Липецкий государственный технический университет

Факультет автоматизации и информатики

Кафедра автоматизированных систем управления

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

по дисциплине Математическое программирование

Методы условной оптимизации

Студент Глубоков Г.В.

Группа АИ-20

Руководитель Качановский Ю. П.

Липецк 2022

Задание кафедры: вариант 2-1

1. Нарисовать область допустимых значений.
2. Используя программы ConditionalOptimization и OP_KOND, решить задачу всеми допустимыми (по виду модели) методами.
3. Для каждого используемого метода написать вспомогательную оптимизируемую функцию.
4. Вычислить множители Лагранжа для всех полученных точек оптимума
5. Результаты расчета представить в таблице.
6. Сделать вывод об оптимальности полученных точек
7. Сделать выводы об эффективности использованных непрямых методов нелинейного программирования (методов последовательной безусловной минимизации)
8. Сравнить решения, полученные прямыми методами условной оптимизации и лучшее решение, полученное непрямыми методами (методами последовательной безусловной минимизации)

Условие задачи:

Требуется спроектировать прямоугольную конструкцию в форме параллелепипеда. Конструкция должна иметь объем – 16000 фут^3, но периметр ее основания не должен превышать 220 фут. Глубина не должна быть больше 60 фут, а ширина – 80. Кроме того, ширина не должна превышать утроенной глубины. Стоимость гофрированного материала, из которого изготовлены крыша и дно конструкции – a дол.; боковые грани - b дол.; передняя и задняя стенки – c дол. за фут^2. Требуется определить размеры конструкции таким образом, чтобы минимизировать стоимость материалов.

x_1 - глубина конструкции,

x_2 - ширина конструкции,

x_3 – высота конструкции.

Найти $\min f(x) = 2ax_1x_2 + 2bx_2x_3 + 2cx_1x_3$

При ограничениях:

$$\begin{cases} h(x) = 16000 - x_1x_2x_3 = 0 \\ g_1(x) = 110 - x_1 - x_2 \geq 0 \\ g_2(x) = 3x_1 - x_2 \geq 0 \\ 0 \leq x_1 \leq 60 \\ 0 \leq x_2 \leq 80 \\ 0 \leq x_3 \end{cases}$$

Для варианта 2-1: $a = 1, b = 1, c = 1, x^{(0)} = (20; 40; 20)$.

Ход работы:

1. Уравнение и график минимизируемой функции

Подставим числа в соответствии с вариантом – получим следующее задание:

Найти $\min f(x) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$

При ограничениях:

$$\begin{cases} h(x) = 16000 - x_1x_2x_3 = 0 \\ g_1(x) = 110 - x_1 - x_2 \geq 0 \\ g_2(x) = 3x_1 - x_2 \geq 0 \\ 0 \leq x_1 \leq 60 \\ 0 \leq x_2 \leq 80 \\ 0 \leq x_3 \end{cases}$$

Покажем область допустимых значений функции при $x_3 = 10$ – темной линией выделена область значений, которая удовлетворяет всем условиям неравенств → область допустимых значений – часть линии графика $16000 - x_1x_2x_3 = 0$, находящаяся внутри этой области - рисунок 1.

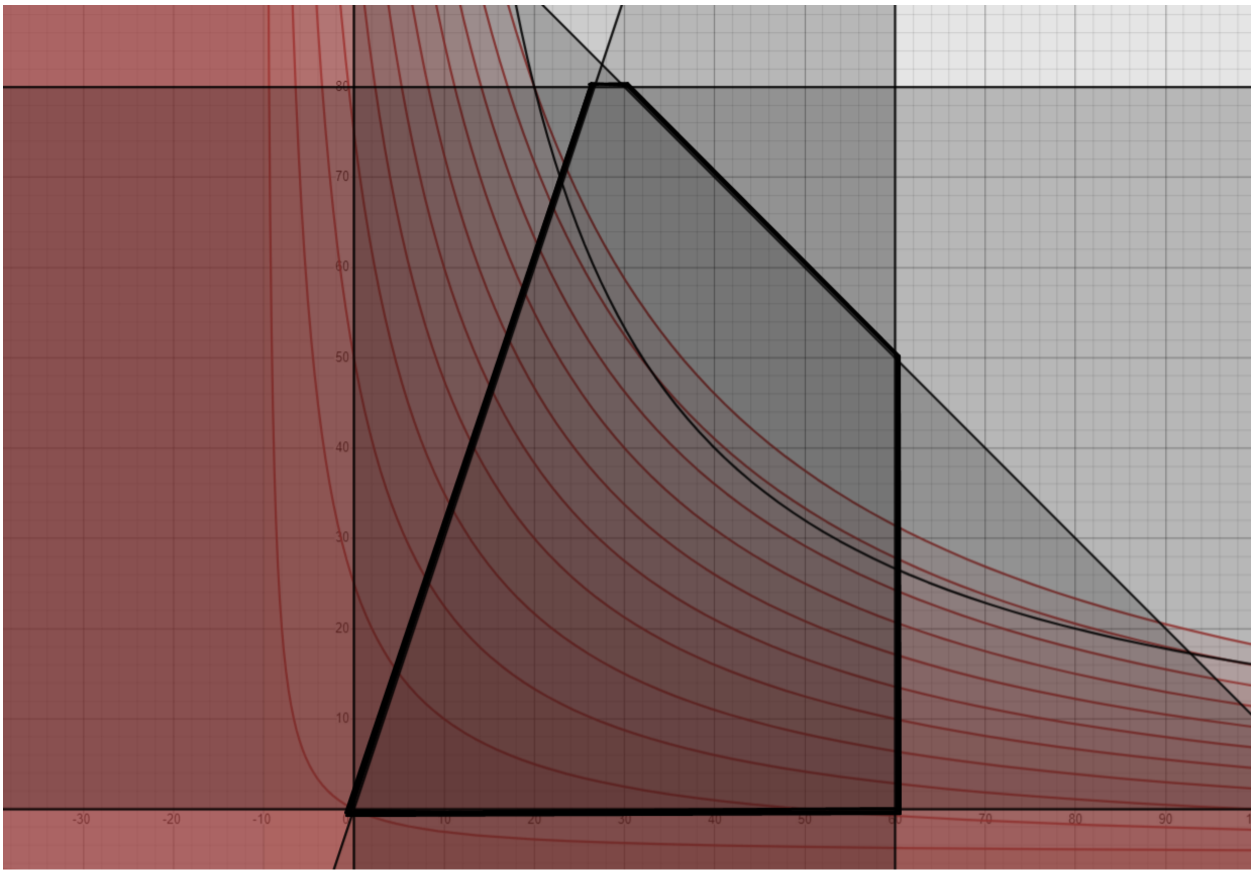

Рисунок 1 – График функции $f(x_1, x_2, x_3)$ и область допустимых значений

2. Работа с программами

При решении данной задачи программа ConditionalOptimization.exe выдает различные ошибки на всех методах

Рассмотрим методы с применением штрафных функций с помощью программы OP_KOND (рисунок 5) – для каждого метода запишем функцию штрафа и результат выполнения алгоритмов.

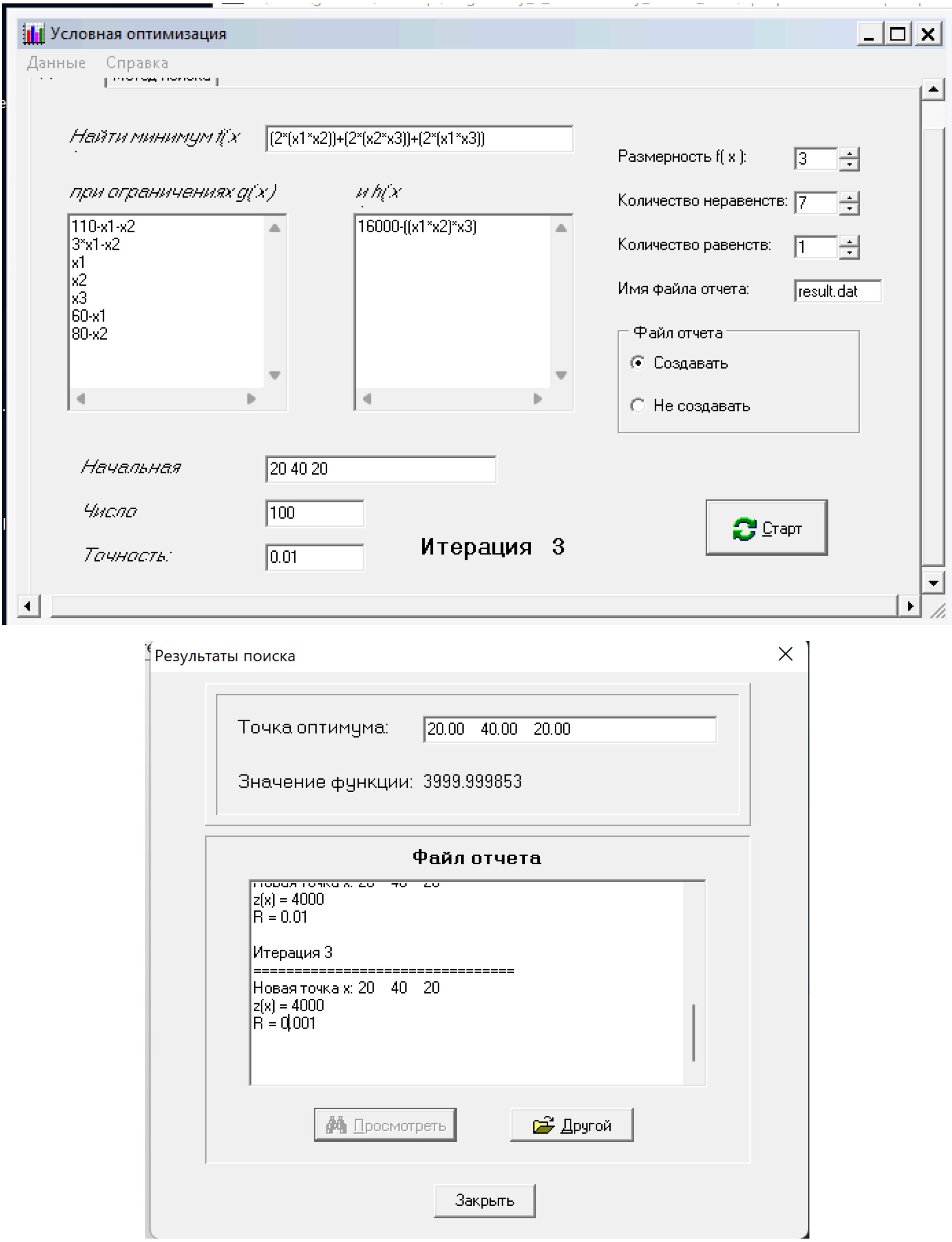

Рисунок 11 – Введенные в программу OP_KOND условия задачи

Функция для всех видов штрафов будет выглядеть как

$Z(x,r) = f(x) + P(x,r) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 + P_1(x,r) + P_2(x,r)$,

где $P_1(x,r)$ – штраф для ограничений – неравенств

$P_2(x,r)$ – штраф для ограничений – равенств

Запишем соответствующее значение $P(x,r)$ для каждого метода.

2.1 Штраф типа квадрата срезки

$$P_1(x,r) = r\sum_{j=1}^{J}\overline{g_j^2}(x)\text{, где }\overline{g_j}(x) = \min[0, g_j(x)] = \begin{cases} g_j(x), \text{если } g_j(x) < 0 \\ 0, \text{если } g_j(x) \geq 0 \end{cases}$$

2.2 Обратный штраф

$P_1(x,r) = -r\sum_{j=1}^{J}\frac{1}{g_j(x)}$

$P_1(x,r) = -r\left(\frac{1}{110-x_1-x_2} + \frac{1}{3x_1-x_2} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{60-x_1} + \frac{1}{80-x_2}\right)$

2.3 Логарифмический штраф

$P_1(x,r) = -r\sum_{j=1}^{J}\ln\left(g_j(x)\right)$

$P_1(x,r) = -r(\ln(110 - x_1 - x_2) + \ln(3x_1 - x_2) + \ln(x_1) + \ln(x_2) + \ln(x_3) + \ln(60 - x_1) + \ln(80 - x_2))$

2.4 Квадратичный штраф

$P_2(x,r) = r\sum_{k=1}^{K}h(x)^2$

$P(x,r) = (16000 - x_1x_2x_3)^2$

Получим следующие отчеты:

Метод Фиакко-Маккормика (штраф типа квадрата срезки)

```
Целевая функция: (2*(x1*x2))+(2*(x2*x3))+(2*(x1*x3))
Начальная точка: 20    40    20
Точность вычислений: 0.01


Итерация 0
================================
Новая точка x: 20    40    20
z(x) = 3999.99
R = 1

Итерация 1
================================
Новая точка x: 20    40    20
z(x) = 4000
R = 0.1

Итерация 2
================================
Новая точка x: 20    40    20
z(x) = 4000
R = 0.01

Итерация 3
================================
Новая точка x: 20    40    20
z(x) = 4000
R = 0.001
```

Метод Фиакко-Маккормика (бесконечный барьер)

```
Целевая функция: (2*(x1*x2))+(2*(x2*x3))+(2*(x1*x3))
Начальная точка: 20    40    20
Точность вычислений: 0.01


Итерация 0
================================
Новая точка x: 20    40    20
z(x) = 3999.99
R = 1

Итерация 1
================================
Новая точка x: 20    40    20
z(x) = 4000
R = 0.1

Итерация 2
================================
Новая точка x: 20    40    20
z(x) = 4000
R = 0.01

Итерация 3
================================
Новая точка x: 20    40    20
z(x) = 4000
R = 0.001
```

Метод Фиакко-Маккормика (обратный штраф)

```
Целевая функция: (2*(x1*x2))+(2*(x2*x3))+(2*(x1*x3))
Начальная точка: 20    40    20
Точность вычислений: 0.01


Итерация 0
================================
Новая точка x: 20    40    20
z(x) = 4000.24
R = 1

Итерация 1
================================
Новая точка x: 20    40    20
z(x) = 4000.02
R = 0.1

Итерация 2
================================
Новая точка x: 20    40    20
z(x) = 4000
R = 0.01

Итерация 3
================================
Новая точка x: 20    40    20
z(x) = 4000
R = 0.001
```

Метод Фиакко-Маккормика (логарифмический штраф)

```
Целевая функция: (2*(x1*x2))+(2*(x2*x3))+(2*(x1*x3))
Начальная точка: 20    40    20
Точность вычислений: 0.01


Итерация 0
================================
Новая точка x: 20    40    20
z(x) = 3976.03
R = 1

Итерация 1
================================
Новая точка x: 20    40    20
z(x) = 3997.6
R = 0.1

Итерация 2
================================
Новая точка x: 20    40    20
z(x) = 3999.76
R = 0.01

Итерация 3
================================
Новая точка x: 20    40    20
z(x) = 3999.98
R = 0.001
```

Таким образом, на основе работы с предложенной программой получаем следующий вывод – все методы пришли к одному и тому же значению за 3 итерации:

$$x_1 = 20; x_2 = 40; x_3 = 20 \rightarrow z(X) = 4000$$

3 Вычисление множителей Лагранжа

Вычислим множители Лагранжа для полученной точки:

$$L(X,\lambda) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 + \lambda_1(16000 - x_1x_2x_3) + \lambda_2(x_1 + x_2 - 110 + u_2^2) + \lambda_3(x_2 - 3x_1 + u_3^2) + \lambda_4(-x_1 + u_4^2) + \lambda_5(-x_2 + u_5^2) + \lambda_6(-x_3 + u_6^2) + \lambda_7(x_1 - 60 + u_7^2) + \lambda_8(x_2 - 80 + u_8^2)$$

Условия Куна-Таккера для точек оптимума:

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 - \lambda_1x_2x_3 + \lambda_2 - 3\lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_7 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 - \lambda_1x_1x_3 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_5 + \lambda_8 = 0 \\ 2x_2 + 2x_1 - \lambda_1x_1x_2 - \lambda_6 = 0 \\ 16000 - x_1x_2x_3 = 0 \\ \lambda_2(x_1 + x_2 - 110) = 0 \\ \lambda_3(x_2 - 3x_1) = 0 \\ -\lambda_4x_1 = 0 \\ -\lambda_5x_2 = 0 \\ -\lambda_6x_3 = 0 \\ \lambda_7(x_1 - 60) = 0 \\ \lambda_8(x_2 - 80) = 0 \\ \\ x_1 + x_2 - 110 \le 0 \\ x_2 - 3x_1 \le 0 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \\ -x_3 \le 0 \\ x_1 - 60 \le 0 \\ x_2 - 80 \le 0 \\ \\ \text{Для всех } n = 2 \ldots 8 \\ \lambda_n \ge 0 \ (\lambda_n \le 0 - \text{для } max) \end{cases}$$

Так как $x_1 = 20 \ne 0; x_2 = 40 \ne 0; x_3 = 20 \ne 0$:

$x_1 - 60 \ne 0; x_2 - 80 \ne 0; x_1 + x_2 - 110 \ne 0; x_2 - 3x_1 \ne 0$

$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 0$

Получаем систему:

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 - \lambda_1 x_2 x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 - \lambda_1 x_1 x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_1 - \lambda_1 x_1 x_2 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = \frac{2x_2+2x_3}{x_2x_3} = \frac{2x_1+2x_3}{x_1x_3} \rightarrow x_1x_3(2x_2 + 2x_3) = x_2x_3(2x_1 + 2x_3) \rightarrow$ $48000 = 64000 -$ неверно $\rightarrow \lambda_1 = \emptyset$

Таким образом, получаем, что точка (20; 40; 20) не удовлетворяет условиям Куна-Таккера.

Вывод

В ходе лабораторной работы были изучены прямые и непрямые методы условной оптимизации. В результате были получены следующие результаты: точки, которые были получены в результате условной оптимизации в данной задаче, не удовлетворяют условиям Куна-Таккера.

В данной задаче все методы Фиакко-Маккормика дали приблизительно одинаковый результат за 3 итерации каждый.

В ходе вычислений была получена точка (20; 40; 20), которая не удовлетворяет условиям Куна-Таккера - значение функции в этой точке составляет 4000