

Département Electronique Electrotechnique Automatique

Equipe Automatique Traitement du Signal

Première année - UE STI - STI 1.2 Traitement du Signal

TD 3 : Convolution et filtrage

CORRIGÉ-CORRIGÉ-CORRIGÉ-CORRIGÉ

Sujet	Systèmes de convolution et filtrage analogique
Objectifs	Mise en œuvre pour la résolution d'équations différentielles Conception de filtres analogiques Utilisation élémentaire de Matlab et Simulink

Exercice 1 : Conception de filtres analogiques

On désire concevoir un filtre dont la réponse fréquentielle $H(\nu)$ est représentée figure 1.

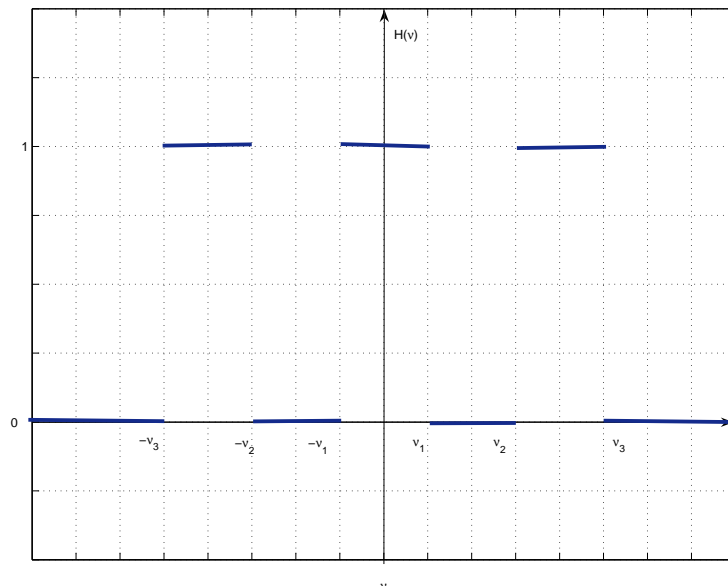


Figure 1: Réponse fréquentielle du filtre à concevoir

1. 4 filtres idéaux ont été présentés en cours. Exprimer le filtre H comme la mise en série de deux filtres idéaux. On donnera la valeur des paramètres des filtres idéaux considérés en fonction de ν_1 , ν_2 et ν_3 .

CORRECTION *Le filtre peut être écrit comme la mise en série d'un*

(a) *filtre passe-bas de pulsation de coupure ν_3 ;*

(b) *filtre coupe bande $[\nu_1, \nu_2]$.*

2. Ces filtres sont-ils réalisables ? Sinon, pourquoi ?

CORRECTION *Ce sont des filtres idéaux. L'obstacle majeur à l'utilisation d'un filtre idéal en temps réel est que celui-ci ayant une réponse fréquentielle réelle, il est forcément non causal. En effet, on a démontré en cours que si H est un filtre causal alors on a :*

$$\operatorname{Re}(H(\nu)) = \left(\operatorname{Im}(H) \star \frac{1}{\pi \bullet} \right) (\nu) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(H(\nu)) = - \left(\operatorname{Re}(H) \star \frac{1}{\pi \bullet} \right) (\nu).$$

Le filtre idéal est tel que $\operatorname{Im}(H(\nu)) = 0$ et $\operatorname{Re}(H(\nu))$ qui respecte un gabarit donné, ce qui est contradictoire.

3. On décide de réaliser les filtres idéaux par des filtres de Butterworth d'ordre 1. Donner leur expression à partir de ν_1 , ν_2 et ν_3 . En déduire l'approximation du filtre H . Quel est son ordre ?

CORRECTION *Un filtre de Butterworth d'ordre n est un filtre de gain statique égal à 1, sans zéros et dont les pôles sont les racines à partie réelle négative de l'équation $1 + (-s^2)^n = 0$. Par suite,*

$$H_b(s) = \frac{1}{s + 1}$$

La fréquence de coupure à -3 dB vaut 1 rad/s. C'est un filtre passe-bas. Comme il a été vu en cours, on peut obtenir à partir de ce filtre un filtre passe-bas de fréquence de coupure différente ou un filtre coupe-bande en appliquant les transformations présentées dans le tableau ??.

De passe-bas fréquence de coupure $\frac{1}{2\pi}$ Hz vers...	s est remplacé par...
passe-bas $\nu_c \neq \frac{1}{2\pi}$	$\frac{s}{2\pi\nu_c}$
passe-haut $\nu_c \neq \frac{1}{2\pi}$	$\frac{2\pi\nu_c}{s}$
passe-bande	$\frac{s^2 + 4\pi^2\nu_1\nu_2}{s2\pi(\nu_2 - \nu_1)}$
coupe-bande	$\frac{s2\pi(\nu_2 - \nu_1)}{s^2 + 4\pi^2\nu_1\nu_2}$

Table 1: Filtrage passe-bas

Pour obtenir :

- le filtre passe-bas de fréquence de coupure ν_3 :

$$H_{b\nu_3}(s) = \frac{1}{\frac{s}{2\pi\nu_3} + 1}$$

- le filtre coupe-bande $[\nu_1, \nu_2]$:

$$H_{b\nu_1, \nu_2}(s) = \frac{1}{\frac{s^2 + 4\pi^2\nu_1\nu_2}{s^2 + 2\pi(\nu_2 - \nu_1)s + 4\pi^2\nu_1\nu_2} + 1} = \frac{s^2 + 4\pi^2\nu_1\nu_2}{s^2 + 2\pi(\nu_2 - \nu_1)s + 4\pi^2\nu_1\nu_2}$$

L'approximation du filtre H est alors donnée par :

$$H_a(\nu) = \frac{1}{\frac{s}{2\pi\nu_3} + 1} \frac{s^2 + 4\pi^2\nu_1\nu_2}{s^2 + 2\pi(\nu_2 - \nu_1)s + 4\pi^2\nu_1\nu_2}.$$

H_a est d'ordre 3.

4. Avec $\nu_1 = 1$ Hz, $\nu_2 = 2$ Hz et $\nu_3 = 5$ Hz, à partir des figures tableau 1, est ce que le choix d'un ordre 1 est satisfaisant ?

CORRECTION Avec un ordre 1, les bandes de transition sont extrêmement larges. Un ordre plus important, par exemple 10, permet d'avoir des bandes de transition beaucoup plus étroites. L'ordre total du filtre est alors 30.

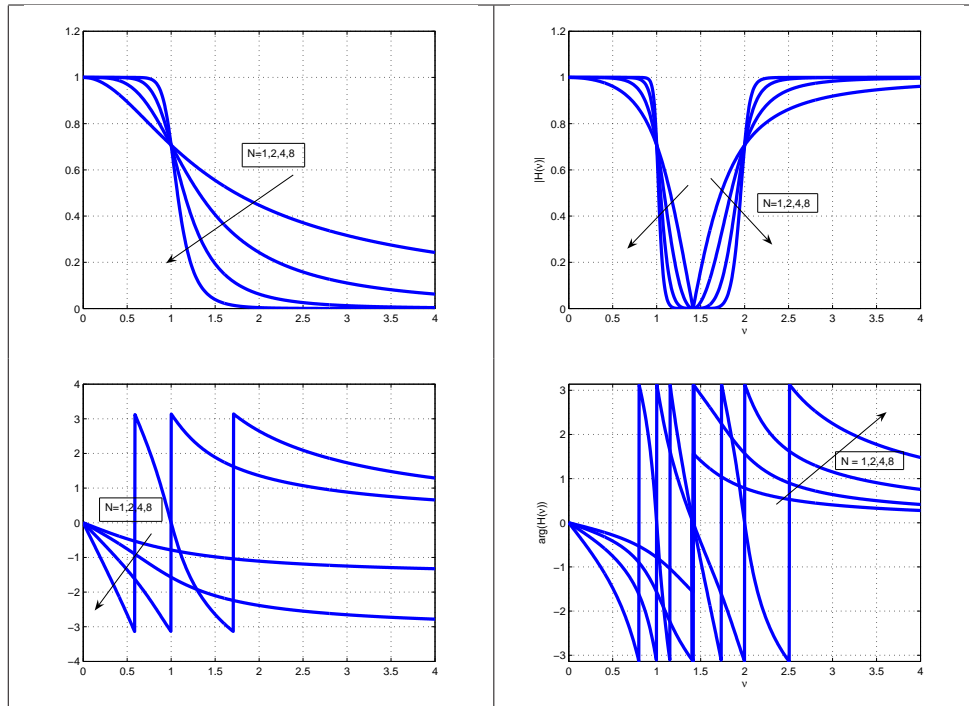


Table 2: Réponse fréquentielle de filtres de Butterworth d'ordre croissant



Figure 2: Schéma de principe de la modulation d'amplitude

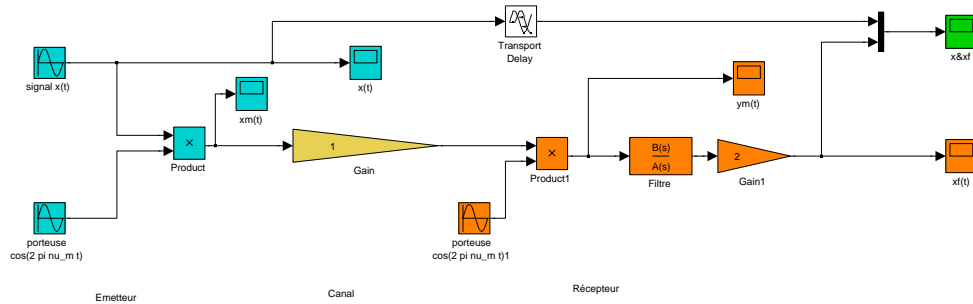


Figure 3: Schéma Simulink td3simAM.mdl

Exercice 2 : Transmission d'un signal par modulation d'amplitude (AM) / multiplexage fréquentiel (suite)

Cet exercice est la suite de l'exercice 2 du travail préparatoire.

1. On décide de mettre en œuvre la modulation AM dans le cas d'un signal x défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \cos(2\pi t).$$

Ce signal est-il de spectre à support borné ? Si oui que vaut ν_{max} ? Pour assurer la condition $\nu_m > \nu_{max}$, on prend dans ce qui suit $\nu_m = 10\nu_{max}$.

CORRECTION D'après la table de transformée de Fourier distribuée avec le sujet de TD,

$$\mathcal{F}[\cos(2\pi \bullet)] = \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_{-1}).$$

Ce signal est donc de spectre à support borné, avec $\nu_{max} \geq 1$.

2. Pour la mise en œuvre, on décide de ne pas utiliser un filtre idéal mais un filtre de Butterworth. Pourquoi ?

CORRECTION *Un filtre idéal est non causal : il n'est donc pas réalisable pour effectuer du filtrage en temps réel, voir la réponse à la question 2 de l'exercice 1.*

3. Le fichier Matlab `td3filtre.m` disponible sur le serveur pédagogique est listé ci-dessous :

```
T = 1;          % Période du signal x
Tsim = 10;      % Temps de simulation pour le schéma simulink
nu_m = ; % A compléter
N = ;          % A compléter : ordre du filtre de butterworth
Wc = ;         % A compléter : pulsation de coupure du filtre de butterworth
[B,A] = butter(N,Wc,'s'); % Calcul d'un filtre de butterworth
                        % d'ordre N de PULSATION (rad/s) de coupure Wc
                        % B est le vecteur des coefficients du polynome
                        % numérateur du filtre écrit par puissance
                        % décroissance.
                        % Ex : si B=[5,0,12] alors le polynome
                        % correspondant est :  $P(s) = 5s^2 + 0s + 12$ 
                        % A = coefficients du dénominateur du filtre.
                        % Pour plus d'info, taper sous Matlab
                        % help butter

nu1 = 2*nu_m;
nu = linspace(0, nu1, 1000); % Génère un vecteur de 1000 points de 0 à nu1
H = freqs(B,A,2*pi*nu); % Calcule la valeur du spectre de Butterworth pour
                        % les fréquences dans le vecteur nu.

figure;
plot(nu, abs(H)); % Affiche le module du spectre pour les fréquences dans nu
figure;
plot(nu, angle(H)); % Affiche l'argument du spectre pour les fréquences dans nu
```

Pour synthétiser un filtre de Butterworth, exécuter ce programme Matlab en ayant eu soin de compléter les lignes `% A compléter`. Que peut-on dire du temps de groupe du filtre obtenu ? Le fichier Simulink `td3simAM.mdl` disponible sur le serveur pédagogique, représenté figure 3, va permettre de simuler le fonctionnement de ce qui est représenté figure 2. Le temps de simulation est fixé par la variable `Tsim` du fichier Matlab `td3filtre.m`. Le signal xf est la reconstitution du signal x par le récepteur. Comparer le signal xf obtenu par simulation avec le signal x de départ. Interprétation ?

CORRECTION *Dans le programme ci-dessus la variable `nu_m` contient la valeur de ν_m soit 10 Hz. Pour le choix des paramètres N et Wc , on applique une approche du type “Général tâtons” (essais-erreurs) intelligente. On essaie :*

- (a) $N = 1$ et $Wc = 2\pi \cdot 3$ (attention radians/s). Le module du filtre obtenu est représenté figure ??, gauche. Pour $\nu = 1$, $|H(\nu)| \approx 1$. Pour $\nu = 20 - 1 = 19$ Hz le gain $|H(\nu)|$ n'est pas assez faible pour être négligeable. Par suite, la composante de y_m à cette fréquence ne sera pas bien filtrée. On obtient donc $xf(t)$ représenté figure ??, droite, qui présente des oscillations à ces fréquences. En augmentant l'ordre du filtre N , on peut améliorer le filtrage.

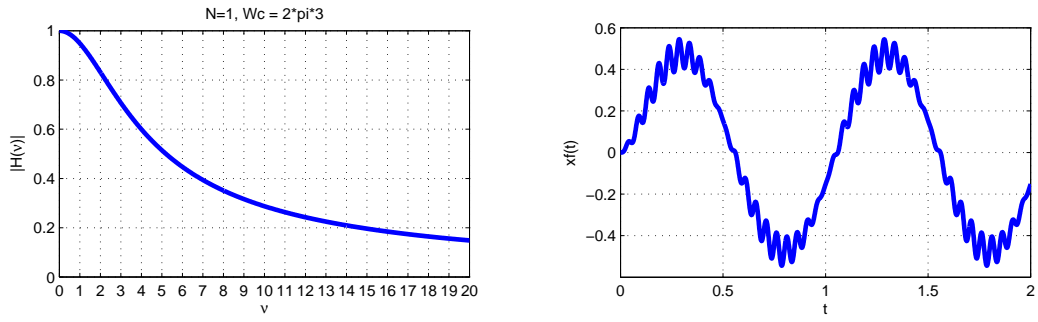


Figure 4: $N = 1$ et $W_c = 6\pi$ rad/s

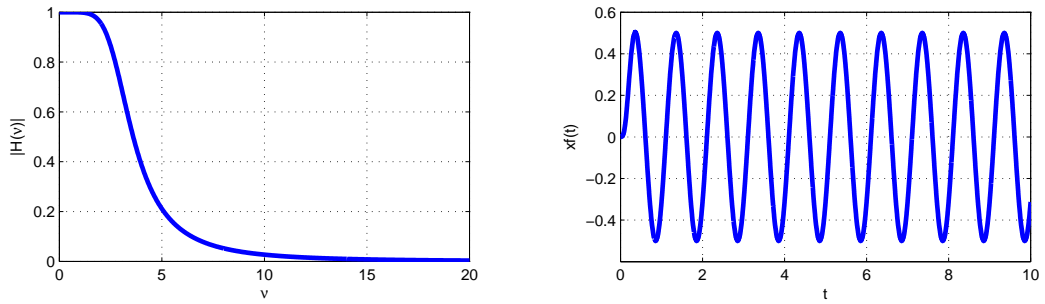


Figure 5: $N = 3$ et $W_c = 6\pi$ rad/s

(b) $N = 3$ et $W_c = 2\pi \cdot 3$, voir figure ???. Les oscillations sont effectivement supprimées. Par contre l'amplitude du signal x_f est de 0.5 alors que l'amplitude de x est 1. Normal, on n'a pas multiplié par 2 les gains du filtre, voir le travail préparatoire. De plus, si on le compare avec $x(t)$, on voit apparaître un déphasage, figure ??, gauche. Il est dû au filtre de Butterworth, voir figure ??, droite où la phase du filtre est représentée en fonction de la fréquence. En augmentant la pulsation de coupure du filtre, on peut réduire le déphasage.

(c) etc..

4. On considère maintenant le signal x défini par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \cos(2\pi t) + \cos(2\pi \nu_2 t)$$

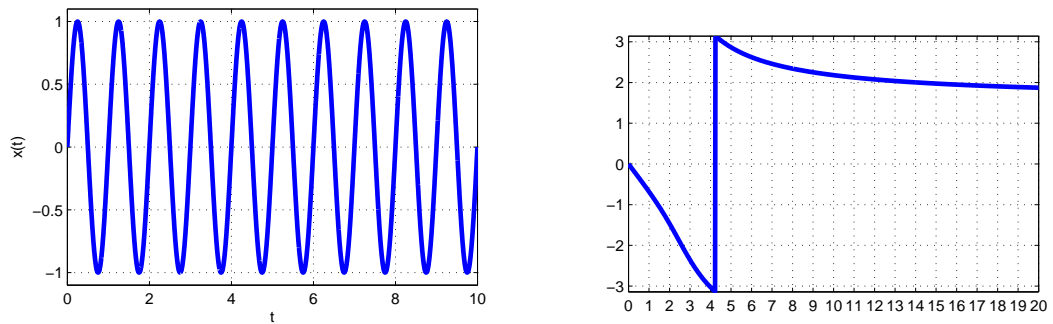


Figure 6: Signal $x(t)$ et phase du filtre de Butterworth

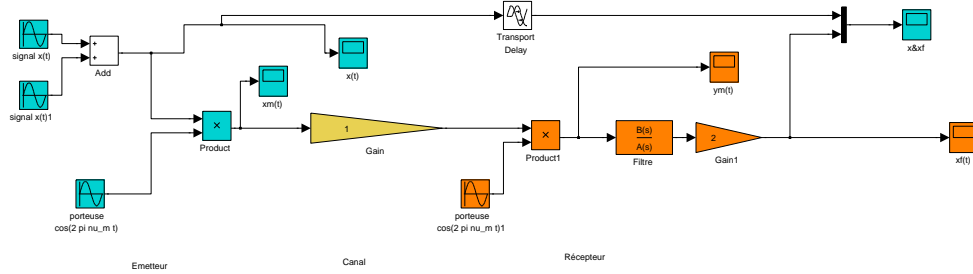


Figure 7: Schéma Simulink td3simAMv2.mdl

avec $\nu_2 = 1.2$ Hz. Modifier le schéma Simulink td3simAM.mdl de façon à traiter ce nouveau signal. Calculer le filtre de Butterworth en prenant $\text{nu_m} = 10$, $N = 13$, et $\text{Wc} = 2 \cdot \pi \cdot 3$. Simuler et observer. Refaire la simulation avec $\nu_2 = 2$ Hz. Qu'observez vous ? Comment interprétez vous cela ?

CORRECTION Après modification du schéma Simulink td3simAM.mdl on obtient le schéma représenté figure ?? . Les signaux x et x_f obtenus pour $\nu_2 = 1.2$ Hz et $\nu_2 = 2$ Hz sont représentés figure ?? . On observe que si dans le cas $\nu_2 = 1.2$ Hz, après un régime transitoire x et x_f sont de même forme, ce n'est plus le cas pour $\nu_2 = 2$ Hz. Interprétons à l'aide de la réponse fréquentielle du filtre de Butterworth représentée figure ?? . Pour les deux valeurs de ν_2 Hz, on a :

$$|H(1.2)| \approx |H(2)| \approx 1.$$

Les phases sont par contre différentes.

- Pour $\nu_2 = 1.2$ Hz, $\arg(H(1.2)) = 2.9 - 2\pi = -3.38$. La composante sinusoïdale du signal de sortie à la fréquence 1.2 Hz est donc en retard de $-\frac{\arg(H(1.2))}{2\pi \times 1.2} = 0.45$ s sur la composante sinusoïdale à la même fréquence du signal d'entrée. Notons que puisque $\arg(H(1)) = -2.8$, la composante sinusoïdale à la fréquence 1.2 Hz est donc en retard de $-\frac{\arg(H(1))}{2\pi \times 1} = 0.445$ s sur la composante sinusoïdale à la même fréquence du signal d'entrée. Les deux composantes ayant subi des retards de valeur similaire, la forme du signal de sortie est très proche de la forme du signal d'entrée.
- Pour $\nu_2 = 2$ Hz, $\arg(H(2)) = 0.4 - 2\pi = -5.88$. La composante sinusoïdale du signal de sortie à la fréquence 2 Hz est donc en retard de $-\frac{\arg(H(2))}{2\pi \times 2} = 0.47$ s sur

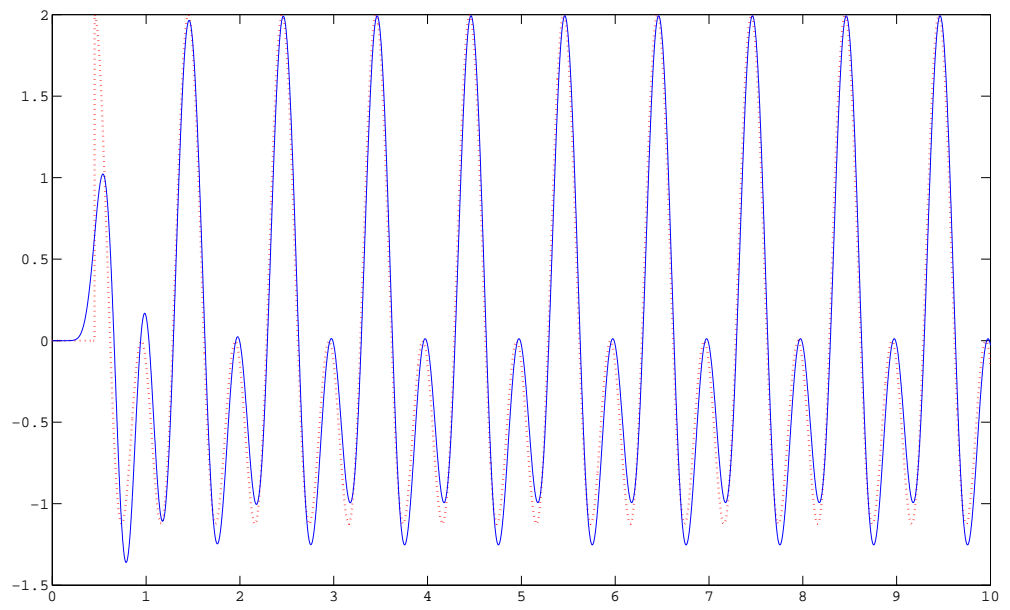
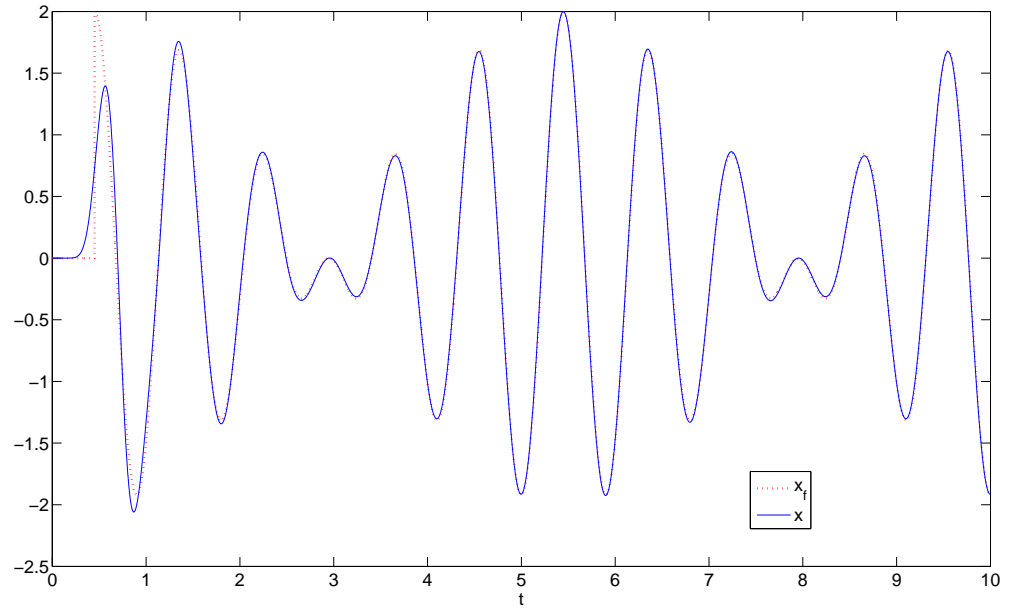


Figure 8: Signaux x et x_f pour $\nu_2 = 1.2$ Hz (haut) et $\nu_2 = 2$ Hz (bas)

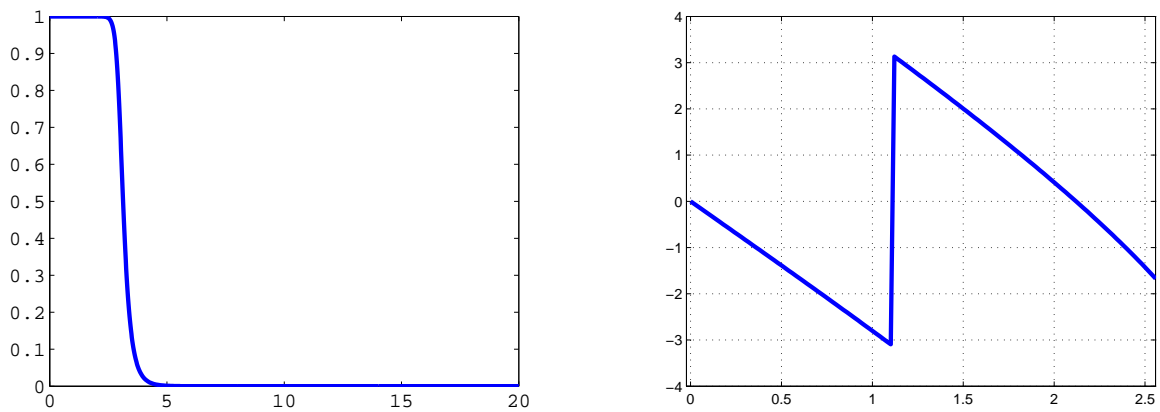


Figure 9: Module et Phase du filtre de Butterworth

la composante sinusoïdale à la même fréquence du signal d'entrée. Il y a donc une différence d'environ 5% entre les deux retards. c'est suffisant pour voir apparaître des différences notables entre les formes des deux signaux.

Exercice 3 : Élémentaire mon cher Watson !

On envoie en entrée d'un filtre fréquentiel analogique le signal périodique représenté figure 4 (gauche). La sortie du filtre est représentée figure 4 (droite). Que peut-on en déduire sur la réponse fréquentielle de ce filtre ? De quel type pourrait-il être ?

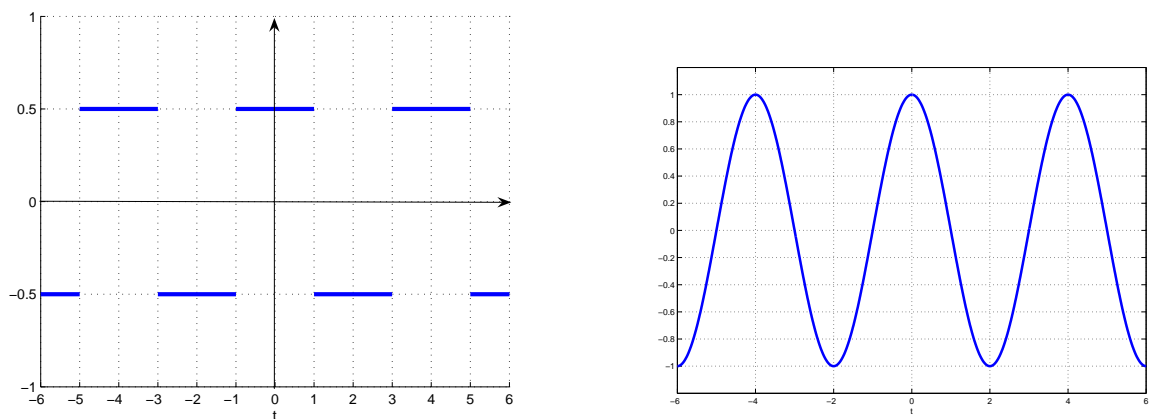


Figure 10: Signal périodique à l'entrée du filtre (gauche) et Signal à la sortie du filtre (droite)

CORRECTION Soit x le signal périodique représenté figure 4. Il est périodique de période $T = 4$ s et peut se décomposer comme la somme de

- la fonction périodique de période T de fonction motif $\text{rect}\left(\frac{\bullet}{T_0}\right)$ avec $T_0 = 2$ s
- $-\frac{1}{2}$

Nous allons raisonner sur la décomposition en série de Fourier des signaux. On a vu lors du CM1 que la fonction périodique de motif $\text{rect}\left(\frac{\bullet}{T_0}\right)$ et de période T admet la décomposition en série de Fourier suivante :

$$\forall t \in \left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right], \quad \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i \frac{n}{T} t}.$$

avec

$$c_n = \frac{T_0}{T} \text{sinc}\left(n \frac{T_0}{T}\right).$$

Par suite, en rajoutant le terme $-\frac{1}{2}$, x admet la décomposition en série de Fourier suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{2\pi i \frac{n}{4} t}$$

avec $\tilde{c}_n = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$ pour n impair et $\tilde{c}_n = 0$ pour n pair.

Soit H la réponse fréquentielle du filtre. On observe que pour l'entrée x , la sortie du filtre est un signal cosinusoidal de période 4 s. Cela signifie que de la décomposition en série de Fourier de x , seules les composantes \tilde{c}_{-1} et \tilde{c}_1 sont transmises. Par suite, pour $p > 1$:

$$H\left(\frac{2p+1}{4}\right) = 0.$$

Puisque les \tilde{c}_n sont réels, la composante du signal x qui est transmise est

$$2\tilde{c}_1 \cos\left(2\pi \frac{t}{4}\right).$$

Le signal de sortie étant $\cos\left(2\pi \frac{t}{4}\right)$, on a alors :

$$H\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\tilde{c}_1} = \frac{1}{\text{sinc}(1/2)} = 1.5708$$

Le filtre pourrait être un filtre passe-bas de fréquence de coupure comprise entre $\frac{1}{4}$ Hz et $\frac{3}{4}$ Hz et de gain 1.5708.

Exercice 4 : Etude d'un système électro mécanique (suite)

On considère un moteur électrique à courant-continu (CC). L'application d'une tension aux bornes du moteur entraîne la rotation de l'axe du moteur. On s'intéresse à la vitesse de rotation du moteur. Par application des lois élémentaires de la Physique, on établit que le comportement du moteur est décrit par les équations différentielles et algébriques suivantes :

- une **équation électrique** : $u_m(t) - K_e \omega(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$;
- une **équation mécanique** : $\Gamma(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} + f\omega(t)$;
- une **équation de couplage** : $\Gamma(t) = K_c i(t)$

où $u_m(t)$ est la tension appliquée aux bornes du moteur, $i(t)$ est le courant absorbé, $\Gamma(t)$ est le couple mécanique et $\omega(t)$ est la vitesse angulaire de l'arbre du moteur. Les paramètres du moteur sont détaillés dans le tableau 2.

1. Quelles sont la (ou les) entrée(s) et la (ou les) sortie(s) du système moteur ?

R	résistance de l'induit	$5,8\Omega$
L	inductance de l'induit	$5mH$
K_e	constante de la fcem	$24 \times 10^{-3}V/rd/s$
J	inertie de la poulie	$15 \times 10^{-7}kg.m^2$
K_c	constante de couple	$24 \times 10^{-3}Nm/A$
f	coefficient de frottement	$10^{-6}Nm/rd/s$

Table 3: Tableau des paramètres

CORRECTION La (ou les) entrée(s) du système correspond(ent) à l'action de l'environnement sur le système : elle(s) fait (font) parti des causes des phénomènes physiques qui se produisent en son sein. La (ou les) sortie(s) du système correspond(ent) à l'action du système sur l'environnement : elle(s) fait (font) parti des effets des phénomènes physiques qui se produisent en son sein. Par suite,

- u_m est l'entrée du système ;
 - ω est la sortie du système.
2. Ce système est-il un système de convolution ? Si oui, déterminer sa réponse impulsionnelle h .

CORRECTION On va tout d'abord simplifier les équations en éliminant les équations algébrique.

L'équation de couplage permet d'éliminer $\Gamma(t)$ dans l'équation mécanique, ce qui donne :

$$K_c i(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} + f\omega(t)$$

Cette équation différentielle permet d'exprimer i en fonction de ω et de sa dérivée première. En remplaçant i par cette expression dans l'équation électrique, on obtient :

$$u_m(t) - K_e \omega(t) = \frac{fR}{K_c} \omega(t) + \left(\frac{JR}{K_c} + \frac{fL}{K_c} \right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{JL}{K_c} \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} \quad (1)$$

soit

$$\frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{R}{L} + \frac{f}{J} \right)}_{a_1} \frac{d\omega(t)}{dt} + \underbrace{\left(\frac{fR}{JL} + \frac{K_c K_e}{JL} \right)}_{a_0} \omega(t) = \underbrace{\frac{K_c}{JL}}_b u_m(t) \quad (2)$$

Cette équation différentielle est un cas particulier de :

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y(t)}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{(m-1)} x(t)}{dt^{(m-1)}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

Elle définit donc un système de convolution. On peut calculer la fonction h en déterminant la réponse impulsionnelle du système. Le système étant causal, $h(t) = 0$ pour $t < 0$. Pour cela, on calcule la transformée de Laplace (monolatérale) de (??) : Puisque $\mathcal{L}[\delta] = 1$:

$$s^2 \Omega(s) + a_1 s \Omega(s) + a_0 \Omega = b$$

soit

$$\Omega(s) = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

A.N.

$$\Omega(s) = \frac{3,2 \times 10^6}{s^2 + 1161s + 7,757 \times 10^4}$$

Pour les valeurs numériques considérées, le polynôme au dénominateur admet deux racines simples : $-\alpha = -1089$ et $-\beta = -71,2$.

Par suite,

$$\Omega(s) = b \left(\frac{1/(\beta - \alpha)}{s + \alpha} + \frac{1/(\alpha - \beta)}{s + \beta} \right)$$

Or $\mathcal{L}[e^{-a\bullet}\Gamma] = \frac{1}{\bullet + a}$. Par suite,

$$\omega = b \left(\frac{1}{\beta - \alpha} e^{-\alpha\bullet} + \frac{1}{\alpha - \beta} e^{-\beta\bullet} \right) \Gamma$$

et donc

$$h = b \left(\frac{1}{\beta - \alpha} e^{-\alpha\bullet} + \frac{1}{\alpha - \beta} e^{-\beta\bullet} \right) \Gamma$$

- Déterminer la réponse fréquentielle du système moteur.

CORRECTION La réponse fréquentielle est définie par : $H = \mathcal{F}[h]$ Par linéarité de la transformation de Laplace :

$$H = b \left(\frac{1}{\beta - \alpha} \mathcal{F}[e^{-\alpha\bullet}\Gamma] + \frac{1}{\alpha - \beta} \mathcal{F}[e^{-\beta\bullet}\Gamma] \right)$$

D'après le TD1,

$$\mathcal{F}[e^{-a\bullet}\Gamma](\nu) = \frac{1}{a + 2\pi i\nu}.$$

Par suite,

$$H(\nu) = b \left(\frac{1}{\beta - \alpha} \frac{1}{\alpha + 2\pi i\nu} + \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{1}{\beta + 2\pi i\nu} \right) = \frac{b}{(2\pi i\nu + \alpha)(2\pi i\nu + \beta)}$$

- Peut-on associer au système moteur une fonction de transfert ? Si oui, la déterminer. Est-elle cohérente avec la réponse fréquentielle obtenue ?

CORRECTION D'après la question 2,

$$F(s) = \frac{b}{(s + \alpha)(s + \beta)}.$$

Puisque F est stable et causal, en remplaçant s par $2\pi i\nu$, on doit retrouver l'expression de $H(\nu)$, ce qui est le cas.

- Calculer la sortie du système pour le signal d'entrée défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u_m(t) = \sin(\omega_0 t).$$

CORRECTION Il s'agit de la réponse harmonique. D'après la section 3.2.3 du polycopé, la sortie est :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \omega(t) = \left| H\left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right) \right| \sin\left(\omega_0 t + \arg\left(H\left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right)\right)\right)$$

avec

$$\left| H\left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right) \right| = \frac{b}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} \sqrt{\beta^2 + \omega_0^2}} \quad \text{et} \quad \arg\left(H\left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right)\right) = -\arctan\left(\frac{\omega_0}{\alpha}\right) - \arctan\left(\frac{\omega_0}{\beta}\right)$$

6. Représenter la sortie obtenue question 5 et la sortie du système pour le signal d'entrée défini par :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad u_m(t) = \sin(\omega_0 t)$$

et $i(0) = 0$ et $\omega(0) = 0$, sous **Matlab** sur une même figure pour $\omega_0 = 100$ rad/s et $t \in [0, 0.2]$. Qu'observez vous ?

CORRECTION Le programme **Matlab** ci-dessous permet d'obtenir la figure ??.

```
% Coefficients du modèle
a0 = (f*R/J/L + Kc*Ke/J/L) ;
a1 = R/L + f/J ;
b = Kc/J/L ;
% calcul des pôles
pG = roots([1, a1, a0]);
alpha = -pG(2)
beta = -pG(1)
% Sortie question 5
w0 = 100;
Mw0 = b/sqrt(alpha^2+w0^2)/sqrt(beta^2+w0^2)
Pw0 = -atan(w0/alpha)-atan(w0/beta)
t = linspace(0,.2, 1000)
y1t = Mw0*sin(w0*t+Pw0);
% Sortie question 6
A = 1/(beta-alpha)/(alpha^2+w0^2);
B = 1/(alpha-beta)/(beta^2+w0^2);
C = -(alpha+beta)/(alpha^2+w0^2)/(beta^2+w0^2);
D = (alpha*beta-w0^2)/(alpha^2+w0^2)/(beta^2+w0^2);
y2t = b*w0*(A*exp(-alpha*t)+B*exp(-beta*t)+C*cos(w0*t)+D/w0*sin(w0*t))
figure(1), plot(t, y1t, '- ', t, y2t, '.')
```

On constate qu'après un régime transitoire, la sortie question ?? rejoint la sortie question 5.

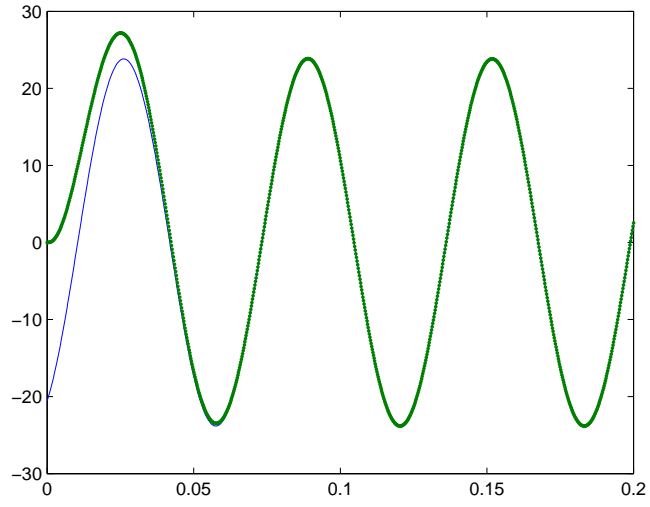


Figure 11: Sortie question 5 (trait fin bleu) et Sortie question ?? (trait gras vert)

Temporel	Laplace
δ	1
δ_a	$e^{-a\bullet}$
Γ	$\frac{1}{\bullet}$
$\bullet\Gamma$	$\frac{1}{\bullet^2}$
$\frac{\bullet^n}{n!}\Gamma$	$\frac{1}{\bullet^{n+1}}$
$e^{-a\bullet}\Gamma$ $a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\bullet+a}$
$\sin(\omega_0\bullet)\Gamma$	$\frac{\omega_0}{\bullet^2+\omega_0^2}$
$\cos(\omega_0\bullet)\Gamma$	$\frac{\bullet}{\bullet^2+\omega_0^2}$
$e^{-\alpha\bullet}\sin(\omega_0\bullet)\Gamma$	$\frac{\omega_0}{(\bullet+\alpha)^2+\omega_0^2}$
$e^{-\alpha\bullet}\cos(\omega_0\bullet)\Gamma$	$\frac{\bullet+\alpha}{(\bullet+\alpha)^2+\omega_0^2}$

Table 4: Transformées de Laplace usuelles