



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по заданию 1 курсовой работы

«Динамические системы с дискретным временем»

Студент 315 группы
Д. М. Сотников

Руководитель практикума
Д. А. Алимов

1 Постановка задачи

Даны две динамические системы с дискретным временем

$$u_{t+1} = r\sqrt{u_t}(1 - au_t^3), \quad (1)$$

$$u_{t+1} = r\sqrt{u_t}(1 - au_{t-1}^3), \quad (2)$$

где $r > 0$, $a > 0$, $u_t \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{N}$.

Для этих систем нужно

- Найти неподвижные точки.
- Исследовать их на устойчивость.
- Проверить существование циклов длины 2 и 3.
- При наличии цикла длины 3 построить бифуркационную диаграмму.
- Построить график показателя Ляпунова в зависимости от значений параметра.
- Для системы (2) проверить возможность возникновения бифуркации Неймарка-Сакера.

2 Интерпретация и анализ параметров

Система (1) описывает изменение численности некоторой популяции в дискретном времени. В условиях отсутствия внутривидовой конкуренции численность растет как $r\sqrt{u_t}$, конкуренция же описывается функцией $(1 - au_t^3)$.

Таким образом параметр r отвечает за естественный рост популяции, параметр a описывает конкуренцию. Обозначим $f(u) = r\sqrt{u}(1 - au^3)$. Очевидно, что численность популяции неотрицательна, поэтому $(1 - au_t^3) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{N}$, откуда

$$0 \leq u_t \leq u_{max} = a^{-\frac{1}{3}} \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Отсюда же имеем ограничение $f(u_t) \leq u_{max}$. Функция f достигает максимум в точке $u_0 = (7a)^{-\frac{1}{3}} \in [0, u_{max}]$, при этом $f_{max} = f(u_0) = \frac{6r}{7}(7a)^{-\frac{1}{6}}$.

Из условия $f_{max} \leq u_{max}$ получаем

$$0 < a \leq a_{max} = 7 \left(\frac{7}{6r} \right)^6.$$

Для второго уравнения введем функцию $g(u, v) = r\sqrt{v}(1 - av^3)$. Система (2) является системой с запаздыванием, ее интерпретация абсолютно аналогична с единственным отличием: в конкуренции участвует предыдущее поколение u_{t-1} . Значения $u_1, u_2 \in [0, u_{max}]$ задаются как начальное условие. Так как для любых допустимых начальных условий требуется $g(u_1, u_2) \leq u_{max}$, а максимальное значение g равно $r\sqrt{u_{max}} = ra^{-\frac{1}{6}}$, имеем следующее ограничение

$$0 < a \leq a_{max} = \frac{1}{r^6}.$$

Заметим, что график функций f, g при $r = 1$ и произвольном $a \in \left[0, 7\left(\frac{7}{6}\right)^6\right]$ совпадает с графиком при произвольном $r > 0$ и $a_1 = \frac{a}{r^6} \in \left[0, 7\left(\frac{7}{6r}\right)^6\right]$ с точностью до растяжения в r^2 раз. Это следует из того, что при таких значениях параметров

$$f(r^2u) = r^2f(u).$$

Для функции g этот эффект рассматривается аналогично. Таким образом в этих случаях фазовые портреты системы будут представлять собой одну и ту же топологическую сущность, поэтому достаточно рассмотреть случай $r = 1$. Окончательно имеем

$$u_{t+1} = f(u_t) = \sqrt{u_t}(1 - au_t^3), \quad (1')$$

$$u_{t+1} = g(u_t, u_{t-1}) = \sqrt{u_t}(1 - au_{t-1}^3), \quad (2')$$

$$u_t \in [0, u_{max}], \quad u_{max} = a^{-\frac{1}{3}}.$$

Для первой системы

$$0 < a \leq a_{max} = 7 \left(\frac{7}{6}\right)^6 \approx 17.65.$$

Для второй

$$0 < a \leq 1.$$

3 Анализ системы 1

3.1 Неподвижные точки

Неподвижные точки обоих систем совпадают и удовлетворяют уравнению

$$u = \sqrt{u}(1 - au^3).$$

Одно из решений — точка $u = 0$. Эта неподвижная точка является неустойчивой, поскольку вблизи нуля функция f эквивалентна \sqrt{u} , и, как видно из диаграммы Ламерая, u будет отдаляться от нуля.

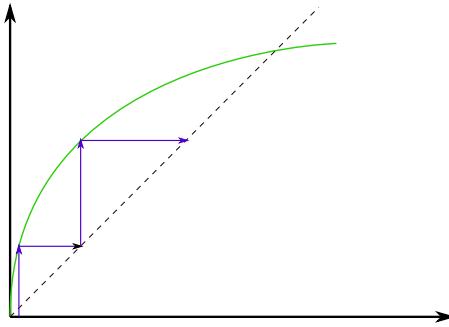


Рис. 1: Неустойчивость точки $u = 0$.

Нетривиальное положение равновесия удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{u} = (1 - au^3).$$

Так как функция $h(u) = 1 - au^3 - \sqrt{u}$ имеет на концах отрезка $[0, u_{max}]$ разные знаки, то это уравнение имеет решение u^* , а так как $h'(u) = -3au^2 - \frac{1}{2\sqrt{u}} < 0$, это решение единственное.

Устойчивость u^* зависит от значения $f'_u = \frac{1 - 7au^3}{2\sqrt{u}}$ в этой точке. Находя численно значения u^* и подставляя их в f'_u , можно сделать вывод, что u^* асимптотически устойчива при $0 < a < a_0$ и неустойчива при $a_0 < a < a_{max}$. Значение a_0 примерно равно 3.8127. Ниже приведены иллюстрации численных расчетов.

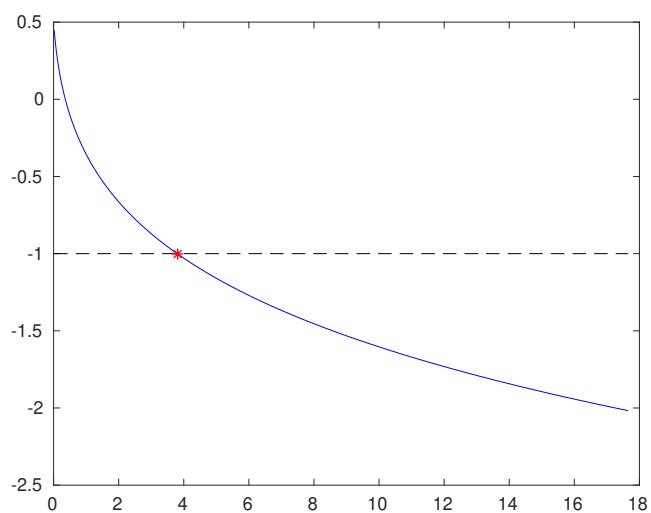


Рис. 2: Значения $f'_u(u^*)$.

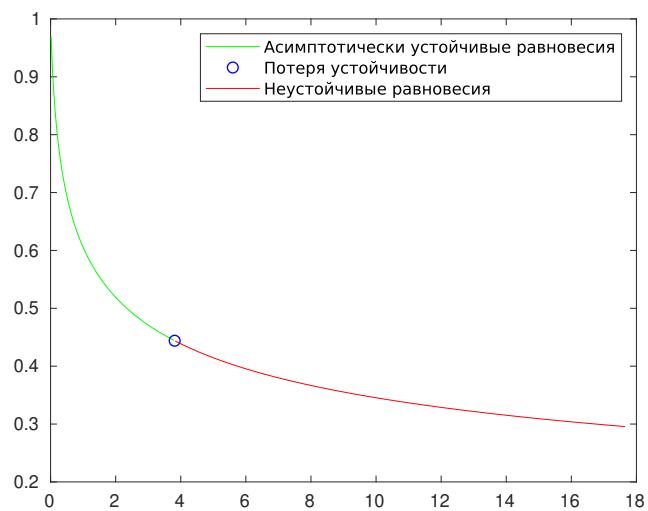


Рис. 3: Устойчивость неподвижной точки.

3.2 Возникновение циклов

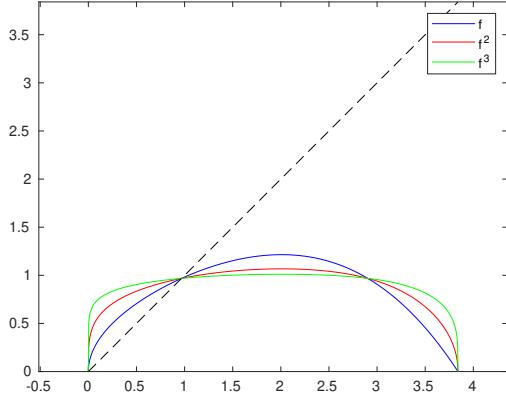


Рис. 4: $a = 0.001$.

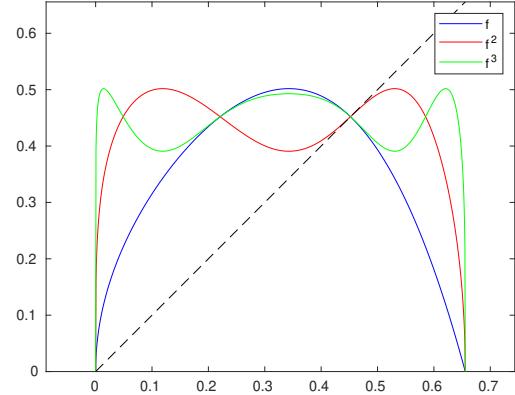


Рис. 5: $a = 0.2a_{max}$.

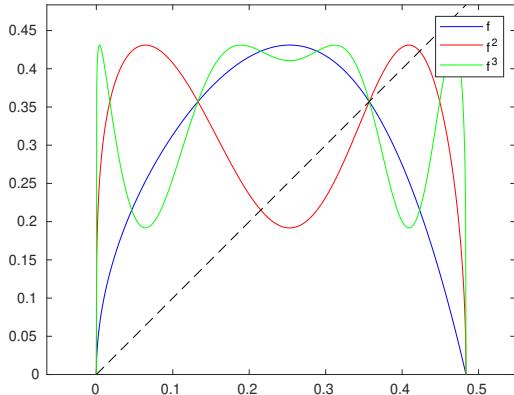


Рис. 6: $a = 0.5a_{max}$.

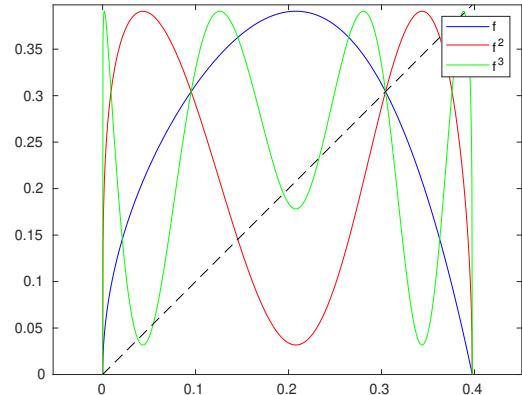


Рис. 7: $a = 0.9a_{max}$.

На данной иллюстрации приведены графики f , $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, пересечения которых с прямой $y = u$ являются неподвижными точками, элементами циклов длины 2 и элементами циклов длины 3 соответственно. Видно, что по мере увеличения параметра a сначала появляется цикл длины 2, затем добавляются два цикла длины 3.

Построим бифуркационную диаграмму системы: при каждом значении параметра a выпустим траекторию из $0.1u_{max}$, вычислим 100 итераций для стабилизации системы, затем следующие 100 итераций отложим на диаграмме по оси ординат.

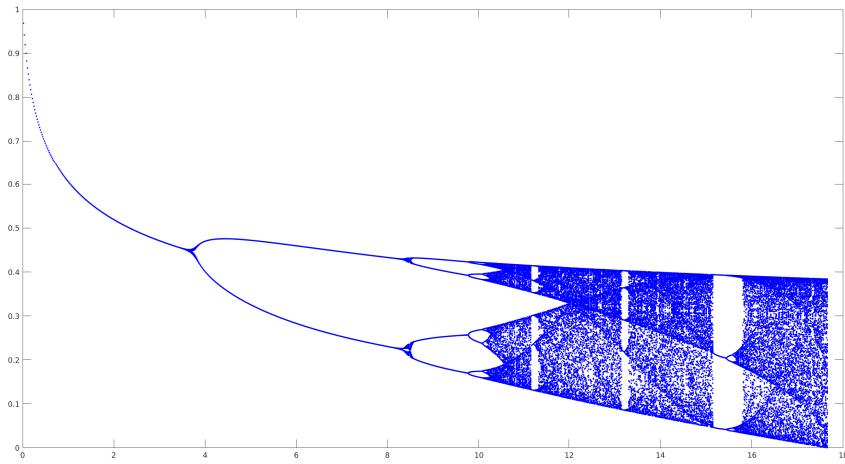


Рис. 8: Бифуркационная диаграмма при $a \in [0, a_{max}]$.

До момента a_0 неподвижная точка является глобально устойчивой, затем при $a = a_1$ устойчивость теряется и появляется устойчивый цикл длины 2. При более детальном рассмотрении диаграммы на сегменте $[15, 16]$ обнаруживается устойчивый цикл длины 3.

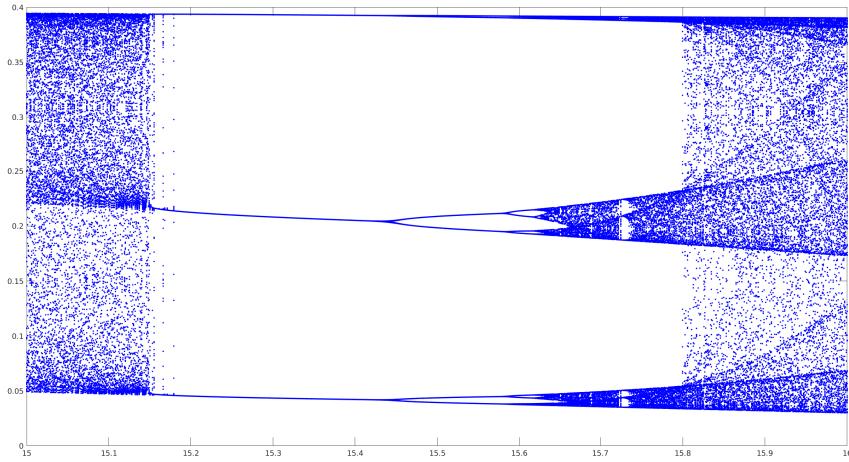


Рис. 9: Бифуркационная диаграмма при $a \in [15, 16]$.

Найдем эти циклы при параметрах $a = 6$ и $a = 15.3$.

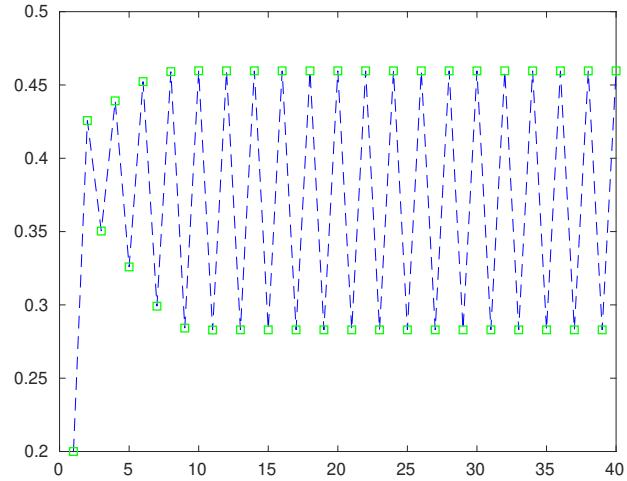


Рис. 10: Устойчивый цикл длины 2.

Численно находятся точки цикла $u_1 \approx 0.283$, $u_2 \approx 0.4596$.

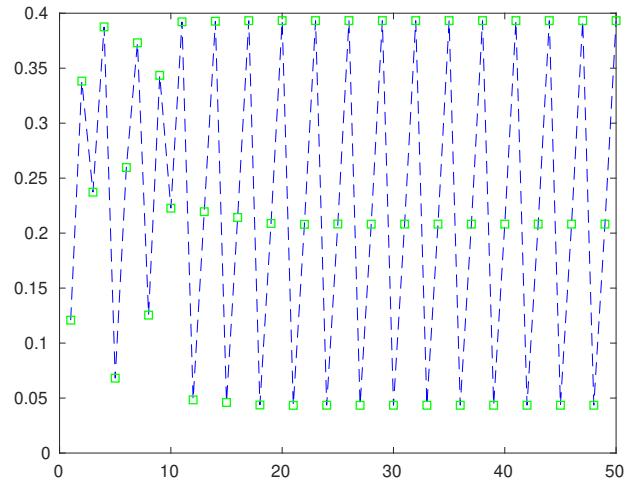


Рис. 11: Устойчивый цикл длины 3.

Аналогично находим точки $u_1 \approx 0.0435$, $u_2 \approx 0.2082$, $u_3 \approx 0.3933$ для цикла длины 3.

3.3 Показатель Ляпунова

Показатель Ляпунова для траектории — величина, равная

$$h(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f'(u_1)| + \ln |f'(u_2)| + \dots + \ln |f'(u_n)|}{n},$$

является мерой хаотичности системы: при отрицательных значениях h близкие траектории приближаются друг другу, при положительных — разбегаются, несмотря на сколь угодно малое отклонение в начальный момент. При фиксированном значении параметра показатели Ляпунова для разных начальных условий отличаются незначительно, поэтому можно построить зависимость $h(u)$ от a , где траектория u выпускается из $0.1u_{max}$.

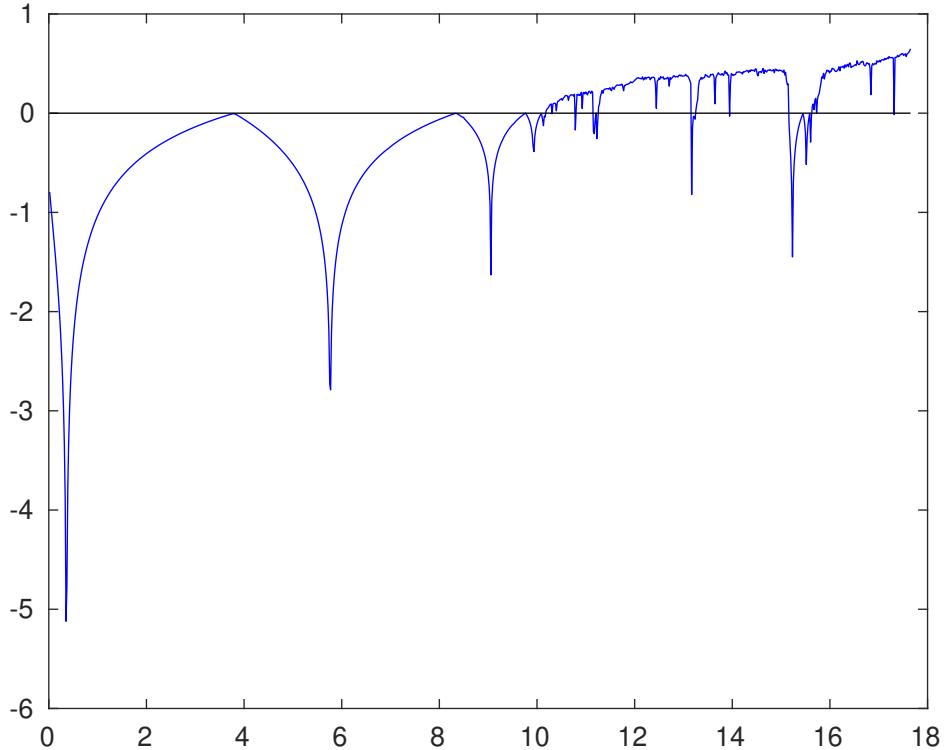


Рис. 12: График показателя Ляпунова.

Из графика видно, что при малых значениях параметра a показатель Ляпунова отрицателен, что соответствует «устойчивым» состояниям системы, как, например, $a = 6$, при котором возникал устойчивый цикл длины 2. Отметим также, что при $a \approx 15$ показатель Ляпунова отрицателен, и именно в этой полосе значений на бифуркационной диаграмме исчезало хаотическое поведение и появлялся устойчивый цикл. Нули показателя Ляпунова соответствуют точкам бифуркации на диаграмме. При значениях a , на которых показатель Ляпунова положителен, в системе возникает хаос.

4 Анализ системы 2

Система

$$u_{t+1} = g(u_t, u_{t-1}) = \sqrt{u_t}(1 - au_{t-1}^3),$$

как говорилось ранее, является системой с запаздыванием и эквивалентна следующей двумерной системе:

$$\begin{cases} u_{t+1} = g(u_t, v_t) \\ v_{t+1} = u_t \end{cases} \quad (3)$$

4.1 Неподвижные точки

Неподвижными точками системы являются $u = 0$ и $u = u^*$ — неподвижные точки системы 1. Неустойчивость $u = 0$ доказывается аналогично случаю одномерной системы. Для исследования устойчивости $u = u^*$ найдем собственные значения матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$a_0 = \left. \frac{\partial g(u, v)}{\partial u} \right|_{(u^*, u^*)}, \quad a_1 = \left. \frac{\partial g(u, v)}{\partial v} \right|_{(u^*, u^*)}.$$

Легко вычисляется $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = -3a(u^*)^{5/2}$, и матрица

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3a(u^*)^{5/2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристический многочлен матрицы имеет вид

$$\lambda^2 - \frac{\lambda}{2} + 3a(u^*)^{5/2}.$$

Отсюда собственные значения матрицы равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} - 12a(u^*)^{5/2}}.$$

Поскольку u^* не вычисляется аналитически, найдем численно зависимость $|\lambda_{1,2}|$ от a .

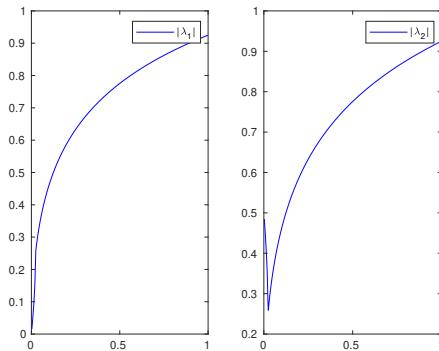


Рис. 13: График $|\lambda_{1,2}|$.

Из графика видно, что всюду на допустимом множестве значений a выполнено условие асимптотической устойчивости

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, 2.$$

Итак, точка $u = 0$ является неустойчивым положением равновесия, $u = u^*$ асимптотически устойчива при любых $a \in [0, 1]$.

4.2 Существование циклов

Покажем, что циклов длины 2 в системе не существует. Действительно, пусть u, v образуют цикл длины 2. Тогда они удовлетворяют условию

$$\begin{cases} v = g(u, v) = \sqrt{u}(1 - av^3) \\ u = g(v, u) = \sqrt{v}(1 - au^3) \end{cases}$$

Деля одно уравнение на другое и разделяя переменные, получим

$$\frac{u^{\frac{3}{2}}}{1 - au^3} = \frac{v^{\frac{3}{2}}}{1 - av^3},$$

что эквивалентно уравнению $w(x) = w(y)$, $x \neq y$, где $w(x) = \frac{x}{1 - ax^2}$ при $x, y \in [0, a^{-\frac{1}{2}})$. Но это невозможно, поскольку $w'(x) = \frac{1+ax^2}{1-ax^2} > 0$, и w строго возрастает на этом сегменте.

Аналитическая проверка циклов длины 3 затруднительна, однако из асимптотической устойчивости точки и из бифуркационной диаграммы можно предположить, что точка $u = u^*$ глобально устойчива, поэтому циклов длины 3. система, скорее всего, иметь так же не будет.

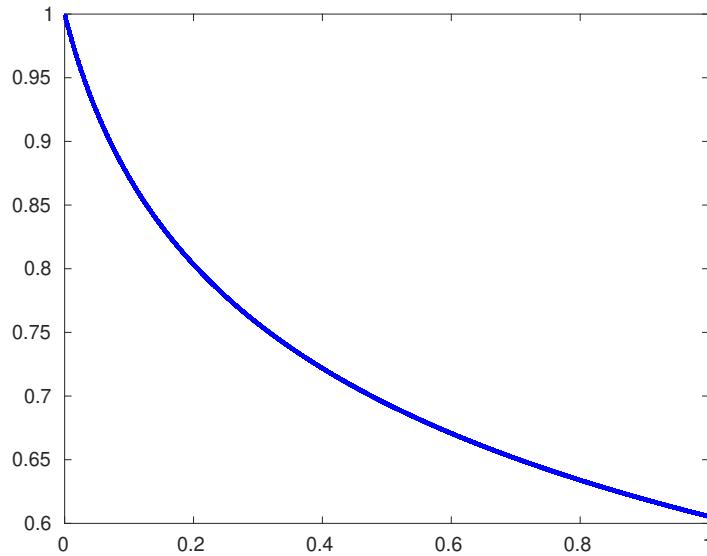


Рис. 14: Бифуркационная диаграмма системы

4.3 Бифуркация Неймарка-Сакера

При анализе устойчивости системы было показано, что собственные значения матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

не превосходят по модулю единицу при любых допустимых a . Отсюда можно сделать вывод, что возникновение бифуркации Неймарка-Сакера в данной системе невозможно.

Список литературы

- [1] Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии.
М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.