Московский физико-технический институт

Высшая школа программной инженерии

М4. Шар на столе

Численное моделирование качения шара
по шероховатой поверхности с учётом вращения

Выполнили студенты Б13-402:

Жердев Егор

Савельев Данил

Долгопрудный

28 октября 2025 г.

Содержание

Введение

Задача. Моделирование движения шара (мяча) по шероховатой поверхности (горизонтальной или наклонной) с учётом вращательного и поступательного движения, сухого трения и возможности проскальзывания. Исследование режимов качения без проскальзывания и с проскальзыванием, а также упругих столкновений с бортами и другими шарами.

Цель работы: составить программу для численного решения связанной системы дифференциальных уравнений поступательного и вращательного движения шара на шероховатой поверхности, исследовать условия перехода между режимами качения и проскальзывания, проверить выполнение законов сохранения энергии и момента импульса.

Физическая постановка задачи

Рассмотрим однородный шар радиуса R и массы m, движущийся по шероховатой поверхности. На шар действуют следующие силы:

1. **Сила тяжести:** $\vec{F}_g = m\vec{g}$, где $\vec{g}$ – ускорение свободного падения
2. **Сила нормальной реакции опоры:** $\vec{N}$ – перпендикулярна поверхности
3. **Сила трения:** $\vec{F}_{\text{тр}}$ – действует в точке контакта с поверхностью

Координатная система:

Для наклонной плоскости с углом наклона θ вводим оси:

- Ось x направлена вдоль наклонной плоскости вниз
- Ось y перпендикулярна плоскости (направление нормали)
- Начало координат в точке, откуда начинается движение

Для горизонтальной поверхности используем стандартную декартову систему координат xOy.

Параметры шара:

- Масса: m
- Радиус: R
- Момент инерции относительно центра: $I = \dfrac{2}{5}mR^2$ (для однородного шара)

Параметры поверхности:

- Угол наклона: θ (для наклонной плоскости)

- Коэффициент сухого трения: μ

Режимы движения:

1. **Качение без проскальзывания:** связь между линейной и угловой скоростями $v = \omega R$
2. **Качение с проскальзыванием:** условие связи нарушается, $v \neq \omega R$
3. **Чистое скольжение:** вращение отсутствует или пренебрежимо мало, $\omega \approx 0$

Начальные условия:

В общем случае при $t = 0$:

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0, \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0, \quad \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}_0$$

где $\vec{v}_0$ – начальная линейная скорость центра масс, $\vec{\omega}_0$ – начальная угловая скорость.

Физические модели

Скатывание по наклонной плоскости

Рассмотрим шар, скатывающийся по наклонной плоскости с углом наклона θ к горизонту.

Уравнения движения

Применяем **второй закон Ньютона** для поступательного движения центра масс:

$$m\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$$

В проекциях на оси (ось x вдоль плоскости вниз, y перпендикулярно плоскости):

$$\begin{cases} ma_x = mg\sin\theta - F_{\text{тр}} \\ ma_y = N - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Применяем **основное уравнение динамики вращательного движения**:

$$I\frac{d\omega}{dt} = M$$

где M – момент силы трения относительно центра масс:

$$M = F_{\text{тр}} \cdot R$$

Для однородного шара $I = \dfrac{2}{5}mR^2$, следовательно:

$$\frac{2}{5}mR^2\frac{d\omega}{dt} = F_{\text{тр}}R$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{5F_{\text{тр}}}{2mR}$$

Качение без проскальзывания

При качении без проскальзывания выполняется **условие связи**:

$$v = \omega R \quad \Rightarrow \quad a = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}$$

Сила трения в этом режиме – **сила трения покоя** $F_{\text{тр}} \leq \mu N = \mu mg\cos\theta$.

Подставляем условие связи в уравнение вращения:

$$\frac{a}{R} = \frac{5F_{\text{тр}}}{2mR} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{тр}} = \frac{2ma}{5}$$

Подставляем в уравнение поступательного движения:

$$ma = mg\sin\theta - \frac{2ma}{5}$$

$$ma + \frac{2ma}{5} = mg\sin\theta$$

$$\frac{7ma}{5} = mg\sin\theta$$

Отсюда ускорение центра масс при качении без проскальзывания:

$$\boxed{a = \frac{5g\sin\theta}{7}}$$

Соответствующая сила трения:

$$F_{\text{тр}} = \frac{2ma}{5} = \frac{2mg\sin\theta}{7}$$

Условие качения без проскальзывания:

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N \quad \Rightarrow \quad \frac{2mg\sin\theta}{7} \leq \mu mg\cos\theta$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta \leq \frac{7\mu}{2}}$$

При нарушении этого условия происходит переход в режим проскальзывания.

Качение с проскальзыванием

При проскальзывании условие связи $v = \omega R$ нарушается, и действует **сила трения скольжения**:

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\theta$$

Направление силы трения определяется знаком относительной скорости точки контакта:

$$v_{\text{отн}} = v - \omega R$$

$$F_{\text{тр}} = -\mu mg\cos\theta \cdot (v_{\text{отн}})$$

Система уравнений в режиме проскальзывания:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = g\sin\theta - \mu g\cos\theta \cdot (v - \omega R) \\ \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{5\mu g\cos\theta}{2R} \cdot (v - \omega R) \end{cases}$$

Переход в режим качения без проскальзывания:

Происходит при выполнении условий:

1. $|v - \omega R| < \varepsilon$ (малая относительная скорость)
2. $\left|\dfrac{2mg\sin\theta}{7}\right| < \mu mg\cos\theta$ (условие для силы трения покоя)

Аналитическое решение для качения без проскальзывания

При $a = \text{const} = \dfrac{5g\sin\theta}{7}$ и начальных условиях $v(0) = 0$, $x(0) = 0$:

$$v(t) = \frac{5g\sin\theta}{7}t$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5g\sin\theta}{7}t^2 = \frac{5g\sin\theta}{14}t^2$$

Угловая скорость:

$$\omega(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{5g\sin\theta}{7R}t$$

Анализ энергий:

Полная механическая энергия при скатывании без проскальзывания:

$$E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh$$

При $v = \omega R$ и $I = \dfrac{2}{5}mR^2$:

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\cdot\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2$$

При скатывании с высоты $h = x\sin\theta$ из состояния покоя:

$$mgh = \frac{7}{10}mv^2 \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

Это на $\sqrt{\dfrac{10}{7}} \approx 1.195$ раза меньше скорости при чистом скольжении ($v = \sqrt{2gh}$), что объясняется затратами энергии на вращение.

Произвольное качение по горизонтальной плоскости

Рассмотрим шар, движущийся по горизонтальной шероховатой поверхности с произвольными начальными линейной $\vec{v}_0$ и угловой $\vec{\omega}_0$ скоростями.

Уравнения движения в векторной форме

Для горизонтальной плоскости $\vec{g}$ направлено вертикально вниз, нормальная реакция уравновешивает силу тяжести: $N = mg$.

Поступательное движение:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{тр}}$$

Вращательное движение:

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}$$

где $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}_{\text{тр}}$ – момент силы трения.

Для плоского движения (вращение вокруг вертикальной оси z, перпендикулярной плоскости):

$$I_z\frac{d\omega_z}{dt} = M_z = R \cdot F_{\text{тр}}$$

Сила трения при произвольном движении

Относительная скорость точки контакта шара с поверхностью:

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_{\text{центра}} - \vec{v}_{\text{вращ}} = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Для вращения вокруг вертикальной оси и движения в горизонтальной плоскости xOy:

$$\vec{v}_{\text{отн}} = (v_x, v_y) - (-\omega_z R \sin\varphi, \omega_z R \cos\varphi)$$

где φ – угол между направлением движения и осью x.

В общем случае в декартовых координатах:

$$\vec{v}_{\text{отн}} = (v_x - \omega_y R, v_y + \omega_x R)$$

Сила трения скольжения:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\mu N\frac{\vec{v}_{\text{отн}}}{|\vec{v}_{\text{отн}}|} = -\mu mg\frac{\vec{v}_{\text{отн}}}{|\vec{v}_{\text{отн}}|}$$

при $|\vec{v}_{\text{отн}}| > 0$ (проскальзывание).

Случай 1: Движение вдоль одной оси

Рассмотрим движение вдоль оси x с начальными условиями:

$$v_x(0) = v_0, \quad v_y(0) = 0, \quad \omega_z(0) = \omega_0$$

Относительная скорость точки контакта:

$$v_{\text{отн}} = v_x - \omega_z R$$

При проскальзывании ($v_{\text{отн}} \neq 0$):

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = -\mu g \cdot (v_{\text{отн}}) \\ \dfrac{d\omega_z}{dt} = \dfrac{\mu m g R}{I_z} \cdot (v_{\text{отн}}) = \dfrac{5\mu g}{2R} \cdot (v_{\text{отн}}) \end{cases}$$

Анализ эволюции системы:

Случай A: $v_0 > \omega_0 R$ (центр движется быстрее, чем "требует"вращение)

$$v_{\text{отн}} > 0 \quad \Rightarrow \quad (v_{\text{отн}}) = +1$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = -\mu g & \text{(линейная скорость уменьшается)} \\ \dfrac{d\omega_z}{dt} = +\dfrac{5\mu g}{2R} & \text{(угловая скорость увеличивается)} \end{cases}$$

Со временем v_x уменьшается, а ω_z растёт, пока не выполнится $v_x = \omega_z R$.

Случай B: $v_0 < \omega_0 R$ (вращение "опережает"поступательное движение)

$$v_{\text{отн}} < 0 \quad \Rightarrow \quad (v_{\text{отн}}) = -1$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = +\mu g & \text{(линейная скорость увеличивается)} \\ \dfrac{d\omega_z}{dt} = -\dfrac{5\mu g}{2R} & \text{(угловая скорость уменьшается)} \end{cases}$$

Система эволюционирует к состоянию $v_x = \omega_z R$.

Время установления качения без проскальзывания:

Пусть $v_0 > \omega_0 R$. Тогда:

$$v_x(t) = v_0 - \mu g t$$
$$\omega_z(t) = \omega_0 + \frac{5\mu g}{2R} t$$

Условие $v_x(t^*) = \omega_z(t^*) R$:

$$v_0 - \mu g t^* = \left(\omega_0 + \frac{5\mu g}{2R} t^*\right) R$$

$$v_0 - \mu g t^* = \omega_0 R + \frac{5\mu g}{2} t^*$$

$$v_0 - \omega_0 R = \mu g t^* + \frac{5\mu g}{2} t^* = \frac{7\mu g}{2} t^*$$

$$\boxed{t^* = \frac{2(v_0 - \omega_0 R)}{7\mu g}}$$

После установления качения без проскальзывания:

Сила трения становится силой трения покоя и не совершает работу. Шар движется равномерно с постоянной скоростью:

$$v_{\text{уст}} = \omega_{\text{уст}} R$$

где

$$v_{\text{уст}} = v_0 - \mu g t^* = v_0 - \frac{2(v_0 - \omega_0 R)}{7}$$

$$\boxed{v_{\text{уст}} = \frac{5v_0 + 2\omega_0 R}{7}}$$

Случай 2: Движение по окружности

Рассмотрим шар, запущенный по горизонтальной плоскости так, что его центр движется по окружности радиуса r с начальной линейной скоростью v_0 и угловой скоростью вращения ω_0.

Для движения по окружности требуется центростремительное ускорение:

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

которое обеспечивается силой трения:

$$F_{\text{тр}} = m\frac{v^2}{r}$$

При этом должно выполняться:

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N = \mu m g$$

Условие возможности движения по окружности:

$$\frac{v^2}{r} \leq \mu g \quad \Rightarrow \quad \boxed{v \leq \sqrt{\mu g r}}$$

При превышении этой скорости шар соскользнёт с траектории окружности.

Энергетические соотношения

При движении по горизонтальной плоскости с трением механическая энергия уменьшается:

$$\frac{dE}{dt} = -F_{\text{тр}} \cdot v_{\text{отн}} = -\mu m g |\vec{v}_{\text{отн}}|$$

Полная энергия системы:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mR^2\omega^2$$

После установления режима качения без проскальзывания ($v = \omega R$):

$$E_{\text{уст}} = \frac{7}{10}mv_{\text{уст}}^2$$

Потерянная энергия:

$$\Delta E = E_0 - E_{\text{уст}} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{5}mR^2\omega_0^2 - \frac{7}{10}mv_{\text{уст}}^2$$

Законы сохранения энергии и момента импульса

Проверка выполнения законов сохранения является важным критерием корректности численного моделирования.

Закон сохранения энергии

Полная механическая энергия системы:

$$E = E_{\text{кин}} + E_{\text{вращ}} + E_{\text{пот}}$$

где:

- $E_{\text{кин}} = \frac{1}{2}mv^2$ – кинетическая энергия поступательного движения
- $E_{\text{вращ}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{5}mR^2\omega^2$ – энергия вращательного движения
- $E_{\text{пот}} = mgh$ – потенциальная энергия в поле тяжести

Для одного шара:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mR^2\omega^2 + mgh$$

Изменение энергии:

1. При качении без проскальзывания по наклонной плоскости:

Трение покоя не совершает работу ($\vec{F}_{\text{тр}} \perp \vec{v}_{\text{контакта}}$), поэтому энергия сохраняется:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \text{const}$$

2. При проскальзывании:

Трение скольжения совершает отрицательную работу:

$$\frac{dE}{dt} = -F_{\text{тр}} \cdot v_{\text{отн}} = -\mu mg\cos\theta \cdot |v - \omega R|$$

Энергия уменьшается:

$$E(t) = E_0 - \int_0^t \mu mg\cos\theta \cdot |v(\tau) - \omega(\tau)R| d\tau$$

3. При упругих столкновениях:

В идеальном случае упругого столкновения энергия сохраняется:

$$E_{\text{до}} = E_{\text{после}}$$

При использовании модели с силой Гука энергия сохраняется, если пренебречь диссипацией.

Закон сохранения момента импульса

Момент импульса материальной точки относительно точки O:

$$\vec{L}_{\text{орб}} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Собственный момент импульса вращающегося тела:

$$\vec{L}_{\text{собств}} = I\vec{\omega}$$

Полный момент импульса шара:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} + I\vec{\omega}$$

Для движения в плоскости xOy с вращением вокруг оси z:

$$L_z = (x \cdot mv_y - y \cdot mv_x) + I\omega_z$$

Условия сохранения момента импульса:

Момент импульса сохраняется, если суммарный момент внешних сил равен нулю:

$$\sum \vec{M}_{\text{внешн}} = 0$$

1. Для шара на наклонной плоскости:

Относительно точки на оси вращения (перпендикулярной плоскости движения) момент силы тяжести и нормальной реакции равны нулю (они проходят через эту ось). Момент силы трения:

$$M = F_{\text{тр}} \cdot R$$

не равен нулю, поэтому момент импульса не сохраняется.

2. Для изолированной системы шаров на горизонтальной плоскости:

Если внешние силы (тяжесть, нормальная реакция) не создают момента относительно вертикальной оси, и трение о поверхность также не создаёт вертикального момента, то:

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_z = \text{const}$$

3. При упругих столкновениях:

Если столкновение происходит в изолированной системе, момент импульса сохраняется:

$$\vec{L}_{\text{до}} = \vec{L}_{\text{после}}$$

Диссипация энергии при установлении качения

При переходе от проскальзывания к качению без проскальзывания часть энергии диссипирует.

Начальная энергия (при v_0 и ω_0):

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{5}mR^2\omega_0^2$$

Конечная энергия (при $v_{\text{уст}} = \omega_{\text{уст}}R$):

$$E_{\text{уст}} = \frac{7}{10}mv_{\text{уст}}^2$$

Диссипированная энергия:

$$\Delta E = E_0 - E_{\text{уст}}$$

Эта энергия переходит в тепло за счёт работы силы трения скольжения:

$$Q = \int_0^{t^*} F_{\text{тр}} \cdot |v_{\text{отн}}| dt = \int_0^{t^*} \mu mg|v - \omega R| dt$$

Численная проверка: $Q \approx \Delta E$ (с точностью до ошибок численного интегрирования).

Численные методы решения

Преобразование к системе первого порядка

Исходная система уравнений второго порядка для поступательного и вращательного движения:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \\ I\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M} \end{cases}$$

Вводим переменные состояния:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Получаем систему первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \\ \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{\vec{F}}{m} \\ \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{\vec{M}}{I} \end{cases}$$

Для движения в плоскости xOy с вращением вокруг оси z перпендикулярной плоскости:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x \\ \dfrac{dy}{dt} = v_y \\ \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{F_x}{m} \\ \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{F_y}{m} \\ \dfrac{d\omega_z}{dt} = \dfrac{M_z}{I_z} \end{cases}$$

Вычисление сил и моментов

1. Для наклонной плоскости (угол θ):

Компоненты силы тяжести:

$$F_{g,x} = mg\sin\theta, \quad F_{g,y} = -mg\cos\theta$$

Нормальная реакция: $N = mg\cos\theta$

Относительная скорость точки контакта:

$$v_{\text{отн}} = v_x - \omega_z R$$

Сила трения:

$$F_{\text{тр}} = \begin{cases} -\mu N \cdot (v_{\text{отн}}), & \text{если } |v_{\text{отн}}| > \varepsilon \\ F_{\text{тр,покоя}}, & \text{если } |v_{\text{отн}}| \leq \varepsilon \end{cases}$$

где ε – малая пороговая величина для детекции качения без проскальзывания.

При качении без проскальзывания:

$$F_{\text{тр,покоя}} = \frac{2mg\sin\theta}{7}$$

(ограничена условием $|F_{\text{тр,покоя}}| \leq \mu N$)

Момент силы трения:

$$M_z = F_{\text{тр}} \cdot R$$

Полные силы:

$$F_x = mg\sin\theta - F_{\text{тр}}, \quad F_y = 0$$

2. Для горизонтальной плоскости:

Нормальная реакция: $N = mg$

Относительная скорость точки контакта в векторной форме:

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Для плоского случая ($\omega = \omega_z \vec{e}_z$, $\vec{R} = -R\vec{e}_z$ – вектор от центра к точке контакта):

$$\vec{v}_{\text{отн}} = (v_x, v_y) - \omega_z \vec{e}_z \times (-R\vec{e}_z) = (v_x, v_y)$$

Для учёта вращения в плоскости нужно рассматривать компоненты вращения ω_x, ω_y. В упрощённой модели:

$$\vec{v}_{\text{отн}} = (v_x - \omega_y R, v_y + \omega_x R)$$

Сила трения:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\mu mg \frac{\vec{v}_{\text{отн}}}{|\vec{v}_{\text{отн}}|}$$

при $|\vec{v}_{\text{отн}}| > \varepsilon$.

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

Для системы $\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{y})$, где $\vec{y} = (x, y, v_x, v_y, \omega_z)^T$:

1. Выбираем шаг интегрирования h
2. На каждом шаге вычисляем коэффициенты:

$$\vec{k}_1 = h\vec{f}(t_n, \vec{y}_n) \tag{1}$$
$$\vec{k}_2 = h\vec{f}(t_n + h/2, \vec{y}_n + \vec{k}_1/2) \tag{2}$$
$$\vec{k}_3 = h\vec{f}(t_n + h/2, \vec{y}_n + \vec{k}_2/2) \tag{3}$$
$$\vec{k}_4 = h\vec{f}(t_n + h, \vec{y}_n + \vec{k}_3) \tag{4}$$

3. Обновляем решение:

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{1}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4)$$

4. Обновляем время: $t_{n+1} = t_n + h$

Алгоритм обработки режимов движения

На каждом шаге интегрирования:

1. Вычисляем относительную скорость: $v_{\text{отн}} = v - \omega R$
2. Проверяем условие проскальзывания:

$$\text{если } |v_{\text{отн}}| > \varepsilon, \text{ то режим проскальзывания}$$

3. **В режиме проскальзывания:**
   - Сила трения: $F_{\text{тр}} = -\mu N \cdot (v_{\text{отн}})$
   - Интегрируем независимо v и ω
4. **В режиме качения без проскальзывания:**
   - Вычисляем силу трения из условия связи $a = \alpha R$:

     $$F_{\text{тр}} = \frac{2ma}{5}$$

     где a определяется из уравнения движения с учётом связи
   - Проверяем условие $|F_{\text{тр}}| \leq \mu N$
   - Если нарушается – переходим в режим проскальзывания
5. После интегрирования проверяем переход:

$$\text{если } |v_{n+1} - \omega_{n+1} R| < \varepsilon \text{ и } |F_{\text{тр}}| < \mu N$$

   то переходим в режим качения без проскальзывания

Заключение

В работе проведено комплексное исследование динамики шара, катящегося по шероховатой поверхности, с учётом поступательного и вращательного движения, трения и возможности перехода между различными режимами движения.

Основные выводы:

- При качении шара без проскальзывания по наклонной плоскости ускорение составляет $a = \dfrac{5g\sin\theta}{7}$, что меньше ускорения при чистом скольжении ($a = g\sin\theta$) за счёт затрат энергии на вращение
- Условие качения без проскальзывания: $\operatorname{tg}\theta \leq \dfrac{7\mu}{2}$.

  При нарушении этого условия происходит переход в режим проскальзывания
- Установившаяся скорость при качении без проскальзывания определяется законами сохранения импульса и момента импульса: $v_{\text{уст}} = \dfrac{5v_0 + 2\omega_0 R}{7}$
- Диссипация энергии при установлении качения без проскальзывания полностью определяется работой силы трения скольжения: $Q = \int F_{\text{тр}} \cdot |v_{\text{отн}}| dt$