Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA

UNIDAD CUAJIMALPA

El Método de Adomian para la Solución de un Modelo de Black-Scholes No-lineal

PROYECTOS TERMINALES I, II y III

QUE PRESENTA:
FRANCISCO PAZ CENDEJAS
Expediente UAM: 2113067577

LICENCIATURA MATEMÁTICAS APLICADAS
División de Ciencias Naturales e Ingeniería
CNI

Asesor y Responsable del Proyecto:
DR. OSWALDO GONZÁLEZ GAXIOLA

Fecha de inicio: enero de 2015
Fecha de terminación: diciembre de 2015
México D.F.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El presente trabajo no se pretende en ningún momento presentar términos o teorías nuevas. En matemáticas financieras los conceptos y las fórmulas (aquí expuestos) ya se han formulado e investigado de manera intensa desde hace mucho tiempo, y de hecho existen un sin número de textos y trabajos de investigación que están disponibles para consulta, estudio y profundización en el tema, unos más complejos que otros, pero que al final, abarcan los mismos temas.

Objetivo General del Trabajo

Este material pretende hacer una presentación y explicación de los conceptos y elementos básicos de las matemáticas financieras, de una forma didáctica, es decir, de comprensión simple para el lector ya sea éste estudiante o profesional en las áreas administrativas y económicas, que le permita la visualización de problemas o situaciones que tienen que ver con el quehacer diario de los administradores en los mercados de derivados financieros.

Objetivo Específico del Trabajo

Estudiar la ecuación de Black-Scholes para un caso no lineal que surge del estudios del mercado de derivados financieros con costos de transacción. Además obtener la solución del modelo no lineal haciendo uso del método de descomposición de Adomian (ADM).

1.1. Surgimiento de los Mercado Financieros

Al parecer las matemáticas financieras aparecieron inicialmente con la necesidad de hacer cuantitativas algunas transacciones comerciales o determinados pagos, se cree que “alguien”se dio cuenta que si otro le debía dinero (ganado, granos o lo que fuera), el acreedor debía recibir una compensación por el tiempo que esta persona tardaría en cancelar la deuda, surgiendo así el concepto de “interés”. Desde que se tiene memoria histórica, las técnicas matemáticas han sido aplicadas a cuestiones económicas y se pueden hallar casos tan remotos como algunos mencionados por Aristóteles y desde 1494, año en que fraile y matemático italiano Luca Paccioli publicó su libro *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* ya se vislumbraban de manera formal los intentos hacer de la matemática una herramienta útil para generar dinero. Paccioli en esa obra, entre otras cosas, dedicó 36 capítulos al estudio de la partida doble o contabilidad de doble entrada y es con el nacimiento del cálculo de probabilidades, allá por el siglo XVII, es cuando se empieza a disponer de herramientas útiles para modelar instrumentos financieros. En 1725, el matemático francés Abraham de Moivre publica el libro *Annuities for life* con el objetivo de calcular rentas vitalicias. Los mercados financieros organizados empezaron a funcionar como tales en la mitad del siglo XIX y uno de los casos más representativos fue la emisión de deuda en 1857 que ayudo a financiar la construcción de las líneas de ferrocarril en los Estados Unidos de Norteamérica. En la segunda mitad del siglo XX hemos asistido a una notable evolución de la economá financiera, que sólo ha sido posible mediante la aplicación sistemática del pensamiento matemático y en estos días la atención pública se centra en los comportamientos bursátiles y sus posibles consecuencias en el desarrollo tanto económico como social del país o región del mundo en los que ocurren. Un mundo como el financiero, en constante crecimiento y evolución, está generando problemas que tienen cada vez mayor complejidad. Hoy nos encontramos ante cuestiones que tienen un gran contenido matemático y del máximo interés para las instituciones financieras, quienes se encuentran ante una competitividad muy intensa, un mercado con márgenes cada vez menores y un mundo sin fronteras. Si nos situamos en el mundo financiero contemporáneo, en el cual nos enteramos del *crack* de la bolsa de valores de cierto país o de la quiebra de todo un país entero, lo cual da inicio a recesiones económicas sin precedentes; nos damos cuenta de que el número de posibles cotizaciones de cada acción bursátil es tan grande que podemos considerarlo en la práctica infinito, las estrategias de cobertura (compra-venta de acciones) se deben hacer de manera continua en el tiempo, lo cual en matemáticas se conoce como un paso al límite y el modelo matemático (una ecuación diferencial) que rige la dinámica financiera en ese paso al límite se conoce como la teoría de Black-Scholes, que fue desarrollada simultáneamente por el economista estadounidense R. C. Merton y la pareja de economistas Fischer Black y M. Scholes en 1973 y que les valió el premio Nobel de economía en 1997. La teoría de Black-Scholes estableció una relación estrecha entre el mundo del dinero y un modelo matemático nada trivial. Por otra parte, existen profundas similitudes entre esta teoría y los procesos de difusión estudiados por el físico y matemático francés J. Fourier en 1822 en su obra *Théorie analytique de la chaleur*; también podemos hallar algunos de los elementos de la ecuación de Black-Scholes en un artículo de principios del siglo pasado del físico alemán A. Einstein, en dicho artículo científico él estudió con la ayuda de métodos estadísticos el movimiento errático de partículas. El físico y premio Nobel norteamericano Richard Feynman (1918-1988), decía que las matemáticas son una gran herramienta debido a que las mismas ecuaciones tienen las mismas soluciones, lo cual permite que problemas tan dispares como estudiar partículas (por ejemplo de polvo), la difusión del calor o la gestión de productos financieros, se reduzcan por abstracción matemática, al mismo problema. En economía, un mercado financiero es un espacio (físico o virtual o ambos) en el que se realizan los intercambios de instrumentos financieros y se definen sus precios. En general, cualquier mercado de materias primas podría ser considerado como un mercado financiero si el propósito del comprador no es el consumo inmediato del producto, sino el retraso del consumo en el tiempo.

En la actualidad, el estudio de mercados financieros está motivando el desarrollo de otras partes o áreas de las mismas matemáticas y para formular y hallar soluciones a nuevos modelos, se está recurriendo a métodos de diferentes áreas científicas como lo son la mecánica cuántica y la computación entre otras. Por lo anterior, los financieros buscan emplear matemáticos que les hagan modelos que les ayuden a tener mayores ganancias tanto la largo como a corto plazo y que les aseguren no sufrir pérdidas significativas como consecuencia de realizar inversiones. Uno de los instrumentos más usados por las personas que ejercen las finanzas son las "opciones" que son a *grosso modo* contratos de compra o venta a futuro, los cuales por ser a futuro tienen implícita una cierta incertidumbre que es deseable minimizar sin detrimento de ganancias. Como se puede percibir, las matemáticas han jugado un papel esencial en el desarrollo de la economa financiera convirtiéndose en una herramienta valiosa para generar dinero.

La ecuación de Black-Scholes se aplica a las opciones, que son acuerdos para comprar o vender una cosa a un precio específico en una fecha futura determinada. Por ejemplo, supongamos que queremos comprar un contrato de mil toneladas de trigo el 25 de septiembre de 2014 a 300 euros la tonelada. Los mercados financieros no solo establecen contratos de compra y venta a un vencimiento determinado, sino que permiten también comprar y vender esos mismos contratos antes de su vencimiento, como si fueran mercancías de pleno derecho. La gran pregunta entonces es, ¿de qué me sirve ese contrato? Si el dueño de la opción de trigo quiere vender el 11 de junio de 2014, ¿qué precio debería pedir? ¿cuánto estaría dispuesto a pagar? La ecuación de Black-Scholes especifica un determinado precio basado en el valor probable del trigo en su vencimiento. Matemáticamente, se entiende que el precio se desviará de manera aleatoria de acuerdo con el estado del mercado. El modelo calcula el precio en el que en teoría se elimina el riesgo al comprar una opción.

El presente trabajo tiene como finalidad hacer una presentación formal pero sin caer en excesivos formalismos matemáticos y sin perder la profundidad conceptual, de un modelo de valoración de derivados financieros, conocido en el ámbito financiero como el modelo de Black-Scholes-Merton el cual es uno de los modelos matemáticos más utilizados en la toma de decisiones financieras a nivel mundial. Además se abordará el caso en el cual se tienen costos de transacción los cuales se reflejan en una volatilidad no constante que da lugar a un modelo de Black-Scholes no lineal. También expondremos de manera breve el método de descomposición de Adomian (ADM).
El Método de Descomposición de Adomian (MDA) es aplicado para obtener una solución rápida y confiable para la ecuación de Black-Scholes no lineal con condiciones de frontera para opciones europeas.

1.2. Introducción a las Finanzas Matemáticas

Activo Financiero

Un activo financiero es un instrumento que canaliza el ahorro hacia la inversión. Se materializa en un contrato realizado entre dos partes, que pueden ser personas físicas o jurídicas. El comprador, que recibe el nombre de inversor, adquiere el derecho a recibir unos pagos que, en el futuro, deberán ser satisfechos por parte del vendedor del activo. Quien vende el instrumento es designado con el nombre de emisor, y recibe al transmitirlo una cantidad monetaria que le permite financiarse y que le genera la obligación de realizar unos pagos en el futuro al inversor o comprador. Por tanto, es un medio de mantener riqueza para quien lo posee y un pasivo para quien lo genera. Entonces un activo financiero es un título o simplemente una escritura contable, por el que el comprador del título adquiere el derecho a recibir un ingreso futuro de parte del vendedor. Los activos financieros son emitidos por las unidades económicas de gasto y constituyen un medio de mantener riqueza para quienes los poseen y pasivo para quienes lo generan.
A diferencia de los activos reales, no contribuyen aincrementar la riqueza general de un país, ya que no contabilizan en el producto interno bruto de un país, pero si contribuyen y facilitan la movilización de los recursos reales de la economía contribuyendo al crecimiento real de la riqueza. El préstamo que realiza un ahorrador a una empresa es un activo financiero, en este caso la empresa es la vendedora del activo y el ahorrador, el comprafot que espera recibir una corriente de ingresos en el futuro. entree las principles categorás de activos financieros se encuentran los préstamos, las acciones, los bonos y los depósitos bancarios.

Clasificación de los Activos Financieros:

La principal clasificación de activos financieros es la que distingue entre activos financieros de renta fija o variable.

Activos Financieros de Renta Fija

Son aquellos activos cuyo calendario de pagos es fijo tanto en fechas como en la cantidad devengada en cada una de ellas. Esto significa que, al firmar el contrato, el inversor conoce los pagos que va a recibir en el futuro. Estos flujos de dinero se denominan intereses (cupones en el caso de bonos y obligaciones) y, al vencimiento del contrato, los inversores reciben además el capital principal que inicialmente invirtieron. Ejemplos de estos activos financieros son: los bonos y obligaciones emitidos por el Estado y por las empresas, los pagarés y las letras de cambio, e instrumentos de endeudamiento en general. Cuando un inversor adquiere un activo financiero de renta fija, está comprando parte de la deuda del emisor.

Activos Financieros de Renta Variable

Son aquellos activos financieros que no tienen unos derechos de pago fijos establecidos por contrato. Por tanto, el inversor no conoce con certeza los flujos de dinero que va a recibir ni el momento en que los recibirá. Estos flujos de dinero se denominan dividendos y, normalmente, no hay un vencimiento del contrato preestablecido. El ejemplo más importante de estos activos financieros son las acciones. Cuando un inversor adquiere una acción, está comprando una fracción del capital de una sociedad, convirtiéndose en socio de la misma y recibiendo una serie de derechos (entre otros, económicos y políticos).

Mercados Financieros

Los activos financieros son creados en el mercado financiero primario; en este mercado los activos se transmiten directamente por su emisor: unidad económica que necesita recursos financieros. Los compradores son unidades económicas con superávit y en el mercado secundario sólo se intercambian mercados ya existentes, emitidos en un momento anterior. Este mercado facilita a los tenedores de activos su compra-venta.

Características de los Activos Financieros:

Liquidez

En economía, la liquidez representa la cualidad de los activos para ser convertidos en dinero efectivo de forma inmediata sin pérdida significativa de su valor. De tal manera que cuanto más fácil es convertir un activo en dinero se dice que es más líquido. Por definición el activo con mayor liquidez es el dinero, es decir los billetes y monedas tienen una absoluta liquidez, de igual manera los depósitos bancarios a la vista, conocidos como dinero bancario, también gozan de absoluta liquidez y por tanto desde el punto de vista macroeconómico también son considerados dinero. Como ejemplo, un activo muy líquido es un depósito en un banco cuyo titular en cualquier momento puede acudir a la entidad y retirar el mismo o incluso también puede hacerlo a través de un cajero automático. Por el contrario un bien o activo poco líquido puede ser un inmueble en el que desde que se toma la decisión de venderlo o transformarlo en dinero hasta que efectivamente se obtiene el dinero por su venta puede haber transcurrido un tiempo prolongado. En general la liquidez de un activo es contrapuesta a la rentabilidad que ofrece el mismo, de manera que es probable que un activo muy líquido ofrezca una rentabilidad pequeña. Un activo líquido tiene algunas o varias de las siguientes características: puede ser vendido rápidamente, con una mínima pérdida de valor en cualquier momento. La característica esencial de un mercado líquido es que en todo momento hay compradores y vendedores dispuestos a hacer negocios.

En resumen, el activo mas líquido, es el dinero en efectivo y después estarían los diferentes tipos de depósitos: los fondos públicos (bonos), las obligaciones y por último los créditos comerciales.

Riesgo

El riesgo es la probabilidad de un evento adverso y sus consecuencias. El riesgo financiero se refiere a la probabilidad de ocurrencia de un evento que tenga consecuencias financieras negativas para una empresa o a una organización. El concepto debe entenderse en sentido amplio, incluyendo la posibilidad de que los resultados financieros sean mayores o menores de los esperados. De hecho, habida la posibilidad de que los inversores realicen apuestas financieras en contra del mercado, movimientos de éstos en una u otra dirección pueden generar tanto ganancias o pérdidas en función de la estrategia de inversión. El riesgo financiero es la vulnerabilidad posible o potencial prejuicio o daño para las unidades o personas, organizaciones o entidades. Cuanto mayor es la vulnerabilidad, mayor es el riesgo, pero cuanto más factible es el prejuicio o daño, mayor es el peligro. Por tanto, el riesgo se refiere a la posibilidad teórica de daño bajo determinada circunstancia, mientras que el peligro se refiere sólo a la probabilidad teórica de daño bajo esas circunstancias, por ejemplo desde el punto de vista de riesgo de daño para sus ocupantes mientras que cuanto mayor la imprudencia al conducir, mayor es el peligro del accidente.

Tipos de Riesgos Financieros

Riesgo de mercado, asociado a las fluctuaciones de los mercados financieros, y en el que se distinguen:

- Riesgo de cambio, consecuencia de la volatilidad del mercado de divisas
- Riesgo de tipo de interés, consecuencia de la volatilidad de los tipos de interés

- Riesgo de mercado (en acepción restringida), que se refiere específicamente a la volatilidad de los mercados de instrumentos financieros tales como acciones, deuda, derivados, etc
- Riesgo de crédito, consecuencia de la posibilidad de que una de las partes de un contrato financiero no asuma sus obligaciones
- Riesgo de liquidez o de financiación, y que se refiere al hecho de que una de las partes de un contrato financiero no pueda obtener la liquidez necesaria para asumir sus obligaciones a pesar de disponer de los activos (que no puede vender con la suficiente rapidez y al precio adecuado) y la voluntad de hacerlo.
- Riesgo operativo, que es entendido como la posibilidad de ocurrencia de pérdidas financieras, originadas por fallas o insuficiencias de procesos, personas, sistemas internos, tecnología, y en la presencia de eventos externos imprevistos.

Rentabilidad

En economía, la rentabilidad financiera o "ROE" (por sus iniciales en inglés, Return on equity) relaciona el beneficio económico con los recursos necesarios para obtener ese lucro. Dentro de una empresa, muestra el retorno para los accionistas de la misma, que son los únicos proveedores de capital que no tienen ingresos fijos. La rentabilidad puede verse como una medida de cómo una compañía invierte fondos para generar ingresos. Se suele expresar como porcentaje. La rentabilidad financiera, ROE, se calcula por la fórmula:

$$ROE = \frac{\text{Beneficio neto después de impuesto}}{\text{Fondos propios}}$$

La fórmula anterios relaciona el beneficio económico con los recursos necesarios para obtener ese lucro. Sumando al numerador de la fórmula anterior la cuota del impuesto que grava la renta de la sociedad, se obtiene la rentabilidad financiera antes de los impuestos. Cuando la rentabilidad económica es superior al coste del endeudamiento (expresado ahora en tanto por ciento, para poder comparar), cuanto mayor sea el grado de endeudamiento mayor será el valor de la rentabilidad financiera o rentabilidad de los accionistas, en virtud del juego del denominado efecto palanca. Por el contrario, cuando la rentabilidad económica es inferior al coste de las deudas (el capital ajeno rinde menos en la empresa de lo que cuesta) se produce el efecto contrario: el endeudamiento erosiona o aminora la rentabilidad del capital propio.

Por otra parte, La rentabilidad económica mide la tasa de devolución producida por un beneficio económico (anterior a los intereses y los impuestos) respecto al capital total, incluyendo todas las cantidades prestadas y el patrimonio neto (que sumados forman el activo total). Es además totalmente independiente de la estructura financiera de la empresa. La rentabilidad económica, o "ROA" (por sus iniciales en inglés, Return on Assets) se puede calcular con:

$$ROA = \frac{\text{Beneficio económico}}{\text{Activo total}}$$

Esta cifra expresa la capacidad que una empresa tiene para realizar con el activo que controla, sea propio o ajeno. Esto es, cuántos pesos gana por cada peso que tiene.

Derivados Financieros

Dentro del los mercados de valores hay un tipo de activos financieros llamados derivados (o instrumentos financieros), cuya principal cualidad es que su valor de cotización se basa en el precio de otro activo. Puede haber gran cantidad de derivados financieros dependiendo de "el índice valor" inicial del que se deriven, pueden ser: acciones, renta fija, renta variable, índices bursátiles (como el Dow Jones), bonos de deuda privada, índices macroeconómicos, los tipos de interés, etc. Los derivados financieros suelen ser algunos de los productos financieros más interesantes aunque habitualmente no son tan conocidos como el resto. Algunas de sus principales características son:

- Normalmente cotizan en mercados de valores, aunque también pueden no hacerlo
- El precio de los derivados varía con respecto siempre al del llamado "activo subyacente", el valor al que está ligado dicho derivado
- También puede ser referido a productos no financieros ni económicos como las materias primas. Algunos de los ejemplos más conocidos son el oro, el trigo o el petróleo
- Normalmente la inversión que debes realizar es muy inferior a si compraras una acción o una parte del valor subyacente por el que desees apostar
- Los derivados financieros tienen que cumplir una cualidad indispensable y es que siempre se liquidan de forma futura.

Los derivados normalmente son activos muy interesantes ya que permiten que juguemos con el valor futuro de los activos subyacentes sin hacer un gran desembolso, aunque también su carácter especulativo es muy grande debido a que no sólo podemos hacer un uso normal de compra y venta de las acciones, sino que también podemos comerciar los con derechos para comprar o vender los activos; con un mismo capital inicial jugando con la segunda opción de los derechos podemos conseguir muchos más beneficios.

Los derivados (o instrumentos derivados), en general son contratos de compraventa que dependiendo del tipo, obligan o permiten a dos agentes estableer un precio de compra-venta y una fecha de contrato por una cantidad fija de activos y en general un activo puede estar en cualquier mercado financiero. Existen tres tipos de derivados financieros:

1. **Contrato a futuro**:
   Obligan a los miembros a comprar o vender una cantidad determinada del activo subyacente; es decir, si se está interesado en un activo particular, se puede acordar con el propietario del activo en una fecha determinada, con un precio determinado se haga la compora de lactivo. El contrato a futuro obliga a ambas partes a realizar la transacción. El pago se hace en el momento del intercambio y entonces no cuesta entrar en el contrato a futuro a un precio establecido y en una fecha específica

2. **Opciones**:
   Es un contrato que le da al dueño el derecho, más no la obligación de comprar o vender el activo subyacente antes o en la fecha de ejecución; es decir, al entrar en una opción con el propietario de un activo de nuestro interés, la opción nos da la posibilidad de comprar el activo durante la vigencia del contrato; de la misma manera, se puede elegir no comprar el activo. La opción obliga al otro miembro a vender el activo en caso de requerirse. De la misma forma, se puede celebrar una opción que obligue a una gente a comprar el activo en caso de que decida venderlo.

3. **Swap**:
   Se usa el término Swap para referirse a un intercambio a futuro de bienes o servicios (incluyendo dinero).

Al momento de hacer el contrato se hace una valuación del mismo y se paga un precio por obtenerlo; es decir, si dos agentes quieren realizar una opción por una acción a futuro, uno de ellos debe comprar el derecho de contrato (ya sea de compra o venta).

En partícular nos interesan dos cosas en el mercado de derivados:

1. ¿Qué precio se debe establecer por la firma del contrato?

2. ¿Cómo puede el dueño del contrato minimizar el riesgo asociado con la obligación?

En el caso de los derivados los de mayor interés son las opciones, ya que su precio es más fácil de calcular dado que dependiendo del precio de activo subyacente, uno de los agentes puede elegir no completar la transacción.
Para valuar la opción, se usa el modelo de Black-Scholes, el cual es una ecuación diferencial parcial que al ser resuelta nos da una función que nos dice que el precio de un derivado que depende del precio del bien subyacente y del tiempo. La deducción del modelo fue hecha por Fischer Black y Myron Scholes, y posteriormente Robet Merton Publicó un artículo con un desarrollo más profundo de la parte matemática del modelo. Merton y Scholes recibieron el premio Nobel en Ciencias Económicas en 1997.

Opciones

Una opción es el derecho a comprar o vender algo en el futuro a un precio pactado, a diferencia de los futuros en las opciones se realiza una transacción en el momento de su contratación. Así el que compra la opción paga una prima por disfrutar del derecho adquirido mientras que quién la vende cobra la prima. Así pues mientras el comprador si llegado el momento del vencimiento siempre podrá optar por ejercitar o no su opción siendo el riesgo que corre igual a la prima pagada. El vendedor está a expensas de lo que decida el comprador y por tanto es habitual que utilice la prima cobrada para comprar otras opciones que le permitan fijar el riesgo asumido. Este hecho hace que sea habitual por parte de las entidades financieras ofrecer a sus clientes la posibilidad de comprar opciones pero no la posibilidad de venderlas.

1. Call (opción de compra): Es un contrato que le da al dueño el derecho de compra de bien subyacente; es decir, cuando el dueño del cotrato puede elegir si puede vender o no el activo mientras que el otro está obligado a venderlo.
2. Put (opción de venta): Es un contrato que le da al dueño el derecho de venta de bien subyacente; es decir, cuando el dueńo del contrato puede elegir si puede o no vender el activo mientras que el otro está obligado a comprarlo.
3. Opción europea: es aquella opción que tan sólo podemos ejercitar en su fecha de vencimiento.
4. Opción americana: es aquella opción que podemos ejercitar en cualquier momento entre su fecha de contratación y de vencimiento.
5. Opciones asiáticas (exóticas): Son aquellas opciones para las que el precio del activo subyacente en el vencimiento se determina como la media de las cotizaciones del mismo durante un período de tiempo. Con las opciones asiáticas se reducen las posibilidades de manipulación del precio del subyacente en fechas próximas a vencimiento. Como un precio medio es menos volátil que las series de precios empleadas para calcularlo, el precio de una opción asiática es menor que el de las opciones estándar.

Arbitraje

En economía y finanzas, arbitraje es la práctica de tomar ventaja de una diferencia de precio entre dos o más mercados: realizar una combinación de transacciones complementarias que capitalizan el desequilibrio de precios. La utilidad se logra debido a la diferencia de precios de los mercados. Por medio de arbitraje, los participantes en el mercado pueden lograr una utilidad instantánea libre de riesgo. La persona que ejecuta el arbitraje se conoce como arbitrajista, y es usualmente un banco o una firma de inversión. El término es comúnmente aplicado a las transacciones de instrumentos financieros, como bonos, acciones, derivados financieros, mercancías y monedas. Si los precios de mercado no permiten la ejecución de arbitraje rentable, se dice que los precios constituyen un equilibrio de arbitraje, o un mercado libre de arbitraje. El equilibro de arbitraje es una precondición para un equilibro económico general.

Condiciones de Arbitraje

El arbitraje es posible cuando al menos una de las siguientes condiciones se cumple:

- El mismo activo no se transmite al mismo precio en distintos mercados
- Dos activos que producen el mismo flujo de efectivo no se transmiten al mismo precios
- Un activo con un precio conocido en el futuro no se vende hoy a su precio futuro descontado a la tasa de interés libre de riesgo.

El arbitraje no es simplemente el acto de comprar un producto en un mercado y venderlo en otro por un precio mayor en el futuro. Las transacciones deben ocurrir simultáeamente para evadir la exposición al riesgo del mercado, o el riesgo que los precios puedan cambiar en un mercado antes que ambas transacciones sean completadas. En términos prácticos, esto es generalmente posible con productos financieros que pueden ser transados electrónicamente. En el ejemplo más simple, todo bien vendido en un mercado debe venderse por el mismo precio en cualquier otro mercado. Los inversionistas pueden, por ejemplo, descubrir que el precio del trigo es más bajo en regiones de agricultura que en las ciudades, así que pueden comprar el trigo y venderlo por un precio más alto en la ciudad (ignorando el costo de transporte y asumiendo que la compra y la venta pueda hacerse casi simultáneamente). Cuantos más inversionistas descubran esta oportunidad, más van a comprar trigo en el campo y venderlo en la ciudad. Esta actividad tendrá dos efectos:

- El precio del trigo en el campo subirá, pues la demanda aumentara en comparación con la oferta
- El precio del trigo en la ciudad bajará, pues la oferta en determinado punto será mayor que la demanda.

En cierto momento, estos dos efectos combinados ocasionaran que el precio del trigo en el campo sea igual al precio en la ciudad, y la oportunidad de arbitraje habrá desaparecido.

El arbitraje tiene el efecto de hacer que los precios de los mismos activos en mercados diferentes converjan. Como resultado del arbitraje, los tipos de cambio, el precio de mercancías, y el precio de instrumentos financieros tienden a converger en todos los mercados. La velocidad con que los precios convergen es una medida de la eficiencia del mercado. El arbitraje tiende a reducir la discriminación de precios, pues motiva a las personas a comprar un producto donde el precio es bajo y revenderlo donde es más alto. El arbitraje mueve las monedas de los países hacia la "paridad de poder de compra". Por ejemplo, asuma que un carro comprado en los Estados Unidos es más barato que el mismo carro en Canadá (ignorando costos de transporte, impuestos y regulaciones entre países). Los canadienses aprovecharían la oportunidad y cruzarían la frontera para comprar autos en Estados Unidos y llevarlos a Canadá. Algunos de estos compradores comprarían los autos para revenderlos en Canadá. Así, los canadienses tendrían que comprar dólares estadounidenses para comprar los autos, y esto, en una escala grande, ocasionaría que el dólar de los Estados Unidos se aprecie contra el dólar canadiense. Llegara un punto en que el precio del dólar estadounidense será tan alto que ya no será atractivo para los canadienses comprar los autos en Estados Unidos, llegando así al punto de paridad del poder de compra. Similarmente, el arbitraje afecta la diferencia entre las tasas de interés que distintos gobiernos pagan los bonos de deuda.

Volatilidad

En finanzas matemáticas, la volatilidad es una medida de la frecuencia e intensidad de los cambios del precio de un activo o de un tipo definido como la desviación estándar de dicho cambio en un horizonte temporal específico. Se usa con frecuencia para cuantificar el riesgo del instrumento. La volatilidad se expresa típicamente en términos anualizados y puede reflejarse tanto en un número absoluto como en una fracción del valor inicial.

Para un instrumento financiero cuyo precio sigue un proceso aleatorio (estocástico) gaussiano (o proceso de Wiener) la volatilidad se incrementa según la raíz cuadrada del tiempo conforme aumenta el tiempo. Conceptualmente, esto se debe a que existe una probabilidad creciente de que el precio del instrumento esté más alejado del precio inicial conforme el tiempo aumenta. Matemáticamente, este es un resultado directo de aplicar el Lema de Ito al proceso estocástico. La volatilidad histórica es la volatilidad de un instrumento financiero basado en retornos históricos. Esta frase se usa particularmente cuando se desea distinguir entre la volatilidad efectiva de un instrumento en el pasado de la volatilidad actual debida al mercado. La volatilidad es vista con frecuencia como negativa en tanto que representa incertidumbre y riesgo. Sin embargo, la volatilidad puede ser positiva en el sentido de que puede permitir obtener beneficio si se vende en los picos y se compra en las bajas, tanto más beneficio cuanto más alta sea la volatilidad. La posibilidad de obtener beneficios mediante mercados volátiles es lo que permite a los agentes de mercado a corto plazo obtener sus ganancias, en contraste con la visión inversionista a largo término de comprar y mantener.

Algunos tipos de activos experimentan períodos de volatilidad alta y baja. En algunos momentos los precios pueden subir o bajar rápidamente, mientras que en otros pueden parecer estancados. Los períodos en los que los precios caen rápidamente (un crash) son seguidos, frecuentemente, por períodos en los que los precios caen aún más, o suben de forma inusual. Igualmente una subida rápida (una burbuja) es seguida, con frecuencia, por subidas o bajadas de una amplitud inusual.

La volatilidad anualizada σ es proporcional a la desviacin estándar de los retornos del instrumento dividida por la raíz cuadrada del período temporal de los retornos:

$$\sigma = \frac{\text{Desviación estándar}}{\sqrt{P}},$$

donde P es el período en años de los retornos. La volatilidad generalizada σ_T para el horizonte temporal T se expresa como:

$$\sigma_T = \sigma\sqrt{T}.$$

Por ejemplo, es si los retornos diarios de una acción tienen una desviación de 0,01 y hay 252 días de intercambio en un año, entonces el período temporal de los retornos es 1/252 y la volatilidad anualizada es:

$$\sigma = \frac{0{,}01}{\sqrt{1/252}} = 0{,}1587,$$

La volatilidad mensual (i.e., T = 1/12 de año) sería

$$\sigma_{mes} = 0{,}1587\sqrt{1/12} = 0{,}0458.$$

Nótese que la fórmula usada para anualizar los retornos no es determinista, pero es una extrapolacin válida para un proceso de Wiener. Generalmente, la relación entre volatilidades en diferentes escalas temporales es más complicada, implicando al exponente de estabilidad de Lévy α:

$$\sigma_T = T^{\frac{1}{\alpha}}\sigma;$$

si $\alpha = 2$ se obtiene la relación de escala del proceso de Wiener, pero usualmente $\alpha < 2$ para activos financieros tales como acciones e índices.

Capítulo 2

El Modelo de Black-Scholes

En el año de 1973 Black, Scholes y Merton derivaron una ecuación diferencial parcial cuya solución debía ser el precio de una opción de compra europea (call europea), de manera que no existiesen oportunidades de arbitraje en el mercado. En los trabajos realizados antes del documento de 1973 de Black y Scholes en los que se estudió la valuación de opciones se proponían fórmulas generales para el precio de las opciones, pero que involucraban parámetros arbitrarios, muchas veces desconocidos o *puestos* para que el modelo se viera completo. La desventaja de estos estudios es que no producían una solución analítica para encontrar siempre el precio de una opción que fuese operativa y aplicable en general.

2.1. Derivación de la Ecuación de Black-Scholes: primera versión

Para derivar la fórmula de valoración de opciones, Black, Scholes y Merton suponen *condiciones ideales* en el mercado; los tres supuestos importantes en los que se basa el modelo se pueden hallar en [4] y son:

- no existe oportunidad de arbitraje,
- La tasa de interés es libre de riesgo y conocida y permanece constante durante todo el tiempo que dure el contrato, y
- El precio del activo subyacente sigue un proceso de difusión cuyo coeficiente de difusión es proporcional al cuadrado del precio. La constante de proporcionalidad se conoce como la volatilidad σ, del precio del activo subyacente.

La siguiente derivación es hecha por Hull en [3] para la valuación de opciones, futuros y otros derivados: Supongamos que un activo subyacente (tipicamente el stock S sigue el movimiento Browniano geométrico, es decir,

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$$

donde W es el movimiento Browniano. Note que W y en consecuencia sus incrementos infinitesimales dW representan una fuente de incertidumbre en la historia de los precios de stock. Intuitivamente, Intuitivamente, $W(t)$ es un proceso que se mueve hacia arriba y abajo de manera aleatoria que su cambio esperado durante cualquier intervalo de tiempo es 0, (media cero). Además su varianza en un intervalo de tiempo de duración T es T mismo; una buena analogía discreta para W es una simple caminata aleatoria. Así, la ecuación anterior indica que la tasa infinitesimal de retorno de la acción tiene un valor esperado de μdt y varianza $\sigma^2 dt$.

Si se conoce el pago final o recompensa de una opción $V(S,t)$ al tiempo de madurez T; Para encontrar su valor en cualquier tiempo (anterior) $t \in [0,T)$ tenemos que saber cómo evoluciona V como función de S y de t. Por el lemma de Itô en dos variables tenemos

$$dV = \big(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\big)dt + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} dW$$

Ahora consideremos un cierto portafolios, llamado portafolios Delta, o Delta-Cobertura; ésta es una estrategia que tiene como objetivo reducir (cubrir) los riesgos asociados a los movimientos de precios en el activo subyacente, Típicamente, las opciones con altas relaciones de cobertura son generalmente más rentable de comprar. Matemáticament, el valor de el portafolio o cartera "delta-hedge portfolio" es,

$$\Pi = -V + \frac{\partial V}{\partial S} S$$

en el período de tiempo $[t, t+\Delta t]$ la utilidad o pérdida total de los cambios en los valores de las coberturas es:

$$\Delta\Pi = -\Delta V + \frac{\partial V}{\partial S}\Delta S$$

ahora, reemplazando Δ por las diferenciales, tenemos

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta W$$

$$\Delta V = \big(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\big)\Delta t + \mu S \frac{\partial V}{\partial S}\Delta W$$

ahora, sustituyendo en la expresión para $\Delta\Pi$ tenemos

$$\Delta\Pi = \big(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\big)\Delta t$$

Observe que el término ΔW ha desaparecido. Así, la incertidumbre ha sido eliminada y la cartera o portafolios es efectivamente libre de riesgo. La tasa de rendimiento de este protafolios debe ser igual a la tasa de rendimiento de cualquier otro instrumento libre de riesgo, de lo contrario, no habría oportunidades de arbitraje. Ahora suponiendo que la tasa libre de riesgo de retorno es r, debemos tener durante el período de tiempo $[t, t + \Delta t]$:

$$r\Pi\Delta t = \Delta\Pi$$

Si ahora comparamos nuestros dos fórmulas para $\Delta\Pi$ obtenemos:

$$\big(- \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\big)\Delta t = r\big(- V + S\frac{\partial V}{\partial S}\big)\Delta t$$

Simplificando, se llega a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

En el modelo de Black-Scholes, se tienen que cumplir, que V sea dos veces diferenciable con respecto a S y una vez con respecto a t, el modelo sirve para evaluar cualquier tipo de opciones. Diferentes fórrmulas para los precio de varias opciones surgirn de la elección de la función de pagos al tiempo de vencimiento y las condiciones de frontera adecuadas. Una sutileza oscura en el método de discretización anterior es que el cambio infinitesimal en el valor de la cartera o portafolios se debió únicamente a los cambios infinitesimales en los valores de los activos, y no se debió a los cambios en las posiciones en los activos. En otras palabras, el porfolio se supone que es autofinanciable. Esto puede ser demostrado en el contexto continuo utilizando los resultados básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas.

2.2. Derivación de la Ecuación de Black-Scholes: segunda versión

Supongamos que el precio de las acciones al tiempo t es S_t. Definamos $u = e^{\sigma\sqrt{dt}}$ y $d = e^{-\sigma\sqrt{dt}}$. Al tiempo $t + dt$ el precio de las acciones se mueve hacia arriba para ser $S^u_{t+dt} = uS_t$ con probabilidad

$$p = \frac{e^{rdt} - d}{u - d},$$

o que el precio de las acciones se mueve hacia abajo para ser $S^d_{t+dt} = dS_t$ con probabilidad $1 - p$. La valuación del derivado con riesgo neutral da lugar a la siguiente relación [1]:

$$Ve^{rdt} = pV_u + (1 - p)V_d = p(V_u - V_d) + V_d,$$

donde $V = V(S_t)$, $V_u = V(S^u_{t+dt})$ y $V_d = V(S^d_{t+dt})$. Ahora tomaremos expansión en serie de Taylor para V_u, V_d, e^{rdt}, u y d hasta primer orden. Tenemos así

$$\begin{aligned} V_u &\approx V + \frac{\partial V}{\partial S}(S^u_{t+dt} - S_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S^u_{t+dt} - S_t)^2 + \frac{\partial V}{\partial t}dt \\ &= V + \frac{\partial V}{\partial S}S_t(u-1) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S_t^2(u-1)^2 + \frac{\partial V}{\partial t}dt. \end{aligned}$$

Similarmente:

$$V_d = V + \frac{\partial V}{\partial S}S_t(d-1) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S_t^2(d-1)^2 + \frac{\partial V}{\partial t}dt.$$

Las otras expansiones a primer orden de dt son:

$$e^{rdt} \approx 1 + rdt$$

$$u \approx 1 + \sigma\sqrt{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 dt,$$

$$d \approx 1 - \sigma\sqrt{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 dt.$$

Note que $(u-1)^2 = (d-1)^2 = \sigma^2 dt$, esto implica que podemos escribir

$$p(V_u - V_d) = p(u-d)\frac{\partial V}{\partial S}S_t = (rdt + \sigma\sqrt{dt} - \frac{1}{2}\sigma^2 dt)\frac{\partial V}{\partial S}S_t.$$

Sustituyendo estas aproximaciones en la igualdad para Ve^{rdt} tenemos

$$V(1 + rdt) = rS_t\frac{\partial V}{\partial S}dt + V + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt + \frac{\partial V}{\partial t}dt,$$

ahora, cancelando a ambos lados V y luego dividiendo por dt, obtenemos la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + +\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

2.3. Derivados Financieros

Un derivado financiero es un contrato, cuyo valor es función (se deriva) del precio de otro objeto financiero, que puede ser un activo, una tasa de referencia o un índice, tales como una acción, una divisa o un producto físico. En todos los casos el activo del cual se deriva el precio, es llamado activo subyacente.

Aunque actualmente se utiliza en el mundo una amplísima gama de derivados financieros y múltiples combinaciones entre ellos, los derivados básicos, y más conocidos, siguen siendo las opciones, los forwards, los futuros y los swaps.

Por ejemplo, si se tiene una opción sobre una acción, la opción es el derivado financiero, y el activo subyacente es la acción.

Los llamados productos derivados financieros han sido utilizados con diversos objetivos, pero, dependiendo de la intencin que se tenga al utilizarlos, los agentes u operadores que intervienen en su uso siempre se pueden enmarcar dentro alguna de las siguientes categoras: coberturistas, especuladores o arbitrajistas.

- **Coberturista**: El objetivo de un coberturista (hedger) es cubrir el riesgo que afronta ante potenciales movimientos en un mercado variable
- **Especulador**: Los especuladores, utilizan los derivados para apostar acerca de la dirección futura de los mercados y tratar de obtener beneficio de esas tendencias "previstas"
- **Arbitrajista**: Los arbitrajistas toman posiciones compensatorias sobre dos o más activos o derivados, asegurándose un beneficio sin riesgo, y aprovechando situaciones coyunturales de los mercados.

2.4. Solución de la Ecuación de Black Scholes Lineal

La ecuación de Black-Scholes desarrollada por Fisher Black y Myron Scholes en 1973 es:

$$V_t + rSV_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - rV = 0 \tag{2.1}$$

donde:
$V = V(S,t)$:= la función de pago.
$S = S(t)$:= es el stock o precio de las accioes $S = S(t) \geqslant 0$.
t:= es el tiempo con $t \in (0;T]$ con T el momento de madurez (vencimiento).
r := es la tasa de interes libre de riesgo.
σ := condicioón de volatilidad.
Ahora mencionaremos las condiciones de frontera y el estado terminal para la opción Europea.

Opción Europea Call.
$V(0,t) = 0$ para $0 \leqslant t \leqslant T$
$V(S,t) \sim S - ke^{r(T-t)}$ cuando $S \to \infty$
$V(S,T) = (S-k)^+$ para $0 \leqslant S < \infty$

Opción Europea Put.
$V(0,t) = ke^{r(T-t)}$ para $0 \leqslant t \leqslant T$
$V(S,t) \sim 0$ cuando $S \to \infty$
$V(S,T) = (k-S)^+$ para $0 \leqslant S < \infty$

Observemos que la ecuación 2.1 es igual a:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0. \tag{2.2}$$

Sea $S = ke^x$, $t = T - \dfrac{\tau}{\sigma^2/2}$, $v(x,\tau) = \dfrac{1}{k}V(S,t)$.

Ahora calculamos las derivadas parciales:

1. $\dfrac{\partial V}{\partial t} = k\dfrac{\partial v}{\partial \tau}\dfrac{\partial \tau}{\partial t} = -\dfrac{\sigma^2}{2}k\dfrac{\partial v}{\partial t}$
2. $\dfrac{\partial V}{\partial S} = k\dfrac{\partial v}{\partial S} = k\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial S} = \dfrac{k}{S}\dfrac{\partial v}{\partial x}.$
3. $\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} = k\dfrac{\partial}{\partial S}\dfrac{\partial V}{\partial S} = k\dfrac{\partial}{\partial S}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial S}\right) = k\left[\dfrac{\partial}{\partial S}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\dfrac{\partial x}{\partial S} + \dfrac{\partial}{\partial S}\left(\dfrac{\partial x}{\partial S}\right)\dfrac{\partial v}{\partial x}\right]$

$= k\left[\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\dfrac{\partial x}{\partial S}\dfrac{1}{S} - \dfrac{1}{S^2}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right] = \dfrac{k}{S^2}\left[\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right].$

Sustituyendo

$$-\frac{\sigma^2}{2}k\frac{\partial v}{\partial t} + rk\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 k\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right] - rkv = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \left[rk\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 k\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right] - rkv\right]\frac{2}{\sigma^2 k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2r}{\sigma^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2}v$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2}v.$$

Sea $\dfrac{2r}{\sigma^2} = \theta$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\theta - 1\right)\frac{\partial v}{\partial x} - \theta v$$

Finalmente sea $\lambda = \dfrac{1}{2}(\theta - 1)$, $\beta = \dfrac{1}{2}(\theta + 1) = \lambda + 1$, $\beta^2 = \lambda^2 + \theta$ y por último

$$v(x,\tau) = e^{-\lambda x - \beta^2 \tau}u(x,\tau).$$

Ahora calculamos

- $\dfrac{\partial v}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial \tau}\big[e^{-\lambda x-\beta^2\tau}u(x,\tau)\big] = \dfrac{\partial}{\partial \tau}(e^{-\lambda x-\beta^2\tau})u(x,\tau) + \dfrac{\partial u}{\partial \tau}e^{-\lambda x-\beta^2\tau}$

$$= e^{-\lambda x-\beta^2\tau}(-\beta^2)u(x,\tau) + \frac{\partial u}{\partial \tau}e^{-\lambda x-\beta^2\tau} = e^{-\lambda x-\beta^2\tau}\big[-\beta^2 u + \frac{\partial u}{\partial \tau}\big]$$

- $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\big[e^{-\lambda x-\beta^2\tau}u(x,\tau)\big] = \dfrac{\partial}{\partial x}(e^{-\lambda x-\beta^2\tau})u(x,\tau) + \dfrac{\partial u}{\partial x}e^{-\lambda x-\beta^2\tau}$

$$= e^{-\lambda x-\beta^2\tau}(-\lambda)u(x,\tau) + \frac{\partial u}{\partial x}e^{-\lambda x-\beta^2\tau} = e^{-\lambda x-\beta^2\tau}\big[-\lambda u + \frac{\partial u}{\partial x}\big]$$

- $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial v}{\partial x}\big[e^{-\lambda x-\beta^2\tau}\big(-\lambda u + \dfrac{\partial u}{\partial x}\big)\big] = \dfrac{\partial v}{\partial x}\big(e^{-\lambda x-\beta^2\tau}\big)\big(-\lambda u + \dfrac{\partial u}{\partial x}\big)$

$$= e^{-\lambda x-\beta^2\tau}(-\lambda)\big(-\lambda u + \frac{\partial u}{\partial x}\big) + \big[-\lambda\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\big]e^{-\lambda x-\beta^2\tau}$$
$$= e^{-\lambda x-\beta^2\tau}\big[\lambda^2 u - 2\lambda\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\big].$$

Por lo tanto tenemos:

$$-\beta^2 u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \big[\lambda^2 u - 2\lambda\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\big] + (\theta-1)\big[-\lambda u + \frac{\partial u}{\partial x}\big] - \theta u$$

$$\Rightarrow u_\tau = u_{xx} + (-2\lambda + (\theta-1))u_x + (\lambda^2 + \beta^2 - \lambda(\theta-1) - \theta)u$$

de lo cual se obtiene:

$$u_\tau = u_{xx}. \tag{2.3}$$

Las condiciones iniciales después del cambio de variables quedan como:

Opción Europea Call:
$u(x,0) = (e^{(\lambda+1)x} - e^{\lambda x})^+$ con $x \in \mathbb{R}$
$u(x,\tau) = 0$ cuando $x \to \infty$
$u(x,\tau) = e^{(\lambda+1)x+\beta^2\tau} - e^{\lambda x+\lambda^2\tau}$ cuando $x \to \infty$

Opción Europea Put:
$u(x,0) = (e^{\lambda x} - e^{(\lambda+1)x})^+$ con $x \in \mathbb{R}$
$u(x,\tau) = e^{\lambda x+\lambda^2\tau}$ cuando $x \to -\infty$
$u(x,\tau) = 0$ cuando $x \to \infty$.

Utilizando la transformada de Fourier

$$u(\xi,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi,\tau)e^{-ix\xi}dx$$

Como transformaremos en la variable x
$\hat{u}_x(\xi,\tau) = (-i\xi)\hat{u}(\xi,\tau)$

$\hat{u}_{xx}(\xi,\tau) = (-i\xi)^2\hat{u}_x(\xi,\tau)$

$\dfrac{\partial}{\partial\tau}\hat{u}(\xi,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\partial}{\partial\tau}u(x,\tau)e^{-ix\xi}dx = -\xi^2\hat{u}(\xi,\tau).$

Observamos que esta es una ecuación ordinaria, por lo que aparece la derivada a la variable τ y la solución en el dominio de Fourier viene presentada por:

$$\hat{u}(\xi,\tau) = \hat{u}(\xi,0)e^{-\xi^2\tau}$$

Ahora la solución inicial es $u(x,0) = g(x)$. Ahora aplicamos la transformada de Fourier inversa.

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}d\xi$$

El objetivo ahora es calcular la anti-transformada de $\hat{u}(\xi,0)e^{-\xi^2\tau}$. Para ello definimos la función k_t conocida como núcleo de calor.

$$k_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}e^{-x^2\tau}$$

Observamos que $\hat{k}_t(\xi) = e^{-\xi^2\tau}$.

Utilizando la propiedad que relaciona la transformada de Fourier con la convulción vemos que podemos escribir la solución como

$$u(x,\tau) = (u_o * k_t)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}d\xi$$

Para la opción call:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} max\{e^{(\lambda+1)\xi} - e^{\lambda\xi}, 0\}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{0}^{\infty} (e^{(\lambda+1)\xi} - e^{\lambda\xi})e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{0}^{\infty} (e^{(\lambda+1)\xi})e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}d\xi - \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{0}^{\infty} (e^{\lambda\xi})e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}d\xi$$

$$= I_{\lambda+1} - I_\lambda, \tag{2.4}$$

donde :

$$I_\mu = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^\infty (e^{\mu\xi}) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}} d\xi.$$

Sean:

$$\eta = \frac{x - \xi + 2\mu\tau}{\sqrt{4\tau}}$$

$$d\eta = -\frac{d\xi}{\sqrt{2\tau}}.$$

Por lo que tenemos:

$$I_\mu = -\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{\mu x + \mu^2\tau} \int_{\frac{x+2\mu\tau}{\sqrt{2\tau}}}^{-\infty} e^{\frac{\eta^2}{2}} \sqrt{2\tau} d\eta$$

$$= e^{\mu x + \mu^2\tau} \Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x+2\mu\tau}{\sqrt{2\tau}}} e^{\frac{\eta^2}{2}} d\eta \Big]$$

$$= e^{\mu x + \mu^2\tau} \Phi\Big(\frac{x + 2\mu\tau}{\sqrt{2\tau}}\Big).$$

Por lo tanto la solución de (3.4) es:

$$= e^{(\lambda+1)x + (\lambda+1)^2\tau} \Phi\Big(\frac{x + 2(\lambda+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\Big) - e^{\lambda x + \lambda^2\tau} \Phi\Big(\frac{x + 2\lambda\tau}{\sqrt{2\tau}}\Big)$$

Introducimos dos nuevas variables, d_1 y d_2; también regresaremos a las variables originales de Black-scholes (al final del proceso) y por tanto tenemos:

$$d_1 = \frac{x + 2(\lambda+1)\tau}{\sqrt{2\tau}} \quad y \quad d_2 = \frac{x + 2\lambda\tau}{\sqrt{2\tau}},$$

donde

$$S = ke^x \Rightarrow x = ln\Big(\frac{S}{k}\Big)$$

$$t = T - \frac{\tau}{\sigma^2/2} \Rightarrow \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(\theta - 1) \Rightarrow \lambda = \Big(\frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\Big)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\theta + 1) \Rightarrow \beta = \Big(\frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\Big).$$

Por lo tanto

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{k}) + (T-t)(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{k}) + (T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

Finalmente tenemos:

$$V(S,t) = kv(x,\tau) = ke^{-\lambda x - \beta^2\tau}u(x,\tau)$$

$$\Rightarrow ke^{-\lambda x-\beta^2\tau}e^{-\beta x+\beta^2\tau}\Phi(d_1) - e^{-\lambda x-\beta^2\tau}e^{\lambda x+\lambda^2\tau}\Phi(d_2)$$

$$= ke^x\Phi(d_1) - ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

de donde:

$$V_c = S\Phi(d_1) - ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2).$$

En la última ecuación, $\Phi(d)$ es la función de distribución normal.

Para la opción put:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} max\{e^{\lambda\xi} - e^{(\lambda+1)\xi}, 0\}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{-\infty}^{0}(e^{(\lambda)\xi})e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}d\xi - \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{-\infty}^{0}(e^{(\lambda+1)\xi})e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}d\xi.$$

Al igual que para la opción call tenemos:

$$I_\mu = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{-\infty}^{0}(e^{\mu\xi})e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}d\xi.$$

Sean:

$$\eta = \frac{x-\xi+2\mu\tau}{\sqrt{4\tau}}$$

$$d\eta = -\frac{d\xi}{\sqrt{2\tau}}.$$

Por lo que tenemos:

$$I_\mu = -\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{\mu x+\mu^2\tau} \int_{\infty}^{\frac{x+2\mu\tau}{\sqrt{2\tau}}} e^{\frac{\eta^2}{2}} \sqrt{2\tau} d\eta$$

$$= e^{\mu x+\mu^2\tau} \big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x+2\mu\tau}{\sqrt{2\tau}}} e^{\frac{\eta^2}{2}} d\eta\big]$$

$$= e^{\mu x+\mu^2\tau} \Phi\big(-\frac{x+2\mu\tau}{\sqrt{2\tau}}\big).$$

Siguiendo el procedimiento anterior, es fácil ver que:

$$V_p(S,t) = ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1).$$

Capítulo 3

El Método de Adomian y su Aplicación a la Ecuación de Black-Scholes

3.1. El Método de Descomposición de Adomian (ADM)

El método de descomposición de Adomian no cambia la naturaleza del problema o modelo dado por alguna ecuación diferencial, es decir, no efectúa ninguna linealización, truncamiento ni discretización. Está basado en la búsqueda de una solución en forma de serie y en la descomposición de un operador lineal o no lineal en términos de una serie en la cual los que los términos o sumandos se calculan de forma recurrente utilizando unos polinomios, los llamados polinomios de Adomian. Bajo ciertas condiciones de convergencia, la suma de la serie dará la solución exacta, pero en general la serie se truncará para dar una buena aproximación. El error de truncamiento puede ser estimado la mayoría de las veces en los problemas de aplicación.
El método de descomposición de Adomian (ADM) permite encontrar una solución analítica para una ecuación diferencial tanto ordinaria como en derivadas parciales [9] y éste consiste en identificar en la ecuación diferencial las partes lineal y no lineal, para luego invertir el operador diferencial de mayor orden que se encuentre en la parte lineal y después considerar la función por conocer como una serie cuyos sumandos por ADM quedaran bien determinados; en seguida se descompone la parte no lineal en términos de los polinomios de Adomian [27]. Definimos las condiciones iniciales y/o de frontera y los términos que involucran a la variable independiente como aproximación inicial. Así, se encuentran de manera sucesiva los términos de la serie que nos da la solución del problema

estableciendose una relación recursiva. En este capítulo se expondrá el método de descomposición de Adomian de manera breve pero con los requerimientos mínimos necesarios para poderlo aplicar al modelo de Black-Scholes no lineal.

En general, el método a seguir es el siguiente: dada una ecuación diferencial (ordinaria o parcial)

$$Fu(x,t) = g(x,t) \tag{3.1}$$

con condición inicial

$$u(x,0) = f(x) \tag{3.2}$$

donde F representa una combinación lineal de operadores diferenciales que envuelve tanto términos lineales como no lineales y entonces la ecuación (3.1) puedes escribirse como

$$L_t u(x,t) + Ru(x,t) + Nu(x,t) = g(x,t) \tag{3.3}$$

donde $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$, R es un operador lineal que involucra derivadas (ordinarias o parciales) con respecto a x y N es un operador no lineal; g es un término no homogéneo independiente de u.
Despejando $L_t u(x,t)$,

$$L_t u(x,t) = g(x,t) - Ru(x,t) - Nu(x,t). \tag{3.4}$$

Como L es invertible, operando en (3.4) con el inverso $L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) ds$ tenemos que,

$$L_t^{-1} L_t u(x,t) = L_t^{-1} g(x,t) - L_t^{-1} Ru(x,t) - L_t^{-1} Nu(x,t) \tag{3.5}$$

luego, una expresión equivalente a (3.5) es

$$u(x,t) = f(x) + L_t^{-1} g(x,t) - L_t^{-1} Ru(x,t) - L_t^{-1} Nu(x,t) \tag{3.6}$$

donde $f(x)$ es la constante de integración (con respecto a t) que satisface $L_t f = 0$. El método (ADM) [9] consiste en descomponer la solución de (3.1), (3.2) en una serie para la función desconocida $u(x,t)$ dada por,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t). \tag{3.7}$$

El término no lineal $Nu(x,t)$ por medio de ADM se descompone como

$$Nu(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n) \tag{3.8}$$

donde la sucesión $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, es la llamada sucesión de polinomios de Adomian, para mayor información al respecto ver [12] y [13].
Ahora, sustituyendo (3.7), (3.8) en la ecuación (3.6) obtenemos,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = f(x) + L_t^{-1} g(x,t) - L_t^{-1} R \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) - L_t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \tag{3.9}$$

de donde se obtiene el algoritmo recursivo

$$\begin{cases} u_0(x,t) = f(x) + L_t^{-1} g(x,t), \\ u_{n+1}(x,t) = L_t^{-1} R u_n(x,t) - L_t^{-1} A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n), \ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3.10}$$

Con el algoritmo recursivo establecido en la ecuación (3.10) podemos tener un aproximación a la solución de (3.1), (3.2) por medio de la serie

$$u(x,t) \approx \sum_{n=0}^{k} u_n(x,t), \ \text{ donde } \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} u_n(x,t) = u(x,t) \tag{3.11}$$

La descomposición de la solución en serie, generalmente converge muy rápido. La rapidez de esta convergencia hace que se necesiten pocos términos para el análisis de la solución. Las condiciones para las cuales el método converge han sido estudiadas en los trabajos [10], [11], [12] y [13] principalmente. En el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales, cada una de las variables dependientes se obtienen recursivamente con (3.10) y la aproximación a las soluciones en cada caso con (3.11).
En la siguiente sección vamos a considerar ADM para descomponer un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y expondremos un ejemplo para comparar la bondad del método con la solución exacta.

3.2. Solución de la Ecuación de Black-Scholes Lineal a Través del Método de Adomian

Ahora observaremos que por el método de Adomian también podemos dar una aproximación a la solución de la ecuación de Black-Scholes.

$$L = (.)_t, \quad R = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 (.)_{SS} + rS(.)_S - r(.), \quad N = 0 \ \ y \ \ g = 0.$$

Observamos que:

$$L^{-1} = \int_t^T (.)ds$$

Aplicando de manera directa a (3.1) obtenemos

$$\int_t^T V_t ds = -\frac{1}{2}\sigma^2 \int_t^T S^2 V_{SS} ds - r\int_t^T SV_S ds + r\int_t^T V ds$$
$$\Rightarrow V(S,T) - V(S,t) == -\frac{1}{2}\sigma^2 \int_t^T S^2 V_{SS} ds - r\int_t^T SV_S ds + r\int_t^T V ds$$
$$\Rightarrow V(S,t) = V_T + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_t^T S^2 V_{SS} ds + r\int_t^T SV_S ds - r\int_t^T V ds$$

Asumiremos que podemos expresar las solución en términos de una serie infinita

$$V(S,t) = \sum_{i=0}^{\infty} V_i(t,S)$$

Entonces obtenemos:

$$\sum_{i=o}^{\infty} V_i(S,t) = V_T + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_t^T S^2 \sum_{i=o}^{\infty} V_{iSS} ds + r\int_t^T S\sum_{i=o}^{\infty} V_{iS} ds - r\int_t^T \sum_{i=o}^{\infty} V_i ds$$

De donde podemos ver que cada termino de la aproximación esta representado por:

$$\left.\begin{array}{c} V_0(S,t) = V_T \\ V_{n+1}(S,t) = \frac{1}{2}\sigma^2 \int_t^T S^2 V_{nSS} ds + r\int_t^T SV_{nS} ds - r\int_t^T V_n ds \end{array}\right\}$$

De donde resulta:

$$V(S,t) \approx \psi_{k+1} = \sum_{i=0}^{\infty} V_i(S,t)$$

Para el caso de la opción europea:

Como ya vimos, dada la ecuación (3.1) podemos, mediante un manejo algebraico llegar a la ecuación de calor.

Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{c} u_0(\tau,x) = u_{xx}(\tau,x), \quad x > 0, \tau \in [0, \frac{\sigma^2 T}{2}] \\ u(0,x) = u_0(x) \end{array}\right\}$$

Como se establece en el método de descomposición de Adomian, la solución será aproximada por:

$$\psi_k = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(t) \approx u(t).$$

Por lo tanto, las aproximaciones a la solución para la opción europea tanto call como put son, respectivamente:

$$C = ke^{-\beta x - \lambda^2 \tau} \psi_k$$
$$P = ke^{-\lambda x - \beta^2 \tau} \psi_k$$

3.3. Solución de la Ecuación de Black-Scholes No Lineal por el Método de Adomian (ADM)

Los costos de transacción (véase por ejemplo [19] y [18]), grandes preferencias de los inversionistas (ver [20, 21]) y los mercados incompletos [22] son algunos de los motivos por los que pueden llegar a ser poco realista los supuestos 1-4 del final de la sección anterior y los modelos clásicos al tomar en cuenta esas características del mercado, se transforman en ecuaciones no lineales del tipo convección-difusión (parabólicas degeneradas), donde la volatilidad σ puede depender del tiempo τ, el precio del activo subyecente S y algunas de las derivadas del precio de la opción V misma.

Hay varios modelos de costos de transacción cada uno de ellos da como resultado ecuaciones de Black-Scholes no lineales para opciones europeas y americanas, y una función de la volatilidad no constante sería

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2(\tau, S, V_S, V_{SS}) \tag{3.12}$$

Han existido muchos y variados enfoques para mejorar el modelo mediante el tratamiento de la volatilidad y los enfoques han derivado en una funcin de la volatilidad modificada $\hat{\sigma}$ que se utiliza modelar los efectos de los costos de transacción y la iliquidez de los mercados, $\hat{\sigma}$ resulta ser la razn de la no linealidad de (2.2). En [21] Frey y Stremme y después Frey y Patie [20] considerando estos efectos en los precios han obtenido la volatilidad modificada como

$$\hat{\sigma}(\tau, S, V_S, V_{SS}) = \frac{\sigma}{1 - \rho S \lambda(S) u_{SS}} \tag{3.13}$$

donde σ es la volatilidad tradicional, ρ es una constante y λ (precio del riesgo) es una función continua positiva que describe el perfil de iliquidez del mercado. Bordag y Chmakova en [23] suponen que λ es constante y resuelven la ecuación

de Black-Scholes con la volatilidad modificada (3.13).
En [16] y [20] los autores han obtenido una ecuación de Black-Scholes generalizada, en la cual la tasa de interés $r \geq 0$ y la volatilidad $\sigma > 0$ son constantes, la ecuación resultante es

$$\begin{cases} V_\tau(S,\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot \frac{V_{SS}(S,\tau)}{(1-\rho S\lambda(S)V_{SS}(S,\tau))^2} + rSV_S(S,\tau) - rV(S,\tau) = 0, \\ V(S,T) = f(S), \quad 0 < S < \infty. \end{cases} \tag{3.14}$$

En [24] los autores han estudiado la existencia y unicidad de (3.14), en ese estudio la función de pago f debe satisfacer:
"$f(e^x)$ es Lipschitz-continua y $e^{-a\sqrt{x^2+1}}f(e^x)$ es acotada para alguna $a \geq 0$."
Si consideramos el caso especial, en el cual el precio del riesgo es unitario, $\lambda(S) = 1$, en este caso, si además suponemos que $||\rho SV_{SS}|| < \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$ apropiadamente pequeño (bajo impacto de cobertura) y considerando la aproximación funcional $\frac{1}{(1-F)^2} \approx 1+2F+\mathcal{O}(F)^3$ tenemos que la ecuación (3.14) se transforma en

$$\begin{cases} V_\tau(S,\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}(S,\tau)(1+2\rho SV_{SS}(S,\tau)) + rSV_S(S,\tau) - rV(S,\tau) = 0, \\ V(S,T) = f(S), \quad S \in [0,\infty). \end{cases} \tag{3.15}$$

Notar que considerando el cambio $t = T - \tau$, $V(S,\tau) = u(S,t)$, el problema (3.15) toma la forma

$$\begin{cases} u_t(S,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 u_{SS}(S,t)(1+2\rho Su_{SS}(S,t)) + rSu_S(S,t) - ru(S,t) = 0, \\ u(S,0) = f(S), \quad S \in [0,\infty). \end{cases} \tag{3.16}$$

3.4. Un Ejemplo de Black-Scholes no Lineal y su Estudio a Través de ADM

Comparando (3.16) con la ecuación (3.3) tenemos que $g(S,t) = 0$, L_t, R y N son:

$$L_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad R = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + rS\frac{\partial}{\partial S} - r, \quad N = \rho\sigma^2 S^3\Big(\frac{\partial^2}{\partial S^2}\Big)^2. \tag{3.17}$$

Haciendo uso de la ecuación (3.10) a través de ADM tenemos recursivamente

$$\begin{cases} u_0(S,t) = f(S), \\ u_{n+1}(S,t) = L_t^{-1}Ru_n(S,t) - \rho\sigma^2 S^3 L_t^{-1}A_n(u_0,u_1,\ldots,u_n), \; n = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{3.18}$$

en el presente caso, el término no lineal es $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}\right)^2$, es decir,

$$F(u) = u_{ss}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0,u_1,\ldots,u_n) \tag{3.19}$$

usando ADM, la ecuación (3.7) nos da

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$$

entonces, evaluando [26]

$$F(u) = u_{ss}^2 = (u_{0,ss} + u_{1,ss} + u_{2,ss} + u_{3,ss} + u_{4,ss} + u_{5,ss} + \cdots)^2 \qquad (3.20)$$

$$= u_{0,ss}^2 + 2u_{0,ss}u_{1,ss} + 2u_{0,ss}u_{2,ss} + 2u_{0,ss}u_{3,ss} + 2u_{0,ss}u_{4,ss} + 2u_{0,ss}u_{5,ss} + u_{1,ss}^2$$

$$+2u_{1,ss}u_{2,ss} + 2u_{1,ss}u_{3,ss} + 2u_{1,ss}u_{4,ss} + 2u_{1,ss}u_{5,ss} + u_{2,ss}^2 + 2u_{2,ss}u_{3,ss} + 2u_{2,ss}u_{4,ss}$$

$$+2u_{2,ss}u_{5,ss} + u_{3,ss}^2 + 2u_{3,ss}u_{4,ss} + 2u_{3,ss}u_{5,ss} + u_{4,ss}^2 + 2u_{4,ss}u_{5,ss} + u_{5,ss}^2 + \cdots$$

la expresión anterior se puede rearreglar agrupando todos los términos en los cuales los subíndices de las componentes de u_n suman lo mismo. Con esto obtenemos los polinomios de Adomian para u_{ss}^2, los cuales son:
$A_0 = u_{0,ss}^2$
$A_1 = 2u_{0,ss}u_{1,ss}$
$A_2 = 2u_{0,ss}u_{2,ss} + u_{1,ss}^2$
$A_3 = 2u_{0,ss}u_{3,ss} + 2u_{1,ss}u_{2,ss}$
$A_4 = 2u_{0,ss}u_{4,ss} + 2u_{1,ss}u_{3,ss} + u_{2,ss}^2$
$A_5 = 2u_{0,ss}u_{5,ss} + 2u_{1,ss}u_{4,ss} + 2u_{2,ss}u_{3,ss}$
$\vdots \qquad \vdots$

A continuación se expondrá un ejemplo de una ecuación de Black-Scholes no lineal, el cual se resolverá a través del método ADM, el ejemplo ser diferente a los estudiados en [33] y tiene como objetivo mostrar la bondad del mtodo; lo cual quedará mostrado usando una aproximación de solamente cuatro términos y comparando con una solución exacta encontrada en [25]; en el trabajo de J. E. Esekon [25] se obtiene una solución de (3.16) haciendo uso de ondas viajeras en medios porosos.

Ejemplo En este ejemplo, consideraremos el caso en el cual $r = 0{,}08$. Aquí proponemos como valor inicial $f(S) = S + 900\sqrt{S} + 2025$, $\sigma = 0{,}09$ y $|\rho| = 0{,}01$, haciendo notar que se satisface lo requerido para la convergencia en [24], es decir, para $a = 4$, es decir, se cumple que

$$|e^{-4\sqrt{S^2+1}} f(e^S)| \leq 20 \quad para \quad todo \quad S \in [0, \infty).$$

Para el esquema de ADM tenemos $u_0(S,t) = S + 900\sqrt{S} + 2025$ y as los polinomios de Adomian resultan ser

$$A_0 = u_{0,SS}^2 = \frac{50625}{S^3}$$

$$A_1 = 2u_{0,SS}u_{1,SS} = \frac{-3947{,}48t}{S^3}$$

$$A_2 = 2u_{0,SS}u_{2,SS} + u_{1,SS}^2 = \frac{170{,}305t^2}{S^3}$$

Con estos resultados, y considerando el cambio de variable $t = T - \tau$ resulta $L_t^{-1} = -\int_0^t$ con $t \in [0, T]$. Calculando las u_n:

$$u_0(S,t) = S + 900\sqrt{S} + 2025,$$

$u_1(S,t) = -L_t^{-1}Ru_0(S,t) - \rho\sigma^2 L_t^{-1}S^3A_0(u_0)$
$= -4{,}10063t - (-0{,}08 + 0{,}91125\sqrt{S} + 0{,}08(1 + 450/\sqrt{S})S)t,$

$u_2(S,t) = -L_t^{-1}Ru_1(S,t) - \rho\sigma^2 L_t^{-1}S^3A_1(u_0,u_1)$
$= 0{,}08t + [0{,}168177t^2 + 0{,}756911\sqrt{S}]t^2 + 0{,}0032St^2,$

$u_3(S,t) = -L_t^{-1}Ru_2(S,t) - \rho\sigma^2 L_t^{-1}S^3A_1(u_0,u_1,u_2)$
$= 0{,}08t - 0{,}0045982t^3 - 0{,}0103476\sqrt{S}t^3 - 0{,}00008533St^3,$

y por tanto la solución aproximada de la ecuacin 3.16 con la condición inicial dada por $f(S) = S + 900\sqrt{S} + 2025$ con las condiciones del mercado dadas en este ejemplo esta dada por:

$$u_{ADM}(S,t) \approx u_0(S,t) + u_1(S,t) + u_2(S,t) + u_3(S,t). \qquad (3.21)$$

En los cuadros 1, 2 y 3 haremos una comparación de la solución de la ecuación de Black-Scholes no lineal obtenida con (3.21) con la solución exacta obtenida en [25], además en las figuras 1, 2 y 3 se muestran gráficas para ilustrar los resultados numéricos obtenidos en las tablas correspondientes a los tiempos $t = 0{,}25$, $t = 0{,}50$ y $t = 0{,}75$.

	Resultados para $t = 0{,}25$		
S	$u_{exac}(S,t)$	$u_{ADM}(S,t)$	Error
0,0	2066.95384	2066.02491	0.01980158
1,0	2977.22913	2926.79711	0.01693924
2,0	3345.86328	3300.49497	0.01620582
3,0	3644.86483	3587.47609	0.01574509
4,0	3889.50441	3889.56933	0.01540944
5,0	4105.15518	4042.97674	0.01514643

Cuadro 3.1: Tabla con $S = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

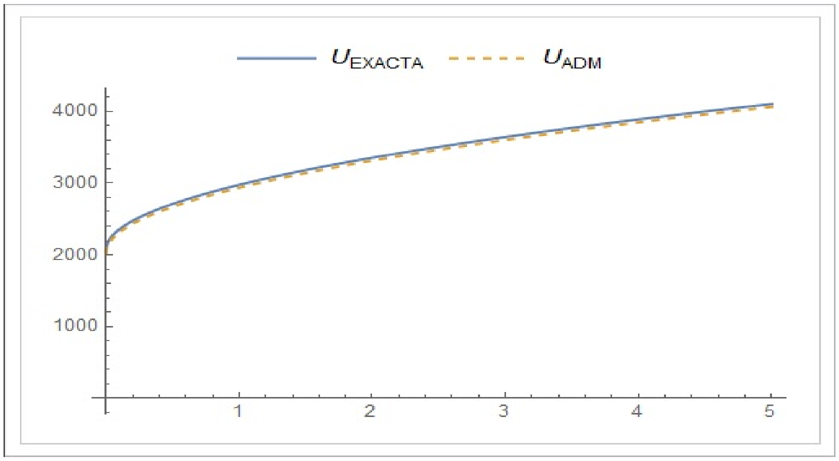

Figura 3.1: cuando t=0.25

	Resultados para $t = 0{,}50$		
S	$u_{exac}(S,t)$	$u_{ADM}(S,t)$	Error
0,0	2109.77689	2027.04927	0.03921154
1,0	3029.42304	2927.59377	0.03361342
2,0	3410.93873	3301.19729	0.03217338
3,0	3703.91870	3588.10604	0.03126761
4,0	3951.06919	3830.13826	0.03060714
5,0	4168.93213	4043.49190	0.03008929

Cuadro 3.2: Tabla con $S = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

En presente ejemplo, se ha estudiado un modelo de Black-Scholes no lineal para la valoración de opciones; la solución se ha obtenido usando el método de descomposición de Adomian (ADM), y como podemos ver en los resultados obtenidos para éste modelo ilustrativo las aproximación es aceptable y en medida que el tiempo aumenta la diferencia entre el valor pactado (condición inicial del modelo) y el dado por la aproximación aumenta asintóticamente, lo cual resulta nos indica que el método funciona de manera muy eficiente para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

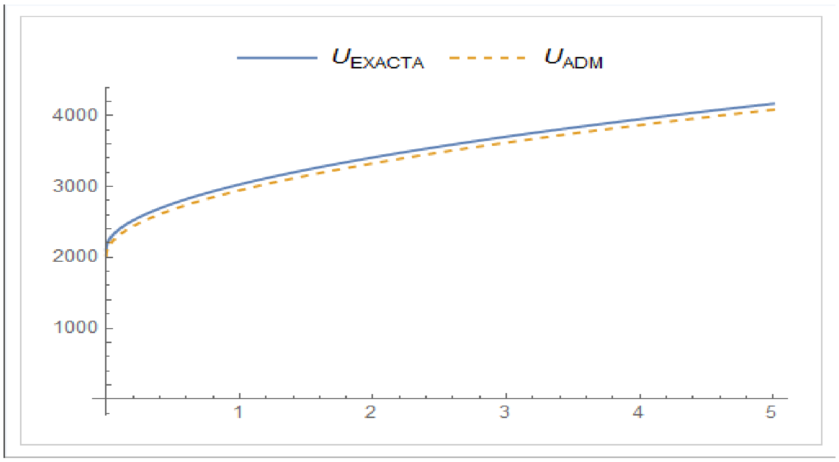

Figura 3.2: cuando t=0.50

	Resultados para $t = 0{,}75$		
S	$u_{exac}(S,t)$	$u_{ADM}(S,t)$	Error
0,0	2153.48713	2028.07313	0.05823764
1,0	3082.60073	2928.38996	0.05002619
2,0	3468.03797	3301.89918	0.04790570
3,0	3764.02704	3588.73556	0.04657020
4,0	4013.71433	3830.70678	0.04559556
5,0	4233.81223	4044.00668	0.04483089

Cuadro 3.3: Tabla con $S = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

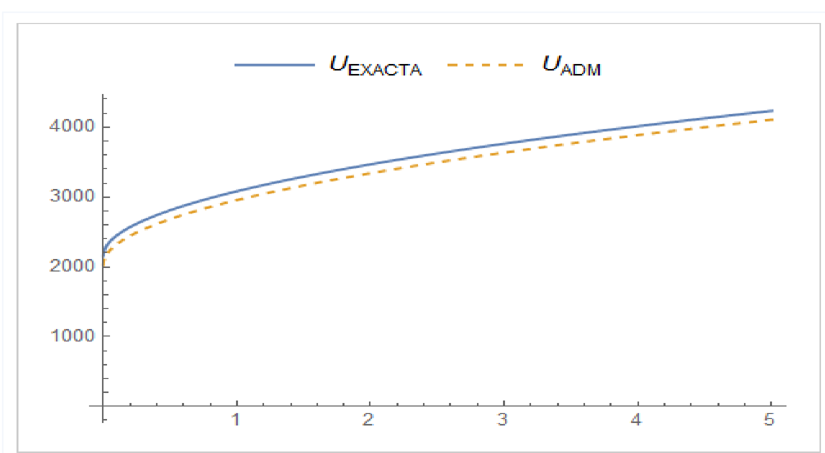

Figura 3.3: cuando t=0.75

Capítulo 4

Conclusiones y Perspectivas

En la actualidad, el estudio de mercados financieros está motivando el desarrollo de otras partes o áreas de las mismas matemáticas y para formular y hallar soluciones a nuevos modelos, se está recurriendo a métodos de diferentes áreas científicas como lo son la mecánica cuántica, la computación, la mecánica de fluidos entre otras. Por lo anterior, los financieros buscan emplear matemáticos que les hagan modelos que les ayuden a tener mayores ganancias tanto la largo como a corto plazo y que les aseguren no sufrir pérdidas significativas como consecuencia de realizar inversiones. Uno de los instrumentos más usados por las personas que ejercen las finanzas son las “opciones” que son a *grosso modo* contratos de compra o venta a futuro, los cuales por ser a futuro tienen implícita una cierta incertidumbre que es deseable minimizar sin detrimento de ganancias. Como se puede percibir, las matemáticas han jugado un papel esencial en el desarrollo de las finanzas convirtiéndose en una herramienta valiosa para generar dinero.
En el presente trabajo se presenta el modelo de Black-Scholes, el cual resulta en la actualidad el más popular para la valoración de los contratos financieros, esto es, la opción de compra europea. Se establece la fórmula de valuación de martingalas para reclamos contingentes en general y se muestra una aplicación de ella mediante la obtención del precio del contrato call. Al final se establece también la ecuación de Black-Scholes, que es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, y se estudia el modelo no lineal correspondiente a través del método de descomposición de Adomian. Dicho modelo constituye una forma alternativa para la valoración de activos derivados y es hoy por hoy la única manera analítica conocida para realizar tal fin. También en el presente trabajo se ha dado de manera breve una introducción a algunos de los métodos matemáticos tanto tradicionales como modernos para resolver la ecuación que en el mercado de derivados se conoce como la ecuación de Black-Scholes en su versión no lineal. Al final del trabajo se ha dado una breve introduccíon al método de descomposición de Adomian y se ha implementado para el estudio de la

ecuación de Black-Scholes y su solución (en la versión no lineal) imponiendo una cierta condición inicial que satisface los requisitos obtenidos en la literatura para asegurar la convergencia del método.

Si damos la vuelta a la ecuación Black Scholes podemos utilizar el valor del activo subyacente, el precio de ejercicio, el tiempo hasta el vencimiento, el tipo de interés libre de riesgo hasta el vencimiento y el precio de mercado de la opción, para calcular la volatilidad. Esta volatilidad se denomina volatilidad implícita y como se ha venido comprobando, no es constante; varía en función del precio de ejercicio y del tiempo, incumpliendo uno de los requisitos de la fórmula Black Scholes. El problema de hallar la volatilidad implícita de manera exacta es un problema matemático serio y ese puede ser un objetivo para trabajos futuros a través del método estudiado en el presente proyecto.

Bibliografía

[1] Cox, J. C., Ross, S. A., and M. Rubinstein *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics, Vol. 7, pp. 229-263, (1979).

[2] Wilmott P., Howison S., Dewynne J. *The Mathematics of Financial Derivatives*, Press Syndicate of the University of Cambridge, United States of America (1995).

[3] Hull, John C. *Options, Futures and Other Derivatives* (7 ed.). Prentice Hall. ISBN 0-13-505283-1, (2008).

[4] F. Black and M. Scholes, The Pricing Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**, 637-659; (1973).

[5] O. González-Gaxiola, José A. Santiago; *The Black-Scholes Operator as the Generator of a C_0-Semigroup and Applications*, Int. Journal of Pure and Applied Math. Vol. **76**, No. 2, 191-200; (2012).

[6] F. Venegas Martínez; *Riesgos: financieros y económicos*, Ed. Thomson, México; (2006).

[7] J. Esekon, S. Onyango, N.O. Ongati, *Analytic solution of a nonlinear Black-Scholes partial differential equation*, Int. Journal of Pure and Applied Math. Vol. **61**, No. 2 (2010), 219-230.

[8] J.D. Logan, *An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations*, Second Edition, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA (2008).

[9] G. Adomian, Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, (1994)

[10] Y. Cherruault, Convergence of Adomian's method; Kybernetes **18**(2), 31-38 (1989)

[11] Y. Cherruault, G. Adomian, Decomposition methods: a new proof of convergence; Math. Comput. Modelling **18**(12), 103-106 (1993)

[12] K. Abbaoui, Y. Cherruault, Convergence of Adomian's method applied to differential equations; Comput. Math. Appl. **28**(5), pp. 103-109 (1994)

[13] K. Abbaoui, Y. Cherruault, New ideas for proving convergence of decomposition methods: Comput. Math. Appl. **29**(7), pp. 103-108 (1995)

[14] M. Tatari, M. Dehghan, The use of the Adomian decomposition method for solving multipoint boundary value problems, The Royal Swedish Academy of Sciences **73**, 672?676 (2006).

[15] A. M. Wazwaz, Partial Differential Equations: Methods and Applications. Lisse, Netherlands: Balkema Publishers, (2002).

[16] R. Frey, *Market illiquidity as a source of model risk in dynamic hedging*, ed. by R. Gibson, Risk Publications, pp. 125-136, Risk Publications, London, (2000).

[17] L. A. Bordag, *On option-valuation in illiquid markets: invariant solutions to a nonlinear model*, Mathematical Control Theory and Finance, pp. 71-94, (2008).

[18] G. Barles, H. M. Soner; *Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation*; Finance Stoch., **2**, 369-397, (1998).

[19] P. Boyle, T. Vorst; *Option replication in discrete time with transaction costs*; J. Finance, **47**, 271-293, (1992).

[20] R. Frey, P. Patie, *Risk Management for Derivatives in Illiquid Markets: A Simulation Study* Advances in Finance and Stochastics, pp 137-159, (2002).

[21] R. Frey, A. Stremme, *Market volatility and feedback effects from dynamic hedging*, Math. Finance, **4**, 351-374, (1997).

[22] H. M. Soner, N. Touzi, *Superreplication under gamma constraints*; SIAM J. Contr. Optim., **39**, 73-96, (2001).

[23] L. Bordag, A. Chmakova; *Explicit solutions for a nonlinear model of financial derivatives*; Int. J. Theor. Appl. Finance, **10**, 1-21, (2007).

[24] H. Liu, J. Yong, *Option pricing with an illiquid underlying asset market*, Journal of Economic Dynamics and Control **29**, 2125-2156, (2005).

[25] J. E. Esekon, Analytic solution of a nonlinear Black-Scholes equation, Int. Journal of Pure and Applied Math., **82**, No. 4, 547-555, (2013).

[26] A. M. Wazwaz, A new algorithm for calculating adomian polynomials for nonlinear operators; Appl. Math. and Computation; **111**, 1, 53-69, (2000).

[27] G. Adomian, A review of the decomposition method in applied mathematics; J. Math. Anal. Appl. **135**, Issue 2, 501-544 (1988).

[28] F. Black and M. Scholes, *The Pricing Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, **81**, 637-659; (1973).

[29] R. C. Merton, *Theory of Rational Options Pricing*, Bell Journal of Economic and Management Science (**4**), 141-183, (1973).

[30] O. González-Gaxiola, José A. Santiago; *The Black-Scholes Operator as the Generator of a C_0-Semigroup and Applications*, Int. Journal of Pure and Applied Math. Vol. **76**, No. 2, 191-200; (2012).

[31] Juan M. Romero, O. González-Gaxiola, J. Ruiz de Chávez and R. Bernal-Jaquez; *The Black-Scholes Equation and Certain Quantum Hamiltonians*, Int. Journal of Pure and Applied Math. Vol. **67**, No. 2, 165-173; (2011).

[32] S. Fassari, F. Rinaldi; *On Some Potential Applications of the Heat Equation with a Repulsive Point Interaction to Derivative Pricing*, Rendiconti di Matematica, Serie VII Vol. **31**, 35-52, Roma (2011).

[33] O. González-Gaxiola, J. Ruiz de Chávez, J. A. Santiago; *A Nonlinear Option Pricing Model Through the Adomian Decomposition Method*, Int. Journal of Applied and Comput. Math., **70**, 1-15; (2015).

Firma del Asesor del Proyecto

Dr. Oswaldo González Gaxiola