PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

TP EN AUTONOMIE SUR LES DÉNOMBREMENTS — PARTIE COURS

1. Tiercé dans l'ordre sur 3 chevaux - nombre de bijections - nombre de permutations.

« On suppose qu'il y a 3 chevaux au départ d'une course qui n'admet pas d'ex-aequo. Quel est le nombre de tiercés dans l'ordre ? »

Pour le premier cheval, on a trois choix possibles. Pour chacun de ces choix, on a deux choix possibles et il ne reste aucun choix pour le troisième. On a donc $3 \times 2(\times 1) = 3!$ *tiercés dans l'ordre.*

Remarquer que c'est le nombre de bijections de $\{1, 2, 3\}$ dans lui-même (pourquoi ?).

Plus généralement, le nombre de *permutations* d'un ensemble de n éléments est $\boxed{n!}$.

2. Tiercé dans l'ordre - nombre d'applications injectives - nombre d'arrangements.

« Combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre possibles sur une course de 20 chevaux qui n'admet pas d'ex-aequo ? »

Commencer par compter le nombre de choix pour le premier cheval. Pour chacun de ces choix, combien de choix avez-vous pour le second ? Donc finalement, combien de choix pour les deux premiers chevaux ? Etc.

Remarquer que le nombre trouvé est aussi le nombre d'applications injectives de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ dans l'ensemble des chevaux (à chaque place, on associe le numéro d'un cheval. Justifier l'injectivité).

Plus généralement, le nombre de façons *ordonnées* de choisir k éléments parmi n s'appelle le nombre d'*arrangements* de k éléments parmi n et se note

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.}$$

On remarque que $A_n^n = n!$.

3. Tiercés dans le désordre - nombre de sous-ensembles de cardinal fixé d'un ensemble fini - nombre de combinaisons.

« Combien y a-t-il de tiercés dans le désordre possibles sur une course de 20 chevaux qui n'admet pas d'ex-aequo ? »

Il y en a moins que de tiercés dans l'ordre, bien sûr. Pour un tiercé dans le désordre, il y a $3!$ *tiercés dans l'ordre qui correspondent. Et donc le nombre de tiercé dans le désordre est le nombre de tiercés dans l'ordre divisé par* $3!$.

Il s'agit en fait de trouver le nombre de sous-ensembles à 3 éléments parmi 20.

Plus généralement, le nombre de sous-ensembles à k éléments parmi n s'appelle le nombre de *combinaisons* de k élément parmi n et se note

$$\boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.}$$

4. Nombre de n-uplets sur un ensemble fini — nombre d'applications d'un ensemble dans un autre.

« Quel est le cardinal de $\{0,1\}^n$? Celui de $\{1,2,...,6\}^3$? »

Dans le premier cas : pour le premier élément du n-uplet, on a deux choix. Pour chacun de ces choix, on a à nouveau deux choix, soient 4 choix pour $n=2$. Pour $n=3$, on a encore deux choix pour chacun des 4 choix, etc. Finalement, le cardinal de $\{0,1\}^n$ est 2^n. Dans le second cas, on a 6 choix pour chaque composante du triplet ordonné, soient au total 6^3 possibilités.

Plus généralement, le cardinal de l'ensemble E^F (ensemble des applications de F dans E — justifier la notation) si E et F sont finis est $\boxed{\text{card E}^{\text{card F}}}$.

5. Nombre de parties d'un ensemble fini.

« Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ pour $n=1$ et $n=2$? »

Pour $n=1$ les parties sont : le vide et le singleton consitué de l'unique élément, qui est aussi le tout, soient 2 parties. Pour $n=2$, on a 4 parties. Pour le cas général, on considère les applications de E dans $\{0,1\}$ qui a un élément de E associent 1 si on choisit l'élément dans la partie et 0 sinon. Le nombre de parties de E est donc égale au nombre d'applications de E dans $\{0,1\}$, soit $\boxed{2^n}$.

Avec ce qui précède, en remarquant que les parties quelconques d'un ensemble à n éléments s'obtiennent comme l'union (disjointe) des parties à k éléments, pour k variant de 0 à n, on obtient l'égalité $\boxed{\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n}$.

6. Combinaisons avec répétitions.

« Combien y a-t-il de façons de placer p billes indiscernables dans n boîtes distinctes ? »

Cela revient, une fois alignées les p billes, à placer $n-1$ séparations « entre les billes ». A gauche de la première séparation, on aura le contenu de la première boîte, entre la première et la seconde séparations, celui de la seconde boîte, etc. A droite de la $n-1$-ème séparation, on aura donc le contenu de la n-ème boîte. Si deux séparations se touchent, la boîte correspondante est vide. Combien y a-t-il donc de façons de placer ces séparations ? Cela revient à considérer que l'on a en tout p+n-1 « places »et qu'à chacune de ces places, on doit disposer une bille ou une séparation. Le résultat est donc le choix des $n-1$ séparations parmi les $p+n-1$ objets, soit

$$\boxed{C_{p+n-1}^{n-1}.}$$

Remarquer qu'avec la propriété 1 ci-dessous, cela correspond également au choix des places des p billes.

7. Permutations avec répétitions.

« Combien y a-t-il d'anagramme au prénom bob ? »

Les permutations des lettres du mot bob comprennent les doublons constitués des permutations des deux lettres b. Il faut donc diviser ce nombre, 3! par 2, soient 3 anagrammes : bob bbo obb.

Plus généralement, le nombre de permutations des éléments a_1,..., a_k qui sont respectivement en nombre n_1,..., n_k strictement positifs est

$$\boxed{P_{n_1,\dots,n_k} = \frac{(n_1+...+n_k)!}{n_1!...n_k!}.}$$

Remarquer que le nombre de permutations avec répétition lorsque $k=2$ est aussi le nombre de combinaisons de n_1 parmi n_1+n_2.

8. Propriétés

1. Soient $n,\ k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$. Alors $C_n^{n-k} = C_n^k$.
2. Soient $n,\ k \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq 1$ et $k \leq n-1$. Alors $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.
3. Soient $a,\, b \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$.