Элементарная алгебра

Виды выражений

Одночлен (моном) — произведение переменных и коэффициентов; *многочлен (полином)* — сумма одночленов.

Двучлен (бином) — многочлен из двух одночленов; *трёхчлен (трином)* — многочлен из трёх одночленов.

Многочлен P от одной переменной x можно представить так:

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$$

Малая теорема Безу

Для многочлена $P =: P(x)$ справедливо:

$$P(x) = f(x)\,(x - r) + P(r)$$

Это следует из деления многочлена с остатком. Значит,

$$(x - r) \mid P(x) \iff P(r) = 0.$$

Свойства неравенств

Отношение сравнения *транзитивно*; неравенства можно *складывать (не вычитать)*, а также *перемножать* и возводить в натуральную степень k *(без смены знака)*:

$$\begin{cases} a < b \\ c \le d \end{cases} \implies \begin{cases} a + c < b + d \\ ac < bd \\ a^k < b^k \end{cases}$$

При умножении на отрицательное число знак неравенства *инвертируется*:

$$a < b \iff am > bm, \quad m \in \mathbb{R}^-$$

Неравенство Коши

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^+$. Тогда верно *(О.Л. Коши)*:

$$\frac{a + b}{2} \ge \sqrt{ab}$$

Доказательство.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff a+b \geq 2\sqrt{ab} \iff a-2\sqrt{ab}+b \geq 0 \iff$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \blacksquare$$

Неравенство Бернулли

Пусть $n \geq 2,\ x > 0$. Тогда верно *(Я. Бернулли)*:

$$(1+x)^n > 1+nx$$

Доказательство. Проверим базис индукции $n = 2$:

$$(1+x)^2 > 1+2x \iff 1+2x+x^2 > 1+2x \ \square$$

Проверим индукционный шаг $n+1$. Пусть утверждение верно для некоторого $n > 2$, тогда:

$$(1+x)^n > 1+nx \iff (1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x) \iff$$
$$(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x+nx^2 \iff (1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x \blacksquare$$

Свойства функций

Функция f *возрастает*, когда

$$\forall x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Максимумом функции f называется такая точка x_0, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists U_\varepsilon(x_0) : \forall x \in U\ f(x) < f(x_0).$$

Функция f *убывает*, когда

$$\forall x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

Минимумом функции f называется такая точка x_0, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists U_\varepsilon(x_0) : \forall x \in U\ f(x) > f(x_0).$$

Функция f *чётна*, когда

$$\forall x \in D_f \implies f(-x) = f(x).$$

Функция f *нечётна*, когда

$$\forall x \in D_f \implies f(-x) = -f(x).$$

Функция f *периодична*, когда

$$\forall x \in D_f\ \exists T \neq 0 : f(x) = f(x \pm T),$$

где T — **период** функции; наименьший положительный период называется *основным*.

Функция модуля

Абсолютная величина *(модуль)* — чётная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, которая задаётся формулой:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Она *дистрибутивна* относительно умножения, отчасти — относительно сложения: $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Степенная функция

Возведение в чётную степень — чётная функция; график — *парабола*:

$$f\colon \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto x^n} \mathbb{R}_0^+,\ n \in \mathbb{N}$$

Обратная функция к $f\,|_{\mathbb{R}_0^+}$ — **арифметический корень**:

$$f^{-1}\colon \mathbb{R}_0^+ \xrightarrow{x \mapsto \sqrt[n]{x}} \mathbb{R}_0^+$$

Возведение в нечётную степень — нечётная функция; график — *кубическая парабола*:

$$g\colon \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto x^n} \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

Обратная функция к g — **арифметический корень**:

$$g^{-1}\colon \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto \sqrt[n]{x}} \mathbb{R}$$

Функция знака

Функция знака *(сигнум-функция)* — нечётная функция $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1; 0; 1\}$, которая определяет знак аргумента:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Условия выпуклости функции

Функция f *выпукла* **вверх** на отрезке $[a;b]$, когда для отрезка g с концами в точках $\langle a;f(a)\rangle$, $\langle b;f(b)\rangle$ справедливо:

$$\forall x \in [a;b]\ f(x) \geq g(x)$$

Функция f *выпукла* **вниз** на отрезке $[a;b]$, когда для отрезка g с концами в точках $\langle a;f(a)\rangle$, $\langle b;f(b)\rangle$ справедливо:

$$\forall x \in [a;b]\ f(x) \leq g(x)$$

Функция f выпукла вверх $\iff$ функция $-f$ выпукла вниз.

Функция f выпукла вверх на $[a;b]$, если для $a \leq x \leq b$ верно:

$$\operatorname{tg}\alpha_{bx} \leq \operatorname{tg}\alpha_{ab} \leq \operatorname{tg}\alpha_{ax} \qquad \operatorname{tg}\alpha_{mn} := \operatorname{tg}(\overrightarrow{oX};\overrightarrow{mn})$$

Функция натурального логарифма

Функция натурального логарифма — значение интеграла:

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}, \quad \ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

Свойства:

$$\ln ax = \ln a + \ln x$$
$$\ln x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\ln x$$

Логарифмическая функция

Логарифмическая функция по основанию a — отношение:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad \log_a\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad a \neq 1$$

Свойства:

$$\log_a a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}$$
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad c \neq 1$$
$$\log_a a^x = x$$
$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad a, b \neq 1$$

Элементарная теория чисел

Делимость

Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$. Тогда a — **делитель** b, когда

$$ax = b,\ x \in \mathbb{Z} \iff a \mid b \iff |a| \leq |b|$$

Отношение делимости *транзитивно*, такое выражение можно *перемножить* с другим:

$$\times \begin{cases} a \mid b \\ c \mid d \end{cases} \implies ac \mid bd$$

Общий делитель чисел делит их *линейную комбинацию*:

$$a \mid b, c \implies a \mid bx + cy, \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

Заметим, что $a = bx + cy$*, когда $(b, c) \mid a$.

Доказательство. Пусть $d := (b, c)$, тогда:

$$d \mid b, c \implies d \mid (bx + cy) \implies d \mid a \ \blacksquare$$

Коэффициенты Безу (x, y) *неуникальны* и легко выражаются *(доказывается подстановкой в соотношение)*:

$$(x + mk, y - ak),\ k \in \mathbb{Z}$$

---

* Такое уравнение называют *соотношением Безу*, а x и y — *коэффициентами Безу (Э. Безу)*.

Наибольший общий делитель

*Наибольший общий делитель** для $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — такое $gcd(\{a_k\})$, что

$$\exists d\colon d \mid gcd(\{a_k\}) \mid \{a_k\}.$$

Упрощённая запись $gcd(\{a_k\}) = (\{a_k\})$.

Этот бинарный оператор *коммутативен*, *ассоциативен* и *дистрибутивен*.

Наименьшее общее кратное

*Наименьшее общее кратное*** для $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — такое $lcm(\{a_k\})$, что

$$\exists m\colon \{a_k\} \mid lcm(\{a_k\}) \mid m.$$

Упрощённая запись $lcm(\{a_k\}) = [\{a_k\}]$.

Этот бинарный оператор *коммутативен* и *ассоциативен*, однако *не дистрибутивен*.

Двойственность

НОД и НОК *двойственны* друг другу:

$$(a,b)\cdot[a,b] = ab$$

Доказательство. Пусть $m := [a,b]$, тогда:

$$a,b \mid m \iff ab \mid am, bm \iff ab \mid (am, bm) \iff ab \mid (a,b)m$$

Так как $(a,b) \mid [a,b] \mid ab$, то $ab/(a,b) \mid [a,b]$.

Значит, $ab/(a,b) \le [a,b]$. Но $[a,b]$ — *наименьшее* общее кратное a,b. Следовательно, $ab/(a,b) \not\le [a,b]$, поэтому:

$$ab/(a,b) = [a,b] \iff ab = (a,b)\cdot[a,b] \blacksquare$$

---

* Сокращённо *НОД*, или *Greatest Common Divisor* (*GCD*).
** Сокращённо *НОК*, или *Least Common Multiple* (*LCM*).

Модульная арифметика

Конгруэнтность

Два целых числа **конгруэнтны** *(сравнимы)* по модулю m, когда их разность кратна m *(К.Ф. Гаусс)*:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid (a-b) \iff a = b + mk,\ k \in \mathbb{Z}$$

Отношение конгруэнтности *транзитивно*, поэтому числа образуют *систему остаточных классов* $\mathbf{Z}_m$ по модулю m. Например, $\mathbf{Z}_3$:

$$\{\dots, -6, -3, \mathbf{0}, 3, 6, \dots\} \text{ класс } r_0$$
$$\{\dots, -5, -2, \mathbf{1}, 4, 7, \dots\} \text{ класс } r_1$$
$$\{\dots, -4, -1, \mathbf{2}, 5, 8, \dots\} \text{ класс } r_2$$

Свойства сравнения

Конгруэнтные числа можно *складывать*, *перемножать* и передавать *многочлену* $f \in \mathbb{Z}[x]$:

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \implies \begin{cases} a + c \equiv b + d & \pmod{m} \\ ac \equiv bd & \pmod{m} \\ f(a) \equiv f(b) & \pmod{m} \end{cases}$$

Конгруэнтные числа можно *умножать (делить)* на одно число с *увеличением (сокращением)* модуля:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff ad \equiv bd \pmod{md}$$
$$ad \equiv bd \pmod{m} \iff a \equiv b \left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{(m,d)}\right)$$

Из транзитивности делимости следует:

$$a \equiv b \pmod{m},\ n \mid m \implies a \equiv b \pmod{n}$$

Признаки делимости

Для вывода признаков делимости лучше использовать *десятичное представление* числа $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$:

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} 10^i$$

— При модуле $m = 2^k; 5^k; 10^k$ одночлены $a_{n-i}10^i \equiv a_{n-i}0 = 0$ $(i \geq k)$. Значит, число $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ кратно m, когда последние k цифры кратны m:

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv 0 \iff \overline{a_{n-k+1} \dots a_{n-1} a_n} \equiv 0$$

— При модуле $m = 3; 9$ одночлены $a_{n-i}10^i \equiv a_{n-i}1^i = a_{n-i}$. Значит, число $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ кратно m, когда сумма цифр кратна m:

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv 0 \iff a_1 + a_2 + \dots + a_n \equiv 0$$

— При модуле $m = 11$ одночлены $a_{n-i}10^i \equiv a_{n-i}(-1)^i$. Значит, число $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ кратно 11, когда знакочередующаяся сумма цифр кратна 11:

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv 0 \iff a_1 - a_2 + \dots - a_n \equiv 0$$

— При модуле $m = 7$ вычтем из числа n последнюю цифру; останется $\lfloor n/10 \rfloor$. Последняя цифра равна $n - 10\lfloor n/10 \rfloor$. Вычтем из числа удвоенную последнюю цифру:

$$\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor - 2\left(n - 10\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor\right) \equiv 0 \iff 21\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor - 2n \equiv 0$$

Одночлен $21\lfloor n/10 \rfloor \equiv 0$. Значит, число $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ кратно 7, когда удвоенная разность последней цифры числа и самого числа без этой цифры кратна 7:

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv 0 \iff \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} - 2a_n \equiv 0$$

Функция Эйлера

Функция $\phi(m)$ считает количество положительных целых чисел, меньших m и взаимно простых с ним *(для малых и простых m целесообразно перебрать вручную)*:

$$\phi(m) = m \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

p — простой делитель m;
$1/p$ — часть чисел, кратных p;
$1 - 1/p$ — часть чисел, взаимно простых с p.

Функция Эйлера *мультипликативна (только для взаимно простых натуральных чисел)*.

Теорема Эйлера

Теорема. Пусть $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$. Тогда верно *(Л. Эйлер)*:

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}, \quad a \not\equiv 0 \pmod{m}$$

Доказательство. Введём систему остаточных классов $\mathbf{Z}_m$. В ней есть m классов: $r_0, r_1, \dots, r_{m-1}$.

Пусть множество Φ содержит в себе $\phi(m)$ остатков, взаимно простых с m. Домножим каждый элемент на a и образуем новое множество Φ_a. Заметим, что:

Элементы Φ_a из разных классов.

Допустим, это не так. Тогда:

$$ar_k \equiv ar_l \implies r_k \equiv r_l$$

Но $r_k \not\equiv r_l \implies ar_k \not\equiv ar_l$ □

Φ и Φ_a конгруэнтны.

Пусть $ar_k \equiv r_l$, $r_l \in \mathbf{Z}_m$.

Так как $m \nmid ar_k$, то:

$$r_l \in \Phi \implies \Phi \equiv \Phi_a$$ □

Перемножим элементы множеств Φ и Φ_a:

$$r_0 r_1 \dots r_{\phi(m)} \equiv a r_0 a r_1 \dots a r_{\phi(m)} \implies$$

$$r_0 r_1 \dots r_{\phi(m)} \equiv a^{\phi(m)} r_0 r_1 \dots r_{\phi(m)} \implies a^{\phi(m)} \equiv 1$$ ■

Следствие. Пусть $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $(m, a) = 1$. Тогда:

$$a^b \equiv a^{b \bmod \phi(m)} \pmod{m}, \quad a \not\equiv 0 \pmod{m}$$

Доказательство. Представим b в арифметическом виде:

$$b = \phi(m) \left\lfloor \frac{b}{\phi(m)} \right\rfloor + b \bmod \phi(m)$$

$\phi(m)$ — модуль деления.
$\lfloor b/\phi(m) \rfloor$ — целое частное.
$b \bmod \phi(m)$ — остаток.

Подставим полученное выражение:

$$a^{\phi(m)\lfloor b/\phi(m) \rfloor + b \bmod \phi(m)} = (a^{\phi(m)})^{\lfloor b/\phi(m) \rfloor} a^{b \bmod \phi(m)}$$

Так как $a^{\phi(m)} \equiv 1$, получается $a^b \equiv a^{b \bmod \phi(m)}$. ■

Алгоритм Евклида

Пусть $a, b \in \mathbb{N}^0$ $(a > b)$, тогда:

$$(a, b) = (a \bmod b, b)$$

Доказательство. Допустим, $m \mid (a - b), b$:

$$+ \begin{cases} a - b \equiv 0 & (\bmod m) \\ b \equiv 0 & (\bmod m) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a \equiv 0 & (\bmod m) \\ b \equiv 0 & (\bmod m) \end{cases}$$

Получаем, что любой общий делитель m у $a - b$, b есть у a, b. Следовательно, $(a, b) = (a - b, b)$.

При повторе вычитания получится остаток от деления на b:

$$(a, b) = (a \bmod b, b) \ \blacksquare$$

Мультипликативная инверсия

Пусть $ab \equiv 1 \pmod m$ — линейное сравнение, где b — **мультипликативная инверсия** числа a по модулю m:

$$b \equiv a^{-1} \equiv \frac{1}{a} \pmod m, \quad (a, m) = 1$$

«Дробные» числа можно *складывать*, *перемножать* и *сокращать* как рациональные:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} \equiv \dfrac{ad + bc}{cd} & (\bmod m) \\ \dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} \equiv \dfrac{ac}{bd} & (\bmod m) \\ \dfrac{eg}{fg} \equiv \dfrac{e}{f} & (\bmod m) \end{cases}$$

Линейное сравнение

Линейное сравнение вида $ax \equiv b \pmod m$ разрешимо относительно x, когда $(m, a) \mid b$. *(по соотношению Безу)*

План решения:

— упростить линейное сравнение;
— рассчитать (m, a) по алгоритму Евклида;
— выразить (m, a) через полученные остатки;
— домножить соотношение Безу на b.

Пример. Решить линейное сравнение: $4x \equiv 4 \pmod 6$.

Упростим сравнение:

$$4x \equiv 4 \pmod 6 \mid \cdot 1/2$$
$$2x \equiv 2 \pmod 3$$

Применим *алгоритм Евклида* в алгебраическом виде:

«Прямой» алгоритм:

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$
$$2 = \mathbf{1} \cdot 2 + 0$$

«Обратный» алгоритм:

$$1 = 3 \cdot \mathbf{1} + 2 \cdot (-\mathbf{1}) \mid \cdot 2$$
$$2 = 3 \cdot \mathbf{2} + 2 \cdot (-\mathbf{2})$$

Итак, коэффициенты Безу найдены: $x = -2,\ y = 2$.

Ответ: $x = -2$.

Китайская теорема об остатках

Сравнения можно объединять в *систему*:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ \dots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

Она разрешима относительно x по модулю $[m_1, \dots, m_n]$, когда разрешима каждая пара сравнений, в частности $(m_1, m_2) \mid a_1 - a_2$.

Доказательство. Рассмотрим пару сравнений из системы:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = a_1 + m_1 j, & j \in \mathbb{Z} \\ x = a_2 - m_2 k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff$$

$$m_1 j + m_2 k = a_2 - a_1$$

Данное соотношение Безу имеет целые коэффициенты j, k, когда $(m_1, m_2) \mid (a_1 - a_2)$. □

По индукции, система будет разрешима относительно x, когда будет разрешима каждая пара сравнений.

Допустим, $x \equiv y \equiv a_i \pmod{m_i}$, $i \in \{i\}_{i=1}^{n}$ — решение всей системы. Значит, $m_i \mid x - y \implies [m_1, \dots, m_n] \mid x - y \iff x \equiv y \pmod{[m_1, \dots, m_n]}$. ■

План решения каждой пары сравнений:

— упростить линейные сравнения;
— преобразовать их в соотношения Безу, приравнять их;
— решить полученное выражение как линейное сравнение.

Пример. Решить систему сравнений:

$$\begin{cases} x \equiv 2 & (\mathrm{mod}\ 3) \\ x \equiv 2 & (\mathrm{mod}\ 4) \\ 2x \equiv -3 & (\mathrm{mod}\ 5) \end{cases}$$

Упростим последнее сравнение:

$$2x \equiv -3\ \ (\mathrm{mod}\ 5) \iff x \equiv 1\ \ (\mathrm{mod}\ 5)$$

Преобразуем первую пару сравнений в соотношения Безу:

$$\begin{cases} x \equiv 2\ \ (\mathrm{mod}\ 3) \\ x \equiv 2\ \ (\mathrm{mod}\ 4) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 + 3j, & j \in \mathbb{Z} \\ x = 2 + 4k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Приравняем их и решим как сравнение:

$$2 + 3j = 2 + 4k \iff 2 \equiv 2 + k\ \ (\mathrm{mod}\ 3) \iff k \equiv 0\ \ (\mathrm{mod}\ 3)$$

Значит, $x = 2 + 4k \equiv 2\ \ (\mathrm{mod}\ 12)$ — решение первой пары.

Аналогично решив следующую *(и последнюю)* пару, получим решение всей системы: $x \equiv 26\ \ (\mathrm{mod}\ 60)$.

Ответ: $x \equiv 26\ \ (\mathrm{mod}\ 60)$.

Сравнение по составному модулю

Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$. Тогда для $m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ разрешимо

$$f(x) \equiv 0\ \ (\mathrm{mod}\ m)\,,$$

если разрешимы $f(x) \equiv 0\ \ \left(\mathrm{mod}\ p_i^{\alpha_i}\right)$, $i \in [1;r] \cap \mathbb{Z}$.

Доказательство $\Longrightarrow$**.** Пусть $x \in \mathbb{Z}$ — решение

$$f(x) \equiv 0\ \ (\mathrm{mod}\ m)\,,\ p_i^{\alpha_i} \mid m \implies f(x) \equiv 0\ \ \left(\mathrm{mod}\ p_i^{\alpha_i}\right). \blacksquare$$

Доказательство $\Longleftarrow$**.** Пусть x_i — решение

$$f(x_i) \equiv 0\ \ \left(\mathrm{mod}\ p_i^{\alpha_i}\right)$$

По китайской теореме об остатках:

$$\forall i_1, i_2 \in [1;r],\ i_1 \neq i_2\ (p_{i1}^{\alpha_{i1}}, p_{i2}^{\alpha_{i2}}) = 1 \implies$$

$$\exists x\colon x \equiv x_i \pmod{p_i^{\alpha_i}} \implies f(x) \equiv 0 \pmod{[p_1^{\alpha_1}, \dots, p_r^{\alpha_r}]} \implies$$
$$f(x) \equiv 0 \pmod{m} \ \blacksquare$$

Сравнение по степени простого модуля

Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$. Тогда для простого p разрешимо

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha},$$

если разрешимы $f(x) \equiv 0 \pmod{p^i}$, $i \in [1; \alpha] \cap \mathbb{Z}$.

Доказательство. Аналогично прошлому пункту.

Лемма Гензеля

Пусть для $f \in \mathbb{Z}[x]$ верно *(К. Гензель)*:

$$f(a) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}, \quad f'(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$$

Тогда существует такое уникальное t, что:

$$f(a + tp^\alpha) \equiv 0 \pmod{p^{\alpha+1}}$$

Доказательство. Пусть a — решение $f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$, которое можно представить в виде $x = a + tp^\alpha$.

По теореме Тейлора:

$$f(a + tp^\alpha) = f(a) + tp^\alpha f'(a) + t^2 p^{2\alpha} f''(a)/2! + \dots$$
$$+ t^n p^{n\alpha} f^{(n)}(a)/n! \equiv f(a) + tp^\alpha f'(a) \pmod{p^{\alpha+1}} \ \blacksquare$$

Следствие. Пусть для $f \in \mathbb{Z}[x]$ верно

$$f(x_\alpha) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}, \quad f'(x_\alpha) \not\equiv 0 \pmod{p^\alpha}.$$

Тогда решение сравнения по модулю $p^{\alpha+1}$ имеет вид:

$$x_{\alpha+1} \equiv x_\alpha - \frac{f(x_\alpha)}{f'(x_\alpha)} \pmod{p^{\alpha+1}}$$

Доказательство. По лемме Гензеля:

$$f(x_\alpha) + tp^\alpha f'(x_\alpha) \equiv 0 \pmod{p^{\alpha+1}} \iff$$
$$tp^\alpha \equiv -\frac{f(x_\alpha)}{f'(x_\alpha)} \pmod{p^{\alpha+1}} \iff$$
$$x_\alpha + tp^\alpha \equiv x_{\alpha+1} \equiv x_\alpha - \frac{f(x_\alpha)}{f'(x_\alpha)} \pmod{p^{\alpha+1}} \ \blacksquare$$

Тригонометрия

Основные функции

Единичной называется окружность, которая задаётся уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

Тригонометрические функции соотносят *координаты* точки единичной окружности и *градусную меру дуги*, образуемой ей с начальным радиусом.

Синус — нечётная функция с периодом 2π; график — *синусоида*:

$$\sin\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha \mapsto y} [-1;1]$$

Обратная нечётная функция к $\sin|_{[-\pi/2;\pi/2]}$ — **арксинус**:

$$\sin^{-1} = \arcsin\colon [-1;1] \xrightarrow{\alpha \mapsto y} [-\pi/2;\pi/2]$$

Косинус — чётная функция с периодом 2π; график — *синусоида* со смещением влево на $\pi/2$ *(«косинусоида»)*:

$$\cos\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha \mapsto x} [-1;1]$$

Обратная функция к $\cos|_{[0;\pi]}$ — **арккосинус**:

$$\cos^{-1} = \arccos\colon [-1;1] \xrightarrow{\alpha \mapsto x} [0;\pi]$$

Тангенс — нечётная функция с периодом π; график — *тангенсоида*:

$$\operatorname{tg}\colon \mathbb{R}\setminus\{\pi/2 + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} \xrightarrow{\alpha \mapsto y/x} \mathbb{R}$$

Обратная нечётная функция к $\operatorname{tg}|_{(-\pi/2;\pi/2)}$ — **арктангенс**:

$$\operatorname{tg}^{-1} = \operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \xrightarrow{y/x \mapsto \alpha} (-\pi/2;\pi/2)$$

Котангенс — нечётная функция с периодом π; график — *тангенсоида* с симметрией относительно оси Ox и смещением вправо на $\pi/2$ *(«котангенсоида»)*:

$$\operatorname{ctg}\colon \mathbb{R}\setminus\{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} \xrightarrow{\alpha \mapsto x/y} \mathbb{R}$$

Обратная функция к $\operatorname{ctg}|_{(0;\pi)}$ — **арккотангенс**:

$$\operatorname{ctg}^{-1} = \operatorname{arcctg}\colon \mathbb{R} \xrightarrow{x/y \mapsto \alpha} (0;\pi)$$

Основные тождества

Из определений тригонометрических функций следует:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \arccos x=\arcsin(\sqrt{1-x^2})$$
$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=1/\cos^2\alpha \qquad \arccos x=\operatorname{arctg}(\sqrt{1-x^2}/x)$$
$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=1/\sin^2\alpha \qquad \arcsin y=\operatorname{arcctg}(\sqrt{1-y^2}/y)$$

Сумма и разность двух углов

Из скалярного произведения векторов следует:

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\mp1}{\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta}$$

Доказательство. Пусть $\vec{A}=\langle\cos\alpha;\sin\alpha\rangle$, $\vec{B}=\langle\cos\beta;\sin\beta\rangle$.

Рассмотрим их скалярное произведение:

$$+\begin{cases}\vec{A}\cdot\vec{B}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\ \vec{A}\cdot\vec{B}=\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta)\end{cases}\Longrightarrow$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\ \square$$

Затем полезно применить эти четыре формулы:

$$\alpha+\beta=\alpha-(-\beta)$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\cos((\pi/2-\alpha)+\beta)$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\sin\alpha/\cos\alpha \qquad \operatorname{ctg}\alpha=\cos\alpha/\sin\alpha\ \blacksquare$$

Двойной угол

Из формул суммы и разности двух углов следует:

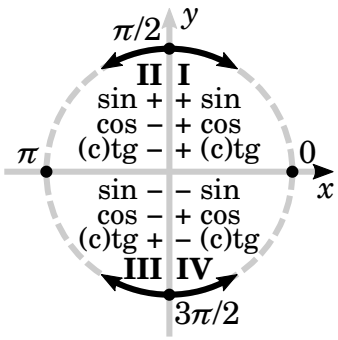
$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \qquad \sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$
$$(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm\sin2\alpha$$

Формулы приведения

Из формул суммы и разности двух углов следуют *формулы приведения*, которые имеют вид:

$$f(\pi n/2 \pm \alpha) = \pm cof(\alpha),\ n \in \mathbb{Z}$$

Конечная функция и её знак определяются по графику; стрелками обозначены места смены функции на *кофункцию*.



Следствие. Для обратных функций верно:

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2 \qquad \arccos x + \arccos(-x) = \pi$$
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2 \qquad \operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg}(-x) = \pi$$

Формулы понижения степени

Из формул двойного угла и основного тригонометрического тождества следует:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha + 1}{2} \qquad \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha+1}$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha+1}$$

Из них легко выводятся формулы *половинного угла*.

Сумма и разность двух функций

Из формул суммы и разности двух углов следует:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = c\sin(\alpha+\phi) = c\cos(\alpha-\phi),\ c = \sqrt{a^2+b^2}$$

Из них можно вывести формулы *произведения двух функций*.

Доказательство. Рассмотрим сумму синусов:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=$$
$$\sin x\cos y+\sin y\cos x+\sin x\cos y-\sin y\cos x=2\sin x\cos y$$

Введём обозначения:

$$\begin{cases}x+y=\alpha\\x-y=\beta\end{cases}\iff\begin{cases}2x=\alpha+\beta\\2y=\alpha-\beta\end{cases}\iff\begin{cases}x=\frac{\alpha+\beta}{2}\\y=\frac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$$

Таким образом,

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.\ \square$$

Похожие формулы доказываются аналогично. □

Рассмотрим синус суммы двух углов:

$$c\sin(\alpha+\phi)=c\sin\alpha\cos\phi+c\sin\phi\cos\alpha$$

Обозначим $a=c\cos\phi$, $b=c\sin\phi$ и найдём сумму квадратов:

$$a^2+b^2=c^2(\sin^2\phi+\cos^2\phi)=c^2\iff c=\sqrt{(a^2+b^2)}\ \square$$

Случай с косинусом доказывается аналогично. ■

Подстановка Вейерштрасса

Тригонометрические функции от α можно выразить через тангенс от $\alpha/2$ *(К. Вейерштрасс)*:

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\qquad\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

Доказательство. Распишем каждую функцию:

$$\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\ \square$$

$$\cos\alpha=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\ ■$$

Общая алгебра

Соответствие

Соответствие *(бинарное отношение)* между множествами X и Y — произвольное множество $\rho \subseteq X \times Y$.

Упрощённая запись $x \in X,\ y \in Y,\ \langle x,y\rangle \in \rho =: x\rho y$.

$X \supseteq D_\rho$ — область определения *(прообраз)* соответствия;
$Y \supseteq E_\rho$ — область значений *(образ)* соответствия.

Соответствие ρ *инъективно*, когда

$$\forall x_1,x_2 \in D_\rho\ \exists y \in E_\rho : x_1\rho y,\ x_2\rho y \iff x_1 = x_2.$$

Соответствие ρ *функционально*, когда

$$\forall x \in D_\rho\ \exists! y \in E_\rho : x\rho y.$$

Такое соответствие называется **отображением** *(функцией)* и обозначается:

$$\rho : X \xrightarrow{x\mapsto y} Y$$

Соответствие ρ *сюръективно*, когда

$$\forall y \in Y\ \exists x \in D_\rho : x \mapsto y.$$

Соответствие ρ *всюду определено*, когда

$$\forall x \in X\ \exists y \in E_\rho : x \mapsto y.$$

Свойства соответствий

Пусть $* \subseteq X \times X$, $\circ \subseteq X \times X$ — произвольные соответствия.

Соответствие $*$ *ассоциативно*, когда

$$\forall x,y,z \in X \implies (x * y) * z = x * (y * z).$$

Соответствие $*$ *коммутативно*, когда

$$\forall x,y \in X \implies x * y = y * x.$$

Соответствие $*$ *дистрибутивно* относительно $\circ$, когда

$$\forall x,y,z \in X \implies \begin{cases} x * (y \circ z) = x * y \circ x * z \\ (y \circ z) * x = y * x \circ z * x \end{cases}.$$

Композиция отображений

Для отображений $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ существует $h : X \to Z$, которое называется их **композицией**.

Упрощённая запись $\forall x \in X\ h(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.

Композиция *ассоциативна*, однако *не коммутативна*.

Ограничение и продолжение

Ограничением отображения $f : X \to Y$ на $S \subseteq D_f$ называется такое $f|_S : S \to Y$, что

$$\forall s \in S : f|_S(s) = f(s).$$

В свою очередь, f является *продолжением* отображения $f|_S$.

Метрическое пространство

Метрическое пространство — алгебраическая структура $\langle M;\ d \rangle$, где d — метрика.

Метрика d множества M — функция $d : M \times M \to R_0^+$, которая определяет *расстояние* между его двумя элементами.

Например, *евклидова метрика* использует теорему Пифагора в n-мерном пространстве:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

Для метрического пространства $\langle M;\ d \rangle$, $x, y, z \in M$ выполняются следующие *аксиомы*:

— $d(x,y) = 0 \iff x = y$ — *тождество*;
— $d(x,y) = d(y,x)$ — *симметрия*;
— $d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z)$ — *«неравенство треугольника»*.

Алгебраическая операция

Отображение $* : X^n \to X$ называется n-местной *алгебраической операцией* на X.

Нейтральным называется такой элемент $e \in X$, что

$$\forall x \in X \implies e * x = x \text{ и } x * e = x.$$

Левым или **правым** *нейтральным* называется такой элемент $e \in X$, что

$$\forall x \in X \implies e * x = x \text{ или } x * e = x.$$

Если $x * y = e$, то x — **левый** *обратный* элемент к y, а y — **правый** *обратный* к x.

Стоит отметить, что если $y\colon X \to Y$ и $x\colon Y \to X$ — отображения, то y *инъективно*, а x *сюръективно*.

Доказательство. По условию, множество X накладывается на себя. Значит, f *всюду определено*.

Так как g функционально, то

$$\forall x_1, x_2 \in X\ \exists y \in E_f\colon x_1 f y,\ x_2 f y \iff x_1 = x_2,$$

то есть f *инъективно*. □

Когда X накладывается на себя, то

$$\forall x \in E_g\ \exists y \in D_g\colon x \mapsto y,$$

то есть g *сюръективно*. ■

Элементы x и y **взаимно** *обратны*, когда $x * y = y * x = e$.

Алгебраическая структура

Алгебраическая структура *(система)* — множество X с введёнными на нём алгебраическими операциями:

$$\langle X;\ *_1, *_2, \dots, *_n \rangle$$

Полугруппа — алгебраическая структура $\langle X;\ * \rangle$ с двухместной ассоциативной операцией $*$.

Группа — полугруппа, для которой существуют нейтральный и обратный элементы.

Кольцо — коммутативная аддитивная группа, мультипликативная полугруппа, где $\times$ дистрибутивно относительно $+$.

Поле — коммутативное кольцо с обратным элементом для $\times$.

Числовые системы

Система натуральных чисел — коммутативная аддитивная и мультипликативная полугруппа $\langle \mathbb{N};\ +, \times \rangle$.

Система целых чисел — коммутативное кольцо $\langle \mathbb{Z};\ +, \times \rangle$.

Система рациональных чисел — упорядоченное поле $\langle \mathbb{Q};\ +, \times \rangle$.

Система действительных чисел — непрерывное упорядоченное поле $\langle \mathbb{R};\ +, \times \rangle$.

Проективно расширенная числовая прямая — расширение множества действительных чисел $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$:

$$a \pm \infty = \infty \pm a = \infty, \quad a \neq \infty$$
$$b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty, \quad b \neq 0$$
$$\frac{a}{\infty} = 0 \qquad \frac{b}{0} = \infty$$

Комплексные числа

Система компле́ксных чисел — непрерывное поле $\langle \mathbb{C};\ +, \times \rangle$, в котором существует такая *мнимая единица* i, что $i^2 = -1$:

$$(a,b) \pm (c,d) = (a \pm c, b \pm d)$$

$$(a,b)\,(c,d) = (ac - bd, bc + ad)$$

$$1/z = \bar{z}/z\bar{z} = \bar{z}/\,|z|^2$$

$z = a + bi$ — комплексное число;
$\bar{z} = a - bi$ — комплексное число, *сопряжённое* к z.

Операция сопряжения *дистрибутивна* относительно $+$, $\times$.

Алгебраическая форма числа $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ — $a + bi$:

$a =: \Re\mathrm{e}\, z$ — действительная часть z;
$b =: \Im\mathrm{m}\, z$ — мнимая часть z.

Извлечение квадратного корня из $z = a + bi$:

$$\sqrt{z} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} + \operatorname{sgn}(b)\, i\sqrt{\frac{|z| - a}{2}}\right)$$

Доказательство. По определению нужно найти такое v, что

$$v^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = a + bi = z.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \iff + \begin{cases} (x^2 - y^2)^2 = a^2 \\ 4x^2y^2 = b^2 \end{cases} \iff (x^2 + y^2)^2 = |z|^2$$

Извлечём корень из обеих частей уравнения:

$$\pm\begin{cases} x^2 + y^2 = |z| \\ x^2 - y^2 = a \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 = |z| + a \\ 2y^2 = |z| - a \end{cases} \iff$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{|z| + a}{2}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{|z| - a}{2}}$$

Так как $xy = b/2$, то при $b \geq 0 \implies \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} y$, иначе $\operatorname{sgn} x = -\operatorname{sgn} y$. В общем виде это записывается так:

$$v = \pm\left(\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} + \operatorname{sgn}(b)\, i\sqrt{\frac{|z| - a}{2}}\right) \blacksquare$$

Тригонометрическая форма числа $z \in \mathbb{C}$ — $r(\cos\phi + i\sin\phi)$, где r — модуль числа z, $\phi =: \arg z \in (-\pi;\pi]$ — его аргумент *(угол между вектором числа z и начальным радиусом)*:

$$\phi = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\Im\mathrm{m}\, z/\Re\mathrm{e}\, z), & x > 0 \\ \operatorname{arctg}(\Im\mathrm{m}\, z/\Re\mathrm{e}\, z) + \pi, & x < 0,\ y \geq 0 \\ \operatorname{arctg}(\Im\mathrm{m}\, z/\Re\mathrm{e}\, z) - \pi, & x < 0,\ y < 0 \\ \operatorname{sgn}(\Im\mathrm{m}\, z)\,\pi/2, & x = 0,\ y \neq 0 \end{cases}$$

Произведение чисел $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ — число с модулем $|z_1 z_2| = ||z_1| \cdot |z_2||$ и аргументом $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

Следствие. Возведение в степень числа $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$:

$$z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi),\ n \in \mathbb{Z}$$

Частное чисел $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ — число с модулем $|z_1/z_2| = ||z_1| / |z_2||$ и аргументом $\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$.

Извлечение корня n степени из $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\phi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in \{m\}_{m=0}^{n-1}$$

Доказательство. По определению нужно найти такое v, что

$$v^n = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\phi + i\sin\phi) = z$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \phi + 2\pi k \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = (\phi + 2\pi k)/n,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Значит,

$$v = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\phi + 2\pi k}{n}\right). \blacksquare$$

Предел последовательности

Предел

Предел последовательности $\{x_n\}$ — такое a, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \colon \forall n > N \; x_n \in U_\varepsilon(a).$$

Упрощённая запись $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ или $n \to \infty, x_n \to a$.

Этот оператор *дистрибутивен* относительно *сложения*, *умножения*.

Частичным называется предел подпоследовательности.

Свойства предела

Сходимость $\implies$ ограниченность.

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. По определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \colon \forall n > N \; x_n \in U_\varepsilon(a)$$

По «дистрибуции» модуля относительно сложения:

$$|x_n| = |x_n - a + a| \le |x_n - a| + |a| < \varepsilon + |a|$$

Положим, что $\forall m \le N \; L = \max(|\{x_m\}|, \varepsilon + |a|) \implies |x_n| \le L$. ■

Пусть $n \to \infty, x_n \to a, y_n \to b$. Выполняя *предельный переход*, при $x_n \le y_n$ или $x_n < y_n$ сохраняется неравенство $a \le b$.

Доказательство. По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \colon \forall n > N \; x_n \in U_\varepsilon(a), \; y_n \in U_\varepsilon(b)$$

Следовательно,

$$+\begin{cases} x_n \le y_n \\ a - x_n < \varepsilon \\ y_n - b < \varepsilon \end{cases} \iff \begin{cases} y_n - x_n \ge 0 \\ y_n - x_n < 2\varepsilon + b - a \end{cases} \iff \frac{a-b}{2} < \varepsilon$$

Так как ε — сколь угодно малое положительное число, то $a - b \le 0 \iff a \le b$. □

При $x_n < y_n$ доказательство аналогично. ■

Пусть $n \to \infty, x_n, y_n \to a$. Тогда при $\forall \{z_n\} \colon x_n \le z_n \le y_n$ справедливо $z_n \to a$. *(теорема о промежуточной функции)*

Доказательство. По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n, y_n \in U_\varepsilon(a)$$

Следовательно,

$$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon \implies z_n \in U_\varepsilon(a) \implies \lim_{n\to\infty} z_n = a. \blacksquare$$

Условие Коши

Последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет *условию Коши (является фундаментальной)*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n, m > N\ |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Фундаментальность $\implies$ ограниченность.

Доказательство. По условию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n, m > N\ |x_n - x_m| < \varepsilon$$

По «дистрибуции» модуля относительно сложения:

$$\begin{cases} |x_n - x_m| < \varepsilon \\ |x_n| = |x_n - x_m + x_m| \end{cases} \iff \begin{cases} |x_n - x_m| < \varepsilon \\ |x_n| \leq |x_n - x_m| + |x_m| \end{cases} \iff$$

$$|x_n| < \varepsilon + |x_m|$$

Положим, что $\forall k \leq N\ L = \max(|\{x_k\}|, \varepsilon + |x_m|) \implies |x_n| \leq L. \blacksquare$

Принцип компактности отрезка

Ограниченность $\implies$ частичная сходимость:

$$\forall \{x_n\} \in [a; b]\ \exists \{n_k\}\uparrow\colon \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$$

Доказательство. По принципу Кантора:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists! \xi \in [a_k; b_k] \subset [a_{k-1}; b_{k-1}] \iff$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_n = \xi$$

Образуем подпоследовательность:

$$\{x_{n_k} \mid \{n_k\}\uparrow,\ x_{n_k} \in [a_k; b_k]\}$$

По теореме о промежуточной функции:

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \implies \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi \blacksquare$$

Частичный предел фундаментальной последовательности является её пределом.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ фундаментальна $\implies$ она ограничена.

По принципу компактности отрезка $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

По условию Коши:

$$\forall \varepsilon/2 > 0\ \exists N\colon \forall n, m > N\ |x_n - x_m| < \varepsilon/2$$

Зафиксируем n. При $x_m = x_{n_k} > N$ перейдём к пределу:

$$|x_n - a| \le \varepsilon/2 < \varepsilon \iff \lim_{k\to\infty} x_n = a \ \blacksquare$$

Критерий Коши

Сходимость $\iff$ фундаментальность.

Доказательство $\implies$. По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n \in U_{\varepsilon/2}(a)$$

Значит, $\forall n, m > N\ |x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)|$.

По «дистрибуции» модуля относительно сложения:

$$|x_n - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ \blacksquare$$

Доказательство $\impliedby$. Пусть $\{x_n\}$ фундаментальна $\implies$ она ограничена $\implies$ по принципу компактности отрезка она частично сходится к c $\implies$ по условию Коши и принципу компактности отрезка она сходится к c. $\blacksquare$

Теорема Вейерштрасса

Монотонность $\implies$ сходимость:

$$\begin{bmatrix} \forall \{x_n\}\nearrow \lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\} \\ \forall \{y_n\}\searrow \lim_{n\to\infty} y_n = \inf\{y_n\} \end{bmatrix}$$

Доказательство. По определению точной верхней границы:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \le \sup\{x_n\}$$

Так как последовательность неубывает, то

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n \in U_\epsilon(\sup\{x_n\}) \implies$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}. \square$$

Для $\{y_n\}\searrow$ доказательство аналогично. ■

Предел функции

Предел

Предел функции $f: X \to Y$ в точке $x_0 \in X$ *по Коши* — такое $a \in Y$, что *(О.Л. Коши)*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall x \in \underbrace{\mathring{U}_\delta(x_0) \subseteq D_f}_{\text{I}},\ \underbrace{f(x) \in U_\varepsilon(a)}_{\text{II}}.$$

I — функция f определена в какой-либо проколотой δ-окрестности точки x_0;

II — функция f имеет образ в какой-либо проколотой ε-окрестности точки a.

Предел функции $f: X \to Y$ в точке $x_0 \in X$ *по Гейне* — такое $a \in Y$, что *(Э. Гейне)*

$$\forall \{x_n\} \in D_f\colon \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\ (x_n \neq x_0) \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

Упрощённая запись $\forall x \in X\ \lim_{x\to x_0} f(x) = a$ или $x \to x_0$, $f(x) \to a$.

Критерий Коши

Сходимость $\iff$ выполнение *условия Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0)\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Доказательство $\implies$. По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \mathring{U}_\delta(x_0) \subseteq D_f,\ U_{\varepsilon/2}(a) \cap E_f \neq \emptyset$$

Пусть $x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0)$; по неравенству треугольника:

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - a| + |f(x'') - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\ \blacksquare$$

Доказательство $\impliedby$. По условию Коши:

$$\exists \{x_n\} \in D_f\colon \lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ x_n \neq x_0$$

Последовательности $\{f(x_n)\}$ фундаментальны $\implies$ сходятся.

По фундаментальности и сходимости к одной точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a\ \blacksquare$$

Предел композиции функций

Пусть $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$. Тогда:

$$\begin{cases} \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \\ \lim_{x\to x_0} g(x) = z_0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = z_0 \\ f(x) \neq y_0 \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $g \circ f = \varphi$; по определению предела:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \mathring{U}_\delta(y_0) \subseteq D_g,\ U_\varepsilon(z_0) \cap E_g \neq \emptyset \\ \forall \delta > 0\ \exists \sigma > 0\colon \mathring{U}_\sigma(x_0) \subseteq D_f,\ U_\delta(y_0) \cap E_f \neq \emptyset \end{cases}$$

Из $\mathring{U}_\delta(y_0) \cap U_\delta(y_0) = \mathring{U}_\delta(y_0)$ следует:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma > 0\colon \mathring{U}_\sigma(x_0) \subseteq D_f,\ U_\varepsilon(\varphi(x)) \cap E_g \neq \emptyset \\ y \neq y_0 \iff f(x) \neq y_0 \end{cases} \iff$$

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = z_0,\ f(x) \neq y_0. \blacksquare$$

Бесконечно малая функция

Функция g *бесконечно мала* относительно f при $x \to x_0$, если

$$g(x) = \varepsilon(x) f(x) := \underset{x\to x_0}{o(f)}, \qquad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Верно следующее утверждение:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff f(x) = a + \underset{x\to x_0}{o(x)}$$

Доказательство $\Longrightarrow$. По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon 0 < |x - x_0| < \delta,\ |f(x) - a| < \varepsilon$$

По теореме о промежуточной функции:

$$0 \leq |f(x) - a| < \varepsilon \implies \lim_{x\to x_0} (f(x) - a) = 0 \iff$$

$$f(x) - a = \underset{x\to x_0}{o(x)} \iff f(x) = a + \underset{x\to x_0}{o(x)} \blacksquare$$

Доказательство $\Longleftarrow$. По условию:

$$f(x) = a + o(x) \iff |f(x) - a| = |o(x)|$$

По определению бесконечно малой функции:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon 0 < |x - x_0| < \delta,\ |o(x)| < \varepsilon$$

По определению предела:

$$|f(x) - a| < \varepsilon \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = a \blacksquare$$

Односторонний предел

Правосторонним называется предел функции, который определён в терминах правосторонних ε-окрестностей *(неубывающих последовательностей)*:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a \quad \text{или} \quad x \to x_0 + 0,\ f(x) \to a$$

Левосторонним называется предел функции, который определён в терминах левосторонних ε-окрестностей *(невозрастающих последовательностей)*.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a \quad \text{или} \quad x \to x_0 - 0,\ f(x) \to a$$

Существование предела равносильно существованию *равных* односторонних пределов:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \iff \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

Непрерывность

Пусть $\forall \varepsilon > 0\ U_\varepsilon(x_0) \subseteq D_f$. Тогда:

$x - x_0 =: \Delta x$ — *приращение аргумента* в точке x_0;
$f(x) - f(x_0) =: \Delta f$ — *приращение функции* в точке x_0.

Функция f *непрерывна* в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{или} \quad \Delta x \to 0,\ \Delta f \to 0.$$

Определения *непрерывности справа* и *слева* точки x_0 связаны с правосторонними и левосторонними пределами.

Непрерывными в точке x_0 являются *сумма*, *произведение* и *композиция* непрерывных в ней функций.

Теорема Вейерштрасса

Пусть $f \in C[a;b]$. Тогда в некоторых точках отрезка функция достигает своих точных верхней и нижней границ на $[a;b]$.

Доказательство. Пусть $\sup f([a;b]) =: M$, $\inf f([a;b]) =: m$.

По определению точных верхней и нижней границ:

$$\forall x \in [a;b]\ f(x) \in [m;M]$$

По принципу компактности отрезка:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M \qquad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$$

По определению непрерывности:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi) \implies f(\xi) = M \blacksquare$$

Теорема о промежуточном значении

Пусть f непрерывна на промежутке $X \ni a, b$. Тогда:

$$\forall c \in [f(a);f(b)]\ \exists \xi \in [a;b] : c = f(\xi)$$

Доказательство. По принципу Кантора:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \xi \in [a_n;b_n] \subset [a_{n-1};b_{n-1}] \subseteq X \implies$$
$$n \to \infty,\ a_n, b_n \to \xi$$

По определению непрерывности функции на промежутке:

$$n \to \infty,\ f(a_n), f(b_n) \to f(\xi)$$

По теореме о промежуточной функции:

$$f(a_n) \le c \le f(b_n) \implies c = f(\xi) \blacksquare$$

Дифференциальное исчисление

Производная

Функция f имеет в точке x_0 *производную (дифференцируема в ней)*, если *(Ж.Л. Лагранж)*

$$\forall \epsilon > 0\ U_\epsilon(x_0) \cap D_f \neq \emptyset,\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =: f'(x_0).$$

Этот оператор *дистрибутивен* относительно *сложения*:

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$

Свойства производной

Дифференцируемость $\implies$ непрерывность.

Доказательство. По определению производной:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) \iff \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + o(\Delta x) \iff$$
$$\Delta f = \Delta x(f'(x_0) + o(\Delta x)) \implies \Delta x \to 0,\ \Delta f \to 0\ \blacksquare$$

Приращение дифференцируемой функции легко представить в виде:

$$\Delta f = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x)\,\Delta x$$

Дифференциал функции — линейная часть её приращения:

$$\mathrm{d}y := f'(x_0)\,\Delta x$$

Значит, формула производной имеет вид:

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad (\Delta x = \mathrm{d}x)$$

Производные элементарных функций

Таблица производных элементарных функций:

$$C' = 0 \qquad (x^n)' = nx^{n-1}$$
$$\sin' \alpha = \cos \alpha \qquad \cos' \alpha = -\sin \alpha$$
$$\operatorname{tg}' \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \qquad \operatorname{ctg}' \alpha = -\frac{1}{\sin^2 \alpha}$$
$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \operatorname{arcctg}' x = -\frac{1}{1+x^2}$$

Промежутки монотонности

Если функция f дифференцируема в точке x_0, то

$$\begin{cases} f'(x_0) > 0 \implies f\uparrow \text{ около } x_0 \\ f'(x_0) < 0 \implies f\downarrow \text{ около } x_0 \end{cases}.$$

Доказательство. По определению производной:

$$f'(x_0) > 0 \iff \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} > 0 \iff \frac{\Delta f}{\Delta x} > o(\Delta x)$$

При достаточно малом Δx верно:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0 \iff \left[\begin{array}{l} \Delta f, \Delta x > 0 \\ \Delta f, \Delta x < 0 \end{array} \right. \iff f\uparrow \text{ около } x_0 \ \square$$

Для $f'(x_0) < 0$ доказательство аналогично. ■

Условие существования экстремума

Точка локального экстремума $\implies$ критическая точка.

Доказательство. По определению локального максимума:

$$\exists \delta > 0 \colon \forall x \in \mathring{U}_{\delta}(x_0)\ f(x_0) > f(x)$$

Производная в точке x_0 либо существует, либо нет. □

Допустим, она существует; по определению производной:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$$

По предельному переходу:

$$\begin{bmatrix} \Delta x > 0 \implies \Delta f / \Delta x < 0 \implies f'(x_0) \le 0 \\ \Delta x < 0 \implies \Delta f / \Delta x > 0 \implies f'(x_0) \ge 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$0 \le f'(x_0) \le 0 \iff f'(x_0) = 0 \ \square$$

Для локального минимума доказательство аналогично. ■

Если в критической точке производная меняет знак, она является локальным экстремумом.

Доказательство. По определению критической точки:

$$\begin{bmatrix} f'(x_0) = 0 \\ f'(x_0) = \text{undefined} \end{bmatrix}$$

Допустим для определённости:

$$\begin{cases} \exists \delta > 0 \colon \forall x \in \mathring{U}_{\delta -}(x_0)\ f'(x) > 0 \\ \exists \delta > 0 \colon \forall x \in \mathring{U}_{\delta +}(x_0)\ f'(x) < 0 \end{cases}$$

По промежуткам монотонности:

$$\begin{cases} f \uparrow \text{ на } U_{\delta -}(x_0) \\ f \downarrow \text{ на } U_{\delta +}(x_0) \end{cases} \iff x_0 \text{ — локальный максимум } \square$$

Для локального минимума доказательство аналогично. ■

Теорема Ролля

Пусть f дифференцируема на $(a;b)$, непрерывна на $f[a;b]$, и $f(a) = f(b)$. Тогда: *(М. Ролль)*

$$\exists \xi \in (a;b) \colon f'(\xi) = 0$$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса:

$$f(m) = \inf f([a;b]) \qquad f(M) = \sup f([a;b])$$

При $f(a) = f(b) = f(m)$ по условию существования экстремума:

$$f'(M) = 0 \ \square$$

При $f(m) = f(M)$ функция — константа на $[a;b]$, производная которой равна нулю. ■

Теорема Лагранжа

Пусть f дифференцируема на $(a;b)$ и непрерывна на $f[a;b]$. Тогда: *(Ж.Л. Лагранж)*

$$\exists \xi \in (a;b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x) := f(x) - \lambda x$; подберём λ так, чтобы $\varphi(a) = \varphi(b)$:

$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b \iff (b-a)\lambda = f(b) - f(a) \iff$$

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

По теореме Ролля:

$$\exists \xi \in (a;b) : \varphi'(\xi) = 0 \iff f'(\xi) - \lambda = 0 \iff$$

$$\lambda = f'(\xi) \implies f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ ■$$

Условие постоянства функции

Пусть f непрерывна на $[a;b]$ и состоит из стационарных точек на $(a;b)$. Тогда $f([a;b]) = C$.

Доказательство. По теореме Лагранжа:

$$\forall x', x'' \in [a;b] \ \exists \xi \in (x';x'') : f'(\xi) = \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$$

По определению стационарной точки:

$$f'(\xi) = 0 \implies \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = 0 \iff f(x'') = f(x') \ ■$$

Пусть f, g непрерывны на $[a;b]$ и $f' = g'$. Тогда:

$$\forall x \in [a;b] \ f(x) - g(x) = C$$

Доказательство. Пусть $\varphi := f - g$; по условию:

$$\forall x \in (a;b)\ \varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

По условию постоянства функции:

$$\varphi'(x) = 0 \iff \varphi(x) = C \iff f(x) - g(x) = C \blacksquare$$

Ориентированный граф

Граф *(ориентированный граф или орграф)* — упорядоченная пара $G = \langle V, E \rangle$, где

V — непустое множество *вершин (узлов)*;
E — конечное множество *рёбер*, $E \subseteq V \times V$.

Порядок графа G — число его вершин $n = |V|$.

Размер графа G — число его рёбер $m = |E|$.

Ребро $e = \langle v,\ w \rangle$ задаётся вершинами $v,\ w$, где v — начало ребра, а w — его конец; вершины $v,\ w$ являются *соседними*.

Входящая валентность вершины v графа G — число рёбер, чей конец в v:

$$\operatorname{indeg}(v) = |\{\langle u, v \rangle \mid \langle u, v \rangle \in E\}|$$

Исходящая валентность вершины v графа G — число рёбер, чьё начало в v:

$$\operatorname{outdeg}(v) = |\{\langle v, u \rangle \mid \langle v, u \rangle \in E\}|$$

Валентность вершины v графа G — сумма входящей и исходящей валентностей вершины:

$$\deg(v) = \operatorname{indeg}(v) + \operatorname{outdeg}(v)$$

Свойство. Пусть $G = \langle V, E \rangle$ — граф с n вершинами и m рёбрами, причём $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Тогда:

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{indeg}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{outdeg}(v_i) = m$$

Подграф $G = \langle V, E \rangle$, *порождённый* на $W \subset V$, — граф вида

$$G_W = \langle W, E \cap W \times W \rangle.$$

Последовательность вершин

Маршрут от вершины v_i до вершины v_j графа G — последовательность вершин или рёбер:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}[v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j] \text{ вершины} \\ [e_i, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_j] \text{ рёбра}\end{array}\right. \\ e_k = \langle v_{k-1}, v_k \rangle, k \in \{i+1, \dots, j\}\end{cases}$$

Закрытым называется такой маршрут, где начальная и конечная вершины совпадают.

Цепь — маршрут без повтора рёбер; *простая цепь* — маршрут без повтора рёбер и вершин *(кроме, возможно, первой и последней вершины)*; *цикл* — закрытая простая цепь.

Ациклическим (лесом) называется граф без циклов.

Неориентированный граф

Неорграф *(неориентированный граф)* — такой граф $G = \langle V, E \rangle$, что $\forall v, w \in V \ \langle v, w \rangle \in E \implies \langle w, v \rangle \in E$.

Валентность вершины v неорграфа — число рёбер, которые связаны с v.

Связным называется такой неорграф, между любыми вершинами которого есть маршрут.

Компонент связности неорграфа — связный подграф, который не входит в состав такого же подграфа.

Связность графа

Связным называется такой орграф, у которого аналогичный неорграф связный.

Орграф $G = \langle V, E \rangle$ называется *сильно связным*, если

$$\forall v, w \in V \ \exists \begin{cases}\text{маршрут от v до w} \\ \text{маршрут от w до v}\end{cases}$$

Компонент сильной связности графа — сильно связный подграф, который не входит в состав такого же подграфа.

Виды неориентированных графов

Неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle =: K_n$, $n = |V|$ называется *полным*, если $\forall v, w \in V, v \neq w \ \langle v, w \rangle \in E$.

Неориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$ называется *однородным*, если $\forall v, w \in V \ \deg(v) = \deg(w)$.

Свободное дерево

Дерево *(свободное)* — компонент связности леса $T = \langle V, E \rangle$.

Свойство. Пусть $T = \langle V, E \rangle$. Тогда $|E| = |V| - 1$.

Поддерево $T = \langle V, E \rangle$*, порождённое* на $W \subset V$, — дерево вида:

$$T_W = \langle W, E \cap W \times W \rangle$$

Корневое дерево

Корневое дерево *(ориентированное дерево или ордерево)* — такой орграф, у которого:

— аналогичный неорграф есть свободное дерево;
— есть единственная вершина с нулевой входящей валентностью, или *корень*.

Пусть $T = \langle V, E \rangle$ — дерево, $\langle v, w \rangle \in E$:

$v =: \text{parent}_w$ — *родитель* вершины w.

$w \in \text{children}_v$ — *ребёнок* вершины v.

Корневым называется узел без родителей.

Листовым называется узел без детей.

Родственными называются вершины с общими родителями.

Первый в памяти ребёнок узла v — first_v, *последний* — last_v; *следующий* в памяти родственник узла v — next_v.

Уровень вершины v дерева T — длина простой цепи от root_T до v; обозначается depth_v.

Способы представления графа

Матрица смежности для $G = \langle V, E \rangle$ — булева матрица V^2, элементы которой равны логическому значению выражения:

$$\langle v, w \rangle \in E \mid v, w \in V$$

Матрица занимает $\mathcal{O}(V^2)$ места; проверка смежности проходит за $\mathcal{O}(1)$.

Список смежности для $G = \langle V, E \rangle$ — множество вершин $v \in V$, которым соответствует другое множество вершин:

$$\{w \in V \mid \langle v, w \rangle \in E\}$$

Список занимает $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ места; проверка смежности проходит за $\mathcal{O}(\text{outdeg}(v))$.

Способы представления дерева

Массив родителей для $T = \langle V, E \rangle$ — массив вершин $v \in V$, которым соответствует их родитель.

Массив занимает $\mathcal{O}(|V|)$ места; вывод родителя и порядка дерева проходят за $\mathcal{O}(1)$.

«Первый ребёнок, следующий родственник» для $T = \langle V, E \rangle$ — такая упорядоченная пара массивов вершин $\langle F, N \rangle$, что

F — массив из первых детей для всех вершин;
N — массив из следующих родственников для всех вершин.

Массив занимает $\mathcal{O}(|V|)$ места; вывод первого ребёнка, следующего родственника и порядка дерева проходят за $\mathcal{O}(1)$.

Редактирование дерева

К **элементарным операциям** редактирования дерева относятся:

— *удаление* листового узла v с ребром $\langle \text{parent}_v, v \rangle$: $v \mapsto \lambda$;
— *вставка* листового узла v с ребром $\langle \text{parent}_v, v \rangle$: $\lambda \mapsto v$;
— *замещение* вершины v другой вершиной w: $v \mapsto w$.

Пусть $T_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $T_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ — корневые деревья.

Трансформация T_1 в T_2 — упорядоченное биективное отображение $E \subseteq V_1 \cup \{\lambda\} \times V_2 \cup \{\lambda\}$.

Биективное *отображение* T_1 в T_2 — такое $M \subseteq W_1 \times W_2$

для $W_1 \subseteq V_1,\ W_2 \subseteq V_2$, что:

$$\begin{cases} \langle \text{root}_{T_1}, \text{root}_{T_2} \rangle \in M \neq \emptyset \\ \langle \text{parent}_v, \text{parent}_w \rangle \in M \iff \langle v, w \rangle \in M \\ v_2 = \text{next}_{v_1},\ w_2 = \text{next}_{w_1} \iff \langle v_1, w_1 \rangle, \langle v_2, w_2 \rangle \in M \end{cases}$$

Лемма. Пусть M — отображение T_1 в T_2. Тогда:

$$\forall \langle v, w \rangle \in M\ \text{depth}_v = \text{depth}_w$$

Стоимость элементарной операции над T_1 и T_2 задаётся метрикой $\gamma\colon V_1 \cup V_2 \cup \{\lambda\} \times V_1 \cup V_2 \cup \{\lambda\} \to \mathbb{R}_0^+$.

Стоимость трансформации T_1 в T_2 *(E)* задаётся метрикой:

$$\gamma(E) = \sum_{\langle v,w \rangle \in E} \gamma(v, w)$$

Редакционная дистанция между T_1 и T_2 — функция:

$$\gamma_{\min} = \min(\{\gamma(E) \mid \forall E\})$$

Редакционный граф для T_1 и T_2 — неорграф $G = \langle V, E \rangle$ с вершинами вида vw, $v \in V_1 \cup \{v_0\}$, $w \in V_2 \cup \{w_0\}$ *(v_0, w_0 — мнимые узлы)*, рёбра которого определяются по правилу:

$$\begin{cases} \text{depth}_{v_{i+1}} \geq \text{depth}_{w_{j+1}} \iff \langle v_i w_j, v_{i+1} w_j \rangle \in E\ (v_{i+1} \mapsto \lambda) \\ \text{depth}_{v_{i+1}} = \text{depth}_{w_{j+1}} \iff \langle v_i w_j, v_{i+1} w_{j+1} \rangle \in E\ (v_{i+1} \mapsto w_{j+1}) \\ \text{depth}_{v_{i+1}} \leq \text{depth}_{w_{j+1}} \iff \langle v_i w_j, v_i w_{j+1} \rangle \in E\ (\lambda \mapsto w_{j+1}) \end{cases}$$

Лемма. Пусть G — редакционный граф для T_1 и T_2. Тогда маршрут P от $v_0 w_0$ до $v_{n_1} w_{n_2}$ задаёт трансформацию:

$$\begin{aligned} E = \{\langle v_{i+1}, \lambda \rangle \mid \langle v_i w_j, v_{i+1} w_j \rangle \in P\} \cup \ldots \\ \ldots \{\langle v_{i+1} w_{j+1} \rangle \mid \langle v_i w_j, v_{i+1} w_{j+1} \rangle \in P\} \cup \ldots \\ \ldots \{\langle \lambda, w_{j+1} \rangle \mid \langle v_i w_j, v_i w_{i+1} \rangle \in P\} \end{aligned}$$

Алгоритм редактирования дерева занимает $\mathcal{O}(n_1 n_2)$ места, используя $\mathcal{O}(n_1 n_2)$ времени.

Обход дерева

Обход дерева $T = \langle V, E \rangle$ — биективное отображение:

$$\text{order}\colon V \to \{1, \ldots, |V|\}$$

Прямым называется такой обход дерева $T = \langle V, E \rangle$, что:

$$\begin{cases} \text{order}(\text{root}_T) = 1 \\ \text{order}(\text{first}_v) = \text{order}(v) + 1,\ \text{first}_v \neq \emptyset \\ \text{order}(\text{next}_v) = \text{order}(v) + \text{size}(v),\ \text{next}_v \neq \emptyset \end{cases}$$

Алгоритм прямого обхода дерева занимает линейное место, используя линейное время.

Поиск с возвратом

Поиск с возвратом — метод нахождения решений задачи полным перебором всех допустимых расстановок элементов конечного множества:

— в качестве *частичного решения* используется пустое упорядоченное множество M, которое расширяется до полного по одному элементу за операцию;
— если решение *полное* или *не удовлетворяет условию*, алгоритм приступает к другому частичному решению.

Пусть $T_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $T_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ — корневые деревья.

Кандидат для $v \in V_1$ — элемент множества

$$C_v := \{w \mid w \in V_2,\ \text{depth}_v = \text{depth}_w\} \cup \{\lambda\}.$$

Возвратное дерево для T_1 и T_2 — такое дерево $T = \langle V, E \rangle$ с мнимым корнем, что:

$$\begin{cases} M \subseteq V_1 \times W \text{ } \textit{(упорядочено, биективно)} \\ \left.\begin{array}{l} W = [\text{root}_T, \dots, w] \backslash \{\text{root}_T\} \subseteq V_2 \cup \{\lambda\} \subseteq V \\ \text{children}_w = \emptyset \end{array}\right\} \text{I} \\ \left.\begin{array}{l} \forall \langle w_1, w_2 \rangle \subseteq W\ \text{order}(w_1) < \text{order}(w_2) \\ w_1, w_2 \neq \lambda \end{array}\right\} \text{II} \\ \left.\begin{array}{l} \forall \langle v_i, w_j \rangle \in M\ w_j \in C_{v_i} \end{array}\right\} \text{III} \end{cases}$$

I — всякая простая цепь возвратного дерева от корня до листа без корня соответствует *уникальному* отображению T_1 в T_2;
II — индекс узлов одной простой цепи от корня до листа без корня *строго возрастает*;
III — всякий узел простой цепи от корня до листа без корня является *кандидатом* для соответствующего узла T_1.

Итерация построения полного решения M для условия P:

$$\begin{cases} \forall c \in C_{W.\text{last}()}\ W := W \cup \{c\} \\ T(M) := M \text{ — частичное решение} \\ M \wedge P(M) \wedge T(M) \neq \emptyset \implies \text{расширить M} \\ M \wedge P(M) \wedge T(M) = \emptyset \implies \text{следующее M} \end{cases}$$

Дерево ветвей и границ для T_1 и T_2 — такое возвратное дерево для T_1 и T_2, что $P := P \wedge R$, где:

$$R(M_i) = \begin{cases} \alpha_{\min} = \emptyset \implies \alpha_{\min} := \max \\ \alpha_{\min} \geq \gamma(M_i) \implies \text{True},\ \alpha_{\min} := \gamma(M_i) \\ \alpha_{\min} < \gamma(M_i) \implies \text{False} \end{cases}$$

«Разделяй и властвуй»

«Разделяй и властвуй» — метод рекурсивного нахождения решений задачи:

— задача делится на меньшие, *независимые* друг от друга подзадачи, пока они не будут сведены к *тривиальным*;

— решения тривиальных подзадач *комбинируются* в единое к исходной задаче.

Пусть $T_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $T_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ — корневые деревья, $A_1 = T_{1W_1}$, $A_2 = T_{2W_2}$, $B_1 = T_1 \backslash A_1$, $B_2 = T_2 \backslash A_2$ — их поддеревья:

$$\begin{cases} W_1 = \{v_m \in V_1 \mid \text{order}(v_m) < \text{order}(v)\} \\ W_2 = \{w_n \in V_2 \mid \text{order}(w_p) < \text{order}(w)\} \\ v := \text{last}_{v_i},\ w := \text{last}_{w_k} \end{cases}$$

Дерево «разделяй и властвуй» для T_1 и T_2 — такое ордерево $T = \langle V, E \rangle$ с вершинами вида $v_i v_j w_k w_l$, что:

$$\begin{cases} v_i, v_j \in V_1,\ w_k, w_l \in V_2 \\ \text{root}_T = v_1 v_{n_1} w_1 w_{n_2}\ (T_1 \to T_2) \end{cases}$$

Шаг рекурсивного построения решения M:

$$\begin{cases} v_i = v_j,\ w_k = w_l \implies v_i \mapsto w_k, \text{ комбинировать} \\ v_i \neq v_j,\ w_k = w_l \implies A_1 \to T_2\ (B_1 \to \lambda) \\ v_i = v_j,\ w_k \neq w_l \implies T_1 \to A_2\ (\lambda \to B_2) \\ v_i \neq v_j,\ w_k \neq w_l \implies \begin{bmatrix} A_1 \to A_2 \text{ или } A_1 \to T_2 \\ B_1 \to B_2 \text{ или } T_1 \to A_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Динамическое программирование

Динамическое программирование — метод рекурсивного нахождения решений задачи:

— задача делится на меньшие, *зависимые* друг от друга подзадачи, пока они не будут сведены к *тривиальным*;

— решения тривиальных подзадач *комбинируются* в единое к исходной задаче.

Мемоизация *(«сверху вниз»)* — кеширование и повторное использование ранее подсчитанных результатов.

Табуляция *(«снизу вверх»)* — заполнение кеша на основе тривиальных подзадач.

Лучшее решение выбирается из матрицы лучших решений его подграфов *(у них по рекурсии есть свои матрицы)*:

$$\begin{matrix} \langle v_i, w_k \rangle & \langle v_i, w_k w_{k+1} \rangle & \cdots & \langle v_i, w_k \dots w_l \rangle \\ \langle v_i v_{i+1}, w_k \rangle & \langle v_i v_{i+1}, w_k w_{k+1} \rangle & \cdots & \langle v_i v_{i+1}, w_k \dots w_l \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_i \dots v_j, w_k \rangle & \langle v_i \dots v_j, w_k w_{k+1} \rangle & \cdots & \langle v_i \dots v_j, w_k \dots w_l \rangle \end{matrix}$$

$$\begin{cases} v \in V_1,\ w \in V_2 \\ \text{depth}_v = \text{depth}_w \\ \{v_i, \dots, v_j\} = \text{children}_v \\ \{w_k, \dots, w_l\} = \text{children}_w \\ \langle v_i \dots v_j, w_k \dots w_l \rangle \sim \gamma_{\min}(G_1 \to G_2) \\ G_1 = T_{1W_i} \cup \dots \cup T_{1W_j} \\ G_2 = T_{2W_k} \cup \dots \cup T_{2W_l} \\ \forall s \in \{i, \dots, j\}\ \text{root}_{T_{1Ws}} = v_s \\ \forall t \in \{k, \dots, l\}\ \text{root}_{T_{2Wt}} = w_t \end{cases}$$

Алгоритм табуляции занимает $\mathcal{O}(n_1 n_2)$ места, используя $\mathcal{O}(n_1 n_2)$ времени.

Динамическое программирование

Динамическое программирование — метод решения задач на оптимизацию *по принципу оптимальности*:

«оптимальная структура имеет оптимальные подструктуры» *(Р. Беллман)*

Уравнение Беллмана

Введём задачу на оптимизацию вида:

$$\operatorname*{opt}_{d \in \Delta} \{H(d)\}$$

d — выбор;
Δ — допустимое множество;
H — целевая функция одной переменной.

Оптимум — оптимальное значение целевой функции *(выбор d^* оптимизирует H)*:

$$H^* := H(d^*) \qquad d^* := \arg \operatorname*{opt}_{d \in \Delta} \{H(d)\}$$

Пусть H — целевая функция нескольких переменных.

Оптимум такой задачи можно найти либо *полным перебором*, либо *последовательным принятием решений*:

$$\begin{aligned} H^* &= \operatorname*{opt}_{\langle d_1,\dots,d_n\rangle \in \Delta} \{H(d_1,\dots,d_n)\} \\ &= \operatorname*{opt}_{d_1 \in D_1} \{ \operatorname*{opt}_{d_2 \in D_2} \{\dots \{ \operatorname*{opt}_{d_n \in D_n} \{h(d_1,\dots,d_n)\}\} \dots \}\} \\ &= \operatorname*{opt}_{d_1 \in D_1} \{H(d_1, d_2^*(d_1), \dots, d_n^*(d_1))\} \end{aligned}$$

$\Delta = D_1 \times \cdots \times D_n$ — пространство решений;
$D_n(d_1,\dots,d_{n-1})$ — множество решений, которое зависит от предыдущих $\langle d_1,\dots,d_{n-1}\rangle$ решений;
$d_i^*(d_1,\dots,d_{i-1})$ — локальный выбор d, оптимизирующий H.

Распределение ресурсов

В задаче на *оптимальное распределение ресурсов* требуется разделить ограниченное число ресурсов на множество их

потребителей, у которых есть стоимость.

Общая формула:

$$f(k,m) = \min_{d \in \{0,\dots,m\}} \{C(k,d) + f(k+1, m-d)\}$$

Теория множеств

Открытое множество

ε-окрестность точки $x_0 \in X$ метрического пространства $\langle X, d\rangle$ — такое множество точек $x \in X$, что $d(x_0, x) < \varepsilon$.

Упрощённая запись $\{x \mid d(x_0, x) < \varepsilon\} =: U_\varepsilon(x_0)$.

Особые случаи:

$$U_\varepsilon(+\infty) := (1/\varepsilon; +\infty)$$
$$U_\varepsilon(-\infty) := (-\infty; -1/\varepsilon)$$

Проколотой называется ε-окрестность точки x_0 без неё:

$$\mathring{U}_\varepsilon(x_0) := U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$$

Правосторонней (левосторонней) называется ε-окрестность точки x_0 без левой (правой) половины:

$$U_{\varepsilon+}(x_0) := [x_0; \varepsilon) \qquad U_{\varepsilon-}(x_0) := (\varepsilon; x_0]$$

Ограниченное множество

Множество M ограничено *сверху*, если

$$\forall m \in M\ \exists C \in \mathbb{R} : m \le C.$$

Точной *(минимальной*, англ. *supremum)* называется такая *верхняя* граница множества M — $\sup M$, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in M : m \in U_{\varepsilon-}(\sup M).$$

Множество M ограничено *снизу*, если

$$\forall m \in M\ \exists C \in \mathbb{R} : m \ge C.$$

Точной *(максимальной*, англ. *infimum)* называется такая *нижняя* граница множества M — $\inf M$, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in M : m \in U_{\varepsilon+}(\inf M).$$

Принцип Кантора

Последовательность вложенных отрезков содержит точки ξ, которые принадлежат им всем:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \xi \in [a_n; b_n] \subset [a_{n-1}; b_{n-1}]$$

Если $n \to \infty$, $(b_n - a_n) \to 0$, то ξ единственна:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n\} = \xi$$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n\}$$

Значит, $\forall (n \in \mathbb{N},\ \xi \in [\sup\{a_n\}; \inf\{b_n\}])\ \xi \in [a_n; b_n]$. □

Если $\inf\{b_n\} = \sup\{a_n\}$, то ξ единственна:

$$0 = \inf\{b_n\} - \sup\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n)$$ ■

Локальный экстремум

Локальный **максимум** функции f — такая точка x_0, что

$$\exists \delta > 0 \colon \sup U_\delta(x_0) = f(x_0).$$

Локальный **минимум** функции f — такая точка x_0, что

$$\exists \delta > 0 \colon \inf U_\delta(x_0) = f(x_0).$$

Их объединяют в точки *локального* **экстремума**.

Критической называется такая точка x_0, что

$$\begin{bmatrix} f'(x_0) = 0 \ \textit{(стационарна)} \\ f'(x_0) = \text{undefined} \end{bmatrix}$$

Комбинаторика

Принципы подсчёта

Правило сложения. Пусть S — конечное множество, образованное объединением подмножеств $S_1, \dots, S_k$. Тогда:

$$|S| = |S_1| + \dots + |S_k|$$

Правило умножения. Пусть S — конечное множество, кото-рое есть декартово произведение $S_1 \times \dots \times S_k$. Тогда:

$$|S| = |S_1| \times \dots \times |S_k|$$

Правило вычитания. Пусть S — подмножество конечного множества T, $\bar{S}$ — его комплемент. Тогда:

$$|S| = |T| - |\bar{S}|$$

Принцип Дирихле. Пусть $S_1, \dots, S_m$ — конечные непересекающиеся множества, причём:

$$|S_1| + \dots + |S_m| = n$$

Тогда существуют такие $i,j \in [1;m] \cap \mathbb{N}$, что:

$$|S_i| \geq \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \quad |S_j| \leq \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$$

Основные понятия

Пусть X — конечное множество, $n := |X|$, $[m] := [1;m] \cap \mathbb{N}$.

Упорядоченное разбиение m элементов из X — соответствие

$$s\colon [m] \to X.$$

Неупорядоченное разбиение m элементов из X — множество S мощностью m с элементами из X.

Перестановка — упорядоченное биективное разбиение:

$$P_n\colon [n] \to X, \quad P_n = n!$$

k-Размещение — упорядоченное инъективное разбиение:

$$A_n^k\colon [k] \to X, \quad A_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}}$$

k-Сочетание — неупорядоченное инъективное разбиение:

$$C_n^k\colon [k] \to X, \quad C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}, \quad C_n^k \equiv \binom{n}{k}$$

Полиномиальная теорема

Полиномиальными называются коэффициенты $\binom{n}{k_1,\dots,k_r}$ многочлена при $k_1,\dots,k_r \in \mathbb{N}_0$:

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_1,\dots,k_r \geq 0 \\ k_1+\dots+k_r=n}} \binom{n}{k_1,\dots,k_r} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$$

Теорема. Для $k_1,\dots,k_r \geq 0$ с $k_1 + \dots + k_r = n$ справедливо:

$$\binom{n}{k_1,\dots,k_r} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{n-k_1-\dots-k_{r-1}}{k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!}$$

Доказательство. Раскроем скобки:

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{i_1=1}^{r} \dots \sum_{i_n=1}^{r} x_{i_1} \dots x_{i_n}$$

Одночлен $x_1 \dots x_r$ равен $x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$, если среди индексов $i_1,\dots,i_n$ ровно k_j равны $j \in [1;r] \cap \mathbb{Z}$.

Выбор k_j индексов происходит среди $n - k_1 - \dots - k_{j-1}$ оставшихся. Поэтому таких упорядоченных выборок $\binom{n-k_1-\dots-k_{j-1}}{k_j}$:

$$\binom{n}{k_1,\dots,k_r} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{n-k_1-\dots-k_{r-1}}{k_r} \square$$

По формуле сочетаний:

$$\frac{n!}{k_1!\cancel{(n-k_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k_1)!}}{k_2!\cancel{(n-k_1-k_2)!}} \cdot \dots \cdot \frac{\cancel{(n-k_1-\dots-k_{r-1})!}}{k_r!(n-k_1-\dots-k_r)} = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r! \cdot 0!} = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!} \blacksquare$$

Формула Паскаля

Для $n \geq 1$ и $0 \leq k \leq n$ справедливо:

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r} = \sum_{i=1}^{r} \binom{n-1}{k_1, \ldots, k_i - 1, \ldots, k_r}$$

Доказательство. Раскроем скобки:

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_r \\ k_1 + \cdots + k_r = n}} \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}$$

Раскроем скобки иначе:

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = (x_1 + \cdots + x_r)(x_1 + \cdots + x_r)^{n-1}$$

$$= (x_1 + \cdots + x_r) \cdot \sum_{\substack{k_1', \ldots, k_r' \\ k_1' + \cdots + k_r' = n-1}} \binom{n-1}{k_1', \ldots, k_r'} x_1^{k_1'} \ldots x_r^{k_r'}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{\substack{k_1', \ldots, k_r' \\ k_1' + \cdots + k_r' = n-1}} \binom{n-1}{k_1', \ldots, k_r'} x_1^{k_1'} \ldots x_i^{k_i'+1} \ldots x_r^{k_r'}$$

Произведём замену индексов $k_i := k_i' + 1$, $k_j := k_j'$ $(i \neq j)$:

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n =$$

$$\sum_{\substack{k_1, \ldots, k_r \\ k_1 + \cdots + k_r = n-1}} \sum_{i=1}^{r} \binom{n-1}{k_1, \ldots, k_i - 1, \ldots, k_r} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r} \blacksquare$$

Принцип включения-исключения

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — конечные множества. Тогда верно:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left| \bigcap_{j=1}^{n} A_j \right|$$

Доказательство. Пусть $x \in \bigcup_i^n A_i$, причём x содержится в k множествах $A_1, \ldots, A_k$.

Левая часть формулы — 1. Докажем, что правая часть тоже:

$\binom{k}{1}$ раз x встречается во множествах мощностью 1;

...

$\binom{k}{k}$ раз x встречается во множестввх мощностью k.

Подставляем биномиальные коэффициенты в формулу:

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \cdots + (-1)^{k+1}\binom{k}{k} = \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{i+1}$$

По определению биномиальных коэффициентов:

$$\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{i+1} = \binom{k}{0} - \sum_{i=0}^{k}(-1)^i 1^{k-i} = \binom{k}{0} - (1-1)^k = 1 \blacksquare$$

Правило биекции

Пусть $f : X \to Y$ — биективное соответствие, где X, Y — конечные множества. Тогда:

$$|X| = |Y|$$

Задача. *Сколько подмножеств имеет n-множество?*

Решение. Пусть Y — n-множество.

Пусть $\overline{x_1 \ldots x_n}$ — бинарная n-строка, где x_i указывает на наличие i-го элемента в произвольном множестве $\mathcal{P}(Y)$.

Пусть $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ — соответствие, где X — множество всех возможных бинарных n-строк. Очевидно, что:

$$f \text{ — биекция } \implies |Y| = |X|$$

По правилу умножения:

$$|X| = 2^n \implies |\mathcal{P}(Y)| = 2^n$$

Ответ: $|\mathcal{P}(Y)| = 2^n$.

Биномиальные коэффициенты

Свойство 1. Для $n \in \mathbb{N}$ и $r \in [0; n] \cap \mathbb{Z}$ верно:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Доказательство. Пусть A — n-множество, из которого нужно выбрать B — r-подмножество.

По определению биномиальных коэффициентов:

$$\begin{matrix}\text{число неупорядоченных} \\ \text{выборок } B\end{matrix} = \binom{n}{r}$$

С другой стороны, рассмотрим комплемент $A \backslash B$:

$$\begin{matrix}\text{число неупорядоченных} \\ \text{выборок } A\backslash B\end{matrix} = \binom{n}{n-r}$$

Пусть $f : A_1 \to A_2$ — биективное соответствие, $A_1 = A_2 = A$.

Любой элемент $x \in B \subset A_1$ можно сопоставить $x \in A \backslash B \subset A_2$. Значит, числа таких сопоставлений равны:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \blacksquare$$

Свойство 2. Для $n \in \mathbb{N}$ верно:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$$

Доказательство. Пусть A — n-множество, для которого посчитаем $|\mathcal{P}(A)|$.

С одной стороны, $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ по доказанному.

С другой стороны, посчитаем $|\mathcal{P}(A)|$ через биномиальные коэффициенты: есть $\binom{n}{r}$ способов выбрать r-подмножество.

По правилу сложения:

$$|\mathcal{P}(A)| = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \implies \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n \blacksquare$$

Метод шаров и перегородок

Число способов составить r-мультимножество из n-множества равно:

$$\left(\!\binom{n}{r}\!\right) := \binom{n+r-1}{r} = \left(\!\binom{n}{k-1}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right)$$

Доказательство. Для подсчёта числа всех возможных r-мультимножеств введём $n-1$ *перегородок* — считается, что элементы между двумя соседними перегородками равны.

Таким образом, число способов заполнить $n+r-1$ позиций с выбором r шаров *(или вставкой n-1 перегородок)* равно:

$$\binom{n+r-1}{r} \square$$

По формуле Паскаля:

$$\left(\!\binom{n}{k-1}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) = \binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-2}{k}$$
$$= \binom{n+k-1}{k} \blacksquare$$

Задача. Посчитать число неотрицательных целых решений

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 22.$$

Решение. Методом полного перебора, $x_4 \in \{0,1,2,3\}$.

По методу шаров и перегородок:

$$\left[\begin{array}{lll} x_4 = 0 \implies 3(x_1+x_2+x_3) = 22 & \iff & \text{решений нет} \\ x_4 = 1 \implies 3(x_1+x_2+x_3) = 15 & \iff & x_1+x_2+x_3 = 5 \\ x_4 = 2 \implies 3(x_1+x_2+x_3) = 8 & \iff & \text{решений нет} \\ x_4 = 3 \implies 3(x_1+x_2+x_3) = 1 & \iff & \text{решений нет} \end{array}\right.$$

$$\iff \left(\!\binom{3}{5}\!\right) = \binom{7}{5} = 21$$

Ответ: 21 решение.

Правило деления

Пусть $f : X \to Y$ — отображение *k-к-одному*, где X, Y — конечные множества. Тогда:

$$|X| = 4\,|Y|$$

Задача. Сколько существует рассадок 4 рыцарей вокруг стола? Две рассадки эквивалентны, если одну можно получить из другой поворотом.

Решение. Пусть $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ — множество рыцарей, X — множество 4-строк вида $\overline{x_j \ldots x_k},\ 1 \le j, k \le 4,\ i \ne j$.

Пусть $f : X \to Y$ — соответствие, где Y — множество всех возможных рассадок для A. Очевидно, что:

$$f \text{ — } n\text{-к-одному} \implies 4\,|Y| = |X| \iff |Y| = |X|\,/4$$

По правилу умножения:

$$|X| = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_4 = 24 \implies |Y| = 24/4 = 6$$

Ответ: $|Y| = 6$.

Число Стирлинга

Число Стирлинга второго порядка — количество способов разбить n-множество на k подмножеств:

$$C(n,k) \equiv \left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$

Частные случаи:

$$\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0 \qquad \left\{ {n \atop 1} \right\} = 1 \qquad \left\{ {n \atop n} \right\} = 1 \qquad \left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$$

Доказательство. Скоро... наверное.