Poniedziałek 7:30, TN

Obliczenia naukowe: sprawozdanie z laboratorium

LISTA NR 3

JAKUB IWON

1. Zadanie 1

1.1. Opis:

Celem zadania było zaimplementowanie algorytmu znajdującego przybliżenie miejsca zerowego funkcji metodą bisekcji.

1.2. Rozwiązanie i wnioski:

Opis algorytmu:

Algorytm znajduje przybliżone miejsce zerowe funkcji ciągłej. Początkowym krokiem jest wyznaczenie przedziału $[a, b]$ dla którego zachodzi własność $f(a) * f(b) < 0$ (funkcja zmienia znak w przedziale). Korzystając z faktu, że funkcja ciągła na odcinku $[a, b]$ przyjmuje wszystkie wartości między $f(a)$ oraz $f(b)$ wiadomo, że funkcja przyjmuje w tym przedziale wartość 0.

Następnym krokiem jest wyznaczenie środka przedziału: $c = \frac{a+b}{2}$. Dalej rozpatrywane są przedziały $[a, c]$ oraz $[c, b]$ aby sprawdzić, w którym z nich funkcja zmienia znak i tym samym zawiera miejsce zerowe. Przedział zawierający miejsce zerowe zostaje użyty jako przedział początkowy w kolejnej iteracji algorytmu. Proces kończy się gdy rozpatrywany przedział jest odpowiednio mały lub gdy wartość funkcji w punkcie środkowym c jest równa lub dostatecznie bliska zeru. Środek przedziału c jest przybliżeniem miejsca zerowego funkcji.

Implementacja algorytmu:

Wejście dla algorytmu:

f: funkcja
a,b: - końce przedziału początkowego
delta,epsilon: - dokładności obliczeń

Wyjście algorytmu:

r - przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
v - wartość $f(r)$,
it - liczba wykonanych iteracji,
err - sygnalizacja błędu
0 - brak błędu
1 - funkcja nie zmienia znaku w przedziale

Z perspektywy analizy numerycznej ważnym elementem implementacji jest sposób obliczania punktu środkowego przedziału. Obliczając go jako $c = a + \frac{b-a}{2}$ zamiast $c = \frac{a+b}{2}$ uniknąć można sytuacji gdy obliczona wartość punktu środkowego znajduje się poza przedziałem. Innym ważnym szczegółem implementacji jest sprawdzanie za pomocą funkcji $signum$ czy funkcja zmienia znak. Sprawdzanie tej własności za pomocą mnożenia $f(a)f(b)$ mogłoby doprowadzić do nadmiaru lub niedomiaru. Funkcja zwraca błąd gdy w zadanym przedziale początkowym nie zmienia znaku.

2. Zadanie 2

2.1. Opis

Celem zadania było zaimplementowanie algorytmu znajdującego przybliżenie miejsca zerowego funkcji metodą Newtona.

2.2. Rozwiązanie i wnioski

Opis algorytmu:

Punktem startowym działania algorytmu jest wyznaczenie początkowego przybliżenia x_0 miejsca zerowego. Następne przybliżenie x_1 wyznaczane jest jako wartość x punktu przecięcia stycznej funkcji w $f(x_0)$ oraz osi OX.

W ogólności każde n-te przybliżenie miejsca zerowego można obliczyć z następującego wzoru rekurencyjnego:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,.$$

Relacja ta wynika z wzoru na wartość stycznej funkcji w punkcie $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Algorytm kończy działanie gdy kolejne przybliżenia są dostatecznie bliskie sobie lub gdy wartość funkcji dla danego przybliżenia jest dostatecznie bliska zeru.

Implementacja algorytmu:

Wejście dla algorytmu:

f, pf - funkcja oraz jej pochodna
$\mathbf{x_0}$ **-** przybliżenie początkowe,
delta,epsilon - dokładności obliczeń,
maxit – maksymalna dopuszczalna liczba iteracji,

Wyjście algorytmu:

r - przybliżenie pierwiastka równania *f*(*x*) = 0,
v - wartość *f*(*r*),
it - liczba wykonanych iteracji,
err - sygnalizacja błędu
0 - metoda zbieżna
1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w maxit iteracji,
2 - pochodna bliska zeru

Funkcja wyznacza przybliżenia miejsca zerowego zgodnie ze wzorem podanym w opisie algorytmu zaczynając od zadanego przybliżenia początkowego x_0. Jeżeli wartość przybliżenia jest dostatecznie bliska zeru lub dwa sukcesywne przybliżenia są bliskie sobie algorytm kończy działanie. Z uwagi na to, że w pewnym momencie działania algorytmu dochodzi do dzielenia przez wartość pochodnej w punkcie sprawdza się warunek $f'(x_n) < \varepsilon$ gdzie ε oznacza epsilon czyli dokładność obliczeń. Jeżeli zachodzi ten warunek funkcja kończy działanie z kodem błędu 2. Tak mała wartość pochodnej mogłaby doprowadzić do dzielenia przez zero w arytmetyce zmiennopozycyjnej. Jeżeli algorytm nie znajdzie przybliżenia miejsca zerowego z zadaną precyzją po maksymalnej iteracji, zwraca on błąd o kodzie 1.

3. Zadanie 3

3.1. Opis

Celem zadania było zaimplementowanie algorytmu znajdującego przybliżenie miejsca zerowego funkcji metodą siecznych.

3.2. Rozwiązanie i wnioski

Opis algorytmu:

Pierwszym krokiem algorytmu jest wyznaczenie dwóch początkowych wartości x_0 oraz x_1. Przybliżenie miejsca zerowego wyznaczane jest jako odcięta punktu przecięcia osi OX z sieczną poprowadzoną między $f(x_0)$ oraz $f(x_1)$.

W ogólności wartość n+1-ego przybliżenia wyliczana jest za pomocą wzoru rekurencyjnego:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Algorytm kończy działanie gdy wartość przybliżenia jest dostatecznie bliska zeru lub gdy sukcesywne przybliżenia są dostatecznie bliskie sobie.

Implementacja algorytmu:

Wejście dla algorytmu:

f - funkcja
$\mathbf{x_0}, \boldsymbol{x_1}$ - przybliżenia początkowe,
delta,epsilon - dokładności obliczeń,
maxit – maksymalna dopuszczalna liczba iteracji,

Wyjście algorytmu:

r - przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
v - wartość $f(r)$,
it - liczba wykonanych iteracji,
err - sygnalizacja błędu
0 - metoda zbieżna
1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w maxit iteracji.

Funkcja oblicza przybliżenia miejsca zerowego według wcześniej opisanego wzoru. Funkcja zwraca błąd gdy w zadanej maksymalnej liczbie iteracji nie udało się osiągnąć wyniku z zadaną dokładnością.

4. Zadanie 4

4.1. Opis

Celem zadania było znalezienie pierwiastka równania $\sin(x) - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 0$ metodą bisekcji, Newtona oraz siecznych dla zadanych parametrów.

4.2. Rozwiązanie i wnioski

Metoda	$\tilde{r}$	$f(\tilde{r})$	Iteracje
Bisekcji	1.9337539672851562	-2.702768013840e-7	16
Newtona	1.933753779789742	-2.242331631486e-8	4
Siecznych	1.933753644474301	1.564525129449e-7	4

Patrząc na powyższą tabelę można stwierdzić, że metody Newtona oraz Stycznych potrzebowały mniejszej ilości iteracji aby wyznaczyć przybliżenie pierwiastka z zadaną precyzją. Wynika to z faktu, że rząd zbieżności metody bisekcji to 1 podczas gdy rząd zbieżności metod Newtona oraz siecznych to odpowiednio 2 oraz 1.618.

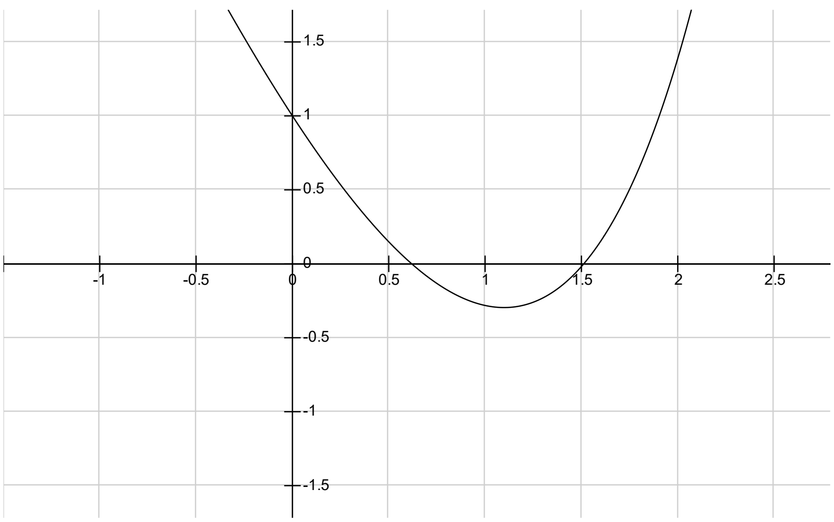
5. Zadanie 5

5.1. Opis

Celem zadania było znalezienie punktu przecięcia funkcji $y = 3x$ oraz $y = e^x$ metodą bisekcji z zadaną precyzją.

5.2. Rozwiązanie i wnioski

Problem znalezienia punktu przecięcia dwóch wyżej wymienionych funkcji można sprowadzić do znalezienia pierwiastka równania $e^x - 3x = 0$. W tym celu można wykorzystać metodą bisekcji. Aby metoda działała poprawnie należy znaleźć przedział początkowy dla którego funkcja zmienia znak. Najprostszym sposobem na wybranie tego przedziału jest przeanalizowanie wykresu funkcji.



Rysunek 1: Wykres funkcji $e^x - 3x$ stworzony za pomocą programu FooPlot

Patrząc na powyższy wykres można oszacować, że dwa miejsca zerowe funkcji znajdują się w przedziałach odpowiednio [0.5, 0.75] oraz [1.45, 1.6].

Wyniki:

Przedział	$\tilde{r}$	$f(\tilde{r})$	Iteracje
[0.5, 0.75]	0.619140625	-9.066320343276e-5	7
[1.45, 1.6]	1.512109375	-3.868007140984e-5	7

Jak widać oszacowanie punktów skrajnych przedziałów pozwoliło znaleźć miejsca zerowe funkcji z zadaną dokładnością w ciągu siedmiu iteracji.

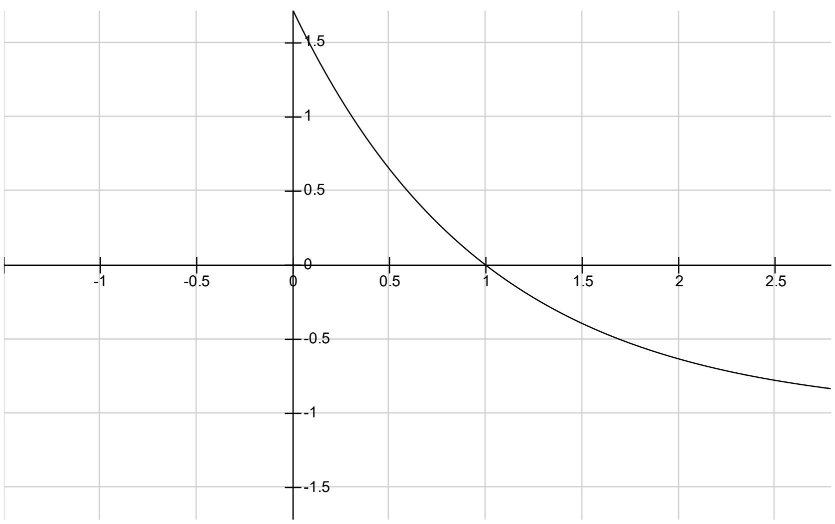
6. Zadanie 6

6.1. Opis

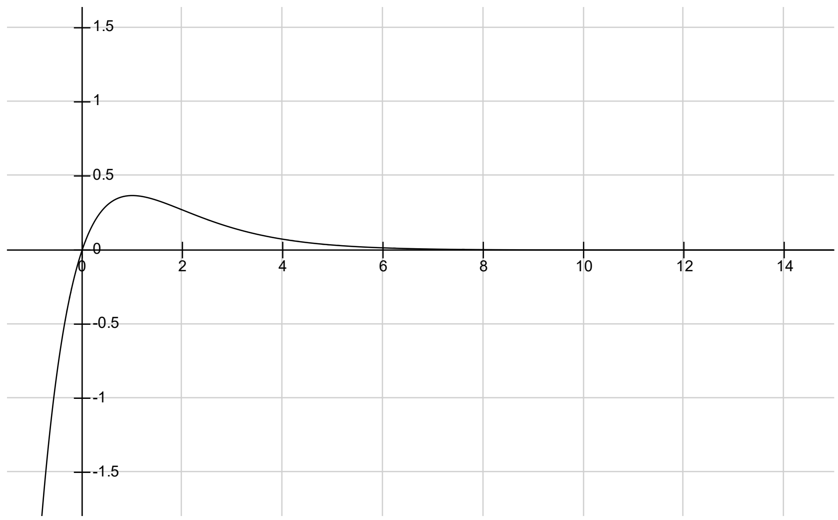
Celem zadania było znalezienie miejsc zerowych funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = xe^{-x}$ metodą bisekcji, Newtona oraz siecznych z zadaną precyzją obliczeń.

6.2. Rozwiązanie i wnioski

Podobnie jak w poprzednim zadaniu w celu wyznaczenia przedziału początkowego oraz przybliżeń początkowych posłużono się wykresem funkcji.



Rysunek 2: Wykres funkcji e^{1-x}-1 stworzony za pomocą programu FooPlot



Rysunek 3:Wykres funkcji xe^{-x} stworzony za pomocą programu FooPlot

Wyniki zwracane przez poszczególne metody dla rozwiązania równania $e^{1-x} - 1 = 0$ z określonymi parametrami startowymi:

Metoda bisekcji:

Przedział	$\tilde{r}$	$f(\tilde{r})$	**Iteracje**
[0.6, 1.5]	0.9999984741210938	1.5258800702966e-6	16
[-10, 10]	1.0000038146972656	-3.8146899896673e-6	20
[-1000, 1000]	1.0000020265579224	-2.0265558688947e-6	27

Metoda Newtona:

x_0	$\tilde{r}$	$f(\tilde{r})$	**Iteracje**
1.5	0.9999999984736215	1.52637857908644e-9	4
10	-	-	-
1000	-	-	-

Metoda siecznych:

x_0, x_1	$\tilde{r}$	$f(\tilde{r})$	**Iteracje**
0, 1.5	0.9999992344364774	7.65563815674497e-7	5
0.2, 10	1.0000010605272427	-1.0605266803631e-6	8
2, 4	1.0000000075382163	-7.5382162734172e-9	9

Patrząc na powyższe tabele można zauważyć, że metoda bisekcji oraz metoda siecznych zwracają poprawne przybliżenia pierwiastka. Metoda Newtona dla przybliżenia początkowego równego 10 nie osiągnęła wymaganej precyzji, natomiast dla przybliżenia początkowego równego 1000 pochodna funkcji była bliska zeru co uniemożliwiło obliczenia. Korzystanie z metody Newtona dla dużych wartości x_0 w przypadku tej funkcji nie jest możliwe.

Wyniki zwracane przez poszczególne metody dla rozwiązania równania $xe^{-x} = 0$ z określonymi parametrami startowymi:

Metoda bisekcji:

Przedział	$\tilde{r}$	$f(\tilde{r})$	**Iteracje**
[-1, 1.5]	3.814697265625e-6	3.81468271373752e-6	17
[-15, 10]	9.536743164062e-6	9.53665221502600e-6	19
[-1000, 30]	1.639127731323e-6	1.63912504458572e-6	26

Metoda Newtona:

x_0	$\tilde{r}$	$f(\tilde{r})$	**Iteracje**
0.5	-3.06424934164617e-7	-3.064250280608e-7	5
1	-	-	-
40	40.0	1.6993417021166e-16	-

Metoda siecznych:

x_0, x_1	$\tilde{r}$	$f(\tilde{r})$	**Iteracje**
0.5, 1.5	5.372227830220525e-6	5.3721989694661e-6	9
0.2, 3	32.07285077590668	3.7763779466030e-13	1
2, 4	14.293894652410307	8.85912857016528e-6	13

Podobnie jak w poprzednim przypadku metoda bisekcji zwraca poprawne przybliżenia. Można również zauważyć, że tak samo jak w przypadku funkcji $f_1(x)$ im większy przedział początkowy tym więcej iteracji algorytmu potrzeba by wyznaczyć miejsce zerowe.

Metoda Newtona nie może być wykorzystana z parametrem $x_0 = 1$ ponieważ pochodna funkcji $f_2(x)$ zadana wzorem $y = -(x-1)e^{-x}$ przyjmuje wartość 0 dla tego argumentu. Użycie tej metody dla dalszych argumentów jest ryzykowne z uwagi na bardzo jednostajne zachowanie funkcji dla $x > 4$ przez co pochodna funkcji jest bliska zeru. Można zauważyć również, że metoda Newtona wywołana z tymi argumentami jako przybliżeniami zwraca je jako miejsca zerowe funkcji ponieważ wartości $f_2(x)$ dla tych argumentów są bardzo bliskie zeru.

Metoda siecznych również zwraca wartości x dalekie od faktycznego miejsca zerowego ponieważ funkcja przyjmuje dla tych argumentów wartości bliskie zeru.