

- a) BESTIMMEN sie die Gleichung einer Geraden g durch die Punkte $A(7 \mid -3 \mid 2)$ und $B(-4 \mid 5 \mid -2)$.
- b) BESTIMMEN sie die Gleichung einer Geraden h , die aus g hervorgeht, wenn g um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ verschoben wird.
- c) BESTIMMEN sie die Gleichung einer Geraden i , die zu g orthogonal ist und durch $C(1 \mid 2 \mid 3)$ verläuft.
- d) BESTIMMEN sie die Gleichung einer Geraden j , die zu i parallel ist und durch den Punkt A von oben verläuft.
- e) BERECHNEN sie alle Spurpunkte der Geraden g .

Lösung 1

a)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

c) z.B.

$$i : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d) z.B.

$$j : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Berechne $\overrightarrow{OA} + \vec{v}$. Der Richtungsvektor bleibt gleich.

e)

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$S_{x_1x_2}(1,5 \mid 1 \mid 0)$$

$$S_{x_2x_3}(0 \mid 2,09 \mid -0,55)$$

$$S_{x_1x_3}(2,88 \mid 0 \mid 0,5)$$

Prüfen sie die Lage der Geraden g und h zueinander. Prüfen sie auch auf orthogonalität, falls die Geraden windschief sind und geben sie den Schnittpunkt an, falls sich die Geraden schneiden.

a)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

b)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix}$$

c)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung 2

- a) Die Geraden schneiden sich in $(-3 | 2 | -1)$.

Sie sind nicht orthogonal. Das Skalarprodukt der Richtungsvektoren ist 13.

- b) Die Geraden sind echt parallel. Die Richtungsvektoren sind mit dem Faktor $\frac{4}{3}$ skaliert.

- c) Die Geraden sind windschief zueinander.

Sie sind orthogonal, das das Skalarprodukt der Richtungsvektoren gleich null ist: $1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 = 3 - 3 = 0$.

Gegeben ist ein Dreieck ABD mit $A(-1|-1|1)$, $B(2|-2|1)$ und $D(2,5|-0,5|1)$.

- a) BERECHNEN sie die Länge der drei Seiten des Dreiecks.
- b) BESTIMMEN sie die Koordinaten eines Punktes C , so dass $ABCD$ ein *Parallelogramm* ist.
- c) PRÜFEN sie, ob das Parallelogramm $ABCD$ ein Rechteck ist.
- d) BESTIMMEN sie Gleichungen für die Diagonalengeraden von $ABCD$ und ermitteln sie deren Schnittpunkt.
- e) Mit einem Punkt E , der senkrecht über dem Schnittpunkt der Diagonalen liegt, bildet $ABCD$ eine Pyramide. BESTIMMEN sie den Punkt E so, dass das Volumen der Pyramide 10 ist.

Lösung 3

a) $|\overrightarrow{AB}| \approx 3,16, |\overrightarrow{BD}| \approx 1,58, |\overrightarrow{AD}| \approx 3,54$

b)

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Ja, denn $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BD} = 0$

d)

$$g : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$h : \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$S(0,75 | -0,75 | 1)$$

e) E liegt über S , also $E(0,75 | -0,75 | 1 + h)$.
Das Volumen der Pyramide berechnet sich durch

$$V_P = 10 = \frac{1}{3} \cdot (|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BD}|) \cdot h$$

Nach h umgestellt ergibt sich $h \approx 6$, also
 $E(0,75 | -0,75 | 7)$.

In einem Bergwerk kann ein Minenschacht durch eine Gerade mit der Gleichung

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -20 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 22 \\ -20 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Die x_1x_2 -Ebene stellt den Meeresspiegel (NN) dar. Alle Werte sind in Metern angegeben.

Ein zweiter Mienenschacht soll am Punkt $K(5 \mid -6 \mid 16)$ orthogonal zu g in den Berg gebohrt werden und im Berg auf g treffen.

- BESTIMMEN sie die allgemeine Form (abhängig von einer unbekannten r) für einen Ortsvektor $\overrightarrow{OS_r}$, für einen Punkt S_r , der auf g liegt.
- Der neue Schacht soll orthogonal zu g verlaufen. Stellen sie eine Gleichung mit $\overrightarrow{OS_r}$ auf, die dies ausdrückt und lösen sie nach r auf (Kontrolle: $r \approx 0,2064$).
- BESTIMMEN sie eine Gleichung für den zweiten Mienenschacht.
- Wie weit muss gebohrt werden, bis der erste Mienenschacht erreicht ist?

Lösung 4

a)

$$\overrightarrow{OS_r} = \begin{pmatrix} -20 + 70r \\ 12 + 22r \\ 8 - 20r \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OS_r} - \overrightarrow{OK}) * \begin{pmatrix} 70 \\ 22 \\ -20 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow r &\approx 0,2064 \end{aligned}$$

c) Berechne $S_{0,2064} = (-5,552 \mid 16,5408 \mid 3,872)$

Richtungsvektor berechnen:

$$\vec{w} = \overrightarrow{KS} = \begin{pmatrix} -5,552 \\ 16,5408 \\ 3,872 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10,552 \\ 22,5408 \\ -12,128 \end{pmatrix}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10,552 \\ 22,5408 \\ -12,128 \end{pmatrix}$$

d)

$$|\vec{w}| \approx 27,69(\text{m})$$