Московский физико-технический институт

Высшая школа программной инженерии

M1. Полёт камня

Численное моделирование движения тела,
брошенного под углом к горизонту

Выполнили студенты Б13-402:

Жердев Егор

Савельев Данил

Долгопрудный

19 сентября 2025 г.

Содержание

Введение

Задача. Исследование движения камня, брошенного под углом α к горизонту в земном поле тяжести с начальной скоростью $\vec{v}_0$, с учётом различных моделей сопротивления воздуха.

Цель работы: составить программу для численного решения дифференциального уравнения движения камня, рассчитать его траекторию, определить точку падения и исследовать влияние начальных параметров броска и коэффициентов сопротивления на характер траектории.

Физическая постановка задачи

Рассмотрим движение материальной точки массы m в поле тяжести Земли. На точку действуют:

1. Сила тяжести: $\vec{F}_g = m\vec{g}$, где $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$ и $g \approx 9.81$ м/с^2
2. Сила сопротивления воздуха: $\vec{F}_{\text{сопр}}$, зависящая от модели

Начальные условия при $t = 0$:

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

где α – угол броска относительно горизонта, v_0 – начальная скорость.

Физические модели

Идеальный случай (без сопротивления воздуха)

В отсутствие сопротивления воздуха **второй закон Ньютона** имеет вид:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{g}$$

или в проекциях на оси:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -g \end{cases}$$

Решение: Интегрируем систему дифференциальных уравнений.

Горизонтальное движение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

Интегрируем первый раз от 0 до t:

$$\int_0^t \frac{d^2x}{dt^2}dt = \int_0^t 0dt$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_0^t = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt}(t) - \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

Из начального условия $\dfrac{dx}{dt}(0) = v_0 \cos\alpha$ находим:

$$\frac{dx}{dt}(t) = v_0 \cos\alpha$$

Интегрируем второй раз от 0 до t:

$$\int_0^t \frac{dx}{dt}dt = \int_0^t v_0 \cos\alpha dt$$

$$x(t) - x(0) = v_0 \cos\alpha \cdot t$$

Из начального условия $x(0) = 0$ находим:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t$$

Вертикальное движение:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

Интегрируем первый раз от 0 до t:

$$\int_0^t \frac{d^2y}{dt^2}dt = \int_0^t -gdt$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_0^t = -gt \Rightarrow \frac{dy}{dt}(t) - \frac{dy}{dt}(0) = -gt$$

Из начального условия $\frac{dy}{dt}(0) = v_0 \sin\alpha$ находим:

$$\frac{dy}{dt}(t) = v_0 \sin\alpha - gt$$

Интегрируем второй раз от 0 до t:

$$\int_0^t \frac{dy}{dt} dt = \int_0^t (v_0 \sin\alpha - gt) dt$$

$$y(t) - y(0) = v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}$$

Из начального условия $y(0) = 0$ находим:

$$y(t) = v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}$$

Уравнение траектории $\boldsymbol{y(x)}$: Исключая время из уравнений движения, получаем уравнение траектории. Из $x(t)$ выражаем время:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

Подставляем в уравнение для $y(t)$:

$$y(x) = v_0 \sin\alpha \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$$

Дальность полёта $\boldsymbol{L}$ находим из условия $y(L) = 0$:

$$L \tan\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = 0$$

$$L\left(\tan\alpha - \frac{gL}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\right) = 0$$

Отличное от нуля решение:

$$\tan\alpha = \frac{gL}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \Rightarrow L = \frac{2v_0^2 \cos^2\alpha \tan\alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Максимальную высоту $\boldsymbol{H}$ находим из условия $\frac{dy}{dt}(t_H) = 0$:

$$v_0 \sin\alpha - gt_H = 0 \Rightarrow t_H = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

Подставляем в уравнение для $y(t)$:

$$H = v_0 \sin\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Модель с вязким трением ($F \sim v$)

Сила сопротивления пропорциональна скорости:

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -k\vec{v}$$

где $k > 0$ – коэффициент сопротивления.

Второй закон Ньютона:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{g} - k\vec{v}$$

или в проекциях:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k\dfrac{dx}{dt} \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg - k\dfrac{dy}{dt} \end{cases}$$

Введя обозначения $\gamma = \dfrac{k}{m}$ — коэффициент затухания, получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \gamma\dfrac{dx}{dt} = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \gamma\dfrac{dy}{dt} = -g \end{cases}$$

Решение: Решаем систему дифференциальных уравнений.

Горизонтальное движение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} = 0$$

Введем обозначение для скорости: $v_x = \dfrac{dx}{dt}$. Тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{dv_x}{dt} + \gamma v_x = 0$$

Разделяем переменные и интегрируем от 0 до t:

$$\int_{v_0 \cos\alpha}^{v_x(t)} \frac{dv_x}{v_x} = -\gamma\int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{v_x}{v_0\cos\alpha}\right) = -\gamma t$$

$$v_x(t) = v_0\cos\alpha \cdot e^{-\gamma t}$$

Интегрируем для нахождения координаты x:

$$\int_0^{x(t)} dx = \int_0^t v_0\cos\alpha \cdot e^{-\gamma t}dt$$

$$x(t) = v_0\cos\alpha\left[-\frac{e^{-\gamma t}}{\gamma}\right]_0^t = \frac{v_0\cos\alpha}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})$$

Вертикальное движение:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma\frac{dy}{dt} = -g$$

Введем обозначение для скорости: $v_y = \dfrac{dy}{dt}$. Тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{dv_y}{dt} + \gamma v_y = -g$$

Это линейное неоднородное уравнение первого порядка. Решаем методом вариации постоянной.

Сначала находим общее решение однородного уравнения:

$$\frac{dv_y}{dt} + \gamma v_y = 0$$

Разделяем переменные:

$$\int \frac{dv_y}{v_y} = -\gamma \int dt$$

$$\ln|v_y| = -\gamma t + C$$

$$v_y^{\text{одн}} = Ce^{-\gamma t}$$

Теперь ищем решение неоднородного уравнения в виде:

$$v_y(t) = C(t)e^{-\gamma t}$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$\frac{d}{dt}\left[C(t)e^{-\gamma t}\right] + \gamma C(t)e^{-\gamma t} = -g$$

$$C'(t)e^{-\gamma t} - \gamma C(t)e^{-\gamma t} + \gamma C(t)e^{-\gamma t} = -g$$

$$C'(t)e^{-\gamma t} = -g$$

$$C'(t) = -ge^{\gamma t}$$

Интегрируем:

$$C(t) = -g\int e^{\gamma t}dt = -\frac{g}{\gamma}e^{\gamma t} + A$$

Подставляем обратно:

$$v_y(t) = \left(-\frac{g}{\gamma}e^{\gamma t} + A\right)e^{-\gamma t} = -\frac{g}{\gamma} + Ae^{-\gamma t}$$

Из начального условия $v_y(0) = v_0 \sin\alpha$:

$$-\frac{g}{\gamma} + A = v_0\sin\alpha \Rightarrow A = v_0\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}$$

Таким образом:

$$v_y(t) = \left(v_0\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}$$

Интегрируем для нахождения координаты y:

$$\int_0^y dy = \int_0^t \left[\left(v_0 \sin\alpha + \frac{g}{\gamma} \right) e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \right] dt$$

$$y(t) = \left(v_0 \sin\alpha + \frac{g}{\gamma} \right) \left[-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma t} \right]_0^t - \frac{g}{\gamma} t$$

$$y(t) = -\frac{1}{\gamma} \left(v_0 \sin\alpha + \frac{g}{\gamma} \right) (e^{-\gamma t} - 1) - \frac{g}{\gamma} t$$

$$y(t) = \frac{1}{\gamma} \left(v_0 \sin\alpha + \frac{g}{\gamma} \right) (1 - e^{-\gamma t}) - \frac{g}{\gamma} t$$

Вывод уравнения траектории $y(x)$:

Из уравнения для горизонтальной координаты:

$$x(t) = \frac{v_0 \cos\alpha}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t})$$

Выразим время через координату x:

$$1 - e^{-\gamma t} = \frac{\gamma x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$t = -\frac{1}{\gamma} \ln\left(1 - \frac{\gamma x}{v_0 \cos\alpha} \right)$$

Теперь подставим эти выражения в уравнение для вертикальной координаты:

$$y(t) = \frac{1}{\gamma} \left(v_0 \sin\alpha + \frac{g}{\gamma} \right) (1 - e^{-\gamma t}) - \frac{g}{\gamma} t$$

Получаем:

$$y(x) = \frac{1}{\gamma} \left(v_0 \sin\alpha + \frac{g}{\gamma} \right) \cdot \left(\frac{\gamma x}{v_0 \cos\alpha} \right) + \frac{g}{\gamma^2} \ln\left(1 - \frac{\gamma x}{v_0 \cos\alpha} \right)$$

Упрощаем:

$$y(x) = x \tan\alpha + \frac{g x}{\gamma v_0 \cos\alpha} + \frac{g}{\gamma^2} \ln\left(1 - \frac{\gamma x}{v_0 \cos\alpha} \right)$$

Это и есть уравнение траектории для модели с вязким трением.

Проверка предела при $\gamma \to 0$: Используем разложение логарифма в ряд Тейлора:

$$\ln(1 - u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \cdots, \quad \text{где } u = \frac{\gamma x}{v_0 \cos\alpha}$$

Тогда:

$$y(x) = x \tan\alpha + \frac{g x}{\gamma v_0 \cos\alpha} + \frac{g}{\gamma^2} \left(-\frac{\gamma x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{\gamma^2 x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} + o(\gamma^3) \right)$$

$$= x \tan\alpha + \frac{g x}{\gamma v_0 \cos\alpha} - \frac{g x}{\gamma v_0 \cos\alpha} - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} + o(\gamma)$$

$$= x \tan\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} + o(\gamma) \xrightarrow{\gamma \to 0} x \tan\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}$$

Что совпадает с уравнением траектории для идеального случая.

Модель с лобовым сопротивлением ($F \sim v^2$)

Сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости и направлена противоположно вектору скорости:

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -c|\vec{v}|\vec{v} = -cv\vec{v}$$

где $c > 0$ – коэффициент лобового сопротивления, $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Второй закон Ньютона:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{g} - cv\vec{v}$$

или в проекциях на оси:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -c\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2} \cdot \dfrac{dx}{dt} \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg - c\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2} \cdot \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$$

Введя обозначение $\beta = \dfrac{c}{m}$, получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\beta v\dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -g - \beta v\dfrac{dy}{dt} \end{cases}$$

где $v = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$.

Решение: Данная система не имеет аналитического решения в элементарных функциях и требует численных методов решения.

Приведение к системе первого порядка: Введём переменные:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x \\ \dfrac{dy}{dt} = v_y \\ \dfrac{dv_x}{dt} = -\beta\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_x \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -g - \beta\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_y \end{cases}$$

Начальные условия:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad v_x(0) = v_0\cos\alpha, \quad v_y(0) = v_0\sin\alpha$$

Анализ особенностей:

1. Система нелинейна из-за члена $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
2. Уравнения связаны через общий множитель $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
3. При $\beta = 0$ система переходит в идеальный случай
4. При малых скоростях ($v \to 0$) система приближается к модели с вязким трением
5. **Предельная скорость:** При вертикальном падении ($v_x = 0$) уравнение движения принимает вид:
$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg - cv_y^2$$
Предельная скорость достигается при условии $\dfrac{dv_y}{dt} = 0$:
$$0 = -mg - cv_y^2 \quad \Rightarrow \quad cv_y^2 = -mg$$
Учитывая, что при падении $v_y < 0$, получаем:
$$v_{\text{предел}} = -\sqrt{\frac{mg}{c}} = -\sqrt{\frac{g}{\beta}}$$
где $\beta = \dfrac{c}{m}$. Физически это означает, что сила сопротивления cv^2 уравновешивает силу тяжести mg, и тело движется с постоянной скоростью.
6. **Асимметрия траектории:** Траектория становится несимметричной - восходящая ветвь более пологая, чем нисходящая, так как на подъёме сила сопротивления направлена против скорости и силы тяжести, а на спуске - против скорости, но совместно с силой тяжести
7. **Зависимость от начальной скорости:** Влияние сопротивления растет пропорционально квадрату скорости, поэтому при больших начальных скоростях эффект сопротивления становится доминирующим
8. **Оптимальный угол броска:** Угол, обеспечивающий максимальную дальность, становится меньше 45°, поскольку горизонтальная компонента скорости затухает быстрее вертикальной из-за квадратичной зависимости силы сопротивления

Численные методы решения

Для решения системы дифференциальных уравнений второго порядка преобразуем её в систему первого порядка. Введём переменные:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

Тогда для модели с лобовым сопротивлением получаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x \\ \dfrac{dy}{dt} = v_y \\ \dfrac{dv_x}{dt} = -\beta\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_x \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -g - \beta\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_y \end{cases}$$

Для численного интегрирования используем метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Шаг алгоритма:

1. Задаём начальные условия: x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0}
2. Выбираем шаг по времени Δt
3. На каждом шаге вычисляем коэффициенты k_1, k_2, k_3, k_4 для каждой переменной:
   - k_1 - наклон в начале интервала (аппроксимация методом Эйлера)
   - k_2 - наклон в средней точке с использованием k_1
   - k_3 - улучшенный наклон в средней точке с использованием k_2
   - k_4 - наклон в конце интервала с использованием k_3

   Эти коэффициенты представляют собой взвешенные оценки производных на разных точках интервала.
4. Обновляем значения переменных по формуле:

   $$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

   где коэффициенты 1:2:2:1 обеспечивают оптимальную точность метода 4-го порядка.
5. Повторяем до достижения условия остановки ($y \leq 0$)

Результаты и анализ

Сравнение с теоретическими результатами

Для идеального случая и модели с вязким трением численные результаты должны хорошо согласовываться с аналитическими решениями. Погрешность определяется шагом интегрирования Δt. Для модели с лобовым сопротивлением аналитическое решение отсутствует, поэтому валидация проводится путём:

1. **Проверки сходимости при уменьшении** Δt - убеждаемся, что решение стабилизируется при $\Delta t \to 0$
2. **Сравнения с предельными случаями** ($\gamma \to 0,\ \beta \to 0$) - проверяем переход к идеальной модели

Влияние параметров на траекторию

Исследуем влияние различных параметров:

1. **Угол броска** α:
    - В идеальном случае максимальная дальность при $\alpha = 45°$ (симметричная парабола)
    - При наличии сопротивления оптимальный угол меньше $45°$ (обычно $35° - 40°$)
    - С увеличением коэффициента сопротивления оптимальный угол уменьшается
    - При $\alpha = 90°$ получаем вертикальный бросок с максимальной высотой
2. **Начальная скорость** v_0:
    - Увеличение v_0 приводит к увеличению дальности и высоты
    - Влияние сопротивления более значительно при больших v_0 (квадратичная зависимость)
3. **Коэффициент сопротивления**:
    - Увеличение коэффициента уменьшает дальность полёта и максимальную высоту
    - Траектория становится более крутой и асимметричной (восходящая ветвь положе)
4. **Масса тела** m:
    - Увеличение массы уменьшает относительное влияние сопротивления
    - Тяжёлые тела менее чувствительны к сопротивлению воздуха
    - Лёгкие тела быстрее достигают предельной скорости

Качественные особенности траекторий:

- *Идеальный случай:* симметричная парабола
- *Вязкое трение:* слегка асимметричная траектория, экспоненциальное затухание
- *Лобовое сопротивление:* сильно асимметричная траектория, быстрое затухание скорости

Заключение

В работе проведено комплексное численное моделирование движения тела, брошенного под углом к горизонту, для трёх различных физических моделей:

1. **Идеальный случай** (без сопротивления воздуха) - аналитически решаемая модель, служащая эталоном для сравнения

2. **Модель с вязким трением** ($F \sim v$) - учитывает линейную зависимость силы сопротивления от скорости

3. **Модель с лобовым сопротивлением** ($F \sim v^2$) - наиболее реалистичная модель для умеренных и высоких скоростей

Основные достижения работы:

- Разработан универсальный алгоритм на основе метода Рунге-Кутты 4-го порядка для численного интегрирования систем дифференциальных уравнений

- Проведён детальный аналитический вывод уравнений движения для идеального случая и модели с вязким трением

- Получено уравнение траектории $y(x)$ для модели с вязким трением и проведена проверка сходимости к идеальному случаю

- Исследовано влияние основных параметров: угла броска α, начальной скорости v_0, коэффициентов сопротивления γ и β

- Обнаружены и проанализированы качественные особенности траекторий для различных моделей