Poniedziałek 7:30, TN

Obliczenia naukowe: sprawozdanie z laboratorium

LISTA NR 4

JAKUB IWON

1. Zadanie 1

1.1. Opis:

Celem zadania było zaimplementowanie funkcji obliczającej ilorazy różnicowe.

1.2. Rozwiązanie i wnioski:

Funkcję zaimplementowano bez użycia tablicy dwuwymiarowej.

Wartości ilorazów różnicowych można obliczyć z następującego wzoru:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_0, \dots, x_{n-1}] - f[x_1, \dots, x_n]}{x_n - x_0}$$

Przy czym $f[x_i] = f(x_i)$.

Pierwszym krokiem było skopiowanie wartości funkcji do tablicy ilorazów różnicowych. W ten sposób otrzymano tablice ilorazów stopnia zerowego. Następnie do policzenie ilorazów różnicowych rzędu pierwszego wystarczały znajomość węzłów oraz wartości funkcji w tych węzłach (ilorazów różnicowych rzędu zerowego). Obliczone wartości zostały zapisane w tablicy. Należy zauważyć, że do zapisania wartości ilorazów stopnia pierwszego potrzeba o jedną mniej komórkę tablicy niż w przypadku liczenia ilorazów stopnia zerowego. To pozwala wykorzystać tablicę jednowymiarową do zapisania wartości końcowych jak również wartości ilorazów „pośrednich" potrzebnych przy obliczeniach. W dalszych etapach policzone zostały kolejne ilorazy różnicowe aż do otrzymania tablicy ilorazów postaci $f[x_0], f[x_0, x_1], \dots, f[x_0, \dots, x_n]$.

Wejście dla algorytmu:

x - wektor zawierający węzły
f - wektor zawierający wartości funkcji w węzłach

Wyjście algorytmu:

fx - wektor zawierający obliczone ilorazy różnicowe

2. Zadanie 2

2.1. Opis

Celem zadania było zaimplementowanie funkcji obliczającej wartość funkcji interpolującej w punkcie za pomocą uogólnionego algorytmu Hornera.

2.2. Rozwiązanie i wnioski

Uogólniony algorytm Hornera zadany jest wzorem (zadanie 8, lista nr 4, ćwiczenia):

$w_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

$w_k(x) = f[x_0, \dots, x_k] + (x - x_k)w_{k+1}(x)(k = n - 1, \dots, 0)$

$N_n(x) = w_0(x)$

Zaimplementowana funkcja przechodzi tablicę ilorazów różnicowych oraz węzłów od tyłu licząc wartość interpolowanej funkcji zaczynając od najbardziej „wewnętrznego nawiasu". Funkcja przechodzi tablice długości n+1 tylko raz zatem jej złożoność czasowa wynosi *O(n)*.

Wejście dla funkcji:

x - wektor zawierający węzły
fx - wektor zawierający ilorazy różnicowe
t - punkt, w którym ma być obliczona wartość funkcji

Wyjście funkcji:

nt – wartość funkcji w punkcie **t**

3. Zadanie 3

3.1. Opis

Celem zadania było napisanie funkcji znajdującej współczynniki wielomianu interpolacyjnego w postaci naturalnej znając współczynniki wielomianu w postaci Newtona oraz wartości węzłów.

3.2. Rozwiązanie i wnioski

Funkcja przy obliczaniu tablicy a współczynników wielomianu korzysta z własności wywnioskowanych z uogólnionego algorytmu Hornera oraz z faktu, że współczynnik przy najwyższej potędze w postaci naturalnej jest równy ilorazowi różnicowemu o najwyższym rzędzie w postaci Newtona. Po zapisaniu współczynnika przy najwyższej potędze funkcja liczy pozostałe współczynniki. Ich wartości obliczane są z wykorzystaniem wzoru $a[i] = a[i] - a[i + 1] * x[i]$ gdzie a jest tablicą współczynników postaci naturalnej natomiast *x* jest tablicą węzłów oraz początkowo $a[i]$ = *fx*[i] (*fx* – tablica ilorazów różnicowych). Obliczając dany współczynnik $a[k]$ korygujemy poprzednio obliczone współczynniki zgodnie z wcześniej podanym wzorem tym razem podstawiając jednak węzeł *x*[k].

Funkcja składa się z dwóch pętli, z których jedna wykonuje się n razy, druga natomiast maksymalnie n-1 razy. Złożoność czasowa funkcji wynosi zatem $O(n^2)$.

Wejście dla funkcji:

x – wektor zawierający węzły
fx – wektor zawierający ilorazy różnicowe

Wyjście funkcji:

a – wektor zawierający współczynniki wielomianu w postaci naturalnej

4. Zadanie 4

4.1. Opis

Celem zadania było napisanie funkcji interpolującej zadaną funkcję na zadanym przedziale a następnie przedstawia reprezentację graficzną tej funkcji.

4.2. Rozwiązanie i wnioski

Pierwszym krokiem działania funkcji jest wyznaczenie *n+1* równoodległych węzłów na zadanym odcinku *a, b* a następnie policzenie wartości funkcji *f* w tych punktach. Mając te dane funkcja oblicza *n+1* ilorazów różnicowych za pomocą funkcji *ilorazyRoznicowe*. Następnie wyliczane są wartości funkcji interpolującej dla punktów o równomiernym położeniu na zadanym odcinku. Do tego celu użyta została funkcji *warNewton*. Ostatnim krokiem jest narysowanie funkcji *f* oraz funkcji ją interpolującej.

Wejście dla funkcji:

f – interpolowana funkcja
a, b – krańce przedziału interpolacji
n – stopień wielomianu interpolacyjnego

Wyjście funkcji:

wykresy funkcji interpolowanej oraz wielomianu interpolacyjnego

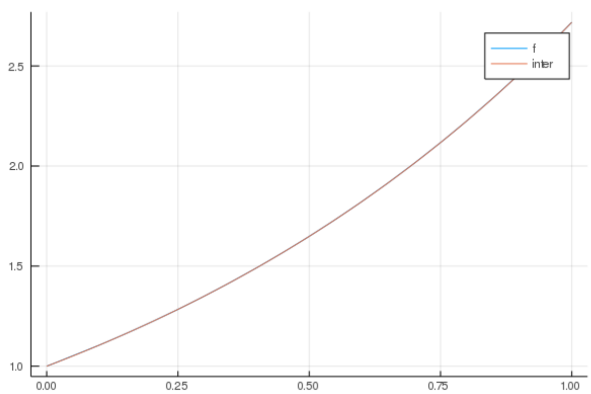
5. Zadanie 5

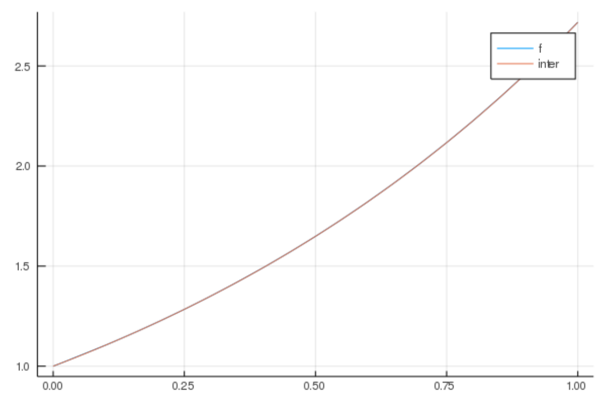
5.1. Opis

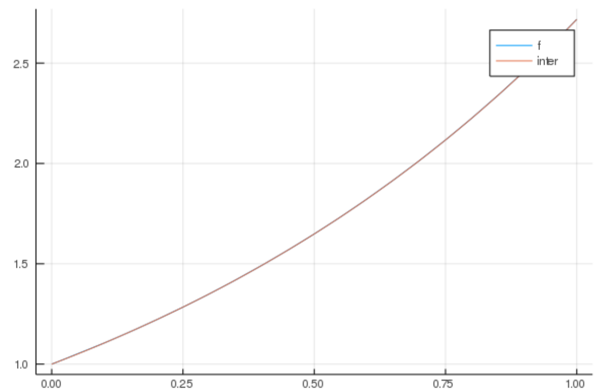
Celem zadania było przetestowanie funkcji z zadania poprzedniego dla funkcji e^x oraz $x^2 \sin(x)$ dla zadanych przedziałów oraz parametrów *n*.

5.2. Rozwiązanie i wnioski

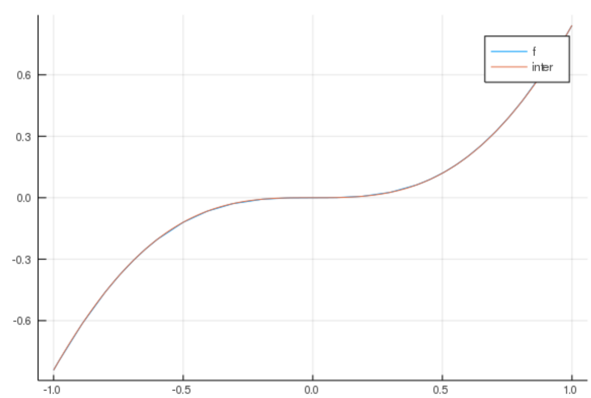
Wykresy funkcji e^x oraz funkcji interpolującej na przedziale [0, 1] dla *n* równego odpowiednio 5, 10, 15.

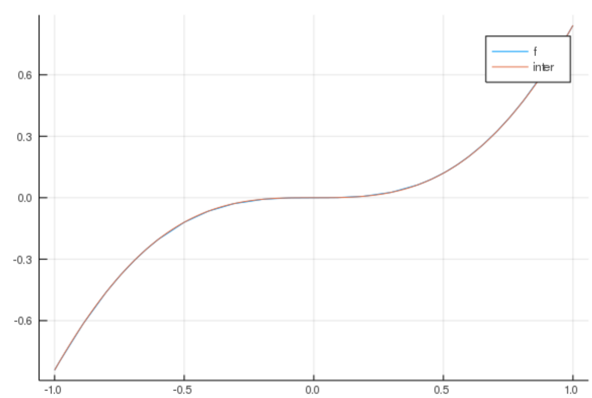


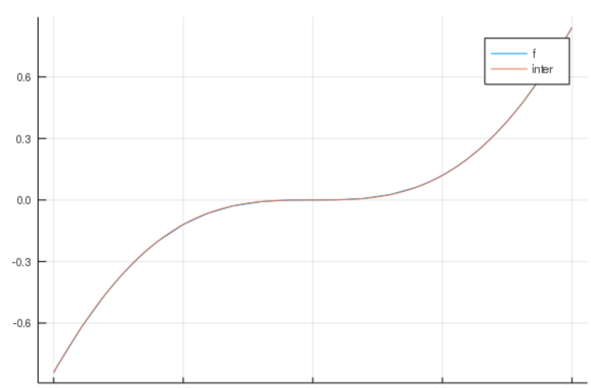




Wykresy funkcji $x^2 \sin(x)$ oraz funkcji interpolującej na przedziale [-1, 1] dla *n* równego odpowiednio 5, 10, 15.







Jak widać na powyższych wykresach funkcja napisana w zadaniu poprzednim działa poprawnie. Patrząc na graficzną reprezentację funkcji nie jest możliwe dostrzeżenie różnicy między zadaną funkcją a interpolującym ją wielomianem.

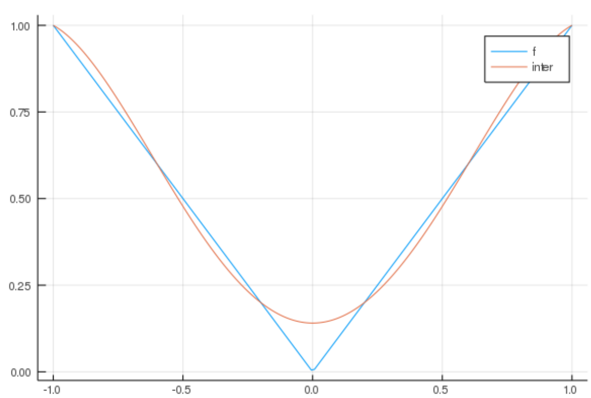
6. Zadanie 6

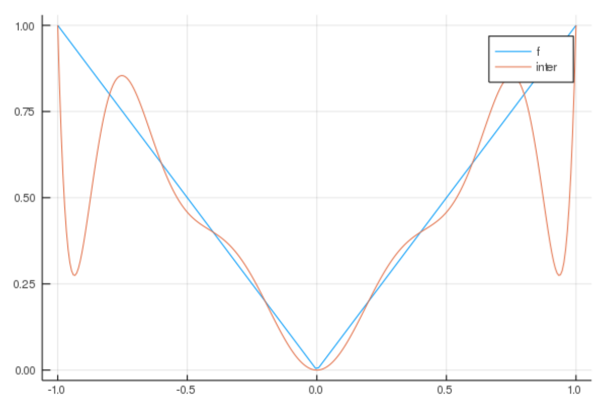
6.1. Opis

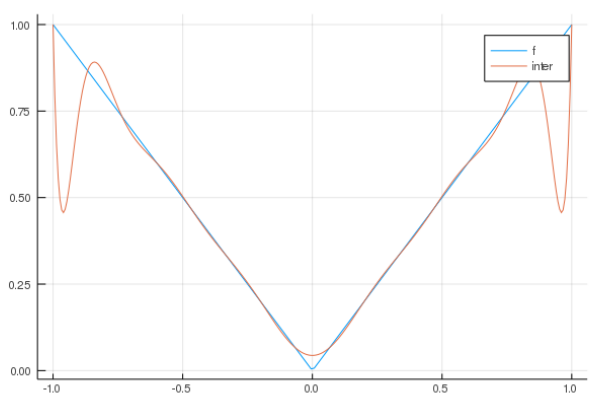
Celem zadania było przetestowanie funkcji z zadania czwartego dla funkcji $|x|$ oraz $\frac{1}{1+x^2}$ dla zadanych przedziałów oraz parametrów *n*.

6.2. Rozwiązanie i wnioski

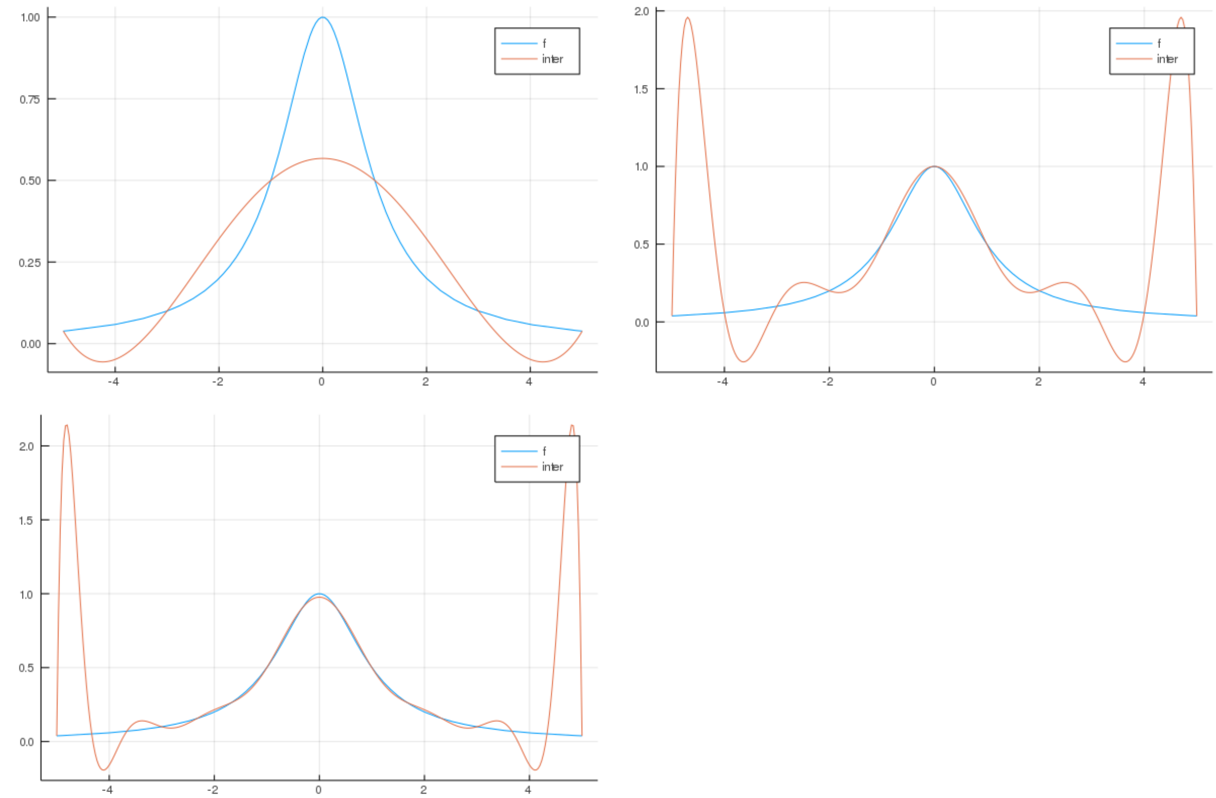
Wykresy funkcji $|x|$ oraz funkcji interpolującej na przedziale [-1, 1] dla *n* równego odpowiednio 5, 10, 15.







Wykresy funkcji $\frac{1}{1+x^2}$ oraz funkcji interpolującej na przedziale [-5, 5] dla *n* równego odpowiednio 5, 10, 15.



Jak widać na powyższych wykresach, dochodzi do znacznych rozbieżności między funkcją interpolowaną a wielomianem interpolacyjnym. Największe błędy interpolacji pojawiają się na granicach przedziałów. Pomimo zwiększenia liczby węzłów interpolacji wartośći obu funkcji znacząco odbiegają od sibie w tych okolicach. W przypadku środka przedziału zwiększenie stopnia wielomianu interpolacyjnego daje coraz dokładniejsze wyniki. Takie zachowanie funkcji interpolucjącej nosi nazwę zjawiska Runge'go I jest spowodowane równą odległością pomiędzy węzłami. Ponaddto w przypadku funkcji $f(x) = |x|$ można zaobserwować również rozbieżność w okolicach środka przedziału gdzie funckja ta nie ma określonej pochodnej.