SF1546, Numeriska Metoder för COPEN, CELTE, CINTE, CITEH och CL, VT23
Lab3 – Projektet

Ni skall välja **en** av de fyra uppgifterna nedan. Det finns 30 exemplar av vardera. Om alla 30 redan är tagna måste ni välja en annan uppgift. Vid den muntliga redovisningen (som tar en timme) är det tänkt att ni är fyra grupper som presenterar under samma pass, helst en grupp från vardera uppgiften.

Ni bokar en uppgift genom att lägga in er lab3-labbgrupp i ett av kursen anordnat möte i Canvas-kalendern. Datumet för "bokningsmötet" är 1 april och klockslaget avgör vilket projekt ni väljer. Klockan 11 är uppgift A. Klockan 12 är uppgift B. Klockan 13 är uppgift C. Klockan 14 är uppgift D. (Notera att tiden i sig inte betyder något. Vi bara använder Canvas-kalendern för att boka vem som gör vilket projekt! Är ett visst möte fullbokat, så betyder det att ni måste välja "en annan tid", dvs ett annat projekt.)

Utförande

1. När ni har valt ett projekt ska ni börja med att göra en plan över vilka metoder ni planerar att använda för att lösa uppgiften. Till exempel hur ni delar upp uppgiften i mindre delar, vilka numeriska metoder ni planerar att använda och (grovt) vilka delar ni tänker dela upp ert program i (vilka funktioner?) och vilka data som behöver föras över från en del till nästa.

2. De numeriska metoder ni sedan använder skall programmeras av er själva. Exempel: Om ni behöver beräkna en integral så får ni inte använda Matlabs `integral` eller `trapz` utan ni måste själva implementera alla numeriska metoder, tex trapetsregeln. Ni får dock använda "vanliga" standard-funktioner som tex `cos`, `exp` och `abs` liksom grundläggande "vektor-funktioner" som tex `norm`, `min` och `length` (men alltså inte mer avancerade funktioner som tex `find`).

3. Ni skall också visa hur noggrannt ni löst uppgiften. Bedömningen skall göras i två steg. I det första antas alla givna värden vara exakta, så att ni kan visa hur noggrann er beräkning med era valda metoder är. Skatta en gräns för felet som orsakas av er implementering av era valda numeriska metoder. Därefter ska ni också visa hur en liten osäkerhet i de givna värdena kan påverka ert resultat (Ange hur stor felgräns era givna indata verkligen har. Om felgränsen är väldigt stor kan ni i stället sätta felgränsen till 1 procent när ni kör ert program för att inte förändra uppgiften för mycket.) Skatta en gräns för felet som orsakas av era osäkra indata i ert program. Beräkna sedan en total felgräns för era svar.

4. Om projektet skall räknas som utvidgat ("avancerat") och därmed betygshöjande skall ni **dessutom göra en ny version av uppgiften** där ni tvärtom använder Matlabs färdiga rutiner för alla våra numeriska metoder ni använder som till exempel `fzero`, `polyfit`, `integral` och `ode45`. Även detta lösningssätt av projektuppgiften (inkl felskattning) ska då beskrivas i rapporten.

Det är när ni lämnar in er första version av rapporten som ni behöver bestämma om ert projekt är basnivå eller utvidgat. Det ska tydligt framgå på förstasidan om ni gör ett utvidgat projekt eller ett basprojekt. Om det är otydligt kommer projektet klassas som ett basprojekt. Om det är ett utvidgat projekt ska båda versionerna vara klara och finnas med i rapporten när den lämnas in.

5. Rapporten ska vara kort, men det ska tydligt framgå för läsaren hur ni har löst uppgiften och ha med så mycket detaljer att läsaren kan (om den vill) upprepa ert arbete utan att behöva gissa eller läsa labbinstruktionen. Läsaren antas känna till de numeriska metoderna kursen tar upp men vet inget om er projekt-uppgift.

Eftersom det är en laborations-redovisning ska Matlab-koden till ert projekt finnas med som bilaga i er rapport, men rapporten ska gå att läsa och förstå utan att man ska behöva titta i kod-bilagan. För mer info om rapporten se kravsidan i Canvas om rapporten. Matlab-koden ska också laddas upp separat i Canvas, som m-filer..

Ni ska använda de effektiva metoder kursen lär ut. Dagens datorer är mycket snabba och vissa resultat i våra projekt kan därför fås fram även med mycket ineffektiva metoder (som tex linjär sökning). Det räcker inte till godkänt. För våra (små) projekt här går det få fram svar med ineffektiva metoder men verkliga, större utmaningar behöver de effektivare metoderna, även med morgondagens ännu snabbare datorer. Ert projekt ska därför visa att ni behärskar de effektiva metoderna. Projektet är en lab i en kurs i numeriska metoder.

Redovisning

För att bli godkänd på projektet skall det redovisas i tre steg:

1. Ni skall lämna in en projekt-plan. *(i början av april)*
2. Ni skall boka och hålla en muntlig presentation av ert projekt. *(i maj månad)*
3. Ni skall skriva och lämna in en rapport om ert projekt och ladda upp er kod *(i maj (eller reserv: juni).)*

För exakta datum: se kursplanen. För mer detaljer om projektplanen, presentationen och rapporten: se Canvas och kursplanen.

Hjälp och stöd?

1. Använd hjälpen som finns under de schemalagda terminalövningarna. Kö-listan ligger i Stay-a-while. Vår kö är vår kurskod, SF1546.

2. Utnyttja “Allmänhandledningen”. Varje vardag 11-13 och 17-20. Även den använder kö-systemet Stay-a-while.

3. Prata med varandra! Hjälp varandra! Diskutera ideer, metoder, angreppssätt och felsökning, men **aldrig, aldrig** skicka eller skriva kod åt varandra!!! Att använda eller skriva av någon annans kod räknas som fusk, oavsett om ni hittat den på nätet, fått den av någon eller annat sätt. Men att fråga om tips och råd för att kunna förstå bättre och göra ett bättre eget arbete, det är klokt!

Ni ska i rapporten intyga att arbetet ni lämnar in är gjort av er själva. Har ni fått mycket hjälp av någon eller något så redovisa vad och källan i rapporten.

Varning för skrivfel i projekten. Texten i projekten är bitvis ganska nyskriven. Fråga om något verkar konstigt eller alltför svårt!!!

Generellt för alla kursens labbar: Har ni suttit fast på en fråga i mer än 15 minuter - släpp den och gå vidare och fråga efter hjälp vid nästa frågestund!

Projekt A. Pilkastning

I dartspel använder man idag oftast pilar av plast eller aluminium och pilarna väger typiskt mellan 18 och 30 gram.

Tavlan man kastar mot är uppsatt med mittpunkten, kallad "Bulls eye", på höjden 183cm från golvet och avståndet till väggen som tavlan sitter på är 237cm.

Hastigheten hos pilarna hos olika kastare har med laser uppmätts till mellan 10 och 30 m/s.

Pilarna är mycket smala med fjädrar i bakkanten, så luftmotståndet i kastriktningen är mycket lägre än tvärs pilen. Vi har att $K_x = 0.002$ och $K_y = 0.02$

Kastbanan kan då beskrivas av följande uttryck:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -mg - K_y \dot{y} V \\ m\ddot{x} &= -K_x \dot{x} V \\ V &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \end{aligned}$$

där prickarna betyder tidsderivator och gravitationskonstanten är $g = 9.82 N/kg$.

a) Om jag har pilar med massan 20 gram, kastar med hastigheten $v_0 = 15$ m/s från kasthöjden 184 cm i vinkeln 4 grader uppåt från horisontalplanet, på vilken höjd från golvet hamnar pilen då den träffar tavlan (eller väggen bredvid tavlan)?

b) Vilken vinkel måste jag ha för att träffa Bulls eye? (Det finns två, hitta båda)

c) Om jag vill kasta mina pilar i vinkeln 3 grader, vilken hastighet måste jag då kasta i för att träffa Bulls eye?

d) Det finns pilar med olika tyngd. Om jag väljer tyngre pilar, måste jag då öka eller minska hastigheten?

Projekt B. Fyrverkeri

Fyrverkeriraketer flyger genom att bränna upp det bränsle de har inuti sig.

Under de först 5 sekunderna så brinner raketen med en konstant drivande kraft och massan hos raketen minskar linjärt. Då exploderar raketen i en kaskad av färger och sedan fortsätter resten av raketen utan drivning.

Vi antar att raketen skjuts upp i en vinkel 6 grader mot lodlinjen. Den startar från en liten ställning som är 1 dm hög. Dess massa är vid starten från marken 250 gram, där 125 gram är bränslet som brinner upp med 25 gram per sekund till det tar slut efter 5 sekunder. Då exploderar färgdelen, som väger 50 gram, så resten av raketen som flyger vidare väger 75 gram.

Vi antar att raketens flygfärd beskrivs av diffekvationerna nedan (där storheterna anges i SI-enheter):

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= v \sin(\beta) \\
\dot{y} &= v \cos(\beta) \\
m\dot{v} &= F - D - mg\cos(\beta) \\
v\dot{\beta} &= g \sin(\beta) \ om \ v > 10^{-6} \\
\dot{\beta} &= 10^{-6} \ om \ v \leq 10^{-6} \\
F(t) &= 100 \ om \ t < 5 \\
F(t) &= 0 \ om \ t \geq 5 \\
D(t) &= kv^2
\end{aligned}
$$

där $k = 0.01$ är luftmotståndskonstanten och $g = 9.82$ är gravitationskonstanten.

a) Var landar raketen* (mätt horisontellt från startpunkten?

b) Hur lång sträcka färdas raketen*?

c) Hur länge är raketen i luften? (dvs när landar den?)

d) Hur högt kom raketen*när den var som högst?

e) Vilken startvinkel ger maxhöjden 400 meter??

*(Med raketen menas "raketen" eller "resten av raketen". Vi bortser också från att raketens bana kan ändras när själva färg-explosionen sker).

Projekt C. Leksaks-slangbellan

Slangbellor är ett urgammalt sätt att få iväg små saker med viss fart. Vi ska titta på ett sådant kast.

Kastet kan delas upp i två faser. Första fasen är då stenen accelereras av gummibandet. I andra fasen flyger stenen fritt i luften.

Vi startar med att gummibandet är utdraget och när man släpper det så accelereras stenen av gummibandet. Då gummibandet är väldigt starkt så försummar vi tyngdkrafen i denna fas.

Vi antar att bandet dras ut tvärs själva slangbellan. Bredden mellan slangbellans pinnar är B. Bandets normallängd är L_0. (Så bandet är lite spänt även innan man drar i det.) Vid starten har bandet dragits ut bakåt sträckan d från bandets normalläge. Vi drar i z-led, mätt tvärs gummibandets normalläge.

Accelerationen då gummibandet släpps beskrivs av

$$m\ddot{z} = k(L - L0)$$

där L är det utdragna bandets totala längd, $L/2 = \sqrt{z^2 + (B/2)^2}$ och z är det vinkelräta avståndet till bandets outdragna läge. (z är alltså så långt man drar ut bandet i sidled.) Vi har m=60g, L_0=12cm, B=15cm, k= 1000 N/m och $g = 9.82$.

I andra fasen av kastet har gummibandet har släppt och stenen far iväg. Det sker när $z(t)$ blir noll, vid tiden $t = T$.

Stenens luftbana beskrivs då av differentialekvationerna

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -K\dot{x}V^{(3/2)} \\ m\ddot{y} &= -mg - K\dot{y}V^{(3/2)} \\ V &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \end{aligned}$$

där $K = 0.0006$.

Slangbellan antas hållas i axelhöjd, så $y(T) = 1.65$ och $x(T) = 0$. Hastigheterna i x- och y-led bestäms av den hastighet den fick i första fasen ($\dot{z}(T)$) och den vinkel som slangbellan riktas.

a) Om x-axeln ligger längs den platta marken och y-axeln markerar höjden över marken, hur långt i x-led kommer stenen innan den landar om den dras ut 9 centimeter (dvs $d = 9$ cm) och siktas i 45 graders vinkel mot horisonten. (Tips: Startvärdet på z är negativt.)

b) Hur långt måste man dra ut bandet i första fasen (dvs värdet på d) för att stenen ska landa 16 meter bort?

c) Om man får dra ut bandet max 7cm i första steget men variera vinkeln fritt, hur långt kan man då maximalt komma med stenen?

Projekt D. Västerbron

Västerbron i centrala Stockholm är en vacker bågbro med flera spann. Det längsta bågspannet är 204 meter brett och har en segelfri höjd på 26 meter.

En vacker symmetrisk bågform beskrivs av differentialekvationen

$$y'' = -Ky(x)(1 + (y'(x))^2)^{(3/2)}$$

Vi har att $y(0) = y(L) = 1$ och $y(L/2) = a$, där y(x) är höjden över vattnet och bredden L=204.

a) Om man för enkelhets skull startar i brons mittpunkt ($x = L/2$) och löser differentialekvationen fram till $x = L$ med $K = 3 \cdot 10^{-4}$ och $a = 26$ meter, vilken höjd slutar man på då när $x = L$?

b) Bestäm vilket K-värde som behövs för att bron verkligen ska sluta i $y(L) = 1$ (dvs lite ovanför vattenytan).

c) Beräkna båglängden för detta K-värde.

d) Båglängden i delfråga **c** blir nära 105. Om man tillåts justera den segelfria höjden på bron (dvs a) så att den symmetriska bron både slutar i $y(L) = 1$ och har båglängden 108, vilket värde på konstant K behövs då och vilken höjd får bron då?

NC–2023.