

# Содержание

<b>I</b>	<b>Теория вероятности</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Вероятностное пространство</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Условная вероятность. Независимость событий</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Формула полной вероятности. Формула Байеса</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Случайные величины</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Понятие меры и интеграла Лебега</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Виды распределений</b>	<b>15</b>
<b>7</b>	<b>Характеристики случайных величин</b>	<b>17</b>

Часть I

# Теория вероятности

# 1 Вероятностное пространство

Методы теории вероятности работают в ситуациях, называемых стохастическими. Для них характерны три свойства:

1. Непредсказуемость
2. Воспроизводимость
3. Устойчивость частот

Для описания стохастических ситуаций необходимо определить функцию вероятности. Её область определения называется множеством событий. В свою очередь событие (такое как, например, выпадание чётного числа на кубике) могут являться совокупностью неких более простых событий, описывающих стохастическую ситуацию (число, выпавшее на кубике). Последнее множество называется множеством элементарных исходов и обозначается  $\Omega$ .

Множество событий, обозначаемое  $\mathcal{A}$ , должно обладать следующими интуитивными свойствами:

1. Отрицание события есть событие (если «пойдет дождь» событие, то «не пойдет дождь» также событие)
2. Объединение событий есть событие («пойдет дождь» или «пойдет снег»)
3. Все множество элементарных исходов является событие («Что-нибудь да произойдет»)

Формализуя эти свойства, получаем определение алгебры.

**Определение 1.1** Семейство  $\mathcal{A}$  подмножеств множества  $\Omega$  называется алгеброй, если

1.  $\forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
2.  $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
3.  $\Omega \in \mathcal{A}$

Из аксиом алгебры и формулы  $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$  следует, что пересечений событий является событием.

Наименьшей возможной алгеброй является  $\{\Omega, \emptyset\}$

**Определение 1.2** Семейство  $\mathcal{A}$  подмножеств множества  $\Omega$  называется  $\sigma$ -алгеброй, если

1.  $\forall A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$
2.  $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
3.  $\Omega \in \mathcal{A}$

**Определение 1.3** Пусть  $\mathcal{K}$  - класс подмножеств  $\Omega$ .  $\sigma$ -алгебра  $\sigma(\mathcal{K})$ , порожденная классом  $\mathcal{K}$  — наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathcal{K}$ , то есть любая  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathcal{K}$ , содержит и  $\sigma(\mathcal{K})$ .

**Пример**  $\sigma$ -алгеброй, порожденной  $\mathcal{K} = A$ , будет являться  $\sigma(A) = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ .

$\sigma$ -алгебра является более узким понятием, нежели алгебра, то есть любая  $\sigma$ -алгебра является алгеброй, а обратное, вообще говоря, неверно.

**Пример** Пусть  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A}$  содержит конечные подмножества  $\Omega$  и их дополнения. Для такого множества выполнены все аксиомы алгебры:  $\Omega = \bar{\emptyset} \in \mathcal{A}$ , объединение конечных множеств есть конечное множество, объединение конечного множества с дополнением к конечному множеству так же является дополнением к некоторому множеству. То же можно сказать и об объединении двух дополнений. Таким образом,  $\mathcal{A}$  является алгеброй. Все элементы  $\mathcal{A}$  либо конечны, либо континуальны, поэтому  $\mathcal{A}$  не содержит  $\mathbb{N}$ . Но  $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{i\}$ , то есть не выполнено свойство счетной аддитивности из определения  $\sigma$ -алгебры.

**Определение 1.4** Пара  $(\Omega, \mathcal{A})$  называется измеримым пространством, если  $\mathcal{A}$  является  $\sigma$ -алгеброй. Если же  $\mathcal{A}$  - алгебра, то  $(\Omega, \mathcal{A})$  — измеримое пространство в широком смысле.


**Определение 1.5** Вероятностью называется функция  $\mathbb{P}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая свойствам

1.  $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}(A) \geq 0$

2.  $\forall A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j) \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

3.  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

**Определение 1.6** Вероятностным пространством  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  называется измеримое пространство  $(\Omega, \mathcal{A})$ , снабженное вероятностью  $\mathbb{P}$ .

 Кому вообще нужна  $\sigma$ -алгебра событий, и зачем весь этот огород, если можно рассматривать множество всех подмножеств множества  $\Omega$ ? Когда-то кто-то доказал, что в случае очень большого множества элементарных исходов, например, континуального, множество  $2^\Omega$  будет иметь такую крокодилски большую мощность, что вся теория сломается. Таким образом, алгебры нужны для того, чтобы вероятность имела хорошую область определения.

### Свойства вероятности

1.  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

2.  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

3.  $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

4.  $\mathbb{P}(A) \leq 1$

$$5. \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$$

$$6. \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

$$7. \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_k} (-1)^{k+1} \mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k})$$

$$8. \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\overline{A_i}) - \text{неравенство Бонферрони}$$

Второй пункт в определении вероятностной меры нельзя заменить аналогичным с конечными объединением и суммой. Однако если добавить к данному требованию так называемое свойство непрерывности вероятностной меры, т.е

$$\forall B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A} \quad B_{n+1} \subseteq B_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B)$$

, то они вместе будут эквивалентны 2. из определения вероятности.

**Утверждение 1.1**  $\forall A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j) \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \Leftrightarrow$   
 $(\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j)) \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \wedge (\forall B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A} \quad B_{n+1} \subseteq B_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B))$

**Доказательство**

$\Rightarrow$

Обозначим  $C_n = B_n \setminus B_{n+1}$ . Множества  $B, C_1, C_2, \dots$  не имеют общих точек.

$\forall n \quad B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k \cup B$ . Тогда  $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_k)$ . Отсюда следует, что ряд в

правой части сходится, так как имеет конечную сумму.  $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B) + \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(C_k)$ . При  $n \rightarrow \infty$  сумма ряда стремится к нулю как остаточный член ряда из предыдущего выражения. В предельном переходе получаем свойство непрерывности.

$\Leftarrow$

Рассмотрим произвольный набор  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \quad A_i A_j = \emptyset$ .

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right).$$

$$\text{Обозначим } B_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i, \quad B_{n+1} \subseteq B_n \quad \forall n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \mathbb{P}(B_n)) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \blacksquare$$

**Теорема 1.1 (Каратеодори)** Пусть  $(\Omega, \mathcal{A})$  — измеримое пространство в широком смысле, а некоторая функция  $\mathbb{P}$  обладает свойствами вероятностной меры. Тогда на измеримом пространстве  $(\Omega, \sigma(\mathcal{A})) \exists! \mathbb{P}': \forall A \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}'(A)$

**Доказательство** отсутствует  $\blacksquare$



Зачем это нужно? Теорема Каратеодори говорит о том, что любую вероятностную меру, заданную на алгебре, можно однозначно продолжить на  $\sigma$ -алгебру, то есть расширить область ее определения. При этом значения функции на алгебре не изменятся. Теорема будет использоваться при определении интеграла Лебега.

## 2 Условная вероятность. Независимость событий

Рассмотрим произвольное  $B \in \mathcal{A}$ :  $\mathbb{P}(B) > 0$ .

**Определение 2.1** Условной вероятностью события  $A \in \mathcal{A}$  при условии  $B$  называется  $\frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} =: \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A)$

Что это означает на пальцах? Условная вероятность  $\mathbb{P}(A|B)$  — это вероятность того, что произойдет событие  $A$ , если мы точно знаем, что произошло событие  $B$ .



Графически это означает, что, когда произошло событие  $B$ , мы оказались в круге  $B$ . Тогда формула  $\frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}$  есть просто вероятность попасть в  $AB$ .

Из определения следует так называемый «Закон умножения вероятностей»:

$$\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(AB)$$

Легко проверяется, что  $(B, \mathcal{A}_B, \mathbb{P}_B)$ , где  $\mathcal{A}_B = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}$ , так же является вероятностным пространством.

Зачем нужно требование  $\mathbb{P}(B) > 0$ , если можно в случае  $\mathbb{P}(B) = 0$  доопределить условную вероятность нулем как вероятность при условии невозможного события? При таком доопределении нарушится аксиома 3. вероятности  $\mathbb{P}_B$ , поскольку  $\mathbb{P}_B(B)$  по доопределению будет равно 0.

**Определение 2.2** События  $A, B \in \mathcal{A}$  называются независимыми, если

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Для независимых событий

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$

**Пример** Являются ли несовместные события ( $AB = \emptyset$ ) независимыми? Нет, пусть  $A, B \in \mathcal{A}$ :  $\mathbb{P}(A) > 0$ ,  $\mathbb{P}(B) > 0$ . Тогда  $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0$ , что является противоречием. По-простому, если произошло одно из несовместных событий, то второе уже не может произойти, и его условная вероятность равна 0, а не вероятности самого события, что требуется для независимости.

Следующее определение обобщает понятие независимости на произвольное количество событий.

**Определение 2.3** События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называются независимыми в совокупности, если

$$\forall m = 2, \dots, n \quad \forall 1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^m A_{j_k}\right) = \prod_{k=1}^m \mathbb{P}(A_{j_k})$$

**Пример** На примере тетраэдра Бернштейна можно убедиться в том, что попарной независимости событий недостаточно для независимости в совокупности. Рассмотрим тетраэдр, у которого три стороны покрашены в красный, синий и зеленый, а четвертая содержит все три цвета. События  $\{\text{выпадет красный}\}=\{K\}$ ,  $\{\text{выпадет синий}\}=\{C\}$ ,  $\{\text{выпадет зеленый}\}=\{Z\}$  попарно независимы (например, вероятность события  $\{C\} \cap \{K\}$  равна вероятности выпадения четвертой грани, т. е.  $\frac{1}{4}$ , в то время как выпадения каждого цвета равна  $\frac{1}{2}$ ). Однако  $\mathbb{P}(\{C\} \cap \{K\} \cap \{Z\}) = \frac{1}{4} \neq (\frac{1}{2})^3$ .

### 3 Формула полной вероятности. Формула Байеса

**Определение 3.1**  $B_1, \dots, B_n$  образуют полную группу, если выполнены следующие условия:

1.  $\mathbb{P}(B_i) > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$
2.  $B_i B_j = \emptyset \quad (i \neq j)$
3.  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$

**Теорема 3.1** Пусть  $B_1, \dots, B_n$  образуют полную группу. Вероятность события  $A \in \mathcal{A}$  можно вычислить по формуле полной вероятности:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

**Доказательство**

$$A = \bigcup_{i=1}^n AB_i, \quad AB_i \cap AB_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(AB_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

Последний переход следует из закона умножения вероятностей. ■

Первое требование определения полной группы необходимо для возможности определить условную вероятность, второе позволяет разбить множество  $A$  на непересекающиеся части. Третье требование, вообще говоря, можно ослабить, потребовав, чтобы  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i$ . Доказательство при этом не изменится.

**Пример** Проиллюстрировать формулу полной вероятности можно обычным экзаменом:  $A$  - {студент сдал экзамен},  $B_i$  - {студент попал к преподавателю  $i$ }. Как и в любой другой лотерее, можно оценить вероятность попадания к преподавателю  $i$ , то есть  $\mathbb{P}(B_i)$ , а трезво оценивая свои силы можно прикинуть и вероятность сдать тому или иному преподавателю  $\mathbb{P}(A|B_i)$ . Зная все вышеперечисленное, несложно по формуле вычислить вероятность успешной сдачи.

Формула полной вероятности используется для вычисления априорной вероятности, т.е. вероятности события, которое еще не произошло. Пусть теперь  $\mathbb{P}(A) > 0$ . Тогда  $\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(AB_i)}{\mathbb{P}(A)}$ . Используя формулу полной вероятности, получаем формулу Байеса:

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}$$

Формула Байеса используется для вычисления апостериорной вероятности. То есть уже известно, что произошло некоторое событие  $A$ , и нужно вычислить вероятность того, что произошло некоторое  $B_i$ . В примере с экзаменом, например, может быть известно, что студент не сдал экзамен, и хочется вычислить вероятность того, что он сдавал преподавателю «Р».



## 4 Случайные величины

Случайные события — это хорошо, но с события типа «на монетке выпал герб» плохо формализуемы, а мы хотим формальности и математичности. Поэтому вместо всяких событий хочется работать с числами. Вот этим и займемся. При рассмотрении случайных событий мы ввели вероятностное пространство, которое выглядит так:


$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}),$$

где  $\Omega$  — множество элементарных событий,  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра подмножеств множества элементарных событий, а  $\mathbb{P}$  — вероятность. Мы же будем рассматривать теперь тройку

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}),$$

где  $\mathbb{R}$  — действительная прямая,  $\mathcal{B}$  — борелевская  $\sigma$ -алгебра, а  $\mathbb{P}$  — вероятность. Поясним.

**Определение 4.1** *Борелевской  $\sigma$ -алгеброй называется минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все открытые подмножества топологического пространства. Элементы борелевской  $\sigma$ -алгебры называются борелевскими множествами.*

 Мы будем рассматривать только топологическое пространство  $\mathbb{R}$ , так что это стремное словосочетание можно прямо сейчас забыть и понимать открытое множество как открытое множество из матана (все точки внутренние).

**Пример** Покажем, что все «хорошие» множества являются Борелевскими.


1. Все открытые интервалы входят по определению.
2. Отрезок вида  $[a, b]$  входит как  $\overline{(-\infty, a) \cup (b, +\infty)}$ .
3. Точка ходит как вырожденный отрезок  $[a, a]$ .
4. Счетное объединение таких множеств входит по определению.

Теперь формально введем понятие случайной величины (может использоваться сокращение с.в.).

**Определение 4.2** *Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  — вероятностное пространство.*

*Тогда случайной величиной  $\xi$  называется функция  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , измеримая относительно  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ . По-другому,  $\xi$  — случайная величина, если*

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad \xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

 Таким финтом ушами мы, по сути, сопоставили каждому событию какое-то «хорошее» множество на числовой прямой, и можем рассматривать не вероятности событий, а вероятности попадания в эти «хорошие» подмножества числовой прямой.

Введем еще несколько бесполезных определений, которые в дальнейшем использоваться не будут, но знать их не вредно.

**Определение 4.3** С каждой случайной величиной свяжем два вероятностных пространства: первое —  $(\Omega, \mathcal{A}_\xi, \mathbb{P})$  — вероятностное пространство, порожденное  $\xi$ . Здесь  $\mathcal{A}_\xi$  — наименьшая  $\sigma$ -алгебра, для которой выполняется свойство измеримости. Второе —  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_\xi)$ , где  $\mathbb{P}_\xi(B) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}$  и называется распределением вероятностей  $\xi$ .

Идем дальше в сторону упрощения работы со случайностями. Вместо того чтобы рассматривать произвольные борелевские множества, мы будем рассматривать только множества вида  $(-\infty, x)$ . Действительно, интервал  $(a, b)$  получается из полупрямых так:  $(a, b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a]$  Таким образом, мы можем рассматривать случайные величины только на таких множествах. Здесь имеется в виду, что для удовлетворения определению случайной величины достаточно измеримости только на полупрямых, что следует из следующих свойств полного прообраза: прообраз объединения есть объединение прообразов, прообраз пересечения есть пересечение прообразов, прообраз отрицания есть отрицание прообраза. Выше показано, что из полупрямых с помощью этих операций можно получить интервалы, а из интервалов и все  $\mathcal{B}$ .

Теперь несколько полезных утверждений. Пусть  $\xi$  — случайная величина. Тогда  $-\xi$  также случайная величина, так как её прообраз от любой полупрямой является прообразом  $\xi$  от симметричной полупрямой, то есть лежит в  $\mathcal{A}$ .  $\xi + c$  также будет случайной величиной, поскольку её прообразом для любой полупрямой будет прообраз  $\xi$  для полупрямой, сдвинутой на  $c$ , то есть будет лежать в  $\mathcal{A}$ .

**Утверждение 4.1** Пусть  $\xi, \eta$  — случайные величины. Тогда множество  $\{\omega : \xi(\omega) < \eta(\omega)\}$  является событием.

**Доказательство**  $\{\omega : \xi(\omega) < \eta(\omega)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{\omega : \xi(\omega) < r, \eta(\omega) > r\}$ . Заметим, что  $\{\omega : \xi(\omega) < r\}$  является событием. Аналогично для  $\eta$ . Выражение, написанное выше, является счетным объединением пересечений двух событий, то есть событием. ■

Похожими махинациями, а также с использованием этого утверждения, доказывается, что  $\xi^2, \xi + \eta, \xi\eta$  являются случайными величинами. Более того, если  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — с.в., а функция  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  является непрерывной на множестве их значений, то  $\phi(\xi_1, \dots, \xi_n)$  будет случайной величиной. Это не доказывалось.

**Определение 4.4** Рассмотрим вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  и определенную на нем случайную величину  $\xi$ . Тогда её функцией распределения  $F_\xi(x)$  называется функция  $F_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\omega : \xi(\omega) < x) = \mathbb{P}(\xi < x)$$

Запись  $\mathbb{P}(\xi < x)$  является в некотором смысле жаргонной, так как аргументов вероятности должно быть событие из  $\mathcal{A}$ . Но  $\xi < x$  мы в дальнейшем будем отождествлять с объединением элементарных событий, образ которых меньше  $x$ . Из определения случайной величины получаем, что это объединение является событием, поэтому применение к нему функции вероятности корректно.

Функция распределения (сокращение ф.р.) является очень полезной штукой, поскольку имеет достаточно простой вид и несет в себе всю информацию о распределении, то есть однозначно определяет  $\mathbb{P}_\xi$ .

Рассмотрим основные свойства функции распределения:

1.  $F_\xi(x) \in [0, 1]$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_\xi(x) = 1$
4.  $F_\xi(x)$  монотонно не убывает.
5.  $F_\xi(x)$  непрерывна слева.

Вероятность попадания с.в. в полуинтервал  $\mathbb{P}_\xi[a, b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$ . При стремлении  $b \rightarrow a$  получим  $\mathbb{P}(\xi = a) = F_\xi(a+) - F_\xi(a)$ , то есть вероятность попадания в точку равна скачку функции распределения в этой точке.

**Определение 4.5** Точка  $x_0$  называется точкой роста  $F_\xi(x)$ , если  $\forall \epsilon > 0 \quad \mathbb{P}(x_0 - \epsilon \leq \xi < x_0 + \epsilon) > 0$

**Пример** Это очень полезный пример, который будет использоваться в матстате и который очень любят спрашивать. Пусть  $\xi$  — случайная величина.  $\eta = F_\xi(\xi)$ . Чему равна  $F_\eta(x)$ ? По определению  $F_\eta(x) = \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(F_\xi(\xi) < x) = \mathbb{P}(\xi < F_\xi^{-1}(x)) = F_\xi(F_\xi^{-1}(x)) = x$ . Вообще, тут было бы неплохо сказать, что  $F_\xi$  непрерывна и строго монотонна, чтобы со спокойной совестью использовать обратную функцию. Таким образом  $\eta$  имеет равномерное распределение.

## 5 Понятие меры и интеграла Лебега

Мера Лебега вводится потихонечку: сначала для полуинтервала, потом для борелевских множеств, а затем и для всей числовой прямой. Основная идея — обобщение понятия длины на страшные, ненормальные множества.

Вспомним сначала аксиомы меры  $\mu$  из функана (хех): это функция на множестве  $B$  (в нашем случае  $[0, 1)$ ),  $\mu: B \rightarrow \mathbb{R}$  со свойствами

1.  $\forall A \in B \quad \mu(A) \geq 0$
2.  $\forall A_1, A_2, \dots \in B: A_i A_j = \emptyset \quad (i \neq j) \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

Введем сначала меру на борелевских множествах полуинтервала  $[0, 1)$ , то есть на  $\mathcal{B}_{[0,1)}$ . Итак,

- На полуинтервалах  $(a, b)$  введем меру как  $\mu_{[0,1)}((a, b)) = b - a$
- Тогда мера одной точки равна нулю, и мы можем не обращать внимание на концы множеств
- Любое конечное объединение, пересечение, отрицание таких интервалов есть конечное объединение интервалов (и, возможно, конечное число точек-концов). На них введем меру как сумму мер этих интервалов.
- Теперь осталось определить меру на бесконечных объединениях/пересечениях. Для этого воспользуемся теоремой Каратеодори, согласно которой можно продолжить меру на  $\sigma$ -алгебре.

Аналогичным образом определим меру  $\mu_{[k, k+1)}$  на всех полуинтервалах вида  $[k, k+1)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Осталось доопределить меру на всей  $\mathcal{B}$ .  $\forall A \in \mathcal{B}$

$$\mu(A) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mu_{[i, i+1)}(A \cap [i, i+1))$$

Теперь введем интеграл интеграл Лебега (интеграл по мере Лебега). В отличие от интеграла Римана, где происходит разбиение области определения и выбирается значение функции из образа элемента разбиения, в интеграле Лебега разбивается область значений (то есть  $Oy$ ), и некоторое значение из элемента разбиения умножается на меру прообраза этого элемента, затем все благополучно складывается. Введем теперь это формально.

Будем рассматривать функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что  $\forall c \in \mathbb{R} \quad \{x: f(x) < c\} \in \mathcal{B}$ , то есть прообразы полупрямых являются измеримыми множествами. А как было показано выше, отсюда следует, что прообразы всех борелевских множеств являются измеримыми.

Введем сначала понятие индикатора. Индикатор события  $A$  — это случайная величина, принимающая значение 1, если событие произошло, и 0 в противном случае. Таким образом

$$\mathbb{1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Определим интеграл Лебега на полуинтервале  $[0, 1)$

- Пусть функция имеет вид  $f(x) = \sum_{i=1}^k y_i \mathbb{1}(A_i)$  ( $i \neq j \Rightarrow A_i A_j = \emptyset$ ,  $\bigcup_{i=1}^k A_i = [0, 1)$ ). Функции такого вида называются финитными. В этом случае

$$\int_0^1 f(x) \mu(dx) = \sum_{i=1}^k y_i \mu(A_i)$$

То есть берется мера кусочка, на котором функция принимает значение  $y_i$ , и умножается на это значение. Получается нечто, напоминающее площадь под графиком.

- Пусть теперь  $f(x) \geq 0$  на  $[0, 1)$ . Будем приближать функцию финитной. Возьмем отрезок области значений  $[0, n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Разобьем этот отрезок на  $n2^n$  кусочков  $[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n2^n$ . На каждом кусочке скажем, что значение функции равно  $\frac{k-1}{2^n}$ . Осталось приблизить  $[n, +\infty)$ . Будем считать это одной частью, на которой функция принимает значение  $n$ . Осталось устремить  $n$  к бесконечности: тогда, так как размер каждого кусочка первой части равен  $\frac{1}{2^n}$ , их длина станет бесконечно малой, а та часть, которую мы «обрубили» сверху (то есть  $[n, +\infty)$ ), уйдет в бесконечность. Итак,

$$\int_0^1 f(x) \mu(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mu \left( \left\{ x : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \right) + n \mu(\{x : f(x) \geq n\}) \right]$$

- Остался случай произвольной функции  $f(x)$ . Разобьем ее на две: одна функция совпадает с  $f(x)$  там, где та положительна, и равняется 0 в остальных случаях, другая равна  $|f(x)|$  там, где  $f(x)$  отрицательна, и 0 иначе.

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\}, \quad f^-(x) = -\min\{0, f(x)\}$$

Для каждой из этих функций интеграл определен по предыдущему пункту. Пользуясь тем, что  $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ , определим интеграл так:

$$\int_0^1 f(x) \mu(dx) = \int_0^1 f^+(x) \mu(dx) - \int_0^1 f^-(x) \mu(dx)$$

В случае, если оба интеграла в правой части расходятся, интеграл от  $f(x)$  не определен. Так как  $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ , сходимость интеграла Лебега от модуля функции (абсолютная сходимость) эквивалентна сходимости интеграла от самой функции (то есть обычной сходимости). Это следует из того, что интеграл сходится только в случае конечности обоих интегралов правой части (иначе он не определен), откуда следует конечность их суммы и разности. Таким образом, для интеграла Лебега не существует условно сходящихся функций.

Аналогично вводим интеграл на каждом полуинтервале  $[i, i+1)$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ . Тогда на всей прямой интеграл по множеству  $A \subset \mathbb{R}$  будет определяться так:

$$\int_A f(x) \mu(dx) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \int_{A \cap [i, i+1)} f(x) \mu(dx)$$

**Пример** С помощью интеграла Лебега можно считать интегралы от функций, об интегрировании которых раньше было страшно даже подумать. Например, от функции Дирихле:

$$D_{[0,1)}(x) = \begin{cases} 1, x \in [0, 1) \setminus \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Данная функция является финитной, а именно  $D_{[0,1)}(x) = \mathbb{1}([0, 1) \setminus \mathbb{Q})$ . Поэтому по первому пункту

$$\int_0^1 D_{[0,1)}(x) \mu(dx) = 1$$

В дальнейшем  $\mu(dx)$  будет опускаться обозначаться просто как  $dx$  или  $dy$  чтобы подчеркнуть, что считается именно интеграл Лебега.

## 6 Виды распределений

Распределения случайных величин можно разделить на 3 типа: непрерывные, дискретные и сингулярные.

**Определение 6.1** Случайная величина  $\xi$  называется абсолютно непрерывной, если существует интегрируемая функция  $p_\xi(x) \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  такая, что функцию распределения  $\xi$  является почти всюду (за исключением не более, чем счетного числа точек) дифференцируемой функцией и представима в виде

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(y) dy$$

Отсюда следует, что функция распределения непрерывна на  $\mathbb{R}$ .  $p_\xi(x)$  называется плотностью распределения, и почти всюду выполнено  $p_\xi(x) = F'_\xi(x)$ . Плотность, вообще говоря, определена не однозначно.

**Определение 6.2** Случайная величина  $\xi$  называется дискретной, если множество точек роста не более, чем счетно, но распределение не является сингулярным, или, другими словами  $\exists B = \{x_1, x_2, \dots\}: \mathbb{P}(\xi \in B) = 1$ .

**Определение 6.3** Случайная величина  $\xi$  называется сингулярным, если  $F_\xi$  непрерывна, и  $\exists B \in \mathcal{B}: \mu(B) = 0$ ,  $\mathbb{P}(\xi \in B) = 1$ , то есть множество значений случайной величины имеет меру 0, но вероятность попасть в каждую точку этого множества так же нулевая.

Пара слов о жизненном смысле определений: непрерывная случайная величина имеет областью значений континуальное множество, при это вероятность попасть в отдельно взятую точку нулевая. Пример: равномерное распределение по отрезку. Плотность же отражает вероятность попасть в ту или иную область: интеграл по области равен это вероятности. Дискретная случайная величина принимает конечное или счетное множество значений, вследствие этого имеет ступенчатую функцию распределения, например, бросок монетки имеет дискретное распределение. Сингулярное распределение — это крокодил, который не встречается в жизни и будет рассмотрен отдельно.

**Утверждение 6.1** Дискретная случайная величина имеет не более, чем счетное число скачков.

**Доказательство** Из свойств функции распределения следует, что дискретная величина имеет не больше двух скачков величины больше  $\frac{1}{2}$ . Аналогично, скачков величины больше  $\frac{1}{3}$  не больше 3. То есть скачков величины больше  $\frac{1}{n}$  не более  $n$ . Для любого скачка можно указать  $n \in \mathbb{N}$  такое, что величина, этого скачка больше  $\frac{1}{n}$ . Значит, каждому скачку можно поставить в соответствие  $n$ , множество которых счетно. При этом для каждого  $n$  существует не более чем счетное число скачков, ему соответствующих (величины  $> \frac{1}{n}$ ). А так как объединение не более, чем счетного числа не более, чем счетных множеств, не более, чем счетно, получаем требуемое. ■

**Пример** Для полного счастья приведем пример сингулярной случайной величины. Пусть функция распределения - так называемая лестница Кантора (см. рисунок).  $F_{\xi}(x)$



Посчитаем меру множества, на котором функция константа, то есть точки этого множества не будут точками роста: сначала это одна ступенька длины  $1/3$ , потом две длины  $1/9$ , и т.д.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 1$$

Тогда множество точек роста имеет меру 0 в силу свойства аддитивности меры.

Вообще говоря, существуют менее изысканные примеры сингулярных распределений. Например, при стрельбе из лука в круглую мишень распределение будет сингулярным, если стрелок попадает только в точки одной прямой. В самом деле, двумерная мера прямой равна 0, как и вероятность попасть в каждую отдельную точку.

**Теорема 6.1 (Лебега)** Любую случайную величину можно представить в виде суммы дискретной, абсолютно непрерывной и сингулярной случайной величины. То есть

$$F(x) = \alpha_d F_d(x) + \alpha_c F_c(x) + \alpha_s F_s(x), \quad \alpha_d + \alpha_c + \alpha_s = 1$$

**Доказательство** вышло и не вернулось ■



## 7 Характеристики случайных величин

Математическое ожидание (обозначается  $\mathbb{E}$ ) обобщает понятие среднего арифметического для произвольной случайной величины и показывает, какие значения в среднем принимает случайная величина. Оно, как и интеграл Лебега, вводится в несколько этапов. В этом определении вероятность  $\mathbb{P}$  играет роль Лебеговой меры  $\mu$ .

- Если  $\xi(\omega) = \sum_{i=1}^k x_i \mathbb{1}(A_i)$  ( $i \neq j \Rightarrow A_i A_j = \emptyset$ ,  $\bigcup_{i=1}^k A_i = \Omega$ ).

$$\mathbb{E}\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega) \equiv \sum_{i=1}^k x_i \mathbb{P}(\{\omega: \xi(\omega) = x_i\}) = \sum_{i=1}^k x_i \mathbb{P}(A_i)$$

- $\xi(\omega) \geq 0$ . В этом случае аналогично интегралу Лебега

$$\mathbb{E}\xi = \int_{\Omega} \xi d\mathbb{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{P}\left(\left\{\omega: \frac{k-1}{2^n} \leq \xi(\omega) < \frac{k}{2^n}\right\}\right) + n \mathbb{P}(\{\omega: \xi(\omega) \geq n\}) \right]$$

- Для произвольной  $\xi(\omega)$  вводятся

$$\xi^+(\omega) = \max\{0, \xi(\omega)\}, \quad \xi^-(\omega) = -\min\{0, \xi(\omega)\}$$

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi^+ - \mathbb{E}\xi^-$$

Вспомним, что любая случайная величина  $\xi$  индуцирует вероятностное пространство  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\xi}, \mathbb{P}_{\xi})$ . Тогда, поскольку  $\mathbb{P}_{\xi}(dx)$  есть вероятность попасть в  $dx$ , выразим ее через функцию распределения  $\mathbb{P}_{\xi}(dx) = F_{\xi}(x+dx) - F_{\xi}(x) = dF_{\xi}(x)$ . Тогда перепишем матожидание в более привычной форме

$$\mathbb{E}\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathbb{P}_{\xi}(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{\xi}(x)$$

Перечислим некоторые свойства математического ожидания:

1.  $\mathbb{E}(\xi + a) = \mathbb{E}\xi + a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
2.  $\mathbb{E}(a\xi) = a\mathbb{E}\xi \quad \forall a \in \mathbb{R}$
3.  $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$  (здесь подразумевается, что существуют два из трех математических ожидания, из чего следует существование третьего)

**Пример** Рассмотрим дискретную случайную величину  $\xi$ , которая принимает значения  $n$  с вероятностью  $\frac{c}{n^2}$  ( $c = \frac{6}{\pi^2}$ ). По определению

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{c}{n^2}$$

Данный ряд, очевидно, расходится. Ситуацию не спасет даже рассмотрение случайной величины  $\eta$ , принимающей значения  $\pm n$  с вероятностью  $\frac{c}{2n^2}$ , которая имеет среднее значение 0, поскольку  $\mathbb{E}\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{2n}$ , что не определено, поскольку интегралы Лебега от  $\eta^+$  и  $\eta^-$  расходятся.

**Пример** Другим примером является распределение Коши с плотностью  $p_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ . График этой функции симметричен относительно 0 и похож на горку, из чего методом пристального взгляда можно сделать вывод, что средним значением должно быть 0. Однако  $\int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{\xi}(x) dx$  расходится, поэтому математического ожидания не существует.

**Определение 7.1** Квантилью случайной величины  $\xi$  порядка  $q$  называется величина  $l_{\xi}(q)$ :

$$l_{\xi}(q): \begin{cases} \mathbb{P}(\xi \leq l_{\xi}(q)) \geq q \\ \mathbb{P}(\xi \geq l_{\xi}(q)) \geq 1 - q \end{cases}$$

В случае  $q = \frac{1}{2}$  квантиль называется медианой и обозначается  $\text{med } \xi$ .

Если  $q = \frac{1}{4}$ , то  $l_{\xi}$  называется квартиллю, если  $q = \frac{1}{10}$ , дециллю, а если  $q = \frac{1}{100}$  — перцентиллю.

Жизненный смысл медианы заключается в том, что она является точкой, вероятность попасть левее которой равна вероятности попасть правее нее. Аналогично можно сказать про квантиль любого порядка. Квантиль определена не единственным образом: пусть  $\xi$  принимает значения  $\{0, 1\}$  с вероятностями  $\frac{1}{2}$ . Тогда медианой  $\xi$  может быть любая точка из отрезка  $[0, 1]$ .

С матожиданием и медианой связана задача о «деловых людях». (здесь будет ссылка)