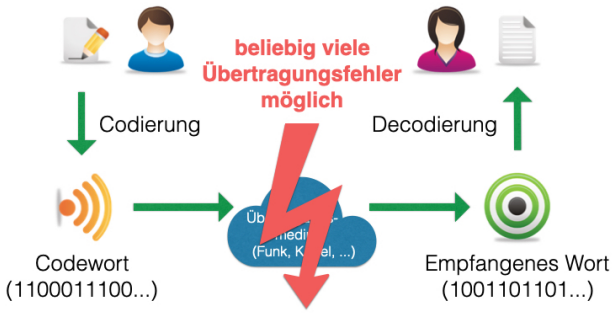
Informationen, Daten und Codierung
Fehlerkorrigierende Codes II

Die folgende Tabelle zeigt noch einmal die Codierung der vier möglichen Nachrichten aus zwei Bits:

Nachricht	Codewort
00	000000
01	010111
10	101011
11	111100



Schaut man sich zwei Codewörter an (z.B. `010111` und `101011`), so stimmen sie in einigen Bits überein und in anderen unterscheiden sie sich. Im Beispiel oben sind die hinteren zwei Bits gleich, der Rest ich verschieden. Die **Anzahl** der Bits, in denen sich zwei Codewörter *A* und *B* unterscheiden, nennt man *„Hamming-Distanz zwischen A und B"*. Die beiden Codewörter im Beispiel sind in 4 Bits verschieden, also ist ihrer Hamming-Distanz gleich 4 (man schreibt $d(010111, 101011) = 4$).

Es könnte nun durch genau 4 Übertragungsfehler passieren, dass aus dem Codewort `010111` das Codewort `101011` wird, ohen das dies auffällt (das empfangene Wort ist ja wieder ein gültiges Wort). Treten *weniger* als 4 Fehler auf, so entstehen Worte, die nicht gültig sind. Der Empfänger erkennt also, dass die Übertragung fehlerhaft war (Abb. 2 zeigt die beiden gültigen Codeworte (schwarz) und drei ungültige (weiß) dazwischen).

Tritt nur *ein* Übertragungsfehler auf (z.B. wird `010111` zu `110111`), so wird der Fehler erkannt und kann sogar korrigiert werden. Bei *zwei* Fehlern (z.B. wird `010111` zu `100111`) ist der Fehler nicht korrigierbar! *Ist dir klar, warum?*

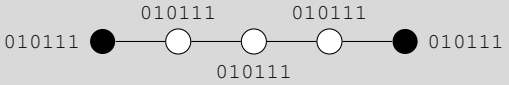


Abb. 2: Ungültige Worte zwischen `010111` und `101011`

Aufgabe 1

Berechne auch für die übrigen Kombinationen von Codewörtern aus der Tabelle oben die Hamming-Distanz. Was fällt dir auf?

Was bedeutet es praktisch, wenn zwei Codewörter die Hamming-Distanz 1 haben?

Aufgabe 2

Als Empänger erhältst du das Wort `111011`. Dieses Wort ist offensichtlich falsch übertragen worden. Als welches Codewort würdest du es interpretieren und wie lautet somit die gesendete Nachricht?

Aufgabe 3

Als Empänger erhältst du das Wort `111111`. Dieses Wort gehört nicht zu den gültigen Codewörtern, es ist also ein Übertragungsfehler aufgetreten. Begründe, warum das Wort nicht sicher korrigiert werden kann.

★ Zusatzaufgabe 1

Es ist nicht besonders effizient, für **zwei** Nachrichtenbits **vier** Prüfbits zu versenden. Kannst du einen Code für die vier 2-Bit Nachrichten von oben entwerfen, der mit *weniger* als vier Prüfbits auskommt, aber trotzdem einen Fehler korrigieren kann? Wie viele Übertragungsfehler kann dein Code erkennen?