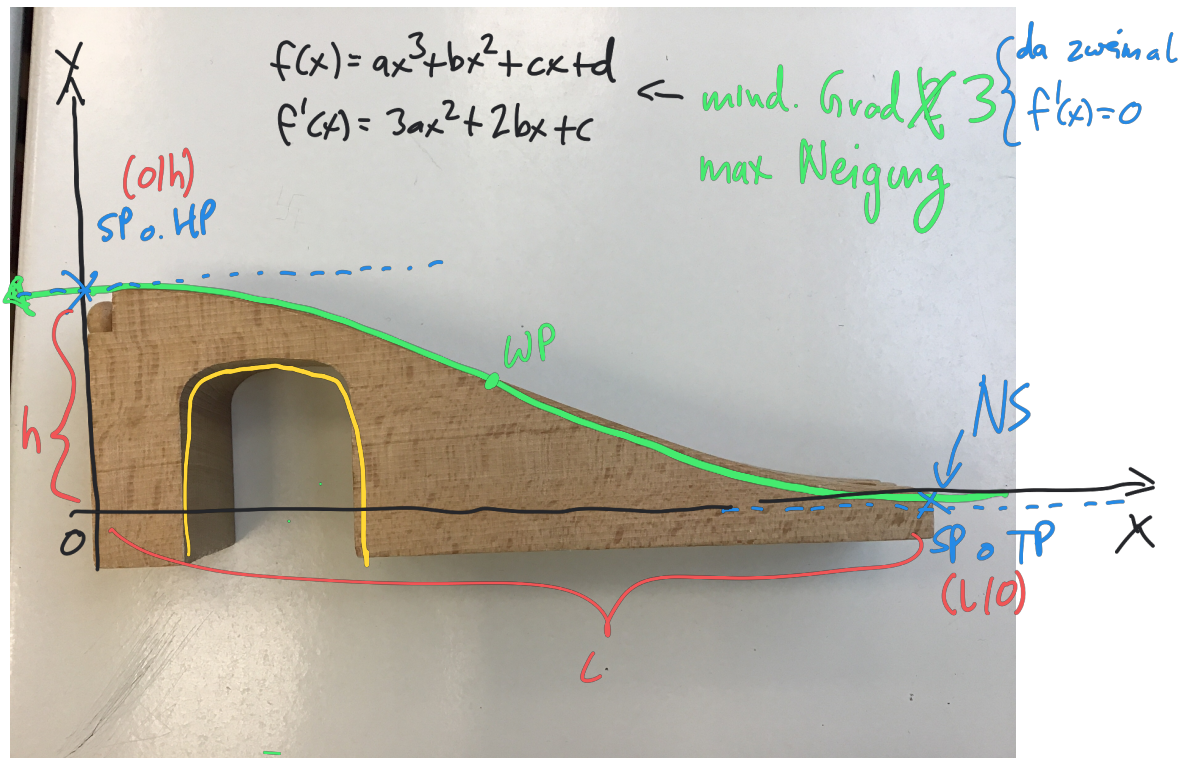


BRIO Eisenbahnrampe

BESTIMMEN sie eine Modellfunktion zur Beschreibung einer Eisenbahnrampe für eine Kinder-Holzeisenbahn.



Lösung 1

Die gesuchte Funktion hat mindestens Grad 3, da sie zwei Stellen hat mit $f'(x) = 0$. Also:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Es werden also vier Gleichungen benötigt, da in der Funktion vier Unbekannte zu bestimmen sind. Die beiden Stellen mit Steigung 0 liefern jeweils zwei Gleichungen. Die Punkte können durch Messen der Schiene bestimmt werden und die Ableitung kann bestimmt und gleich 0 gesetzt werden:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Angenommen die gemessenen Werte sind $h = 7$ und $l = 20$, dann ergeben sich die Gleichungen:

$$f(0) = 7 \Leftrightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 7$$

$$f(20) = 0 \Leftrightarrow a \cdot 20^3 + b \cdot 20^2 + c \cdot 20 + d = 0$$

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0$$

$$f'(20) = 0 \Leftrightarrow 3a \cdot 20^2 + 2b \cdot 20 + c = 0$$

Nun lässt sich die erweiterte Koeffizientenmatrix aufstellen und mit dem Gauß-Algorithmus lösen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 8000 & 400 & 20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1200 & 40 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \\ \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1200 & 40 & 1 & 0 & 0 \\ 8000 & 400 & 20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

Durch Verwendung des GTR-Befehls `rref` kann das Gleichungssystem gelöst werden. Wir erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{4000} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-21}{400} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

Die gesuchte Funktion ist also:

$$f(x) = \frac{7}{4000}x^3 - \frac{21}{400}x^2 + 7$$

$$f'(x) = \frac{21}{4000}x^2 - \frac{42}{400}x$$

Probe:

$$f(0) = \frac{7}{4000} \cdot 0^3 - \frac{21}{400} \cdot 0^2 + 7 = 7 \checkmark$$

$$f(20) = \frac{7}{4000} \cdot 20^3 - \frac{21}{400} \cdot 20^2 + 7 = 0 \checkmark$$

$$f'(0) = \frac{21}{4000} \cdot 0^2 - \frac{42}{400} \cdot 0 = 0 \checkmark$$

$$f'(20) = \frac{21}{4000} \cdot 20^2 - \frac{42}{400} \cdot 20 = 0 \checkmark$$