



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Отчёт по заданию 1 курсовой работы

## «Динамические системы с дискретным временем»

*Студент 315 группы*  
Д. М. Сотников

*Руководитель практикума*  
Д. А. Алимов

## 1 Постановка задачи

Даны две динамические системы с дискретным временем

$$u_{t+1} = r\sqrt{u_t}(1 - au_t^3), \quad (1)$$

$$u_{t+1} = r\sqrt{u_t}(1 - au_{t-1}^3), \quad (2)$$

где  $r > 0$ ,  $a > 0$ ,  $u_t \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{N}$ .

Для этих систем нужно

- Найти неподвижные точки.
- Исследовать их на устойчивость.
- Проверить существование циклов длины 2 и 3.
- При наличии цикла длины 3 построить бифуркационную диаграмму.
- Построить график показателя Ляпунова в зависимости от значений параметра.
- Для системы (2) проверить возможность возникновения бифуркации Неймарка-Сакера.

## 2 Интерпретация и анализ параметров

Система (1) описывает изменение численности некоторой популяции в дискретном времени. В условиях отсутствия внутривидовой конкуренции численность растет как  $r\sqrt{u_t}$ , конкуренция же описывается функцией  $(1 - au_t^3)$ .

Таким образом параметр  $r$  отвечает за естественный рост популяции, параметр  $a$  описывает конкуренцию. Обозначим  $f(u) = r\sqrt{u}(1 - au^3)$ . Очевидно, что численность популяции неотрицательна, поэтому  $(1 - au_t^3) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{N}$ , откуда

$$0 \leq u_t \leq u_{max} = a^{-\frac{1}{3}} \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Отсюда же имеем ограничение  $f(u_t) \leq u_{max}$ . Функция  $f$  достигает максимум в точке  $u_0 = (7a)^{-\frac{1}{3}} \in [0, u_{max}]$ , при этом  $f_{max} = f(u_0) = \frac{6r}{7}(7a)^{-\frac{1}{6}}$ .

Из условия  $f_{max} \leq u_{max}$  получаем

$$0 < a \leq a_{max} = 7 \left( \frac{7}{6r} \right)^6.$$

Для второго уравнения введем функцию  $g(u, v) = r\sqrt{v}(1 - av^3)$ . Система (2) является системой с запаздыванием, ее интерпретация абсолютно аналогична с единственным отличием: в конкуренции участвует предыдущее поколение  $u_{t-1}$ . Значения  $u_1, u_2 \in [0, u_{max}]$  задаются как начальное условие. Так как для любых допустимых начальных условий требуется  $g(u_1, u_2) \leq u_{max}$ , а максимальное значение  $g$  равно  $r\sqrt{u_{max}} = ra^{-\frac{1}{6}}$ , имеем следующее ограничение

$$0 < a \leq a_{max} = \frac{1}{r^6}.$$

Заметим, что график функций  $f, g$  при  $r = 1$  и произвольном  $a \in [0, 7(\frac{7}{6})^6]$  совпадает с графиком при произвольном  $r > 0$  и  $a_1 = \frac{a}{r^6} \in [0, 7(\frac{7}{6r})^6]$  с точностью до растяжения в  $r^2$  раз. Это следует из того, что при таких значениях параметров

$$f(r^2u) = r^2f(u).$$

Для функции  $g$  этот эффект рассматривается аналогично. Таким образом в этих случаях фазовые портреты системы будут представлять собой одну и ту же топологическую сущность, поэтому достаточно рассмотреть случай  $r = 1$ . Окончательно имеем

$$u_{t+1} = f(u_t) = \sqrt{u_t}(1 - au_t^3), \quad (1')$$

$$u_{t+1} = g(u_t, u_{t-1}) = \sqrt{u_t}(1 - au_{t-1}^3), \quad (2')$$

$$u_t \in [0, u_{max}], \quad u_{max} = a^{-\frac{1}{3}}.$$

Для первой системы

$$0 < a \leq a_{max} = 7 \left(\frac{7}{6}\right)^6 \approx 17.65.$$

Для второй

$$0 < a \leq 1.$$

### 3 Анализ системы 1

#### 3.1 Неподвижные точки

Неподвижные точки обоих систем совпадают и удовлетворяют уравнению

$$u = \sqrt{u}(1 - au^3).$$

Одно из решений — точка  $u = 0$ . Эта неподвижная точка является неустойчивой, поскольку вблизи нуля функция  $f$  эквивалентна  $\sqrt{u}$ , и, как видно из диаграммы Ламерая,  $u$  будет отдаляться от нуля.

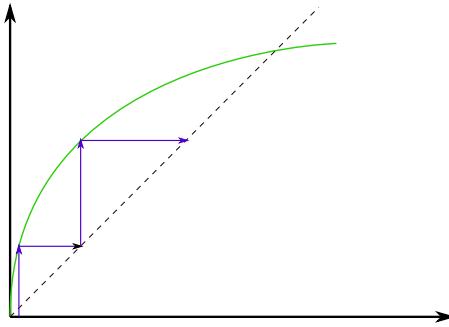


Рис. 1: Неустойчивость точки  $u = 0$ .

Нетривиальное положение равновесия удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{u} = (1 - au^3).$$

Так как функция  $h(u) = 1 - au^3 - \sqrt{u}$  имеет на концах отрезка  $[0, u_{max}]$  разные знаки, то это уравнение имеет решение  $u^*$ , а так как  $h'(u) = -3au^2 - \frac{1}{2\sqrt{u}} < 0$ , это решение единственное.

Устойчивость  $u^*$  зависит от значения  $f'_u = \frac{1 - 7au^3}{2\sqrt{u}}$  в этой точке. Находя численно значения  $u^*$  и подставляя их в  $f'_u$ , можно сделать вывод, что  $u^*$  асимптотически устойчива при  $0 < a < a_0$  и неустойчива при  $a_0 < a < a_{max}$ . Значение  $a_0$  примерно равно 3.8127. Ниже приведены иллюстрации численных расчетов.

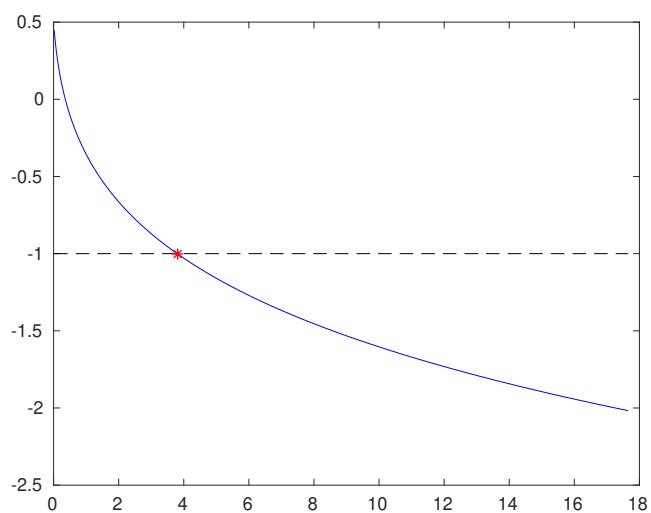


Рис. 2: Значения  $f'_u(u^*)$ .

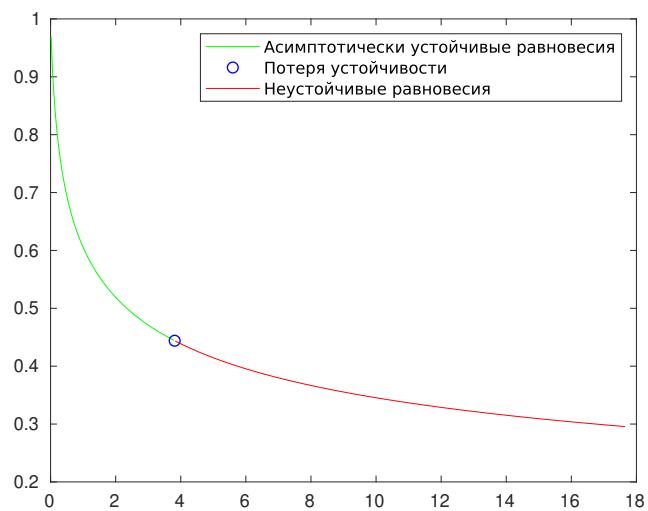


Рис. 3: Устойчивость неподвижной точки.

### 3.2 Возникновение циклов

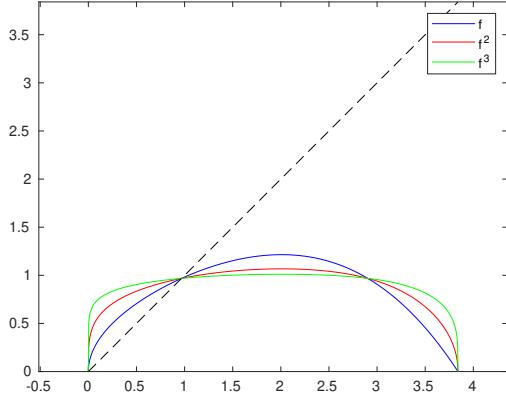


Рис. 4:  $a = 0.001$ .

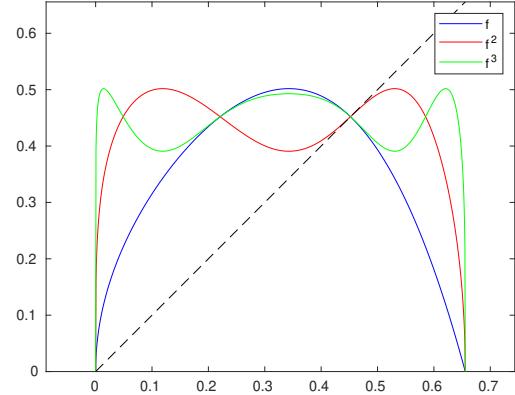


Рис. 5:  $a = 0.2a_{max}$ .

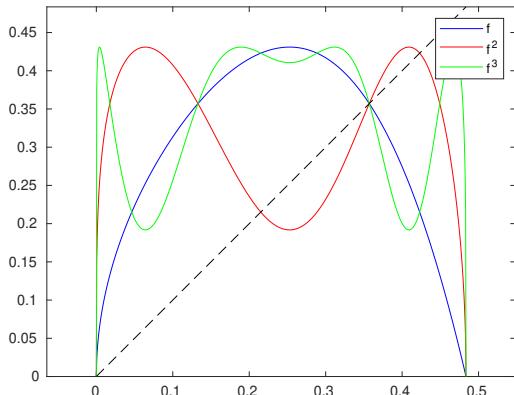


Рис. 6:  $a = 0.5a_{max}$ .

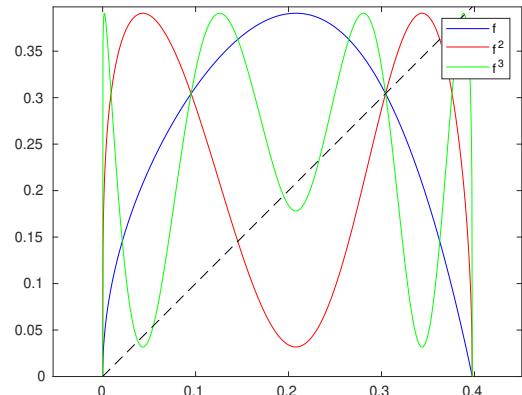


Рис. 7:  $a = 0.9a_{max}$ .

На данной иллюстрации приведены графики  $f$ ,  $f^2 = f \circ f$ ,  $f^3 = f \circ f \circ f$ , пересечения которых с прямой  $y = u$  являются неподвижными точками, элементами циклов длины 2 и элементами циклов длины 3 соответственно. Видно, что по мере увеличения параметра  $a$  сначала появляется цикл длины 2, затем добавляются два цикла длины 3.

Построим бифуркационную диаграмму системы: при каждом значении параметра  $a$  выпустим траекторию из  $0.1u_{max}$ , вычислим 100 итераций для стабилизации системы, затем следующие 100 итераций отложим на диаграмме по оси ординат.

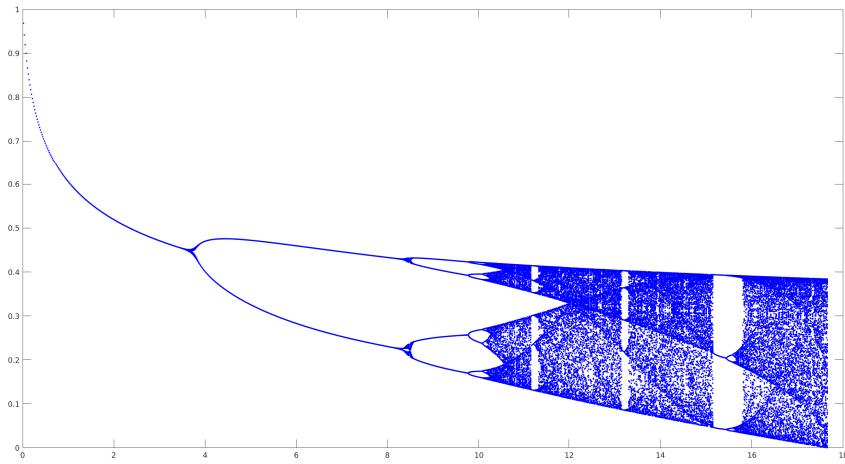


Рис. 8: Бифуркационная диаграмма при  $a \in [0, a_{max}]$ .

До момента  $a_o$  неподвижная точка является глобально устойчивой, затем при  $a = a_1$  устойчивость теряется и появляется устойчивый цикл длины 2. При более детальном рассмотрении диаграммы на сегменте  $[15, 16]$  обнаруживается устойчивый цикл длины 3.

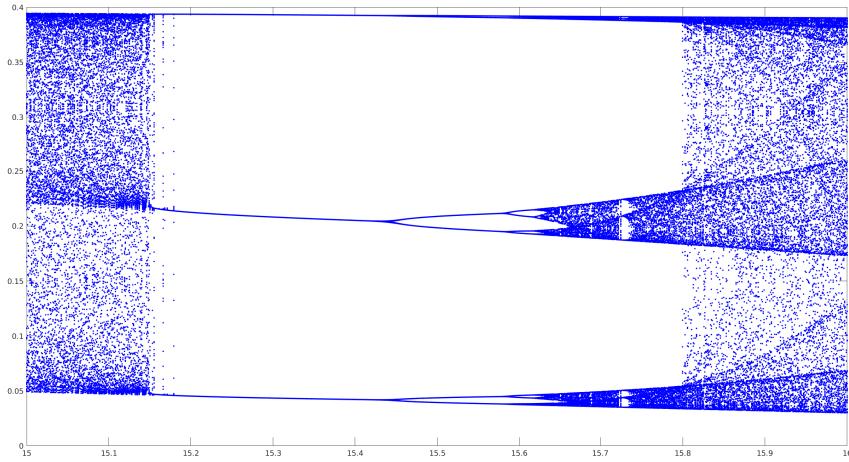


Рис. 9: Бифуркационная диаграмма при  $a \in [15, 16]$ .

Найдем эти циклы при параметрах  $a = 6$  и  $a = 15.3$ .

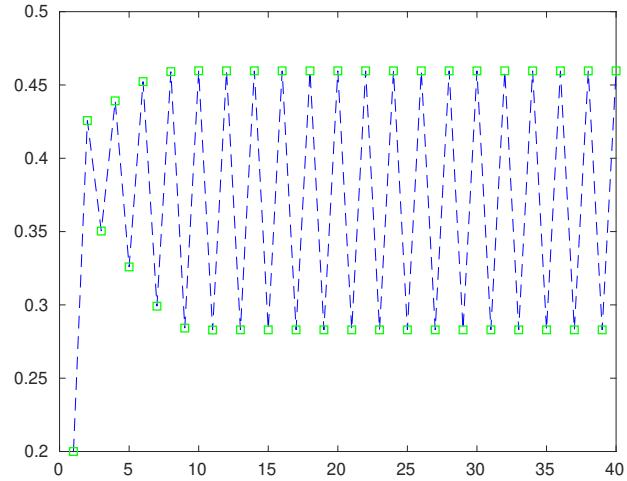


Рис. 10: Устойчивый цикл длины 2.

Численно находятся точки цикла  $u_1 \approx 0.283$ ,  $u_2 \approx 0.4596$ .

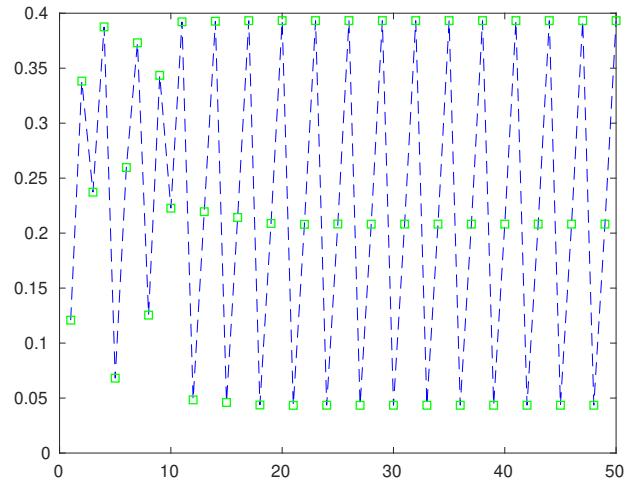


Рис. 11: Устойчивый цикл длины 3.

Аналогично находим точки  $u_1 \approx 0.0435$ ,  $u_2 \approx 0.2082$ ,  $u_3 \approx 0.3933$  для цикла длины 3.

### 3.3 Показатель Ляпунова

Показатель Ляпунова для траектории — величина, равная

$$h(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f'(u_1)| + \ln |f'(u_2)| + \dots + \ln |f'(u_n)|}{n},$$

является мерой хаотичности системы: при отрицательных значениях  $h$  близкие траектории приближаются друг другу, при положительных — разбегаются, несмотря на сколь угодно малое отклонение в начальный момент. При фиксированном значении параметра показатели Ляпунова для разных начальных условий отличаются незначительно, поэтому можно построить зависимость  $h(u)$  от  $a$ , где траектория  $u$  выпускается из  $0.1u_{max}$ .

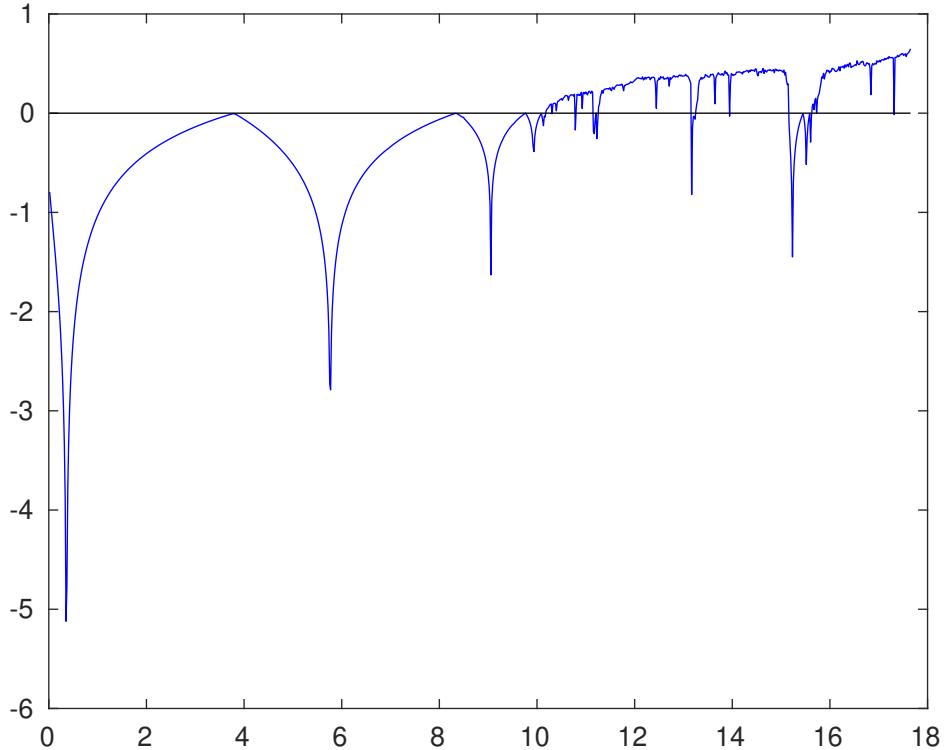


Рис. 12: График показателя Ляпунова.

Из графика видно, что при малых значениях параметра  $a$  показатель Ляпунова отрицателен, что соответствует «устойчивым» состояниям системы, как, например,  $a = 6$ , при котором возникал устойчивый цикл длины 2. Отметим также, что при  $a \approx 15$  показатель Ляпунова отрицателен, и именно в этой полосе значений на бифуркационной диаграмме исчезало хаотическое поведение и появлялся устойчивый цикл. Нули показателя Ляпунова соответствуют точкам бифуркации на диаграмме. При значениях  $a$ , на которых показатель Ляпунова положителен, в системе возникает хаос.

## 4 Анализ системы 2

Система

$$u_{t+1} = g(u_t, u_{t-1}) = \sqrt{u_t}(1 - au_{t-1}^3),$$

как говорилось ранее, является системой с запаздыванием и эквивалентна следующей двумерной системе:

$$\begin{cases} u_{t+1} = g(u_t, v_t) \\ v_{t+1} = u_t \end{cases} \quad (3)$$

### 4.1 Неподвижные точки

Неподвижными точками системы являются  $u = 0$  и  $u = u^*$  — неподвижные точки системы 1. Неустойчивость  $u = 0$  доказывается аналогично случаю одномерной системы. Для исследования устойчивости  $u = u^*$  найдем собственные значения матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$a_0 = \frac{\partial g(u, v)}{\partial u} \Big|_{(u^*, u^*)}, \quad a_1 = \frac{\partial g(u, v)}{\partial v} \Big|_{(u^*, u^*)}.$$

Легко вычисляется  $a_0 = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = -3a(u^*)^{5/2}$ , и матрица

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3a(u^*)^{5/2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристический многочлен матрицы имеет вид

$$\lambda^2 - \frac{\lambda}{2} + 3a(u^*)^{5/2}.$$

Отсюда собственные значения матрицы равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} - 12a(u^*)^{5/2}}.$$

Поскольку  $u^*$  не вычисляется аналитически, найдем численно зависимость  $|\lambda_{1,2}|$  от  $a$ .

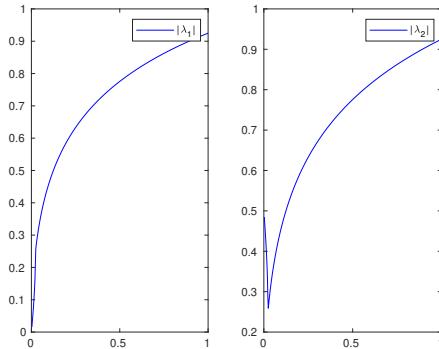


Рис. 13: График  $|\lambda_{1,2}|$ .

Из графика видно, что всюду на допустимом множестве значений  $a$  выполнено условие асимптотической устойчивости

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, 2.$$

Итак, точка  $u = 0$  является неустойчивым положением равновесия,  $u = u^*$  асимптотически устойчива при любых  $a \in [0, 1]$ .

## 4.2 Существование циклов

Покажем, что циклов длины 2 в системе не существует. Действительно, пусть  $u, v$  образуют цикл длины 2. Тогда они удовлетворяют условию

$$\begin{cases} v = g(u, v) = \sqrt{u}(1 - av^3) \\ u = g(v, u) = \sqrt{v}(1 - au^3) \end{cases}$$

Деля одно уравнение на другое и разделяя переменные, получим

$$\frac{u^{\frac{3}{2}}}{1 - au^3} = \frac{v^{\frac{3}{2}}}{1 - av^3},$$

что эквивалентно уравнению  $w(x) = w(y)$ ,  $x \neq y$ , где  $w(x) = \frac{x}{1 - ax^2}$  при  $x, y \in [0, a^{-\frac{1}{2}})$ . Но это невозможно, поскольку  $w'(x) = \frac{1+ax^2}{1-ax^2} > 0$ , и  $w$  строго возрастает на этом сегменте.

Аналитическая проверка циклов длины 3 затруднительна, однако из асимптотической устойчивости точки и из бифуркационной диаграммы можно предположить, что точка  $u = u^*$  глобально устойчива, поэтому циклов длины 3. система, скорее всего, иметь так же не будет.

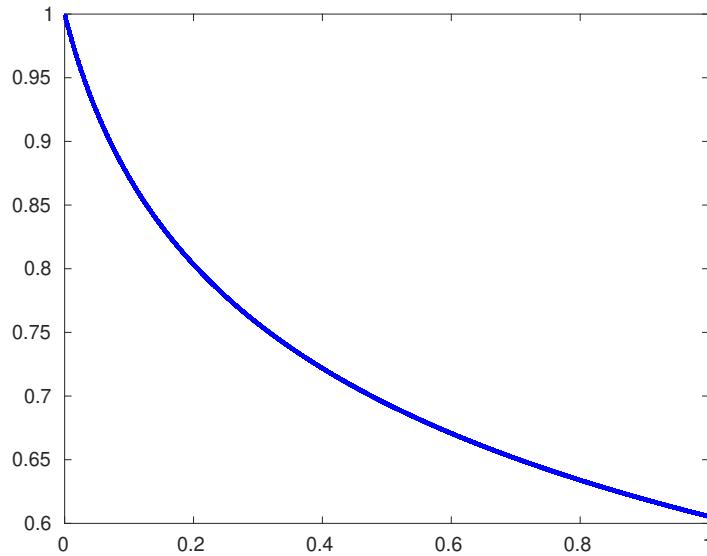


Рис. 14: Бифуркационная диаграмма системы

### 4.3 Бифуркация Неймарка-Сакера

При анализе устойчивости системы было показано, что собственные значения матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

не превосходят по модулю единицу при любых допустимых  $a$ . Отсюда можно сделать вывод, что возникновение бифуркации Неймарка-Сакера в данной системе невозможно.

## **Список литературы**

- [1] Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии.  
М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.