\overrightarrow{CC_1}$ в отношении $\frac{a+b}{c}$, и обозначим через $\vec{n}$ и $\vec{p}$ их радиус-векторы. Аналогично предыдущему получаем:

$$\vec{n}=\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}, \quad \vec{p}=\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}.$$

Таким образом, $\vec{m}=\vec{n}=\vec{p}$, поэтому точки M, N и P совпадают. Теорема доказана.

В главе III была доказана теорема Менелая на основе теории подобия. Дадим другую формулировку этой теоремы и докажем ее с помощью векторов.

Теорема. ***Три точки A_1, B_1 и C_1 лежат на прямых, содержащих стороны треугольника ABC, причем точка A_1 делит направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$ в отношении k_1, точка B_1 — направленный отрезок $\overrightarrow{CA}$ в отношении k_2, а точка C_1 — направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении k_3. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $k_1k_2k_3=-1$.***

Доказательство. Возьмем точку C за начальную точку и обозначим через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{c}_1$ радиус-векторы точек A, B, A_1, B_1, C_1 (рис. 248). Так как радиус-вектор точки C равен нулевому вектору, то по формуле (2) имеем:

$$\vec{a}_1=\frac{\vec{b}}{1+k_1}, \quad \vec{b}_1=\frac{k_2\vec{a}}{1+k_2}, \quad \vec{c}_1=\frac{\vec{a}+k_3\vec{b}}{1+k_3}.$$

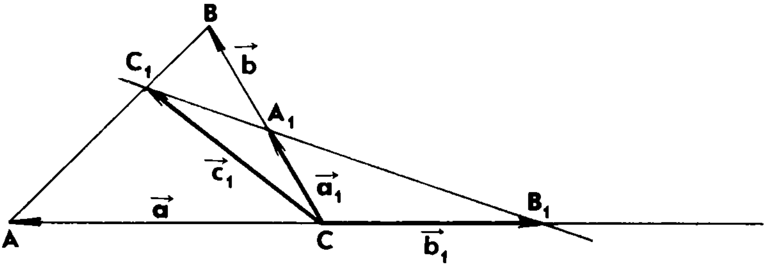


Рис. 248

Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Тогда по теореме о радиус-векторе точки, лежащей на прямой, существуют числа x и y, такие, что $x+y=1$ и $\vec{c}_1=x\vec{a}_1+y\vec{b}_1$, т. е.

$$\frac{\vec{a}+k_3\vec{b}}{1+k_3}=\frac{x\vec{b}}{1+k_1}+\frac{yk_2\vec{a}}{1+k_2}.$$

Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то коэффициенты при $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в левой части этого равенства равны соответствующим коэффициентам в правой части, т. е.

$$\frac{1}{1+k_3}=\frac{yk_2}{1+k_2},\quad \frac{k_3}{1+k_3}=\frac{x}{1+k_1}.$$

Из этих равенств находим x и y и подставляем в равенство $x+y=1$:

$$\frac{1+k_2}{(1+k_3)\,k_2}+\frac{(1+k_1)\,k_3}{1+k_3}=1.$$

Отсюда после несложных преобразований получаем

$$k_1k_2k_3=-1.$$

Докажем теперь обратное утверждение, т. е. предположим, что $k_1\cdot k_2\cdot k_3=-1$, и докажем, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой. Заметим, что $k_1k_2\neq 1$, так как в противном случае $k_3=-1$, что невозможно. Отсюда следует, что прямые A_1B_1 и AB не параллельны (см. задачу 3 из § 2), поэтому они пересекаются в некоторой точке C_1'. Пусть точка C_1' делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении k_3'. По доказанному $k_1k_2k_3'=-1$, а по условию $k_1k_2k_3=-1$, поэтому $k_3'=k_3$, т. е. точки C_1' и C совпадают. Мы доказали, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Теорема доказана.

Задачи

Радиус-вектор точки

356. Отрезок AB разделен на пять равных частей. Выбрав произвольно начальную точку O, выразите радиус-векторы точек деления через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$.

357. Точка P — середина медианы AM треугольника ABC. Выразите радиус-вектор точки P через радиус-векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вершин треугольника ABC.

358. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — радиус-векторы вершин A, B, C треугольника ABC. Докажите, что точка M с радиус-вектором $\vec{m}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ является точкой пересечения медиан треугольника ABC.

359. Точки M_1, M_2, ..., M_n являются серединами сторон произвольного n-угольника $A_1A_2\dots A_n$. Докажите, что

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\dots+\vec{a}_n=\vec{m}_1+\vec{m}_2+\dots+\vec{m}_n,$$

где $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$, $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$, ..., $\vec{m}_n$ — радиус-векторы точек A_1, A_2, .., A_n, M_1, M_2, ..., M_n.

360. Взаимно перпендикулярные хорды AB и CD окружности с центром O пересекаются в точке M. Докажите, что радиус-векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и $\vec{m}$ точек A, B, C, D и M удовлетворяют равенству

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=2\vec{m},$$

если O — начальная точка.

361. Докажите, что точки A, B и C с радиус-векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда существуют три числа x, y и z, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0} \text{ и } x+y+z=0.$$

362. Радиус-векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ точек A, B и C удовлетворяют равенству $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$, где не все числа x, y, z равны нулю, а $x+y+z=0$. Докажите, что если хотя бы одно из этих чисел равно нулю, то какие-нибудь две из точек A, B, C совпадают.

363. Радиус-векторы $\vec{m}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ точек M, A, B удовлетворяют равенству $\vec{m}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$, где t — какое-то число. Докажите, что: а) при любом t точка M лежит на прямой AB; б) для любой точки M прямой AB найдется такое значение t, при котором выполняется это равенство.

364. Даны четыре точки A, B, C и D с радиус-векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, и $\vec{d}$, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существуют отличные от нуля числа x, y, z и t, такие, что

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}+t\vec{d}=\vec{0} \text{ и } x+y+z+t=0.$$

365. Радиус-векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ четырех точек A, B, C, D удовлетворяют равенству

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}+t\vec{d}=\vec{0},$$

где x, y, z, t — числовые коэффициенты, причем $x+y+z+t=0$, $x+y\neq 0$. Докажите, что обе точки P и Q с радиус-векторами $\vec{p}=\frac{x\vec{a}+y\vec{b}}{x+y}$, $\vec{q}=\frac{z\vec{c}+t\vec{d}}{z+t}$ совпадают с общей точкой прямых AB и CD.

366. Точки M и N лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC, причем $\frac{AC}{AM}=p$, $\frac{BC}{BN}=q$. Точка P лежит на отрезке AN, и $\frac{AP}{AN}=\frac{q}{p+q-1}$. Докажите, что точки B, P и M лежат на одной прямой.

367. Точка M, лежащая на стороне AD параллелограмма $ABCD$, делит направленный отрезок $\overrightarrow{AD}$ в отношении k. Точка M лежит на прямой AC. Докажите, что точки B, M и N лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точка N делит направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ в отношении $\frac{k}{k+1}$.

368. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка M так, что $AD: AM=n$. Найдите отношение, в котором точка пересечения отрезков BM и AC делит направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$.

369. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка E делит направленный отрезок $\overrightarrow{AD}$ в отношении k_1, а точка F — направленный отрезок $\overrightarrow{DC}$ в отношении k_2. Отрезки BE и AF пересекаются в точке M. Найдите отношение, в котором точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{AF}$.

370. Докажите, что сумма радиус-векторов вершин треугольника равна нулю тогда и только тогда, когда начальная точка совпадает с точкой пересечения медиан треугольника.

371. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — радиус-векторы вершин A, B, C треугольника ABC и $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Докажите, что точка N с радиус-вектором $\vec{n}=\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}$ является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC.

Применение векторов к доказательству теорем и решению задач

372. Докажите, что середины боковых сторон и середины диагоналей трапеции лежат на одной прямой.

373. Дан четырехугольник $ABCD$, стороны AD и BC которого не параллельны. Точки M и N расположены соответственно на прямых BD и AC так, что $AM \parallel BC$, $BN \parallel AD$. Докажите, что отрезки MN и CD параллельны.

374. Докажите теорему, обратную теореме о свойстве биссектрисы треугольника: если в треугольнике ABC точка M делит отрезок AB в отношении $k=\frac{CA}{CB}$, то CM — биссектриса треугольника ABC.

375. Докажите теорему, выражающую свойство биссектрисы внешнего угла треугольника: если биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает прямую AB в точке D, то отрезки DA и DB пропорциональны сторонам AC и BC.

376. Докажите теорему, обратную теореме о средней линии треугольника: если отрезок с концами на двух сторонах треугольника параллелен третьей стороне и равен половине этой стороны, то данный отрезок — средняя линия треугольника.

377. Пользуясь теоремой Менелая, докажите предложение Паша: если прямая не проходит через вершины треугольника и пересекает одну из его сторон, то она пересекает одну из двух других сторон и не пересекает третью сторону.

378. На прямых BC, CA и AB лежат соответственно точки A_1, B_1 и C_1, которые не совпадают с вершинами треугольника ABC и делят направленные отрезки $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AB}$ в отношениях k_1, k_2 и k_3. Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то $k_1k_2k_3=1$. Обратно, если $k_1k_2k_3=1$ и две из прямых AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то третья прямая проходит через эту точку (теорема Чевы).

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава I

1. а) Нет (да); б) нет (нет). **2.** а) Нет; б) нет. **3.** Нет. **4.** Искомой точкой является та, которая принадлежит многоугольнику и наименее удалена от данной внутренней точки многоугольника. **5.** Указание. Сравнить углы C и D треугольника BCD. **6.** Указание. Пусть $ABCD$, где $AC \leqslant BD$ — данный четырехугольник, а AH_1 и CH_2 — перпендикуляры, проведенные к прямой BD. Доказать, что $AH_1 + CH_2 \leqslant AC$. **7.** б) Нет. **8.** Нет. **9.** Точка пересечения диагоналей четырехугольника. **10.** Наибольшая диагональ и две другие, имеющие с этой диагональю общие вершины. **11.** Указание. Воспользоваться неравенством треугольника. **13.** Указание. Воспользоваться задачей 11. **14.** Указание. Доказать, что если P_1 — периметр внешнего четырехугольника, p_1 — периметр внутреннего, то $p < p_1$, $p_1 \leqslant P_1$, $P_1 < 2P$. **16.** Четыре или пять. **18.** а) Нет; б) нет. **19.** Указание. Воспользоваться задачей 17. **20.** Нет. **21.** Нет. **22.** Указание. В $2n$-угольнике всего $(2n-3)n$ диагоналей. Выбрать произвольную сторону и показать, что через оставшиеся $2n-2$ вершины можно провести не более $n-2$ параллельных этой стороне диагоналей, откуда получить, что всего диагоналей, параллельных сторонам, будет не более $2n(n-2)$, а это число меньше числа всех диагоналей. **24.** Указание. Каждую вершину соединить диагоналями с двумя ближайшими несоседними с ней вершинами. **25.** Указание. См. указание к задаче 24. **26.** Нет. **28.** Нет. **31.** Указание. Воспользоваться задачей 30. **32.** Указание. Пусть $A_1 A_2 \ldots A_6$ — данный шестиугольник, O — его центр, M_1, M_2, ... — середины отрезков A_1A_2, A_2A_3, ... , а P — произвольная внутренняя точка. Если, например, точка P принадлежит треугольнику A_1OM_1, то доказать, что $PA_3 \geqslant 1$, $PA_4 \geqslant 1$ и $PA_5 \geqslant 1$. **33.** 1:2:3:4. **35.** Указание. Пусть $ABCDEF$ — данный шестиугольник. Учесть, что при пересечении прямых AB, CD и EF образуется правильный треугольник. **36.** Указание. Доказать методом от противного. **37.** Указание. См. указание к задаче 35. **38.** Указание. Пусть A, B, C и D — данные точки и треугольник ABC остроугольный. Прямые AB, BC и CA разбивают плоскость на семь областей, и точка D принадлежит одной из них. Доказать, что в каждом из семи случаев один из треугольников с вершиной D не является остроугольным. **40.** Нет. **41.** Указание. Доказать методом от противного. **42.** а) Нет; б) нет. **43.** Нет. **44.** Указание. Через произвольную точку провести прямые, параллельные диагоналям семиугольника, и рассмотреть получившиеся 28 углов. **45.** а) 360°; б) 180°; в) $180°(n-4)$. **46.** $n-2$. Указание. Учесть, что все диагонали, имеющие общую вершину, делят n-угольник на $n-2$ треугольника. **47.** Указание. Воспользоваться теоремой о сумме углов выпуклого четырехугольника. **48.** Да. **49.** Указание. Провести отрезки OM, ON и OP, где O — центр шестиугольника, а M, N и P — середины трех несмежных сторон.

50. Да. **51.** Указание. Доказать, что $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. **53.** Указание. Использовать свойство диагоналей параллелограмма. **55.** $\frac{p}{4}$. **56.** Указание. Построить сначала треугольник, одна из сторон которого равна удвоенной данной медиане, а две другие — данным сторонам. **57.** Указание. Пусть M — данная точка, а K — точка, симметричная вершине A данного угла относительно точки M. Через точку K провести прямые, параллельные сторонам угла. **58.** Указание. Сначала доказать, что ABM_2M_3 и CM_3M_1B — параллелограммы. **59.** Указание. Воспользоваться неравенством треугольника. **60.** Указание. Воспользоваться теоремой о средней линии треугольника. **61.** Указание. Воспользоваться свойством диагоналей параллелограмма. **62.** Указание. Провести диагонали, соединяющие каждую вершину многоугольника с двумя ближайшими вершинами, и воспользоваться теоремой о средней линии треугольника. **63.** Указание. Соединить последовательно вершины «звезды». **64.** Указание. а) Сначала доказать, что каждая из двух противоположных сторон нового восьмиугольника параллельна той диагонали исходного восьмиугольника, которая делит исходный восьмиугольник на два пятиугольника, и равна четвертой части этой диагонали; б) воспользоваться свойством диагоналей параллелограмма. **65.** Указание. Рассмотреть диагонали, отсекающие от исходного многоугольника пятиугольники. **66.** Указание. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, точки M, P, T, E — середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно, O — точка пересечения отрезков MT и PE, точка K — середина диагонали AC. Достаточно доказать, что точки O и K совпадают. **67.** Указание. Сначала доказать, что $AT \parallel CM$. **68.** Указание. Пусть $ABCD$ — искомый параллелограмм, а M и P — середины сторон BC и CD. Учесть, что середина K отрезка MP лежит на отрезке AC и $AK = 3 \cdot KC$. **69.** Параллелограмм вместе с внутренней областью. **71.** Указание. Пусть O — точка пересечения диагоналей данного четырехугольника. Методом от противного доказать, что точки A и C, а также точки B и D симметричны относительно точки O. **72.** Указание. Воспользоваться теоремой Вариньона и свойствами прямоугольника. **76.** 90°. Указание. Достроить прямоугольник до квадрата $AKPD$. **77.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle ABK = \triangle ADM$. **79.** Указание. Продолжить медиану BM на отрезок MH, равный BM, и доказать, что четырехугольник $ABCH$ — параллелограмм. Затем доказать равенство треугольников BDT и BCH. **80.** Указание. На продолжении стороны CD построить вне квадрата треугольник ADP, равный треугольнику ABK. Затем доказать, что треугольник AMP равнобедренный. **82.** Указание. Пусть дан квадрат $ABCD$ и точки M, P, T, K лежат на прямых AB, BC, CD и AD соответственно. Использовать перпендикуляр TH к прямой AB и перпендикуляр PE к прямой AD. **83.** Указание. Воспользоваться задачей 82. **84.** Указание. Взять на стороне BC точку K так, что $BK = AD$. **85.** Указание. Воспользовавшись признаком равенства треугольников, показать, что углы, примыкающие к неравным сторонам четырехугольника, равны. **88.** Указание. Воспользоваться теоремой Вариньона. **89.** Указание. Сначала доказать, что $ABCE$ и $BCDE$ — параллелограммы. **90.** $a - b$. **91.** Указание. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция, AD и BC — основания, причем $AD > BC$. а), б) Построить сначала треугольник ECD, где E — точка отрезка AD, такая, что $AB \parallel CE$; в) построить сначала треугольник ACF, где F — точка на прямой AD, такая, что $CF \parallel BD$. **92.** Указание. Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки M и T —

середины сторон AB и CD, $MT=\frac{AD+BC}{2}$. Провести диагональ AC, отметить ее середину и воспользоваться свойством средней линии треугольника. **94.** а) $\frac{a-b}{2}$; б) $\frac{a-b}{2}$. **95.** Указание. а) Разрезать шестиугольник по диагонали на две равные трапеции, а затем каждую из них — на четыре равные трапеции; б) разрезать шестиугольник на три равных параллелограмма, а затем каждый из них — на две равные трапеции. **96.** Прямая, две параллельные прямые, плоскость. **97.** Нет. **98.** *n*. **100.** Нет.

Глава II

101. См. рис. 249. **102.** См. рис. 250. **103.** См. рис. 251. **104.** См. рис. 252, *а* и *б*. **105.** См. рис. 253. **106.** См. рис. 254. **107.** Указание. а) Доказать, что точки A, B, C и D на рисунке 65 являются вершинами искомого квадрата ; б) см. рис. 255. **108.** Указание. Доказательство провести методом от противного. Пусть отрезок BD делит данный треугольник ABC на равные треугольники ABD и CBD. Сравнить углы ADB и CDB. **111.** Указание. Учесть, что $S_1+S_2+S_3+S_4=S_3+S_4+$ $+S_5=S_1+S_4+S_5+S_6=\frac{1}{2}S$, где S — площадь данного многоугольника. **112.** Указание. Воспользоваться задачей п. 18. **113.** Указание. Вос-

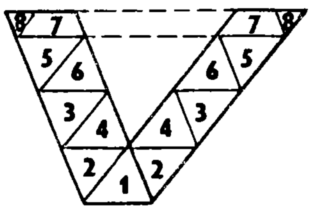


Рис. 249

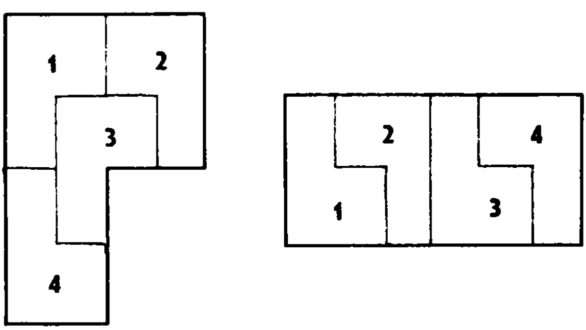


Рис. 250

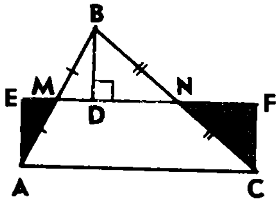


Рис. 251

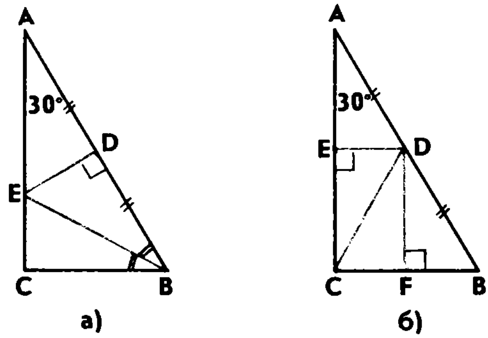


Рис. 252

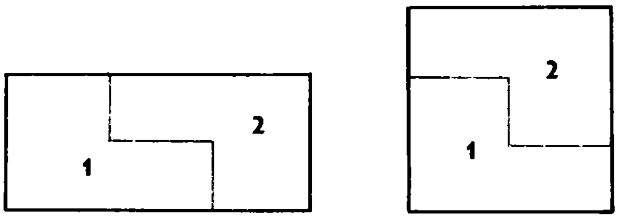
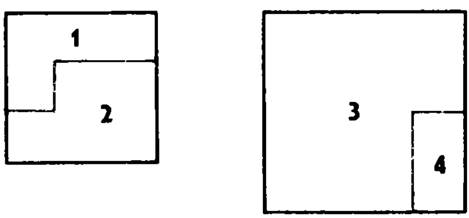


Рис. 253



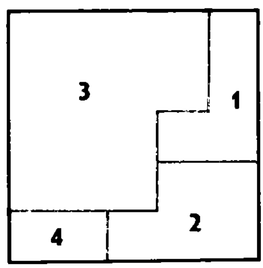


Рис. 254

пользоваться задачей п. 18. **114.** а) Нет. Указание. Воспользоваться тем, что высота треугольника меньше одной из сторон, имеющих с ней общую вершину; б) да. Указание. Рассмотреть равнобедренный треугольник с достаточно большим основанием и достаточно малой высотой, проведенной к нему; в) да. Указание. Рассмотреть равнобедренный треугольник, у которого основание больше 2 км. **115.** Указание. Воспользоваться тем, что высота треугольника не превосходит любой из сторон, между которыми она заключена. **117.** Указание. Воспользоваться тем, что медиана делит треугольник на две равновеликие части. **118.** $\frac{p^2}{8}$. **121.** Указание. Доказать, что $\frac{S_1}{S_4}=\frac{S_2}{S_3}$. **122.** $\frac{a}{2}$. Указание. Сна-

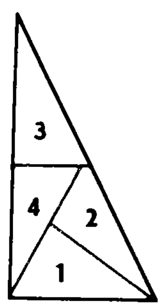


Рис. 255

чала доказать, что $S_{DCK}=S_{DCM}$. **123.** Указание. Воспользоваться первой теоремой п. 21. **124.** Указание. Воспользоваться первой теоремой п. 21. **125.** Указание. Воспользоваться первой теоремой п. 21. **126.** $\frac{1}{4}$. Указание. Воспользоваться первой теоремой п. 21. **127.** $\left(\frac{m}{n}\right)^3$. Указание. Воспользоваться тем, что $S_{AMP}=\frac{m}{n}S_{CMP}$, $S_{BKP}=\frac{n}{m}S_{CKP}$, $S_{CMP}=\frac{m}{n}S_{CKP}$. **128.** Указание. Доказать, что длина перпендикуляра, проведенного из точки M к прямой AD, равна полусумме длин перпендикуляров, проведенных к той же прямой из точек B и C. **129.** б) Два отрезка прямых, каждая из которых проходит через середину одной из диагоналей четырехугольника $ABCD$ параллельно другой его диагонали; в) точка M является точкой пересечения прямых, каждая из которых проходит через середину одной из диагоналей параллельно другой. **130.** Указание. Сначала доказать, что $S_{AOE}=S_{COE}$, и воспользоваться задачей 129, *а*. **136.** Указание. Воспользоваться параллелограммом $APDE$. **137.** Указание. Воспользоваться задачей 6 п. 22. **138.** а) $\frac{ab}{2}$; б) c^2. **139.** ab. **140.** $\frac{1}{2}|S_1-S_2|$ или $\frac{1}{2}|S_1+S_2|$. **142.** Указание. Сначала доказать, что $S_{ABD}=S_{EDC}$, $S_{BDK}=S_{CDK}$. **143.** $\frac{5}{12}S$. Указание. Сначала доказать, что $BO:OD=1:2$. **144.** $\frac{5}{24}$. **146.** б) $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$. **147.** m^2. **149.** Указание. Сначала доказать, что $S_{AA_1B}=S_{AA_1B_1}$ и $S_{AA_1C}=S_{AA_1C_1}$. **150.** $\frac{\sqrt{5}+5}{2}$. Указание. Показать, что каждая диагональ этого пятиугольника параллельна одной из его сторон. **151.** 1:20. Указание. Показать, что $AP=\frac{2}{5}AM$. **152.** $\frac{1}{6}$. **154.** а) $2\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$; б) $\frac{a^2+4ab+b^2}{2\sqrt{3}}$. **156.** $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$. **157.** $\frac{3a^2}{(\sqrt{3}+2)^2}$. **159.** Указание. Воспользоваться задачей 158. **160.** Указание. Достроить треугольник ABC до прямоугольника $ACBD$ и через точку O провести прямые, параллельные сторонам прямоугольника. **164.** $\frac{16\sqrt{15}}{5}$. **165.** $3\frac{1}{5}$ см. **166.** 8. Указание. Сначала доказать, что $S_{ABMN}=\frac{3}{4}S_{ABC}$. **167.** 72 см^2. Указание. Сначала найти площадь треугольника, стороны которого равны медианам данного треугольника. **168.** 24 см^2. Указание. Использовать четырехугольник, вершины которого совпадают с серединами сторон данной трапеции.

169. Указание. а) На лучах AM и A_1M_1 отметить точки D и D_1 так, что $AD=2AM$, $A_1D_1=2A_1M_1$, и доказать сначала, что треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ подобны; б) сначала доказать, что треугольники AHM и $A_1H_1M_1$ подобны; в) сначала доказать последовательно подобие треугольников AHD и $A_1H_1D_1$, ABH и $A_1B_1H_1$, ACH и $A_1C_1H_1$; г) воспользоваться задачей 169, а; д) воспользоваться тем, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. **170.** Указание. Воспользоваться вторым и первым признаками подобия треугольников. **171.** 90°. **172.** 30°, 60°, 90°. **173.** Указание. Сначала доказать, что треугольники ABO и DCO подобны. **174.** Указание. Сначала доказать, что $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$, $\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$. **175.** Указание. Сначала доказать, что треугольники ACH и BCP подобны. **176.** Указание. Воспользоваться подобием треугольников KBH и ABH, MBH и CBH. **177.** Тупоугольный. Указание. Сначала доказать, что треугольник со сторонами a, b, c и высотами h_a, h_b, h_c подобен треугольнику со сторонами $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$. **178.** Указание. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Сначала доказать, что треугольники ABC, AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1 подобны друг другу. **180.** Указание. Пусть E — точка пересечения прямых MP и OB, F — точка пересечения прямых MQ и OA. Сначала доказать, что $EF \parallel RS$, а затем, что $\triangle MPF \backsim \triangle EPO$ и $\triangle MPO \backsim \triangle EPF$. **181.** Указание. Воспользоваться подобием треугольников APM и CKT. **182.** Указание. Воспользоваться подобием треугольников AMB и APD. **183.** Указание. Пусть диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, AD и BC — основания трапеции. Воспользоваться подобием прямоугольных треугольников AOD и BOC и теоремой Пифагора. **184.** Указание. На продолжении стороны CA отложить отрезок $AD=AB$ и доказать, что треугольники ABC и BCD подобны. **185.** Указание. Сначала доказать, что на стороне AB можно взять точку D так, что $\angle ACD=90°-\frac{\alpha}{2}$, а затем воспользоваться подобием треугольников ABC и CBD. **186.** $\sqrt{S_1S_2}$. Указание. Воспользоваться тем, что коэффициент подобия исходного и отсекаемого треугольников равен $\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$. **187.** $2\sqrt{S_1S_2}$. Указание. Воспользоваться тем, что каждый из полученных треугольников подобен исходному треугольнику. **188.** $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$. Указание. Воспользоваться задачей 187. **189.** $\frac{ab}{a+2b}$. Указание. Сначала доказать, что отрезок MP параллелен основаниям трапеции. **190.** $m:2n$. **191.** 1:5. **192.** Указание. Воспользоваться тем, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника, и затем применить обобщенную теорему Фалеса. **193.** Указание. Через точку P провести прямые, параллельные сторонам угла C и пересекающие стороны угла в точках K и M. Пусть $PK=c$. Используя подобие треугольников, доказать, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. **194.** $\frac{2(k+1)}{k^2+3k}$. Указание. Для нахождения отношений $AO:OK$ и

$BO:OH$ можно применить теорему о пропорциональных отрезках в треугольнике. **195.** $\frac{k^2}{2(k+1)}$. **196.** $\frac{9}{70}$. **197.** Указание. Пусть каждый из отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 делит периметр треугольника ABC пополам. Сначала доказать, что $AB_1=BA_1$, $BC_1=CB_1$, $CA_1=AC_1$, а затем применить теорему Чевы. **198.** Указание. Пусть луч CT пересекает сторону AB в точке C_1, а луч CO пересекает сторону AB в точке C_2. Используя теорему Чевы, доказать, что точки C_1 и C_2 делят отрезок AB в одном и том же отношении и, следовательно, совпадают. **199.** Указание. Воспользоваться теоремой Менелая. **200.** Указание. Рассмотреть два случая — точка K лежит между: 1) точками A и T; 2) точками T и D. Сначала доказать, что отрезки AM и MC пропорциональны отрезкам KP и PC. **201.** Указание. Дважды используя теорему Менелая, доказать, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и через точку пересечения продолжений боковых сторон, проходит через середины оснований. **204.** Указание. Сначала доказать, что треугольники AHP и CBP подобны. **205.** б) Нет. Указание. а), в) Воспользоваться задачей 2 из п. 36. **207.** Указание. Воспользоваться подобием треугольников MAB и MND, PCN и AND. **209.** $\frac{39}{4}\sqrt{15}$. Указание. Воспользоваться задачей 208, а затем доказать, что боковые стороны трапеции равны 8 и 12. **210.** Указание. Пусть в треугольнике ABC $\angle A:\angle B:\angle C=1:2:4$. Провести биссектрисы BD и CE и воспользоваться тем, что треугольники ABC, BDC и ACE подобны друг другу. **211.** Указание. Сначала построить какой-нибудь треугольник AB_1C_1, подобный искомому треугольнику ABC. **212.** Указание. См. указание к задаче 211. **213.** Указание. Сначала построить какой-нибудь треугольник, подобный искомому. **214.** Указание. См. указание к задаче 211. **216.** Указание. Сначала построить трапецию $AB_1C_1D_1$, у которой угол A такой же, как в искомой трапеции, и $AB_1:B_1C_1:AD_1=1:1:2$. **217.** Указание. Построить трапецию, одно из оснований которой — данный отрезок, а другое лежит на данной прямой. а) Воспользоваться задачей 201; б) провести прямые через точку пересечения продолжений боковых сторон трапеции и точки, в которых отрезки, соединяющие середину одного основания трапеции с вершинами другого, пересекают диагонали трапеции. **218.** Указание. Воспользоваться задачей 206. **219.** Указание. Сначала построить ромб, диагонали которого равны M_1N_1 и M_2N_2. **220.** Указание. Пусть COD данный угол. Построить отрезок CE так, чтобы: а) $CM=ME$; б) $CM:ME=P_1Q_1:P_2Q_2$. Затем через точку E провести прямую, параллельную прямой OC.

Глава IV

221. а) 2α; б) $90°-\frac{\alpha}{2}$. **222.** $S=\frac{a^2+a(d-b)}{a-b}\sqrt{bd}$. **223.** Указание. Пусть DOE — секущая, проходящая через центр O окружности и пересекающая стороны AB и BC данного треугольника ABC в точках D и E. Найти отношение $S_{BDE}:S_{ADEC}$. **224.** Указание. Воспользоваться теоремой Чевы. **225.** Равнобедренный или прямоугольный. **226.** Указание. Пусть AC пересекает PD в точке E. Докажите, что $\triangle CDE \sim \triangle BDP$ и $\triangle ACD \sim \triangle PBO$. **228.** Указание. Использовать метод доказательства от противного. **229.** Указание. Воспользоваться результатами п. 43 и учесть, что $O_1O_2=r_2$. **231.** Указание. Воспользоваться тем, что радиус, перпендикулярный к хорде, делит ее пополам. **232.** Указание. Воспользоваться указанием к задаче 231. **233.** Прямоугольник или равнобедренная трапеция. **235.** Указание. Провести общую внутреннюю касательную. **236.** Указание. Доказать, что линия центров перпендикулярна к AB и CD. **237.** Указание. Пусть M — данная точка, O — центр данной окружности, R — ее радиус. Построить сначала треугольник MON, у которого $MN=R$, $ON=2R$. **238.** Указание. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей. Построить сначала прямоугольный треугольник с гипотенузой O_1O_2, один катет которого равен половине данного отрезка. **239.** Указание. Построить сначала окружность, касающуюся внешней окружности изнутри, радиус которой в четыре раза меньше радиуса внешней окружности. Задача имеет решение, когда радиус внутренней окружности не меньше половины радиуса внешней. **240.** Указание. Пусть A и B — данные точки. Вписать в данную окружность трапецию с боковой стороной AB, средняя линия которой равна половине данного отрезка. **241.** Указание. Сначала построить точку, для которой проведенная из нее касательная перпендикулярна к данному диаметру и равна ему. **242.** Указание. На данной окружности построить дугу AB данной величины, затем построить окружность, концентрическую с данной и касающуюся хорды AB. **243.** $\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$, $\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$, $\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$. **244.** Указание. Провести диаметр BC и рассмотреть подобные треугольники ADB и BAC. **246.** Указание. а) Воспользоваться теоремой о площадях треугольников, имеющих по равному углу; б) воспользоваться задачей а). **247.** Указание. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC и прямая AD пересекает описанную около него окружность в точке M. Доказать, что треугольники ABM и ADC подобны. **249.** $\frac{180°-\alpha-\beta}{2}$, $\frac{180°+\alpha+\beta}{2}$, $\frac{180°-\alpha+\beta}{2}$, $\frac{180°+\alpha-\beta}{2}$. **250.** Указание. Используя свойство угла, вершина которого расположена внутри круга, доказать, что $\angle APB=\angle AOB$. **252.** а) Дуга AOB окружности с диаметром MO без точек A и B, расположенная внутри угла AMB, где A и B — точки пересечения этой окружности с данной; б) окружность с диаметром MO; в) окружность с диаметром MO без точки M. **253.** Указание. Пусть CD — диаметр, перпендикулярный к диаметру AB данной окружности. Искомое множество точек состоит из двух окружностей, построенных на отрезках OC и OD как на диаметрах. **254.** $\frac{4S}{a}$. Указание. Воспользоваться тем, что $\angle ABC=\angle ABD=90°$. **255.** Указание. Доказать, что $\angle DAB=\angle DBA$. **256.** Указание. Рассмотреть четырехугольники $ABCM$ и $ABDP$ и воспользоваться свойством вписанного четырехугольника. **257.** Указание. Воспользоваться теоремой об угле между пересекающимися хордами. **259.** Указание. Заметив, что точки B_1 и H лежат на окружности с диаметром AB, доказать, что $\angle ABC=\angle C_1B_1H$. Аналогично можно доказать, что $\angle ACB=\angle B_1C_1H$. **260.** $\angle BAM=146°$, $\angle BCM=107°$. Указание. Сначала доказать, что точка M лежит на окружности с центром A радиуса AB. **261.** Указание. Сначала доказать, что точки C и K лежат на окружности с диаметром PE и $\angle PCK=60°$. Аналогично доказать, что $\angle CBK=60°$. **262.** Указание. Сначала доказать, что основания перпендикуляров лежат на окружности с диаметром OM, а точки пересечения данных диаметров с этой окружностью, отличные от точки O, делят ее на n дуг, каждая из которых равна $\frac{360°}{n}$. **263.** $\frac{ab}{c}$. Указание. Сначала доказать, что точки A, P, M и E лежат на окружности с диаметром AM. **264.** Указание. Сначала доказать, что точки P и C лежат на окружности с диаметром AB, поэтому $\angle APC = \angle ABC$, т. е. величина угла APC постоянна. **265.** $\angle A = 60°$, $\angle B = 15°$, $\angle C = 105°$ или $\angle A = 60°$, $\angle B = 105°$, $\angle C = 15°$. **266.** Пусть O — центр вписанной окружности. Доказать, что точки O, K, P и C лежат на одной окружности, а затем выразить углы KCP и BPC через углы треугольника ABC. **267.** Пусть окружности, описанные около треугольников AB_1C_1 и BA_1C_1 пересекаются в точке D. Показать, что суммы углов ABC, BCA, CAD, A_1DB_1, A_1DC_1 и B_1DC_1 равна 540°, а суммы углов CAB и B_1DC_1, ABC и A_1DC_1 составляют по 180°; получить, что сумма углов BCA и A_1DB_1 равна 180°, тем самым доказать, что окружность, описанная около треугольника A_1CB_1, проходит через точку D. **268.** Указание. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ прямые AB и CD пересекаются в точке P, AD и BC — в точке E. Доказать, что окружности, описанные около треугольников BCP и CDE, имеют, кроме точки C, еще одну общую точку K, затем доказать, что и остальные окружности проходят через точку K, т. е. что около четырехугольника $ADPK$ можно описать окружность. $\angle DKP = \angle DKC + \angle CKP = \angle DEC + \angle ABE$; $\angle DKP + \angle DAP = 180°$. Аналогично можно доказать, что окружность, описанная около треугольника ABE, проходит через точку K. **269.** Указание. Пусть для определенности точка B лежит между E и C. Рассмотреть углы DAE и EDA. **270.** Указание. Пусть точка E принадлежит лучу BA, причем точка A лежит между точками B и E. Доказать, что углы DAE, APD и ABC равны. **271.** Указание. Пусть прямая AD — касательная в точке A к первой окружности. Доказать, что углы DAP, AMP и ABC равны между собой. **272.** Указание. Пусть A — данная точка окружности, BC — ее хорда, AD — расстояние от точки A до BC, BE и CP — перпендикуляры к касательной EP в точке A. Воспользоваться подобием треугольников ABD и CAP, ADC и BEA, и показать, что $\frac{AD}{CP} = \frac{BE}{AD}$. **273.** $\sqrt{2}$. Указание. Пусть K — середина основания AC, P и M — точки деления боковой стороны AB, причем $AP = 1$, $AM = 2$, и пусть $AD = CE = x$. К секущим AM и AE применить теорему о квадрате касательной. **274.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle ABC \sim \triangle DBA$, а затем воспользоваться теоремой о квадрате касательной. **275.** а) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$. Указание. а) Пусть AB — сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса R с центром в точке O. В треугольнике AOB провести биссектрису AC и доказать подобие треугольников ABC и OAB. Затем, показав, что отрезки AB, AC и OC равны, к треугольнику AOB применить теорему о свойстве биссектрисы треугольника. б) Воспользоваться результатом а); в) Воспользовавшись результатом б), вписать сначала в данную окружность правильный десятиугольник. **276.** Либо пустое множество, либо центр данной окружности, либо окружность, концентрическая данной. **277.** Либо радикальная ось, либо, если окружности пересекаются, радикальная ось без общей хорды, либо радикальная ось без одной точки. **278.** Указание. Сравнить степени точек A и B относительно окружности, проходящей через точки C, C_1 и C_2. **279.** Центр окружности — радикальный центр трех данных окружностей. **280.** Линия центров данных окружностей — прямая, содержащая среднюю линию данного треугольника. **281.** Указание. Воспользоваться идеей решения задачи 280. **282.** Прямая. **283.** Прямая, окружность, точка или пустое множество. **284.** Окружность, точка или пустое множество. **285.** Окружность, точка или пустое множество. **286.** Указание. Воспользоваться формулами, полученными в п. 53. **287.** Указание. Построить окружность, проходящую через A и B, пересекающую данную окружность под прямым углом. **288.** Указание. Штурманы кораблей должны чаще вычерчивать на карте соответствующую окружность Аполлония и держать курс на ту точку этой окружности, которая находится в море и наиболее удалена от преследуемого корабля. **289.** Указание. Штурманам следует построить на карте две окружности Аполлония. **290.** Указание. Построить две окружности, одна из которых — окружность Аполлония, а другая проходит через точки, соответствующие начальному положению кораблей и точку пересечения их начальных курсов. Одна из точек пересечения этих окружностей — искомая. **291.** Указание. Воспользоваться той же идеей, что и при построении треугольника Рело. **292.** Число n должно быть нечетным. **293.** Указание. Воспользоваться той же идеей, что и при построении треугольника Рело с «заглаженными» углами. **294.** Указание. Использовать факты, установленные в ходе решения задачи 3, п. 53. **295.** Указание. Радиус первой дуги можно взять произвольным. **296.** Указание. Воспользоваться формулой Эйлера. **297.** Указание. Воспользоваться задачами 246, *б* и 296. **299.** Для точки, диаметрально противоположной точке C. **300.** Указание. Воспользоваться идеей доказательства теоремы о прямой Симпсона. **301.** Указание. Воспользоваться теоремой о вписанных углах. **302.** Указание. Воспользоваться задачей 301. **303.** Указание. Воспользоваться задачей 302. **304.** Указание. Воспользоваться задачей 301. **305.** Указание. Воспользоваться идеей решения задачи 304. **306.** Указание. Выразить угол между указанными биссектрисами через два противоположных угла четырехугольника. **307.** Указание. Воспользоваться задачей 306. **308.** Указание. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, OA_1, OB_1 и OC_1 — перпендикуляры к прямым BC, AC и AB соответственно. К четырехугольникам AC_1OB_1, BA_1OC_1, CA_1OB_1 применить теорему Птолемея. **309.** p. Указание. Применить к четырехугольникам $ACDE$, $CEAB$ и $ACEF$, вписанным в данную окружность, теорему Птолемея. **310.** Указание. К четырехугольнику $ABCD$ применить теорему Птолемея, затем учесть, что $CD=DB\geqslant\frac{1}{2}BC$. **311.** Указание. а) К четырехугольнику $ABCP$ применить теорему Птолемея и учесть, что диагональ квадрата со стороной a равна $a\sqrt{2}$; б) применить задачу а); в) применить задачи а) и б). **312.** Указание. К четырехугольнику $APQR$ применить теорему Птолемея. **313.** Указание. Пусть O_1 — центр вписанной окружности, A_1 — точка пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC с описанной окружностью. а) Применить к четырехугольнику ABA_1C теорему Птолемея; б) воспользоваться формулой Эйлера и задачей а); в) рассмотреть треугольники A_1CD и AEO_1, где D — середина BC, E — точка касания вписанной окружности и стороны AB, и воспользоваться замечанием п. 57; г) воспользоваться задачами а) и б) и учесть, что радиус вписанной окружности в три раза меньше одной из высот треугольника. **314.** Указание. Центр окружности есть середина отрезка с концами в центре описанной окружности и точке пересечения высот, а радиус вдвое меньше радиуса описанной окружности. **315.** Указание. Воспользоваться теоремой Чевы. **316.** Rr. **318.** Четыре. Указание. Воспользоваться результатом задачи 317.

322. Указание. Доказать, что $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PK}$. **323.** Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые, то: а) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; б) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$. **324.** Да. **326.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=2\vec{a}$. **327.** $\overrightarrow{OD}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$. **329.** Точка O — середина отрезка AB. **330.** Указание. Воспользоваться теоремой о серединном перпендикуляре к отрезку (см. учебник, п. 72). **331.** Указание. Воспользоваться утверждением: если точки M и M_1 симметричны относительно середины отрезка AB, то $\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$. **332.** Указание. Сначала доказать, что $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{DD_1}$. **336.** Указание. Воспользоваться задачей п. 64. **337.** а) $k\neq 1$, $k\neq -1$ и $\vec{b}=\frac{k-1}{k+1}\vec{a}$; б) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$. **339.** Указание. Воспользоваться задачей 338 и теоремой о разложении вектора но двум неколлинеарным векторам. **340.** а), в) и д). **341.** Указание. Доказать методом от противного, воспользовавшись задачей 338 и леммой о неколлинеарных векторах. **342.** а) $x=4$, $y=0$; б) $x=2$, $y=1$; в) x — произвольное число, $y=x+1$. **343.** $k_1=\frac{1}{3}$, $k_2=1$, $k_3=3$, $k_4=-2$, $k_5=-\frac{1}{2}$. **344.** $\overrightarrow{CD}=-\vec{a}+(1-k)\vec{b}$; $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}(k+1)\vec{b}$; $\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{k+1}{2}\vec{b}$. **345.** $\overrightarrow{AT}=\frac{p+2q}{2(p+q)}\vec{a}+\frac{n+2m}{2(n+m)}\vec{b}$; $\overrightarrow{CT}=-\frac{p}{2(p+q)}\vec{a}-\frac{n}{2(m+n)}\vec{b}$. **347.** Указание. Доказать, что $\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}$. **348.** $\frac{2k}{1-k}$. **349.** Указание. Воспользоваться задачей 2 п. 66. **350.** Указание. Воспользоваться формулой (1) и теоремой о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам. **352.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{3}$. **353.** а) Середина отрезка, в концах которого сосредоточены массы; б) точка пересечения медиан треугольника,в вершинах которого сосредоточены массы. **355.** $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n})$. **356.** $\frac{1}{5}(4\vec{a}+\vec{b})$, $\frac{1}{5}(3\vec{a}+2\vec{b})$, $\frac{1}{5}(2\vec{a}+3\vec{b})$, $\frac{1}{5}(\vec{a}+4\vec{b})$. **357.** $\frac{1}{4}(2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$. **359.** Указание. Воспользоваться формулой (3). **360.** Указание. Пусть $\vec{p}$ и $\vec{q}$ — радиус-векторы середин хорд. Сначала доказать, что $\vec{m}=\vec{p}+\vec{q}$. **361.** Указание. Воспользоваться теоремой о радиус-векторе точки, лежащей на прямой. **363.** Указание. См. указание к задаче 361. **364.** Указание. Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не коллинеарны, то использовать точку пересечения прямых AB и CD. В противном случае воспользоваться равенством $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}$. **365.** Указание. См. указание к задаче 361. **366.** Указание. См. указание к задаче 361. **367.** Указание. См. указание к задаче 361. **368.** $\frac{1}{n}$. Указание. Воспользоваться задачей 367. **369.** $\frac{k_1(k_2+1)}{k_1k_2+k_2+1}$. **370.** Указание. Воспользоваться задачей 358. **371.** Указание. Доказать, что точка N лежит на биссектрисе каждого из углов треугольника ABC. Для этого воспользоваться задачей из § 1. **372.** Указание. См. указание к задаче 361. **373.** Указание. Пусть

$ABCD$ — данный четырехугольник, $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Пользуясь задачей 363, выразить вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, а затем вектор $\overrightarrow{DC}$ через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и доказать, что $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{DC}$ коллинеарны. **374.** Указание. Пусть CC_1 — биссектриса треугольника ABC. Пользуясь теоремой о биссектрисе треугольника (п. 71), доказать, что точки M и C_1 совпадают. **375.** Указание. Доказать по аналогии с доказательством теоремы о биссектрисе треугольника. Воспользоваться задачей 336. **377.** Указание. Воспользоваться утверждением: точка лежит на направленном отрезке тогда и только тогда, когда отношение, в котором точка делит данный направленный отрезок, есть положительное число. **378.** Указание. Пусть M — точка пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1, а $\overrightarrow{MA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{MC}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Выразить радиус-векторы точек A_1, B_1 и C_1 через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и воспользоваться теоремой о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам. Обратное утверждение доказать по аналогии с доказательством теоремы Менелая.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Атанасян Левон Сергеевич
Бутузов Валентин Федорович
Кадомцев Сергей Борисович
Шестаков Сергей Алексеевич
Юдина Ирина Игоревна

ГЕОМЕТРИЯ

дополнительные главы к школьному учебнику 8 класса

Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Туркестанская*
Младший редактор *Н. В. Сидельковская*
Художники *Н. Беляева, В. Сайчук*
Художественный редактор *Е. Р. Дашук*
Технический редактор *С. Н. Терехова*
Корректор *О. Н. Леонова*

ИБ № 16556

Сдано в набор 05.05.96. Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93 — 953000. Изд. лиц. № 010001 от 10.10.91. Подписано к печати 03.09.96. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура Литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 13+0,25 форзац. Усл. кр.-отт. 27. Уч.-изд. л. 12,63+0,45 форзац. Тираж 30 000 экз. Заказ 127.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Комитета Российской Федерации по печати. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Комитета Российской Федерации по печати. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

В учебно-методический комплект входит:

Геометрия. Учебник для 7—9 классов средней школы/ Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.— М.: Просвещение (1990—1996 гг).

Геометрия. Дополнительные главы к школьному учебнику 8 класса: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики/ Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.— М.: Просвещение, 1996.

Зив Б. Г. Мейлер В. М. Дидактические материалы по геометрии для 8 класса.— М.: Просвещение, 1996.

В 1997 году выходит:

Геометрия. Дополнительные главы к школьному учебнику 9 класса: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики/ Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.