Московский физико-технический институт

Высшая школа программной инженерии

M2. Бильярд

Численное моделирование упругих столкновений в системе бильярдных шаров

Выполнили студенты Б13-402:

Жердев Егор

Савельев Данил

Долгопрудный

8 октября 2025 г.

Содержание

Введение **2**

Физическая постановка задачи **2**

Физические модели **3**

Метод 1: Применение законов сохранения . . . 3

Метод 2: Моделирование с силой Гука . . . 5

Дополнительное задание: Упрощённая игра в бильярд . . . 7

Численные методы решения **9**

Результаты и анализ **11**

Сравнение методов расчёта . . . 11

Влияние параметров на динамику столкновений . . . 11

Заключение **12**

Введение

Задача. Моделирование столкновений идеально гладкого бильярдного шара с бесконечно тяжёлой стенкой и с другим шаром двумя различными подходами: аналитическим (с применением законов сохранения) и численным (на основе дифференциальных уравнений).

Цель работы: составить программу для моделирования упругих столкновений в бильярде, реализовать два метода расчёта, провести их сравнение и создать простейшую версию игры в бильярд с алгоритмом выбора направления удара.

Физическая постановка задачи

Рассмотрим систему бильярдных шаров радиуса R и массы m на гладкой поверхности стола. В данной работе исследуем следующие виды столкновений:

1. **Столкновение с бесконечно тяжёлой стенкой** - шар отражается от неподвижной стенки
2. **Столкновение двух шаров** - взаимодействие между подвижными объектами

Основные предположения:

- Шары считаются абсолютно твёрдыми и идеально гладкими
- Столкновения абсолютно упругие (сохраняются кинетическая энергия и импульс)
- Трение о поверхность стола отсутствует
- Вращение шаров не учитывается (поступательное движение)

Координатная система: Используем декартову систему координат с началом в углу стола. Положение i-го шара задаётся вектором $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$, скорость – вектором $\vec{v}_i = (v_{ix}, v_{iy})$.

Условия столкновения:

- *Со стенкой:* шар касается границы стола
- *Между шарами:* расстояние между центрами равно $2R$: $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = 2R$

Физические модели

Метод 1: Применение законов сохранения

Столкновение со стенкой

При столкновении с вертикальной или горизонтальной стенкой компонента скорости, перпендикулярная стенке, меняет знак, а параллельная остаётся неизменной.

Для вертикальной стенки (в точке $x = x_{\text{wall}}$):

$$\begin{cases} v'_x = -v_x \\ v'_y = v_y \end{cases}$$

Для горизонтальной стенки (в точке $y = y_{\text{wall}}$):

$$\begin{cases} v'_x = v_x \\ v'_y = -v_y \end{cases}$$

Столкновение двух шаров

Рассмотрим столкновение двух шаров с массами m_1, m_2 и скоростями $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ до столкновения.

Система уравнений:

- **Закон сохранения импульса:**

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

- **Закон сохранения энергии:**

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$$

Решение: Введём систему координат, связанную с линией центров в момент столкновения.

Пусть $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный от центра первого шара к центру второго:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

Разложим скорости на нормальные и тангенциальные компоненты:

$$v_{1n} = \vec{v}_1 \cdot \vec{n}, \qquad v_{1\tau} = \vec{v}_1 - v_{1n}\vec{n}$$
$$v_{2n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n}, \qquad v_{2\tau} = \vec{v}_2 - v_{2n}\vec{n}$$

При упругом столкновении:

- Тангенциальные компоненты не изменяются: $v'_{1\tau} = v_{1\tau}$, $v'_{2\tau} = v_{2\tau}$
- Нормальные компоненты определяются из законов сохранения

Вывод формул для нормальных компонент:

Применяем законы сохранения только к нормальным компонентам:

Закон сохранения импульса (нормальная компонента):

$$m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = m_1 v'_{1n} + m_2 v'_{2n} \quad (1)$$

Закон сохранения энергии (нормальная компонента):

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1n}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2n}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1n}'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2n}'^2 \quad (2)$$

Из уравнения (2) после алгебраических преобразований получаем условие:

$$v_{1n} - v'_{1n} = -(v_{2n} - v'_{2n}) \quad (3)$$

Решая систему уравнений (1) и (3), получаем:

$$v'_{1n} = \frac{(m_1 - m_2) v_{1n} + 2 m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}$$

$$v'_{2n} = \frac{(m_2 - m_1) v_{2n} + 2 m_1 v_{1n}}{m_1 + m_2}$$

Окончательные скорости:

$$\vec{v}_1' = v'_{1n} \vec{n} + \vec{v}_{1\tau}, \quad \vec{v}_2' = v'_{2n} \vec{n} + \vec{v}_{2\tau}$$

Частный случай: равные массы ($m_1 = m_2$)

$$v'_{1n} = v_{2n}, \quad v'_{2n} = v_{1n}$$

Нормальные компоненты скоростей просто обмениваются.

Проверка других частных случаев:

Один шар неподвижен ($v_{2n} = 0$):

$$v'_{1n} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1n}, \quad v'_{2n} = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_{1n}$$

При $m_1 \gg m_2$: $v'_{1n} \approx v_{1n}$, $v'_{2n} \approx 2 v_{1n}$ (тяжёлый шар почти не изменяет скорость)

При $m_1 \ll m_2$: $v'_{1n} \approx -v_{1n}$, $v'_{2n} \approx 0$ (лёгкий шар отскакивает)

Метод 2: Моделирование с силой Гука

В данном подходе шары рассматриваются как деформируемые объекты, подчиняющиеся закону Гука.

При соприкосновении возникает упругая сила, пропорциональная деформации.

Модель силы взаимодействия

Пусть Δ – величина взаимного перекрытия шаров:

$$\Delta = 2R - |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$$

При $\Delta > 0$ (шары перекрываются) возникает сила отталкивания:

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{n}$$

где k – коэффициент жёсткости(сопротивления), $\vec{n}$ – единичный вектор от центра первого шара к центру второго и наоборот.

Система дифференциальных уравнений

Для каждого шара применяем второй закон Ньютона:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12} \\ m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \end{cases}$$

Покомпонентно:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = F_x \\ m_1 \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = F_y \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = -F_x \\ m_2 \dfrac{d^2 y_2}{dt^2} = -F_y \end{cases}$$

где сила взаимодействия:

$$F_x = -k\Delta \frac{x_2 - x_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

$$F_y = -k\Delta \frac{y_2 - y_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

Начальные условия

В момент первого контакта ($t = 0$, $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = 2R$):

$$\vec{r}_1(0) = \vec{r}_{1,0}, \qquad \vec{v}_1(0) = \vec{v}_{1,0}$$

$$\vec{r}_2(0) = \vec{r}_{2,0}, \qquad \vec{v}_2(0) = \vec{v}_{2,0}$$

Условие окончания взаимодействия

Столкновение считается завершённым, когда:

1. Шары расходятся: $\Delta \leq 0$
2. Относительная скорость направлена от центра столкновения: $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{n} > 0$

Выбор параметров модели

Коэффициент жёсткости k выбирается достаточно большим для обеспечения:

- Малого времени взаимодействия
- Малой максимальной деформации ($\Delta_{\max} \ll R$)
- Сохранения энергии с заданной точностью

Дополнительное задание: Упрощённая игра в бильярд

Постановка задачи

Реализация алгоритма выбора направления удара по битку для попадания прицельного шара в заданную лузу.

Геометрия задачи

Пусть:

- $\vec{r}_b$ – позиция битка (белый шар)
- $\vec{r}_t$ – позиция прицельного шара (цветной шар)
- $\vec{r}_p$ – позиция лузы (цель)
- R – радиус шаров

Алгоритм расчёта направления удара

Шаг 1: Определение точки контакта

Для попадания прицельного шара в лузу, биток должен ударить его таким образом, чтобы линия центров в момент контакта была направлена к лузе.

Точка контакта $\vec{r}_c$ (позиция центра битка в момент столкновения) находится на линии, соединяющей центр прицельного шара с лузой, на расстоянии $2R$ от центра прицельного шара:

$$\vec{r}_c = \vec{r}_t - 2R\frac{\vec{r}_p - \vec{r}_t}{|\vec{r}_p - \vec{r}_t|}$$

Шаг 2: Направление удара

Направление удара битка определяется вектором от центра битка к точке контакта:

$$\vec{d} = \frac{\vec{r}_c - \vec{r}_b}{|\vec{r}_c - \vec{r}_b|}$$

Шаг 3: Проверка возможности удара

Удар возможен, если:

1. Расстояние от битка до точки контакта больше $2R$: $|\vec{r}_c - \vec{r}_b| > 2R$
2. На траектории битка нет препятствий (других шаров)
3. Угол удара не слишком острый (практическое ограничение)

Расчёт необходимой скорости

Для центрального удара (биток попадает точно в центр прицельного шара) при равных массах:

$$v_{\text{биток}}^{\text{после}} = 0, \quad v_{\text{прицел}}^{\text{после}} = v_{\text{биток}}^{\text{до}}$$

Для нецентрального удара скорость прицельного шара после столкновения:

$$v_{\text{прицел}} = v_{\text{биток}} \cos\theta$$

где θ – угол между линией центров и направлением движения битка.

Алгоритм поиска оптимального угла

При наличии нескольких возможных траекторий:

1. Рассчитать все возможные точки контакта для попадания в лузу
2. Для каждой точки проверить достижимость и отсутствие препятствий
3. Выбрать траекторию с минимальным углом отклонения или минимальной силой удара
4. Рассчитать необходимые параметры удара (направление и сила)

Учёт отражений от бортов

Для более сложных траекторий с отражениями:

- Использовать принцип зеркального отражения
- Построить виртуальные изображения лузы относительно бортов
- Рассчитать прямую траекторию к виртуальной лузе
- Проверить, что траектория проходит через допустимые области стола

Численные методы решения

Численное интегрирование системы ОДУ

Для решения систем дифференциальных уравнений, возникающих в модели с силой Гука, используем метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

Преобразование к системе первого порядка

Исходная система уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12} \\ m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\vec{F}_{12} \end{cases}$$

В терминах скоростей:

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}, \quad \vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt}$$

Получаем систему первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v}_1 \\ \dfrac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{v}_2 \\ \dfrac{d\vec{v}_1}{dt} = \dfrac{\vec{F}_{12}}{m_1} \\ \dfrac{d\vec{v}_2}{dt} = -\dfrac{\vec{F}_{12}}{m_2} \end{cases}$$

Алгоритм Рунге-Кутты 4-го порядка

Для системы $\dfrac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{y})$ с начальным условием $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$:

1. Выбираем шаг интегрирования Δh
2. На каждом шаге вычисляем коэффициенты:

$$\vec{k}_1 = \Delta h \vec{f}(t_n, \vec{y}_n) \tag{1}$$
$$\vec{k}_2 = \Delta h \vec{f}(t_n + \Delta h/2, \vec{y}_n + \vec{k}_1/2) \tag{2}$$
$$\vec{k}_3 = \Delta h \vec{f}(t_n + \Delta h/2, \vec{y}_n + \vec{k}_2/2) \tag{3}$$
$$\vec{k}_4 = \Delta h \vec{f}(t_n + \Delta h, \vec{y}_n + \vec{k}_3) \tag{4}$$

3. Обновляем решение:

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{1}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4)$$

Детекция столкновений

Проблема: При использовании фиксированного шага интегрирования может произойти "проскакивание"момента столкновения.

Решение: Адаптивный алгоритм детекции:

1. На каждом шаге проверяем условие $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| < 2R$
2. При пересечении используем бинпоиск для точного определения момента контакта
3. Корректируем временной шаг для точного попадания в момент столкновения

Выбор шага интегрирования

Критерии выбора временного шага Δh:

- **Точность:** Δh должно быть достаточно малым для обеспечения заданной точности

Результаты и анализ

Сравнение методов расчёта

Валидация численных методов

Для проверки корректности реализации сравниваем результаты двух подходов:

1. Аналитический расчёт по законам сохранения
2. Численное моделирование с силой Гука

Тестовые случаи:

1. **Центральное столкновение двух одинаковых шаров**
   - Начальные условия: $m_1 = m_2 = m$, $\vec{v}_1 = (v_0, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 0)$
   - Ожидаемый результат: $\vec{v}'_1 = (0, 0)$, $\vec{v}'_2 = (v_0, 0)$ (полная передача импульса)
2. **Нецентральное столкновение под углом** 45
   - Проверка сохранения компонент импульса и кинетической энергии
3. **Столкновение со стенкой**
   - Простейший случай для валидации отражений
   - Точное совпадение с аналитическим решением

Влияние параметров на динамику столкновений

1. **Начальная скорость**:
   - При увеличении скорости время контакта уменьшается
   - Максимальная сила растёт пропорционально скорости в модели Гука
2. **Угол столкновения**:
   - Скользящие удары (большой угол) более чувствительны к численным ошибкам
   - При углах близких к 90 требуется повышенная точность расчётов
3. **Соотношение масс**:
   - При $m_1 \gg m_2$: лёгкий шар приобретает скорость $\approx 2v_1$
   - При $m_1 \ll m_2$: тяжёлый шар практически не движется

Заключение

В работе проведено комплексное исследование динамики упругих столкновений в системе бильярдных шаров с использованием различных физических моделей и численных методов.

Основные достижения работы:

1. **Реализованы два подхода к моделированию столкновений:**
   - Аналитический метод на основе законов сохранения импульса и энергии
   - Численный метод с детальным моделированием силового взаимодействия
2. **Исследована модель контактного взаимодействия:**
   - Модель с силой Гука ($F \sim -\Delta x$) – простая и эффективная линейная модель
3. **Разработан эффективный численный алгоритм:**
   - Использование метода Рунге-Кутты 4-го порядка для интегрирования ОДУ
   - Адаптивная детекция столкновений с коррекцией временного шага
4. **Создана упрощённая версия игры в бильярд:**
   - Алгоритм расчёта оптимального направления удара
   - Геометрический анализ траекторий с учётом препятствий
   - Обработка отражений от бортов стола