Московский физико-технический институт

Высшая школа программной инженерии

М5. Физический маятник

Численное моделирование колебаний физического маятника в поле тяжести

Выполнили студенты Б13-402:

Жердев Егор

Савельев Данил

Долгопрудный

4 ноября 2025 г.

Содержание

Введение **2**

Физическая постановка задачи **2**

Физические модели **4**

Свободные колебания без трения 4

Свободные колебания с трением 6

Законы сохранения энергии 8

Численные методы решения **10**

Заключение **12**

Физическая интерпретация 12

Итог 12

Введение

Задача. Моделирование колебаний физического маятника – твёрдого тела, подвешенного в одной точке и совершающего вращательные движения в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Исследование свободных колебаний без трения и с трением, изучение зависимости периода от амплитуды и коэффициента трения, проверка законов сохранения энергии.

Цель работы: составить программу для численного решения дифференциального уравнения вращательного движения физического маятника, получить зависимость угла отклонения от времени, исследовать влияние начальной амплитуды и коэффициента трения на период колебаний, сравнить результаты численного моделирования с аналитической теорией малых колебаний.

Физическая постановка задачи

Рассмотрим твёрдое тело произвольной формы массы m, которое может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси O. Под действием силы тяжести тело будет совершать колебания относительно положения равновесия.

Основные параметры системы:

1. **Геометрические параметры:**
   - l – расстояние от оси вращения O до центра масс C
   - I_O – момент инерции тела относительно оси вращения
   - I_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс
2. **Физические параметры:**
   - m – масса тела
   - g – ускорение свободного падения ($g \approx 9.81$ м/с^2)
   - γ – коэффициент трения (для модели с трением)
3. **Динамические переменные:**
   - $\varphi(t)$ – угол отклонения от положения равновесия
   - $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$ – угловая скорость
   - $\varepsilon(t) = \ddot{\varphi}(t)$ – угловое ускорение

Теорема Штейнера:

Момент инерции относительно произвольной оси, параллельной оси, проходящей через центр масс, равен:

$$I_O = I_C + ml^2$$

Для простого физического маятника (стержень длины L с точечной массой на конце):

- Расстояние до центра масс: $l = L$
- Момент инерции: $I_O = mL^2$ (пренебрегая массой стержня)

Для однородного стержня длины L массы m:

- Расстояние до центра масс: $l = \dfrac{L}{2}$
- Момент инерции относительно центра: $I_C = \dfrac{mL^2}{12}$
- Момент инерции относительно конца: $I_O = I_C + ml^2 = \dfrac{mL^2}{12} + m\left(\dfrac{L}{2}\right)^2 = \dfrac{mL^2}{3}$

Начальные условия при $t = 0$:

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

где φ_0 – начальный угол отклонения, ω_0 – начальная угловая скорость (обычно $\omega_0 = 0$ для свободных колебаний).

Физические модели

Свободные колебания без трения

Уравнение движения

Применим основное уравнение динамики вращательного движения относительно оси вращения O:

$$I_O\ddot{\varphi} = M$$

где M – момент всех сил относительно оси O.

На маятник действует сила тяжести $\vec{F}_g = m\vec{g}$, приложенная к центру масс. Плечо этой силы относительно оси вращения равно $l\sin\varphi$, где φ – угол отклонения от вертикали (положения равновесия).

Момент силы тяжести:

$$M = -mgl\sin\varphi$$

Знак минус появляется, так как сила стремится вернуть маятник в положение равновесия (момент направлен против увеличения угла φ).

Дифференциальное уравнение колебаний:

$$\boxed{I_O\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0}$$

или

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega_0^2\sin\varphi = 0}$$

где введена **собственная циклическая частота**:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I_O}}$$

Приближение малых колебаний

Для малых углов отклонения ($|\varphi| \ll 1$ рад) справедливо разложение:

$$\sin\varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + O(\varphi^5) \approx \varphi$$

Подставляя это в уравнение движения, получаем **линейное уравнение**:

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0}$$

Это уравнение гармонического осциллятора с общим решением:

$$\varphi(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

где A – амплитуда колебаний, φ_0 – начальная фаза.

Для начальных условий $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ получаем:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$$

Период малых колебаний:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgl}}$$

Для однородного стержня длины L:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg \cdot \frac{L}{2}}{\frac{mL^2}{3}}} = \sqrt{\frac{3g}{2L}}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Энергия системы

Полная механическая энергия физического маятника складывается из кинетической энергии вращения и потенциальной энергии в поле тяжести:

$$E = \frac{1}{2}I_O\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos\varphi)$$

Потенциальная энергия отсчитывается от положения равновесия (вертикаль вниз), где центр масс находится на минимальной высоте. При отклонении на угол φ центр масс поднимается на высоту $h = l(1 - \cos\varphi)$.

При малых углах: $1 - \cos\varphi \approx \dfrac{\varphi^2}{2}$, и энергия:

$$E \approx \frac{1}{2}I_O\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mgl\varphi^2 = \frac{1}{2}I_O\omega_0^2\varphi_0^2 = \text{const}$$

Зависимость периода от амплитуды

Для конечных амплитуд колебаний период зависит от начального угла φ_0. Точное выражение для периода получается через эллиптический интеграл первого рода:

$$T(\varphi_0) = 4\sqrt{\frac{I_O}{mgl}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}$$

где $k = \sin\dfrac{\varphi_0}{2}$ – модуль эллиптического интеграла.
Разложение в ряд по малому параметру k:

$$T(\varphi_0) = T_0\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\varphi_0}{2} + O(\varphi_0^6)\right)$$

Или приближённо:

$$T(\varphi_0) \approx T_0\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right)$$

Таким образом, с ростом амплитуды период колебаний увеличивается.

Свободные колебания с трением

Модель трения

При наличии трения на маятник действует момент силы трения, который препятствует движению. Рассмотрим модель **вязкого трения**, в которой момент трения пропорционален угловой скорости:

$$M_{\text{тр}} = -\gamma I_O \dot{\varphi}$$

где γ – коэффициент затухания (размерность с^{-1}), I_O – момент инерции.

Уравнение движения с трением:

$$I_O \ddot{\varphi} = -mgl \sin\varphi - \gamma I_O \dot{\varphi}$$

или

$$\boxed{\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = 0}$$

где $\beta = \dfrac{\gamma}{2}$ – коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mgl}{I_O}}$ – собственная частота без трения.

Линеаризация для малых колебаний

При малых углах $\sin\varphi \approx \varphi$:

$$\boxed{\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0}$$

Это уравнение затухающего гармонического осциллятора.

Общее решение линеаризованного уравнения

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Дискриминант:

$$D = 4\beta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\beta^2 - \omega_0^2)$$

Рассмотрим случай **слабого затухания** ($\beta < \omega_0$), наиболее важный для колебаний:

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega_d$$

где $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний.

Общее решение:

$$\varphi(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega_d t + \phi_0)$$

Для начальных условий $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$:

$$A = \varphi_0 \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega_d^2}} \approx \varphi_0, \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\beta}{\omega_d}$$

При малом затухании ($\beta \ll \omega_0$):

$$\varphi(t) \approx \varphi_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t)$$

Амплитуда затухающих колебаний:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

где $A_0 = \varphi_0$ – начальная амплитуда.

Период затухающих колебаний:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - (\beta/\omega_0)^2}}$$

При малом трении ($\beta \ll \omega_0$):

$$T_d \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2\right) \approx T_0$$

Таким образом, **слабое трение незначительно изменяет период колебаний**, но приводит к экспоненциальному затуханию амплитуды.

Зависимость периода от коэффициента трения

При малых β:

$$T_d = T_0 \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2/\omega_0^2}} \approx T_0 \left(1 + \frac{\beta^2}{2\omega_0^2}\right)$$

Период колебаний слабо увеличивается с ростом коэффициента трения, но эффект значительно слабее, чем зависимость от амплитуды в случае без трения.

Переходные режимы

1. **Слабое затухание** ($\beta < \omega_0$): колебательный режим с экспоненциальным затуханием амплитуды

2. **Критическое затухание** ($\beta = \omega_0$): апериодическое движение, самое быстрое возвращение к равновесию

3. **Сильное затухание** ($\beta > \omega_0$): медленное апериодическое возвращение к равновесию

В нашей работе рассматривается только случай слабого затухания, характерный для реальных маятников.

Законы сохранения энергии

Энергия идеального маятника (без трения)

Для физического маятника без трения полная механическая энергия сохраняется. Она складывается из кинетической энергии вращения и потенциальной энергии в поле тяжести:

$$E = T + U = \frac{1}{2}I_O\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos\varphi)$$

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}I_O\dot{\varphi}^2$$

Потенциальная энергия:

Выбираем нулевой уровень потенциальной энергии в положении равновесия, когда центр масс находится на наименьшей высоте. При отклонении на угол φ центр масс поднимается на высоту:

$$h = l(1 - \cos\varphi)$$

Потенциальная энергия:

$$U = mgh = mgl(1 - \cos\varphi)$$

Закон сохранения энергии:

$$E = \frac{1}{2}I_O\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos\varphi) = \text{const}$$

Проверка закона сохранения энергии

Продифференцируем энергию по времени:

$$\frac{dE}{dt} = I_O\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(I_O\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi)$$

Из уравнения движения $I_O\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$ следует:

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Таким образом, полная энергия действительно сохраняется.

Начальная энергия

При начальных условиях $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ (маятник отклонили и отпустили без начальной скорости):

$$E_0 = mgl(1 - \cos\varphi_0)$$

В точке максимального отклонения вся энергия потенциальная, в точке прохождения равновесия – полностью кинетическая:

$$E = \frac{1}{2}I_O\dot{\varphi}^2_{\max} = mgl(1 - \cos\varphi_0)$$

откуда максимальная угловая скорость:

$$\dot{\varphi}_{\max} = \sqrt{\frac{2mgl(1-\cos\varphi_0)}{I_O}} = \omega_0\sqrt{2(1-\cos\varphi_0)}$$

При малых углах: $1-\cos\varphi_0 \approx \dfrac{\varphi_0^2}{2}$, и

$$\dot{\varphi}_{\max} \approx \omega_0\varphi_0$$

что согласуется с решением линеаризованного уравнения $\varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega_0 t)$, где $\dot{\varphi}(t) = -\omega_0\varphi_0\sin(\omega_0 t)$.

Энергия маятника с трением

При наличии трения полная механическая энергия не сохраняется – она убывает со временем, переходя в тепло:

$$E(t) = \frac{1}{2}I_O\dot{\varphi}^2 + mgl(1-\cos\varphi)$$

Скорость потери энергии:

$$\frac{dE}{dt} = I_O\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

Подставляя уравнение движения с трением $I_O\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi - \gamma I_O\dot{\varphi}$:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{\varphi}(I_O\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi) = \dot{\varphi}(-\gamma I_O\dot{\varphi}) = -\gamma I_O\dot{\varphi}^2 < 0$$

Энергия убывает пропорционально квадрату угловой скорости. Это соответствует **мощности силы трения**:

$$P_{\text{тр}} = M_{\text{тр}}\cdot\omega = -\gamma I_O\dot{\varphi}^2$$

Численные методы решения

Постановка задачи Коши

Для численного решения преобразуем дифференциальное уравнение второго порядка в систему двух уравнений первого порядка. Введём переменные:

$$\omega = \dot{\varphi}, \quad \varepsilon = \ddot{\varphi}$$

Система для идеального маятника (без трения):

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -\omega_0^2 \sin\varphi \end{cases}$$

где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mgl}{I_O}}$ – собственная частота.

Система для маятника с трением:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -\omega_0^2 \sin\varphi - 2\beta\omega \end{cases}$$

где $\beta = \dfrac{\gamma}{2}$ – коэффициент затухания.

Начальные условия:

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \omega(0) = \omega_0$$

Обычно рассматриваем случай $\omega_0 = 0$ (отклонили и отпустили).

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

Для численного интегрирования системы ОДУ используем классический метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Это явный одношаговый метод, обеспечивающий точность порядка $O(h^5)$ на одном шаге интегрирования.

Общая схема:

Для системы $\dfrac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{y})$ с начальными условиями $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$:

1. Вычисляем четыре коэффициента на каждом шаге:

$$\vec{k}_1 = h \cdot \vec{f}(t_n, \vec{y}_n)$$
$$\vec{k}_2 = h \cdot \vec{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \vec{y}_n + \frac{\vec{k}_1}{2}\right)$$
$$\vec{k}_3 = h \cdot \vec{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \vec{y}_n + \frac{\vec{k}_2}{2}\right)$$
$$\vec{k}_4 = h \cdot \vec{f}(t_n + h, \vec{y}_n + \vec{k}_3)$$

2. Обновляем решение по формуле:
$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{1}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4)$$
3. Увеличиваем время: $t_{n+1} = t_n + h$

Применение к системе маятника:

Обозначим $\vec{y} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix}$, тогда $\vec{f}(t, \vec{y}) = \begin{pmatrix} \omega \\ -\omega_0^2 \sin\varphi - 2\beta\omega \end{pmatrix}$.

На каждом шаге интегрирования:

$$\begin{aligned}
k_{1\varphi} &= h \cdot \omega_n \\
k_{1\omega} &= h \cdot (-\omega_0^2 \sin\varphi_n - 2\beta\omega_n) \\
k_{2\varphi} &= h \cdot (\omega_n + k_{1\omega}/2) \\
k_{2\omega} &= h \cdot \big(-\omega_0^2 \sin(\varphi_n + k_{1\varphi}/2) - 2\beta(\omega_n + k_{1\omega}/2)\big) \\
k_{3\varphi} &= h \cdot (\omega_n + k_{2\omega}/2) \\
k_{3\omega} &= h \cdot \big(-\omega_0^2 \sin(\varphi_n + k_{2\varphi}/2) - 2\beta(\omega_n + k_{2\omega}/2)\big) \\
k_{4\varphi} &= h \cdot (\omega_n + k_{3\omega}) \\
k_{4\omega} &= h \cdot \big(-\omega_0^2 \sin(\varphi_n + k_{3\varphi}) - 2\beta(\omega_n + k_{3\omega})\big)
\end{aligned}$$

Обновление:
$$\begin{aligned}
\varphi_{n+1} &= \varphi_n + \frac{1}{6}(k_{1\varphi} + 2k_{2\varphi} + 2k_{3\varphi} + k_{4\varphi}) \\
\omega_{n+1} &= \omega_n + \frac{1}{6}(k_{1\omega} + 2k_{2\omega} + 2k_{3\omega} + k_{4\omega})
\end{aligned}$$

Выбор шага интегрирования

Для обеспечения точности и устойчивости численного решения необходимо правильно выбрать шаг интегрирования h.

- Шаг должен быть значительно меньше периода колебаний: $h \ll T_0$
- Чем больше амплитуда, тем меньше должен быть шаг для учёта нелинейности

Определение периода колебаний

Период колебаний определяем по времени между последовательными прохождениями маятника через положение равновесия в одном направлении:

- Фиксируем моменты времени t_i, когда $\varphi(t_i) = 0$ и $\omega(t_i) < 0$ (движение вниз)
- Период: $T = t_{i+1} - t_i$

Альтернативно, период можно определить как удвоенное время между двумя последовательными точками максимального отклонения ($\omega = 0$).

Заключение

В работе проведено комплексное численное моделирование колебаний физического маятника – однородного стержня, подвешенного за один конец в поле тяжести. Исследованы две основные модели:

1. **Идеальный маятник без трения** – консервативная система с сохранением полной механической энергии
2. **Маятник с вязким трением** – диссипативная система с экспоненциальным затуханием амплитуды

Физическая интерпретация

Нелинейность и ангармонизм:

При увеличении амплитуды колебаний проявляется нелинейность возвращающей силы. Маятник дольше находится вблизи крайних положений (где скорость мала) и быстрее проходит через положение равновесия (где скорость максимальна). Это приводит к увеличению периода колебаний.

Роль трения:

Вязкое трение приводит к непрерывной диссипации энергии, пропорциональной квадрату скорости. Это вызывает экспоненциальное затухание амплитуды, но слабо влияет на частоту колебаний при малых коэффициентах трения.

Практическое значение:

Результаты работы применимы к широкому классу колебательных систем: от маятниковых часов до сейсмографов и систем виброзащиты. Понимание зависимости периода от амплитуды важно для точных измерений времени, а учёт затухания необходим для расчёта демпфирующих систем.

Итог

Разработанная программа численного моделирования позволяет:

- Точно решать нелинейное уравнение колебаний физического маятника
- Исследовать влияние начальных условий и параметров системы на характер движения
- Проверять выполнение законов сохранения и сравнивать с аналитической теорией
- Визуализировать траектории, фазовые портреты и временные зависимости