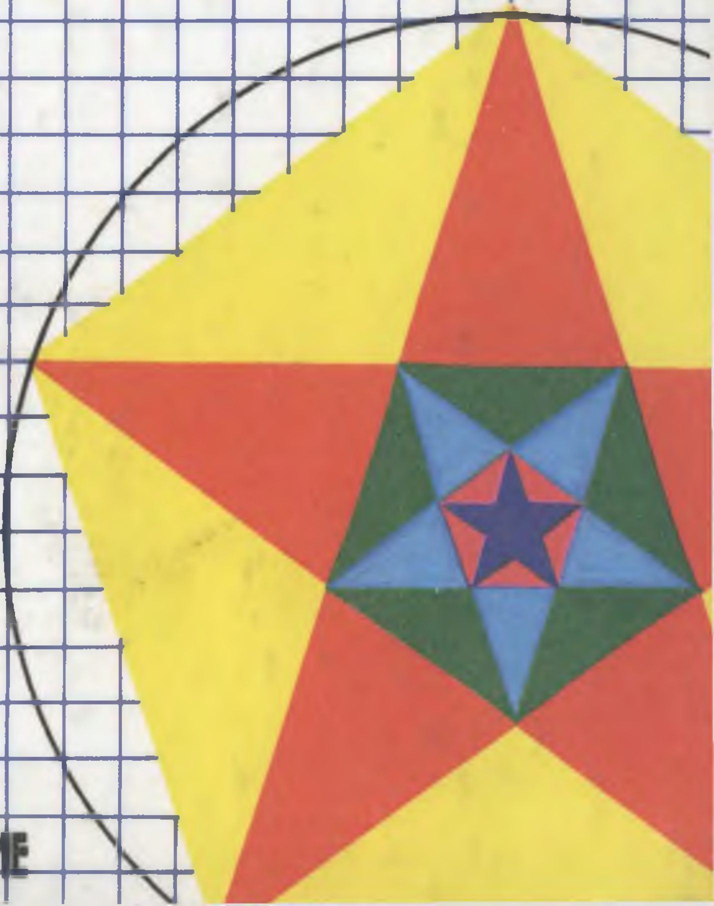
ГЕОМЕТРИЯ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ К ШКОЛЬНОМУ УЧЕБНИКУ

9



ПРОСВЕЩЕНИЕ

ГЕОМЕТРИЯ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ К ШКОЛЬНОМУ УЧЕБНИКУ 9 КЛАССА

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ШКОЛ И КЛАССОВ
С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ**

*ДОПУЩЕНО
МИНИСТЕРСТВОМ ОБЩЕГО
И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ*

Москва
«Просвещение»
1997

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Г36

Авторы:
Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, И. И. Юдина

Рецензенты:
учитель-методист школы № 1857 Москвы *Е. С. Смирнова*,
учитель-методист школы № 420 Москвы *Б. П. Пигарев*

Геометрия: Доп. главы к шк. учеб. 9 кл.: Учеб. пособие для
Г36 учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. математики / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, И. И. Юдина.— М.: Просвещение, 1997.—176 с.: ил.— ISBN 5-09-007499-2.

Настоящее пособие является дополнением к учебнику «Геометрия, 7—9» авторов Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова и др. (М.: Просвещение, 1990 и последующие издания). Оно полностью соответствует программе углубленного изучения математики.

Книга может быть использована также в классах общеобразовательных учреждений для индивидуальной работы с учащимися, проявляющими интерес к математике, на факультативных занятиях и в работе математического кружка.

ББК 22.151я72

ISBN 5-09-007499-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие предназначено для школ и классов с углубленным изучением математики. Оно является дополнением к основному учебнику «Геометрия, 7—9» Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Э. Г. Позняка, И. И. Юдиной (М.: Просвещение, 1990 и последующие издания). Пособие содержит дополнительные материалы по темам, изучаемым в 9-м классе (главы X—XIII основного учебника). Каждой главе основного учебника соответствует глава в пособии, содержащая теоретический и задачный материал, предназначенный в первую очередь для классов с углубленным изучением математики, для математических кружков и факультативов.

Структура глав пособия в целом такая же, как и в вышедшем ранее учебном пособии «Геометрия. Дополнительные главы к школьному учебнику 8 класса» Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, С. А. Шестакова, И. И. Юдиной (М.: Просвещение, 1996). Каждая глава разбита на параграфы, а параграфы — на пункты. По ходу изложения теоретического материала даются задачи с решениями, в конце параграфа приведены задачи для самостоятельной работы, к большинству из них даны ответы и указания.

Содержание дополнительных глав расширяет и углубляет геометрические сведения, представленные в основном учебнике. Так, в главе «Метод координат», с которой начинается пособие, наряду с уравнениями прямой и окружности рассматриваются уравнения параболы, гиперболы, эллипса, изучаются свойства этих линий, затронут вопрос об уравнениях симметричных кривых. В следующей главе широко представлено применение тригонометрического аппарата и скалярного произведения векторов при доказательстве теорем и решении задач. В третьей главе, посвященной понятиям длины и площади, содержится информация о полуправильных многоугольниках; о том, какие правильные многоугольники можно построить с помощью циркуля и линейки, а какие — нет; как ввести длину произвольной кривой и площадь произвольной фигуры. Мы возвращаемся здесь (и также в других местах) к некоторым задачам, о которых шла речь в пособии с дополнительными главами по 8-му классу (ссылка на это пособие дается в виде «ДГ-8», пункт такой-то). В частности, удается без привлечения аппарата высшей математики дать решение изопериметрической задачи, т. е. задачи о кривой заданной длины, ограничивающей фигуру наибольшей площади.

Последняя глава пособия посвящена геометрическим преобразованиям. Если в основном учебнике соответствующая глава затрагивает только вопрос о движениях, то здесь наряду с движениями подробно изучаются и другие геометрические преобразования: центральное подобие, инверсия. С помощью преобразований решается целый ряд интересных и красивых задач, например задача об окружности Эйлера, задача Аполлония и многие другие.

Большой объем материала, представленного в дополнительных главах, не дает возможности изучить его полностью за время, отведенное на уроки геометрии. Мы полагаем, что каждый учитель, желающий воспользоваться данным пособием, отберет сам по своему вкусу и учитывая интересы учащихся те разделы, которые будут проработаны на уроках геометрии, на факультативных занятиях или математическом кружке.

Некоторые пункты отмечены звездочкой. При рассмотрении темы, к которой относится такой пункт, в случае недостатка времени его можно опустить.

Мы надеемся, что наша книга окажется интересной и полезной для всех, кто связан с углубленным изучением математики в школе.

Авторы

ГЛАВА I

МЕТОД КООРДИНАТ

§ 1. Уравнения прямой и окружности

1. Координаты точек и векторов. Напомним основные понятия и формулы, связанные с координатами точек и векторов.

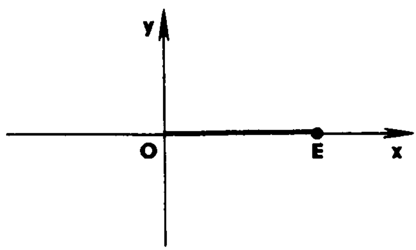
Если на плоскости проведены две взаимно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление и выбрана единица измерения отрезков, то говорят, что задана *прямоугольная система координат* (рис. 1). В заданной системе координат каждой точке M сопоставляется пара чисел $(x;\ y)$ — ее координаты (x — абсцисса, y — ордината). Рисунок 2 поясняет, как определяются координаты точки M.

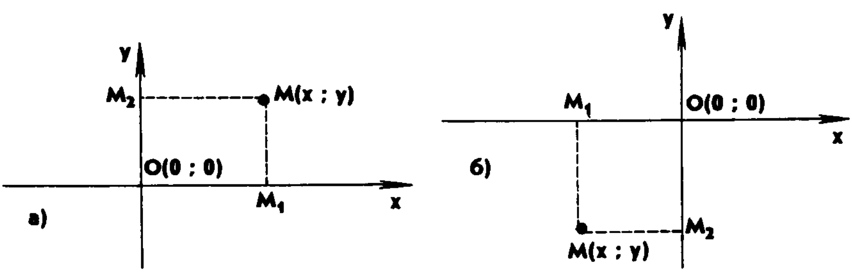
Расстояние d между точками $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ вычисляется по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Система координат Oxy:
точка O — начало координат,
Ox — ось абсцисс,
Oy — ось ординат,
отрезок OE — единица измерения отрезков

Рис. 1





$x=OM_1$ — абсцисса точки M,
$y=OM_2$ — ордината точки M

$x=-OM_1$ — абсцисса точки M,
$y=-OM_2$ — ордината точки M

Рис. 2

Координаты $(x;\ y)$ середины отрезка, соединяющего точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$, выражаются формулами

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Координаты произвольного вектора $\vec{p}$ в данной прямоугольной системе координат вводятся с помощью разложения вектора $\vec{p}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ (рис. 3). Если $\vec{p}=x\vec{i}+y\vec{j}$, то коэффициенты разложения x и y называются *координатами вектора* $\vec{p}$ в данной системе координат. Их записывают в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{p}\{x;\ y\}$.

Если точка A имеет координаты $(x_1;\ y_1)$, а точка B — координаты $(x_2;\ y_2)$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{x_2-x_1;\ y_2-y_1\}$, т. е. каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

Длина вектора $\vec{p}\ \{x;\ y\}$ выражается формулой

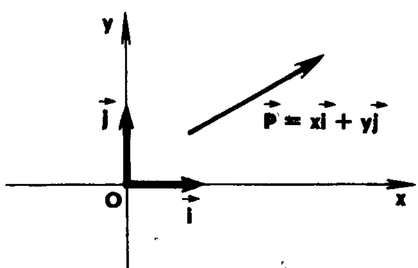
$$|\vec{p}|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Задача 1. Доказать, что три данные точки A, B и C лежат на одной прямой, причем точка B лежит между A и C, тогда и только тогда, когда для любой точки M выполняется равенство

$$MA^2\cdot BC+MC^2\cdot AB-MB^2\cdot CA=AB\cdot BC\cdot CA. \qquad (1)$$

Решение. В данной задаче содержатся два утверждения. Первое связано со словом «тогда» и состоит в том, что если для любой точки M выполнено равенство (1), то точки A, B и C лежат на одной прямой, причем точка B лежит между A и C.

Второе утверждение связано со словами «только тогда» и является обратным к первому утверждению. Его можно сформули-



$\vec{i}$ и $\vec{j}$ — координатные векторы, их длины равны единице

Рис. 3

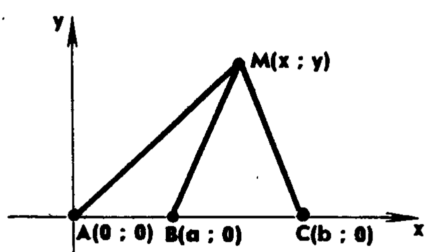


Рис. 4

ровать так: если три точки A, B и C лежат на одной прямой, причем точка B лежит между точками A и C, то для любой точки M выполняется равенство (1).

Докажем сначала второе утверждение. С этой целью введем прямоугольную систему координат с началом в точке A так, чтобы точки B и C лежали на положительной полуоси абсцисс. Тогда точка A имеет координаты (0; 0), а точки B и C — координаты (a; 0) и (b; 0), где a и b — некоторые числа, причем $0<a<b$ (рис. 4). Поэтому $AB=a$, $AC=b$, $BC=b-a$. Возьмем произвольную точку $M(x; y)$ и по формуле расстояния между двумя точками выразим MA^2, MB^2 и MC^2:

$$MA^2=x^2+y^2,\ MB^2=(x-a)^2+y^2,\ MC^2=(x-b)^2+y^2.$$

Используя эти выражения, получаем

$$MA^2\cdot BC+MC^2\cdot AB-MB^2\cdot CA=(b-a)(x^2+y^2)+$$
$$+a((x-a)^2+y^2)-b((x-b)^2+y^2)=ab(b-a).$$

С другой стороны,

$$AB\cdot BC\cdot CA=ab(b-a).$$

Правые части в полученных двух равенствах одинаковы, поэтому равны и левые части, т. е. справедливо равенство (1).

Докажем теперь первое утверждение. Это легко сделать и не прибегая к методу координат. Пусть равенство (1) выполнено для любой точки M. Возьмем в качестве точки M точку B. Тогда $MB=0$ и из равенства (1) получаем

$$AB^2\cdot BC+BC^2\cdot AB=AB\cdot BC\cdot CA.$$

Разделив на произведение $AB\cdot BC$, приходим к равенству

$$AB+BC=AC.$$

Отсюда следует, что три данные точки A, B и C лежат на одной прямой, причем точка B лежит между A и C (при любом другом расположении точек A, B и C равенство $AB+BC=AC$, очевидно, не выполняется). ■ *

Доказанные утверждения называются теоремой Стюарта по имени шотландского астронома и математика Мэтью Стюарта (1717—1785), сформулировавшего ее в 1746 г. Предполагают, что эта теорема была известна намного раньше и была открыта Архимедом еще в III в. до н. э.

Рассмотрим теперь две задачи, связанные с координатами векторов.

---

* Для удобства читателя иногда используются значки □ и ■, чтобы отметить начало и окончание доказательства какого-то утверждения или решения задачи.

З а д а ч а 2. Доказать, что два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда координаты одного вектора пропорциональны координатам другого.

Р е ш е н и е. Рассмотрим векторы $\vec{p}_1\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{p}_2\{x_2;\ y_2\}$. Пропорциональность координат одного вектора координатам другого означает, что

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}. \tag{2}$$

Условимся придавать смысл равенству (2) и в том случае, когда x_2 или y_2 или оба этих числа равны нулю. А именно независимо от того, отличны от нуля x_2 и y_2 или какое-то из них равно нулю, будем считать равенство (2) верным тогда и только тогда, когда

$$x_1y_2=x_2y_1. \tag{3}$$

Таким образом, мы считаем, что координаты векторов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ пропорциональны, если выполняется равенство (3).

1) Докажем сначала, что если $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$, то координаты векторов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ пропорциональны. Если вектор $\vec{p}_1$ нулевой, то его координаты равны нулю, поэтому равенство (3) верно и, следовательно, координаты векторов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ пропорциональны. Пусть вектор $\vec{p}_1$ ненулевой. Тогда по лемме о коллинеарных векторах существует число k, такое, что $\vec{p}_2=k\vec{p}_1$. Отсюда следует, что $x_2=kx_1$, $y_2=ky_1$, поэтому $x_2y_1=kx_1y_1$, $x_1y_2=kx_1y_1$, т. е. $x_1y_2=x_2y_1$. Таким образом, выполняется равенство (3), а это означает, что координаты векторов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ пропорциональны.

2) Докажем обратное утверждение. Пусть выполнено равенство (3). Докажем, что $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$. Если $\vec{p}_1=\vec{0}$, то $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$ (нулевой вектор по определению коллинеарен любому вектору). Если же $\vec{p}_1 \neq \vec{0}$, то хотя бы одна из координат вектора $\vec{p}_1$ отлична от нуля. Пусть, например, $x_1 \neq 0$. Тогда из равенства (3) получаем $y_2=\frac{x_2}{x_1}y_1$, т. е. $y_2=ky_1$, где $k=\frac{x_2}{x_1}$.

Итак, $x_2=kx_1$, $y_2=ky_1$, поэтому $\vec{p}_2=k\vec{p}_1$. Отсюда следует, что векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ коллинеарны. ■

В процессе решения задачи 2 мы доказали два утверждения, содержащиеся в ее формулировке. Подумайте и ответьте на вопрос: какое из них относится к слову «тогда» и какое — к словам «только тогда»?

Вторая задача, которую мы сейчас рассмотрим, связана с перпендикулярными векторами. Введем понятие перпендикулярных векторов. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два ненулевых вектора. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Если

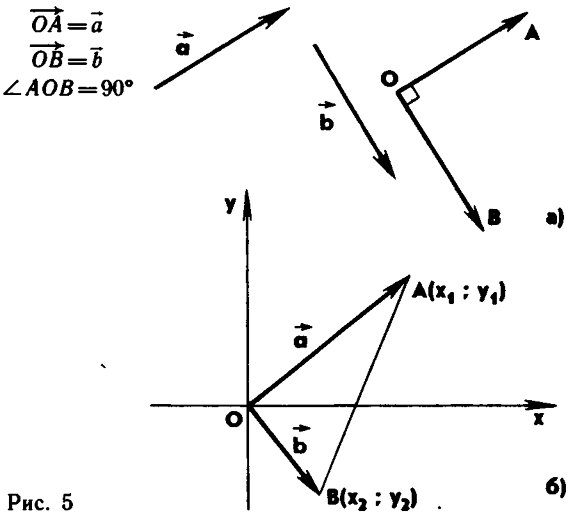


Рис. 5

$\angle AOB=90°$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *перпендикулярными* (рис. 5, *а*). Это обозначают так: $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Задача 3. Доказать, что ненулевые векторы $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$x_1x_2+y_1y_2=0. \tag{4}$$

Решение. Отложим от начала координат векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ (рис. 5, *б*). Тогда координаты точки A равны $(x_1;\ y_1)$, а координаты точки B равны $(x_2;\ y_2)$.

Ясно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда треугольник AOB прямоугольный с прямым углом O, а это будет тогда и только тогда, когда

$$AB^2=OA^2+OB^2. \tag{5}$$

Выразим входящие в это равенство величины через координаты точек A и B:

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,\ OA^2=x_1^2+y_1^2,\ OB^2=x_2^2+y_2^2.$$

Подставляя эти выражения в равенство (5), после несложных преобразований приходим к равенству (4):

$$x_1x_2+y_1y_2=0,$$

которое равносильно равенству (5).

Итак, $\vec{a}\perp\vec{b}$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство (4). ■

2. Уравнение прямой. Напомним, что уравнение с двумя переменными x и y называется уравнением линии L в заданной прямоугольной системе координат Oxy, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки линии L и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.

Задача 4. Вывести уравнение прямой, проходящей через две точки M_1 и M_2, которые заданы своими координатами в прямоугольной системе координат.

Решение. Координаты данных точек M_1 и M_2 в заданной прямоугольной системе координат обозначим $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ (рис. 6). Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ имеет координаты $\{x_2-x_1; y_2-y_1\}$. Если точка $M(x; y)$ лежит на прямой M_1M_2, то векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарны и, следовательно, согласно задаче 1 координаты вектора $\overrightarrow{M_1M}\{x-x_1; y-y_1\}$ пропорциональны координатам вектора $\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2-x_1; y_2-y_1\}$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (6)$$

Если же точка $M(x; y)$ не лежит на прямой M_1M_2, то векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ не коллинеарны и поэтому согласно задаче 2 координаты точки M не удовлетворяют уравнению (6).

Итак, в прямоугольной системе координат уравнением прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, является уравнение (6). ■

Согласно нашей договоренности о равносильности равенств (2) и (3) уравнение (6) можно записать в виде

$$(y_2-y_1)(x-x_1)=(x_2-x_1)(y-y_1). \qquad (7)$$

Отсюда следует, что если $x_1=x_2$ (при этом $y_1 \neq y_2$, так как точки M_1 и M_2 различные), то уравнение прямой M_1M_2 принимает вид

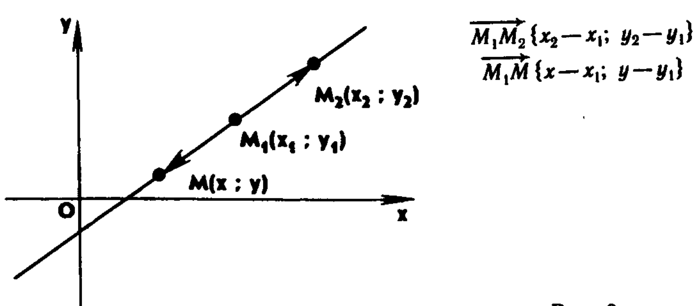
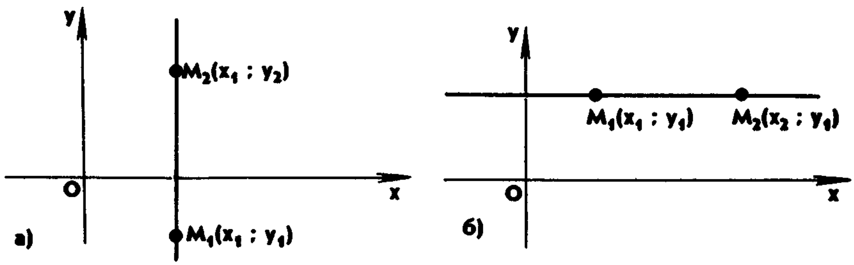


Рис. 6



$x-x_1=0$ — уравнение прямой M_1M_2 $y-y_1=0$ — уравнение прямой M_1M_2

Рис. 7

$x-x_1=0$. Очевидно, эта прямая параллельна оси Oy (рис. 7, *а*). Аналогично в случае $y_1=y_2$, $x_1\neq x_2$ уравнение прямой M_1M_2 имеет вид $y-y_1=0$. Эта прямая параллельна оси Ox (рис. 7, *б*).

Задача 5. Доказать, что уравнение

$$ax+by+c=0, \tag{8}$$

в котором хотя бы один из коэффициентов a и b не равен нулю, является уравнением прямой в прямоугольной системе координат Oxy.

Решение. Пусть, например, $a\neq 0$. Положив $y=0$, из уравнения (8) найдем x: $x=-\frac{c}{a}$. Аналогично, положив $y=1$, из уравнения (8) получим $x=-\frac{b+c}{a}$.

Рассмотрим две точки: $M_1\left(-\frac{c}{a};\ 0\right)$ и $M_2\left(-\frac{b+c}{a};\ 1\right)$. Напишем уравнение прямой M_1M_2, воспользовавшись уравнением (7). Для этого в уравнении (7) нужно положить $x_1=-\frac{c}{a}$, $y_1=0$, $x_2=-\frac{b+c}{a}$, $y_2=1$. В результате уравнение прямой M_1M_2 запишется в виде

$$(1-0)\left(x+\frac{c}{a}\right)=-\frac{b}{a}(y-0).$$

Умножив его на a и перенеся слагаемое $-by$ в левую часть, получим равносильное уравнение, которое совпадает с уравнением (8):

$$ax+by+c=0.$$

Таким образом, уравнение (8) является уравнением прямой M_1M_2. ■

Задача 6. Две прямые заданы уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$. Доказать, что эти прямые: а) параллельны тогда и

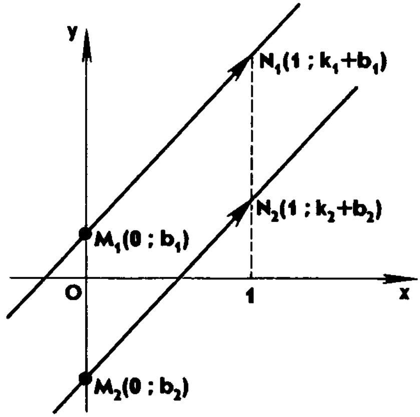


Рис. 8

только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$; б) перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1 k_2 = -1$.

Решение. Положив в уравнениях прямых $x=0$, получим из первого уравнения $y = b_1$, а из второго $y = b_2$. Следовательно, точка $M_1(0; b_1)$ лежит на первой прямой, а точка $M_2(0; b_2)$ — на второй прямой (рис. 8). Аналогично, положив $x=1$, получим, что точка $N_1(1; k_1+b_1)$ лежит на первой прямой, а точка $N_2(1; k_2+b_2)$ — на второй прямой. Отсюда следует, что вектор $\overrightarrow{M_1N_1}\{1; k_1\}$ лежит на первой прямой, а вектор $\overrightarrow{M_2N_2}\{1; k_2\}$ — на второй прямой (см. рис. 8).

а) Ясно, что данные прямые параллельны тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1N_1}$ и $\overrightarrow{M_2N_2}$ коллинеарны, и, следовательно, тогда и только тогда, когда координаты этих векторов пропорциональны, т. е. $\frac{1}{1} = \frac{k_1}{k_2}$, или $k_1 = k_2$. Так как данные прямые не совпадают, то $b_1 \neq b_2$. Итак, данные прямые параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$.

б) Аналогично данные прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1N_1}$ и $\overrightarrow{M_2N_2}$ перпендикулярны, и поэтому согласно задаче 3 тогда и только тогда, когда $1 \cdot 1 + k_1 k_2 = 0$, т. е. $k_1 k_2 = -1$. ■

3. Уравнение окружности. Вы знаете, что в прямоугольной системе координат Oxy уравнение окружности радиуса r с центром в точке $C(x_0; y_0)$ имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Рассмотрим две задачи, связанные с окружностями. Их решения будут основаны на введении прямоугольной системы координат и использовании уравнения окружности. Суть метода координат при решении геометрических задач как раз и состоит в том, что вводится подходящим образом система координат, и это дает возможность описывать заданные и искомые фигуры с помощью уравнений и неравенств.

Задача 7. Даны окружность и две точки A и B на этой окружности. Доказать, что если точка C движется по данной окружности, то точка пересечения медиан треугольника ABC движется по окружности, радиус которой втрое меньше радиуса данной окружности.

Решение. Введем прямоугольную систему координат Oxy с началом в центре данной окружности так, чтобы хорда AB была параллельна оси Ox, как на рисунке 9, *а*, либо лежала на оси Ox, если AB — диаметр окружности. Уравнение окружности в выбранной системе координат имеет вид

$$x^2+y^2=R^2, \qquad (9)$$

где R — радиус окружности. Пусть точка A имеет координаты $(a;\ b)$. Тогда координаты точки B равны $(-a;\ b)$. Пусть $C(\alpha;\ \beta)$ — произвольная точка данной окружности, отличная от A и B, $M(x;\ y)$ — точка пересечения медиан треугольника ABC. Как известно, каждая координата точки пересечения медиан треугольника равна среднему арифметическому соответствующих координат ее вершин. Поэтому

$$x=\frac{a+(-a)+\alpha}{3}=\frac{\alpha}{3},\quad y=\frac{b+b+\beta}{3}=\frac{2b+\beta}{3}.$$

Отсюда получаем

$$x^2=\frac{\alpha^2}{9},\quad \left(y-\frac{2b}{3}\right)^2=\frac{\beta^2}{9},$$

$$x^2+\left(y-\frac{2b}{3}\right)^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{9}. \qquad (10)$$

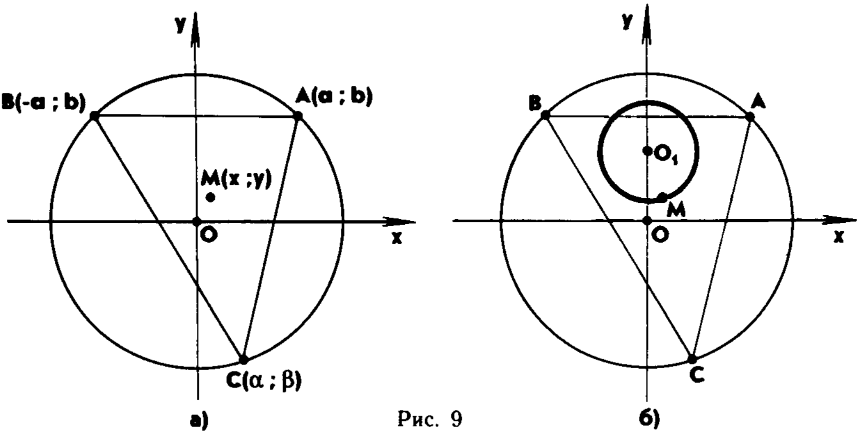


Рис. 9

Поскольку точка $C(\alpha;\ \beta)$ лежит на данной окружности, то ее координаты удовлетворяют уравнению (9), т. е. $\alpha^2+\beta^2=R^2$. Следовательно, равенство (10) можно записать в виде

$$x^2+\left(y-\frac{2b}{3}\right)^2=\left(\frac{R}{3}\right)^2. \qquad (11)$$

Итак, мы получили, что при любом выборе точки C координаты точки $M(x;\ y)$ пересечения медиан треугольника ABC удовлетворяют уравнению (11). Но это уравнение является уравнением окружности радиуса $\frac{R}{3}$ с центром в точке $O_1\left(0;\ \frac{2b}{3}\right)$ (рис. 9, *б*).

Таким образом, при движении точки C по данной окружности точка M пересечения медиан треугольника ABC движется по окружности, радиус которой втрое меньше радиуса данной окружности. ■

Задача 8. Даны две точки A, B и два числа α, β, не равные нулю. Найти множество всех точек M, для каждой из которых $\alpha AM^2+\beta BM^2=k$, где k — заданная величина.

Решение. Зададим прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 10, *а* (точка A — начало координат, точка B лежит на положительной полуоси абсцисс). Точка A имеет координаты (0; 0), точка B — координаты $(a;\ 0)$, где $a=AB$. Расстояния от произвольной точки $M(x;\ y)$ до точек A и B выражаются формулами

$$AM=\sqrt{x^2+y^2},\quad BM=\sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

Если точка $M(x;\ y)$ принадлежит искомому множеству, то $\alpha AM^2+\beta BM^2=k$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$\alpha(x^2+y^2)+\beta((x-a)^2+y^2)=k. \qquad (12)$$

Если же точка $M(x;\ y)$ не принадлежит искомому множеству, то $\alpha AM^2+\beta BM^2\neq k$ и поэтому координаты точки M не удовлетворяют уравнению (12). Следовательно, уравнение (12) и есть уравнение искомого множества в заданной системе координат.

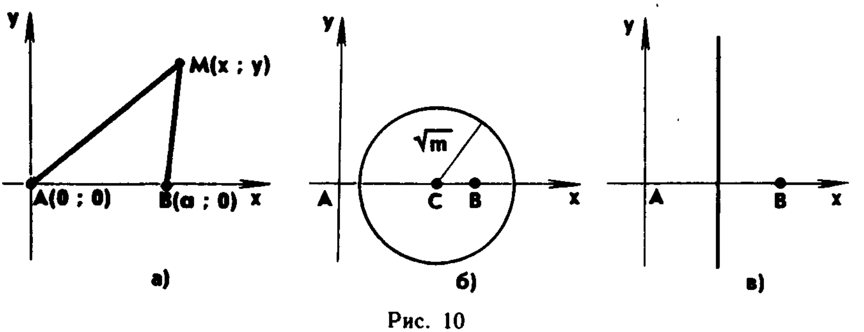


Рис. 10

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем уравнение

$$(\alpha+\beta)x^2-2\beta ax+(\alpha+\beta)y^2=k-\beta a^2. \qquad (13)$$

Далее рассмотрим два случая.

1) $\alpha+\beta\neq 0$. В этом случае, разделив на $\alpha+\beta$, приводим уравнение к виду

$$\left(x-\frac{\beta a}{\alpha+\beta}\right)^2+y^2=m,$$

где

$$m=\frac{k(\alpha+\beta)-\alpha\beta a^2}{(\alpha+\beta)^2}.$$

Если $m>0$, то искомое множество точек — окружность радиуса $\sqrt{m}$ с центром в точке $C\left(\frac{\beta a}{\alpha+\beta}; 0\right)$ (рис. 10, *б*). Если $m=0$, то искомое множество состоит из одной точки C, и, наконец, если $m<0$, то искомое множество является пустым, т. е. не содержит ни одной точки.

2) $\alpha+\beta=0$. В этом случае уравнение (13) принимает вид $-2\beta ax=k-\beta a^2$, или $x=\frac{\beta a^2-k}{2\beta a}$, т. е. искомое множество — прямая, перпендикулярная к отрезку AB (рис. 10, *в*). ■

Замечание. Отметим частный случай, когда $\alpha=1$, $\beta=-1$, т. е. искомое множество точек определяется равенством $AM^2-BM^2=k$. Так как в этом случае $\alpha+\beta=0$, то мы приходим к следующему утверждению: множество всех точек, для каждой из которых разность квадратов расстояний до концов данного отрезка равна заданной величине, представляет собой прямую, перпендикулярную к этому отрезку.

Задачи

1. Даны точки $A(-1; 2)$, $B(3; 6)$ и $C(1; -4)$. Найдите медиану AM треугольника ABC и координаты вектора $\overrightarrow{AM}$.

2. Вершины четырехугольника $ABCD$ имеют координаты: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, $D(x_4; y_4)$. Докажите, что этот четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда

$$x_1+x_3=x_2+x_4,\quad y_1+y_3=y_2+y_4.$$

3. Точки A и B имеют координаты: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Точка $C(x; y)$ делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении k, т. е. $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{CB}$. Выразите координаты точки C через координаты точек A и B.

4. Вершины треугольника ABC имеют координаты: $A(-1;\ 1)$, $B(2;\ 4)$, $C(\sqrt{3};\ \sqrt{3})$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Найдите координаты точки D.

5. В треугольнике ABC угол C прямой, $BC=8$, $AB=10$, отрезок BE — биссектриса треугольника. Найдите медиану EF треугольника ABE.

6. Точка F лежит на диагонали BD ромба $ABCD$, причем $BF:FD=2:3$, а точка E лежит на стороне BC, причем $BE:EC=2:1$. Докажите, что точка F принадлежит отрезку AE, и найдите отношение $AF:FE$.

7. Дан ненулевой вектор $\vec{p}\{p_1;\ p_2\}$. Напишите уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0;\ y_0)$: а) параллельно вектору $\vec{p}$; б) перпендикулярно вектору $\vec{p}$.

8. Даны точки $A(1;\ 2)$ и $B(-1;\ 3)$. Напишите уравнение: а) прямой AB; б) прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к прямой AB.

9. Даны точки $A(-1;\ 2)$, $B(3;\ -1)$ и $C(0;\ 4)$. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно прямой BC.

10. Прямая $y-mx-4=0$ пересекает оси координат Ox и Oy в точках A и B. При каких значениях m медиана OC треугольника AOB равна $\sqrt{7}$?

11. Вершины треугольника ABC имеют координаты: $A(0;\ 4)$, $B(3;\ 0)$, $C(-3;\ 0)$. Напишите уравнение прямой, содержащей биссектрису угла ACB.

12. Даны прямая p и две точки A и B, из которых хотя бы одна не лежит на прямой p. Докажите, что если точка C движется по прямой p, то точка пересечения медиан треугольника ABC движется по прямой, параллельной прямой p.

13. В треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Найдите AC и BC, если $AB=8$, $BH=5$, $HC_1=4$.

14. Найдите координаты основания перпендикуляра, проведенного из точки $M(4;\ 8)$ к прямой, проходящей через точки $C(2;\ 3)$ и $D(6;\ 1)$.

15. Докажите, что линия, заданная уравнением

$$x(x+2)=y(4-y),$$

является окружностью. Найдите ее радиус и координаты центра.

16. Напишите уравнение окружности, проходящей через три точки:

$$A(2;\ 2),\ B(-4;\ 2),\ C(3;\ 1).$$

17. Центр окружности, проходящей через точки $A(2;\ 3)$ и $B(5;\ 2)$, лежит на оси абсцисс. Напишите уравнение этой окружности.

18. Центр окружности, проходящей через точки $A(3;\ 0)$ и $B(-1;\ 2)$, лежит на прямой $x+y+2=0$. Напишите уравнение этой окружности.

19. В квадрат вписана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин квадрата имеет одно и то же значение для всех точек окружности.

20. Исследуйте взаимное расположение прямой, проходящей через точки $M_1(-4;\ -8)$ и $M_2(8;\ 1)$, и окружности радиуса 5 с центром в точке $A(1;\ 2)$.

21. С помощью метода координат исследуйте взаимное расположение прямой и окружности в зависимости от соотношения между радиусом r окружности и расстоянием d от центра окружности до прямой.

22. Напишите уравнения: а) окружности с центром $M(6;\ 7)$, касающейся прямой $5x-12y-24=0$; б) касательных к окружности $x^2+y^2-10x-4y+25=0$, проведенных из начала координат.

23. Выведите уравнение касательной, проходящей через точку $(x_1;\ y_1)$ окружности

$$(x-x_0^2)+(y-y_0^2)=r^2.$$

24. С помощью метода координат исследуйте взаимное расположение двух окружностей в зависимости от соотношения между их радиусами r_1 и r_2 и расстоянием d между их центрами.

25. Исследуйте взаимное расположение двух окружностей с центрами A_1 и A_2 и радиусами r_1 и r_2, если:

а) $A_1(1;\ 2)$, $A_2(0;\ 0)$, $r_1=2$, $r_2=1$;

б) $A_1(-2;\ 1)$, $A_2(1;\ -3)$, $r_1=2$, $r_2=3$;

в) $A_1(0;\ 2)$, $A_2(-1;\ 3)$, $r_1=1$, $r_2=3$.

26. Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых:

а) $2AM^2-BM^2=2AB^2$;

б) $AM^2+2BM^2=6AB^2$;

в) $BM^2-AM^2=2AB^2$.

27. Точка B лежит на отрезке AC, причем $BC=2AB$. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых:

а) $AM^2+BM^2+CM^2=9AB^2$;

б) $AM^2+4CM^2+3AB^2=3BM^2$.

28. Даны три точки A, B, C и три числа α, β, γ. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых сумма $\alpha AM^2+\beta BM^2+\gamma CM^2$ имеет постоянное значение, если:

а) $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$;

б) $\alpha+\beta+\gamma=0$.

§ 2. Парабола, гипербола, эллипс

4. Парабола. Рассмотрим следующую задачу:

Задача 1. Найти множество всех точек, для каждой из которых расстояние до данной прямой равно расстоянию до данной точки, не лежащей на данной прямой.

Решение. Пусть d — данная прямая, F — данная точка, p — расстояние между ними. Введем прямоугольную систему координат Oxy так, как показано на рисунке 11, *а*: прямая d параллельна оси абсцисс, причем расстояние между ними равно $\frac{p}{2}$ и уравнение прямой d имеет вид $y=-\frac{p}{2}$, а точка F имеет координаты $\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$. Выведем уравнение искомого множества точек в этой системе координат.

Для любой точки $M(x;\ y)$ расстояние MM' до прямой d равно $\left|y+\frac{p}{2}\right|$ (объясните почему), а расстояние MF равно $\sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}$. Если точка $M(x;\ y)$ принадлежит искомому множеству, то $MM'=MF$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$\left|y+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}. \qquad (1)$$

Если же точка $M(x;\ y)$ не принадлежит искомому множеству, то $MM' \neq MF$ и, следовательно, координаты точки M не удовлетворяют уравнению (1). Таким образом, уравнение (1) и есть уравнение искомого множества точек в выбранной системе координат. Преобразуем его к более простому виду. Возводя обе части уравнения в квадрат и приводя подобные члены, приходим к уравнению

$$y=\frac{1}{2p}x^2. \qquad (2)$$

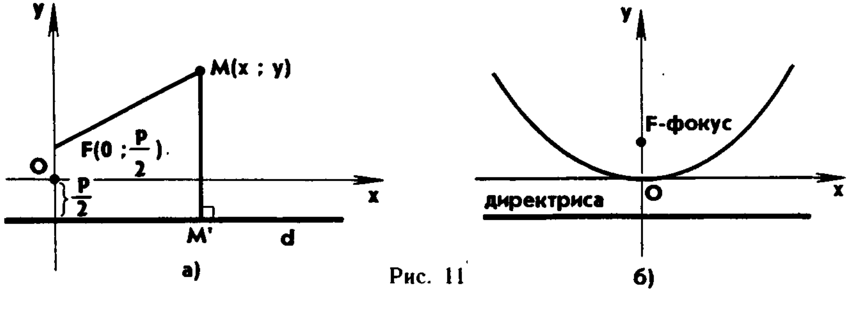


Рис. 11

Ясно, что если координаты точки $M(x;\ y)$ удовлетворяют уравнению (1), то они удовлетворяют и уравнению (2), так как уравнение (2) получено из (1). Верно и обратное: если координаты точки $M(x;\ y)$ удовлетворяют уравнению (2), то они удовлетворяют и уравнению (1). В самом деле, записав равенство (2) в виде $2py=x^2$ и прибавив к обеим частям слагаемое $\left(y-\frac{p}{2}\right)^2$, приходим к равенству

$$\left(y+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2,$$

откуда следует, что

$$\left|y+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2},$$

т. е. имеет место равенство (1).

Итак, уравнение (2) равносильно уравнению (1). Но уравнение (2) нам хорошо знакомо — это уравнение параболы. Таким образом, искомое множество точек представляет собой параболу.

Точка F называется *фокусом*, а прямая d — *директрисой* этой параболы (рис. 11, *б*). ■

Напомним, что в курсе алгебры параболой была названа кривая (линия), являющаяся графиком квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$. Оказывается, что для любой параболы существуют прямая (директриса параболы) и точка (фокус параболы), такие, что расстояние от любой точки параболы до директрисы равно расстоянию от этой точки до фокуса. Убедимся в этом на примере параболы, заданной уравнением $y=ax^2$. К этому простому виду сводится и более общее уравнение параболы $y=ax^2+bx+c$, если ввести новую систему координат $O'x'y'$ с началом в вершине параболы — точке $O'\left(-\frac{b}{2a};\ c-\frac{b^2}{4a}\right)$ и осями координат $O'x'$ и $O'y'$, сонаправленными с осями Ox и Oy (рис. 12). В новой системе координат $O'x'y'$ уравнение параболы принимает вид $y'=ax'^2$ (убедитесь в этом самостоятельно).

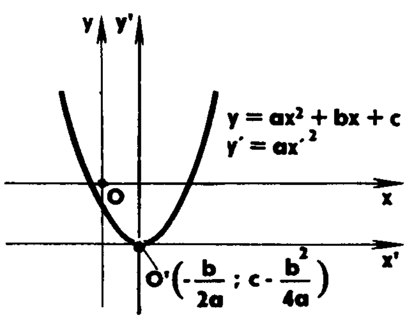
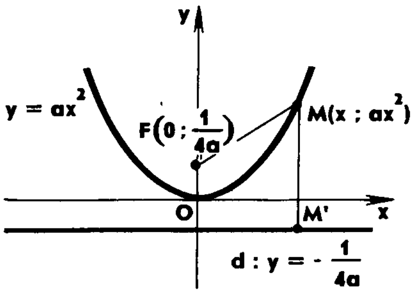


Рис. 12



Точка F — фокус параболы
Прямая d — директриса параболы

Рис. 13

Итак, рассмотрим параболу, заданную уравнением $y=ax^2$. Директрисой этой параболы является прямая d, заданная уравнением $y=-\frac{1}{4a}$, а фокусом — точка $F\left(0;\ \frac{1}{4a}\right)$ (рис. 13, на этом рисунке $a>0$). В самом деле, для произвольной точки $M\ (x;\ ax^2)$, лежащей на параболе, расстояние MM' до директрисы равно $ax^2+\frac{1}{4a}$ (см. рис. 13), а расстояние MF до фокуса равно $\sqrt{x^2+\left(ax^2-\frac{1}{4a}\right)^2}$. Преобразуя подкоренное выражение, получаем, что

$$MF=\sqrt{\left(ax^2+\frac{1}{4a}\right)^2}=ax^2+\frac{1}{4a}.$$

Итак, $MM'=MF$.

Полученный нами результат позволяет сформулировать определение параболы, не связанное с выбором системы координат:

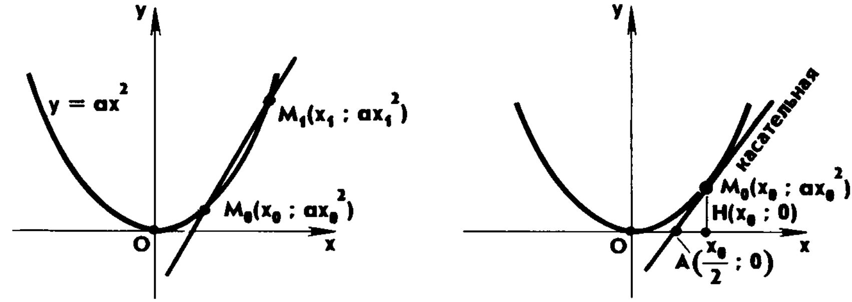
параболой называется линия, состоящая из всех таких точек, для каждой из которых расстояние до данной прямой (директрисы параболы) равно расстоянию до данной точки (фокуса параболы), не лежащей на директрисе.

5. Касательная к параболе. Рассмотрим параболу, заданную уравнением $y=ax^2$. Возьмем на параболе произвольную точку $M_0\ (x_0;\ ax_0^2)$ и попробуем найти касательную к параболе в этой точке. Напомним, что касательной к кривой в данной точке M_0 мы назвали предельное положение секущей M_0M_1 при условии, что точка M_1 стремится к точке M_0 по данной кривой («ДГ-8», п. 42).

Задача 2. Вывести уравнение касательной к параболе $y=ax^2$ в точке $M_0\,(x_0;\ ax_0^2)$.

Решение. Воспользуемся определением касательной. Возьмем на параболе точку $M_1\,(x_1;\ ax_1^2)$, отличную от точки $M_0\,(x_0;\ ax_0^2)$, и проведем секущую M_0M_1 (рис. 14, a, на этом рисунке $a>0$). Уравнение секущей M_0M_1 имеет вид (см. уравнение (6) в п. 2)

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-ax_0^2}{ax_1^2-ax_0^2}.$$



а) Прямая M_0M_1 — секущая б)

Рис. 14

Умножив это равенство на $x_1 - x_0$, запишем уравнение секущей в виде

$$y = a(x_0 + x_1)(x - x_0) + ax_0^2.$$

Пусть точка M_1 стремится к точке M_0. Тогда x_1 стремится к x_0 и в пределе уравнение секущей переходит в уравнение касательной к параболе в точке $M_0(x_0;\ ax_0^2)$:

$$y = 2ax_0(x - x_0) + ax_0^2. \quad \blacksquare \qquad (3)$$

Касательная к параболе изображена на рисунке 14, *б*. Отметим, что она пересекает ось Ox в точке A, абсцисса которой равна $\frac{x_0}{2}$. Это следует из уравнения (3), если положить в нем $y = 0$. Отмеченный факт дает возможность построить касательную к параболе в данной точке M_0 с помощью циркуля и линейки. Для этого нужно провести перпендикуляр M_0H из данной точки M_0 к оси абсцисс, а затем построить середину отрезка OH. Это вы умеете делать с помощью циркуля и линейки. Середина отрезка OH и есть, очевидно, точка A. Остается провести прямую M_0A, и тем самым касательная к параболе в точке M_0 будет построена.

Любопытно, что касательную к параболе, проходящую через данную точку, не лежащую на параболе, можно построить с помощью только одной линейки, без использования циркуля. Как выполнить такое построение, мы расскажем в конце § 4 этой главы, но обоснование правильности построения сможем дать только в старших классах.

6. Оптическое свойство параболы. Парабола обладает интересным оптическим свойством. Чтобы познакомиться с ним, рассмотрим параболу, заданную уравнением $y = ax^2$. Представим себе, что в фокусе параболы (точке F) помещен источник света.

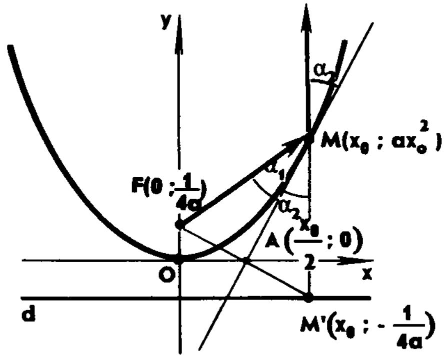


Рис. 15

Оказывается, что

любой луч света, исходящий из фокуса, после отражения от параболы становится параллельным оси параболы (оси Oy).

При этом подразумевается, что отражение происходит по известному из оптики закону: угол падения равен углу отражения.
□ Для доказательства этого утверждения обратимся к рисунку 15, на котором прямая MA — касательная к параболе в точке $M(x_0; ax_0^2)$, $A\left(\frac{x_0}{2}; 0\right)$ — точка пересечения касательной с осью Ox (абсцисса точки A была найдена в п. 5), исходящий из фокуса луч FM образует с касательной угол, равный α_1, прямая MM' параллельна оси Oy и, следовательно, перпендикулярна к директрисе d параболы, $M'\left(x_0; -\frac{1}{4a}\right)$ — точка пересечения этой прямой с директрисой, угол между прямой MM' и касательной равен α_2. Ясно, что доказательство оптического свойства параболы сводится к доказательству равенства углов α_1 и α_2.

Рассмотрим треугольник MFM'. Он равнобедренный, поскольку $MF = MM'$ согласно свойству параболы, установленному в п. 4. Каждая координата точки $A\left(\frac{x_0}{2}; 0\right)$ равна полусумме соответствующих координат точек $F\left(0; \frac{1}{4a}\right)$ и $M'\left(x_0; -\frac{1}{4a}\right)$:

$$\frac{x_0}{2} = \frac{1}{2}(0 + x_0), \quad 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4a} - \frac{1}{4a}\right).$$

Поэтому точка A — середина отрезка FM' и, следовательно, отрезок MA — медиана, а значит, и биссектриса треугольника MFM'. Отсюда следует, что $\alpha_1 = \alpha_2$, что и требовалось доказать. ■

С рассмотренным оптическим свойством параболы связано еще одно ее замечательное свойство. Пусть в некоторой точке помещен источник света. Назовем ***фронтом волны*** точечного источника света такую линию, для всех точек P которой путь, пройденный световым лучом от источника до точки P, одинаков. Если световая волна, исходящая из точечного источника, не претерпевает отражений, то ее фронт представляет собой окружность. При отражении от какой-то линии фронт волны изменяет свою форму в зависимости от формы этой линии. Оказывается, что

если источник света помещен в фокусе параболы, то фронт отраженной от параболы волны представляет собой отрезок, соединяющий две точки параболы и параллельный ее директрисе,

т. е. парабола распрямляет круговой фронт падающей волны и делает его прямолинейным.

□ В самом деле, рассмотрим отрезок AB, соединяющий две точки параболы и параллельный ее директрисе d (рис. 16). Возьмем на этом отрезке произвольную точку P. В эту точку приходит световой луч, вышедший из фокуса F и отраженный в некоторой точке M от параболы. Путь, пройденный световым лучом, равен $FM+MP$. Отрезок MP параллелен оси параболы (оптическое свойство параболы), поэтому прямая MP перпендикулярна директрисе параболы и пересекает ее в некоторой точке M'. Но расстояния от точки M параболы до фокуса F и до директрисы d равны: $MF=MM'$. Поэтому

$$FM+MP=MM'+MP=M'P.$$

Таким образом, для любой точки P отрезка AB суммарный путь, пройденный световым лучом от источника F до точки отражения M и затем (после отражения) от M до P, равен расстоянию между параллельными прямыми d и AB, т. е. этот путь одинаков для всех точек P отрезка AB. Следовательно, отрезок AB представляет собой фронт отраженной от параболы световой волны. ■

Оптическое свойство параболы используется при конструировании прожекторов, антенн, телескопов. Представим себе, что парабола $y=ax^2$ вращается в пространстве вокруг своей оси сим-

Точка F — фокус параболы
Прямая d — директриса параболы
$AB \parallel d$

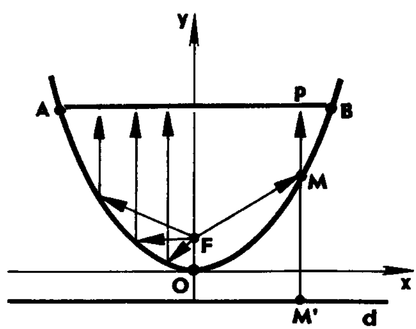
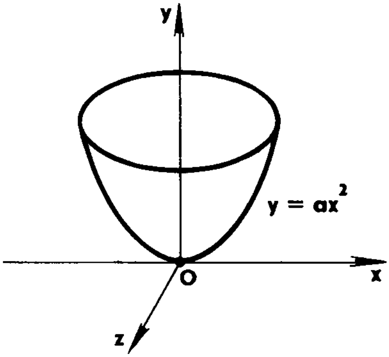
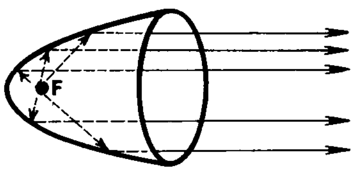


Рис. 16



Параболоид вращения

Рис. 17



Источник света находится в фокусе параболы

Рис. 18

метрии, т. е. вокруг оси Oy. При таком вращении образуется поверхность, которая называется *параболоидом вращения* (рис. 17). Отражатель прожектора делают в форме параболоида вращения, а источник света помещают в фокус параболы, от вращения которой получается этот параболоид вращения. Лучи света, выходящие из источника, отразившись от внутренней зеркальной поверхности отражателя, образуют узкий направленный пучок света, параллельный оси параболы (рис. 18). Это позволяет освещать удаленные предметы.

По такому же принципу делают отражатели карманных фонариков. Чем ближе по своей форме отражатель фонарика к идеальному параболоиду вращения и чем ближе к фокусу параболы расположен источник света (нить лампочки), тем более узкий пучок света создает фонарик и тем дальше он светит.

7. Гипербола. Из школьного курса алгебры вам известна линия, являющаяся графиком функции $y=\frac{k}{x}$. Она называется *гиперболой*. Гипербола имеет две ветви (рис. 19). Как и в случае параболы, можно дать определение гиперболы, не связанное с системой координат.

Гиперболой называется линия, состоящая из всех таких точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 имеет одно и то же значение, меньшее чем F_1F_2.

Точки F_1 и F_2 называются *фокусами гиперболы.* Обозначим расстояние между фокусами через $2c$, а постоянную величину, равную модулю разности расстояний от произвольной точки гиперболы до ее фокусов, через $2a$. По определению гиперболы $2a<2c$, т. е. $a<c$.

Введем прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси абсцисс, а начало координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2. Тогда фокусы F_1 и F_2 имеют соответственно координаты $(-c;\ 0)$ и $(c;\ 0)$ (рис. 20, a). Выведем уравнение гиперболы в выбранной системе координат.

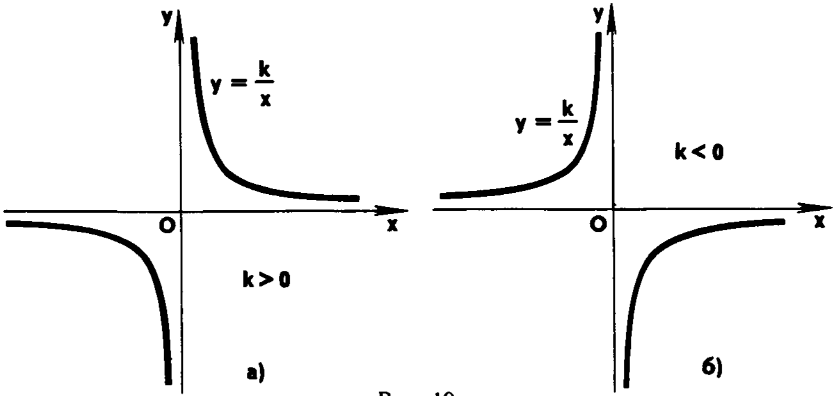


Рис. 19

☐ Расстояния от произвольной точки $M(x;\ y)$ до фокусов F_1 и F_2 выражаются формулами

$$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\ MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Если точка $M(x;\ y)$ лежит на гиперболе, то $|MF_1-MF_2|=2a$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a. \qquad (4)$$

Если же точка $M(x;\ y)$ не лежит на гиперболе, то $|MF_1-MF_2|\neq 2a$, т. е. координаты точки M не удовлетворяют уравнению (4). Следовательно, уравнение (4) и есть уравнение гиперболы в выбранной системе координат. Преобразуем его к более простому виду. Возведя обе части уравнения в квадрат, после приведения подобных членов приходим к уравнению

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,\sqrt{(x-c)^2+y^2}=x^2+y^2+c^2-2a^2.$$

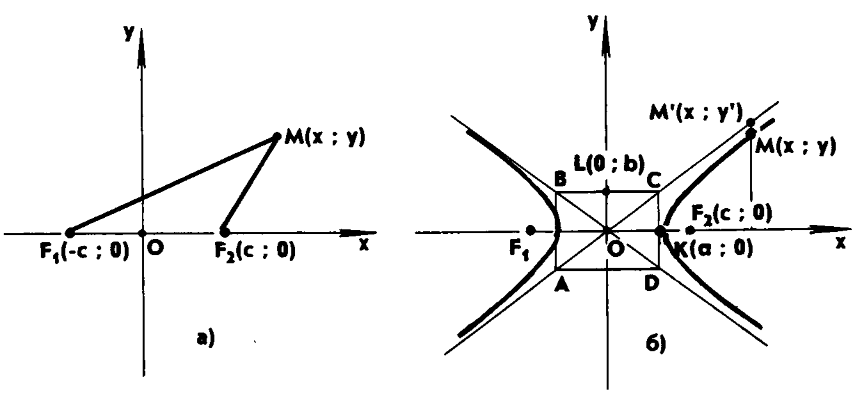


Рис. 20

Еще раз возведя в квадрат и полагая $b=\sqrt{c^2-a^2}$, получим уравнение, которое можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (5)$$

Ясно, что если координаты точки $M(x;\ y)$ удовлетворяют уравнению (4), то они удовлетворяют и уравнению (5), так как уравнение (5) получено из (4). Верно и обратное: если координаты точки $M(x;\ y)$ удовлетворяют уравнению (5), то они удовлетворяют и уравнению (4) (докажите это самостоятельно). Таким образом, уравнение (5) равносильно уравнению (4). Уравнение (5) называется *каноническим уравнением гиперболы.* ■

Вид гиперболы, заданной каноническим уравнением (5), представлен на рисунке 20, *б*. Как видим, у этой гиперболы имеются две ветви, расположенные внутри углов AOB и COD. Прямые AC и BD имеют уравнения $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$. Они обладают тем свойством, что точка $M(x;\ y)$, двигаясь по гиперболе и удаляясь от начала координат, сколь угодно близко подходит к какой-то из этих прямых.

□ В самом деле, рассмотрим точку $M(x;\ y)$ на той части гиперболы, которая расположена в первом квадранте (рис. 20, *б*). Уравнение этой части гиперболы можно записать в виде

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Проведем через точку M прямую, параллельную оси Oy. Она пересекает прямую AC в точке $M'(x;\ y')$, причем $y'=\frac{b}{a}x$. Расстояние между точками $M(x;\ y)$ и $M'(x;\ y')$ равно $y'-y$. Используя выражения для y' и y, получаем

$$MM'=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Если точка $M(x;\ y)$ движется по гиперболе, удаляясь от начала координат, то x неограниченно возрастает и, следовательно, MM' стремится к нулю. Это и означает, что точка M сколь угодно близко подходит к прямой AC. ■

Прямые AC и BD называются *асимптотами* гиперболы.

Вернемся теперь к гиперболе, которая в курсе алгебры задавалась уравнением $y=\frac{k}{x}$. Это уравнение отличается по своему виду от канонического уравнения (5). Оказывается, однако, что его можно привести к каноническому виду, если перейти к другой системе координат. Рассматривая расположение гиперболы по отношению к осям координат на рисунке 20, *б*, нетрудно сообразить, что для гиперболы $y=\frac{k}{x}$, изображенной на рисунке 19, *а*,

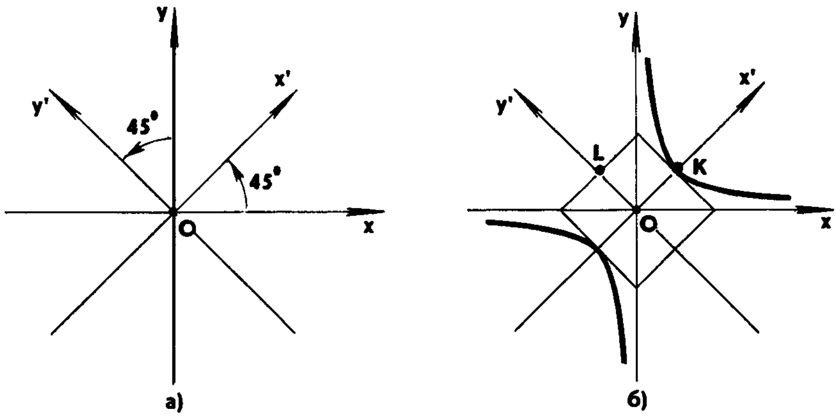


Рис. 21

получится каноническое уравнение, если оси координат Ox и Oy повернуть на 45° против часовой стрелки. Новые положения осей координат обозначим Ox' и Oy' (рис. 21, *а*). В системе координат $Ox'y'$ уравнение нашей гиперболы примет вид

$$\frac{x'^2}{2k}-\frac{y'^2}{2k}=1.$$

Это и есть каноническое уравнение гиперболы, причем в данном случае $a^2=b^2=2k$. Такие значения a^2 и b^2 получаются следующим образом. Рассмотрим точку K, в которой гипербола пересекается с положительной полуосью Ox' (рис. 21, *б*). Пусть координаты точки K в старой системе координат Oxy были равны $(x;\ y)$. Тогда $y=\frac{k}{x}$ (так как точка K лежит на гиперболе) и $y=x$ (так как точка K лежит на биссектрисе прямого угла, образованного положительными полуосями Ox и Oy). Из этих двух уравнений находим $x=y=\sqrt{k}$, и, следовательно, $OK=\sqrt{2k}$. Но $OK=a$ (см. рис. 21, *б*). Таким образом, $a=\sqrt{2k}$ и $a^2=2k$. Аналогично, рассматривая точку L, получаем $b=\sqrt{2k}$, $b^2=2k$.

8. Эллипс.

Эллипсом называется линия, состоящая из всех таких точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 имеет одно и то же значение, большее чем F_1F_2. Точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса.

Обозначим расстояние между фокусами через $2c$, а постоянную величину, равную сумме расстояний от произвольной точки эллипса до его фокусов, через $2a$. По определению эллипса $2c<2a$, т. е. $c<a$.

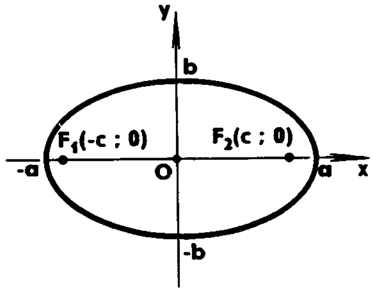


Рис. 22

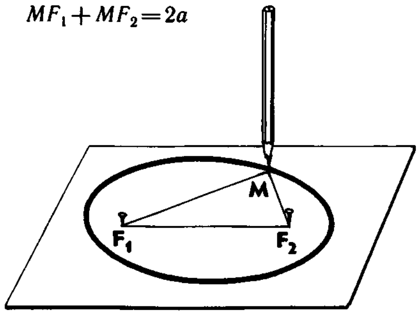


Рис. 23

□ Для вывода уравнения эллипса введем прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 20, *а*. Фокусы F_1 и F_2 имеют соответственно координаты $(-c;\ 0)$ и $(c;\ 0)$, а расстояния от произвольной точки $M(x;\ y)$ до фокусов F_1 и F_2 выражаются формулами

$$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Если точка $M(x;\ y)$ лежит на эллипсе, то $MF_1+MF_2=2a$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \qquad (6)$$

Если же точка $M(x;\ y)$ не лежит на эллипсе, то $MF_1+MF_2\neq 2a$, т. е. координаты точки M не удовлетворяют уравнению (6). Следовательно, уравнение (6) и есть уравнение эллипса в выбранной системе координат. Его можно преобразовать к более простому виду, как и в случае гиперболы. В результате получается *каноническое уравнение эллипса*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (7)$$

где $b=\sqrt{a^2-c^2}$. Величины a и b называются соответственно *большой и малой полуосями эллипса*. Названия «большая» и «малая» объясняются тем, что $a>b$. На рисунке 22 изображен эллипс с полуосями a и b. ■

Определение эллипса дает простой практический способ его построения. Нужно взять нить длиной $2a$, закрепить ее концы в точках F_1 и F_2, расстояние между которыми равно $2c$, а затем натянуть нить с помощью карандаша и начертить карандашом кривую, поддерживая нить в натянутом состоянии (рис. 23).

Отметим, что для любой точки, лежащей вне эллипса (точнее, вне фигуры, ограниченной эллипсом), сумма расстояний до фокусов больше $2a$, а для любой точки, лежащей внутри эллипса, сумма расстояний до фокусов меньше $2a$ (докажите это утверждение самостоятельно).

9*. Директрисы эллипса и гиперболы. Каноническое уравнение (7) эллипса можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1, \tag{8}$$

поскольку $b^2=a^2-c^2$. В точности такой же вид примет каноническое уравнение (5) гиперболы, если воспользоваться тем, что в случае гиперболы $b^2=c^2-a^2$. Таким образом, канонические уравнения эллипса и гиперболы можно записать в одном и том же виде (8), но существенное различие состоит в том, что в случае эллипса $c<a$ и поэтому $a^2-c^2>0$, а в случае гиперболы $c>a$ и поэтому $a^2-c^2<0$. Это различие не помешает нам преобразовать определенным образом уравнение (8) независимо от того, описывает оно эллипс или гиперболу, что позволит установить интересное свойство этих линий.

Умножим уравнение (8) на a^2-c^2 и запишем полученное уравнение в виде

$$x^2+c^2+y^2=a^2+\frac{c^2}{a^2}x^2. \tag{9}$$

Вычитая из обеих частей равенства (9) $2xc$, приходим к уравнению

$$(x-c)^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2.$$

Отсюда следует, что $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\frac{c}{a}\left|x-\frac{a^2}{c}\right|$, или

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\left|x-\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{c}{a}. \tag{10}$$

Проведенное преобразование показывает, что если координаты точки $M(x;\ y)$ удовлетворяют уравнению (8), то они удовлетворяют и уравнению (10). При этом знаменатель в левой части (10) не может обратиться в нуль, т. е. $x\neq\frac{a^2}{c}$. В самом деле, если в уравнении (8) положить $x=\frac{a^2}{c}$, то получим

$$y^2=-\frac{(a^2-c^2)^2}{c^2}.$$

Это уравнение не имеет решений, так как правая часть меньше нуля. Таким образом, если координаты точки $M(x;\ y)$ удовлетворяют уравнению (8), то абсцисса x точки M не может равняться $\frac{a^2}{c}$. Нетрудно доказать, что если координаты точки $M(x;\ y)$ удовлетворяют уравнению (10), в котором $c\neq a$, то они удовлетворяют и уравнению (8) (докажите это самостоятельно). Следовательно, уравнение (10) равносильно уравнению (8), и поэтому при

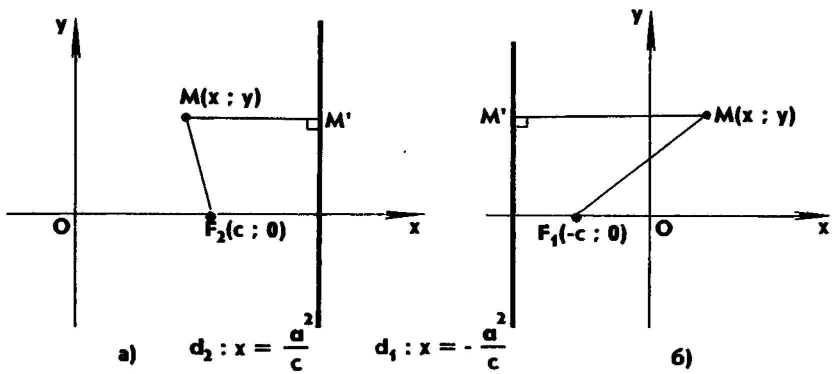
$c<a$ уравнение (10) является уравнением эллипса, а при $c>a$ — уравнением гиперболы.

Но уравнение (10) имеет простой геометрический смысл. Числитель в левой части равенства (10) есть расстояние от точки $M(x;\ y)$ до фокуса $F_2(c;\ 0)$, а знаменатель — расстояние от точки $M(x;\ y)$ до прямой d_2, заданной уравнением $x=\frac{a^2}{c}$ (рис. 24, *а*). Тем самым мы установили интересное свойство эллипса и гиперболы: эллипс (и также гипербола) представляет собой множество всех точек, для каждой из которых отношение расстояния до данной точки F_2 к расстоянию до данной прямой d_2 равно одному и тому же положительному числу, которое меньше единицы в случае эллипса $\left(\frac{c}{a}<1\right)$ и больше единицы в случае гиперболы $\left(\frac{c}{a}>1\right)$.

Если к обеим частям уравнения (9) прибавить $2xc$, а не вычесть, как мы делали при получении уравнения (10), то вместо (10) придем к равносильному уравнению

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{\left|x+\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{c}{a}, \qquad (11)$$

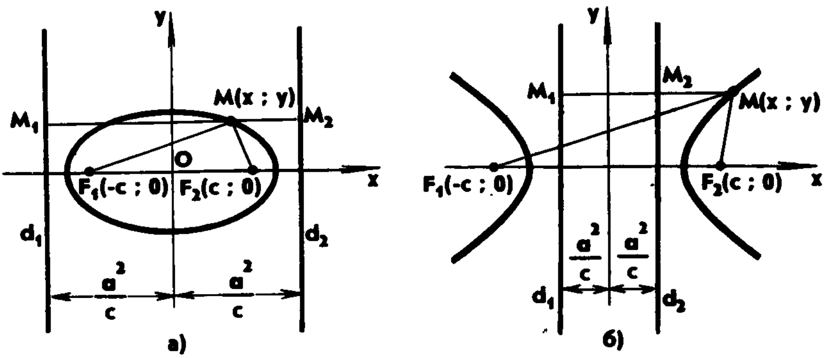
в котором числитель левой части есть расстояние от точки $M(x;\ y)$ до фокуса $F_1(-c;\ 0)$, а знаменатель — расстояние от точки $M(x;\ y)$ до прямой d_1, заданной уравнением $x=-\frac{a^2}{c}$ (рис. 24, *б*). Таким образом, каждому фокусу эллипса (и также



$MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ $\qquad$ $MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$MM'=\left|x-\frac{a^2}{c}\right|$ $\qquad$ $MM'=\left|x+\frac{a^2}{c}\right|$

Рис. 24



$$\frac{MF_1}{MM_1}=\frac{MF_2}{MM_2}=\frac{c}{a}$$

d_1 и d_2 — директрисы эллипса

$$\frac{MF_1}{MM_1}=\frac{MF_2}{MM_2}=\frac{c}{a}$$

d_1 и d_2 — директрисы гиперболы

Рис. 25

гиперболы) соответствует такая прямая, что отношение расстояния от любой точки эллипса (гиперболы) до фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей прямой имеет одно и то же значение. Прямые d_1 и d_2 называются *директрисами* эллипса (гиперболы). Расположение директрис по отношению к эллипсу и гиперболе показано на рисунках 25, *а* и 25, *б*.

Вспомним теперь, что у параболы также есть фокус и директриса, причем отношение расстояния от любой точки параболы до фокуса к расстоянию от этой точки до директрисы равно 1 (см. п. 4). Это дает возможность дать общее определение для всех трех линий — параболы, гиперболы и эллипса:

любая из трех линий — парабола, гипербола и эллипс — есть множество всех точек, для каждой из которых отношение расстояния до данной точки, называемой фокусом, к расстоянию до данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус, равно одному и тому же положительному числу, которое равно 1 *в случае параболы, больше единицы в случае гиперболы и меньше единицы в случае эллипса.*

10*. Эксцентриситет эллипса и гиперболы. В правых частях уравнений (10) и (11) стоит число $\frac{c}{a}$. Оно называется *эксцентриситетом* эллипса (гиперболы) и обозначается часто буквой *e*. Ясно, что у эллипса $0<e<1$, а у гиперболы $e>1$. Так как полуоси a и b эллипса связаны соотношением $b=\sqrt{a^2-c^2}$, то $\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}$. Отсюда видно, что, чем ближе эксцентриситет эллипса к единице, тем меньше отношение $\frac{b}{a}$ полуосей эллипса и тем больше эл-

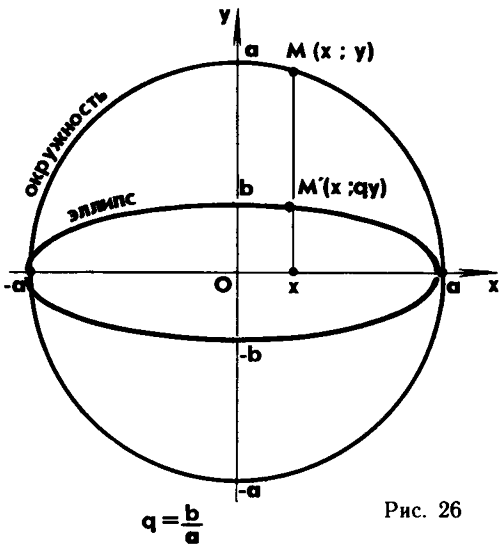


Рис. 26

липс «вытянут» вдоль оси Ox. И наоборот, чем ближе эксцентриситет эллипса к нулю, тем меньше «вытянутость» эллипса. Если $e=\frac{c}{a}$ стремится к нулю, то величина c также стремится к нулю. При этом фокусы эллипса сближаются, в пределе при $e=0$ они совпадают, полуоси эллипса становятся равными ($a=b$) и эллипс превращается в окружность, уравнение которой

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, \text{ или } x^2+y^2=a^2. \tag{12}$$

Отметим, что эллипс с полуосями a и b может быть получен из этой окружности путем равномерного сжатия вдоль оси Oy с коэффициентом сжатия $q=\frac{b}{a}$. При таком сжатии каждая точка $M(x;\ y)$ плоскости переходит в точку $M'(x;\ qy)$. Убедимся в том, что если точка M лежит на окружности (12), то точка M' принадлежит эллипсу, уравнение которого

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Действительно, если точка $M(x;\ y)$ взята на окружности, то ее координаты удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, \text{ или } \frac{x^2}{a^2}+\frac{(qy)^2}{b^2}=1.$$

Но это и означает, что координаты точки $M'(x;\ qy)$ удовлетворяют уравнению (7). Итак, при равномерном сжатии вдоль оси Oy с коэффициентом сжатия $q=\frac{b}{a}$ каждая точка окружности переходит в точку эллипса (рис. 26). Очевидно, верно и обратное: каждая точка $M'(x; y)$ эллипса, заданного уравнением (7), получается из точки $M\left(x; \frac{y}{q}\right)$ путем умножения на q ординаты точки M, причем точка $M\left(x; \frac{y}{q}\right)$ принадлежит окружности (12). Таким образом, эллипс с уравнением (7) получается из окружности с уравнением (12) путем равномерного сжатия вдоль оси Oy с коэффициентом сжатия $q=\frac{b}{a}$.

В случае гиперболы $c=\sqrt{a^2+b^2}$, и поэтому

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>1.$$

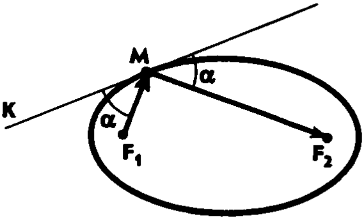
Чем больше эксцентриситет гиперболы, тем больше отношение $\frac{b}{a}$ и тем больше углы AOB и COD, в которых расположены ветви гиперболы (см. рис. 20, *б*). И наоборот, чем ближе эксцентриситет к единице, тем меньше $\frac{b}{a}$ и тем больше ветви гиперболы «прижаты» к оси Ox.

11. Оптические свойства эллипса и гиперболы. Как и парабола, эллипс и гипербола обладают интересными оптическими свойствами. Представим себе, что в одном из фокусов эллипса, например в фокусе F_1 (рис. 27), помещен источник света. Тогда

любой луч света, вышедший из фокуса F_1, отразившись в какой-то точке M от эллипса, проходит через фокус F_2.

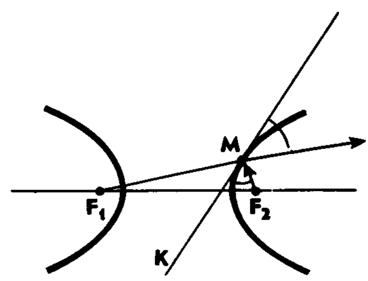
Если источник света находится в одном из фокусов гиперболы, например в фокусе F_2 (рис. 28), то

луч света, вышедший из фокуса F_2, отразившись в какой-то точке M от гиперболы, распространяется далее вдоль луча F_1M, т. е. так, как если бы луч света исходил из фокуса F_1 и распространялся без помех.



Прямая MK — касательная к эллипсу в точке M

Рис. 27



Прямая MK — касательная к гиперболе в точке M

Рис. 28

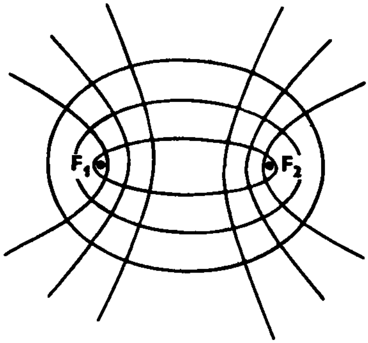
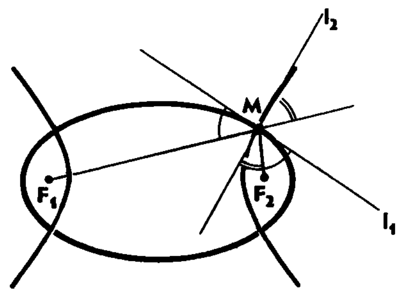


Рис. 29



l_1 — касательная к эллипсу в точке M

l_2 — касательная к гиперболе в точке M

Рис. 30

Мы не будем доказывать эти утверждения. Отметим лишь, что с их помощью можно установить еще один интересный факт. Возьмем на плоскости две точки F_1 и F_2 и рассмотрим всевозможные эллипсы и гиперболы, для которых эти точки являются фокусами (рис. 29). Тогда оказывается, что каждая из этих гипербол пересекается с каждым эллипсом под прямым углом, т. е. угол между касательными к гиперболе и к эллипсу, проведенными через точку пересечения гиперболы и эллипса, равен 90°. (Докажите это, используя рисунок 30.)

В заключение отметим, что парабола, гипербола и эллипс встречаются в самых разнообразных ситуациях. Так, ближний свет автомобильной фары освещает часть асфальта, ограниченную эллипсом, а дальний — гиперболой (почему это так, вы узнаете в старших классах). Брошенный камень движется по параболе, а движение небесных тел (планет, комет, метеоритов и т. д.) под действием притяжения Солнца происходит по эллипсу или гиперболе. Конечно, небесные тела испытывают воздействие не только Солнца, но и других тел, и поэтому их истинные траектории не являются в точности гиперболой или эллипсом, но весьма близки к этим линиям. Так, каждая планета Солнечной системы, в том числе наша Земля, движется по орбите, близкой к эллиптической, причем Солнце находится в одном из фокусов эллипса.

Задачи

29. Выведите уравнение касательной:

а) к параболе $y=ax^2+bx+c$ в точке $M_0(x_0;\ ax_0^2+bx_0+c)$;

б) к гиперболе $y=\frac{k}{x}$ в точке $M_0\left(x_0;\ \frac{k}{x_0}\right)$. Напишите уравнение касательной к этой гиперболе в точке $M_1(1;\ k)$.

30. Найдите координаты точки пересечения двух прямых, одна из которых касается параболы $y=x^2$ в точке $M_1(1;\ 1)$, а другая — в точке $M_2(2;\ 4)$.

31. Через точку $M_0(3;\ 4)$ проведена касательная к параболе $y=x^2-1$. Напишите уравнение касательной и найдите координаты точки касания.

32. Выведите уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=R^2$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$.

33. Через точку $M_0(2;\ 4)$ проведены две касательные к окружности $x^2+y^2=4$. Найдите уравнения касательных и координаты точек касания.

34. Найдите эксцентриситет и напишите уравнения директрис гиперболы $y=\frac{k}{x}$ $(k>0)$.

35. Исследуйте взаимное расположение эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ и прямой, проходящей через точки с координатами $(1;\ -1)$ и $(3;\ 1)$.

36. Исследуйте взаимное расположение эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ и окружности радиуса $\sqrt{7}$ с центром в начале координат.

37. Исследуйте взаимное расположение эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ и гиперболы $y=\frac{2\sqrt{2}}{x}$.

§ 3. Симметрия в координатах

12. Осевая симметрия. Напомним, что две точки A и A_1 называются *симметричными относительно прямой* p, если эта прямая является серединным перпендикуляром к отрезку AA_1 (рис. 31). Каждая точка прямой p, например точка B на рисунке 31, считается симметричной самой себе относительно этой прямой.

Обратившись к рисунку 32, заметим, что если в прямоугольной системе координат Oxy точка A имеет координаты $(x_0;\ y_0)$, то

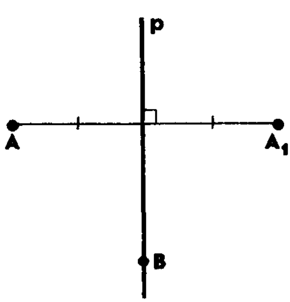


Рис. 31

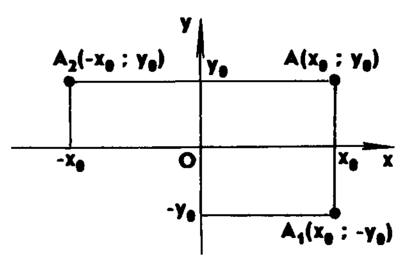


Рис. 32

точка A_1, симметричная точке A относительно оси Ox, имеет координаты $(x_0;\ -y_0)$, а точка A_2, симметричная точке A относительно оси Oy, имеет координаты $(-x_0;\ y_0)$.

Фигура (в частности, линия) называется симметричной относительно прямой p, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой p также принадлежит этой фигуре.

Прямая p называется при этом *осью симметрии* фигуры, а про фигуру говорят, что она обладает *осевой симметрией.*

Задача 1. Известно, что линия L имеет в прямоугольной системе координат Oxy уравнение

$$F(x;\ y)=0, \tag{1}$$

причем при замене x на $-x$ функция $F(x, y)$ не изменяется, т. е. $F(-x, y)=F(x, y)$. Доказать, что линия L симметрична относительно оси Oy.

Решение. Координаты произвольной точки $M(x_0;\ y_0)$ линии L удовлетворяют уравнению (1): $F(x_0;\ y_0)=0$. Так как $F(-x_0;\ y_0)=F(x_0;\ y_0)$, то отсюда следует, что $F(-x_0;\ y_0)=0$, т. е. координаты точки $M_1(-x_0;\ y_0)$ также удовлетворяют уравнению (1) и, значит, точка $M_1(-x_0;\ y_0)$ лежит на линии L. Но точки $M(x_0;\ y_0)$ и $M_1(-x_0;\ y_0)$ симметричны относительно оси Oy. Таким образом, для любой точки M линии L симметричная ей относительно оси Oy точка M_1 также принадлежит линии L. Это и означает, что линия L симметрична относительно оси Oy. ■

Примером такой линии является парабола, заданная уравнением $y-ax^2=0$. Здесь

$$F(x,\ y)=y-ax^2,\ F(-x,\ y)=y-a(-x)^2=y-ax^2=F(x,\ y).$$

Следовательно, данная парабола симметрична относительно оси Oy (см. рис. 13).

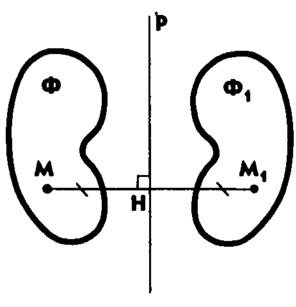


Рис. 33

Аналогично если $F(x,\ -y)=F(x,\ y)$, то линия, заданная уравнением (1), симметрична относительно оси Ox. Точно так же если при замене x на $-x$ функция $F(x,\ y)$ меняет знак, т. е. $F(-x,\ y)=-F(x,\ y)$, то линия L, заданная уравнением (1), симметрична относительно оси Oy, а если $F(x,\ -y)=-F(x,\ y)$, то линия L симметрична относительно оси Ox. Докажите эти утверждения самостоятельно.

Пусть Ф — произвольная фигура, p — данная прямая. Для каждой точки M фигуры Ф построим симметричную ей относительно прямой p точку M_1. Для этого нужно провести через точку M прямую, перпендикулярную к прямой p, и от точки H, в которой эти прямые пересекаются, отложить отрезок HM_1, равный HM (рис. 33). Множество всех точек M_1 образует фигуру Φ_1. Фигуры Φ и Φ_1 называются *симметричными относительно прямой p*.

Задача 2. Известно, что линия L имеет в прямоугольной системе координат Oxy уравнение (1): $F(x, y)=0$. Доказать, что симметричная ей относительно оси Oy линия L_1 имеет уравнение

$$F(-x, y)=0. \quad (2)$$

Решение. Возьмем произвольную точку M_1 на линии L_1. Она симметрична относительно оси Oy некоторой точке M_0 линии L. Пусть координаты точки M_0 равны $(x_0; y_0)$. Тогда $F(x_0, y_0)=0$, а координаты точки M_1 равны $(-x_0; y_0)$. Очевидно, координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению (2):

$$F(-(-x_0), y_0)=F(x_0, y_0)=0.$$

Итак, координаты любой точки линии L_1 удовлетворяют уравнению (2).

Остается доказать, что координаты любой точки, не лежащей на линии L_1, не удовлетворяют уравнению (2). Предположим противное, т. е. допустим, что имеется точка $M_1(x_0; y_0)$, которая не лежит на линии L_1, но ее координаты удовлетворяют уравнению (2): $F(-x_0; y_0)=0$. Это равенство показывает, что координаты точки $M(-x_0; y_0)$, симметричной точке M_1 относительно оси Oy, удовлетворяют уравнению (1) и, следовательно, точка M лежит на линии L. Но тогда симметричная ей точка M_1 должна лежать на линии L_1, поскольку линия L_1 состоит из всех точек, симметричных точкам линии L. Это противоречит нашему предположению, согласно которому точка M_1 не лежит на линии L_1. Полученное противоречие доказывает, что координаты любой точки, не лежащей на линии L_1, не удовлетворяют уравнению (2).

Итак, уравнение (2) есть уравнение линии L_1, симметричной линии L относительно оси Oy. ■

Аналогично доказывается, что уравнение линии L_2, симметричной линии L относительно оси Ox, имеет вид $F(x, -y)=0$.

Задача 3. Доказать, что фигурой, симметричной прямой относительно другой прямой, является прямая.

Решение. Рассмотрим две произвольные прямые l и p. Введем прямоугольную систему координат так, чтобы прямая p была осью координат, например осью ординат. Уравнением прямой l в этой системе координат является уравнение первой степени

$$ax+by+c=0, \quad (3)$$

где a, b и c — некоторые числа, причем a и b не равны нулю одновременно. Согласно доказанному в задаче 2 уравнение фигуры

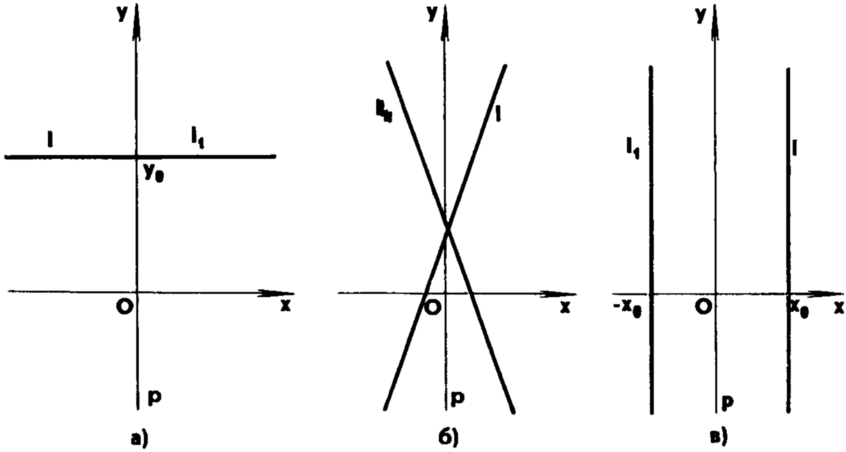


Рис. 34

l_1, симметричной прямой l относительно оси Oy (т. е. относительно прямой p), получается из уравнения (3) заменой x на $-x$ и, следовательно, имеет вид

$$-ax+by+c=0. \qquad (4)$$

Но уравнение (4) также является уравнением прямой.

Итак, фигура l_1, симметричная прямой l относительно прямой p, есть прямая. ■

Отметим, что если прямые l и p перпендикулярны (рис. 34, *а*), то уравнение (3) прямой l в выбранной системе координат можно записать так: $y-y_0=0$, т. е. уравнение прямой l не содержит x. Поэтому уравнение (4) симметричной прямой l_1 имеет тот же вид $y-y_0=0$, и, значит, прямые l и l_1 совпадают.

Если же прямые l и p не перпендикулярны, то l и l_1 — различные прямые (рис. 34, *б*). В частности, если $l \parallel p$ (рис. 34, *в*), то уравнение (3) прямой l принимает вид $x-x_0=0$. Следовательно, уравнение (4) прямой l_1 имеет вид $-x-x_0=0$, или $x-(-x_0)=0$. Прямая l_1 также параллельна прямой p (оси Oy). Таким образом, симметричные относительно прямой p прямые l и l_1 в этом случае параллельны.

13. Центральная симметрия. Напомним, что две точки A и A_1 называются *симметричными отосительно точки* O, если точка O — середина отрезка AA_1 (рис. 35, *а*). Точка O считается симметричной самой себе. Если в прямоугольной системе координат точка A имеет координаты $(x_0;\ y_0)$, то координаты $(x_1;\ y_1)$ точки A_1, симметричной точке A относительно начала координат, выражаются формулами

$$x_1=-x_0,\quad y_1=-y_0.$$

В самом деле, так как точка $O(0; 0)$ является серединой отрезка AA_1, то по формулам координат середины отрезка имеем:

$$\frac{x_0+x_1}{2}=0, \quad \frac{y_0+y_1}{2}=0.$$

Отсюда получаем

$$x_1=-x_0, \quad y_1=-y_0.$$

Итак, точка A_1, симметричная точке $A(x_0; y_0)$ относительно начала координат, имеет координаты $(-x_0; -y_0)$ (рис. 35, *б*).

Фигура называется симметричной относительно точки O, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре.

Точка O называется при этом *центром симметрии фигуры*, а про фигуру говорят, что она обладает *центральной симметрией*.

Пусть некоторая линия L имеет в прямоугольной системе координат Oxy уравнение $F(x, y)=0$ и пусть при замене x на $-x$ и y на $-y$ функция $F(x, y)$ не изменяется, т. е. $F(-x, -y)=F(x, y)$. Тогда линия L симметрична относительно начала координат. Это утверждение доказывается так же, как и утверждение задачи 1. Проведите доказательство самостоятельно. Примером такой линии является эллипс, заданный каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Перепишем уравнение эллипса так:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Функция $F(x, y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ не изменяется при замене x на $-x$ и y на $-y$:

$$F(-x, -y)=\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}-1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=F(x, y).$$

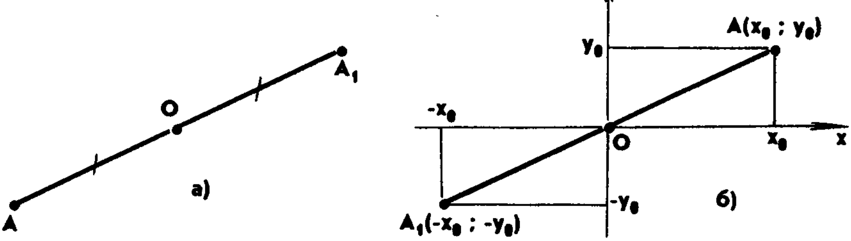


Рис. 35

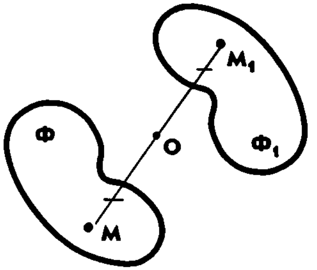


Рис. 36

Следовательно, данный эллипс симметричен относительно начала координат (см. рис. 22).

Точно так же если при замене x на $-x$ и y на $-y$ функция $F(x, y)$ изменяет знак, т. е. $F(-x, -y)=-F(x, y)$, то линия, заданная уравнением $F(x, y)=0$, симметрична относительно начала координат. Примером такой линии является гипербола, заданная уравнением $y=\frac{k}{x}$. Уравнение этой гиперболы можно записать в виде $y-\frac{k}{x}=0$. Здесь $F(x, y)=y-\frac{k}{x}$, причем $F(-x, -y)=-y+\frac{k}{x}=-F(x, y)$. Следовательно, данная гипербола симметрична относительно начала координат (см. рис. 19).

Пусть Ф — произвольная фигура, O — данная точка. Для каждой точки M фигуры Ф построим симметричную ей относительно точки O точку M_1. Для этого нужно провести прямую MO и отложить на ней отрезок OM_1, равный OM (рис. 36). Множество всех точек M_1 образует фигуру $Ф_1$. Фигуры Ф и $Ф_1$ называются *симметричными относительно точки* O.

Если линия L имеет в прямоугольной системе координат Oxy уравнение $F(x, y)=0$, то симметричная ей относительно начала координат линия L_1 имеет уравнение $F(-x, -y)=0$. Это можно доказать аналогично тому, как было доказано утверждение задачи 2. Сделайте это самостоятельно.

Задача 4. Доказать, что фигурой, симметричной данной окружности относительно данной точки, является окружность, центр которой симметричен центру данной окружности относительно данной точки, а радиус равен радиусу данной окружности.

Решение. Обозначим центр данной окружности буквой A, ее радиус буквой r, а данную точку буквой O. Введем прямоугольную систему координат Oxy с началом в точке O. Пусть координаты точки A в этой системе координат равны $(x_0; y_0)$. Тогда уравнение данной окружности можно записать в виде

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2. \tag{5}$$

Уравнение фигуры, симметричной данной окружности относительно точки O, получается из уравнения (5) заменой x на $-x$ и y на $-y$:

$$(-x-x_0)^2+(-y-y_0)^2=r^2.$$

Перепишем полученное уравнение в виде

$$(x-(-x_0))^2+(y-(-y_0))^2=r^2. \tag{6}$$

Уравнение (6) является уравнением окружности радиуса r с центром в точке $A_1(-x_0;\ -y_0)$, которая симметрична точке $A(x_0;\ y_0)$ относительно точки O. Итак, фигурой, симметричной данной окружности относительно данной точки O, является окружность такого же радиуса r, что и у данной окружности, а центры A и A_1 этих двух окружностей симметричны относительно точки O. ■

Задачи

38. Найдите координаты середины отрезка A_1B_1 и расстояние между серединами отрезков AB и A_1B_1, если точки A_1 и B_1 симметричны точкам $A(-2;\ 1)$ и $B(2;\ 3)$ относительно:

а) оси абсцисс;

б) начала координат.

39. Докажите, что следующие линии симметричны относительно оси ординат:

а) эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

б) гипербола, заданная уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

в) парабола, заданная уравнением $y=ax^2+b$.

Симметричны ли эти линии относительно оси абсцисс? Симметричны ли эти линии относительно начала координат?

40. Докажите, что если точки A, B и C лежат на одной прямой, то точки A_1, B_1 и C_1, симметричные точкам A, B и C относительно данной прямой, также лежат на одной прямой.

41. Парабола задана уравнением $y=ax^2+bx+c$. Напишите уравнение линии, симметричной данной параболе относительно:

а) оси абсцисс;

б) оси ординат;

в) начала координат.

Что представляет собой эта линия в каждом случае?

42. Докажите, что фигурой, симметричной данной окружности относительно данной прямой, является окружность, центр которой симметричен центру данной окружности относительно данной прямой, а радиус равен радиусу данной окружности. В каком случае эти две окружности совпадают?

43. Докажите, что фигурой, симметричной данной прямой l относительно данной точки O, является прямая, параллельная прямой l, если $O \notin l$, и совпадающая с прямой l, если $O \in l$.

44. Докажите, что если фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то точка их пересечения является центром симметрии фигуры.

§ 4. Гармонические четверки точек

14*. Примеры гармонических четверок. Для удобства формулировок некоторых определений и теорем условимся использовать следующие обозначения. Пусть $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — ненулевые коллинеарные векторы. Будем обозначать через $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ их длины, взятые с одинаковыми знаками, если векторы сонаправлены, и с разными знаками, если они противоположно направлены. Тогда, в частности, выражения $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ и $\overline{AB}\cdot\overline{CD}$ будут представлять отношение и произведение длин векторов, взятые со знаком «+», если векторы сонаправлены, и со знаком «—», если они противоположно направлены. Используя эти обозначения, можно, например, сформулировать теоремы Чевы и Менелая следующим образом:

Теорема Чевы. ***Если точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на прямых BC, CA и AB и не совпадают с вершинами треугольника ABC, то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда*** (рис. 37)

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}}\cdot\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}}\cdot\frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}}=1.$$

Теорема Менелая. ***Точки A_1, B_1 и C_1, расположенные соответственно на прямых BC, CA, AB и не совпадающие с вершинами треугольника ABC, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда*** (рис. 38)

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}}\cdot\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}}\cdot\frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}}=-1.$$

Воспользуемся принятым обозначением для определения так называемых гармонических четверок точек. Рассмотрим четыре точки A, B, C и D, лежащие на одной прямой. Будем говорить, что точки A, B, C, D (взятые в том порядке, как указано) образуют *гармоническую четверку,* если

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=-1. \qquad (1)$$

Из равенства (1) следует, что среди векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{DB}$ три вектора сонаправлены (их длины берутся с одним и тем же

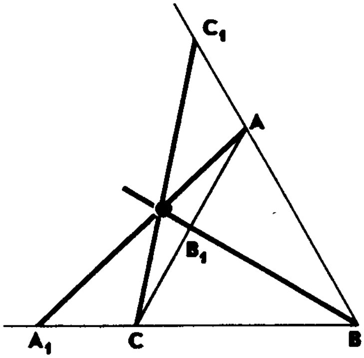


Рис. 37

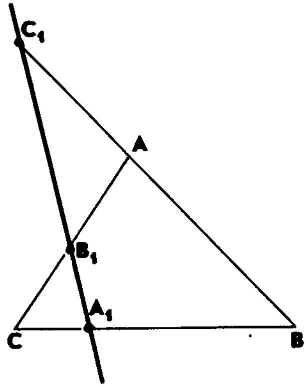


Рис. 38

знаком), а четвертый вектор направлен противоположно по отношению к ним (его длина берется с противоположным знаком).

Отметим, что равенство (1) равносильно каждому из следующих равенств:

$$\frac{\overline{AC}\cdot\overline{DB}}{\overline{CB}\cdot\overline{AD}}=-1,\quad \frac{\overline{CA}}{\overline{AD}}:\frac{\overline{CB}}{\overline{BD}}=-1,\quad \overline{AC}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=0.$$

Понятно, что можно написать еще несколько равенств, равносильных (1). Приведем пример гармонической четверки точек.

З а д а ч а 1. К двум окружностям разных радиусов, расположенным вне друг друга, проведены две внешние и две внутренние общие касательные. Внешние касательные пересекаются в точке A, внутренние — в точке B, точки C и D — центры окружностей (рис. 39). Доказать, что точки A, B, C и D образуют гармоническую четверку.

Р е ш е н и е. Прежде всего отметим, что точки A, B, C и D лежат на одной прямой (объясните почему). Радиусы окружностей обозначим буквами r и R. Тогда, используя подобие прямоугольных треугольников (см. рис. 39), получаем

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{r}{R},\quad \frac{\overline{DB}}{\overline{CB}}=-\frac{R}{r}.$$

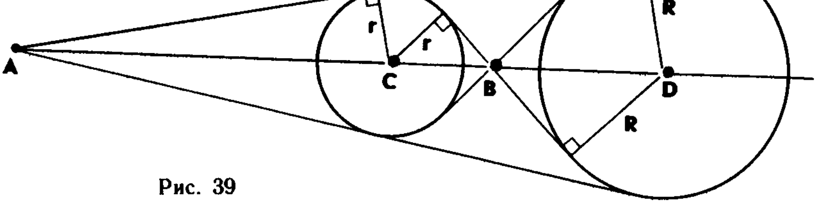


Рис. 39

Отсюда следует, что $\frac{\overline{AC}\cdot\overline{DB}}{\overline{AD}\cdot\overline{CB}} = -1$. Это равенство, как уже отмечалось выше, равносильно равенству (1), а это и означает, что точки A, B, C и D образуют гармоническую четверку. ■

Гармонические четверки обладают определенной симметрией: если A, B, C и D — гармоническая четверка, то C, D, A и B также гармоническая четверка. Это следует из того, что равенство

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = -1$$

равносильно равенству

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}} = -1.$$

Основываясь на этом факте, иногда говорят так: точки A и B *гармонически разделяют точки* C и D, а точки C и D гармонически разделяют точки A и B.

Отметим два важных свойства гармонических четверок. Проведем через точки A, B, C и D, лежащие на одной прямой, четыре параллельные прямые. Пусть A_1, B_1, C_1 и D_1 — точки пересечения этих прямых с какой-нибудь другой прямой (рис. 40, *а*). Тогда если A, B, C и D — гармоническая четверка, то A_1, B_1, C_1 и D_1 также гармоническая четверка. Аналогичным свойством обладают точки A_1, B_1, C_1 и D_1 пересечения прямых MA, MB, MC и MD с какой-нибудь прямой, параллельной прямой AD (рис. 40, *б*). Убедитесь в справедливости этих утверждений самостоятельно. Воспользуемся первым из них для решения следующей задачи.

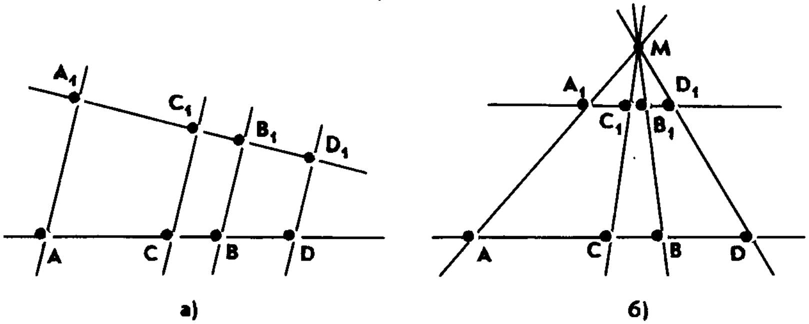


Рис. 40

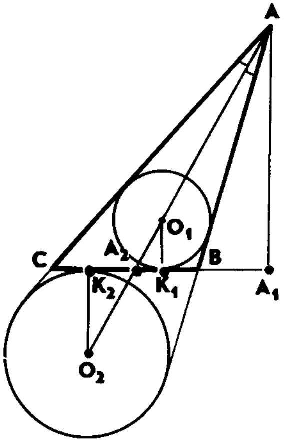


Рис. 41

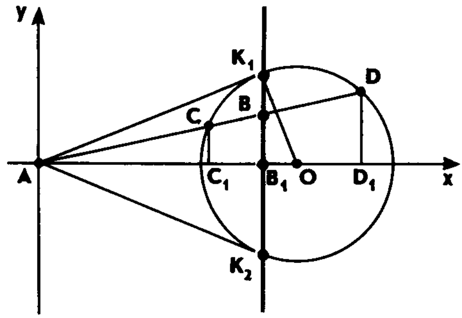


Рис. 42

Задача 2. В треугольнике ABC отрезок AA_1 — высота, отрезок AA_2 — биссектриса, A_1 не совпадает с A_2, точки K_1 и K_2 — точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной BC (рис. 41). Доказать, что точки A_1, A_2, K_1 и K_2 образуют гармоническую четверку.

Решение. Обозначим через O_1 и O_2 центры вписанной и вневписанной окружностей, указанных в условии задачи. Тогда согласно задаче 1 точки A, A_2, O_1 и O_2 образуют гармоническую четверку. Параллельные прямые, проходящие через эти точки и перпендикулярные к прямой BC, пересекают прямую BC в точках A_1, A_2, K_1 и K_2. Следовательно, точки A_1, A_2, K_1 и K_2 образуют гармоническую четверку. ■

15*. Поляра. Рассмотрим еще одну задачу, связанную с гармоническими четверками.

Задача 3. Из данной точки A проведены к данной окружности с центром O касательные AK_1, AK_2 и секущая, пересекающая окружность в точках C и D, а отрезок K_1K_2 в точке B (рис. 42). Доказать, что точки A, B, C, D образуют гармоническую четверку.

Решение. Введем систему координат с началом в точке A, как показано на рисунке 42. Пусть B_1, C_1 и D_1 — проекции точек B, C и D на ось абсцисс. Докажем, что точки A, B_1, C_1, D_1 образуют гармоническую четверку. Отсюда сразу же последует, что точки A, B, C, D также образуют гармоническую четверку.

Уравнение окружности запишем в виде

$$(x-a)^2+y^2=R^2, \tag{2}$$

где $a=AO$, R — радиус окружности, а уравнение секущей AD — в виде

$$y=kx, \tag{3}$$

где k — некоторое число. Координаты точек C и D удовлетворяют уравнениям (2) и (3). Если подставить $y=kx$ в уравнение (2), то придем к квадратному уравнению

$$(1+k^2)x^2-2ax+a^2-R^2=0, \tag{4}$$

корни x_1 и x_2 которого равны абсциссам точек C и D, т. е. $AC_1=x_1$, $AD_1=x_2$. По теореме Виета

$$x_1+x_2=\frac{2a}{1+k^2}, \quad x_1x_2=\frac{a^2-R^2}{1+k^2},$$

откуда

$$\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}=\frac{a^2-R^2}{a}. \tag{5}$$

Рассматривая прямоугольный треугольник AOK_1, нетрудно установить, что $AB_1=\frac{a^2-R^2}{a}$. Поэтому если положить $AB_1=x_0$, то равенство (5) можно записать в виде

$$\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}=x_0,$$

или

$$x_1(x_2-x_0)-x_2(x_0-x_1)=0.$$

Отсюда, учитывая, что

$$x_1(x_2-x_0)=\overline{AC}_1\cdot\overline{B_1D}_1, \quad x_2(x_0-x_1)=\overline{AD}_1\cdot\overline{C_1B}_1,$$

получаем

$$\overline{AC}_1\cdot\overline{B_1D}_1-\overline{AD}_1\cdot\overline{C_1B}_1=0,$$

а это и означает, что точки A, B_1, C_1, D_1 образуют гармоническую четверку. ■

Замечание. Равенство $\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}=x_0$ можно доказать и не прибегая к рассмотрению треугольника AOK_1. В самом деле, соотношение (5) показывает, что величина $\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$ не зависит от k, т. е. имеет одно и то же значение для любой прямой, описываемой уравнением (3). Возьмем k таким, чтобы уравнение (3) было уравнением касательной AK_1. Тогда оба корня x_1 и x_2 квадратного уравнения (4) будут равны абсциссе точки K_1, т. е. будут равны x_0. Но в этом случае $\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}=\frac{2x_0x_0}{x_0+x_0}=x_0$, а значит, и для любой другой прямой $\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}=x_0$.

Прямая K_1K_2 называется *полярой* данной точки A относительно данной окружности. Нетрудно доказать (сделайте это са-

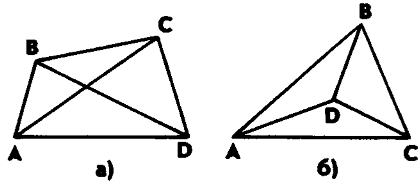


Рис. 43

мостоятельно), что если точка B не лежит на поляре, а прямая AB пересекает окружность в точках C и D, то точки C и D уже не будут гармонически разделять точки A и B. Поэтому можно сделать такой вывод:

если данная точка A лежит вне данной окружности, то множество точек B, для каждой из которых точки пересечения прямой AB и окружности гармонически разделяют точки A и B, представляет собой часть поляры точки A относительно данной окружности, лежащую внутри этой окружности.

16*. Четырехвершинник. Рассмотрим четыре точки, любые три из которых не лежат на одной прямой, и соединим их попарно отрезками. Полученная фигура, состоящая из шести отрезков, называется *четырехвершинником*. Четырехвершинник имеет вид четырехугольника (либо выпуклого, как на рисунке 43, *а*, либо невыпуклого, как на рисунке 43, *б*), в котором проведены диагонали.

Задача 4. В четырехвершиннике $ABCD$ непересекающиеся отрезки AD и BC, а также AB и CD продолжены до пересечения в точках P и Q соответственно. Прямая PQ пересекает прямую AC в точке R, а прямую BD в точке S (рис. 44). Доказать, что точки P и Q гармонически разделяют точки R и S.

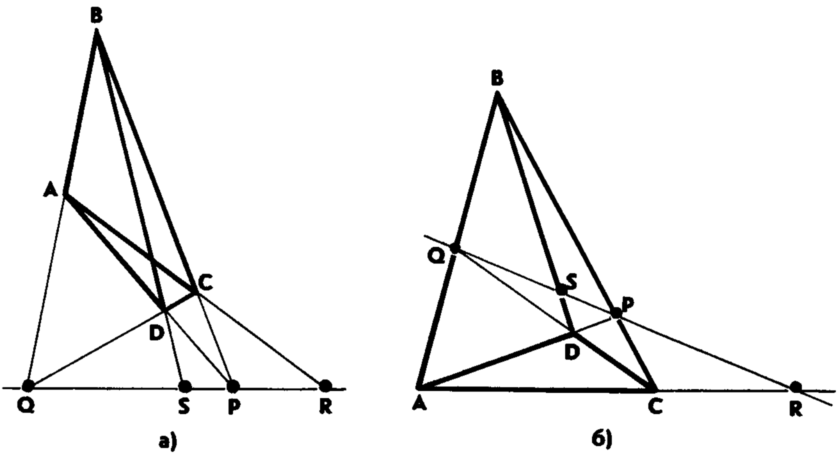


Рис. 44

Решение. Рассмотрим треугольник APQ. На его сторонах (либо на их продолжениях) взяты точки R, B и D так, что прямые AR, PB и QD пересекаются в одной точке (в точке C). Отсюда по теореме Чевы следует, что

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DP}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{RQ}}\cdot\frac{\overline{QB}}{\overline{BA}}=1.$$

С другой стороны, на сторонах этого же треугольника (либо их продолжениях) взяты точки D, B и S, лежащие на одной прямой. Следовательно, по теореме Менелая

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DP}}\cdot\frac{\overline{QB}}{\overline{BA}}\cdot\frac{\overline{PS}}{\overline{SQ}}=-1.$$

Разделив первое из равенств на второе, получим

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{RQ}}:\frac{\overline{PS}}{\overline{SQ}}=-1.$$

Это означает, что точки P, Q, R и S образуют гармоническую четверку, что и требовалось доказать. ■

17*. Построение касательной с помощью одной линейки. Вы знаете, как с помощью циркуля и линейки провести касательную к данной окружности через данную точку вне окружности. Оказывается, построение такой касательной можно выполнить не используя циркуля, т. е. с помощью только одной линейки.

Задача 5. Даны окружность и точка M вне этой окружности. Провести через точку M касательную к данной окружности с помощью только линейки (т. е. не используя циркуля).

Решение. Проведем через точку M какие-нибудь две секущие, пересекающие данную окружность в точках A и B, C и

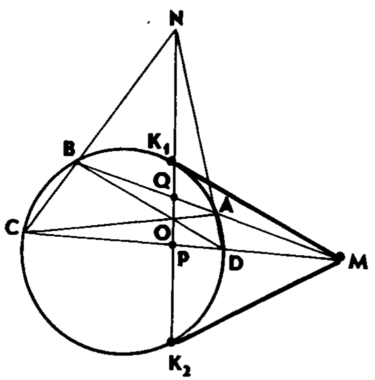


Рис. 45

D соответственно (рис. 45). Затем проведем диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ и обозначим буквой O точку их пересечения. Стороны AD и BC продолжим до пересечения в точке N. Проведем прямую ON и обозначим через K_1 и K_2 точки ее пересечения с окружностью. Осталось провести прямые MK_1 и MK_2 — это и есть искомые касательные.

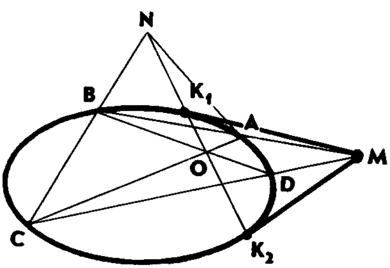
Чтобы обосновать этот факт, докажем, что прямая K_1K_2 является полярой точки M и данной окружности. Отсюда по определению поляры последует, что MK_1 и MK_2 — касательные к окружности.

Обозначим буквами Q и P точки пересечения прямой K_1K_2 с отрезками AB и CD и рассмотрим четырехвершинник $AOBN$. Согласно задаче 4 точки D и C гармонически разделяют точки M и P, и, следовательно, точка P лежит на поляре точки M относительно данной окружности. Аналогично, рассматривая четырехвершинник $CODN$, приходим к выводу, что точки A и B гармонически разделяют точки M и Q и, следовательно, точка Q также лежит на поляре точки M относительно данной окружности. Таким образом, прямая PQ, или, что то же самое, прямая K_1K_2, есть поляра точки M относительно данной окружности.

Итак, мы построили касательные MK_1 и MK_2 к данной окружности, используя только линейку для проведения прямых и не используя циркуля. ■

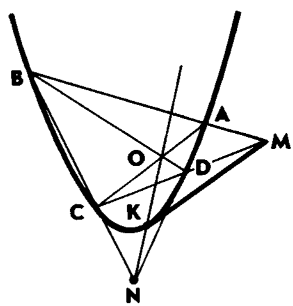
З а м е ч а н и е. Напомним, что эллипс может быть получен из окружности путем равномерного сжатия вдоль его оси симметрии. Но при таком сжатии всякая прямая переходит в прямую (объясните почему), а касательная к окружности переходит в касательную к эллипсу. Поэтому рассмотренный способ построения касательной с помощью только линейки пригоден и для эллипса (рис. 46).

Более того, точно таким же способом можно построить касательные к параболе (рис. 47) и гиперболе. Почему это так, мы расскажем в курсе стереометрии.



MK_1 и MK_2 — касательные к эллипсу

Рис. 46



MK — касательная к параболе

Рис. 47

Задачи

45. Четыре точки $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, $M_3(x_3;\ y_3)$, $M_4(x_4;\ y_4)$ лежат на прямой l. Докажите, что:

а) если прямая l не параллельна оси ординат, то точки M_1, M_2, M_3, M_4 образуют гармоническую четверку тогда и только тогда, когда

$$(x_1-x_3)(x_2-x_4)=(x_1-x_4)(x_3-x_2);$$

б) если прямая l не параллельна оси абсцисс, то они образуют гармоническую четверку тогда и только тогда, когда

$$(y_1-y_3)(y_2-y_4)=(y_1-y_4)(y_3-y_2).$$

46. Точки M_3 и M_4 делят направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ в отношениях k и k' соответственно. Докажите, что точки M_1, M_2, M_3, M_4 образуют гармоническую четверку тогда и только тогда, когда $k'=-k$.

47. На прямой даны три точки A, B и C. Докажите, что если точка C не совпадает с серединой отрезка AB, то существует, и притом только одна, точка D, такая, что точки A, B, C, D образуют гармоническую четверку, а если точка C — середина отрезка AB, то такой точки D нет.

48. На диаметре CD окружности отмечена точка A, а на продолжении этого диаметра — точка B так, что точки A и B гармонически разделяют точки C и D. Через точку B проведена прямая p, перпендикулярная к прямой CD. Докажите, что любая точка M прямой p и точка A гармонически разделяют точки P и Q, в которых прямая MA пересекается с окружностью.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

§ 1. Соотношения между сторонами и углами треугольника

18. Основные теоремы. Напомним основные теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника.

Теорема о равнобедренном треугольнике. ***В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Обратно, если в треугольнике два угла равны, то стороны, противолежащие этим углам, равны, т. е. треугольник равнобедренный.***

Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника. ***В треугольнике против большей стороны лежит больший угол и, обратно, против большего угла лежит большая сторона.***

Теорема (неравенство треугольника). ***Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и больше разности этих сторон.***

Теорема косинусов. ***Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.***

Теорема синусов. ***Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.***

Напомним также, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности. Таким образом, если R — радиус описанной около треугольника ABC окружности, то

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{CA}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=2R. \qquad (1)$$

Эти теоремы широко используются при доказательстве других теорем и решении задач.

19. Теорема Стюарта. С теоремой Стюарта вы познакомились в § 1 предыдущей главы. Здесь мы дадим другую формулировку этой теоремы и докажем ее, пользуясь теоремой косинусов.

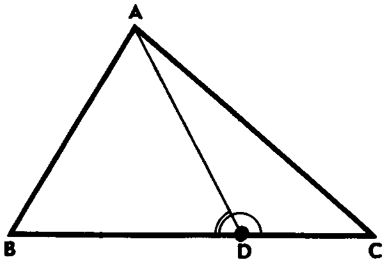


Рис. 48

Теорема Стюарта. ***Если точка D лежит на стороне BC треугольника ABC, то***

$$AD^2 = AC^2 \cdot \frac{BD}{BC} + AB^2 \cdot \frac{CD}{BC} - BD \cdot CD. \qquad (2)$$

Доказательство. Применим теорему косинусов к треугольникам ACD и ABD (рис. 48):

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos ADC,$$
$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos ADB.$$

Умножив первое равенство на BD, а второе — на CD и сложив, получим:

$$\begin{gathered} AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot CD = AD^2 \cdot BD + DC^2 \cdot BD - \\ -2AD \cdot DC \cdot BD \cos ADC + AD^2 \cdot CD + DB^2 \cdot CD - \\ -2AD \cdot BD \cdot CD \cos ADB. \end{gathered} \qquad (3)$$

Так как $BD + DC = BC$, то

$$AD^2 \cdot BD + AD^2 \cdot CD = AD^2 \cdot BC,$$
$$DC^2 \cdot BD + DB^2 \cdot CD = DC \cdot BD \cdot BC.$$

Далее, углы ADC и ADB смежные, поэтому $\angle ADC = 180° - \angle ADB$, и, следовательно,

$$\cos ADC = \cos(180° - \angle ADB) = -\cos ADB.$$

Таким образом, равенство (3) принимает вид

$$AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot CD = AD^2 \cdot BC + DC \cdot BD \cdot BC.$$

Разделив его на BC, приходим к равенству (2). ■

Замечание. Если воспользоваться обозначениями, принятыми в п. 14, и равенство (2) записать в виде

$$AD^2 = AC^2 \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} + AB^2 \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} - \overline{BD} \cdot \overline{DC}, \qquad (2')$$

то оно будет верным как для точек D, лежащих на стороне BC треугольника ABC, так и для точек D, лежащих на ее продолжении. Убедитесь в этом самостоятельно (см. задачу 17).

Пользуясь теоремой Стюарта, легко выразить длины медиан и биссектрис треугольника через его стороны.

Задача 1. Отрезок AD — медиана треугольника ABC. Доказать, что:

а) $AD=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$;

б) $AD=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}$,

где $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$.

Решение. а) Воспользуемся теоремой Стюарта. Так как D — середина стороны BC, то

$$\frac{BD}{BC}=\frac{1}{2},\ \frac{CD}{BC}=\frac{1}{2},\ BD\cdot DC=\frac{1}{4}BC^2=\frac{1}{4}a^2.$$

Подставляя эти значения в равенство (2) и учитывая, что $AC=b$, $AB=c$, после несложных преобразований получаем формулу а).

б) Воспользуемся теоремой косинусов: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$. Подставив это выражение для a^2 в формулу а), получим формулу б). ■

Задача 2. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Доказать, что:

а) $AD=\frac{\sqrt{bc((b+c)^2-a^2)}}{b+c}$; (4)

б) $AD=\frac{2\sqrt{bc(p-a)p}}{b+c}$; (5)

в) $AD=\sqrt{AB\cdot AC-BD\cdot DC}$, (6)

где $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$, $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

Решение. Согласно теореме о биссектрисе треугольника $\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$. Отсюда и из равенства $BD+DC=a$ выразим BD и DC через a, b и c:

$$DC=\frac{ab}{b+c},\ BD=\frac{ac}{b+c}. \tag{7}$$

Подставляя эти выражения в равенство (2) и учитывая, что $AC=b$, $AB=c$, после элементарных преобразований получаем:

$$AD^2=\frac{bc}{(b+c)^2}\left((b+c)^2-a^2\right). \tag{8}$$

а) Из равенства (8) непосредственно следует равенство (4).

б) Так как $(b+c)^2-a^2=4(p-a)p$ (проверьте это тождество самостоятельно), то из равенства (8) следует также равенство (5).

в) Из равенств (8) и (7) следует, что

$$AD^2=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=AB\cdot AC-BD\cdot DC,$$

откуда получаем равенство (6). ■

20. Треугольники с двумя соответственно равными сторонами.

Теорема. ***Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого, а углы, заключенные между ними, не равны, то третьи стороны треугольников не равны и против большего угла лежит большая сторона.***

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A>\angle A_1$. Докажем, что $BC>B_1C_1$. По теореме косинусов

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A,$$
$$B_1C_1{}^2=A_1B_1{}^2+A_1C_1{}^2-2A_1B_1\cdot A_1C_1\cos A_1.$$

Так как $\angle A>\angle A_1$, то $\cos A<\cos A_1$. Учитывая, что $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, получаем $BC^2>B_1C_1^2$, поэтому $BC>B_1C_1$. ■

Имеет место обратная теорема.

Теорема. ***Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого, а третьи стороны не равны между собой, то углы, противолежащие этим сторонам, также не равны и против большей стороны лежит больший угол.***

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ и $BC>B_1C_1$. Докажем, что $\angle A>\angle A_1$.

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что угол A не больше угла A_1. Тогда либо $\angle A=\angle A_1$, либо $\angle A<\angle A_1$. В первом случае $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $BC=B_1C_1$. Но это равенство противоречит условию $BC>B_1C_1$. Во втором случае согласно предыдущей теореме $BC<B_1C_1$, что также противоречит условию $BC>B_1C_1$. Итак, $\angle A>\angle A_1$. ■

Пользуясь доказанными теоремами, решим еще две задачи.

Задача 3. В треугольнике ABC $AB>AC$, отрезок AM — медиана. Доказать, что $\angle AMB>\angle AMC$ и $\angle BAM<\angle CAM$.

Решение. Треугольники AMB и AMC удовлетворяют условиям второй теоремы: AM — общая сторона, $MB=MC$ и $AB>AC$ (рис. 49), поэтому $\angle AMB>\angle AMC$.

Для доказательства второго утверждения задачи возьмем точку D, симметричную точке A относительно точки M, и рас-

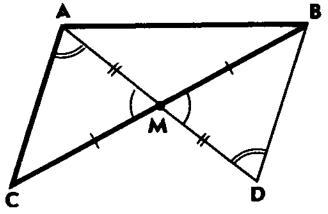


Рис. 49

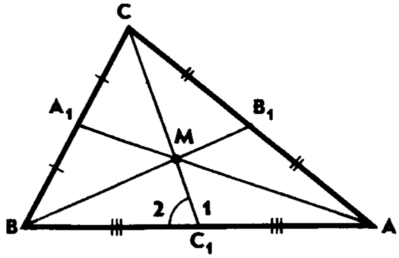


Рис. 50

смотрим треугольник MBD. Этот треугольник равен треугольнику MCA по двум сторонам и углу между ними, поэтому $BD=AC$ и $\angle D=\angle CAM$. В треугольнике ABD $BD<AB$, так как $BD=AC<AB$. Отсюда следует, что $\angle BAD<\angle D$. Так как $\angle D=\angle CAM$, то $\angle BAD<\angle CAM$ или $\angle BAM<\angle CAM$. ■

Задача 4. Отрезки AA_1 и BB_1 — медианы треугольника ABC. Доказать, что если $AC>BC$, то $AA_1>BB_1$.

Решение. Пусть CC_1 — третья медиана треугольника ABC, а M — точка пересечения медиан (рис. 50). Треугольники AMC_1 и BMC_1 удовлетворяют условиям первой теоремы: MC_1 — общая сторона, $C_1A=C_1B$ и согласно задаче 3 $\angle 1>\angle 2$. Следовательно, $AM>BM$. Но $AA_1=\frac{3}{2}AM$, $BB_1=\frac{3}{2}BM$, поэтому $AA_1>BB_1$. ■

Замечание. Неравенство $AA_1>BB_1$ можно доказать другим способом, если выразить медианы AA_1 и BB_1 через стороны треугольника по формуле а) из задачи 1.

21. Теоремы о площадях треугольника. Напомним теорему о площади треугольника.

Теорема. ***Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.***

Из этой теоремы и формул (1) получаем три следствия.

Следствие 1. *Площадь S треугольника ABC выражается формулой $S=\frac{AB\cdot BC\cdot CA}{4R}$, где R — радиус описанной окружности.*

В самом деле, согласно теореме о площади треугольника

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A,$$

а из формул (1) следует, что $\sin A=\frac{BC}{2R}$, поэтому

$$S=\frac{AB\cdot BC\cdot CA}{4R}.$$

С л е д с т в и е 2. *Площадь S треугольника ABC выражается формулой*

$$S=\frac{AB^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}.$$

В самом деле, по теореме синусов $\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$, поэтому

$$AC \cdot AB=\frac{AB^2 \sin B}{\sin C}.$$

По теореме о площади треугольника

$$S=\frac{1}{2} AC \cdot AB \sin A.$$

Подставив сюда значение $AC \cdot AB$ из предыдущей формулы, получаем искомое равенство.

С л е д с т в и е 3. *Площадь S треугольника ABC выражается формулой*

$$S=2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

где R — радиус описанной окружности.

Докажите это утверждение самостоятельно.

Напомним также формулу Герона, выражающую площадь S треугольника через длины a, b и c его сторон:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p — полупериметр треугольника.

Выведем теперь формулы, выражающие площадь треугольника через длины его сторон и радиусы вписанной и вневписанных окружностей.

Т е о р е м а. ***Площадь S треугольника со сторонами a, b, c, радиусом r вписанной окружности и радиусами r_a, r_b, r_c вневписанных окружностей выражается формулами:***

а) $S=\frac{1}{2} r(a+b+c)$;

б) $S=\frac{1}{2} r_a(-a+b+c)=\frac{1}{2} r_b(a-b+c)=\frac{1}{2} r_c(a+b-c)$;

в) $S=\sqrt{r\, r_a r_b r_c}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ABC — данный треугольник, $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, O — центр вписанной окружности радиуса r, а O_1, O_2 и O_3 — центры вневписанных окружностей, радиусы которых равны соответственно r_a, r_b, r_c.

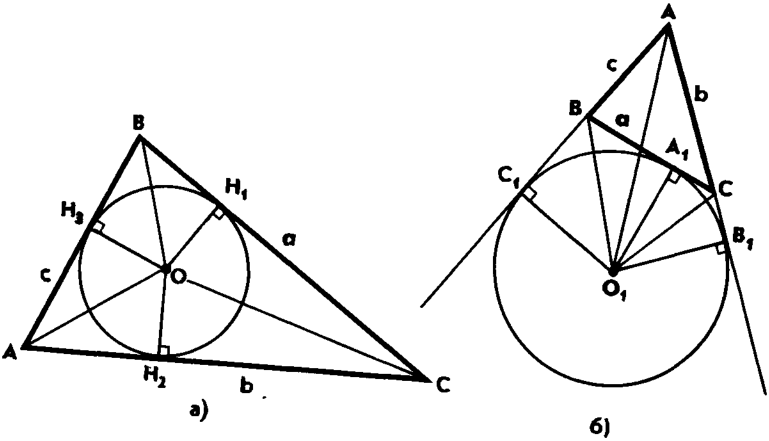


Рис. 51

а) Рассмотрим треугольники AOB, AOC, BOC и обозначим через OH_3, OH_2, OH_1 их высоты (рис. 51, *а*). Очевидно, $OH_3 = OH_2 = OH_1 = r$, поэтому

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} rc, \quad S_{BOC} = \frac{1}{2} ra, \quad S_{AOC} = \frac{1}{2} rb.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2} r (a + b + c).$$

б) Докажем, что $S = \frac{1}{2} r_a (-a + b + c)$. Пусть вневписанная окружность с центром O_1 радиуса r_a касается стороны BC в точке A_1, а продолжения сторон AB и AC — в точках C_1 и B_1 (рис. 51, *б*).

Рассмотрим треугольники AO_1B, AO_1C и BO_1C. Высотами этих треугольников являются отрезки O_1C_1, O_1B_1, O_1A_1, каждый из которых равен r_a. Поэтому

$$S_{AO_1B} = \frac{1}{2} r_a c, \quad S_{AO_1C} = \frac{1}{2} r_a b, \quad S_{BO_1C} = \frac{1}{2} r_a a.$$

Так как $S = S_{AO_1B} + S_{AO_1C} - S_{BO_1C}$, то

$$S = r_a (-a + b + c).$$

Аналогично выводятся два других соотношения из пункта б).

в) По доказанному

$$r = \frac{2S}{a+b+c}, \quad r_a = \frac{2S}{-a+b+c}, \quad r_b = \frac{2S}{a-b+c}, \quad r_c = \frac{2S}{a+b-c}.$$

Перемножим эти равенства:

$$r\,r_a\,r_b\,r_c=\frac{16S^4}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

Пусть p — полупериметр треугольника ABC. Тогда

$$a+b+c=2p,\quad -a+b+c=2(p-a),\quad a-b+c=2(p-b),$$
$$a+b-c=2(p-c).$$

Поэтому

$$r\,r_a\,r_b\,r_c=\frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Отсюда, учитывая формулу Герона, получаем

$$S=\sqrt{r\,r_a\,r_b\,r_c}.\ ■$$

Задачи

1. Длины a, b и c трех данных отрезков удовлетворяют неравенствам $b+c>a$, $b^2+c^2<a^2$. Докажите, что существует треугольник со сторонами a, b, c, причем этот треугольник тупоугольный.

2. Точки M и N лежат на сторонах BC и AC треугольника ABC; $CM:MB=m$, $CN:NA=n$. В каком отношении отрезок AM делится отрезком BN?

3. Отрезок AM — медиана треугольника ABC, и $\angle AMB>\angle AMC$. Докажите, что $AB>AC$ и $\angle BAM<\angle CAM$.

4. Докажите, что если в треугольнике две медианы равны, то треугольник равнобедренный.

5. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что $AB=BC$ тогда и только тогда, когда периметры треугольников ABM и BCM равны.

6. Отрезок CM — медиана треугольника ABC. Докажите, что

$$AC+BC-AB<2CM<AC+BC.$$

7. В треугольнике ABC медиана AM равна среднему пропорциональному двух его сторон $AC=b$, $AB=c$, т. е. $AM=\sqrt{bc}$. Докажите, что

$$\cos A=\frac{4bc-b^2-c^2}{2bc}.$$

8. Прямая AH перпендикулярна к биссектрисе AE треугольника ABC, а прямая BH перпендикулярна к прямой AH. Докажите, что периметр треугольника BHC больше периметра треугольника ABC.

9. В треугольнике ABC $BC>AB$. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$ и $\angle A=\angle A_1$.

10. Выразите высоту AH треугольника ABC через его стороны $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$.

11. Докажите, что площадь S треугольника выражается формулой

$$S=\sqrt{\frac{Rh_1h_2h_3}{2}},$$

где R — радиус описанной окружности, а h_1, h_2, h_3 — высоты треугольника.

12. Докажите, что площадь S треугольника ABC выражается формулой $S=2R^2 \sin A \sin B \sin C$, где R — радиус описанной окружности.

13. Докажите, что угол C треугольника ABC прямой, если его площадь равна rr_c, где r — радиус вписанной окружности, а r_c — радиус вневписанной окружности, которая касается стороны AB.

14. Стороны треугольника равны a, b и c. Найдите радиусы вписанной, описанной и трех вневписанных окружностей.

15. Докажите, что в остроугольном треугольнике ABC середины M, N, P высот AA_1, BB_1, CC_1 являются вершинами треугольника, площадь которого в четыре раза меньше площади треугольника $A_1B_1C_1$.

16. Докажите, что сумма квадратов медиан треугольника равна трем четвертям суммы квадратов его сторон.

17. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC или на ее продолжении. Докажите равенство (2′) п. 19.

§ 2. Скалярное произведение векторов

22. Скалярное произведение векторов и его свойства. Напомним, что *скалярным произведением векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла α между ними:

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha. \qquad (1)$$

Скалярное произведение $\vec{a}\vec{a}$ называется *скалярным квадратом вектора* $\vec{a}$ и обозначается через $\vec{a}^2$.

Из формулы (1) следует, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$;

б) $-|\vec{a}|\,|\vec{b}|\leqslant\vec{a}\vec{b}\leqslant|\vec{a}|\,|\vec{b}|$; (2)

в) скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они взаимно перпендикулярны.

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}\,\{a_1, a_2\}$, $\vec{b}\,\{b_1, b_2\}$, заданных в выбранной системе координат своими координатами, выражается формулой

$$\vec{a}\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2.$$

Напомним основные свойства скалярного произведения векторов: *для любых векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *и любого числа* k *справедливы соотношения*

1°. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$ (распределительный закон);

2°. $(k\vec{a})\vec{b}=k(\vec{a}\vec{b})$ (сочетательный закон).

Распределительный закон имеет место для любого числа $n>2$ слагаемых:

$$(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n)\vec{b}=\vec{a}_1\vec{b}+\vec{a}_2\vec{b}+\ldots+\vec{a}_n\vec{b}.$$

Далее, для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любых двух чисел k и l имеет место равенство

$$(k\vec{a})(l\vec{b})=(kl)\vec{a}\vec{b}.$$

В дальнейшем нам понадобится также равенство

$$\vec{a}\vec{b}=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2), \qquad (3)$$

которое доказано в п. 103 основного учебника.

23. Четыре леммы. В этом пункте мы докажем четыре леммы, которые нередко используются при решении геометрических задач с помощью векторов.

Лемма 1. *Векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда*

$$(\vec{a}\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2. \qquad (4)$$

Доказательство. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Если $\vec{a}=\vec{0}$, то равенство (4) очевидно. Рассмотрим случай, когда $\vec{a}\neq\vec{0}$. Тогда существует число k, такое, что $\vec{b}=k\vec{a}$. Поэтому

$$\vec{a}\vec{b}=\vec{a}(k\vec{a})=k\vec{a}\vec{a}=k|\vec{a}|^2,\ (\vec{a}\vec{b})^2=k^2|\vec{a}|^4.$$

С другой стороны,

$$\vec{a}^2\vec{b}^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2k^2|\vec{a}|^2=k^2|\vec{a}|^4.$$

Итак, $(\vec{a}\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$.

Обратно, предположим, что выполняется равенство (4), и докажем, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Если $\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{b}=\vec{0}$, то это утверждение очевидно. Рассмотрим случай, когда $\vec{a}\neq\vec{0}$ и $\vec{b}\neq\vec{0}$. Используя формулу (1), из равенства (4) получаем:

$$(|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha)^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2,$$

где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отсюда следует, что $\cos^2\alpha=1$, поэтому $\cos\alpha=1$ или $\cos\alpha=-1$. Следовательно,

$\alpha=0$ или $\alpha=180°$, т. е. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. ■

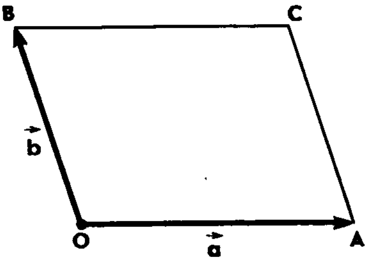


Рис. 52

Пользуясь соотношениями (2) и леммой 1, легко доказать следующие утверждения (сделайте это самостоятельно).

1^0. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны тогда и только тогда, когда $-|\vec{a}||\vec{b}|<\vec{a}\vec{b}<|\vec{a}||\vec{b}|$.

2^0. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$.

3^0. Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$.

Из леммы 1 следует, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то число $S=\vec{a}^2\vec{b}^2-(\vec{a}\vec{b})^2$ отлично от нуля. Это число имеет простой геометрический смысл. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы. От произвольной точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ и построим параллелограмм $OACB$, как показано на рисунке 52. Назовем его ***параллелограммом, построенным на векторах*** $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$. В зависимости от выбора точки O на данных векторах можно построить бесконечное множество параллелограммов, но все они равны друг другу (объясните почему) и, следовательно, все они имеют одну и ту же площадь. Для общности изложения условимся считать, что площадь «параллелограмма», построенного на коллинеарных векторах, равна нулю.

Задача 1. Доказать, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство

$$S^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\vec{b})^2, \quad (5)$$

где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

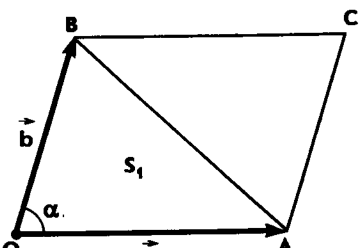


Рис. 53

Решение. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $S=0$ и равенство (5) непосредственно следует из леммы 1. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы. Построим параллелограмм $OACB$ на этих векторах и обозначим через S_1 площадь треугольника OAB (рис. 53). Тогда по теореме о площади треугольника

$$S_1=\frac{1}{2}\,OA\cdot OB\sin\alpha,$$

поэтому

$$S=2S_1=OA\cdot OB\sin\alpha,\quad S^2=OA^2\cdot OB^2\sin^2\alpha=$$
$$=|\vec a|^2|\vec b|^2(1-\cos^2\alpha)=|\vec a|^2|\vec b|^2-(\vec a\vec b)^2.\ \blacksquare$$

Докажем теперь две леммы о векторах, направленных по биссектрисам данного угла и смежного с ним угла. Утверждение первой из этих лемм было доказано в п. 64 «ДГ-8» на основе свойств диагоналей ромба. Здесь мы дадим другое доказательство — с помощью скалярного произведения векторов.

Лемма 2. *Если AOB — неразвернутый угол, $\overrightarrow{OA}=\vec a$, $\overrightarrow{OB}=\vec b$, то вектор $\vec p=\frac{\vec a}{|\vec a|}+\frac{\vec b}{|\vec b|}$ направлен по биссектрисе угла AOB.*

Доказательство. Так как векторы $\vec a$ и $\vec b$ не коллинеарны, то векторы $\vec a$ и $\vec p$, а также $\vec b$ и $\vec p$ не коллинеарны (объясните почему). Пусть α — угол между векторами $\vec a$ и $\vec p$, а β — угол между векторами $\vec b$ и $\vec p$. Лемма будет доказана, если мы установим, что $\alpha=\beta<90°$.

Найдем скалярные произведения $\vec a\vec p$ и $\vec b\vec p$:

$$\vec a\vec p=\vec a\left(\frac{\vec a}{|\vec a|}+\frac{\vec b}{|\vec b|}\right)=|\vec a|+\frac{\vec a\vec b}{|\vec b|}=\frac{1}{|\vec b|}(|\vec a||\vec b|+\vec a\vec b).$$

Аналогично

$$\vec b\vec p=\frac{1}{|\vec a|}(|\vec a||\vec b|+\vec a\vec b).$$

Из этих равенств следует, что

$$|\vec a||\vec p||\vec b|\cos\alpha=|\vec a||\vec b|+\vec a\vec b,$$
$$|\vec a||\vec p||\vec b|\cos\beta=|\vec a||\vec b|+\vec a\vec b.$$

Так как $|\vec a||\vec b|+\vec a\vec b>0$ (утверждение 1^0), то $\cos\alpha=\cos\beta>0$ и, следовательно, $\alpha=\beta<90°$. $\blacksquare$

Лемма 3. *Если AOB — неразвернутый угол, $\overrightarrow{OA}=\vec a$, $\overrightarrow{OB}=\vec b$, то вектор $\vec q=\frac{\vec a}{|\vec a|}-\frac{\vec b}{|\vec b|}$ направлен по биссектрисе угла, смежного с углом AOB.*

Доказательство. Пусть B' — точка, симметричная точке B относительно точки O (рис. 54). Тогда угол AOB' является углом, смежным с углом AOB.

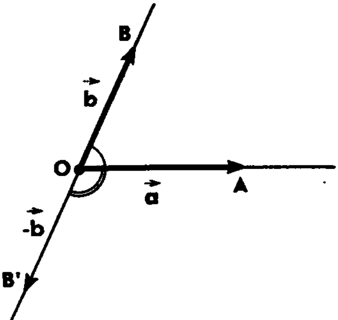


Рис. 54

Так как $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB'}=-\vec{b}$, то согласно лемме 2 вектор $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{-\vec{b}}{|-\vec{b}|}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\vec{q}$ направлен по биссектрисе угла AOB'. ■

З а м е ч а н и е. Нетрудно проверить, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в леммах 2 и 3 взаимно перпендикулярны. В самом деле,

$$\vec{p}\vec{q}=\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=\frac{\vec{a}^2}{|\vec{a}|^2}-\frac{\vec{b}^2}{|\vec{b}|^2}=1-1=0,$$

и, следовательно, $\vec{p}\perp\vec{q}$.

Отсюда следует, что биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.

Л е м м а 4. *Для произвольных точек A, B, C и D имеют место равенства:*

а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$;

б) $2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=AD^2+BC^2-AB^2-CD^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Воспользуемся равенствами $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$. Подставив эти выражения в левую часть равенства а), получим:

$$\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}).$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, обнаружим, что это выражение равно нулю.

б) Воспользуемся тождеством

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}, \text{ или } \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=-(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}).$$

Возведя это тождество в квадрат и используя равенство а), приходим к равенству б). ■

24. Применение скалярного произведения векторов при решении задач о треугольниках. Скалярное произведение векторов широко применяется при изучении свойств геометрических фигур. Рассмотрим примеры решения задач.

З а д а ч а 2. Доказать, что если медиана треугольника совпадает с его биссектрисой, то треугольник равнобедренный.

Р е ш е н и е. Пусть в треугольнике ABC медиана AM совпадает с биссектрисой. Тогда $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. По лемме 2 векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$ коллинеарны, поэтому существует число k такое, что

$$\overrightarrow{AM}=k\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right), \text{ или } \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=k\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right).$$

Так как векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ не коллинеарны, то из этого равенства следует, что

$$\frac{1}{2}=\frac{k}{AB},\ \frac{1}{2}=\frac{k}{AC}.$$

Следовательно, $AB=AC$, т. е. треугольник ABC равнобедренный. ■

Задача 3. Отрезок CM — медиана треугольника ABC. Доказать, что угол C треугольника: а) острый тогда и только тогда, когда $CM>\frac{AB}{2}$; б) прямой тогда и только тогда, когда $CM=\frac{AB}{2}$; в) тупой тогда и только тогда, когда $CM<\frac{AB}{2}$.

Решение. Введем обозначения: $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{m}=\overrightarrow{CM}$ (рис. 55). Точка M — середина отрезка AB, поэтому $\vec{m}=$ $=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$. Отсюда следует, что

$$\vec{m}^2=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})^2.$$

Так как

$$(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{b}-\vec{a})^2+4\vec{a}\vec{b}$$

(проверьте это равенство самостоятельно), то

$$\vec{m}^2=\frac{(\vec{b}-\vec{a})^2}{4}+\vec{a}\vec{b},\text{ или } 4\vec{m}^2=(\vec{b}-\vec{a})^2+4\vec{a}\vec{b}.$$

Но $\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Таким образом,

$$4CM^2=AB^2+4\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{CB},$$

или

$$CM^2-\frac{AB^2}{4}=CA\cdot CB\cos C. \qquad (6)$$

а) Очевидно, угол C острый тогда и только тогда, когда $\cos C>0$. Поэтому из равенства (6) мы заключаем, что угол C острый тогда и только тогда, когда $CM^2-\frac{AB^2}{4}>0$, или $CM>\frac{AB}{2}$.

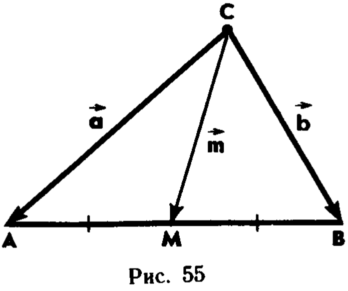
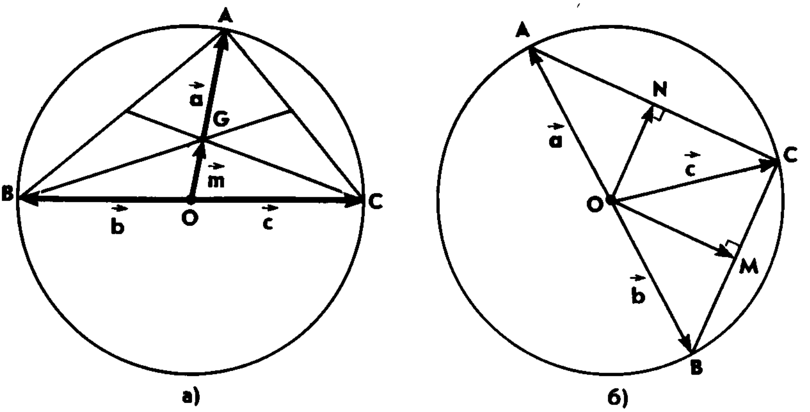


Рис. 55

Аналогично, пользуясь равенством (6), убеждаемся в справедливости утверждений б) и в). ■

Задача 4. Расстояние от точки G пересечения медиан треугольника ABC до центра O описанной окруж-



а) б)

Рис. 56

ности радиуса R равно $\frac{R}{3}$. Доказать, что треугольник ABC прямоугольный.

Решение. Примем O за начальную точку и введем обозначения: $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$, $\vec{m}=\overrightarrow{OG}$ (рис. 56, *а*). Ясно, что $\vec{a}^2=\vec{b}^2=\vec{c}^2=R^2$.

Воспользуемся тем, что радиус-вектор $\vec{m}$ точки пересечения медиан треугольника выражается через радиус-векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ его вершин формулой $\vec{m}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ (см. «ДГ-8», п. 71). Отсюда следует, что

$$\vec{m}^2=\frac{1}{9}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2.$$

По условию $OG^2=\vec{m}^2=\frac{R^2}{9}$, поэтому

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=R^2=\vec{a}^2, \text{ или } (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2-\vec{a}^2=0.$$

Отсюда получаем:

$$(\vec{b}+\vec{c})(2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0, \text{ или } (\vec{b}+\vec{c})(2\vec{a}+2\vec{c}+\vec{b}-\vec{c})=0.$$

Так как

$$(\vec{b}+\vec{c})(\vec{b}-\vec{c})=\vec{b}^2-\vec{c}^2=0,$$

то предыдущее равенство запишется так:

$$2(\vec{b}+\vec{c})(\vec{a}+\vec{c})=0.$$

Возможны три случая:

а) $\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, т. е. $\vec{b}=-\vec{c}$. В этом случае точка O является серединой отрезка BC, поэтому BC — диаметр описанной окружности. Следовательно, угол A прямой (см. рис. 56, *а*).

б) $\vec{a}+\vec{c}=\vec{0}$, т. е. $\vec{a}=-\vec{c}$. Аналогично случаю а) мы заключаем, что угол B треугольника прямой.

в) $(\vec{b}+\vec{c})\perp(\vec{a}+\vec{c})$. Пусть M и N — середины сторон BC и AC (рис. 56, *б*). Тогда $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$, $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$, поэтому $\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{ON}$. Отсюда следует, что $ONCM$ — прямоугольник, значит, угол C прямой. ■

Задача 5 (теорема Лейбница). Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Доказать, что для произвольной точки X плоскости имеет место равенство

$$XA^2+XB^2+XC^2=3XM^2+AM^2+BM^2+CM^2. \tag{7}$$

Решение. Примем M за начальную точку и введем обозначения:

$$\vec{a}=\overrightarrow{MA},\ \vec{b}=\overrightarrow{MB},\ \vec{c}=\overrightarrow{MC},\ \vec{x}=\overrightarrow{MX}.$$

Так как

$$\overrightarrow{XA}=\vec{a}-\vec{x},\ \overrightarrow{XB}=\vec{b}-\vec{x},\ \overrightarrow{XC}=\vec{c}-\vec{x},$$

то

$$XA^2+XB^2+XC^2=\overrightarrow{XA}^2+\overrightarrow{XB}^2+\overrightarrow{XC}^2=(\vec{a}-\vec{x})^2+$$
$$+(\vec{b}-\vec{x})^2+(\vec{c}-\vec{x})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+3\vec{x}^2-2\vec{x}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

Напомним, что если O — произвольная точка плоскости, то $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ (см. «ДГ-8», п. 71). Отсюда следует, что

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0},$$

поэтому

$$\overrightarrow{XA}^2+\overrightarrow{XB}^2+\overrightarrow{XC}^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+3\vec{x}^2.$$

Это равенство совпадает с равенством (7). ■

Отметим, что из теоремы Лейбница непосредственно следует интересный вывод: среди всех точек плоскости точка пересечения медиан данного треугольника является точкой, для которой сумма квадратов расстояний до вершин треугольника имеет наименьшее значение.

25. Применение скалярного произведения векторов к доказательству теорем. Выведем формулу Герона, используя скалярное произведение векторов. Напомним, что эта формула была выведена в п. 26 учебного пособия «ДГ-8» другим способом — с помощью теоремы Пифагора.

Теорема. ***Площадь S треугольника, стороны которого равны a, b и c, вычисляется по формуле***

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ ***— полупериметр треугольника.***

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Введем обозначения: $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, рассмотрим параллелограмм $CADB$, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 57). Обозначим буквой S' его площадь. Так как $|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$ и $|\vec{a}-\vec{b}|=c$, то по формуле (5)

$$S'^2=a^2b^2-(\vec{a}\vec{b})^2,$$

а по формуле (3)

$$\vec{a}\vec{b}=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2).$$

Подставляя это выражение в формулу для S' и учитывая, что $S=\frac{1}{2}S'$, приходим к равенству

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}a^2b^2-\frac{1}{16}(a^2+b^2-c^2)}.$$

Самостоятельно убедитесь в том, что в этой формуле подкоренное выражение можно привести к виду

$$p(p-a)(p-b)(p-c). \blacksquare$$

Предыдущую формулу можно записать так:

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2}. \quad (8)$$

Таким образом, площадь S треугольника, стороны которого равны a, b, c, вычисляется по формуле (8).

Рассмотрим еще один пример применения скалярного произведения векторов к доказательству теорем. Приведем новое доказательство теоремы о высотах треугольника.

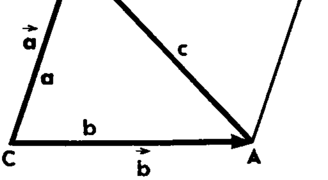


Рис. 57

Теорема. ***Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.***

Доказательство. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты данного треугольника ABC. Докажем сначала, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в некоторой точке H (рис. 58). В самом деле, если предположить, что $AA_1 \parallel BB_1$, то прямая BC, будучи перпендикулярной к прямой AA_1, была бы перпендикулярна и к прямой BB_1, а тогда через точку C проходили бы две прямые CA и CB, перпендикулярные к прямой BB_1, что невозможно.

Докажем теперь, что точка H лежит на прямой CC_1. Если точки C и H совпадают, то это утверждение верно, поэтому предположим, что они не совпадают. Применим лемму 4 к точкам A, B, C и H:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BH}=0.$$

Так как

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \text{ и } \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BH}=0,$$

то

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=0.$$

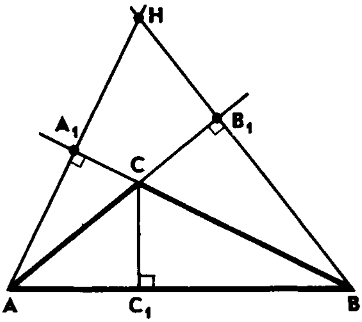


Рис. 58

Отсюда, учитывая, что $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CH}$ — ненулевые векторы, мы заключаем, что $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CH}$, поэтому $AB\perp CH$. Следовательно, прямые CC_1 и CH совпадают, и, значит, точка H лежит на прямой CC_1. ■

Точка пересечения высот или их продолжений называется *ортоцентром треугольника.*

Задачи

18. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O, причем точка O не лежит на сторонах AB и AC. Докажите, что угол BAC прямой тогда и только тогда, когда

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})=0.$$

19. Докажите, что радиус-вектор $\vec{r}$ центра окружности, вписанной в треугольник ABC, выражается формулой

$$\vec{r}=\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c},$$

где $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$, а $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — радиус-векторы точек A, B и C.

20. Точка M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а P — периметр треугольника. Докажите, что

$$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{P}(CA\cdot\overrightarrow{CB}+CB\cdot\overrightarrow{CA}).$$

21. В треугольнике ABC отрезок CM — высота, точка H — ортоцентр. Докажите, что

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MH}=0.$$

22. Докажите, что точки A, B и C являются вершинами некоторого треугольника тогда и только тогда, когда

$$-AB\cdot AC<\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<AB\cdot AC.$$

23. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O, точка H — ортоцентр треугольника. Докажите, что

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

24. Докажите, что медиана CM треугольника ABC удовлетворяет неравенству

$$CM<\frac{1}{2}(CA+CB).$$

25. Докажите, что имеют место следующие характеристические свойства равнобедренного треугольника: в треугольнике ABC $AC=BC$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий: а) медиана CM совпадает с высотой CH; б) медиана CM совпадает с биссектрисой CD; в) высота CH совпадает с биссектрисой CD.

26. Отрезки AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC. Докажите, что $A_1B_1=AB\,|\cos C|$.

27. Точка M лежит на прямой, содержащей сторону BC треугольника ABC, и делит направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$ в отношении k, т. е. $\overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{MC}$. Докажите, что

$$AB^2+kAC^2=BM^2+kCM^2+(1+k)AM^2.$$

28. Докажите, что на описанной около треугольника окружности лежат точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно: а) середин сторон треугольника; б) прямых, содержащих стороны треугольника.

29. Докажите, что точка пересечения медиан AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC, центр вписанной в треугольник окружности и центр окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$, лежат на одной прямой.

30. Докажите, что в треугольнике середины трех сторон, основания трех высот и середины трех отрезков, соединяющих вершины треугольника с ортоцентром, лежат на одной окружности.

31. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ расположены так, что прямые AA', BB', CC', перпендикулярные к прямым B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, пересекаются в некоторой точке H. Прямые A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1' перпендикулярны к прямым BC, CA, AB. Докажите, что если две из этих прямых пересекаются, то третья прямая проходит через точку их пересечения.

§ 3. Применение тригонометрических формул при решении задач о треугольниках

26. Некоторые тригонометрические формулы. В геометрии нередко используются формулы синуса и косинуса суммы и разности двух углов:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta, \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Эти тождества доказываются в курсе алгебры. Мы ими будем пользоваться в предположении, что $\alpha\geqslant\beta$ и $\alpha+\beta\leqslant180°$.

Если в формулах синуса и косинуса суммы двух углов положить $\beta=\alpha$, то получим формулы синуса и косинуса двойного угла:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad (3)$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \qquad (4)$$

Заменив в этих формулах α на $\frac{\alpha}{2}$, получим:

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},\quad \cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (5)$$

В свою очередь, пользуясь этими формулами, легко получить следующие равенства:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}, \qquad (6)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}, \qquad (7)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (8)$$

Приведем еще две формулы:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (9)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (10)$$

Они получаются из формул (1) заменой α и β на $\frac{\alpha+\beta}{2}$ и $\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Воспользуемся приведенными формулами для решения следующей задачи.

Задача 1. Доказать, что для произвольного угла α, $\alpha \leqslant 60°$, имеет место тождество

$$\sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \sin (60° + \alpha) \sin (60° - \alpha).$$

Решение. Преобразуем сначала левую часть этого равенства:

$$\sin 3\alpha = \sin (2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha =$$
$$= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha.$$

Преобразуем теперь правую часть:

$$4 \sin \alpha \sin (60° + \alpha) \sin (60° - \alpha) =$$
$$= 4 \sin \alpha (\sin 60° \cos \alpha + \cos 60° \sin \alpha)(\sin 60° \cos \alpha - \cos 60° \sin \alpha) =$$
$$= 4 \sin \alpha (\sin^2 60° \cos^2 \alpha - \cos^2 60° \sin^2 \alpha).$$

Но $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, поэтому правая часть совпадает с левой частью равенства. ■

27. Соотношения между элементами треугольника. Рассмотрим примеры применения скалярного произведения векторов и тригонометрических формул для вывода некоторых соотношений между элементами треугольника.

Задача 2. Доказать, что в произвольном треугольнике ABC:

а) $c = a \cos B + b \cos A$; (11)

б) $\frac{a^2 - b^2}{c} = a \cos B - b \cos A$, (12)

где $c = AB$, $a = BC$, $b = CA$.

Решение. а) Пусть $\vec{i}$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{AB}$. По правилу треугольника сложения векторов $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ (рис. 59). Умножив это равенство скалярно на $\vec{i}$, получим

$$\overrightarrow{AB}\,\vec{i} = \overrightarrow{AC}\,\vec{i} + \overrightarrow{CB}\,\vec{i}.$$

По формуле (1) § 2 имеем:

$$\overrightarrow{AB}\,\vec{i} = AB, \quad \overrightarrow{AC}\,\vec{i} = AC \cos A,$$

$$\overrightarrow{CB}\,\vec{i} = CB \cos A_1BC_1 = BC \cos B.$$

Итак,

$$AB = AC \cos A + BC \cos B,$$

т. е.

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

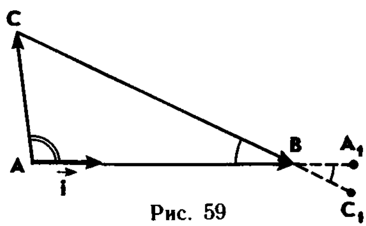


Рис. 59

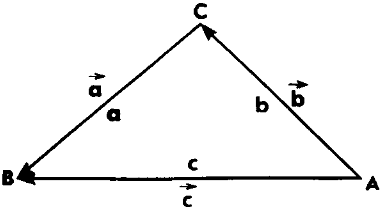


Рис. 60

б) Пусть $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$ (рис. 60). Тогда

$$|\vec{a}|=a,\ |\vec{b}|=b,\ |\vec{c}|=c \text{ и } \vec{c}=\vec{a}+\vec{b}.$$

Умножив последнее равенство скалярно на $\vec{a}-\vec{b}$, получим

$$\vec{c}\,(\vec{a}-\vec{b})=(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}), \text{ или } \vec{c}\,\vec{a}-\vec{c}\,\vec{b}=\vec{a}^2-\vec{b}^2.$$

Так как $\vec{c}\,\vec{a}=ca\cos B$, $\vec{c}\,\vec{b}=cb\cos A$, то из предыдущего равенства следует (12). ■

Воспользуемся рассмотренной задачей для доказательства теоремы синусов. Напомним, что теорема синусов была доказана в основном учебнике с применением теоремы о площади треугольника. Здесь мы приводим другое доказательство теоремы.

Задача 3. Доказать теорему синусов: для треугольника ABC со сторонами $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ справедливы равенства

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Решение. Запишем формулу (12) в виде

$$a^2-b^2=(a\cos B-b\cos A)\,c.$$

Подставив сюда значение c из (11), получим

$$a^2-b^2=a^2\cos^2 B-b^2\cos^2 A, \text{ или}$$
$$a^2-b^2=a^2-a^2\sin^2 B-(b^2-b^2\sin^2 A).$$

Отсюда

$$a^2\sin^2 B=b^2\sin^2 A.$$

Учитывая, что $a>0$, $b>0$, $\sin A>0$, $\sin B>0$, из этого равенства получаем

$$a\sin B=b\sin A, \text{ или } \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}. \quad ■$$

Задача 4. В треугольнике ABC $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$. Доказать, что

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc},\quad \sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}.$$

Решение. Применим теорему косинусов к треугольнику ABC:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

По формуле (7)

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos A).$$

Подставив сюда выражение для $\cos A$, приходим к равенству

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{4bc}.$$

Преобразуем числитель в правой части равенства:

$$b^2+c^2-a^2+2bc=(b+c)^2-a^2=(a+b+c)(b+c-a)=2p(2p-2a).$$

Таким образом,

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2p(2p-2a)}{4bc}=\frac{p(p-a)}{bc}.$$

Далее, $\frac{p(p-a)}{bc}+\frac{(p-b)(p-c)}{bc}=1$. (Проверьте это тождество самостоятельно.) Поэтому

$$\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos^2\frac{A}{2}=1-\frac{p(p-a)}{bc}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}.\ \blacksquare$$

Задача 5. Отрезок AD длины l — биссектриса треугольника ABC, в котором $AB=c$, $AC=b$. Доказать, что

$$l=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

Решение. По формуле площади треугольника

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A,\quad S_{ABD}=\frac{1}{2}cl\sin\frac{A}{2},\quad S_{ACD}=\frac{1}{2}bl\sin\frac{A}{2}\ \text{(рис. 61)}.$$

Так как $S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD}$, то

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}cl\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}bl\sin\frac{A}{2},$$

или $bc\sin A=l(b+c)\sin\frac{A}{2}$.

По первой формуле (5)

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},$$

поэтому $l=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$. $\blacksquare$

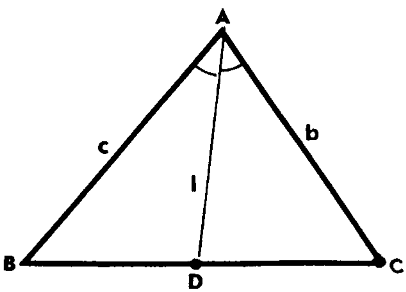


Рис. 61

З а д а ч а 6 (т е о р ё м а т а н г е н с о в). В треугольнике ABC $BC=a$, $AC=b$, $\angle A \geqslant \angle B$. Доказать, что

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

где $c=AB$.

Отсюда следует, что

$$a=\frac{c}{\sin C}\sin A,\quad b=\frac{c}{\sin C}\sin B.$$

Поэтому

$$a-b=\frac{c}{\sin C}(\sin A-\sin B),\quad a+b=\frac{c}{\sin C}(\sin A+\sin B).$$

Таким образом,

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}. \qquad (13)$$

Воспользуемся формулами (9) и (10):

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2},$$

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$

Подставляя эти выражения в правую часть равенства (13), получаем искомую формулу. ■

28*. Теорема Морлея. Докажем одну из самых удивительных теорем геометрии, открытую в 1894 г. американским математиком Франком Морлеем (1862—1937).

Т е о р е м а. ***Если через вершины произвольного треугольника ABC провести лучи AB_1, AC_1, BA_1, BC_1, CA_1, CB_1, делящие каждый из его углов на три равные части, как показано на рисунке 62, то точки A_1, B_1 и C_1 их пересечения, отмеченные на этом рисунке, являются вершинами равностороннего треугольника.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выразим B_1C_1 через углы треугольника ABC и радиус R описанной около него окружности. Для удобства введем обозначения: $\angle A=3\alpha$, $\angle B=3\beta$, $\angle C=3\gamma$ (см. рис. 62). Ясно, что $\alpha+\beta+\gamma=60°$ и $\alpha<60°$, $\beta<60°$, $\gamma<60°$.

В треугольнике ABC сторона AC равна $2R\sin B$ (см. формулы (1), § 1), поэтому в треугольнике AB_1C $AC=2R\sin^3\beta$,

$\angle B_1AC=\alpha$, $\angle B_1CA=\gamma$. Применим к этому треугольнику теорему синусов:

$$\frac{AC}{\sin B_1}=\frac{AB_1}{\sin\gamma}. \qquad (14)$$

Так как $\angle B_1=180°-\alpha-\gamma$ и $\alpha+\beta+\gamma=60°$, то $\sin B_1=$ $=\sin(180°-\alpha-\gamma)=\sin(\alpha+\gamma)=\sin(60°-\beta)$. Следовательно, согласно формуле (14)

$$AB_1=\frac{2R\sin 3\beta\sin\gamma}{\sin(60°-\beta)}.$$

По задаче 1

$$\sin 3\beta=4\sin\beta\sin(60°+\beta)\sin(60°-\beta),$$

$$\text{поэтому } AB_1=8R\sin\beta\sin\gamma\sin(60°+\beta).$$

Аналогично из треугольника ABC_1 находим:

$$AC_1=8R\sin\beta\sin\gamma\sin(60°+\gamma).$$

Теперь по теореме косинусов из треугольника AB_1C_1 можно найти $B_1C_1^2$:

$$B_1C_1^2=AB_1^2+AC_1^2-2AB_1\cdot AC_1\cos\alpha=64R^2\sin^2\beta\sin^2\gamma[\sin^2(60°+\beta)+$$
$$+\sin^2(60°+\gamma)-2\sin(60°+\beta)\sin(60°-\gamma)\cos\alpha].$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках. Для этого рассмотрим какой-нибудь треугольник, два угла которого равны $(60°+\beta)$ и $(60°+\gamma)$. Такой треугольник существует, поскольку сумма этих углов меньше 180°. Ясно, что третий угол этого треугольника равен α. Пусть r — радиус описанной около него окружности. Тогда его стороны равны:

$2r\sin(60°+\beta)$, $2r\sin(60°+\gamma)$ и $2r\sin\alpha$ (рис. 63)

Применим к нему теорему косинусов:

$$4r^2\sin^2\alpha=4r^2\sin^2(60°+\beta)+4r^2\sin^2(60°+\gamma)-$$
$$-8r^2\sin(60°+\beta)\sin(60°+\gamma)\cos\alpha.$$

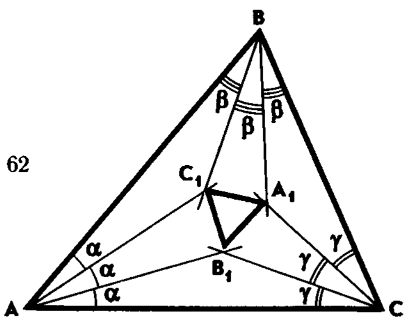


Рис. 62

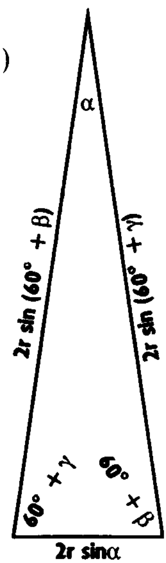


Рис. 63

После сокращения на $4r^2$ мы приходим к выводу, что выражение в квадратных скобках равно $\sin^2\alpha$. Следовательно, для стороны B_1C_1 окончательно получаем

$$B_1C_1 = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

В это выражение углы α, β и γ входят симметрично. Поэтому ясно, что выражения для A_1C_1 и A_1B_1 будут точно такими же. Но это и означает, что треугольник $A_1B_1C_1$ — равносторонний. ■

Задачи

В задачах 32—39 требуется доказать справедливость указанных соотношений между сторонами и углами треугольника ABC, в котором $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$. Предполагается, что $\angle A \geqslant \angle B$.

32. $\frac{a+b}{c}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A-B}{2}$; $\quad \frac{a+b}{c}\cos\frac{A+B}{2}=\cos\frac{A-B}{2}$.

33. $\frac{a-b}{c}\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{A-B}{2}$; $\quad \frac{a-b}{c}\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{A-B}{2}$.

34. $\operatorname{tg} A=\frac{a\sin B}{c-a\cos B}$.

35. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

36. $\cos 2A+\cos 2B=-2\cos C\cos(A-B)$, где $A\geqslant B$.

37. $\cos 2C=-2\cos C\cos(A+B)-1$.

38. $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+4\cos A\cos B\cos C+1=0$.

39. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$.

40. В треугольнике ABC

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=\lambda.$$

Докажите, что треугольник является:

а) остроугольным тогда и только тогда, когда $\lambda<1$;
б) тупоугольным тогда и только тогда, когда $\lambda>1$;
в) прямоугольным тогда и только тогда, когда $\lambda=1$.

41. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный тогда и только тогда, когда

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1.$$

§ 4. Соотношения между сторонами и углами четырехугольника

29. Теорема косинусов для четырехугольника. Докажем теорему косинусов для четырехугольника.

Теорема. ***Если в выпуклом четырехугольнике ABCD*** $\angle A + \angle D \leqslant 180°$, ***то***

$$\mathbf{AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 - 2\,(AB \cdot BC \cos B + BC \cdot CD \cos C - AB \cdot CD \cos (A+D)).} \quad (1)$$

Доказательство. По теореме косинусов для треугольников ADC и ABC (рис. 64) имеем:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cos ACD,$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B.$$

Подставив выражение для AC^2 из второго равенства в первое, получим:

$$AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 - 2AB \cdot BC \cos B - 2AC \cdot CD \cos ACD. \quad (2)$$

Докажем, что

$$-AC \cos ACD = -BC \cos C + AB \cos (A+D). \quad (3)$$

Для этого введем в рассмотрение единичный вектор $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{DC}}{DC}$ и воспользуемся равенством $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$. Умножив это равенство скалярно на $\vec{i}$, получим

$$\overrightarrow{CA}\vec{i} = -\overrightarrow{AB}\vec{i} - \overrightarrow{BC}\vec{i},$$

или

$$CA \cos (\widehat{\overrightarrow{CA}, \vec{i}}) = -AB \cos (\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{i}}) - BC \cos (\widehat{\overrightarrow{BC}, \vec{i}}). \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что

$$\widehat{\overrightarrow{CA}, \vec{i}} = 180° - \angle ACD, \ \widehat{\overrightarrow{BC}, \vec{i}} = \angle C.$$

Воспользовавшись рисунком 64, убедитесь также в том, что $\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{i}} = 180° - \angle A - \angle D$ (это равенство верно как в случае, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{i}$ коллинеарны, так и в случае, когда они не коллинеарны). Таким образом, равенство (4) принимает вид (3). Умножив равенство (3) на CD и подставив полученное выраже-

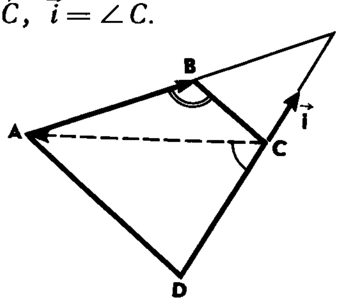


Рис. 64

ние для $-2AC \cdot CD \cos ACD$ в равенство (2), приходим к равенству (1). ■.

Замечание. Доказанная теорема может быть применена к любому выпуклому четырехугольнику. В самом деле, если $\angle A + \angle D > 180°$, то вместо этих углов следует взять углы B и C.

30. Теорема Эйлера.

Теорема. ***В произвольном четырехугольнике ABCD расстояние между серединами M и N диагоналей выражается формулой***

$$MN^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2). \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть M и N — середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ (рис. 65). Так как

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}), \quad \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB},$$

то

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}).$$

Отсюда следует, что

$$4\overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{DB}^2 + \overrightarrow{DA}^2 + \overrightarrow{DC}^2 - 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}. \qquad (6)$$

Используя соотношение (3) из § 2, получаем:

$$2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA} = DB^2 + DA^2 - AB^2,$$

$$2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = DB^2 + DC^2 - BC^2,$$

$$2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = DA^2 + DC^2 - AC^2.$$

Подставив эти выражения в правую часть равенства (6), после несложных преобразований приходим к равенству (5). ■

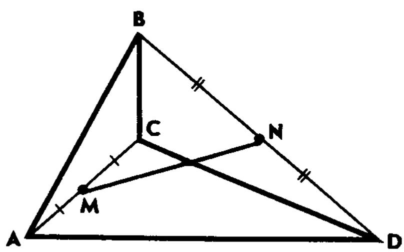


Рис. 65

31. Характеристические свойства четырехугольников.

Начнем с характеристического свойства четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями.

Теорема. ***Диагонали четырехугольника принадлежат перпендикулярным прямым тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны.***

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник. Согласно лемме 4 из § 2 (формула б)) имеет место равенство

$$2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=AD^2+BC^2-AB^2-CD^2.$$

Если прямые AC и BD взаимно перпендикулярны, то $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, поэтому из этого равенства следует, что

$$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2.$$

Обратно, если $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$, то из предыдущего равенства следует, что $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, т. е. $AC\perp BD$. Следовательно, прямые AC и BD, на которых лежат диагонали четырехугольника $ABCD$, взаимно перпедикулярны. ■

Рассмотрим теперь одно характеристическое свойство параллелограмма.

Теорема. ***Сумма квадратов сторон четырехугольника равна сумме квадратов его диагоналей тогда и только тогда, когда этот четырехугольник — параллелограмм.***

Доказательство. Пусть четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Докажем, что

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2. \qquad (7)$$

Так как

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} \text{ и } \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB},$$

то

$$AC^2+BD^2=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})^2=$$

$$=2(\overrightarrow{AB})^2+2(\overrightarrow{AD})^2=2AB^2+2AD^2.$$

В параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому отсюда следует равенство (7).

Обратно, рассмотрим четырехугольник $ABCD$, стороны и диагонали которого удовлетворяют равенству (7). Тогда по теореме Эйлера (см. равенство (5)) получим $MN^2=0$, т. е. середины M и N диагоналей AC и BD совпадают. Это означает, что диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, поэтому этот четырехугольник — параллелограмм. ■

32. Теоремы о площадях четырехугольников. В этом пункте мы докажем две теоремы о площади четырехугольника.

Теорема. ***Площадь S выпуклого четырехугольника $ABCD$ со сторонами $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ и полупериметром p вычисляется по формуле***

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{B+D}{2}. \qquad (8)$$

Доказательство. Проведем диагональ AC четырехугольника и воспользуемся теоремой косинусов для треугольников ABC и ACD (рис. 66):

$$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos B,\quad AC^2=c^2+d^2-2cd\cos D.$$

Приравняв правые части этих равенств, получим:

$$a^2+b^2-c^2-d^2=2ab\cos B-2cd\cos D,$$

откуда

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=4a^2b^2\cos^2 B-8abcd\cos B\cos D+ +4c^2d^2\cos^2 D. \qquad (9)$$

Ясно, что

$$S=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin D.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат и умножим на 16:

$$16S^2=4a^2b^2\sin^2 B+8abcd\sin B\sin D+4c^2d^2\sin^2 D. \qquad (10)$$

Складывая равенства (9) и (10) и учитывая, что

$$\cos^2 B+\sin^2 B=1,\quad \cos B\cos D-\sin B\sin D=\cos(B+D),$$

получаем:

$$16S^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=4a^2b^2-8abcd\cos(B+D)+4c^2d^2.$$

По формуле (7) § 3 $\cos(B+D)=2\cos^2\left(\frac{B+D}{2}\right)-1$, поэтому для вычисления $16S^2$ получается выражение

$$16S^2=(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-16abcd\cos^2\frac{B+D}{2}. \qquad (11)$$

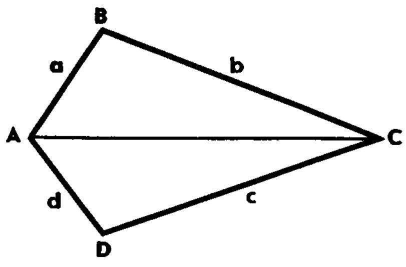


Рис. 66

Нетрудно убедиться в том, что

$$(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

Поэтому разделив равенство (11) на 16, приходим к равенству (8). ■

Теорема. ***Площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между прямыми, которым принадлежат диагонали.***

Доказательство. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, площадь которого равна S, и обозначим буквой O точку пересечения прямых AC и BD, а буквой α угол между этими прямыми. Предположим, что обозначения вершин четырехугольника выбраны так, что $\alpha=\angle AOB$ и в случае невыпуклого четырехугольника точки A и C лежат по разные стороны от прямой BD (рис. 67, *а*, *б*). Докажем, что $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha$.

По формуле площади треугольника

$$S_{ABO}=\frac{1}{2}AO\cdot OB\sin\alpha,$$

$$S_{BOC}=\frac{1}{2}OC\cdot OB\sin(180°-\alpha)=\frac{1}{2}OC\cdot OB\sin\alpha.$$

Сложив эти равенства, получим

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}(AO\cdot OB+OC\cdot OB)\sin\alpha=\frac{1}{2}AC\cdot OB\sin\alpha.$$

Аналогично

$$S_{ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot OD\sin\alpha.$$

Если $ABCD$ — выпуклый четырехугольник (рис. 67, *а*), то

$$S=S_{ABC}+S_{ADC}=\frac{1}{2}(AC\cdot OB+AC\cdot OD)\sin\alpha=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha.$$

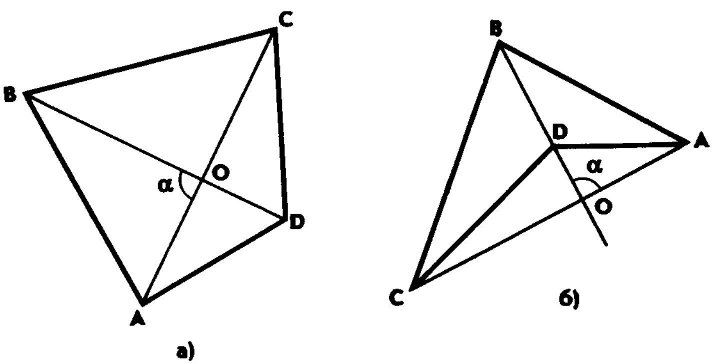


Рис. 67

Если $ABCD$ — невыпуклый четырехугольник (рис. 67, *б*), то

$$S=S_{ABC}-S_{ADC}=\frac{1}{2}(AC\cdot OB-AC\cdot OD)\sin\alpha=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha. \quad \blacksquare$$

Следствие. ***Площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.***

Докажем еще одно утверждение о площади параллелограмма.

Задача 1. Доказать, что площадь параллелограмма равна произведению его смежных сторон на синус угла между ними.

Решение. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, площадь которого равна S. Диагональ BD разбивает его на два равных треугольника ABD и CBD (рис. 68), поэтому

$$S=2S_{ABD}=AB\cdot AD\sin A. \quad \blacksquare$$

33. Площади четырехугольников, вписанных в окружность и описанных около окружности. Формулы для вычисления площади четырехугольника упрощаются, если он вписан в окружность или описан около нее.

Задача 2. Доказать, что площадь четырехугольника со сторонами a, b, c, d и полупериметром p, вписанного в окружность, вычисляется по формуле

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}. \qquad (12)$$

Решение. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность. Этот четырехугольник является выпуклым (объясните почему) и сумма его противоположных углов равна 180°, т. е. $\angle B+\angle D=180°$ и поэтому $\cos^2\frac{B+D}{2}=\cos 90°=0$.

По формуле (8)

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

Отсюда следует равенство (12). $\blacksquare$

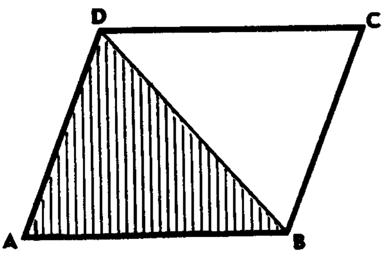


Рис. 68

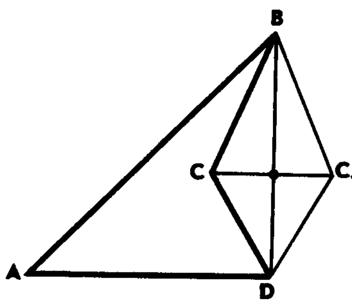


Рис. 69

Задача 3. Доказать, что площадь четырехугольника $ABCD$ со сторонами a, b, c, d, описанного около окружности, вычисляется по формуле

$$S=\sqrt{abcd}\sin\frac{B+D}{2}. \tag{13}$$

Решение. Пусть $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$. Четырехугольник $ABCD$ является выпуклым (объясните почему) и суммы его противоположных сторон равны: $a+c=b+d$. Поэтому

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)=a+c=b+d,$$

откуда

$$p-a=c,\ p-b=d,\ p-c=a,\ p-d=b.$$

Следовательно, по формуле (8)

$$S^2=abcd-abcd\cos^2\frac{B+D}{2}=abcd\left(1-\cos^2\frac{B+D}{2}\right)=abcd\sin^2\frac{B+D}{2}.$$

Отсюда следует равенство (13). ■

Замечание. Отметим, что если четырехугольник $ABCD$ является одновременно вписанным и описанным, то его площадь S вычисляется по формуле

$$S=\sqrt{abcd}. \tag{14}$$

В самом деле, в этом случае $\angle B+\angle D=180°$, поэтому формула (13) принимает вид (14).

Задача 4. Доказать, что из всех четырехугольников с данными сторонами наибольшую площадь имеет четырехугольник, вписанный в окружность.

Решение. Отметим прежде всего, что если четырехугольник $ABCD$ имеет наибольшую площадь среди всех четырехугольников с данными сторонами a, b, c, d, то он является выпуклым. В самом деле, если предположить, что он невыпуклый, то можно построить четырехугольник с такими же сторонами, площадь которого больше площади четырехугольника $ABCD$ (рис. 69, на этом рисунке точки C и C_1 симметричны относительно прямой BD).

Для любого выпуклого четырехугольника со сторонами a, b, c, d величина S^2 выражается формулой (8). Ясно, что эта величина имеет наибольшее значение, если $\cos\frac{B+D}{2}=0$, т. е. $\angle B+\angle D=180°$. В этом случае

$$\angle A+\angle C=360°-(\angle B+\angle D)=180°.$$

Таким образом, сумма противоположных углов четырехугольника $ABCD$ равна 180°, и, следовательно, этот четырехугольник можно вписать в окружность. ■

Задачи

42. Дана трапеция с основаниями AD и BC, где $AD > BC$. Докажите, что

$$AB^2 = BC^2 + CD^2 + AD^2 - 2CD\,(AD - BC)\cos D - 2AD \cdot BC.$$

43. Докажите, что точки пересечения биссектрис углов параллелограмма $ABCD$, отличного от ромба, являются вершинами некоторого прямоугольника. Найдите площадь этого прямоугольника, если $AB = a$, $BC = b$, $\angle BAD = \alpha$.

44. Докажите, что если четырехугольник вписан в окружность или описан около окружности, то он является выпуклым.

45. Докажите, что стороны BC и AD четырехугольника $ABCD$ параллельны тогда и только тогда, когда

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2BC \cdot AD.$$

46. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике со сторонами a, b, c, d и диагоналями e и f:

а) $e + f > a + c$, $e + f > b + d$, где a и c — длины противоположных сторон;

б) $e < p$, $f < p$, где p — полупериметр четырехугольника;

в) $p < e + f < 2p$.

47. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle B$. Докажите, что если $AD = BC$, то $\angle C = \angle D$, а если $AD < BC$, то $\angle C < \angle D$.

48. Отрезок MN с концами на боковых сторонах трапеции параллелен ее основаниям и делит площадь в отношении $m:n$. Докажите, что

$$MN = \sqrt{\frac{na^2 + mb^2}{m + n}},$$

где a и b — основания трапеции.

49. Докажите, что площадь S четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin B,$$

где $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$.

50. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если:

а) ее высота равна h;

б) сумма оснований равна $2a$.

51. Площадь выпуклого четырехугольника со сторонами a, b, c, d и диагоналями e и f равна S. Докажите, что:

а) $S \leqslant \frac{1}{4}(e^2 + f^2)$;

б) $S \leqslant \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)$;

в) $S < \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$;

г) $S \leqslant \frac{1}{2}(ab+cd)$;

д) $S \leqslant \frac{1}{2}(ac+bd)$.

52. Докажите, что площадь S четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность радиуса R, вычисляется по формуле

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin \varphi,$$

где φ — угол между диагоналями.

53. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике со сторонами a, b, c, d и диагоналями e, f

$$\cos \varphi = \frac{|a^2+c^2-b^2-d^2|}{2ef},$$

где φ — угол между диагоналями.

54. Угол φ между диагоналями выпуклого четырехугольника со сторонами a, b, c, d не равен $90°$. Докажите, что площадь S четырехугольника вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \varphi \, |a^2+c^2-b^2-d^2|.$$

55. Даны параллелограмм $ABCD$ и произвольная точка M плоскости. Докажите, что число $k = MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$ не зависит от выбора точки M. Выразите k через расстояния между вершинами параллелограмма.

56. Докажите, что произведение диагоналей четырехугольника на косинус угла между прямыми, которым они принадлежат, равно модулю разности квадратов любых двух его соседних сторон тогда и только тогда, когда этот четырехугольник — параллелограмм.

ГЛАВА III

ПРАВИЛЬНЫЕ И ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ. ДЛИНА И ПЛОЩАДЬ

§ 1. Правильные и полуправильные многоугольники

34. Правильные многоугольники. Напомним, что выпуклый многоугольник называется *правильным*, если все его углы равны и все стороны равны. Квадрат и равносторонний треугольник являются примерами правильных многоугольников. Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну, и также в любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну. Центры описанной около правильного многоугольника и вписанной в него окружностей совпадают.

Напомним также две формулы для вычисления величин, связанных с правильным n-угольником. Если a_n — сторона правильного n-угольника, α_n — величина каждого его угла, R — радиус описанной окружности, то

$$a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}, \qquad (1)$$

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n}\cdot 180°. \qquad (2)$$

Задача 1. Найти углы правильного десятиугольника и выразить его сторону через радиус R описанной окружности.

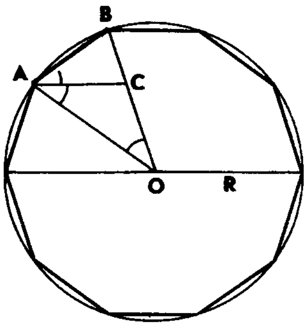


Рис. 70

Решение. По формуле (2) находим угол α_{10} правильного десятиугольника:

$$\alpha_{10} = \frac{10-2}{10}\cdot 180° = 144°.$$

Пусть AB — сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса R с центром O (рис. 70). По формуле (1) $AB = 2R\sin 18°$. Получим другое выражение для стороны AB. С этой целью рассмотрим треугольник ABO и проведем его биссектрису AC. Так как $\angle AOB = \frac{360°}{10} = 36°$, то

$$\angle OAB=\frac{180°-36°}{2}=72°,\ \angle BAC=\frac{1}{2}\angle OAB=36°.$$

Отсюда следует, что $\triangle AOB \sim \triangle CAB$ по двум углам ($\angle AOB = \angle BAC=36°$, угол B общий). Поэтому

$$AB=AC \text{ и } \frac{AB}{OB}=\frac{BC}{AB}.$$

Далее, треугольник AOC равнобедренный ($\angle AOC=\angle OAC=36°$), следовательно, $AC=OC$.

Итак, $AB=AC=OC=R-BC$, откуда $BC=R-AB$, и пропорцию $\frac{AB}{OB}=\frac{BC}{AB}$ можно записать в виде

$$\frac{AB}{R}=\frac{R-AB}{AB}.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение относительно AB:

$$AB^2+R\cdot AB-R^2=0.$$

Решая это уравнение и учитывая, что $AB>0$, находим $AB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$. ■

Замечание. Сравнивая полученное выражение для AB с равенством $AB=2R\sin 18°$, находим значение $\sin 18°$:

$$\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Докажем теорему о вписанном в окружность многоугольнике.

Теорема. ***Многоугольник, вписанный в окружность, является выпуклым. Если все стороны вписанного многоугольника равны, то он является правильным.***

Доказательство. Рассмотрим многоугольник $A_1A_2\dots A_n$, вписанный в окружность с центром O. Докажем сначала, что этот многоугольник выпуклый. Для этого нужно доказать, что он лежит по одну сторону от любой прямой, содержащей сторону многоугольника. Докажем, например, что он лежит по одну сторону от прямой A_1A_2. Для этого достаточно убедиться в том, что вершины $A_3, A_4, \dots, A_n$ принадлежат одной и той же полуплоскости с границей A_1A_2. Рассмотрим полуплоскость с границей A_1A_2, в которой лежит точка A_3. Точка A_4 принадлежит этой же полуплоскости, так как в противном случае прямая A_1A_2 пересекает дугу A_3A_4 окружности и, следовательно, имеет с окружностью больше двух общих точек, что невозможно. Точно так же вершина A_5 и все остальные вершины принадлежат этой же полуплоскости. Аналогично доказывается, что многоугольник лежит по одну сторону от каждой из прямых $A_2A_3, \dots, A_nA_1$.

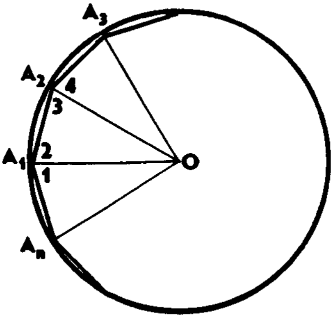


Рис. 71

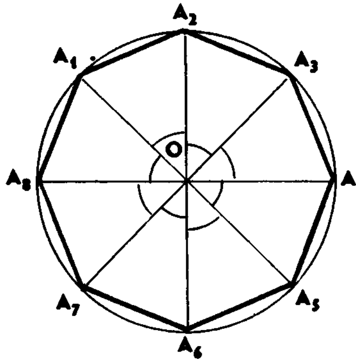


Рис. 72

Пусть все стороны вписанного многоугольника равны: $A_1A_2=A_2A_3=\ldots=A_{n-1}A_n=A_nA_1$. Докажем, что углы многоугольника также равны: $\angle A_1=\angle A_2=\ldots=\angle A_n$. Если $n=3$, то это утверждение очевидно (объясните почему). Допустим, что $n>3$, и рассмотрим вершины A_n, A_1, A_2, A_3 (рис. 71). Треугольники OA_nA_1, OA_1A_2, OA_2A_3 равны друг другу по трем сторонам, а так как эти треугольники равнобедренные, то $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$. Поэтому $\angle A_1=\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4=\angle A_2$. Точно так же доказывается равенство других углов многоугольника. Следовательно, многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ правильный. ■

Используя эту теорему, докажем следующее утверждение: *каково бы ни было натуральное число n, большее двух, существует правильный n-угольник.*

□ Возьмем какую-нибудь окружность с центром O и разделим ее на n равных дуг. Для этого проведем радиусы OA_1, $OA_2, \ldots$ $\ldots, OA_n$ этой окружности так, чтобы

$$\angle A_1OA_2=\angle A_2OA_3=\ldots=\angle A_{n-1}OA_n=\angle A_nOA_1=\frac{360^\circ}{n}$$

(рис. 72, на этом рисунке $n=8$). Если теперь провести отрезки A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$, A_nA_1, то получим n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$. Треугольники A_1OA_2, $A_2OA_3, \ldots, A_nOA_1$ равны друг другу (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $A_1A_2=A_2A_3=\ldots=$ $=A_{n-1}A_n=A_nA_1$. Отсюда согласно доказанной теореме следует, что $A_1A_2\ldots A_n$ — правильный n-угольник. ■

Замечание. В пространстве фигурой, аналогичной правильному многоугольнику, является правильный многогранник — выпуклый многогранник, у которого все грани — правильные равные друг другу многоугольники и к каждой вершине которого сходится одно и то же число ребер. Примером правильного многогранника является куб. Интересно отметить, что в отличие от правильных многоугольников, которые могут иметь любое (большее двух) число сторон, существует лишь конечное число различных типов правильных многогранников. Еще Евклид доказал, что таких типов только пять: четырехгранник (тетраэдр), шестигранник (куб), восьмигранник (октаэдр), двенадцатигранник (додекаэдр) и двадцатигранник (икосаэдр). Многогранники, в том числе правильные, вы будете изучать в 10-м классе.

35*. Полуправильные многоугольники. Понятие правильного многоугольника допускает различные обобщения. Мы рассмотрим здесь так называемые полуправильные многоугольники. Выпуклый многоугольник с четным числом вершин называется *равноугольно-полуправильным*, если его стороны, взятые через одну, равны и все его углы равны. Ясно, что правильные многоугольники с четным числом вершин входят в число равноугольно-полуправильных многоугольников. Наиболее простым примером такого многоугольника, отличного от правильного, является прямоугольник, отличный от квадрата. На рисунке 73 изображен равноугольно-полуправильный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, отличный от правильного шестиугольника.

Докажем теорему об окружности, описанной около равноугольно-полуправильного многоугольника.

Теорема. ***Около любого равноугольно-полуправильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.***

Доказательство. Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — равноугольно-полуправильный многоугольник ($n>3$). Опишем около треугольника $A_1A_2A_3$ окружность. Обозначим ее буквой ω, центр окружности буквой O и докажем, что все вершины данного многоугольника лежат на этой окружности. Сначала убедимся в том, что точка A_4 лежит на окружности ω. Для этого опишем около треугольника $A_2A_3A_4$ окружность ω' с центром O' и докажем, что ω и ω' — одна и та же окружность (см. рис. 73).

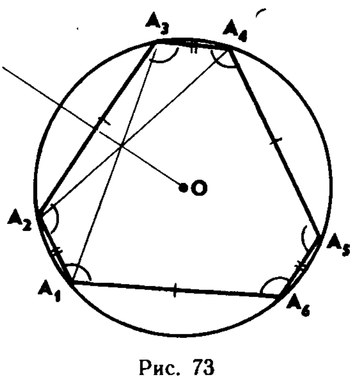


Рис. 73

Треугольники $A_1A_2A_3$ и $A_2A_3A_4$ равны по двум сторонам и углу между ними ($A_1A_2=A_4A_3$, A_2A_3 — общая сторона, $\angle A_2=\angle A_3$), поэтому радиусы окружностей ω и ω' равны. Далее, их центры O и O' лежат на серединном перпендикуляре к отрезку A_2A_3, причем по одну сторону от прямой A_2A_3 (объясните почему), поэтому точки O и O' совпадают. Итак, окружности ω и ω' име-

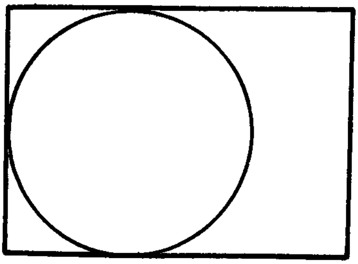


Рис. 74

ют общий центр и равные радиусы, следовательно, они совпадают, и, значит, точка A_4 лежит на окружности ω. Точно так же доказывается, что если $n>4$, то точки $A_5, \ldots, A_n$ лежат на окружности ω.

Докажем теперь, что около многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ можно описать только одну окружность. В самом деле, через точки A_1, A_2, A_3 проходит только одна окружность — окружность ω, поэтому любая окружность, описанная около многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$, должна совпадать с окружностью ω. ■

Отметим, что в отличие от правильного многоугольника не в любой равноугольно-полуправильный многоугольник можно вписать окружность. Например, в прямоугольник, отличный от квадрата, нельзя вписать окружность (рис. 74). Нетрудно, однако, доказать, что для любого равноугольно-полуправильного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$, не являющегося правильным, существуют две окружности, такие, что их центры совпадают с центром O описанной окружности и каждая из них касается сторон многоугольника через одну, т. е. одна окружность касается сторон A_1A_2, $A_3A_4, \ldots, A_{n-1}A_n$, а другая — сторон A_2A_3, $A_4A_5, \ldots, A_nA_1$. При этом точками касания являются середины соответствующих сторон. Пользуясь рисунком 73, докажите это утверждение самостоятельно. (На рисунке 73 эти окружности не изображены.)

Выпуклый многоугольник с четным числом вершин называется *равносторонне-полуправильным*, если его углы, взятые через один, равны и все его стороны равны. Правильные многоугольники с четным числом вершин, очевидно, входят в число равносторонне-полуправильных многоугольников. Наиболее простым примером такого многоугольника, отличного от правильного, является ромб, отличный от квадрата. На рисунке 75 изображен равносторонне-полуправильный шестиугольник, отличный от правильного шестиугольника.

Имеет место следующая теорема об окружности, вписанной в равносторонне-полуправильный многоугольник.

Теорема. ***В любой равносторонне-полуправильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.***

Эту теорему докажите самостоятельно, пользуясь указанием к задаче 7.

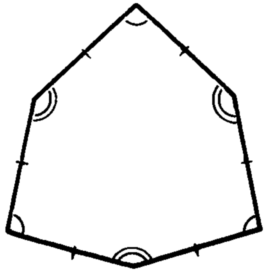


Рис. 75

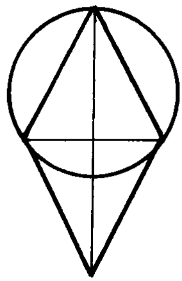


Рис. 76

В отличие от правильного многоугольника не для любого равносторонне-полуправильного многоугольника существует описанная окружность. Например, около ромба, отличного от квадрата, нельзя описать окружность (рис. 76). Можно, однако, доказать, что для любого равносторонне-полуправильного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$, не являющегося правильным, существуют две окружности, такие, что их центры совпадают с центром O вписанной окружности и каждая из них проходит через вершины многоугольника, взятые через одну, т. е. одна окружность проходит через вершины $A_1, A_3, \ldots, A_{n-1}$, а другая — через вершины $A_2, A_4, \ldots, A_n$.

36. Построение правильных многоугольников. Вернемся снова к правильным многоугольникам и рассмотрим вопрос об их построении с помощью циркуля и линейки. Вам известны способы построения правильных n-угольников при $n=6$, 3, 4. Напомним, как выполняются эти построения.

Согласно формуле (1) сторона a_6 правильного шестиугольника равна радиусу R описанной окружности. Поэтому если задан произвольный отрезок PQ, то для построения правильного шестиугольника, стороны которого равны PQ, достаточно построить окружность радиуса PQ, взять на ней произвольную точку A и, не меняя раствора циркуля, отметить на этой окружности последовательно точки B, C, D, E, F так, чтобы $AB=BC=\ldots=EF=PQ$ (рис. 77). Проведя затем отрезки AB, BC, CD, DE, EF, FA, получим шестиугольник $ABCDEF$, который согласно теореме п. 34 является правильным, причем его стороны равны отрезку PQ.

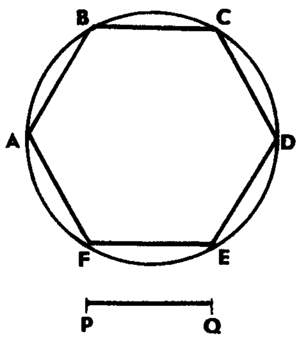


Рис. 77

Правильный треугольник, сторона которого равна данному отрезку, можно построить так же, как строится треугольник по любым трем данным сторонам.

Построение правильного четырехугольника, т. е. квадрата, сторона которого равна данному отрезку, представлено на рисунке 78. Здесь $AB=BC=AD=PQ$, $BC\perp AB$, $AD\perp AB$.

Циркулем и линейкой можно построить и многие другие правильные многоугольники, например правильные десятиугольник, пятиугольник, пятнадцатиугольник. Рассмотрим эти построения.

З а д а ч а 2. В данную окружность вписать правильные десятиугольник и пятиугольник.

Р е ш е н и е. Пусть ω — данная окружность радиуса R с центром O. Построим сначала правильный десятиугольник, вписанный в окружность ω. Для этого проведем взаимно перпендикулярные радиусы OA_1 и OB окружности ω и на отрезке OB как на диаметре построим окружность с центром C (рис. 79). Отрезок A_1C пересекает эту окружность в некоторой точке D. Докажем, что отрезок A_1D равен стороне правильного десятиугольника, вписанного в окружность ω. В самом деле,

$$A_1D=A_1C-\frac{R}{2},\quad A_1C=\sqrt{A_1O^2+OC^2}=\sqrt{R^2+\frac{R^2}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}R,$$

поэтому $A_1D=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$. Согласно задаче 1 отрезок A_1D равен стороне правильного десятиугольника, вписанного в окружность ω. Далее отметим на окружности ω точки $A_2, A_3, \ldots, A_{10}$ так, что $A_1A_2=A_2A_3=\ldots=A_9A_{10}=A_1D$. Десятиугольник $A_1A_2\ldots A_{10}$ — искомый (см. рис. 79).

Для построения правильного пятиугольника, вписанного в окружность ω, достаточно провести отрезки A_1A_3, A_3A_5, A_5A_7, A_7A_9, A_9A_1. Пятиугольник $A_1A_3A_5A_7A_9$ — искомый. (На рисунке 79 он не изображен.) ■

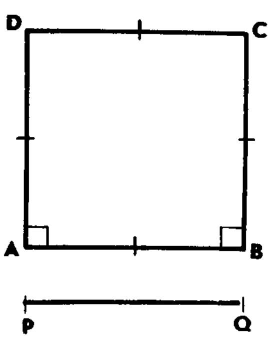


Рис. 78

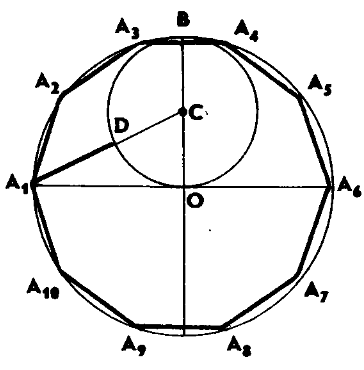
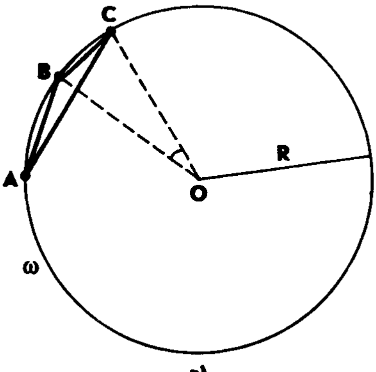


Рис. 79



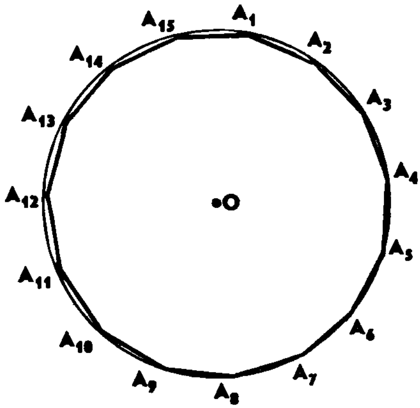


Рис. 80

Задача 3. В данную окружность вписать правильный пятнадцатиугольник.

Решение. Пусть ω — данная окружность радиуса R с центром O и AB — сторона правильного вписанного в эту окружность десятиугольника, а AC — сторона правильного вписанного шестиугольника, причем точки B и C расположены на окружности так, как показано на рисунке 80, *а*. Тогда, очевидно, $\smile AB = 36°$, $\smile AC = 60°$, поэтому $\smile BC = 24°$. Следовательно, $\angle BOC = 24° = \frac{360°}{15}$, и, значит, отрезок BC — сторона правильного пятнадцатиугольника, вписанного в окружность ω. Так как мы умеем строить циркулем и линейкой отрезки $AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$ (см. задачу 2) и $AC = R$, то можем построить отрезок BC.

Возьмем далее на окружности ω произвольную точку A_1 и, пользуясь циркулем, отметим на этой окружности последовательно точки $A_2, A_3, \ldots, A_{15}$ так, что $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{14}A_{15} = BC$. Проведя затем отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{14}A_{15}, A_{15}A_1$, получим искомый правильный пятнадцатиугольник $A_1A_2 \ldots A_{15}$ (рис. 80, *б*). ■

Рассмотрим еще одну задачу на построение правильных многоугольников.

Задача 4. Дан правильный n-угольник $A_1A_2 \ldots A_n$, вписанный в окружность с центром O. Построить правильный n-угольник, сторона которого равна данному отрезку PQ.

Решение. Проведем лучи $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ и на этих лучах построим вершины искомого n-угольника. Для этого на луче A_2A_1 отложим отрезок A_2C, равный отрезку PQ, и через точку

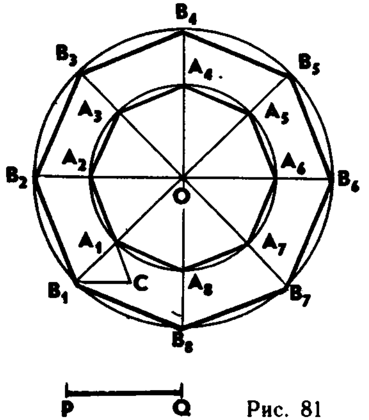


Рис. 81

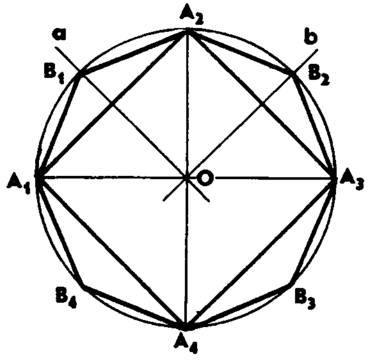


Рис. 82

C проведем прямую, параллельную прямой OA_2 (рис. 81, на этом рисунке $n=8$). Точку пересечения этой прямой с лучом OA_1 обозначим B_1. Проведем теперь окружность с центром O радиуса OB_1 и обозначим через $B_2, B_3, \ldots, B_n$ точки пересечения этой окружности с лучами $OA_2, OA_3, \ldots OA_n$. Построим, наконец, отрезки $B_1B_2, B_2B_3, \ldots, B_nB_1$. Получим искомый правильный n-угольник $B_1B_2\ldots B_n$. (Докажите это самостоятельно.) ■

37. Любой ли правильный многоугольник можно построить циркулем и линейкой? В п. 34 было доказано, что, каково бы ни было натуральное число n, большее двух, существует правильный n-угольник. Отсюда, однако, еще не следует, что с помощью циркуля и линейки такой многоугольник можно построить. Возникает вопрос: какие еще правильные многоугольники, кроме тех, которые были рассмотрены в п. 36, можно построить циркулем и линейкой? Частично ответ на этот вопрос дает следующая лемма:

Лемма. *Если построен какой-нибудь правильный n-угольник, то с помощью циркуля и линейки можно построить правильный $2n$-угольник.*

Доказательство. Опишем около данного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ окружность. Для этого построим серединные перпендикуляры a и b к отрезкам A_1A_2 и A_2A_3 (рис. 82, на этом рисунке $n=4$). Они пересекаются в некоторой точке O. Окружность с центром O радиуса OA_1 является описанной около многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ (объясните почему).

Построим теперь середины $B_1, B_2, \ldots, B_n$ соответственно дуг $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ следующим образом. Точки B_1 и B_2 получаются как точки пересечения прямых a и b с дугами A_1A_2 и A_2A_3. Для построения точки B_3 проведем окружность с центром A_3 радиуса A_3B_2. Одна из точек пересечения этой окружности с описанной окружностью есть точка B_2, а другая — искомая точка B_3.

Аналогично строятся точки $B_4, \ldots, B_n$. Соединив каждую из точек $B_1, B_2, \ldots, B_n$ отрезками с концами соответствующей дуги, получим $2n$-угольник $A_1B_1A_2B_2A_3 \ldots A_nB_n$, который является правильным в силу теоремы п. 34. ■

На рисунке 82 по данному правильному четырехугольнику $A_1A_2A_3A_4$ построен правильный восьмиугольник $A_1B_1A_2 \ldots B_4$.

Итак, если мы можем построить циркулем и линейкой правильный n-угольник, где n — данное натуральное число, то можно построить правильные $2n$-угольник, $4n$-угольник и, вообще, $2^k \cdot n$-угольник, где k — любое натуральное число. Таким образом, с помощью циркуля и линейки можно построить бесконечное множество правильных многоугольников с различным числом вершин у любых двух из них. В частности, поскольку мы знаем, как построить правильные n-угольники при $n=3$, 4, 5, 6, 8, 15, то согласно лемме для каждого из этих n можно построить правильный $2^k \cdot n$-угольник, где k — любое натуральное число.

Знаменитый немецкий математик К. Ф. Гаусс (1777—1855) доказал следующую интересную теорему:

построение правильного n-угольника с помощью линейки и циркуля возможно тогда и только тогда, когда число n имеет следующее разложение на множители:

$$n = 2^m \cdot p_1 p_2 \ldots p_s,$$

где m — целое неотрицательное число, а $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные между собой простые числа вида $2^{2^k}+1$.

Рассмотрим примеры применения этой теоремы.

При $m=0$, $s=1$ число n имеет вид $n=2^{2^k}+1$. Для значений k, равных 0, 1, 2, 3, 4, получаем $n=3$, $n=5$, $n=17$, $n=257$, $n=65\,537$.

При $m=0$, $s=2$ имеем $n=p_1p_2$. Если, например, $p_1=3$, $p_2=5$, то $n=15$.

Значит, согласно теореме Гаусса, можно построить циркулем и линейкой правильный 15-угольник, в чем мы уже убедились ранее, решив задачу 3.

Число 7 простое, но оно не является числом вида $2^{2^k}+1$, поэтому с помощью циркуля и линейки нельзя построить правильный семиугольник. Точно так же нельзя построить правильный девятиугольник. Отметим, наконец, что число $360=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ не удовлетворяет теореме Гаусса, поскольку простое число 3 входит сомножителем два раза.

Следовательно, циркулем и линейкой нельзя построить правильный 360-угольник. Другими словами, нельзя разделить окружность на 360 равных частей и поэтому циркулем и линейкой нельзя построить угол в 1°.

Задачи

1. Постройте правильный пятиугольник, сторона которого равна данному отрезку.

2. Диагонали AC и BD правильного пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке M. Докажите, что

$$AM^2 = AC \cdot MC \text{ и } DM^2 = BD \cdot MB.$$

3. Пол покрыт без пробелов и перекрытий плитками, которые имеют форму правильных равных между собой многоугольников. Докажите, что это возможно только для трех видов правильных многоугольников.

4. На сторонах правильного шестиугольника вне его построены шесть квадратов. Докажите, что 12 вершин этих квадратов, не совпадающих с вершинами шестиугольника, являются вершинами правильного двенадцатиугольника.

5. Найдите сторону правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса R.

6. Найдите сторону правильного пятнадцатиугольника, вписанного в окружность радиуса R.

7. Докажите, что в любой равносторонне-полуправильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

8. Докажите, что вершины равносторонне-полуправильного многоугольника, взятые через одну, лежат на окружности, центр которой совпадает с центром вписанной окружности.

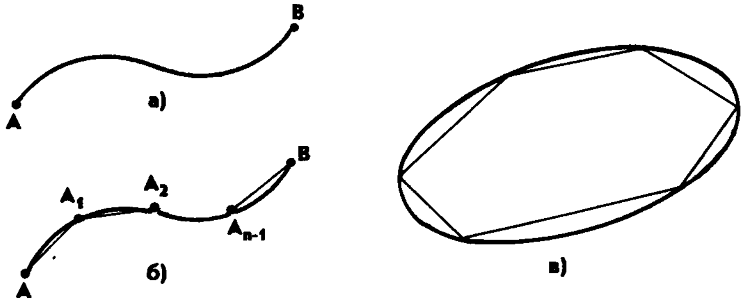
9. Докажите, что стороны равноугольно-полуправильного многоугольника, взятые через одну, касаются одной и той же окружности, центр которой совпадает с центром описанной окружности.

10. Все углы n-угольника, вписанного в окружность, равны друг другу. Докажите, что если n — число нечетное, то n-угольник является правильным, а если n — число четное, то равноугольно-полуправильным.

§ 2. Длина и площадь

38*. Длина кривой. Рассматривая вопрос о длине окружности, мы отмечали, что периметр любого правильного вписанного в окружность многоугольника является приближенным значением длины окружности, а точное значение длины окружности — это предел, к которому стремится указанный периметр при неограниченном увеличении числа сторон многоугольника.

Аналогичным образом можно ввести длину произвольной кривой. Рассмотрим сначала незамкнутую кривую с концами A и B (рис. 83, *а*). Двигаясь по кривой от одного конца к другому, например от A к B, отметим на ней последовательно $n-1$ точку:



Кривая AB

Ломаная $AA_1 \ldots B$ вписана в кривую AB

В замкнутую кривую вписана замкнутая ломаная

Рис. 83

A_1, A_2, ..., A_{n-1} и построим ломаную $AA_1 \ldots A_{n-1}B$ (рис. 83, *б*). Она называется вписанной в кривую AB. Длину этой ломаной, т. е. сумму длин ее звеньев, можно рассматривать как приближенное значение длины данной кривой, а саму длину кривой можно определить как предел, к которому стремится длина вписанной в нее ломаной при условии, что длины звеньев ломаной стремятся к нулю. Ясно, что при этом число n звеньев ломаной будет неограниченно возрастать. Если кривая замкнутая, то ее длина вводится так же, как и для незамкнутой кривой, но только теперь нужно рассматривать замкнутые ломаные, вписанные в кривую (рис. 83, *в*).

Нахождение длины какой-то кривой на основе данного определения, т. е. как предела длин вписанных в эту кривую ломаных, является, как правило, трудной задачей. Для вычисления длин некоторых кривых, заданных аналитически (т. е. с помощью формул), существуют интегральные формулы, изучение которых выходит за рамки школьной математики.

Здесь же мы снова вернемся к кривым постоянной ширины, о которых шла речь в «ДГ-8» (п. 56), и рассмотрим вопрос о длине кривой с заданной постоянной шириной d. Напомним сформулированную в «ДГ-8» теорему Барбье: *любые две кривые одинаковой постоянной ширины имеют равные длины.*

Поскольку окружность с диаметром d является кривой постоянной ширины d, а длина такой окружности равна πd, то теорему Барбье можно переформулировать так: *длина любой кривой постоянной ширины d равна πd.*

Как и было обещано, мы приведем здесь доказательство этой теоремы, основанное на физических соображениях.

☐ Представим себе каток постоянной ширины d, который катится без проскальзывания между параллельными прямыми a и b. Бу-

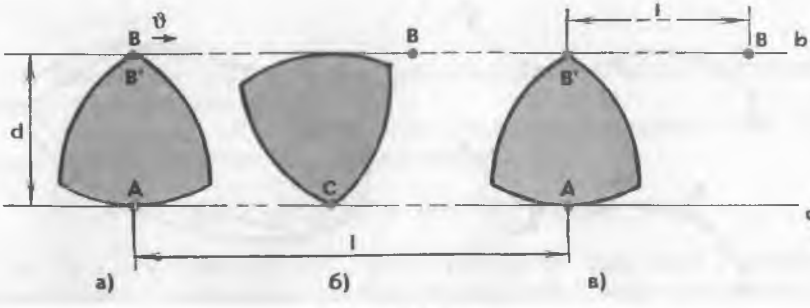


Рис. 84

дем считать прямую a неподвижной, а прямую b движущейся с постоянной скоростью v. Сделав один оборот (рис. 84, *а, б, в*), каток переместится на расстояние l, где l — длина кривой, которая ограничивает сечение катка, т. е. длина кривой постоянной ширины d. Время полного оборота катка обозначим буквой t. За это время прямая b переместится по отношению к катку также на расстояние l и, значит, по отношению к неподвижной прямой a — на расстояние $2l$ (рис. 84, *б, в*), поэтому $2l = vt$. С другой стороны, в каждый момент времени движение катка можно рассматривать как вращение вокруг точки, в которой каток опирается на прямую a (точка A на рисунке 84, *а*, точка C на рисунке 84, *б*). Если угловая скорость вращения катка равна ω, то скорость v точки B, т. е. скорость движения прямой b, равна ωd. Итак, $2l = \omega dt$. Но ωt представляет собой угол, на который повернулся каток за время t, т. е. $\omega t = 2\pi$. Таким образом, $2l = 2\pi d$, откуда $l = \pi d$. ■

39*. Площадь фигуры. Вопрос о площади произвольной фигуры уже затрагивался в «ДГ-8» (п. 18). Напомним, что площадь произвольной фигуры F вводится следующим образом. Рассматриваются множество всех многоугольников, целиком содержащихся в фигуре F, и множество всех многоугольников, содержащих в себе целиком фигуру F (рис. 85). Ясно, что площадь каждого многоугольника из первого множества не превосходит площади любого многоугольника из второго множества. Если существует величина S, для которой как в первом, так и во втором множестве найдутся многоугольники, площади которых сколь угодно мало отличаются от S, то величина S и принимается за площадь данной фигуры.

Убедимся в том, что если фигура F — круг радиуса R, то величина $S = \pi R^2$ удовлетворяет данному определению площади. □ Рассмотрим правильные вписанный и описанный n-угольники для круга радиуса R (рис. 86, на этом рисунке $n = 6$). Обозначим их периметры соответственно через P_n и $\overline{P}_n$, а площади через S_n

и $\overline{S}_n$. Согласно определению длины кривой при $n \to \infty$ периметр P_n стремится к длине окружности, т. е. $P_n \to 2\pi R$. Докажем сначала, что и $\overline{P}_n \to 2\pi R$ при $n \to \infty$. Периметр $\overline{P}_n$ описанного n-угольника больше периметра P_n вписанного n-угольника: $\overline{P}_n > P_n$.

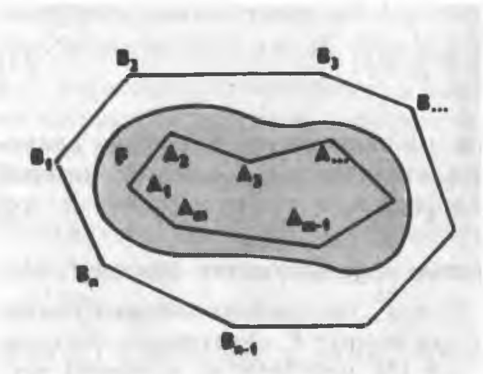
С другой стороны, периметр $\overline{P}_n$ описанного n-угольника меньше длины окружности, описанной около этого n-угольника. Эта окружность изображена на рисунке пунктиром. Ее радиус OB равен $\dfrac{R}{\cos\dfrac{180^\circ}{n}}$ (см. рис. 86), поэтому $\overline{P}_n < \dfrac{2\pi R}{\cos\dfrac{180^\circ}{n}}$. Итак,

$$P_n < \overline{P}_n < \frac{2\pi R}{\cos\dfrac{180^\circ}{n}}.$$

Если $n \to \infty$, то $\cos\dfrac{180^\circ}{n} \to 1$, поэтому $\dfrac{2\pi R}{\cos\dfrac{180^\circ}{n}} \to 2\pi R$, а так как P_n также стремится к $2\pi R$, то и $\overline{P}_n \to 2\pi R$ при $n \to \infty$.

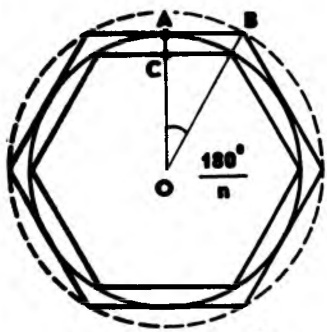
Перейдем теперь к доказательству основного утверждения. Напишем выражения для площадей S_n и $\overline{S}_n$, используя тот факт, что площадь правильного многоугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности:

$$S_n = \frac{1}{2} P_n r_n, \quad \overline{S}_n = \frac{1}{2} \overline{P}_n R.$$



Многоугольник $A_1A_2\ldots A_m$ содержится в фигуре F, многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$ содержит фигуру F

Рис. 85



$OA = R$, $OB = \dfrac{R}{\cos\dfrac{180^\circ}{n}}$,

$r_n = OC = R\cos\dfrac{180^\circ}{n}$

Рис. 86

Здесь $r_n = OC = R\cos\frac{180°}{n}$ (см. рис. 86). Так как $r_n \to R$ при $n \to \infty$, то при $n \to \infty$ имеем:

$$S_n \to \frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot R = \pi R^2,\quad \overline{S}_n \to \frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot R = \pi R^2.$$

Отсюда следует, что при достаточно большом n площадь S_n правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R и поэтому целиком содержащегося в круге радиуса R, сколь угодно мало отличается от величины πR^2 и точно так же при достаточно большом n площадь $\overline{S}_n$ правильного n-угольника, содержащего целиком круг радиуса R, сколь угодно мало отличается от величины πR^2. Согласно данному выше определению площади плоской фигуры это означает, что величина $S = \pi R^2$ равна площади круга радиуса R. ■

Отметим, что вывод формулы площади круга, данный в учебнике «Геометрия, 7—9», несколько отличается от приведенного здесь. Вообще вычисление площади какой-то фигуры на основе самого определения площади, т. е. путем рассмотрения многоугольников, содержащих фигуру и содержащихся в ней, является, как правило, довольно трудной задачей. Для вычисления площадей фигур, граница которых целиком или частично состоит из кривых линий, заданных в прямоугольной системе координат уравнениями вида $y = f(x)$, существует удобная интегральная формула, с которой вы познакомитесь в курсе алгебры и начал анализа в 10—11-х классах.

Здесь же мы выведем формулу площади фигуры, ограниченной эллипсом, заданным в системе координат Oxy каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

□ Напомним, что величины a и b называются полуосями эллипса. Пусть $b < a$. Рассмотрим окружность, уравнение которой

$$x^2 + y^2 = a^2. \qquad (2)$$

Ограниченный этой окружностью круг обозначим буквой F. Построим два многоугольника F_n и $\overline{F}_n$, первый из которых содержится в круге F, а второй содержит круг F, следующим образом: диаметр круга, лежащий на оси Ox, разобьем на n равных частей, через точки разбиения проведем прямые, параллельные оси Oy, а через точки пересечения этих прямых с окружностью проведем отрезки, параллельные оси Ox (рис. 87, *а*, на этом рисунке $n = 10$). В результате получим многоугольник F_n, составленный из $n-2$ прямоугольников и целиком содержащийся в круге F (на рис. 87, *а* этот многоугольник закрашен), и многоуголь-

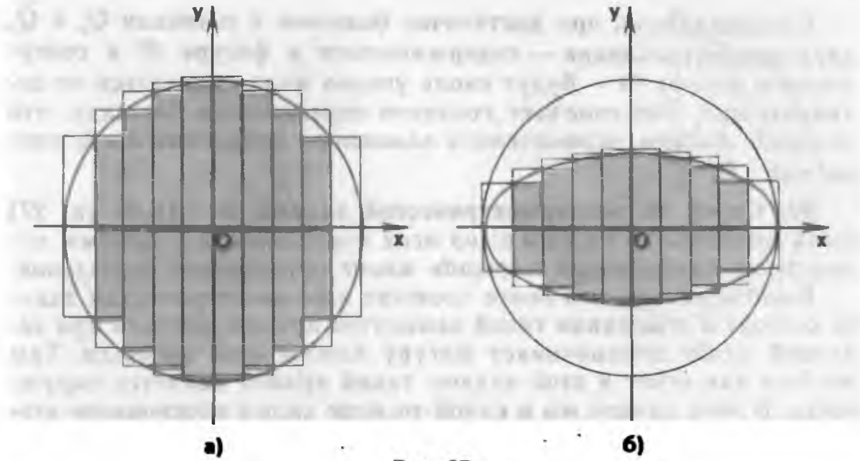


Рис. 87

ник $\overline{F}_n$, составленный из n прямоугольников и содержащий в себе целиком круг F. Ясно, что при возрастании n многоугольник F_n будет занимать все большую часть круга, так что при $n \to \infty$ площадь S_n многоугольника F_n (и также площадь $\overline{S}_n$ многоугольника $\overline{F}_n$) будет стремиться к площади круга, которая равна πa^2.

Вспомним теперь, что эллипс, заданный уравнением (1), можно получить из окружности, заданной уравнением (2), путем равномерного сжатия вдоль оси Oy с коэффициентом сжатия $q = \frac{b}{a}$. Это было показано в п. 10. При таком сжатии многоугольники F_n и $\overline{F}_n$ переходят соответственно в многоугольники Φ_n и $\overline{\Phi}_n$, первый из которых содержится в фигуре Φ, ограниченной эллипсом, а второй содержит фигуру Φ (рис. 87, *б*; на этом рисунке многоугольник Φ_n закрашен). Многоугольник Φ_n состоит из $n-2$ прямоугольников, которые получаются из соответствующих прямоугольников, составляющих многоугольник F_n, путем сжатия вдоль оси Oy с коэффициентом сжатия $q = \frac{b}{a}$. Поэтому площадь Q_n многоугольника Φ_n связана с площадью S_n многоугольника F_n равенством $Q_n = qS_n$. Аналогично площадь $\overline{Q}_n$ многоугольника $\overline{\Phi}_n$ связана с площадью $\overline{S}_n$ многоугольника $\overline{F}_n$ равенством $\overline{Q}_n = q\overline{S}_n$. Учитывая, что $S_n \to \pi a^2$ и $\overline{S}_n \to \pi a^2$ при $n \to \infty$, получаем

$$Q_n \to q\pi a^2 = \pi ab, \quad \overline{Q}_n \to q\pi a^2 = \pi ab \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, при достаточно большом n площади Q_n и $\bar{Q}_n$ двух многоугольников — содержащегося в фигуре Ф и содержащего фигуру Ф — будут сколь угодно мало отличаться от величины πab. Это означает, согласно определению площади, что *площадь фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями a и b, равна πab.* ■

40. Снова об изопериметрической задаче. В «ДГ-8» (п. 27) была доказана теорема: *из всех n-угольников с данным периметром наибольшую площадь имеет правильный n-угольник.*

Было отмечено, что более сложная изопериметрическая задача состоит в отыскании такой замкнутой кривой, которая при заданной длине ограничивает фигуру наибольшей площади. Там же был дан ответ к этой задаче: такой кривой является окружность. В этом пункте мы в какой-то мере дадим обоснование этого ответа. Для этого нам понадобится одно неравенство, которое мы докажем в следующей задаче:

Задача 1. Доказать, что для любого острого угла с градусной мерой α выполняется неравенство

$$\operatorname{tg} \alpha > \frac{\pi}{180} \alpha. \qquad (3)$$

Решение. Рассмотрим круговой сектор AOB, в котором $OA = OB = R$, $\angle AOB = \alpha$ (рис. 88). Через точку A проведем прямую, перпендикулярную к OA, и обозначим буквой C точку пересечения этой прямой с лучом OB. Сектор AOB содержится в прямоугольном треугольнике AOC, поэтому площадь S_{AOC} треугольника AOC больше площади $S_{\text{сект}}$ сектора AOB. Но

$$S_{AOC} = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} R \cdot R \operatorname{tg} \alpha = \frac{R^2}{2} \operatorname{tg} \alpha, \quad S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2}{360} \alpha.$$

Таким образом,

$$\frac{R^2}{2} \operatorname{tg} \alpha > \frac{\pi R^2}{360} \alpha,$$

откуда следует неравенство (3). ■

С помощью неравенства (3) решим следующую задачу:

Задача 2. Доказать, что площадь круга, ограниченного окружностью длины l, больше площади любого многоугольника, периметр которого не превосходит l.

Решение. Если длина окружности равна l, то ее радиус равен $\frac{l}{2\pi}$, а поэтому площадь S круга, ограниченного этой окружностью, равна $\frac{l^2}{4\pi}$:

$$S = \frac{l^2}{4\pi}.$$

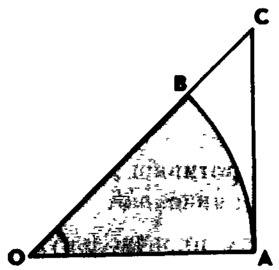


Рис. 88

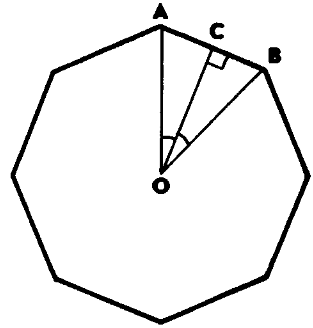


Рис. 89

Рассмотрим произвольный n-угольник, периметр P которого не превосходит l: $P \leqslant l$. Согласно доказанному в «ДГ-8» (п. 27) площадь S' этого n-угольника не превосходит площади S_n правильного n-угольника с периметром P. Следовательно, если мы докажем, что $S_n < S$, то тем самым будет доказано, что $S' < S$, и задача будет решена.

Вычислим площадь правильного n-угольника с периметром P. Сторона AB такого n-угольника равна $\frac{P}{n}$ (рис. 89, на этом рисунке $n=8$). Из прямоугольного треугольника AOC, в котором $AC = \frac{1}{2}AB = \frac{P}{2n}$, $\angle AOC = \frac{180°}{n}$, находим радиус OC вписанной в правильный n-угольник окружности:

$$OC = \frac{P}{2n \operatorname{tg} \frac{180°}{n}}.$$

Площадь S_n правильного n-угольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности:

$$S_n = \frac{P}{2} \cdot \frac{P}{2n \operatorname{tg} \frac{180°}{n}} = \frac{P^2}{4n \operatorname{tg} \frac{180°}{n}}.$$

Согласно неравенству (3) $\operatorname{tg} \frac{180°}{n} > \frac{\pi}{180} \cdot \frac{180}{n} = \frac{\pi}{n}$. Учитывая также, что $P^2 < l^2$, получаем:

$$S_n = \frac{P^2}{4n \operatorname{tg} \frac{180°}{n}} < \frac{l^2}{4n \cdot \frac{\pi}{n}} = \frac{l^2}{4\pi} = S.$$

Итак, $S_n < S$. ■

Вернемся к изопериметрической задаче, состоящей в отыскании такой замкнутой кривой с заданной длиной l, которая ограничивает фигуру наибольшей площади. Как было отмечено выше, площадь круга, ограниченного окружностью длины l, равна $\frac{l^2}{4\pi}$. Докажем, что

площадь любой фигуры, ограниченной замкнутой кривой длины l, не может быть больше чем $\frac{l^2}{4\pi}$.

□ Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что площадь S некоторой фигуры F, ограниченной замкнутой кривой длины l, больше чем $\frac{l^2}{4\pi}$. Рассмотрим произвольную замкнутую ломаную, вписанную в эту кривую. Длина такой ломаной, т. е. периметр ограниченного ею многоугольника, не превосходит длины l кривой. Если же длины звеньев ломаной устремить к нулю, то площадь многоугольника, ограниченного ломаной, будет стремиться к площади S фигуры F и потому, как и площадь S, станет больше $\frac{l^2}{4\pi}$. Таким образом, получится многоугольник, периметр которого не превосходит l, а площадь больше $\frac{l^2}{4\pi}$. Но это противоречит доказанному в задаче 2.

Итак, мы доказали, что площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой длины l, не может быть больше чем $\frac{l^2}{4\pi}$, т. е. не может быть больше площади круга, ограниченного окружностью длины l. ■

Можно доказать, что если замкнутая кривая длины l отлична от окружности, то площадь ограниченной этой кривой фигуры меньше $\frac{l^2}{4\pi}$. Этому мы посвятим следующий пункт.

41*. Решение изопериметрической задачи. Подойдем к изопериметрической задаче с несколько другой стороны. Представим себе, что перед нами кривая, которая при заданной длине l ограничивает фигуру наибольшей площади. Что можно сказать об этой кривой? Прежде всего, она должна быть выпуклой, так как в противном случае существует кривая с той же длиной l, но ограничивающая фигуру большей площади (рис. 90). Далее, проведем какую-нибудь прямую, делящую нашу кривую на две части одинаковой длины. Тогда эта прямая разделит пополам и площадь фигуры, ограниченной кривой. В самом деле, если бы одна из частей имела бóльшую площадь, чем другая, то вместо другой части мы могли бы взять часть, симметричную первой относительно прямой (рис. 91), и тогда получили бы симметричную фигуру с той же длиной l ограничивающей ее кривой, но с большей площадью. Итак,

всякая прямая, делящая нашу кривую на две части одинаковой длины, делит пополам и площадь фигуры, ограниченной этой кривой.

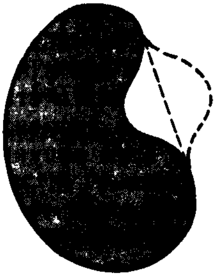


Рис. 90

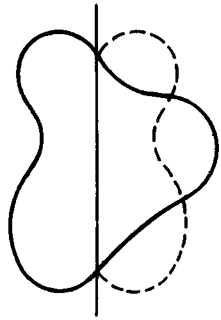


Рис. 91

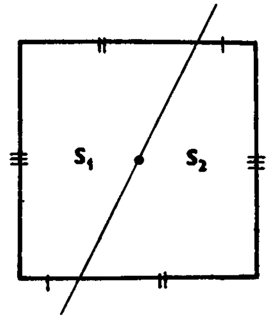
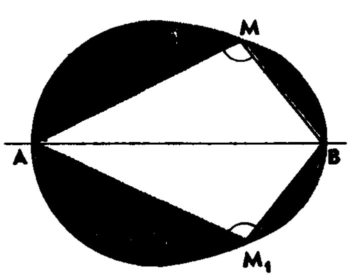


Рис. 92

Нам может показаться, что данная задача почти решена, поскольку на первый взгляд кажется, что указанным свойством не может обладать кривая, отличная от окружности. Оказывается, это не так. Более того, этим свойством обладает любая центрально-симметричная фигура, например квадрат (рис. 92). Попутно отметим совсем удивительный факт: бревно, имеющее центрально-симметричное сечение и плотность, вдвое меньшую плотности воды, плавает в любом положении устойчиво, не стремясь перевернуться!

Таким образом, пока мы не слишком далеко продвинулись в решении задачи. Впрочем, из наших рассуждений ясно, что нашу кривую можно считать симметричной относительно некоторой оси. Ведь даже если таковой она не являлась, мы всегда можем провести прямую, делящую пополам длину и площадь, и вместо одной из половин фигуры взять часть, симметричную другой половине (см. рис. 91).

Итак, наша кривая имеет ось симметрии. Допустим, что она отлична от окружности. Пусть A и B — точки пересечения кривой и оси симметрии (рис. 93, *а*). Тогда на кривой существует такая точка M, отличная от A и B, что угол AMB отличен от прямого,— в противном случае наша кривая представляла бы собой



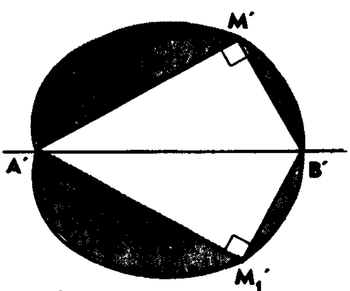


Рис. 93

окружность. Пусть M_1 — точка, симметричная M относительно прямой AB и, следовательно, лежащая на нашей кривой. Разрежем фигуру на пять частей: четыре криволинейных сегмента и четырехугольник $AMBM_1$. Затем сегменты с хордами AM и MB приложим друг к другу вершинами M так, чтобы угол AMB стал прямым. Наконец, приложим к ним два оставшихся сегмента так, чтобы восстановить симметрию (рис. 93, *б*, на этом рисунке новые положения точек A, M, B, M_1 обозначены через A', M', B', M_1'). Полученная фигура состоит из тех же четырех сегментов и четырехугольника $A'M'B'M_1'$, который можно вписать в окружность, так как его противоположные углы составляют в сумме 180°. Площадь этого четырехугольника больше, чем площадь четырехугольника $AMBM_1$, так как стороны у него такие же, но четырехугольник $AMBM_1$ не является вписанным. Поэтому новая фигура имеет бо́льшую площадь, а длина ограничивающей ее кривой осталась, разумеется, той же, равной l.

Подводя итог наших рассуждений, можно сказать, что

если кривая не является окружностью, то всегда можно указать кривую той же длины, но ограничивающую фигуру большей площади.

Для завершения доказательства утверждения, сделанного в конце п. 40, осталось сделать последний шаг. Допустим, что некоторая кривая длины l, отличная от окружности, ограничивает фигуру площади $\frac{l^2}{4\pi}$. Тогда, как мы только что доказали, можно указать другую кривую той же длины l, ограничивающую фигуру с площадью, большей $\frac{l^2}{4\pi}$. Но это противоречит доказанному в предыдущем пункте. Полученное противоречие доказывает наше утверждение:

если замкнутая кривая длины l отлична от окружности, то площадь ограниченной этой кривой фигуры меньше $\frac{l^2}{4\pi}$.

Задачи

11. Площадь кругового кольца равна S. Радиус большей окружности равен длине меньшей. Найдите длину меньшей окружности.

12. Три равные окружности радиуса R попарно касаются друг друга в точках A, B, C. Найдите:

а) площадь криволинейного треугольника ABC (его сторонами являются дуги данных окружностей);

б) длину окружности, вписанной в криволинейный треугольник ABC;

в) длину окружности, вписанной в треугольник ABC.

13. Через концы дуги ABC, равной 120°, проведены касательные к окружности, пересекающиеся в точке D. В полученную фигуру $ABCD$ вписана окружность. Найдите отношение длины этой окружности к длине дуги ABC.

14. Вершины правильного шестиугольника со стороной a являются центрами кругов радиуса $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Найдите площадь части шестиугольника, расположенной вне этих кругов.

15. Круговой сектор радиуса R с дугой в 90° разделен на две части дугой такого же радиуса с центром в конце дуги сектора. Найдите площадь круга, вписанного в меньшую из этих частей.

16. Через точку A, взятую вне данной окружности, проведены две секущие: одна из них проходит через центр окружности, а другая — на расстоянии от центра, равном половине радиуса. Докажите, что площадь части круга, заключенной между этими секущими, не зависит от выбора точки A.

17. Три окружности радиусов R_1, R_2 и R_3 попарно касаются друг друга внешним образом. Через точки касания проведена окружность. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.

18. На сторонах остроугольного треугольника ABC как на диаметрах построены окружности. Они пересекаются попарно в точках A и A_1, B и B_1, C и C_1. Докажите, что:

а) точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB;

б) сумма площадей криволинейных треугольников (составленных из дуг окружностей) ABC_1, BCA_1 и CAB_1 равна сумме площади криволинейного треугольника $A_1B_1C_1$ и удвоенной площади треугольника ABC.

19. Около прямоугольного треугольника описана окружность. Другая окружность такого же радиуса касается катетов этого треугольника, причем одной из точек касания является вершина треугольника. Найдите отношение площади треугольника к площади общей части двух данных кругов.

20. Точка B лежит внутри угла AOC, причем $AO=BO=CO$. На отрезках AO, BO, CO как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся попарно в точках C_1, A_1, B_1. Докажите: площадь криволинейного треугольника $A_1B_1C_1$, ограниченного дугами этих окружностей, равна половине площади треугольника ABC.

21. Диаметры AB и CD данного круга взаимно перпендикулярны. На дуге ACB взяты произвольные точки P и Q, а внутри круга проведена дуга AB окружности с центром в точке D. Хорды DP и DQ пересекаются с этой дугой соответственно в точках M и N, точки P_1 и Q_1 — проекции точек P и Q на диаметр AB. Докажите, что площадь криволинейного четырехугольника $PQNM$ равна площади треугольника DP_1Q_1.

22. С помощью линейки и циркуля постройте круг, площадь которого равна площади трех данных кругов.

ГЛАВА IV

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Движения

42. Особая роль осевой симметрии. Напомним, что *движение* плоскости — это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния. Примерами движений являются центральная и осевая симметрии, параллельный перенос и поворот. Возникает вопрос: а есть ли какие-нибудь другие движения плоскости, отличные от перечисленных? Ответ на этот вопрос мы дадим в следующем пункте. Здесь же мы установим некоторые свойства уже известных движений.

Прежде всего заметим, что *центральная симметрия является частным случаем поворота* — это поворот вокруг центра симметрии на угол 180° (рис. 94). Другой частный случай поворота — это так называемое *тождественное отображение*, сопоставляющее каждой точке плоскости саму эту точку. Ясно, что тождественное отображение можно рассматривать как поворот вокруг произвольной точки на угол 0°. Ясно также, что тождественное отображение может рассматриваться и как частный случай параллельного переноса — параллельный перенос на нулевой вектор.

Из определения движения следует, что *последовательное выполнение двух движений дает новое движение* (объясните почему). Выясним, какое движение получается в результате после-

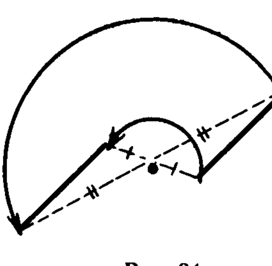


Рис. 94

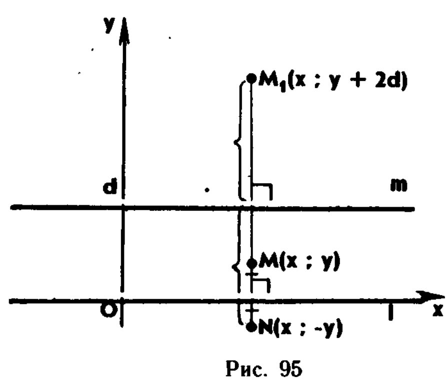


Рис. 95

довательного выполнения двух осевых симметрий с различными осями l и m. Возможны два случая:

1^0. Прямые l и m параллельны.
2^0. Прямые l и m пересекаются.

Рассмотрим эти случаи отдельно.

1^0. Обозначим буквой d расстояние между параллельными прямыми l и m и введем систему координат так, чтобы ось Ox совпала с прямой l, а прямая m имела уравнение $y=d$ (рис. 95). Рассмотрим произвольную точку M с координатами $(x;\ y)$. При симметрии относительно прямой l она перейдет в точку N с координатами $(x;\ -y)$. Точка N в свою очередь при симметрии относительно прямой m перейдет в такую точку M_1, что прямая m окажется серединным перпендикуляром к отрезку NM_1. Следовательно, середина отрезка NM_1 должна иметь координаты $(x;\ d)$, а значит, сама точка M_1 — координаты $(x;\ y+2d)$.

Итак, в результате последовательного выполнения двух осевых симметрий произвольная точка $M(x;\ y)$ перешла в точку $M_1(x;\ y+2d)$, т. е. в такую точку M_1, что $\overrightarrow{MM_1}=\vec{a}\,\{0;\ 2d\}$. Это означает, что

результатом последовательного выполнения двух осевых симметрий с параллельными осями является параллельный перенос на вектор, перпендикулярный к этим осям, длина которого равна удвоенному расстоянию между осями.

2^0. Обозначим буквой O точку пересечения прямых l и m и выберем на этих прямых соответственно точки A и B так, чтобы угол AOB не был тупым (рис. 96). Поскольку при каждой из симметрий точка O остается на месте, или, как говорят, является *неподвижной точкой*, то она остается неподвижной и в результате последовательного выполнения этих симметрий. Возьмем теперь какую-нибудь точку M, отличную от O. Допустим, что она лежит внутри угла AOB (остальные случаи рассмотрите самостоятельно). При симметрии относительно прямой l точка M перейдет в такую точку N, что $ON=OM$ и $\angle AON=\angle AOM$. В свою очередь, точка N при симметрии относительно прямой m перейдет в такую точку M_1, что $OM_1=ON$ и $\angle BOM_1=\angle BON=$ $=\angle AOB+\angle AON=\angle AOB+\angle AOM$. Поэтому

$$\angle AOM_1=\angle BOM_1+\angle AOB=$$
$$=2\angle AOB+\angle AOM,$$

а значит,

$$\angle M_1OM=2\angle AOB.$$

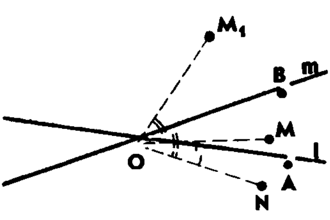


Рис. 96

Итак, в результате последовательного выполнения двух симмет-

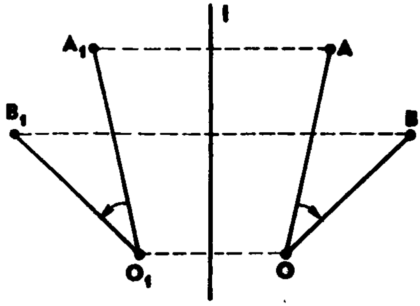


Рис. 97

рий точка O осталась на месте, а произвольная точка M перешла в такую точку M_1, что

$$OM_1=OM \text{ и } \angle M_1OM=2\angle AOB.$$

Кроме того, направление поворота вокруг точки O от OM к OM_1 такое же, как от OA к OB (на рисунке 96 против часовой стрелки). Это означает, что

результатом последовательного выполнения двух осевых симметрий с пересекающимися осями является поворот вокруг точки пересечения осей на угол, вдвое больший угла между осями.

В частности, если оси взаимно перпендикулярны, то в результате получится поворот на 180°, т. е. центральная симметрия. Отметим также, что результатом последовательного выполнения двух осевых симметрий с совпадающими осями является, очевидно, тождественное отображение.

Мы видим, что осевая симметрия занимает особое место среди движений — с ее помощью можно получить все известные нам движения.

Замечание. Как вы помните, *при движении каждый отрезок отображается на равный ему отрезок.* Из этого следует, что *при движении прямая отображается на прямую, луч — на луч, а треугольник — на равный ему треугольник.* Поэтому и *угол отображается на равный ему угол**. Здесь, однако, целесообразно внести одно уточнение. Обратимся к рисунку 97, на котором изображены угол AOB и угол $A_1O_1B_1$, симметричный AOB относительно прямой l. Рассмотрим сначала угол AOB. Нетрудно видеть, что поворот вокруг точки O от OA к OB осуществляется по часовой стрелке. Обратимся теперь к углу $A_1O_1B_1$. В нем все наоборот: поворот вокруг точки O_1 от O_1A_1 к O_1B_1 осуществляется против часовой стрелки. Обычно это свойство осевой симметрии формулируют так: *осевая симметрия сохраняет величину угла,*

---

* Более того, поскольку всякое движение является наложением, то и любая фигура при движении отображается на равную ей фигуру.

но меняет его ориентацию. Поскольку и поворот, и параллельный перенос представляют собой результат последовательного выполнения двух осевых симметрий, то каждое из этих движений сохраняет не только величину угла, но и его ориентацию.

43. Виды движений. Вернемся к вопросу, поставленному в начале предыдущего пункта: существуют ли движения, отличные от осевой симметрии, поворота и параллельного переноса (центральную симметрию, равно как и тождественное отображение, мы не включили в этот список, поскольку они являются частными случаями поворота)? Прежде чем перейти к решению этого вопроса, отметим, что при осевой симметрии каждая точка оси симметрии остается неподвижной, при повороте на ненулевой угол остается неподвижной ровно одна точка плоскости (та, вокруг которой осуществляется этот поворот), а при параллельном переносе на ненулевой вектор неподвижных точек вообще нет.

Будем теперь рассуждать так. Допустим, что при некотором движении остались неподвижными три точки, не лежащие на одной прямой, и постараемся определить вид этого движения. Пусть A, B и C — те три точки, которые остались неподвижными, M — произвольная точка плоскости, M_1 — та точка, в которую перешла точка M в результате рассматриваемого движения. По определению движения $M_1A=MA$. Поэтому если M и M_1 — различные точки, то точка A лежит на серединном перпендикуляре к отрезку MM_1 (рис. 98). По аналогичной причине точки B и C лежат на серединном перпендикуляре к отрезку MM_1. Но по условию точки A, B и C не лежат на одной прямой. Следовательно, точки M и M_1 не могут быть различными, а значит, они совпадают. Тем самым рассматриваемое движение переводит каждую точку плоскости в себя, т. е. является тождественным отображением. Итак,

если движение оставляет неподвижными три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, то это движение — тождественное отображение.

Далее, допустим, что движение оставляет неподвижными две точки A и B. Пусть M — произвольная точка, не лежащая на прямой AB, M_1 — точка, в которую переходит M в результате рассматриваемого движения (рис. 99). Если точки M и M_1 совпа-

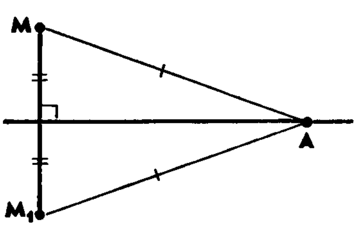


Рис. 98

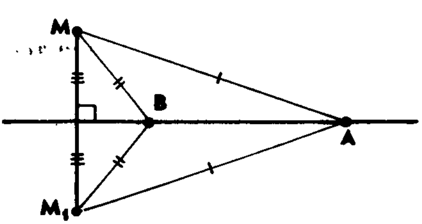


Рис. 99

дают, то наше движение является тождественным отображением, поскольку оно оставляет неподвижными три точки (A, B и M), не лежащие на одной прямой. Если же точки M и M_1 различные, то в силу того, что $AM=AM_1$ и $BM=BM_1$, прямая AB является серединным перпендикуляром к отрезку MM_1. Иными словами, точки M и M_1 симметричны относительно прямой AB. Что же касается точек прямой AB, то все они, как нетрудно видеть, остаются неподвижными (убедитесь в этом самостоятельно). Таким образом, каждая точка плоскости в результате рассматриваемого движения переходит в точку, симметричную ей относительно прямой AB, а значит, само это движение является осевой симметрией с осью AB. Итак,

если движение оставляет неподвижными две точки и не является тождественным отображением, то это движение — осевая симметрия.

Допустим теперь, что движение оставляет неподвижной только одну точку O. Пусть M — произвольная точка плоскости, отличная от O, M_1 — та точка, в которую она переходит в результате рассматриваемого движения. Поскольку $OM=OM_1$, то точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку MM_1 (рис. 100). Рассмотрим симметрию, осью которой является этот серединный перпендикуляр. При ней точка O останется неподвижной, а точка M перейдет в точку M_1. Представим себе, что исходное движение выполнялось в два этапа: сначала было выполнено какое-то неизвестное нам движение, а затем указанная осевая симметрия*. Что можно сказать про это неизвестное движение? Ясно, что оно должно оставлять точки O и M неподвижными, тогда после осевой симметрии они, как и должно быть, перейдут в O и M_1. В силу доказанного выше это означает, что оно может быть либо тождественным отображением, либо осевой симметрией с осью OM. Но тождественным отображением оно быть не может, иначе исходное движение было бы осевой симметрией и, следовательно, оставляло бы неподвижными все точки оси, а это противоречит условию. Следовательно, оно — осевая симметрия с осью OM. Но тогда исходное движение состоит из последовательного выполнения двух осевых симметрий, оси которых пересекаются в точке O, а значит, является поворотом вокруг точки O. Итак,

если движение оставляет неподвижной только одну точку, то это движение — поворот вокруг неподвижной точки.

Допустим, наконец, что движение не оставляет неподвижной ни одной точки. Пусть, как и прежде, M — произвольная точка,

* Нетрудно видеть, что неизвестное движение представляет собой результат последовательного выполнения исходного движения и указанной осевой симметрии.

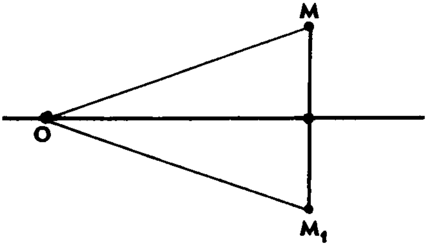


Рис. 100

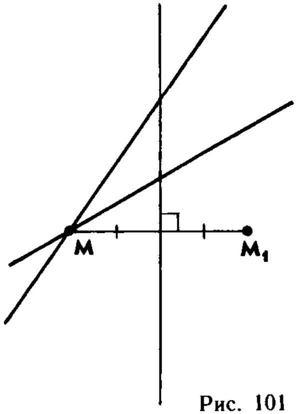


Рис. 101

переходящая в результате рассматриваемого движения в точку M_1. Представим себе, что наше движение выполнялось в два этапа: сначала было выполнено какое-то неизвестное нам движение, а затем осевая симметрия, осью которой является серединный перпендикуляр к отрезку MM_1. Поскольку при этой симметрии точка M переходит в M_1, то неизвестное движение должно оставлять точку M неподвижной. Следовательно, оно может быть только либо тождественным отображением, либо осевой симметрией, либо поворотом вокруг точки M. Но тождественным отображением оно быть не может, иначе исходное движение представляло бы собой осевую симметрию, а это противоречит условию. Далее, осевой симметрией оно может быть только в том случае, когда ее ось параллельна серединному перпендикуляру к отрезку MM_1 (иначе все движение представляло бы собой последовательное выполнение двух осевых симметрий с пересекающимися осями, т. е. поворот, а это вновь противоречит условию). В этом случае все движение представляет собой параллельный перенос.

Осталось рассмотреть последний случай: неизвестное движение было поворотом вокруг точки M, т. е. результатом последовательного выполнения двух осевых симметрий с осями, пересекающимися в точке M (рис. 101). Поскольку серединный перпендикуляр к отрезку MM_1 не проходит через точку M, то исходное движение представляет собой в этом случае последовательное выполнение трех осевых симметрий, оси которых не пересекаются в одной точке и не параллельны друг другу (две из них пересекаются в точке M). Такого движения мы до сих пор не рассматривали. Осталось выяснить, действительно ли оно не имеет ни одной неподвижной точки. Предположим, что неподвижной остается некоторая точка A. Это означает, что в результате первой симметрии она перешла в некоторую точку A_1 (возможно,

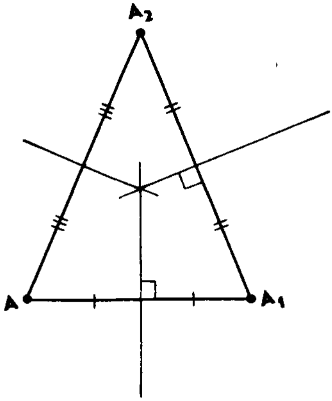


Рис. 102

совпадающую с A), в результате второй — в точку A_2, а в результате третьей — вновь в точку A (рис. 102). Если все три точки различны, то оси первой, второй и третьей симметрий — это серединные перпендикуляры к отрезкам AA_1, A_1A_2 и A_2A. Поэтому если AA_1A_2 — треугольник, то оси пересекаются в одной точке, а если точки A, A_1 и A_2 лежат на одной прямой, то оси параллельны друг другу. И то и другое противоречит условию. Противоречит условию и случай, когда какие-то из этих точек совпадают (объясните почему). Итак,

если движение не оставляет ни одной неподвижной точки, то это движение либо параллельный перенос, либо последовательное выполнение трех осевых симметрий, оси которых не параллельны друг другу и не пересекаются в одной точке.

Теперь мы можем ответить на поставленный вопрос: помимо осевой симметрии, поворота и параллельного переноса есть еще одно движение, представляющее собой последовательное выполнение трех осевых симметрий, оси которых не параллельны друг другу и не проходят через одну точку. Из наших рассуждений следует также, что других движений (отличных от перечисленных) нет. Итак,

любое движение представляет собой либо осевую симметрию, либо поворот, либо параллельный перенос, либо последовательное выполнение трех осевых симметрий, оси которых не параллельны друг другу и не проходят через одну точку.

Тем самым с учетом результатов, полученных в п. 42, можно сказать так:

любое движение представляет собой либо осевую симметрию, либо результат последовательного выполнения двух или трех осевых симметрий.

44. Использование движений при решении задач. Решения многих задач значительно упрощаются, если использовать движения. Приведем несколько примеров.

Задача 1. Два поселка расположены по разные стороны реки. Где следует построить мост, чтобы путь из одного поселка в другой был самым коротким, если берега реки — параллельные прямые, а мост строится перпендикулярно к ним?

Решение. Пусть точки A и B — поселки, отрезок A_1B_1 — мост (рис. 103). Путь из одного поселка в другой состоит из трех отрезков — AA_1, A_1B_1 и B_1B. Поскольку длина моста не зависит от места его расположения, то путь будет самым коротким тогда, когда сумма AA_1 и B_1B будет наименьшей.

Перенесем параллельно отрезок AA_1 на вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$. При этом точка A_1 перейдет в B_1, а точка A — в некоторую точку C. Поскольку $AA_1 = CB_1$, то

$$AA_1 + B_1B = CB_1 + B_1B.$$

Но сумма $CB_1 + B_1B$ принимает наименьшее значение тогда, когда точки C, B_1 и B лежат на одной прямой. Следовательно, мост нужно строить в точке пересечения прямой CB с тем берегом реки, на котором находится поселок B. ■

Решение следующей задачи основано на использовании поворота.

Задача 2. На сторонах остроугольного треугольника ABC извне построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1 (рис. 104). Доказать, что:

1^0) отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 равны, а угол между любыми двумя из них равен 60°;

2^0) три окружности, описанные около равносторонних треугольников, пересекаются в некоторой точке O;

3^0) прямые AA_1, BB_1 и CC_1 также пересекаются в точке O;

4^0) все стороны треугольника ABC видны из точки O под равными углами;

5^0) точка O является той точкой плоскости, для которой сумма расстояний до вершин треугольника ABC принимает наименьшее значение.

Точку O часто называют *точкой Ферма* треугольника ABC. Иногда ее называют также *точкой Торричелли* этого треугольника.

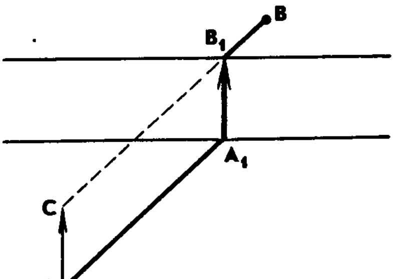


Рис. 103

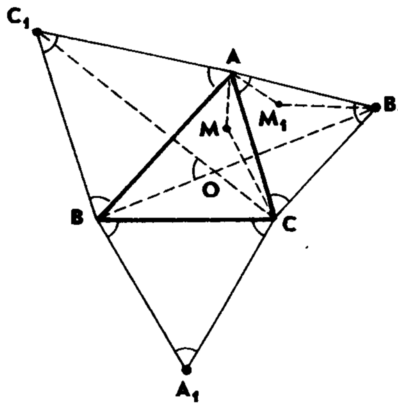


Рис. 104

Решение. 1^0. При повороте вокруг точки A на угол 60° (в соответствующем направлении) отрезок AC_1 переходит в AB, а отрезок AC — в AB_1. Поэтому отрезок CC_1 переходит в B_1B, значит, $CC_1 = BB_1$, а угол между этими отрезками равен 60° (объясните почему). Аналогично доказывается, что $CC_1 = AA_1$, и, следовательно, $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Ясно также, что угол между любыми двумя из этих отрезков равен 60°.

2^0. Пусть O — точка пересечения прямых BB_1 и CC_1. Согласно 1^0 угол BOC_1 равен 60°. С другой стороны, угол BAC_1 также равен 60°. Поэтому окружность, описанная около треугольника ABC_1, проходит через точку O. Аналогично доказывается, что через точку O проходит и окружность, описанная около треугольника CAB_1.

Угол BOC, будучи смежным с углом BOC_1, равен 120°, а угол BA_1C — 60°. Следовательно, окружность, описанная около треугольника BCA_1, также проходит через точку O. Итак, все три окружности, описанные около равносторонних треугольников, пересекаются в точке O.

3^0. В части 2^0 мы установили, что прямые BB_1 и CC_1 проходят через точку O пересечения трех окружностей, описанных около равносторонних треугольников. Аналогично доказывается, что через эту точку проходят прямые AA_1 и CC_1. Тем самым все три прямые проходят через точку O.

4^0. В части 2^0, кроме того, было установлено, что угол BOC равен 120°. Аналогично доказывается, что $\angle AOB = 120°$ и $\angle AOC = 120°$. Следовательно, все стороны треугольника ABC видны из точки O под равными углами.

5^0. Пусть M — произвольная точка плоскости. Вновь рассмотрим поворот вокруг точки A на угол 60°, при котором отрезок CC_1 переходит в отрезок B_1B. Этот поворот переводит треугольник* AMC в треугольник AM_1B_1, в котором $B_1M_1 = CM$ и $AM_1 = AM$. В равнобедренном треугольнике AMM_1 угол A равен 60°, а значит, этот треугольник равносторонний. Следовательно, $AM = M_1M$. Итак, $CM = B_1M_1$, $AM = M_1M$, поэтому

$$CM + AM + BM = B_1M_1 + M_1M + BM.$$

Ясно, что эта сумма принимает наименьшее значение тогда, когда точки M и M_1 лежат на отрезке BB_1, причем M лежит между B и M_1. В этом случае углы AMB и AM_1B_1 равны 120°, и, следовательно, точка M является точкой пересечения прямой BB_1 и окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC_1. Значит, она совпадает с точкой O. ■

Рассмотрим теперь пример использования центральной симметрии при решении задач на построение.

---

* Если точка M лежит на прямой AC, можно рассмотреть поворот вокруг какой-нибудь другой вершины треугольника ABC.

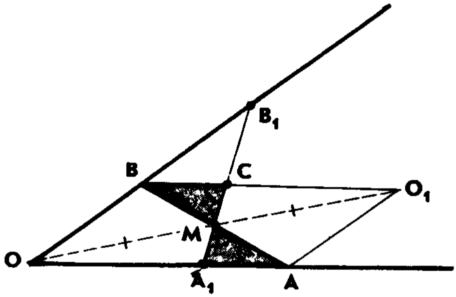


Рис. 105

Задача 3. Через данную точку внутри угла провести прямую так, чтобы:

а) отрезок этой прямой, заключенный внутри угла, делился данной точкой пополам;

б) прямая отсекала от угла треугольник наименьшей площади.

Решение. а) Пусть M — данная точка. Построим угол, центрально-симметричный данному относительно точки M. Для этого достаточно построить точку O_1, центрально-симметричную вершине O данного угла, а затем провести через эту точку прямые, параллельные его сторонам (рис. 105). Пусть A и B — точки пересечения этих прямых со сторонами угла. Тогда прямая AB искомая. В самом деле, точка A является точкой пересечения прямых OA и O_1A, а точка B — точкой пересечения симметричных им относительно точки M прямых O_1B и OB, поэтому точки A и B симметричны относительно точки M, а значит, $AM=MB$.

б) Вновь обратимся к рисунку 105 и докажем, что построенная нами прямая AB искомая. В самом деле, проведем через точку M какую-нибудь другую прямую, пересекающую стороны данного угла в точках A_1 и B_1, и докажем, что площадь треугольника A_1OB_1 больше площади треугольника AOB. Прямая A_1B_1 пересекает либо отрезок OA, либо отрезок OB. Ради определенности будем считать, что она пересекает отрезок OA. Тогда она пересекает и симметричный ему относительно точки M отрезок O_1B. Пусть C — точка пересечения A_1B_1 и O_1B. Треугольники AA_1M и BCM симметричны относительно точки M и, следовательно, равны. Поэтому площадь треугольника AOB равна площади трапеции $OBCA_1$. Площадь же треугольника A_1OB_1 больше, так как он состоит из указанной трапеции и треугольника BB_1C. ■

Следующая задача похожа на часть б) задачи 3, но ее решение предполагает использование не только центральной, но и осевой симметрии.

Задача 4. Угол большой прямоугольной комнаты требуется отгородить двумя небольшими одинаковыми ширмами. Как следует расположить ширмы, чтобы отгороженная площадь была наибольшей?

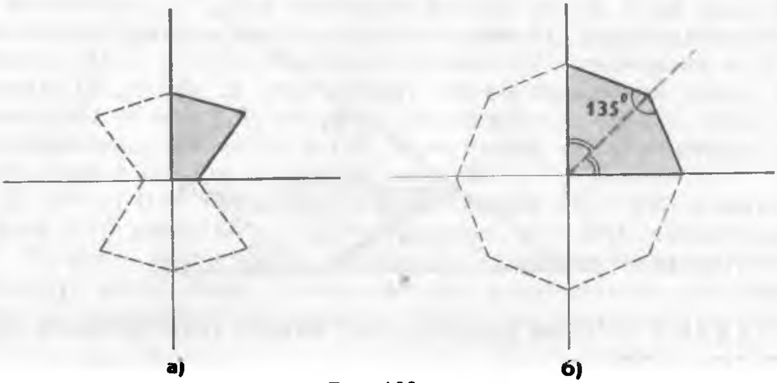


Рис. 106

Решение. Построим фигуру, центрально-симметричную ширмам относительно вершины угла комнаты, а также фигуры, симметричные ширмам относительно стен (рис. 106, *а*). В результате получится восьмиугольник, периметр которого в восемь раз больше длины ширмы, а площадь в четыре раза больше отгороженной площади. Но, как мы знаем, из всех *n*-угольников с данным периметром наибольшую площадь имеет правильный *n*-угольник («ДГ-8», п. 27). Поэтому и отгороженная площадь будет наибольшей в том случае, когда ширмы будут расположены симметрично относительно биссектрисы угла комнаты, а угол между ними будет равен углу правильного восьмиугольника, т. е. равен 135° (рис. 106, *б*). ■

В заключение приведем еще один пример задачи, при решении которой используется осевая симметрия.

Задача 5. Доказать, что площадь четырехугольника не превосходит полусуммы произведений противоположных сторон.

Решение. Докажем это утверждение сначала для выпуклого четырехугольника. Прежде всего заметим, что если бы в условии задачи речь шла не о противоположных, а о соседних сторонах, то она решалась бы совсем просто. Действительно, рассмотрим четырехугольник $ABCD$ (рис. 107) и докажем, что для его площади S имеет место неравенство

$$S \leqslant \frac{AB \cdot BC + CD \cdot AD}{2}.$$

Диагональ AC разделяет четырехугольник на два треугольника, поэтому

$$S = S_{ABC} + S_{ACD}.$$

Но

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \sin B}{2} \leqslant \frac{AB \cdot BC}{2},$$

$$S_{ACD}=\frac{CD\cdot AD\sin D}{2}\leqslant\frac{CD\cdot AD}{2},$$

откуда и получается доказываемое неравенство.

Наша задача сложнее, однако она легко сводится к только что решенной, если использовать симметрию. В самом деле, рассмотрим выпуклый четырехугольник со сторонам a, b, c, d и докажем, что для его площади S справедливо неравенство

$$S\leqslant\frac{ac+bd}{2}.$$

Проведем одну из диагоналей четырехугольника, выберем один из двух треугольников, на которые она разделяет четырехугольник, и построим треугольник, симметричный ему относительно серединного перпендикуляра к выбранной диагонали (рис. 108). Наглядно это можно представить себе так: четырехугольник разрезается по диагонали, выбранный треугольник переворачивается другой стороной и приставляется к нетронутому треугольнику. В результате получается новый выпуклый четырехугольник с той же площадью S и теми же сторонами, но только следующими в другом порядке: стороны a и c, равно как b и d, в этом четырехугольнике уже не противоположные, а смежные. С учетом доказанного выше это и приводит к требуемому неравенству.

Осталось рассмотреть случай невыпуклого четырехугольника $ABCD$. Пусть AC — та из диагоналей этого четырехугольника, которая не разделяет его на два треугольника (рис. 109), а вершины B и D обозначены так, что $S_{ABCD}=S_{ACB}-S_{ACD}$. Пусть, далее, $ABCD_1$ — четырехугольник, вершина D_1 которого симметрична точке D относительно прямой AC. Этот четырехугольник выпуклый (объясните почему), его стороны соответственно равны сторонам четырехугольника $ABCD$, но его площадь больше S_{ABCD}, так как она равна $S_{ACB}+S_{ACD}$. А поскольку доказываемое неравенство выполнено для четырехугольника $ABCD_1$, то оно тем более выполнено и для четырехугольника $ABCD$. ■

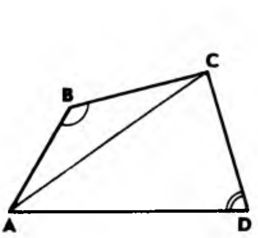


Рис. 107

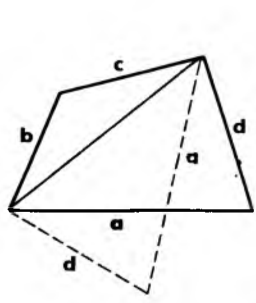


Рис. 108

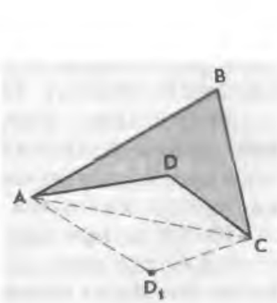


Рис. 109

Задачи

1. Стороны AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны, M и N — середины сторон AB и CD. Докажите, что угол между прямыми AD и MN равен углу между прямыми MN и BC (если $AD \parallel BC$, то каждый из этих углов равен, очевидно, 0°).

2. Биссектрисы углов A и B трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке M, а биссектрисы углов C и D — в точке N. Докажите, что

$$|AB+CD-BC-AD|=2MN.$$

3. Найдите правильную формулировку и приведите решение задачи 2 п. 44 для следующих случаев:

а) ABC — тупоугольный треугольник с тупым углом, меньшим 120°;

б) ABC — тупоугольный треугольник с тупым углом, большим 120°;

в) равносторонние треугольники построены не извне, а изнутри.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены равносторонние треугольники: ABP — извне, BCQ — изнутри. Докажите, что $PQ=AC$.

5. Внутри квадрата $ABCD$ взята произвольная точка M. Из вершин A, B, C и D проведены прямые, перпендикулярные к прямым BM, CM, DM и AM соответственно. Докажите, что все проведенные прямые пересекаются в одной точке.

6. На сторонах AB, BC и CA равностороннего треугольника ABC взяты такие точки L, M и N, что $ML \parallel AC$ и $MN \parallel BC$. Докажите, что точка M и середины отрезков AL и BN являются вершинами равностороннего треугольника.

7. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки M и N так, что $AN=DN+BM$. Докажите, что луч AM — биссектриса угла BAN.

8. На сторонах AB и AC треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты ABB_1A_1, ACC_1A_2. Докажите, что:

а) отрезки A_1C и A_2B равны и перпендикулярны друг другу;

б) центры квадратов и середины отрезков BC и A_1A_2 являются вершинами квадрата.

9. На сторонах выпуклого четырехугольника построены во внешнюю сторону квадраты. Докажите, что:

а) отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны и взаимно перпендикулярны;

б) если этот четырехугольник — параллелограмм, то центры квадратов являются вершинами квадрата.

10. Углы при вершине C равнобедренных треугольников ABC и A_1B_1C прямые. Докажите, что медиана треугольника A_1BC, проведенная из вершины C, перпендикулярна отрезку AB_1 и равна его половине.

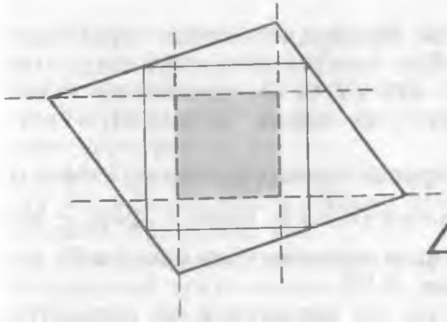


Рис. 110

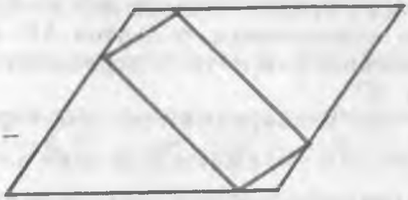


Рис. 111

11. Найдите множество всех точек M, лежащих внутри равностороннего треугольника ABC, для каждой из которых

$$MA^2 = MB^2 + MC^2.$$

12. Через вершины параллелограмма проведены прямые, перпендикулярные к сторонам вписанного в него квадрата (рис. 110). Докажите, что проведенные прямые, пересекаясь, образуют новый квадрат.

13. Докажите, что вершина A, середина стороны BC и середина диагонали DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ являются вершинами правильного треугольника.

14. Даны треугольник ABC и точка M. Точка M_1 симметрична точке M относительно середины AB, точка M_2 симметрична точке M_1 относительно середины BC, точка M_3 симметрична точке M_2 относительно середины AC. Докажите, что точка M_3 симметрична точке M относительно вершины A.

15. Докажите, что если противоположные стороны шестиугольника равны и параллельны, то его диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

16. Сумма расстояний между серединами противоположных сторон четырехугольника равна половине его периметра. Докажите, что этот четырехугольник — параллелограмм.

17. Какой из четырехугольников с данными диагоналями и углом между ними имеет наименьший периметр?

18. Один параллелограмм вписан в другой (рис. 111). Докажите, что точки пересечения диагоналей этих параллелограммов совпадают.

19. Из точек пересечения сторон треугольника с окружностью, проходящей через основания высот, проведены перпендикуляры к сторонам треугольника. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.

20. Докажите, что существует ровно одна точка, такая, что точки, симметричные ей относительно: а) сторон; б) середин сторон данного треугольника, лежат на описанной окружности (как мы увидим в п. 47, этой точкой является ортоцентр).

21. Шар находится в точке M бильярдного стола, имеющего форму прямоугольника $ABCD$. Как следует направить шар, чтобы, отразившись от бортов AB, BC, CD и DA (по закону «угол падения равен углу отражения»), он попал в заданную точку N?

22. Бильярдный стол имеет форму прямоугольника, стороны которого выражаются целыми числами p и q, причем дробь $\frac{p}{q}$ несократима. Докажите, что если шар, находящийся в одном из углов стола, выпустить под углом:

а) 45° к борту, то после $p+q-2$ отражений он попадет в противоположный угол;

б) 30° к борту, то он никогда не попадет в противоположный угол.

23. В каком направлении следует направить шар, касающийся одного из бортов прямоугольного бильярдного стола, чтобы, отразившись последовательно от трех других бортов, он вернулся в исходную точку, а затем повторил пройденный маршрут?

24. На каждой из сторон прямоугольника с диагональю d взято по одной точке. Какое наименьшее значение может принимать периметр четырехугольника с вершинами в этих точках?

25. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и CA в точках K_C, K_A и K_B, точки L_A и L_B симметричны K_A и K_B относительно биссектрис углов A и B. Докажите, что четырехугольник AL_BL_AB — трапеция.

Задачи на построение

26. Впишите в данную окружность прямоугольник так, чтобы одна из его сторон была равна и параллельна данному отрезку.

27. Соедините две стороны данного треугольника отрезком, равным и параллельным данному отрезку.

28. Даны окружность и ее непересекающиеся хорды AB и CD. Постройте точку X, лежащую на окружности, так, чтобы хорды AX и BX высекали на хорде CD отрезок EF, равный данному отрезку.

29. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Проведите через точку A прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный внутри окружностей, был равен данному отрезку.

30. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

31. Постройте трапецию по:

а) четырем сторонам;

б) двум основаниям и двум диагоналям;

в) двум основаниям и двум углам при одном из них.

32. Постройте четырехугольник по:

а) двум противоположным сторонам и трем углам;

б) трем сторонам и углам, прилежащим к четвертой стороне;

в) четырем сторонам и отрезку, соединяющему середины двух противоположных сторон.

33. Постройте параллелограмм по сторонам и углу между диагоналями.

34. Постройте равносторонний треугольник так, чтобы одной из его вершин была данная точка P, а две другие лежали на данных прямых a и b.

35. Даны окружность, квадрат и точка P. Постройте равнобедренный треугольник PAB, в котором $PA = PB$, вершины A и B лежат соответственно на окружности и стороне квадрата, а $\angle APB = 45°$.

36. Постройте равносторонний треугольник так, чтобы его вершины лежали на трех данных параллельных прямых.

37. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник так, чтобы вершины его острых углов лежали на данных окружностях, а вершиной прямого угла являлась данная точка.

38. В данный квадрат впишите равносторонний треугольник так, чтобы одна из его вершин совпала с вершиной квадрата, а две другие лежали на сторонах квадрата.

39. Через общую точку A двух окружностей проведите прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней равные хорды.

40. Через данную точку M проведите прямую так, чтобы отрезок, заключенный между точками пересечения этой прямой с данной прямой и данной окружностью, делился точкой M пополам.

41. Даны две концентрические окружности. Проведите прямую, на которой эти окружности высекают три равных отрезка.

42. Даны угол и точки A, C внутри его. Постройте параллелограмм $ABCD$, вершины B и D которого лежат на сторонах данного угла.

43. Даны угол hk и точка O внутри его. Постройте квадрат $ABCD$ так, чтобы диагонали квадрата пересекались в точке O, а точки B и D лежали на лучах h и k.

44. Даны три точки. Постройте треугольник, для которого эти точки — середины сторон.

45. Даны пять точек. Постройте пятиугольник, для которого эти точки — середины сторон.

46. Дана одна из вершин треугольника и прямые, содержащие его биссектрисы, проведенные из двух других вершин. Постройте этот треугольник.

47. Даны две точки и прямая. Постройте треугольник, у которого данные точки — середины сторон, а биссектриса, проведенная к одной из этих сторон, лежит на данной прямой.

48. Постройте равнобедренный треугольник по углу при вершине и разности боковой стороны и основания.

49. Постройте треугольник по разности двух его сторон и углам, противолежащим этим сторонам.

50. Постройте треугольник по стороне, сумме двух других сторон и углу, противолежащему одной из этих двух сторон.

51. Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

52. Постройте треугольник по стороне, высоте, проведенной к этой стороне, и разности углов, прилегающих к ней.

53. Постройте четырехугольник $ABCD$ по четырем сторонам так, чтобы диагональ AC была биссектрисой угла A.

54. Постройте четырехугольник $ABCD$ с заданными сторонами AB и AD и углами B и D, если известно, что в него можно вписать окружность.

§ 2. Центральное подобие

45. Свойства центрального подобия. Напомним, как строятся центрально-подобные фигуры. Пусть F — произвольная фигура, O — какая-нибудь точка плоскости, k — положительное число. Сопоставим каждой точке M фигуры F такую точку M_1 луча OM, что $OM_1 = k \cdot OM$ (рис. 112). В результате такого сопоставления получается новая фигура F_1. При этом фигуры F и F_1 называются центрально-подобными.

На описанном способе построения фигуры F_1 по заданной фигуре F основано геометрическое преобразование, которое называется *центральным подобием* или *гомотетией*. Приведем его определение.

Пусть O — произвольная точка, k — любое число, отличное от нуля. Центральным подобием (или гомотетией) с центром O и коэффициентом k называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M переходит в такую точку M_1, что

$$\overrightarrow{OM_1} = k \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Из этого определения следует, что точка O при центральном подобии остается неподвижной, причем при $k \neq 1$ других неподвижных точек нет. Если же $k = 1$, то неподвижными остаются все точки плоскости, и центральное подобие представляет собой тождественное отображение.

Обратим особое внимание на то, что коэффициент k центрального подобия может быть как положительным, так и отрицательным (рис. 113). В частности, при $k = -1$ центральное

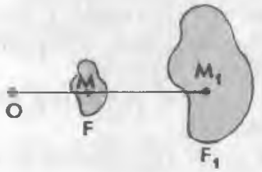


Рис. 112

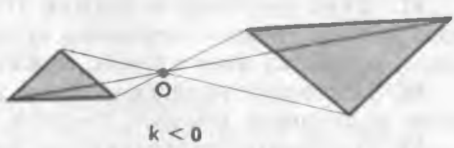


Рис. 113

подобие представляет собой центральную симметрию. В общем случае центральное подобие с отрицательным коэффициентом k можно представить как последовательное выполнение центрального подобия с коэффициентом $|k|$ и центральной симметрии относительно его центра (объясните почему).

Сформулируем теперь основное свойство центрального подобия.

Если при центральном подобии с коэффициентом k точки A и B переходят в точки A_1 и B_1, то $\overrightarrow{A_1B_1}=k\cdot\overrightarrow{AB}$.

В самом деле,

$$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OA_1}=k\cdot\overrightarrow{OB}-k\cdot\overrightarrow{OA}=k\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=k\cdot\overrightarrow{AB}.$$

Пользуясь этим свойством, можно доказать, что

при центральном подобии отрезок переходит в отрезок, луч — в луч, а прямая — в прямую.

□ Докажем, например, первое из этих утверждений (остальные доказываются аналогично). Пусть M — произвольная точка отрезка AB; A_1, B_1 и M_1 — те точки, в которые переходят A, B и M при центральном подобии с центром O и коэффициентом k (рис. 114). Поскольку векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны, то существует такое число m, что $\overrightarrow{AM}=m\cdot\overrightarrow{AB}$. Учитывая, что точка M лежит на отрезке AB, получим

$$m=\frac{AM}{AB},$$

и, следовательно, $0\leqslant m\leqslant 1$. Для точки M_1 имеем

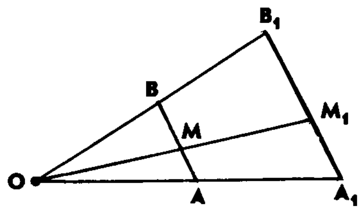


Рис. 114

$$\overrightarrow{A_1M_1}=k\cdot\overrightarrow{AM}=k\cdot m\cdot\overrightarrow{AB}=m\cdot\overrightarrow{A_1B_1},$$

причем $0\leqslant m\leqslant 1$, поэтому точка M_1 лежит на отрезке A_1B_1.
лежит на отрезке A_1B_1.

Итак, каждая точка M отрезка AB переходит в точку M_1 отрезка A_1B_1. Аналогично доказывается, что в каждую точку отрезка A_1B_1 переходит некоторая точка отрезка AB. Следовательно, отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1. ■

Отметим, что

если прямая проходит через центр подобия, то она переходит в себя; если же прямая AB не проходит через центр подобия, то она переходит в прямую, параллельную AB.*

---

* Мы предполагаем, что коэффициент центрального подобия отличен от единицы.

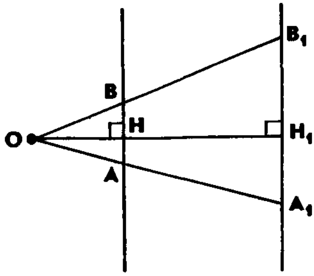


Рис. 115

☐ В самом деле, первое из этих утверждений вытекает непосредственно из определения центрального подобия. Для доказательства второго из них проведем через центр O прямую, перпендикулярную AB, и обозначим буквой H точку пересечения этой прямой с прямой AB (рис. 115). Поскольку точка H не совпадает с O, то она перейдет в некоторую точку H_1, отличную от H. Пусть A_1 и B_1 — точки, в которые переходят A и B. Тогда $\overrightarrow{A_1B_1}=k\cdot\overrightarrow{AB}$ (k — коэффициент центрального подобия), поэтому прямая A_1B_1, как и прямая AB, перпендикулярна к прямой OH. Следовательно, прямые AB и A_1B_1 параллельны. ■

Рассмотрим теперь треугольник ABC. Из основного свойства центрального подобия следует, что он переходит в треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого пропорциональны сторонам треугольника ABC. Следовательно, эти треугольники подобны, а значит, их углы соответственно равны. Тем самым мы установили еще одно важное свойство:

центральное подобие сохраняет углы.

Наконец, приведем еще одно следствие основного свойства:

при центральном подобии с коэффициентом k окружность с центром C радиуса r переходит в окружность с центром C_1 радиуса $|k|r$, где C_1 — точка, в которую переходит C.

Доказательство утверждения проведите самостоятельно.

Замечание. Центральное подобие является частным случаем так называемого преобразования подобия. *Преобразованием подобия* с коэффициентом $k>0$ называется отображение плоскости на себя, при котором любые две точки A и B переходят в такие точки A_1 и B_1, что $A_1B_1=k\cdot AB$. Примерами преобразования подобия являются, очевидно, движение, центральное подобие, а также результат их последовательного выполнения. Оказывается, верно и обратное утверждение:

любое преобразование подобия представляет собой результат последовательного выполнения движения и центрального подобия.

☐ Докажем это. Рассмотрим преобразование подобия с коэффициентом k. Произвольные точки A и B переходят при нем в такие точки A_1 и B_1, что $A_1B_1=k\cdot AB$. Рассмотрим теперь центральное подобие с произвольным центром O и коэффициентом $\frac{1}{k}$. Точки A_1 и B_1 переходят при нем в такие точки A_2 и B_2, что $A_2B_2=\frac{A_1B_1}{k}$.

Тем самым в результате последовательного выполнения преобразования подобия и центрального подобия произвольные точки A и B переходят в такие точки A_2 и B_2, что

$$A_2B_2=k\cdot\frac{AB}{k}=AB\,.$$

Это означает, что результатом последовательного выполнения указанных преобразований является движение. В свою очередь в результате последовательного выполнения этого движения и центрального подобия с центром O и коэффициентом k точки A и B, взятые произвольно, переходят в те же точки A_1 и B_1, что и при исходном преобразовании подобия. Но это и означает, что исходное преобразование подобия является результатом последовательного выполнения указанного движения и центрального подобия с центром O и коэффициентом k. ■

Преобразование подобия часто используется в геометрии. С его помощью, например, можно ввести понятие подобия произвольных фигур:

две фигуры называются подобными, если существует такое преобразование подобия, при котором одна из них переходит в другую.

Ясно, что применительно к треугольникам это новое определение дает тот же результат, что и старое.

46. Использование центрального подобия при решении задач и доказательстве теорем. Применение центрального подобия позволяет значительно упростить решение целого ряда геометрических задач. Приведем несколько примеров. Начнем с теоремы, которую обычно связывают с именем Наполеона Бонапарта.

Теорема Наполеона. ***На сторонах треугольника извне построены равносторонние треугольники. Доказать, что их центры являются вершинами равностороннего треугольника, центр которого находится в точке пересечения медиан исходного треугольника.***

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, A_1BC, AB_1C и ABC_1 — равносторонние треугольники, G_A, G_B и G_C — их центры, G — точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 116). Проведем доказательство для случая остроугольного треугольника (остальные случаи рассмотрите самостоятельно). В п. 44 (задача 2) мы установили, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 равны, а углы между ними равны 60°. При центральном подобии с центром в середине стороны BC и коэффициентом $\frac{1}{3}$ точка A переходит в G, а точка A_1 — в G_A. Поэтому прямые GG_A и AA_1 параллельны или совпадают и $GG_A=\frac{AA_1}{3}$. По аналогичной

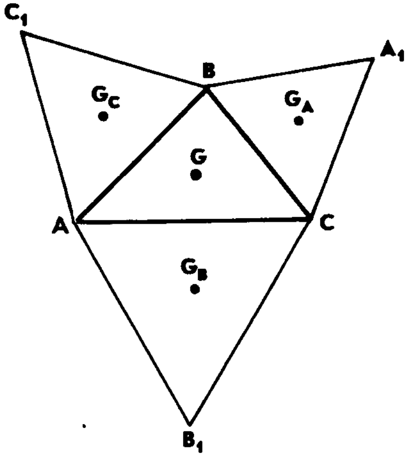


Рис. 116

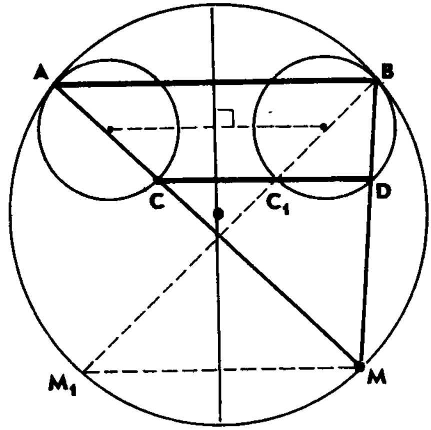


Рис. 117

причине прямые GG_B и BB_1, GG_C и CC_1 параллельны или совпадают и $GG_B=\frac{BB_1}{3}$, $GG_C=\frac{CC_1}{3}$. Таким образом, отрезки GG_A, GG_B и GG_C равны и образуют между собой углы по 120°. Из этого следует, что треугольник $G_AG_BG_C$ равносторонний, а G — его центр. ■

При решении следующей задачи используется не только центральное подобие, но и осевая симметрия.

Задача 1. Две окружности равных радиусов касаются изнутри третьей окружности в точках A и B (рис. 117). Через произвольную точку M третьей окружности проведены прямые MA и MB, пересекающие первые две окружности в точках C и D. Доказать, что прямые AB и CD параллельны.

Решение. Диаметр третьей окружности, перпендикулярный к линии центров первых двух, является, очевидно, осью симметрии всей фигуры. Поэтому точки A и B симметричны относительно этого диаметра, а отрезок BM_1, симметричный отрезку AM относительно этого диаметра, пересекает одну из этих окружностей в точке C_1, симметричной C. Прямые MM_1 и CC_1 перпендикулярны к оси симметрии и, следовательно, параллельны друг другу.

Окружности, описанные около треугольников BC_1D и BM_1M, центрально-подобны с центром B (объясните почему). Следовательно, прямые MM_1 и C_1D также параллельны. Но это означает, что точки C, C_1 и D лежат на одной прямой, а значит, прямые AB и CD параллельны. ■

В заключение приведем пример задачи, при решении которой наряду с геометрическими методами удобно использовать некоторые физические понятия.

Задача 2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Доказать, что точки пересечения медиан треугольников ABC, BCD, CDA и DAB лежат на одной окружности.

Решение. Представим себе, что в вершинах данного четырехугольника сосредоточены четыре одинаковые массы m (рис. 118). Тогда центром масс системы трех точек A, B и C является точка G_{ABC} пересечения медиан треугольника ABC, а центр масс G системы четырех точек A, B, C и D совпадает с центром масс системы двух точек G_{ABC} и D, в которых сосредоточены соответственно массы $3m$ и m («ДГ-8», п. 67). Поэтому центр масс G всей системы лежит на отрезке DG_{ABC} и делит этот отрезок в отношении $3:1$, считая от точки D. Следовательно, при центральном подобии с центром G и коэффициентом $-\frac{1}{3}$ вершина D переходит в точку пересечения медиан треугольника ABC. Аналогично доказывается, что и остальные вершины переходят при этом центральном подобии в точки пересечения медиан противоположных им треугольников. Но при центральном подобии окружность, на которой лежат вершины четырехугольника, переходит в окружность, поэтому точки пересечения медиан противоположных этим вершинам треугольников будут лежать на этой окружности. ■

47. Окружность Эйлера. Сейчас мы приведем решение одной из классических задач геометрии, получившей название *задачи Эйлера*. Эту задачу можно, конечно, решить и без применения центрального подобия. Но, как мы увидим, использование центрального подобия позволяет дать настолько наглядное решение, что его можно было бы даже не иллюстрировать рисунками!

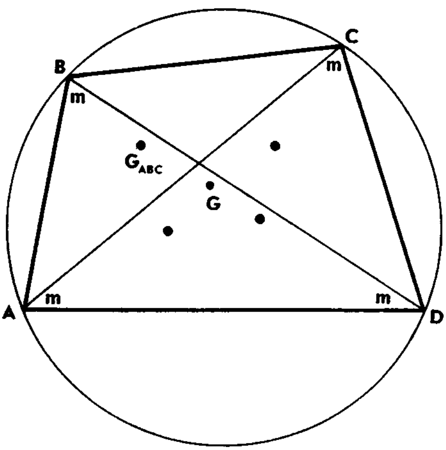


Рис. 118

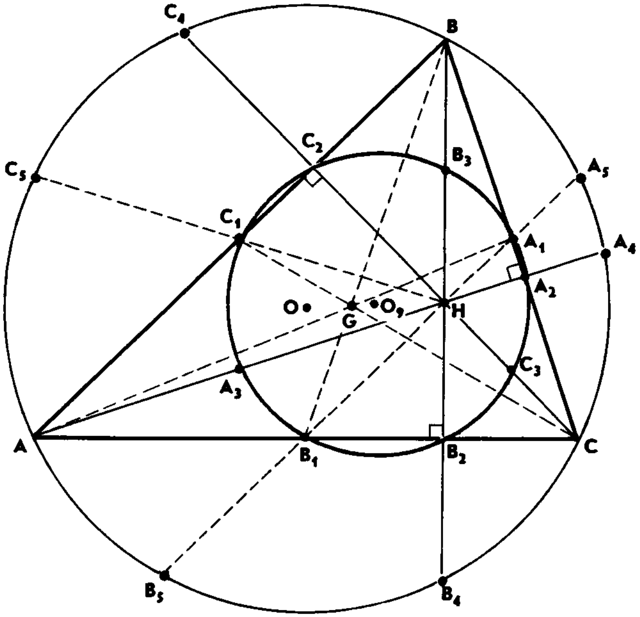


Рис. 119

Задача 3. Доказать, что в произвольном неравностороннем треугольнике:

1^0) точка пересечения медиан лежит на отрезке, соединяющем ортоцентр с центром описанной окружности, и делит этот отрезок в отношении 1 : 2, считая от центра описанной окружности*;

2^0) середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности, центром которой является середина отрезка, соединяющего ортоцентр с центром описанной окружности, а ее радиус в два раза меньше радиуса описанной окружности;

3^0) точки, симметричные ортоцентру относительно сторон треугольника и их середин, лежат на описанной окружности.

Окружность, на которой лежат указанные в 2^0 девять точек, называется *окружностью Эйлера* или *окружностью девяти точек*, а прямая, на которой лежат четыре точки (ортоцентр, точка пересечения медиан, центр описанной окружности и центр окружности Эйлера) — *прямой Эйлера*.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 119). Условимся о следующих обозначениях: H — ортоцентр, G — точка пересечения медиан, O — центр описанной окружности, R — ее радиус, A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB, A_2, B_2 и C_2 — основания высот, проведенных к этим сторонам, A_3, B_3 и

* Напомним, что это утверждение было доказано в «ДГ-8», п. 36.

C_3 — середины отрезков AH, BH и CH, A_4, B_4 и C_4 — точки, симметричные H относительно сторон треугольника, A_5, B_5 и C_5 — точки, симметричные H относительно середин этих сторон, O_9 — центр окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ (пока задача не решена, мы не можем назвать эту окружность окружностью Эйлера). Приступим теперь к решению задачи.

1^0. Рассмотрим центральное подобие с центром G и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. Медианы треугольника ABC делятся точкой G в отношении $1:2$, поэтому при рассматриваемом центральном подобии вершины A, B и C перейдут в середины A_1, B_1 и C_1 противоположных сторон (рис. 120). Следовательно, прямые, содержащие высоты треугольника, перейдут в прямые, перпендикулярные к его сторонам и проходящие через их середины, т. е. в серединные перпендикуляры к сторонам. Поэтому ортоцентр H перейдет в центр O описанной окружности, а значит,

$$\overrightarrow{GO}=-\frac{\overrightarrow{GH}}{2}, \text{ или } \overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{OG}.$$

Отсюда следует, что точка G лежит на отрезке OH и делит его в отношении $1:2$, считая от точки O.

2^0. Найдем сначала радиус и центр окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$. Как отмечалось в 1^0, при центральном подобии с центром G и коэффициентом $-\frac{1}{2}$ вершины A, B и C треугольника переходят в середины A_1, B_1 и C_1 противоположных сторон. Поэтому окружность, описанная около треугольника ABC, переходит в окружность, описанную около треугольника $A_1B_1C_1$. Следовательно, ее радиус равен $\frac{R}{2}$, а положение центра O_9 определяется равенством

$$\overrightarrow{GO_9}=-\frac{\overrightarrow{GO}}{2}, \text{ или } \overrightarrow{GO_9}=\frac{\overrightarrow{OG}}{2}.$$

С другой стороны, согласно 1^0, $\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{OG}$ (рис. 121). Имеем:

$$\overrightarrow{OO_9}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GO_9}=\frac{3\overrightarrow{OG}}{2}, \quad \overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GH}=3\overrightarrow{OG},$$

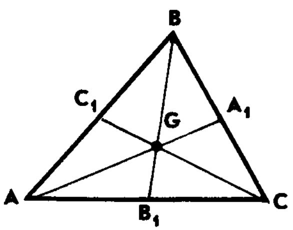


Рис. 120

Рис. 121

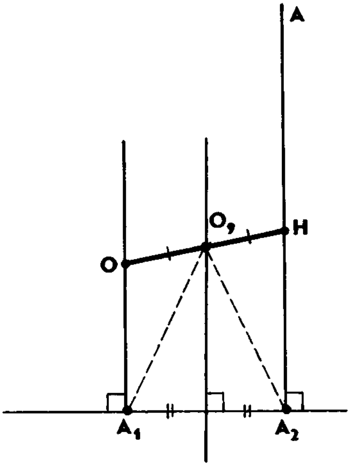


Рис. 122

откуда

$$\overrightarrow{OH}=2\,\overrightarrow{OO_9},$$

и, следовательно, точка O_9 является серединой отрезка OH.

Точка O_9, будучи серединой отрезка OH, равноудалена от параллельных прямых OA_1 и HA_2 (рис. 122) и, следовательно, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку A_1A_2. Из этого следует, что $O_9A_1=O_9A_2$, а значит, точка A_2 лежит на окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично доказывается, что точки B_2 и C_2 также лежат на этой окружности.

Рассмотрим теперь центральное подобие с центром H и коэффициентом $\frac{1}{2}$ (рис. 123). При этом подобии центр O описанной окружности переходит в середину отрезка OH, т. е. в точку O_9. Следовательно, сама описанная окружность переходит в окружность с центром O_9 и радиусом $\frac{R}{2}$, т. е. в окружность, описанную около треугольника $A_1B_1C_1$. Вершины же A, B и C переходят в точки A_3, B_3 и C_3, поэтому эти точки также лежат на окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$.

Итак, все девять точек A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3 и C_3 лежат на окружности с центром O_9 радиуса $\frac{R}{2}$.

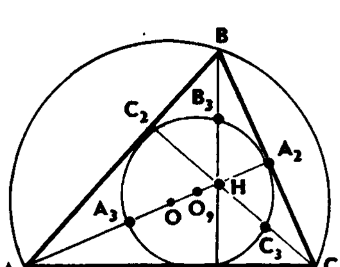


Рис. 123

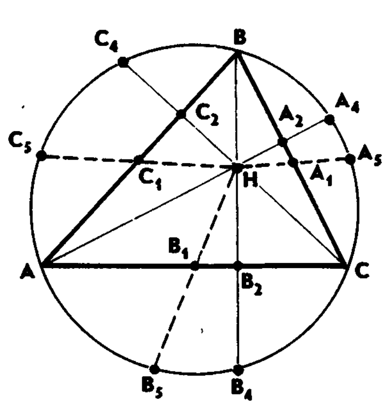


Рис. 124

3^0. Рассмотрим, наконец, центральное подобие с центром H и коэффициентом 2. При этом подобии окружность Эйлера переходит в описанную окружность (объясните почему), точки A_1, B_1 и C_1 (середины сторон) — в точки A_5, B_5 и C_5, симметричные H относительно середин сторон, а точки A_2, B_2 и C_2 (основания высот) — в точки A_4, B_4 и C_4, симметричные H относительно сторон треугольника (рис. 124). Следовательно, точки A_4, B_4, C_4, A_5, B_5 и C_5 лежат на описанной окружности. ■

Замечание. Приглядевшись повнимательнее к рисунку 119, можно сделать несколько полезных наблюдений, касающихся взаимного расположения указанных девяти точек на окружности Эйлера. Прежде всего, поскольку угол $A_3A_2A_1$ прямой, то отрезок A_1A_3 — диаметр окружности Эйлера (из этого, в частности, следует, что $A_1A_3 = R$). По аналогичной причине диаметрами этой окружности являются отрезки B_1B_3 и C_1C_3.

Иными словами, *треугольники* $A_1B_1C_1$ *и* $A_3B_3C_3$ *симметричны относительно центра окружности Эйлера.*

Далее, углы BB_2C и CC_2B прямые. Поэтому окружность с центром A_1 радиуса $\frac{BC}{2} = B_1C_1$ проходит через точки B_2 и C_2, а значит, $A_1B_2 = A_1C_2 = B_1C_1$. Аналогично $B_1A_2 = B_1C_2 = A_1C_1$ и $C_1A_2 = C_1B_2 = A_1B_1$.

Наконец, из сказанного следует, что прямоугольные треугольники $A_1B_2A_3$ и $A_1C_2A_3$ равны по гипотенузе и катету, поэтому $A_3B_2 = A_3C_2$.

Точно так же $B_3A_2 = B_3C_2$ и $C_3A_2 = C_3B_2$.

48. Примеры использования задачи Эйлера. Утверждения, сформулированные в задаче Эйлера, оказываются полезными при решении целого ряда задач. Приведем четыре примера.

Задача 4. Доказать, что радиус окружности, проведенной через две вершины и ортоцентр непрямоугольного треугольника, равен радиусу окружности, описанной около этого треугольника.

Решение. Решим задачу двумя способами.

Способ 1. Пусть ABC — данный треугольник, H — его ортоцентр. Рассмотрим треугольник ABC_1, симметричный треугольнику ABC относительно прямой AB (рис. 125). Точка H симметрична ортоцентру этого треугольника относительно стороны AB, поэтому она лежит на описанной около него окружности. Та-

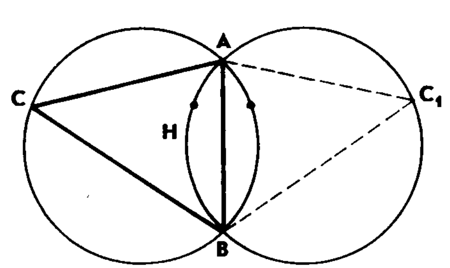


Рис. 125

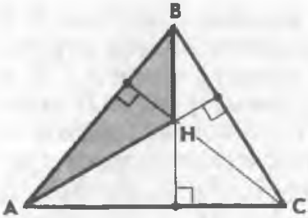


Рис. 126

ким образом, окружности, описанные около треугольников ABC и ABH, симметричны относительно прямой AB, а значит, их радиусы равны.

Способ 2. Обратимся к рисунку 126. Основания высот треугольников ABC и ABH, очевидно, совпадают. Следовательно, совпадают их окружности Эйлера. Поэтому радиусы описанных около них окружностей равны. ■

Теорема. ***Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, образуют треугольник, в котором эти высоты являются биссектрисами.***

Доказательство. Докажем теорему двумя способами.

Способ 1. Пусть ABC — данный треугольник, A_2, B_2 и C_2 — основания его высот, H — ортоцентр (рис. 127). Докажем, например, что $\angle A_2C_2C = \angle B_2C_2C$. Рассмотрим треугольник ABC^*, симметричный треугольнику ABC относительно прямой AB. Как отмечалось в ходе решения предыдущей задачи, точка H лежит на окружности, описанной около треугольника ABC^*. Пусть A_2^* — точка, симметричная A_2 относительно прямой AB. Нетрудно видеть, что точки A_2^*, C_2 и B_2 являются основаниями перпендикуляров, проведенных из точки A к сторонам треугольника BHC^* или их продолжениям. Поэтому точки A_2^*, C_2 и B_2 лежат на одной прямой — прямой Симсона треугольника BHC^* (см. «ДГ-8», п. 58). Но это и означает, что $\angle A_2C_2C = \angle B_2C_2C$ (объясните почему). ■

Способ 2. Пусть C_3 — середина отрезка CH. Согласно замечанию, сделанному в конце предыдущего пункта, $A_2C_3 = B_2C_3$, а значит, углы A_2C_2C и B_2C_2C равны как вписанные и опирающиеся на равные дуги окружности Эйлера треугольника ABC. ■

Замечание. Доказанное утверждение позволяет установить одно замечательное свойство треугольника $A_2B_2C_2$. Представим себе бильярдный стол в форме остроугольного треугольника ABC (рис. 128). Поместим шар в точку A_2 и ударом кия направим его в точку B_2. Тогда после отражения он попадет в точку C_2, затем в A_2, затем в B_2 и т. д. Таким образом, шар будет все время двигаться по одному и тому же маршруту $A_2B_2C_2$. Так получается потому, что любые две стороны треугольника $A_2B_2C_2$ составляют равные углы со стороной треугольника ABC, в которую они упираются. Верно и обратное утверждение:

если точки A_2, B_2 и C_2 лежат на сторонах BC, CA и AB остроугольного треугольника ABC, причем $\angle B_2A_2C = \angle C_2A_2B$,

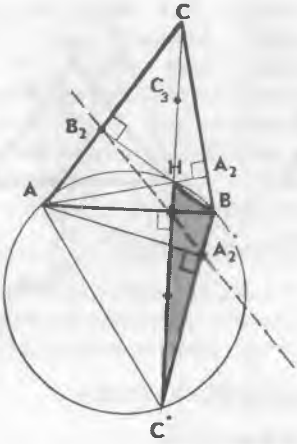


Рис. 127

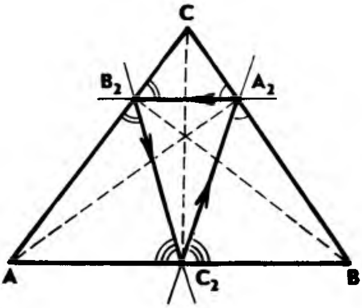


Рис. 128

$\angle A_2B_2C = \angle C_2B_2A$ и $\angle A_2C_2B = \angle B_2C_2A$, то точки A_2, B_2 и C_2 — основания высот треугольника ABC.

Для доказательства достаточно заметить, что точки A, B и C являются центрами вневписанных окружностей треугольника $A_2B_2C_2$ (пользуясь рисунком 128, проведите доказательство самостоятельно).

Треугольник $A_2B_2C_2$ обладает и другим замечательным свойством, сформулированным в следующей задаче:

Задача 5. На сторонах AB, BC и CA остроугольного треугольника ABC взяты точки L, M и N. Доказать, что периметр треугольника LMN будет наименьшим в том случае, когда точки L, M и N — основания высот треугольника ABC.

Решение. Пусть M — произвольная точка стороны BC (рис. 129, *а*). Выясним сначала, при каком расположении точек L и N периметр треугольника LMN будет наименьшим. Рассмотрим точки M_1 и M_2, симметричные точке M относительно прямых AC и AB. Поскольку $ML = M_2L$, $MN = M_1N$, то периметр треугольника LMN равен длине ломаной M_1NLM_2. Следовательно, наименьшее значение он принимает тогда, когда L и N — точки пересечения AB и AC с прямой M_1M_2 (рис. 129, *б*). В этом случае он равен M_1M_2.

Выясним теперь, при каком положении точки M величина M_1M_2 имеет наименьшее значение. Заметим, что в результате последовательного выполнения двух осевых симметрий с осями AC и AB точка M_1 переходит в M_2. Следовательно,

$$\angle M_1AM_2 = 2\angle A.$$

Кроме того,

$$AM_1 = AM_2 = AM.$$

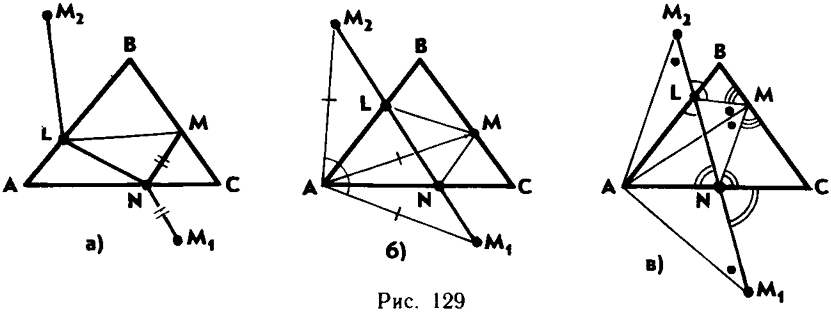


Рис. 129

Из равнобедренного треугольника M_1AM_2 находим

$$M_1M_2=2AM_1\sin\frac{2A}{2}=2AM\sin A.$$

Поскольку величина угла A задана, то M_1M_2 принимает наименьшее значение тогда, когда AM равно кратчайшему расстоянию от точки A до прямой BC, т. е. когда точка M является основанием высоты треугольника ABC.

Остается убедиться в том, что если точка M является основанием высоты, то точки L и N, построенные описанным способом, также будут основаниями высот треугольника ABC. Обратимся к рисунку 129, *в*. Поскольку $\angle BLM=\angle BLM_2$, то $\angle BLM=\angle ALN$. Аналогично $\angle CNM=\angle ANL$. Кроме того,

$$\angle AML=\angle AM_2L \text{ и } \angle AMN=\angle AM_1N.$$

Но $\angle AM_2L=\angle AM_1N$ (треугольник M_1AM_2 равнобедренный), а значит, $\angle AML=\angle AMN$. Учитывая, что AM — высота треугольника ABC, получаем $\angle BML=\angle CMN$. Тем самым, любые две стороны треугольника LMN составляют равные углы со стороной треугольника ABC, в которую они упираются. Следовательно, согласно сделанному выше замечанию, точки L, M и N — основания высот треугольника ABC. ■

Задача 6. Углы треугольника образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Доказать, что середины сторон и основания высот этого треугольника являются шестью вершинами правильного семиугольника.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, у которого $\angle B=2\angle A$, $\angle C=2\angle B$. Учитывая, что $\angle A+\angle B+\angle C=180°$, получаем

$$\angle A=\frac{180°}{7},\quad \angle B=2\cdot\frac{180°}{7},\quad \angle C=4\cdot\frac{180°}{7}.$$

Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Рассмотрим центральное подобие с центром H и коэффициентом 2 (рис. 130). Ранее мы установили, что при этом подобии окружность Эйлера треугольника ABC переходит в окружность, описанную около этого треугольника. Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон — и A_2, B_2, C_2 — основания высот данного треугольника — лежат на окружности Эйлера. Следовательно, они перейдут в точки A_5, B_5, C_5 и A_4, B_4, C_4 соответственно, лежащие на описанной окружности (во избежание путаницы мы сохраняем принятые в задаче 4 обозначения).

Отрезок B_1C_1 — средняя линия треугольника ABC, поэтому $B_1C_1=\frac{BC}{2}$. При рассматриваемом центральном подобии он переходит в отрезок B_5C_5 и, следовательно, $B_5C_5=2B_1C_1$. Из этих двух равенств следует, что хорды BC и B_5C_5 равны, а значит, равны и стягиваемые ими дуги:

$$\smile B_5C_5=\smile BC=2\angle A=\frac{360^\circ}{7}.$$

Диагонали четырехугольника A_5BHC точкой пересечения A_1 делятся пополам, поэтому этот четырехугольник — параллелограмм. Следовательно, прямые A_5B и C_4H параллельны, а углы A_5CC_4 и BA_5C, будучи накрест лежащими, равны. Значит, равны и те дуги, на которые они опираются. Таким образом, дуга A_5C_4 также равна $\frac{360^\circ}{7}$.

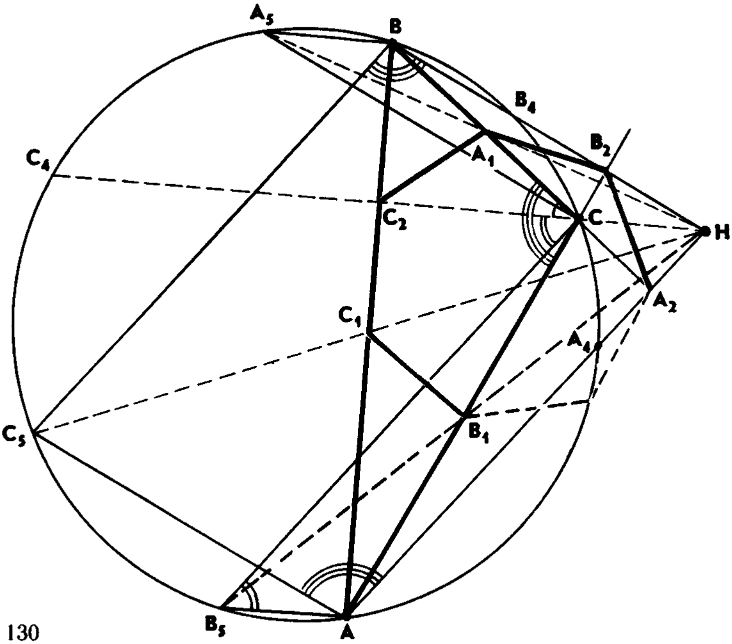


Рис. 130

По аналогичной причине параллелограммом является и четырехугольник AB_5CH. Следовательно, угол B_5CC_4 равен углу AB_5C, опирающемуся на дугу в $2\cdot\frac{360°}{7}$, а значит,

$$\smile B_5C_5C_4=2\cdot\frac{360°}{7}.$$

Но

$$\smile B_5C_5C_4=\smile B_5C_5+\smile C_5C_4 \text{ и } \smile B_5C_5=\frac{360°}{7},$$

поэтому

$$\smile C_5C_4=\frac{360°}{7}.$$

Осталось заметить, что четырехугольник AC_5BH также параллелограмм. Поэтому

$$\angle B_4BC_5=\angle A_4AC_5=180°-\angle AC_5B=\angle BCA$$

(так как четырехугольник AC_5BC вписанный).

Таким образом, мы получаем еще два равенства:

$$\smile B_4A_4C_5=4\cdot\frac{360°}{7} \text{ и } \smile A_4A_5C_5=4\cdot\frac{360°}{7}.$$

Из первого равенства следует, что

$$\smile B_4A_5C_5=3\cdot\frac{360°}{7}.$$

Учитывая, что

$$\smile A_5C_4C_5=2\cdot\frac{360°}{7},$$

получаем

$$\smile A_5B_4=\frac{360°}{7}.$$

Но тогда из второго равенства находим

$$\smile A_4B_4=4\cdot\frac{360°}{7}-3\cdot\frac{360°}{7}=\frac{360°}{7}.$$

Итак,

$$\smile B_5C_5=\smile C_5C_4=\smile C_4A_5=\smile A_5B_4=\smile B_4A_4=\frac{360°}{7}.$$

Это означает, что точки A_5, B_5, C_5, A_4, B_4, C_4, а значит, и точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 являются шестью вершинами правильного семиугольника. ■

З а м е ч а н и е. Решение этой задачи можно существенно сократить, если воспользоваться замечанием, сделанным в конце предыдущего пункта (подумайте, как это сделать).

Задачи

55. Найдите множество середин всех отрезков, один конец которых находится в данной точке, а другой — на данной окружности.

56. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках, симметричных данной точке относительно середин сторон данного четырехугольника с площадью S.

57. Выпуклый четырехугольник с площадью S разбит диагоналями на четыре треугольника. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки пересечения медиан указанных треугольников.

58. На сторонах прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C построены во внешнюю сторону квадраты ABB_1A_1, ACC_1A_2 и BCC_2B_2. Докажите, что:

а) прямые AB_2 и A_2B отсекают от катетов треугольника ABC равные отрезки;

б) прямые AB_2, A_2B и высота треугольника ABC, проведенная из вершины C, пересекаются в одной точке.

59. Докажите, что если стороны двух неравных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны, то эти треугольники центрально-подобны.

60. Точки C_1, A_1 и B_1 — середины сторон AB, BC и CA треугольника ABC, K_C, K_A и K_B — точки касания этих сторон и вписанной окружности, точки L_A, L_B и L_C симметричны K_A, K_B и K_C относительно биссектрис углов A, B и C. Докажите, что если треугольник ABC не является равнобедренным, то прямые A_1L_A, B_1L_B и C_1L_C пересекаются в одной точке.

61. На сторонах треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты с центрами O_A, O_B и O_C. Докажите, что:

а) отрезки AO_A и O_BO_C равны и перпендикулярны;

б) прямые AO_A, BO_B и CO_C пересекаются в одной точке.

62. Окружность касается боковых сторон AB и AC равнобедренного треугольника ABC в точках M и N, а также окружности, описанной около этого треугольника. Докажите, что середина отрезка MN является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

63. Докажите, что:

а) точки, симметричные точке описанной около треугольника окружности относительно его сторон, лежат на одной прямой, проходящей через ортоцентр этого треугольника;

б) прямые, симметричные произвольной прямой, проходящей через ортоцентр треугольника, относительно его сторон, пересекаются в одной точке, лежащей на описанной около этого треугольника окружности.

64. Точка O_1 симметрична центру O описанной около треугольника ABC окружности относительно стороны BC. Докажи-

те, что прямая Эйлера треугольника ABC проходит через середину отрезка AO_1.

65. Через вершину A треугольника ABC параллельно BC проведена прямая, пересекающая описанную окружность в точке M, AA_2 — высота этого треугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC лежит на отрезке MA_2 и делит его в отношении $2:1$, считая от точки M.

66. В треугольнике ABC проведены медиана AA_1 и высоты BB_2, CC_2. Докажите, что касательная к описанной около него окружности в точке A, касательная к его окружности Эйлера в точке A_1 и прямая B_2C_2 параллельны друг другу.

67. В треугольнике ABC точка A_1 — середина стороны BC, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, A_3 — середина отрезка AH. Докажите, что:

а) четырехугольник AOA_1A_3 — параллелограмм;

б) четырехугольник A_3OA_1H — параллелограмм.

68. Высота AA_2 треугольника ABC продолжена до пересечения с описанной окружностью. Докажите, что длина полученной хорды в четыре раза больше расстояния от центра окружности Эйлера до стороны BC.

69. В треугольнике ABC отрезок BB_2 — высота, H — ортоцентр, A_3 — середина отрезка AH. Найдите A_3B_2, если известно, что $BC=a$, а радиус описанной окружности равен R.

70. В треугольнике ABC точки A_1 и C_1 — середины сторон BC и AB, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, B_3 — середина отрезка BH. Докажите, что четырехугольник $A_1B_3C_1O$ — параллелограмм.

71. На окружности, описанной около данного треугольника, взята произвольная точка. Докажите, что прямая Симсона, соответствующая этой точке, пересекает прямую, соединяющую ее с ортоцентром данного треугольника, в точке, лежащей на окружности Эйлера этого треугольника.

72. В треугольнике ABC отрезок AA_2 — высота, H — ортоцентр, M — произвольная точка описанной окружности. Докажите, что прямая MH пересекает окружность, описанную около треугольника AA_2M, в точке N, лежащей на окружности Эйлера треугольника ABC.

73. Отрезки AA_2, BB_2 и CC_2 — высоты треугольника ABC, H — ортоцентр. Докажите, что

$$AH\cdot HA_2=BH\cdot HB_2=CH\cdot HC_2.$$

74. Докажите, что если O — точка Ферма остроугольного треугольника ABC, то прямые Эйлера треугольников ABO, BCO и CAO пересекаются в точке пересечения медиан треугольника ABC.

75. На прямой Эйлера треугольника ABC взята такая точка M, что центр O описанной окружности является серединой отрезка

HM (H — ортоцентр). Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABM лежит на прямой CO и удалена от точки C на расстояние, равное $\frac{4}{3}$ радиуса описанной окружности.

Задачи на построение

76. Даны угол ABC и точка M внутри его. На стороне BC постройте точку, равноудаленную от прямой AB и точки M.

77. На сторонах AB и BC данного треугольника ABC постройте соответственно точки D и E так, чтобы $AD=DE=EC$.

78. Постройте треугольник ABC по заданным суммам сторон $AC+BC$, $AB+AC$ и углу B.

79. Постройте окружность, которая касалась бы двух данных прямых и данной окружности.

80. Дан треугольник ABC. Постройте две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

81. Решите задачу 41 с применением центрального подобия.

§ 3. Инверсия

49. Определение инверсии. В этом параграфе мы рассмотрим еще одно геометрическое преобразование, называемое *инверсией*. Начнем с определения.

Инверсией относительно окружности с центром O радиуса R называется отображение плоскости (без точки O) на себя, при котором каждой точке M, отличной от O, сопоставляется такая точка M_1 луча OM, что $OM_1 \cdot OM = R^2$; точке O не сопоставляется никакая точка (рис. 131). *Точка O называется центром инверсии, а величина R — ее радиусом.*

Из этого определения следует, что $OM_1 = \frac{R^2}{OM}$. Поэтому если точка M лежит внутри круга с центром O радиуса R, т. е. $OM < R$, то $OM_1 > R$, а значит, она переходит в точку M_1, лежащую вне круга. Если же точка M лежит вне указанного круга, то

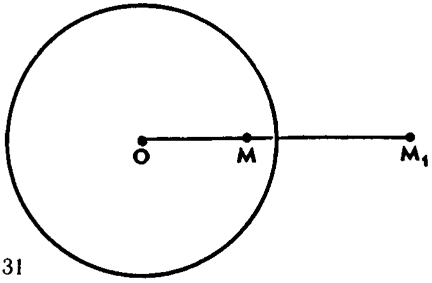


Рис. 131

она переходит внутрь его. Наконец, если точка M лежит на границе этого круга, то она переходит в себя.

Таким образом,

множество всех точек, остающихся неподвижными при инверсии относительно данной окружности, представляет собой саму эту окружность.

Сделаем еще одно полезное наблюдение. Из определения инверсии видно, что если точка M переходит в M_1, то точка M_1 переходит в M (объясните почему). Поэтому

если при инверсии фигура F переходит в фигуру F_1, то фигура F_1 переходит в фигуру F.

Как отмечалось выше, если точки M и M_1 не совпадают, то одна из них лежит вне, а другая внутри круга с центром O радиуса R. Пусть, например, точка M лежит вне круга. Проведем касательную MK (рис. 132) и рассмотрим треугольники OKM_1 и OKM. Угол O у этих треугольников общий. Кроме того,

$$OM_1 \cdot OM = OK^2, \text{ или } \frac{OM_1}{OK} = \frac{OK}{OM}.$$

Следовательно, они подобны по второму признаку подобия треугольников. Но в треугольнике OKM угол K прямой. Значит, в треугольнике OKM_1 угол M_1 прямой. Таким образом, прямая M_1K является полярой точки M (п. 15). Иными словами,

точка M_1 является точкой пересечения прямой OM и поляры точки M.

Последнее утверждение можно сформулировать и иначе. Пусть A и B — точки пересечения прямой OM с нашей окружностью. Вспоминая свойства поляры, мы можем сказать, что

точки A и B гармонически разделяют точки M_1 и M.

Поскольку положение каждой точки гармонической четверки однозначно определяется заданием трех других точек, то это свойство можно было бы принять за определение инверсии.

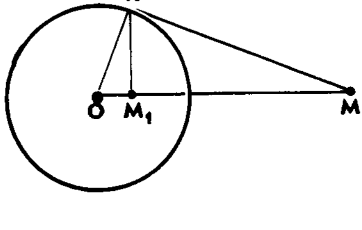


Рис. 132

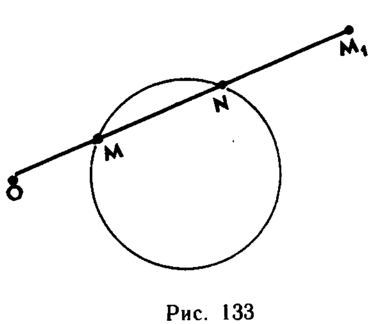


Рис. 133

При решении задач с использованием инверсии часто оказывается полезной формула, связывающая расстояние между двумя точками с расстоянием между теми точками, в которые они переходят при инверсии. Выведем эту формулу. Пусть M и N — данные точки, M_1 и N_1 — те точки, в которые они переходят при инверсии относительно окружности с центром O радиуса R. Векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM}$ коллинеарны, поэтому существует такое число k, что $\overrightarrow{OM_1}=k\cdot\overrightarrow{OM}$. Умножив это равенство скалярно на вектор $\overrightarrow{OM}$, получим

$$\overrightarrow{OM_1}\cdot\overrightarrow{OM}=k\cdot|\overrightarrow{OM}|^2, \text{ или } R^2=k\cdot OM^2,$$

откуда $k=\left(\frac{R}{OM}\right)^2$, и, следовательно,

$$\overrightarrow{OM_1}=\left(\frac{R}{OM}\right)^2\cdot\overrightarrow{OM}.$$

Аналогично находим

$$\overrightarrow{ON_1}=\left(\frac{R}{ON}\right)^2\cdot\overrightarrow{ON}.$$

Далее,

$$M_1N_1^2=|\overrightarrow{M_1N_1}|^2=|\overrightarrow{ON_1}-\overrightarrow{OM_1}|^2.$$

Подставив в это равенство найденные выражения для $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{ON_1}$, получим после несложных преобразований:

$$M_1N_1^2=\frac{(R^2\cdot MN)^2}{(OM\cdot ON)^2},$$

или

$$M_1N_1=\frac{R^2\cdot MN}{OM\cdot ON}. \qquad (1)$$

50. Основные свойства инверсии. Рассмотрим инверсию относительно окружности с центром O радиуса R. Выясним, во что при этой инверсии переходит произвольная окружность. Возможны два случая:

1^0. Окружность не проходит через центр инверсии.

2^0. Окружность проходит через центр инверсии.

Рассмотрим эти случаи отдельно.

1^0. Пусть M_1 — точка, в которую переходит произвольная точка M данной окружности (рис. 133). Тогда $OM_1\cdot OM=R^2$. Проведем прямую OM и обозначим буквой N вторую точку пересечения этой прямой с данной окружностью (если OM — касательная, то точки M и N совпадают). Поскольку векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{ON}$ коллинеарны, то существует такое число k, что $\overrightarrow{OM_1}=k\cdot\overrightarrow{ON}$. Умножая это равенство скалярно на вектор $\overrightarrow{OM}$, получаем:

$$\overrightarrow{OM_1}\cdot\overrightarrow{OM}=k\cdot\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}, \text{ или } R^2=k\cdot\sigma,$$

где $\sigma=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ — степень точки O относительно данной окружности (см. «ДГ-8», п. 49).

Итак,

$$\overrightarrow{OM_1}=k\cdot\overrightarrow{ON}, \text{ где } k=\frac{R^2}{\sigma}.$$

Это означает, что M_1 — та точка, в которую переходит точка N при центральном подобии с центром O и коэффициентом $\frac{R^2}{\sigma}$. Следовательно, при рассматриваемой инверсии каждая точка M данной окружности переходит в точку M_1 окружности, получаемой из данной центральным подобием с центром O и коэффициентом $\frac{R^2}{\sigma}$. Аналогично доказывается, что в любую точку этой окружности переходит какая-то точка данной окружности.

Таким образом,

если данная окружность не проходит через центр O инверсии, то она переходит в окружность, получаемую из данной центральным подобием с центром O и коэффициентом $\frac{R^2}{\sigma}$, где σ — степень точки O относительно данной окружности.

В частности,

если данная окружность ортогональна к окружности с центром O радиуса R, т. е. к той окружности, относительно которой делается инверсия, то она переходит в себя

(объясните почему).

2^0. Пусть OA — диаметр данной окружности, M — произвольная ее точка (отличная от A и O), A_1 и M_1 — точки, в которые переходят A и M при рассматриваемой инверсии (рис. 134). Треугольники OMA и OM_1A_1 имеют общий угол O. Кроме того,

$$OA_1\cdot OA=OM_1\cdot OM, \text{ или } \frac{OM}{OA}=\frac{OA_1}{OM_1}.$$

Поэтому эти треугольники подобны. Но угол OMA прямой. Следовательно, угол OA_1M_1 также прямой. Это означает, что каждая точка M данной окружности переходит в точку M_1 пря-

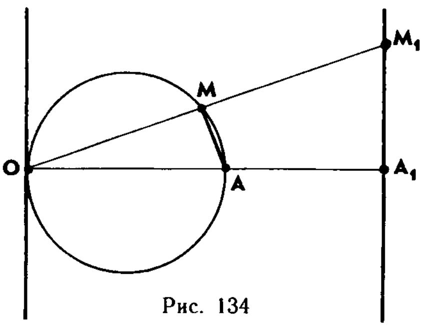


Рис. 134

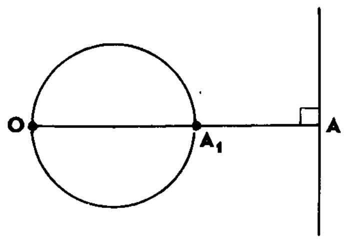


Рис. 135

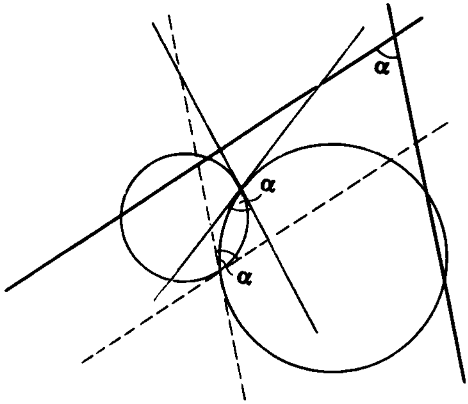


Рис. 136

мой, перпендикулярной к диаметру OA, или, что то же самое, параллельной касательной к данной окружности в точке O. Аналогично доказывается, что в каждую точку этой прямой переходит какая-то точка данной окружности. Тем самым

если окружность проходит через центр O инверсии, то она переходит в прямую, параллельную касательной к этой окружности в точке O.

Теперь нетрудно ответить и на такой вопрос: во что при рассматриваемой инверсии переходит прямая? Непосредственно из определения инверсии следует, что

если прямая проходит через центр инверсии, то она переходит в себя.

Если же она не проходит через центр O инверсии, то можно рассуждать так. Проведем к ней перпендикуляр OA и отметим на луче OA точку A_1, в которую переходит точка A (рис. 135). Как мы установили, при рассматриваемой инверсии окружность с диаметром OA_1 переходит в нашу прямую. Следовательно, наша прямая переходит в эту окружность. Итак,

если прямая не проходит через центр O инверсии, то она переходит в окружность, касательная к которой в точке O параллельна этой прямой.

Полученные нами результаты можно коротко сформулировать так:

при инверсии любая прямая (окружность) переходит в прямую или окружность.

Это — первое основное свойство инверсии.

Рассмотрим две пересекающиеся прямые, угол между которыми равен α (рис. 136). Если центр O инверсии не лежит ни на

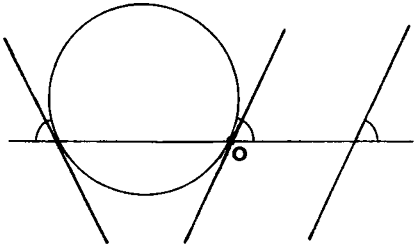


Рис. 137

одной из них, то они переходят в две пересекающиеся окружности, проходящие через точку O (объясните почему). Поскольку касательная к каждой окружности в точке O параллельна той прямой, которая перешла в эту окружность, то угол между касательными к окружностям в точке O равен α. Ясно, что таким же будет и угол между касательными к окружностям во второй точке их пересечения. Поэтому если договориться называть *углом между пересекающимися окружностями* угол между их касательными в точке пересечения, то можно сказать так: если каждая из двух пересекающихся прямых при инверсии переходит в окружность, то угол между этими окружностями равен углу между прямыми. Пользуясь рисунком 137, сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для случая, когда точка O лежит на одной из прямых или является точкой их пересечения.

Далее, рассмотрим прямую и окружность, касающиеся друг друга. Естественно считать, что угол между ними в этом случае равен 0^0. Если центр O инверсии не совпадает с точкой их касания, то они перейдут в две окружности или в прямую и окружность, имеющие единственную общую точку (ту, в которую перейдет точка касания), т. е. касающиеся друг друга. Если же точка O совпадает с точкой касания, то они перейдут в две параллельные прямые, угол между которыми также естественно считать равным 0^0. Таким образом, и в том и в другом случае угол между прямой и окружностью оказывается равным углу между теми прямыми или окружностями, в которые они переходят.

Рассмотрим теперь две окружности, пересекающиеся под некоторым углом α. Это означает, что касательные к ним в точке пересечения пересекаются под углом α. Как мы выяснили, при инверсии эти касательные перейдут в прямые или окружности, пересекающиеся под тем же углом α. С другой стороны, они будут касаться тех прямых или окружностей, в которые перейдут наши две окружности. Следовательно, наши окружности перейдут в две прямые или окружности, пересекающиеся под тем же углом α. Аналогично доказывается, что если прямая и окружность пересекаются под некоторым углом α, то те прямые или окружности, в которые они переходят при инверсии, пересекаются под тем же углом α.

Подводя итог наших исследований, можно сказать, что

при инверсии сохраняются углы между прямыми и окружностями.

Это — второе основное свойство инверсии.

Обратим особое внимание на то, что *инверсия*, подобно осевой симметрии, *сохраняет углы, но меняет их ориентацию* (см. рис. 136—137).

51. Примеры использования инверсии. Чтобы сразу оценить, насколько большие дополнительные возможности дает применение инверсии, приведем решения трех хорошо известных нам задач («ДГ-8», гл. 4) с использованием инверсии.

Задача 1. Доказать, что около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда произведение его диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея и ей обратная).

Решение. Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник, AC — та из его диагоналей, которая разделяет его на два треугольника (рис. 138). Рассмотрим инверсию с центром A произвольного радиуса R. Если точки A, B, C и D лежат на одной окружности, то точки B_1, C_1 и D_1, в которые переходят при этой инверсии B, C и D, лежат на одной прямой, причем $B_1D_1=B_1C_1+C_1D_1$.

Обратно, если выполнено равенство $B_1D_1=B_1C_1+C_1D_1$, то точки B_1, C_1 и D_1 лежат на одной прямой, откуда следует, что точки B, C и D лежат на окружности, проходящей через центр инверсии A.

Таким образом, около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$B_1D_1=B_1C_1+C_1D_1.$$

Используя формулу (1), это равенство можно записать так:

$$\frac{R^2\cdot BD}{AB\cdot AD}=\frac{R^2\cdot BC}{AB\cdot AC}+\frac{R^2\cdot CD}{AC\cdot AD}.$$

Это равенство, в свою очередь, равносильно равенству

$$AC\cdot BD=AD\cdot BC+AB\cdot CD,$$

что и доказывает утверждение задачи. ■

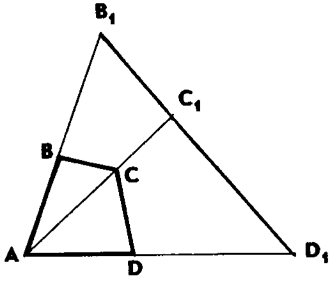


Рис. 138

Задача 2. Доказать, что в произвольном неравностороннем треугольнике радиусы r и R вписанной и описанной окружностей связаны с расстоянием d между их центрами формулой Эйлера: $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности и сторон треугольника, O — центр вписанной окружности (рис. 139). Рассмотрим инверсию относительно вписанной окружности. Поскольку прямая B_1C_1 — поляра точки A, то при этой инверсии вершина A перейдет в середину отрезка B_1C_1. По аналогичной причине вершина B перейдет в середину A_1C_1, а вершина C — в середину A_1B_1. Следовательно, окружность, описанная около треугольника ABC, перейдет в окружность Эйлера треугольника $A_1B_1C_1$, радиус которой равен $\frac{r}{2}$. Как отмечалось в предыдущем пункте, эта окружность может быть получена из описанной окружности центральным подобием с центром O и коэффициентом $\frac{r^2}{\sigma}$, где σ — степень точки O относительно описанной окружности. Но

$$\sigma = R^2 - d^2$$

(объясните почему), поэтому радиус указанной окружности Эйлера равен

$$\frac{r^2 \cdot R}{R^2 - d^2}.$$

Приравнивая два выражения для радиуса:

$$\frac{r}{2} = \frac{r^2 \cdot R}{R^2 - d^2},$$

получим формулу Эйлера. ■

Задача 3. Доказать, что множество всех таких точек, для которых отношение расстояний до двух данных точек постоянно и отлично от единицы, представляет собой окружность (окружность Аполлония), ортогональную ко всем окружностям, проходящим через эти две точки.

Решение. Пусть A и B — данные точки, $k \neq 1$ — некоторое положительное число, M — произвольная точка рассматриваемого множества, т. е. $\frac{BM}{AM} = k$ (рис. 140). При инверсии относительно окружности с центром A радиуса AB точка B останется неподвижной, а точка M перейдет в точку M_1 такую, что согласно формуле (1)

$$BM_1 = \frac{AB^2 \cdot BM}{AM \cdot AB} = k \cdot AB.$$

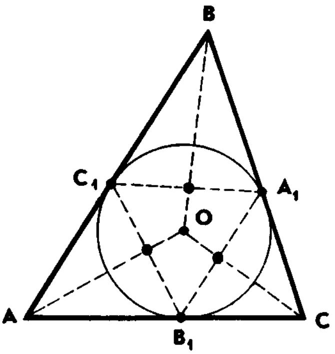


Рис. 139

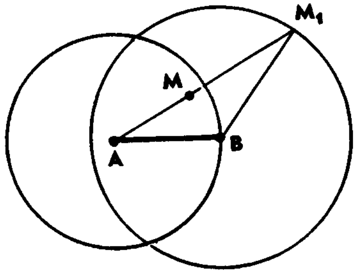


Рис. 140

Таким образом, точка M_1 лежит на окружности с центром B радиуса $k \cdot AB$. С другой стороны, любая точка N этой окружности переходит в такую точку N_1, что

$$BN_1 = \frac{AB^2 \cdot k \cdot AB}{AB \cdot AN} = k \cdot \frac{AB^2}{AN} = k \cdot AN_1,$$

т. е. в точку рассматриваемого множества. Следовательно, окружность с центром B радиуса $k \cdot AB$ и наше множество точек переходят при указанной инверсии друг в друга. При $k \neq 1$ эта окружность не проходит через центр инверсии, поэтому наше множество точек — окружность. Осталось заметить, что все прямые, проходящие через точку B, ортогональны к окружности с центром B, а при рассматриваемой инверсии они (за исключением прямой AB) переходят в окружности, проходящие через A и B. Значит, наша окружность ортогональна ко всем этим окружностям. ■

52. Теорема Фейербаха. В середине XIX века немецкий математик К. Фейербах, преподаватель гимназии в Эрлангене, обнаружил настолько замечательное свойство окружности Эйлера, что даже саму эту окружность многие математики стали называть окружностью Фейербаха. Доказанная им теорема звучит так:

Теорема. ***Окружность Эйлера касается вписанной и всех трех вневписанных окружностей.***

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC K_1 и K_2 — точки касания вписанной и вневписанной окружностей стороны BC (рис. 141). Докажем, что окружность Эйлера касается этих двух окружностей (для двух других вневписанных окружностей доказательство аналогичное).

Рассмотрим инверсию относительно окружности с диаметром K_1K_2. Поскольку точки K_1 и K_2 симметричны относительно середины A_1 стороны BC («ДГ-8», п. 61), то центром этой окружности является точка A_1. Вписанная и вневписанная окружности орто-

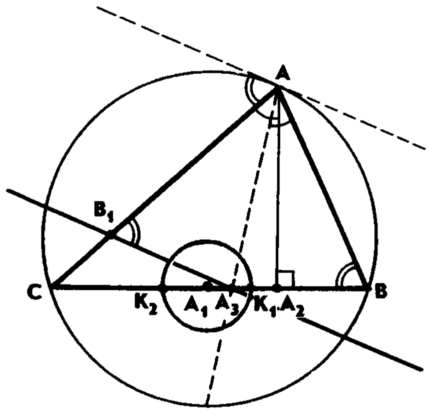


Рис. 141

гональны к ней, поэтому при указанной инверсии каждая из них перейдет в себя.

Далее, пусть AA_2 — высота, AA_3 — биссектриса треугольника ABC. Точки K_1 и K_2 гармонически разделяют точки A_2 и A_3 (см. задачу 2, п. 14), поэтому при рассматриваемой инверсии точка A_2 перейдет в A_3. Поскольку окружность Эйлера проходит через центр инверсии A_1 и точку A_2, то она перейдет в прямую, проходящую через точку A_3 и параллельную касательной к окружности Эйлера в точке A_1. С другой стороны, как мы знаем (п. 47), при центральном подобии с центром в точке пересечения медиан и коэффициентом $-\frac{1}{2}$ вершина A переходит в точку A_1, а окружность, описанная около треугольника ABC,— в окружность Эйлера. Из этого следует, что касательная к окружности Эйлера в точке A_1 параллельна касательной к описанной окружности в точке A. Тем самым можно сказать, что при рассматриваемой инверсии окружность Эйлера перейдет в прямую, проходящую через точку A_3 и параллельную касательной к описанной окружности в точке A.

В треугольнике ABC хотя бы один из углов B, C острый. Для определенности будем считать острым углом B. Касательная к описанной окружности в точке A составляет с прямой AC угол, равный половине дуги AC, т. е. угол, равный B. Поэтому если B_1 — точка пересечения прямой AC с той прямой, в которую переходит окружность Эйлера, то угол AB_1A_3 также равен углу B. С учетом того, что AA_3 — биссектриса угла A, это означает, что треугольники AA_3B и AA_3B_1 равны и, более того, симметричны относительно прямой AA_3.

Рассмотрим теперь симметрию относительно прямой AA_3. Поскольку центры вписанной и вневписанной окружностей лежат на этой прямой, то каждая из них перейдет в себя. Треугольник AA_3B перейдет в треугольник AA_3B_1, а значит, прямая BC — в прямую A_3B_1, т. е. в ту прямую, в которую переходит окружность Эйлера при инверсии. Но прямая BC — общая касательная вписанной и вневписанной окружностей. Значит, прямая A_3B_1 также их общая касательная.

Итак, при инверсии относительно окружности с диаметром K_1K_2 вписанная и вневписанная окружности переходят в себя, а окружность Эйлера — в их общую касательную. Из этого следует, что окружность Эйлера касается обеих этих окружностей. ■

Замечание. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. В ходе решения задачи 4 в п. 48 мы установили, что треугольники ABC, ABH, AHC и HBC имеют общую окружность Эйлера. Каждый из этих треугольников имеет свою вписанную и три вневписанные окружности, и все они согласно теореме Фейербаха касаются окружности Эйлера. Таким образом, окружность Эйлера треугольника ABC касается 16 различных окружностей, связанных с этим треугольником!

53*. Задача Аполлония. Инверсия широко применяется при решении задач на построение. В частности, используя инверсию, удается сравнительно просто решить одну из древнейших задач геометрии — *задачу Аполлония.* Она состоит в следующем.

Задача 4. Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей.

Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры данных окружностей, r_1, r_2, r_3 — их радиусы. Как мы помним, для двух окружностей возможны пять случаев взаимного расположения. Посидев полчаса с бумагой и ручкой, вы поймете, что для трех окружностей возможны более 50 случаев взаимного расположения! Однако рассматривать все эти случаи отдельно необязательно. Использование инверсии позволяет указать общий для всех случаев метод решения задачи. Правда, для описания этого метода нам все же придется выделить несколько частных случаев.

Рассмотрим сначала случай, когда первая и вторая окружности касаются друг друга (изнутри или извне — безразлично). При инверсии с центром в точке их касания произвольного радиуса эти окружности перейдут в параллельные прямые, а третья окружность — в какую-то окружность или прямую (рис. 142). Построить окружность, касающуюся двух параллельных прямых и либо окружности, либо прямой, легко (объясните, как это сделать). С другой стороны, нетрудно построить и ту окружность, в которую переходит построенная при рассматриваемой инверсии. Для этого достаточно построить точки, в которые переходят какие-нибудь три точки этой окружности (как это сделать, легко понять, если внимательно приглядеться к рисунку 132), а затем провести через них окружность — она и будет искомой.

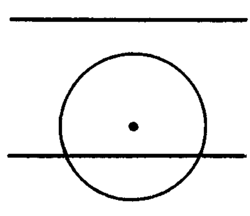


Рис. 142

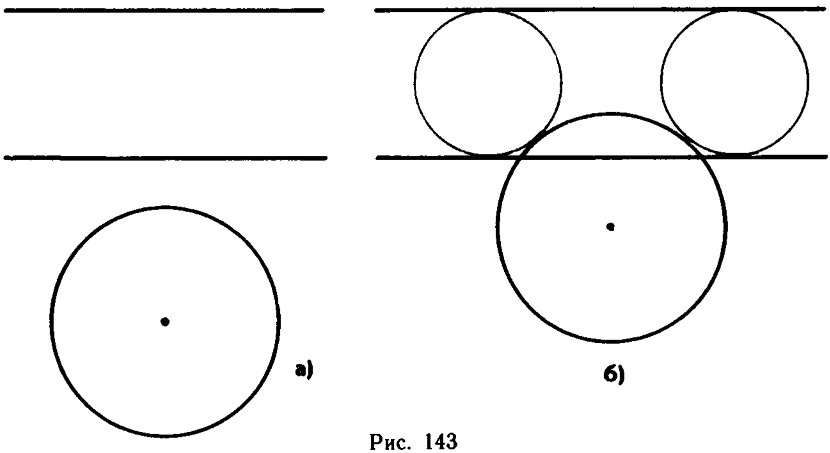


Рис. 143

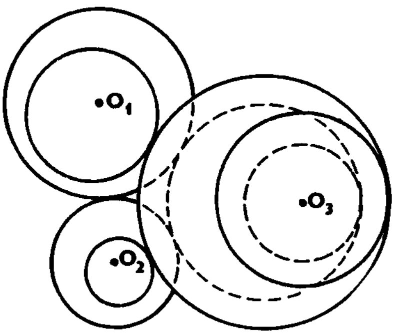


Рис. 144

Отметим, что даже в рассмотренном случае решение задачи существует не всегда (рис. 143, *а*). Если же оно существует, то может быть не единственным (рис. 143, *б*).

Любой другой частный случай сводится к описанному. Пусть, например, каждая из окружностей находится вне других (рис. 144) и требуется построить окружность, касающуюся первой и второй извне, а третьей изнутри. Рассмотрим окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами

$$r_1+\frac{O_1O_2-r_1-r_2}{2} \text{ и } r_2+\frac{O_1O_2-r_1-r_2}{2}.$$

Эти окружности, очевидно, касаются друг друга. Вместо третьей окружности рассмотрим окружность с тем же центром O_3, но радиусом $r_3-\frac{O_1O_2-r_1-r_2}{2}$ (что делать в случае, когда эта величина окажется нулевой или отрицательной, мы скажем чуть позже). Окружность, касающуюся трех новых окружностей, мы уже умеем строить. Искомая же окружность отличается от нее только радиусом — он больше на величину $\frac{O_1O_2-r_1-r_2}{2}$, поэтому и ее можно построить (объясните как).

Теперь уже ясно, что если первая и вторая окружности пересекаются, то их радиусы нужно уменьшить на соответствующую величину (так, чтобы новые окружности касались друг друга).

Если при построениях какой-то из радиусов станет нулевым, то вместо окружности нужно рассматривать ее центр (окружность нулевого радиуса). Если же он станет отрицательным, то в качестве радиуса следует взять модуль полученной величины, но изменить тип касания: извне на изнутри и наоборот. ■

В заключение отметим, что все наши рассуждения останутся в силе и в том случае, когда какая-нибудь из окружностей является точкой (окружностью нулевого радиуса) или прямой (окружностью бесконечно большого радиуса). Таким образом, теперь мы умеем решать следующие задачи: построить прямую или окружность, касающуюся

1^0) трех данных окружностей;

2^0) двух данных окружностей и проходящую через данную точку;

3^0) данной окружности и проходящую через две данные точки;

4^0) данной прямой и двух данных окружностей;

5^0) двух данных прямых и данной окружности;

6^0) данной окружности, данной прямой и проходящую через данную точку;

7^0) двух данных прямых и проходящую через данную точку;

8^0) данной прямой и проходящую через две данные точки.

54*. Снова о геометрии Лобачевского. Напомним, что к открытию новой геометрии Н. И. Лобачевский пришел, пытаясь доказать V постулат Евклида от противного. Он предположил, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную прямую. В надежде получить противоречие он вывел из этого предположения целый ряд логических следствий, некоторые из которых упоминались выше («ДГ-8», п. 31). В своих исследованиях Н. И. Лобачевский уходил все глубже и глубже. Построенная им система теорем по степени развитости уже мало отличалась от системы теорем евклидовой геометрии. В частности, им были выведены формулы длины окружности, площади круга, соотношения между сторонами и углами треугольников, аналогичные теоремам синусов и косинусов, формула, связывающая сумму углов треугольника с его площадью (не имеющая аналога в евклидовой геометрии, где сумма углов треугольника равна 180° независимо от его площади). Но противоречия так и не обнаруживалось. Это, конечно, не означало, что противоречия вообще нет — оно могло появиться при дальнейшем развитии этой теории. Иными словами, вопрос о непротиворечивости построенной Н. И. Лобачевским геометрии оставался открытым.

В отсутствии каких-либо противоречий в новой геометрической системе Н. И. Лобачевского окончательно убедило сделанное им наблюдение, связанное с так называемой *сферической геометрией*. Начало сферической геометрии было положено, по-видимому, еще в IV в. до н. э. древнегреческим ученым Евдоксом, а систематическое изложение этой науки, принадлежащее

Менелаю Александрийскому, относится к I в. н. э В сферической геометрии роль плоскости играет сфера, а роль прямых — большие окружности этой сферы, т. е. окружности, радиус которых равен радиусу сферы (на глобусе большими окружностями являются, например, меридианы и экватор). Геометрически большие окружности характеризуются тем, что из всех линий, лежащих на сфере и проходящих через две данные точки, кратчайшей является дуга большой окружности. В сферической геометрии можно рассматривать треугольники (фигуры, состоящие из трех точек, не лежащих на одной большой окружности, и соединяющих их трех дуг больших окружностей), многоугольники, окружности, можно вывести формулы длины окружности, площади круга, соотношения между сторонами и углами треугольников, аналогичные теоремам синусов и косинусов, формулу, связывающую сумму углов треугольника с его площадью (в сферической геометрии сумма углов треугольника всегда больше 180°). Во все формулы будет входить, очевидно, радиус данной сферы.

Н. И. Лобачевский заметил, что если в указанных формулах заменить радиус сферы на мнимое число, т. е. квадратный корень из отрицательного числа, то они превратятся в формулы построенной им геометрии. Конечно, в природе нет ничего похожего на сферу мнимого радиуса. Но важно другое. Из этого наблюдения можно сделать вывод о том, что если бы в формулах геометрии Лобачевского содержалось какое-нибудь противоречие, то точно такое же противоречие содержалось бы в формулах сферической геометрии. Это, в свою очередь, означало бы наличие противоречий в евклидовой геометрии, поскольку сферическая геометрия выводится из евклидовой. Но непротиворечивость евклидовой геометрии не вызывала сомнений. Поэтому непротиворечивой следовало признать и геометрию Лобачевского.

Рассуждения Н. И. Лобачевского не показались его современникам убедительными ввиду, главным образом, их чрезмерной по тем временам абстрактности. Чтобы убедить математиков в непротиворечивости новой геометрии, нужно было найти какой-нибудь более наглядный, чем сфера мнимого радиуса, объект, на котором выполнялись бы аксиомы геометрии Лобачевского. Впервые такой объект был найден итальянским математиком Э. Бельтрами. В основе его рассуждений лежало понятие *внутренней геометрии поверхности,* введенное ранее выдающимся немецким математиком К. Ф. Гауссом. В этой геометрии роль плоскости играет произвольная поверхность, а роль прямых — кратчайшие линии на этой поверхности (каждая такая линия характеризуется тем, что любая не слишком большая ее дуга является кратчайшей среди всевозможных дуг, лежащих на поверхности и соединяющих две данные точки этой поверхности). В частности, внутренняя геометрия сферы — это сферическая геометрия. Э. Бельтрами интересовал вопрос: нет ли в евклидовом пространстве поверхности, внутренняя геометрия которой

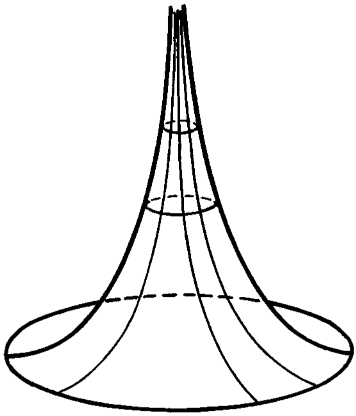


Рис. 145

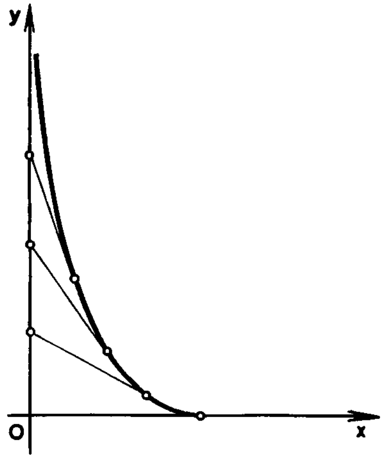


Рис. 146

совпадала бы с геометрией Лобачевского? В 1868 г., спустя 42 года после сообщения Н. И. Лобачевского об открытии новой геометрии, Э. Бельтрами обнаружил, что такими поверхностями являются так называемые *поверхности постоянной отрицательной кривизны,* изучавшиеся ранее немецким математиком Ф. Миндингом.

Пример поверхности постоянной отрицательной кривизны приведен на рисунке 145. Эта поверхность, называемая *псевдосферой,* может быть получена так. Допустим, что на плоскости задана система координат Oxy. Представим себе человека, который движется из точки O вдоль оси Oy и тянет на веревке упирающегося осла. Кривая, по которой при этом движется осел, называется *трактрисой* (от латинского слова *trahere,* что означает «тянуть, увлекать»). Геометрически она характеризуется тем, что отрезок касательной к ней, заключенный между точкой касания и осью Oy, сохраняет постоянную длину (рис. 146). Если вращать трактрису вокруг оси Oy, то получится псевдосфера.

Нетрудно видеть, что псевдосфера имеет ребро, за которое она не продолжается. Это означает, что на псевдосфере реализуется геометрия не всей плоскости Лобачевского, а лишь некоторой ее части. В самом деле, если кратчайшая линия упирается в ребро, то за ребро она не может быть продолжена, в то время как на плоскости Лобачевского любой отрезок может быть продолжен в обе стороны неограниченно. Исследуя известные к этому времени поверхности постоянной отрицательной кривизны, Э. Бельтрами установил, что все они имеют острия или ребра, за которые продолжены быть не могут. Его попытки найти такую поверхность, на которой реализовывалась бы геометрия всей плоскости Лобачевского, оказались безуспешными. Более того, в 1901 г. великий немецкий математик Д. Гильберт доказал, что такой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве нет. Таким образом, путь, избранный Э. Бельтрами, не привел его к полному решению вопроса о непротиворечивости геометрии Лобачевского. Но, несмотря на это, его работы имели огромное мировоззренческое значение. Поверхности отрицательной кривизны были существенно более наглядными объектами, чем сфера мнимого радиуса. Психологический барьер был преодолен, и теперь уже никто из математиков не сомневался в истинности геометрии Лобачевского.

Работы Э. Бельтрами интересны и в другом отношении. Во второй половине XX в. выяснилось, что некоторые свойства поверхностей постоянной отрицательной кривизны описываются уравнениями, широко используемыми в ряде разделов современной теоретической физики, химии, биологии. Тем самым и геометрия Лобачевского оказалась непосредственно связанной с целым рядом проблем современного естествознания.

Спустя три года, в 1871 г., немецкий математик Ф. Клейн, опираясь на работы англичанина А. Кэли, полностью решил вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского. Он, как говорят, построил *модель* этой геометрии, т. е. указал такую совокупность объектов, для которой выполняются все аксиомы геометрии Лобачевского. Эту модель принято называть теперь *моделью Кэли — Клейна.* В ней плоскость Лобачевского представляет собой внутренность круга, а расстояния между точками измеряются таким образом, что граница этого круга, называемая *абсолютом,* недостижима — она находится на бесконечно большом расстоянии от любой внутренней точки круга (точные формулы для вычисления расстояния между двумя точками мы здесь не приводим, поскольку они достаточно сложные). Прямой в модели Кэли — Клейна считается любая хорда абсолюта (концы этой хорды не являются точками плоскости Лобачевского, так как они бесконечно удалены). Движением (отображением плоскости Лобачевского на себя, сохраняющим расстояния между точками) является любое отображение рассматриваемого круга на себя, при котором каждая точка абсолюта переходит в некоторую точку абсолюта, а каждая «прямая» — в некоторую «прямую». Ясно, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести бесконечно много прямых, не имеющих с данной ни одной общей точки (рис. 147). Можно доказать также, что все остальные аксиомы, общие для геометрии Евклида и Лобачевского, в этой модели выполнены. Отметим, что аналогичную модель можно построить и для стереометрии Лобачевского. Для этого в качестве абсолюта следует взять сферу, а в качестве прямых — хорды этой сферы.

Примечательно, что из рассмотрения модели Кэли — Клейна можно сделать вывод о связи геометрии Лобачевского со специальной теорией относительности, созданной в 1905 г. выдающим-

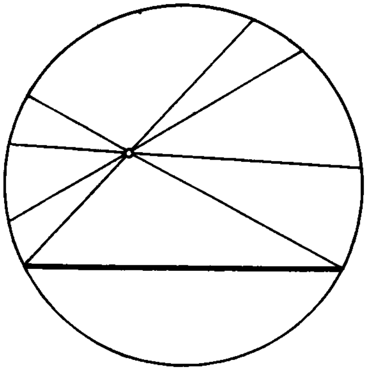


Рис. 147

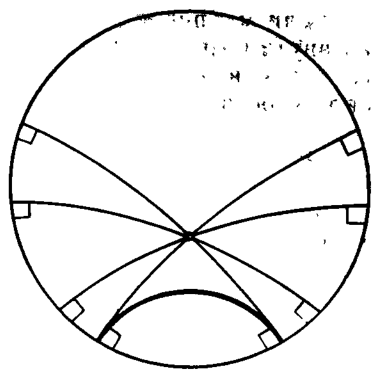


Рис. 148

ся физиком А. Эйнштейном. Основным постулатом этой теории является экспериментально установленный факт: скорость света в пустоте не зависит от того, в какой системе отсчета ее измеряют. Из этого постулата следует, что законы классической механики верны лишь приближенно. Они могут сильно нарушаться в том случае, когда скорости тел очень велики. Формулы, верные при любых скоростях, и составляют основу специальной теории относительности. В классической механике обычно рассматривают пространственные координаты и время события в отдельности. В специальной теории относительности удобнее рассматривать эти величины в совокупности, опираясь на понятие четырехмерного пространства. Каждое событие изображается в этом пространстве точкой: первые три координаты — это пространственные координаты события, а четвертая — момент времени, когда это событие произошло.

Наряду с указанным четырехмерным пространством рассматривают также трехмерное пространство скоростей. Оно строится так. Пусть V_x, V_y, V_z — координаты вектора скорости какого-нибудь тела в данной системе отсчета. Изобразим скорость этого тела точкой с координатами (V_x, V_y V_z). Аналогичным образом поступим со всеми телами. Пространство, в котором по указанному правилу точки изображают скорости тел, и называется *пространством скоростей*. Для простоты ограничимся движением тел на плоскости. Тогда пространство скоростей будет двумерным. Всякое тело имеет скорость, меньшую скорости света, поэтому пространство скоростей состоит лишь из точек, находящихся внутри круга, радиус которого равен скорости света, т. е. из точек плоскости Лобачевского в модели Кэли — Клейна. Скорость самой системы отсчета изображается центром круга — ее скорость относительно самой себя равна нулю. Оказывается, скорости тел, движущихся друг относительно друга в одном и том же направлении, изображаются точками, лежащими на одной хорде, т. е. на одной прямой плоскости Лобачевского.

Если мы перейдем в другую систему отсчета, то каждая точка внутри круга перейдет в какую-то точку внутри того же круга, а точки ограничивающей его окружности — в точки этой же окружности. Действительно, в новой системе отсчета скорости тел будут иными, но они по-прежнему будут меньше скорости света; сама же скорость света останется прежней. Тела, двигавшиеся друг относительно друга в одном и том же направлении, в новой системе отсчета останутся движущимися друг относительно друга в одном и том же направлении. Поэтому точки, лежавшие на одной хорде, перейдут в точки, лежащие на одной хорде. Тем самым переходу к новой системе отсчета соответствует некоторое движение плоскости Лобачевского. Это позволяет использовать формулы геометрии Лобачевского для описания сложных физических процессов, например производить кинематические расчеты ядерных реакций. При этом оказывается, что различие между теорией относительности и классической механикой точно такое же, как между геометрией Лобачевского и геометрией Евклида.

Через 11 лет после публикации работы Ф. Клейна, в 1882 г., выдающийся французский математик А. Пуанкаре предложил еще одну модель геометрии Лобачевского. В *модели Пуанкаре*, как и в модели Кэли — Клейна, плоскость Лобачевского представляет собой внутренность круга с бесконечно удаленной границей, но прямыми считаются не хорды, а дуги окружностей, ортогональных к абсолюту (и его диаметры). На рисунке 148 изображена та же ситуация в модели Пуанкаре, что и на рисунке 147 в модели Кэли — Клейна.

Замечательной особенностью модели Пуанкаре является тот факт, что угол между прямыми на плоскости Лобачевского в этой модели равен обычному углу между соответствующими им дугами. В частности, равные треугольники изображаются в ней как фигуры из трех дуг с соответственно равными углами, поскольку в геометрии Лобачевского имеет место признак равенства треугольников по трем углам. Подчеркнем, что при этом расстояние между точками плоскости Лобачевского, конечно же, не равно обычному расстоянию между точками круга — оно измеряется по более сложному правилу (точки абсолюта бесконечно удалены от внутренних точек круга).

Рассмотрим примеры движений плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре. Прежде всего движением является поворот всего круга вокруг его центра. В самом деле, при таком повороте каждая точка круга переходит в точку этого же круга, каждая «прямая» — в «прямую», а каждый «треугольник» — в равный ему «треугольник», поскольку углы нового «треугольника» соответственно равны углам исходного «треугольника». Следовательно, при таком отображении плоскости Лобачевского на себя сохраняются и расстояния между точками, а значит, оно является движением. По аналогичной причине движением является и осевая симметрия относительно диаметра круга. Несколько более сложным примером движения является инверсия относительно произвольной «прямой». При такой инверсии абсолют переходит в себя, так как он ортогонален к этой «прямой». Следовательно, каждая точка круга, ограниченного абсолютом, переходит в точку этого же круга. Далее, поскольку при инверсии сохраняются углы между прямыми и окружностями, то любая окружность, ортогональная к абсолюту, переходит в окружность, ортогональную к абсолюту (или в его диаметр). Иными словами, каждая «прямая» переходит в «прямую». Поэтому каждый «треугольник» переходит в «треугольник», равный исходному по трем углам, и, следовательно, при рассматриваемом отображении плоскости Лобачевского на себя сохраняются расстояния между точками.

Ясно, что результатом последовательного выполнения рассмотренных нами движений плоскости Лобачевского также является некоторое ее движение. Оказывается, верно и обратное утверждение: в общем случае движение плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре представляет собой результат последовательного выполнения инверсии относительно «прямой», осевой симметрии относительно диаметра абсолюта и поворота вокруг его центра.

Интересно, что рассмотренная модель была найдена А. Пуанкаре в связи с его исследованиями в области теории так называемых автоморфных функций, широко применяющихся не только в математике, но и в теоретической физике. При разработке этой теории он столкнулся с очень большими трудностями, которые, однако, удалось легко преодолеть с помощью применения идей геометрии Лобачевского. Таким образом, уже к концу XIX столетия геометрия Лобачевского не только получила всеобщее признание, но и органически вошла в аппарат математики. В XX в. ее роль была осмыслена значительно глубже. В частности, по оценкам астрономов, окружающее нас пространство в космических масштабах описывается именно этой геометрией. Можно вполне определенно сказать, что в наши дни интерес ученых к геометрии Лобачевского не только не ослабевает, но и заметно возрастает.

Задачи

82. При инверсии с центром O точки M и N переходят в точки M_1 и N_1 соответственно. Докажите, что треугольники OMN и OM_1N_1 подобны.

83. Точка M лежит вне окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC. Докажите, что из отрезков MA, MB и MC можно построить треугольник.

84. Докажите, что через две точки, лежащие внутри окружности, можно провести ровно две окружности, касающиеся данной.

85. Вневписанная окружность касается стороны BC треугольника ABC. Другая окружность касается извне вписанной в треугольник ABC окружности и указанной вневписанной. Докажите, что точки касания окружностей лежат на прямой, проходящей через вершину A.

86. Каждая из четырех окружностей касается извне двух других окружностей, причем ни одна из них не касается сразу трех. Докажите, что все четыре точки касания лежат на одной окружности.

87. На отрезке AB взята произвольная точка M. Окружность касается окружностей с диаметрами AB, MA и MB. Докажите, что диаметр этой окружности равен расстоянию от ее центра до прямой AB.

88. Около правильного многоугольника $A_1A_2...A_n$ описана окружность и на ее дуге A_1A_n взята точка M. Докажите, что

$$\frac{1}{MA_1\cdot MA_2}+\frac{1}{MA_2\cdot MA_3}+\ldots+\frac{1}{MA_{n-1}\cdot MA_n}=\frac{1}{MA_1\cdot MA_n}.$$

89. Окружность, вписанная в неравносторонний треугольник ABC, касается его сторон в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что прямая, проходящая через ее центр и центр окружности, описанной около треугольника ABC, является прямой Эйлера треугольника $A_1B_1C_1$.

90. Докажите, что в произвольном треугольнике радиусы R и r описанной и вневписанной окружностей связаны с расстоянием d между их центрами соотношением $d^2=R^2+2Rr$.

91. Четырехугольник вписан в окружность и описан около другой окружности. Докажите, что отрезки, соединяющие точки касания его противоположных сторон с вписанной окружностью, взаимно перпендикулярны.

92. Три окружности проходят через одну точку; A, B и C — вторые точки их пересечения. Известно, что углы между окружностями, пересекающимися в точках A и B, равны α и β. Найдите угол между окружностями, пересекающимися в точке C.

93. Известно, что около четырехугольника $ABCD$ нельзя описать окружность. Докажите, что угол между окружностями, описанными около треугольников ABC и ABD, равен углу между окружностями, описанными около треугольников ACD и BCD.

94. Три окружности имеют общую точку M; A, B, C — вторые точки пересечения второй и третьей, первой и третьей, первой и второй окружностей соответственно. Докажите, что три окружности, проходящие через M и A, M и B, M и C, ортогональные соответственно к первой, второй и третьей окружностям, также имеют общую точку.

95. Три окружности имеют общую точку M; A, B, C — вторые точки пересечения второй и третьей, первой и третьей, первой и второй окружностей соответственно. Докажите, что три окружности, проходящие через M и A, M и B, M и C и делящие попо-

лам углы между второй и третьей, первой и третьей, первой и второй окружностями соответственно, также имеют общую точку.

96. Докажите, что стороны a, b, c, d, диагонали m, n и сумма φ противоположных углов произвольного четырехугольника связаны между собой соотношением $a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos\varphi=m^2n^2$; объясните, почему это утверждение называют иногда *обобщенной теоремой Птолемея.*

97. Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точка M не лежит на этой прямой. Докажите, что точка M и центры окружностей, описанных около треугольников MAB, MBC и MCA, лежат на одной окружности.

98. Докажите теорему, обратную теореме о прямой Симсона: через точки пересечения сторон треугольника или их продолжений с некоторой прямой проведены прямые, перпендикулярные к этим сторонам; если проведенные прямые пересекаются в одной точке, то эта точка лежит на окружности, описанной около данного треугольника.

99. Докажите, что касательная к параболе, перпендикулярная к оси ее симметрии, является прямой Симсона треугольника, образованного любыми тремя другими касательными к этой параболе.

Задачи на построение

100. Вершина данного квадрата является центром инверсии, а противоположная вершина лежит на окружности инверсии. Постройте фигуру, в которую переходит квадрат при этой инверсии.

101. Вершина данного квадрата является центром инверсии, а две другие вершины лежат на окружности инверсии. Постройте фигуру, в которую переходит квадрат при этой инверсии.

102. В данную окружность вписан треугольник. Приняв эту окружность за окружность инверсии, постройте фигуру, в которую переходит треугольник при такой инверсии.

103. Даны отрезок AB, две прямые и точка P. Через точку P проведите прямую, пересекающую данные прямые в таких точках X и Y, что

$$PX\cdot PY=AB^2.$$

104. Даны отрезок AB, две окружности и точка P. Через точку P проведите прямую, пересекающую данные окружности в таких точках X и Y, что

$$PX\cdot PY=AB^2.$$

105*. В данную окружность впишите четырехугольник, продолжения сторон которого проходят через четыре данные точки, лежащие вне этой окружности.

106*. В данную окружность впишите треугольник, продолжения сторон которого проходят через три данные точки, лежащие вне этой окружности.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава I

1. $\sqrt{10}$; $\{3;\ -1\}$. **2.** Указание. Найти координаты середин диагоналей AC и BD. **3.** $x=\frac{x_1+kx_2}{1+k}$, $y=\frac{y_1+ky_2}{1+k}$. **4.** $\left(\frac{3\sqrt{3}+4}{5};\ \frac{3\sqrt{3}+8}{5}\right)$. **5.** $\frac{\sqrt{145}}{3}$. Указание. Ввести прямоугольную систему координат с началом в точке C и точками A и B на осях. **6.** $\frac{AF}{FE}=\frac{3}{2}$. Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы вершины ромба лежали на осях координат. **7.** а) $p_2(x-x_0)=p_1(y-y_0)$; б) $p_1(x-x_0)+p_2(y-y_0)=0$. **8.** а) $x+2y-5=0$; б) $y=2x$. Указание. Воспользоваться задачей 7, б). **9.** $5x+3y-1=0$. Указание. Воспользоваться задачей 7, а). **10.** $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. **11.** $2y-x-3=0$. **12.** Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы одна из осей координат совпала с прямой p. **13.** $AC=\frac{25}{4}$, $BC=\frac{3}{4}\sqrt{41}$. Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы точки A и B лежали на оси абсцисс, а точка C — на оси ординат. **14.** $\left(\frac{8}{5};\ \frac{16}{5}\right)$. Указание. Сначала написать уравнение прямой, проходящей через точку M перпендикулярно к прямой CD. **15.** $\sqrt{5}$; $(-1;\ 2)$. **16.** $(x+1)^2+(y+2)^2=25$. **17.** $\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+y^2=\frac{85}{9}$. **18.** $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2=\frac{125}{9}$. **19.** Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы вершины квадрата лежали на осях координат. **20.** Касаются в точке $(4;\ -2)$. **21.** Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы ось абсцисс совпадала с прямой, а центр окружности лежал на оси ординат. **22.** а) $(x-6)^2+(y-7)^2=36$; б) $y=0$ и $y=\frac{20}{21}x$. **23.** $(x_1-x_0)(x-x_1)+(y_1-y_0)(y-y_1)=0$. Указание. Воспользоваться задачей 7, б). **24.** Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы начало координат совпадало с центром одной окружности, а центр другой окружности лежал на оси абсцисс. **25.** а) Пересекаются в точках $M_1(1;\ 0)$ и $M_2\left(-\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right)$; б) касаются друг друга извне в точке $M\left(-\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5}\right)$; в) первая окружность лежит внутри круга, ограниченного второй окружностью. **26.** а) Окружность радиуса $2AB$ с центром в точке B_1, симметричной точке B относительно точки A; б) окружность радиуса $\frac{4}{3}AB$, центр C лежит на отрезке AB, причем $AC=\frac{2}{3}AB$; в) прямая, перпендикулярная к прямой AB и пересекающая ее в точке C, такой, что $AC=\frac{1}{2}AB$, $BC=\frac{3}{2}AB$. **27.** а) Окружность радиуса $\frac{3}{4}AB$, центр D которой лежит на отрезке BC, причем $BD=\frac{3}{4}AB$; б) окружность радиуса $\frac{3}{2}AB$, центр D которой лежит на луче BC, причем $CD=\frac{3}{2}AB$ и точка C лежит между B и D. **28.** а) Окружность, точка или пустое множество; б) прямая, вся плоскость или пустое множество. **29.** а) $y=(2ax_0+b)(x-x_0)+ax_0^2+bx_0+c$; б) $y=-\frac{k}{x_0^2}(x-x_0)+\frac{k}{x_0}$; $y=-kx+2k$. **30.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **31.** Задача имеет два решения: 1) $y=2x-2$, $M_1(1;\ 0)$ — точка касания; 2) $y=10x-26$, $M_2(5;\ 24)$ — точка касания. **32.** $y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$, если $y_0\neq0$; $x-x_0=0$, если $y_0=0$. **33.** $x-2=0$, $M_1(2;0)$ — точка касания; $4y-3x-10=0$, $M_2\left(-\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right)$ — точка касания. **34.** $e=\sqrt{2}$, $y+x-\sqrt{2k}=0$ и $y+x+\sqrt{2k}=0$ — уравнения директрис. **35.** Пересекаются в точках $(0;\ -2)$ и $\left(\frac{36}{13};\frac{10}{13}\right)$. **36.** Пересекаются в четырех точках: $(-2;\ -\sqrt{3})$, $(-2;\sqrt{3})$, $(2;\ -\sqrt{3})$, $(2;\sqrt{3})$. **37.** Пересекаются в четырех точках: $\left(-\sqrt{6};\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{3};\ -2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(\sqrt{3};2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(\sqrt{6};\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. **38.** а) $(0;\ -2)$, 4; б) $(0;\ -2)$, 4. **40.** Указание. Воспользоваться задачей 3 из п. 12. **41.** а) $y=-ax^2-bx-c$; б) $y=ax^2-bx+c$; в) $y=-ax^2+bx-c$. **43.** Указание. Ввести систему координат с началом в точке O. **44.** Указание. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы оси симметрии фигуры были осями координат, и воспользоваться формулами координат точек, симметричных данной точке относительно осей и начала координат. **45.** а) Указание. Сначала доказать, что проекции точек M_1, M_2, M_3 и M_4 на ось абсцисс образуют гармоническую четверку. **47.** Указание. Воспользоваться идеей решения задачи 45. **48.** Указание. Использовать метод координат.

1. Указание. Доказать, что $a+c>b$, $a+b>c$. Затем воспользоваться теоремой косинусов. 2. $(1+m):n$. 3. Указание. Воспользоваться первой теоремой п. 20 и первой теоремой п. 21. 4. Указание. Доказать методом от противного, воспользовавшись задачей 4 текста. 5. Указание. Воспользоваться задачей 4 текста. 6. Указание. Воспользоваться неравенством треугольника для треугольника ACC', где C и C' симметричны относительно точки M и треугольников ACM, BCM. 7. Указание. Воспользоваться задачей 1, б) текста. 8. Указание. Воспользоваться точкой C_1, симметричной точке C относительно прямой AH. 9. Указание. Воспользоваться теоремой синусов. 10. $AH=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$. Указание. Воспользоваться формулой Герона. 11. Указание. Воспользоваться следствием 1 из первой теоремы п. 21. 12. Указание. Воспользоваться следствием 2 первой теоремы из п. 21 и формулой (1). 13. Указание. Воспользоваться второй теоремой (а) и (б) п. 21 и формулой Герона. 14. $R=\frac{abc}{4S}$, $r=\frac{S}{p}$, $r_a=\frac{S}{p-a}$, $r_b=\frac{S}{p-b}$, $r_c=\frac{S}{p-c}$, где $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$. Указание. Воспользоваться следствием 1 из первой теоремы п. 21 и второй теоремой п. 21. 15. Указание. Сначала доказать, что точки M, N, P лежат на сторонах треугольника, вершинами которого являются середины сторон треугольника ABC. 16. Указание. Воспользоваться задачей 1, а) текста. 17. Указание. Рассмотреть три случая в зависимости от расположения точки D на прямой BC. 18. Указание. Доказать, что равенства $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})=0$ и $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=0$ эквивалентны. 19. Указание. Пользуясь леммой 2, доказать, что точка с радиус-вектором $\vec{r}$ лежит на биссектрисах треугольника ABC. 20. Указание. Принять C за начальную точку и воспользоваться задачей 19. 21. Указание. Воспользоваться равенством $(\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{MA})(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})=0$. 22. Указание. Доказать, что неравенства, данные в задаче, выполняются тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ не коллинеарны. 23. Указание. Доказать, что $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. 24. Указание. Применить неравенство треугольника к треугольнику ACC', где C' — точка, симметричная точке C относительно точки M. 26. Указание. Ввести в рассмотрение радиус-векторы точек, приняв C за начальную точку, и доказать, что $\overrightarrow{A_1B_1}^2=\overrightarrow{AB}^2\cos^2 C$. 27. Указание. Воспользоваться равенствами $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{MC}$. 28. Указание. Воспользоваться задачей 23. 29. Указание. Принять точку пересечения медиан за начальную точку и воспользоваться задачей 19. 30. Указание. Пусть данный треугольник с ортоцентром H вписан в окружность с центром O радиуса R. Пользуясь задачей 23, доказать,

что указанные в задаче точки лежат на окружности радиуса $\frac{1}{2}R$ с центром в середине отрезка HO. **31.** Указание. Ввести радиус-векторы точек A, B, C, H, A_1, B_1, C_1 и записать условия задачи, используя скалярные произведения соответствующих векторов. **32.** Указание. Воспользоваться теоремой синусов и формулами (10) и (5). **33.** Указание. Воспользоваться теоремой синусов и формулами (9) и (5). **34.** Указание. Воспользоваться формулой (1) и теоремой синусов. **35.** Указание. Воспользоваться задачей 4 текста. **36.** Указание. Пользуясь формулами (7) и (2), сначала доказать, что $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, где $\alpha+\beta\leqslant180°$, $\alpha\geqslant\beta$. **37.** Указание. Воспользоваться равенством (4). **38.** Указание. Воспользоваться задачами 36 и 37. **39.** Указание. Воспользоваться задачей 38 и формулой (4). **40.** Указание. Воспользоваться задачей 39. **41.** Указание. Принять центр O описанной окружности радиуса R за начальную точку и сначала доказать, что $\vec{b}\vec{c}=R^2\cos 2A$, $\vec{a}\vec{c}=R^2\cos 2B$, $\vec{a}\vec{b}=R^2\cos 2C$, где $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$. **42.** Указание. Воспользоваться теоремой косинусов. **43.** $\frac{1}{2}(b-a)^2\sin\alpha$. Указание. Пользуясь леммой 2 § 2, доказать, что биссектрисы противоположных углов данного параллелограмма параллельны. **45.** Указание. Выразить данное равенство через скалярные произведения векторов $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{c}=\overrightarrow{BC}$ и воспользоваться леммой 1 § 2. **46.** Указание. Учесть, что диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются, и воспользоваться неравенством треугольника. **48.** Указание. Доказать, что $\frac{(a+MN)x}{(b+MN)y}=\frac{m}{n}$, где $\frac{x}{y}$ — отношение отрезков, на которые прямая MN делит боковую сторону трапеции. **50.** а) h^2; б) a^2. **51.** Указание. Воспользоваться второй теоремой п. 32. **52.** Указание. Применить теорему синусов к треугольникам ABC и ABD и воспользоваться второй теоремой п. 32. **53.** Указание. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, а O — точка пересечения его диагоналей. Применить теорему косинусов к треугольникам ABO, BCO, CDO и ADO. **54.** Указание. Воспользоваться задачей 53. **55.** $k=AC^2-AB^2-AD^2$. **56.** Указание. Сначала, воспользовавшись леммой 4(б) п. 23, доказать, что параллелограмм обладает указанным свойством. Для доказательства обратного утверждения учесть, что из условия задачи следует: разность квадратов любых двух смежных сторон данного четырехугольника по модулю одна и та же — она равна произведению диагоналей четырехугольника на косинус угла между прямыми, которым они принадлежат.

Глава III

1. Указание. Воспользоваться задачами 2 и 4 текста. 2. Указание. Сначала доказать, что ABM и BCM — равнобедренные треугольники и что $\triangle ABC \sim \triangle CMB$. 5. $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. 6. $\frac{R}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right)$. 7. Указание. Пусть AB, BC и CD — три последовательные стороны равносторонне-полуправильного n-угольника, где $n>4$, а K — точка пересечения прямых AB и CD (при $n=4$ многоугольник является ромбом, см. задачу 700 основного учебника). Доказать, что вневписанная окружность треугольника BCK, которая касается стороны BC, является искомой. 8. Указание. Воспользоваться задачей 7. 9. Указание. Воспользоваться первой теоремой п. 35. 11. $2\sqrt{\frac{\pi S}{4\pi^2-1}}$. 12. а) $\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)R^2$; б) $2\pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)R$; в) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}R$. 13. 1. 14. $\frac{a^2}{4}(6\sqrt{3}-6-\pi)$. 15. $\frac{\pi R^2}{36}$. 16. Указание. Доказать, что если радиус окружности равен R, то площадь части круга, заключенной между двумя секущими, равна $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$ при любом выборе точки A. 17. $\frac{\pi R_1R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}$. 18. Указание. а) Воспользоваться тем, что точка пересечения стороны BC и окружности с диаметром AB (и точно так же точка пересечения стороны BC и окружности с диаметром AC) является основанием высоты треугольника ABC, проведенной из вершины A. 19. $\frac{3\sqrt{3}}{5\pi-3}$. 20. Указание. Сначала доказать, что точки A_1, B_1 и C_1 являются серединами сторон треугольника ABC и площадь криволинейного треугольника $A_1B_1C_1$ равна площади параллелограмма $A_1B_1C_1B$. 22. Указание. Сначала построить круг, площадь которого равна сумме площадей двух данных кругов.

Глава IV

1. Указание. Рассмотреть параллельный перенос стороны AD на вектор $\overrightarrow{AM}$, а стороны BC на вектор $\overrightarrow{BM}$. 2. Указание. Пусть A_1B_1N — треугольник, полученный из ABM параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{MN}$. Воспользоваться тем, что трапеция A_1B_1CD описанная. 3. Указание. Формулировка и доказательство частей 1^0—3^0 переносятся практически без изменений. 4. Указание. Рассмотреть поворот на 60° вокруг вершины B. 5. Указание. Рассмотреть поворот на 90° вокруг центра квадрата. 6. Указание. Рассмотреть поворот на 60° вокруг точки M, при котором точка B переходит в L, а точка N — в A. 7. Указание. Рассмотреть поворот на 90° вокруг вершины A,

при котором вершина B переходит в вершину D. **8.** Указание. а) Рассмотреть поворот на 90° вокруг вершины A, при котором точка A_1 переходит в B, а точка C — в A_2; б) воспользоваться теоремой Вариньона. **9.** Указание. Пользуясь результатом задачи 8 б), доказать, что один из указанных отрезков переходит в другой при повороте на 90° вокруг середины диагонали четырехугольника. **10.** Указание. Рассмотреть поворот на 90° вокруг вершины C, при котором точка A переходит в B, а точка A_1 — в B_1. **11.** Дуга окружности величиной 60°. Указание. Рассмотреть поворот на 60° вокруг вершины A, при котором точка B переходит в C. **12.** Указание. Рассмотреть поворот на 90° вокруг центра вписанного квадрата. **13.** Указание. Рассмотреть поворот на 60° вокруг вершины A, при котором вершина F переходит в центр шестиугольника. **14.** Указание. Доказать, что $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{M_1B}=\overrightarrow{CM_2}=\overrightarrow{M_3A}$. **15.** Указание. Рассмотреть центральную симметрию относительно середины одной из указанных диагоналей. **16.** Указание. Пусть M и N — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, E — точка, центрально-симметричная B относительно N. Воспользоваться тем, что MN — средняя линия треугольника ABE. **17.** Параллелограмм. Указание. Воспользоваться результатом задачи 16. **18.** Указание. Рассмотреть центральную симметрию относительно точки пересечения диагоналей одного из параллелограммов. **19.** Указание. Рассмотреть центральную симметрию относительно центра окружности. **20.** Указание. Рассмотреть дуги, симметричные дугам описанной окружности относительно сторон треугольника. **21.** Шар следует направить в точку N_4, симметричную точке N_3 относительно прямой AB, где N_3 — точка, симметричная N_2 относительно BC, N_2 — точка, симметричная N_1 относительно CD, а N_1 — точка, симметричная N относительно DA. **22.** Указание. а) Построить квадрат со стороной pq и разбить его на равные прямоугольники со сторонами p и q; б) воспользоваться методом от противного. **23.** Параллельно диагонали стола. **24.** $2d$. Указание. Воспользоваться задачей 23. **25.** Указание. Воспользоваться тем, что точки L_A и L_B получаются из K_C поворотом (последовательным выполнением двух осевых симметрий) вокруг центра вписанной окружности на один и тот же угол, но в разных направлениях. **26.** Указание. Пусть AB — данный отрезок; рассмотреть данную окружность и ту, которая получается из нее параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AB}$. **27.** Указание. Пусть AB — данный отрезок; рассмотреть данный треугольник и те два, которые получаются из него параллельным переносом на векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$. **28.** Указание. Перенесите точку A на вектор $\overrightarrow{EF}$. **29.** Указание. Использовать параллельный перенос. **30.** Указание. Использовать параллельный перенос. **31.** Указание. Использовать параллельный перенос. **32.** Указание. Использовать параллельный перенос. **33.** Указание. Пусть $ABCD$ — искомый параллелограмм; рассмотреть параллельный перенос диагонали BD на вектор $\overrightarrow{BC}$. **34.** Указание. Рассмотреть поворот прямой a вокруг точки P на 60°. **35.** Указание. Рассмотреть поворот вокруг точки

P на 45°. **36.** Указание. Принять какую-нибудь точку данных прямых за вершину равностороннего треугольника и рассмотреть поворот вокруг этой точки на 60°. **37.** Указание. Построить образ одной из окружностей при повороте вокруг данной точки на 90° и найти точки ее пересечения с другой окружностью. **38.** Указание. Рассмотреть поворот вокруг вершины квадрата на 60°. **39.** Указание. Рассмотреть симметрию с центром в точке A. **40.** Указание. Рассмотреть симметрию с центром в точке M. **41.** Указание. Рассмотреть симметрию с центром в произвольной точке внутренней окружности. **42.** Указание. Воспользоваться задачей 3 п. 44. **43.** Указание. Воспользоваться задачей 3 п. 44. **44.** Указание. Воспользоваться задачей 14. **45.** Указание. Воспользоваться идеей решения задачи 44. **46.** Указание. Рассмотреть симметрии относительно данных прямых. **47.** Указание. Рассмотреть симметрию относительно данной прямой. **48.** Указание. Воспользоваться осевой симметрией **49.** Указание. Воспользоваться осевой симметрией. **50.** Указание. Воспользоваться осевой симметрией. **51.** Указание. Рассмотреть точку, симметричную общей вершине двух данных сторон относительно серединного перпендикуляра к третьей стороне. **52.** Указание. Пусть ABC — искомый треугольник, сторона AB которого дана, $\angle A > \angle B$; рассмотреть точку C_1, симметричную вершине C относительно серединного перпендикуляра к стороне AB, а затем точку, симметричную вершине B относительно прямой CC_1. **53.** Указание. Пусть для определенности $AD > AB$; построить точку, симметричную вершине B относительно прямой AC. **54.** Указание. Пусть O — центр вписанной окружности; рассмотреть симметрию относительно прямой AO. **55.** Окружность, центром которой является середина отрезка, соединяющего данную точку с центром данной окружности, а радиусом — половина радиуса данной окружности. **56.** $2S$. Указание. Рассмотреть центральное подобие с центром в данной точке и воспользоваться теоремой Вариньона. **57.** $2\frac{S}{9}$. Указание. Рассмотреть центральное подобие с коэффициентом $\frac{3}{2}$ с центром в точке пересечения диагоналей и воспользоваться теоремой Вариньона. **58.** Указание. а) Рассмотреть центральное подобие с центром A, переводящее точку C в C_2, и центральное подобие с центром B, переводящее точку C в C_1; б) воспользоваться результатами, полученными в части а), и теоремой Чевы. **59.** Указание. Пусть O — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1; рассмотреть центральное подобие с центром O и коэффициентом $\frac{OA}{OA_1}$, взятым со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от того, лежат ли точки A и A_1 по одну или по разные стороны от точки O. **60.** Указание. Воспользоваться задачами 25, 59 и формулой Эйлера. **61.** Указание. а) Доказать, что в результате последовательного выполнения поворота на 45° вокруг вершины A и симметрии с центром A и коэффициентом $\sqrt{2}$ отрезок O_BO_C переходит в тот же отрезок, что и AO_A в результате последовательного выполнения поворота на 45° вокруг вершины B и центрального подобия с центром B и коэффициентом $\sqrt{2}$; б) воспользоваться результатом задачи а). **62.** Указание. Пусть O — центр указанной окружности, K — точка ее касания с описанной окружностью; пользуясь тем, что четырехугольники $ABKC$ и $AMON$ центрально-подобны, рассмотреть центральное подобие с центром A, при котором точка K переходит в середину основания BC. **63.** Указание. а) Рассмотреть центральное подобие с центром в указанной точке и воспользоваться свойствами прямой Симсона; б) воспользоваться результатом части а). **64.** Указание. Воспользоваться тем, что треугольники ABC и AOO_1 имеют общую медиану и, следовательно, общую точку пересечения медиан. **65.** Указание. Воспользоваться тем, что при центральном подобии с центром в точке пересечения медиан и коэффициентом $-\frac{1}{2}$ описанная окружность переходит в окружность Эйлера. **66.** Указание. Воспользоваться тем, что указанные касательные центрально-подобны, а прямая B_2C_2 перпендикулярна к диаметру окружности Эйлера, проходящему через точку A_1. **67.** Указание. а) Пользуясь результатом задачи 66 и замечанием п. 47, доказать, что отрезки OA и A_1A_3 параллельны и равны; б) воспользоваться результатом, полученным в части а). **68.** Указание. Воспользоваться результатом задачи 67. **69.** $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$. Указание. Воспользоваться замечанием п. 47. **70.** Указание. Доказать, что отрезки B_3C_1 и A_1O равны и параллельны. **71.** Указание. Воспользоваться идеей решения задачи 63. **72.** Указание. Пусть A_3 — середина AH, P — середина MH; доказать, что около четырехугольника A_2NA_3P можно описать окружность. **73.** Указание. Воспользоваться тем, что точки, симметричные точке H относительно сторон треугольника, лежат на описанной окружности. **74.** Указание. Рассмотреть центральное подобие с центром в середине AB с коэффициентом $\frac{1}{3}$ и воспользоваться результатами задачи 2 п. 44 и теоремой Наполеона. **75.** Указание. Воспользоваться тем, что в результате последовательного выполнения центрального подобия с центром O и коэффициентом $-\frac{1}{3}$ и центрального подобия с центром в середине стороны AB и коэффициентом 3 точка M переходит в C, а значит, C — в M. **76.** Указание. Рассмотреть центральное подобие с центром B. **77.** Указание. Рассмотреть центральное подобие с центром A. **78.** Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи. **79.** Указание. Рассмотреть центральное подобие с центром в точке касания данной окружности и построенной. **80.** Указание. Провести прямую $A_1B_1 \parallel AB$ и построить две равные окружности, касающиеся друг друга и прямой A_1B_1, затем провести касательные A_1C_1 и B_1C_1 к этим окружностям, параллельные прямым AC и BC; треугольник $A_1B_1C_1$ центрально-подобен треугольнику ABC. **81.** Указание. Рассмотреть центральное подобие с центром в произвольной точке большей окружности с коэффициентом $\frac{1}{3}$. **82.** Указание. Воспользоваться соотношениями, установленными в конце п. 49. **83.** Указание. Рассмотреть инверсию с центром в точке M. **84.** Указание. Рассмотреть инверсию с центром в одной из данных точек. **85.** Указание. Рассмотреть инверсию с центром в точке пересечения биссектрисы угла A с прямой, соединяющей указанные точки касания, при которой эти точки переходят друг в друга. **86.** Указание. Рассмотреть инверсию с центром в одной из точек касания. **87.** Указание. Воспользоваться тем, что при инверсии с центром M указанная окружность переходит в центрально-подобную ей окружность с центром M. **88.** Указание. Рассмотреть инверсию с центром в точке M. **89.** Указание. Воспользоваться тем, что при инверсии относительно вписанной окружности описанная окружность переходит в окружность Эйлера треугольника $A_1B_1C_1$. **90.** Указание. Рассмотреть инверсию относительно вневписанной окружности. **91.** Указание. Рассмотреть инверсию относительно вписанной окружности и воспользоваться теоремой Вариньона. **92.** $180°-\alpha-\beta$. Указание. Рассмотреть инверсию с центром в общей точке трех окружностей. **93.** Указание. Рассмотреть инверсию с центром A. **94.** Указание. Рассмотреть инверсию с центром M. **95.** Указание. Рассмотреть инверсию с центром M. **96.** Указание. Рассмотреть инверсию с центром в одной из вершин четырехугольника, а также воспользоваться результатом задачи 82 и теоремой косинусов. **97.** Указание. Рассмотреть результат последовательного выполнения центрального подобия с центром M и коэффициентом 2 и инверсии с центром M, а затем воспользоваться теоремой о прямой Симсона. **98.** Указание. Рассмотреть результат последовательного выполнения инверсии с центром в точке пересечения проведенных прямых и центрального подобия с центром в этой же точке и коэффициентом $\frac{1}{2}$, а затем воспользоваться теоремой о прямой Симсона. **99.** Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи. **100.** Указание. Воспользоваться свойствами инверсии. **101.** Указание. Воспользоваться свойствами инверсии. **102.** Указание. Воспользоваться свойствами инверсии. **103.** Указание. Рассмотреть инверсию относительно окружности с центром P радиуса AB. **104.** Указание. Рассмотреть инверсию с центром P. **105.** Указание. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — искомый четырехугольник, B_1, B_2, B_3, B_4 — данные точки; рассмотреть четыре инверсии с центрами B_1, B_2, B_3, B_4, каждая из которых переводит данную окружность в себя, и найти ту прямую, проходящую через точку A_1, которая в результате последовательного выполнения этих инверсий переходит в прямую, а значит, в себя. **106.** Указание. Воспользоваться идеей решения предыдущей задачи, взяв в качестве четвертой инверсии инверсию относительно данной окружности.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Атанасян Левон Сергеевич
Бутузов Валентин Федорович
Кадомцев Сергей Борисович
Юдина Ирина Игоревна

ГЕОМЕТРИЯ

Дополнительные главы к школьному учебнику 9 класса

Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редакторы *Л. В. Туркестанская, Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *Н. В. Сидельковская*
Художники *О. М. Шмелев, Н. В. Беляева*
Художественный редактор *Е. Р. Дашук*
Технические редакторы *Н. А. Киселева, Л. М. Абрамова*
Корректор *О. Н. Леонова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93 — 953 000. Изд. лиц. № 010001 от 10.10.96. Сдано в набор 07.02.97. Подписано к печати 21.07.97. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура Литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 11+0,25 форзац. Усл. кр.-отт. 22,75. Уч.-изд. л. 9,44+0,42 форзац. Тираж 30 000 экз. Заказ № 379.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Российской Федерации по печати. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Государственного комитета Российской Федерации по печати. 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Учебно-методический комплект содержит:

Геометрия. Учебник для 7—9 классов средней школы/Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.— М.: Просвещение (1990—1997 гг).

Геометрия. Дополнительные главы к школьному учебнику 8 класса: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики/Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.— М.: Просвещение, 1996.

Геометрия. Дополнительные главы к школьному учебнику 9 класса: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики/Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, И. И. Юдина.— М.: Просвещение, 1997.

Зив Б. Г., Мейлер В. М. Дидактические материалы по геометрии для 8 класса.— М.: Просвещение, 1996.

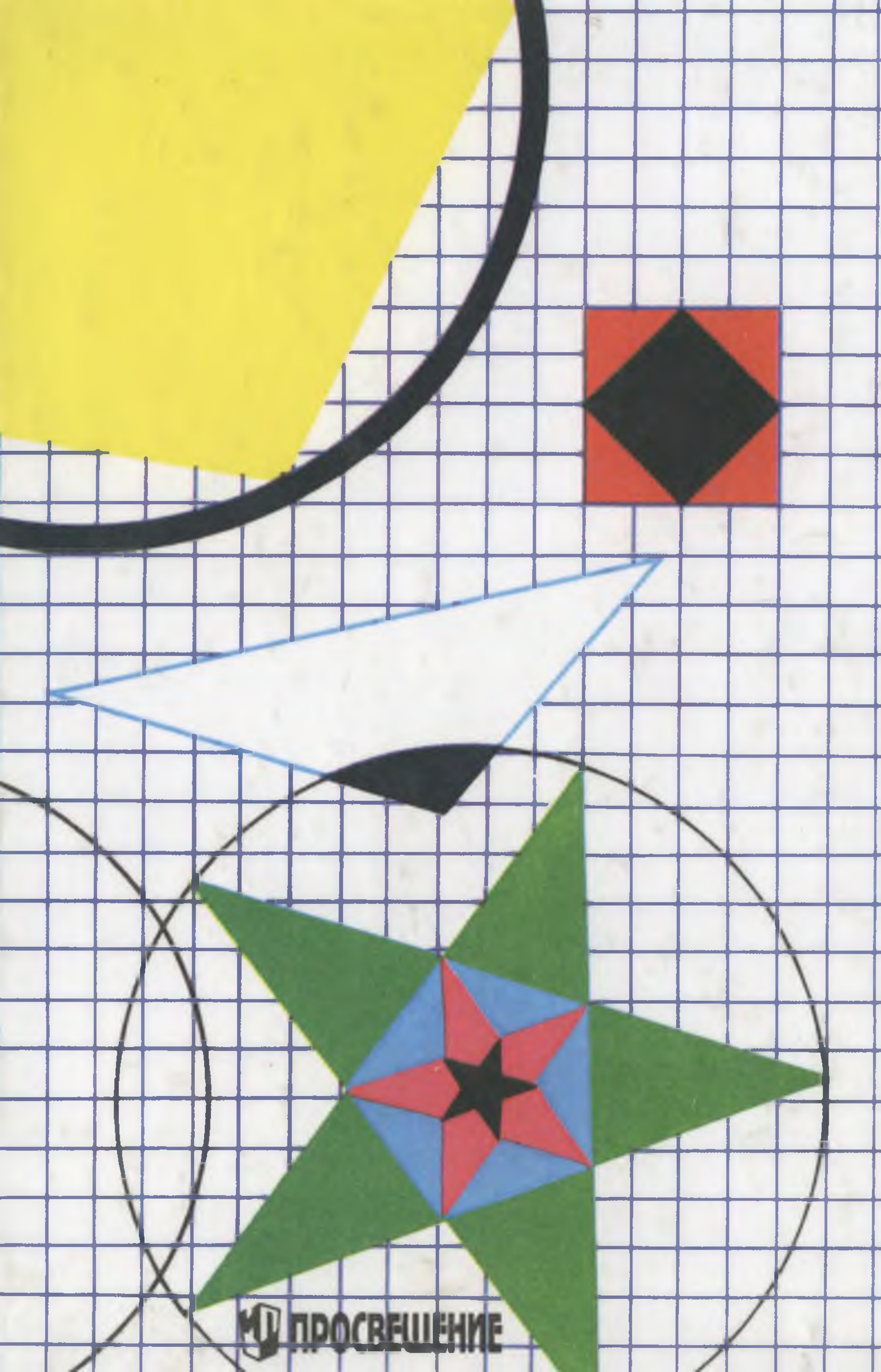
Зив Б. Г. Дидактические материалы по геометрии для 9 класса.— М.: Просвещение, 1997.

Готовятся к изданию следующие книги:

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Глазков Ю. А., Юдина И. И. Геометрия. Рабочая тетрадь для 7 класса.

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Глазков Ю. А. и др. Изучение геометрии в 7—9 классах.

Зив Б. Г., Мейлер В. М., Баханский А. Г. Задачи по геометрии: Пособие для учащихся 7—11 классов.


ПРОСВЕЩЕНИЕ