



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Отчёт по заданию 2 курсовой работы

## «Динамические системы с непрерывным временем»

*Студент 315 группы*  
Д. М. Сотников

*Руководитель практикума*  
Д. А. Алимов

## 1 Постановка задачи

Задана динамическая система с непрерывным временем

$$\begin{cases} \dot{x} = ax(x - l)(K - x) - \frac{bxy}{A + x} \\ \dot{y} = -cy + \frac{dxy}{A + x} \end{cases}$$

Необходимо провести качественный анализ ее поведения в зависимости от параметров, а именно:

- Найти и исследовать неподвижные точки.
- Построить параметрический портрет системы.
- Для каждой подобласти параметрического портрета построить фазовый портрет.
- Описать характер бифуркаций.
- Проверить возможность возникновения бифуркации Пуанкаре-Андронова-Хопфа.
- Проинтерпретировать поведение системы при различных значениях параметров.

## 2 Биологическая интерпретация системы

Данная система является моделью взаимодействия двух популяций типа хищник-жертва ( $x$  — жертва,  $y$  — хищник).

Слагаемое  $ax(x - l)(K - x)$  описывает поведение численности жертв в отсутствие хищников. В этом выражении учтен сильный эффект Олли: если численность популяции становится меньше  $l$ , то она вымирает. Параметр  $K$  определяет предельное значение для  $x$ : при  $l < x < K$  численность возрастает, при  $x > K$  убывает из-за межвидовой конкуренции, стремясь к  $K$ .  $a$  — коэффициент пропорциональности, описывающий скорость роста популяции в отсутствие конкуренции.

Слагаемое  $-cy$  отражает смертность хищников.

Выражения  $-\frac{bxy}{A + x}$  и  $\frac{dxy}{A + x}$  описывают влияние популяции хищников на популяцию жертв, заключающееся в уменьшении относительной скорости прироста численности жертв на величину, пропорциональную численности хищников. Параметры  $b$ ,  $d$  описывают эффективность потребления жертв хищниками. Трофическая функция  $\frac{bx}{A + x}$  учитывает эффект насыщения хищника: при  $x \rightarrow \infty$  он «съедает» не более  $\frac{b}{A}$  единиц.

## 3 Переход к безразмерным координатам

Делая замену

$$x(t) = \alpha u(\tau), \quad y(t) = \beta v(\tau), \quad t = \gamma \tau,$$

получаем

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \gamma \left( au(\alpha u - l)(K - \alpha u) - \frac{b\beta uv}{A + \alpha u} \right) \\ \frac{dv}{d\tau} = \gamma \left( -cv + \frac{d\alpha uv}{A + \alpha u} \right) \end{cases}$$

Выберем  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  так, чтобы

$$\gamma a \alpha^2 = 1, \quad \frac{A}{\alpha} = 1, \quad \frac{b\beta}{\alpha} = 1,$$

то есть

$$\alpha = A, \quad \beta = \frac{A}{b}, \quad \gamma = \frac{1}{A^2 a}.$$

После такой замены система примет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = u(u - \frac{l}{A})(\frac{k}{A} - u) - \frac{uv}{1+u} \\ \dot{v} = -\frac{cv}{A^2 a} + \frac{duv}{1+u} \end{cases}$$

Полученная система имеет 4 существенных параметра, поэтому для облегчения дальнейшего анализа будем считать, что  $d = 1$ ,  $\frac{l}{A} = 1$ . Переобозначая  $a = \frac{k}{A}$ ,  $b = \frac{c}{A^2 a}$ , получаем окончательный вид системы

$$\begin{cases} \dot{u} = u(u - 1)(a - u) - \frac{uv}{1+u} \\ \dot{v} = -bv + \frac{uv}{1+u} \end{cases} \quad (1)$$

Из интерпретации очевидно, что  $a > 1$ ,  $b > 0$ .

Договоримся, что  $x(t)$  будет обозначать двумерный вектор  $x(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ , а  $f(u, v)$  — правую часть системы (1):

$$f(u, v) = \begin{bmatrix} f_1(u, v) \\ f_2(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(u - 1)(a - u) - \frac{uv}{1+u} \\ -bv + \frac{uv}{1+u} \end{bmatrix}.$$

## 4 Неподвижные точки

Легко находятся положения равновесия  $A_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , соответствующее полному вымиранию, а также  $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ . При  $v = 0$ , то есть в отсутствие хищников, возможны три варианта развития событий:

1.  $u(0) < 1$ . Тогда  $\dot{u} < 0$ , и популяция вымирает, стремясь к положению равновесия  $A_0$ .
2.  $u(0) = 1$ . Система остается в неводвижной точке  $A_1$ .
3.  $u(0) > 1$ . Так как  $\dot{u} > 0$  при  $u < a$  и  $\dot{u} < 0$  при  $u > a$ , система будет стремиться к положению равновесия  $A_2$ .

Отсюда сразу же следует, что точка  $A_1$  является неустойчивым положением равновесия: при малом отклонении от нее популяция либо вымирает, либо стремится к равновесию  $A_2$ .

**Лемма 1.** *Если в некоторый момент  $u(t) < 1$ , то  $u(t) \rightarrow 0$ ,  $v(t) \rightarrow 0$ .*

**Доказательство.** При  $u < 1$  величина  $u$  будет строго убывать, затем, при  $b > \frac{u}{1+u}$ ,  $v$  также начнет убывать, стремясь к 0. ■

Смысл леммы заключается в том, что при попадании в область  $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$  любая траектория будет стремиться к  $A_0$ . Отсюда же следует, что точка  $A_0$  является аттрактором при любых значениях параметров и потому в дальнейшем анализироваться не будет.

Найдем теперь нетривиальную неподвижную точку  $A_3 = \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix}$  из системы

$$\begin{cases} u = b(u + 1) \\ v = (u - 1)(u + 1)(a - u) \end{cases}$$

В результате получим  $u^* = \frac{b}{1-b}$ ,  $v^* = ((u^*)^2 - 1)(a - u^*)$ . Эта точка лежит в  $\text{int } \mathbb{R}_+^2$  тогда и только тогда, когда

$$b < 1, \quad b > \frac{1}{2}, \quad b < \frac{a}{a+1}. \quad (2)$$

Эти ограничения задают некоторую область в пространстве параметров, в которой будет существовать неподвижная точка  $A_3$ .

Исследуем теперь найденные точки на устойчивость по первому приближению, используя разложение Тейлора функции  $f$  в точке  $x_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$ :

$$f(x) = J(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|),$$

где

$$J(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial u} & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial u} & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial v} \end{bmatrix} \text{ — матрица Якоби.}$$

Вычислим частные производные

$$\begin{aligned} f_{1u} &= \left( (u-1)(a-u) - \frac{v}{u+1} \right) + u \left( -2u + a + 1 + \frac{v}{(u+1)^2} \right), \\ f_{1v} &= -\frac{u}{u+1}, \\ f_{2u} &= \frac{v}{(u+1)^2}, \\ f_{2v} &= -b + \frac{u}{u+1}. \end{aligned}$$

Для точки  $A_1$

$$J(A_1) = \begin{bmatrix} a-1 & -0.5 \\ 0 & 0.5-b \end{bmatrix}$$

$$\det J(A_1) = (a-1)(0.5-b)$$

При  $b < 0.5$   $\det J(A_1) < 0$ ,  $A_1$  — седло.

При  $b > 0.5$

$$\det J(A_1) > 0, \quad \text{tr } J(A_1) = a - b - 0.5 > 0, \quad (a > 1, b < 0.5),$$

и точка  $A_1$  — репеллер.

В точке  $A_2$

$$\begin{aligned} J(A_2) &= \begin{bmatrix} a(1-a) & -\frac{a}{a+1} \\ 0 & -b + \frac{a}{a+1} \end{bmatrix} \\ \det J(A_2) &= a(1-a) \left( -b + \frac{a}{a+1} \right). \end{aligned}$$

При  $b < \frac{a}{a+1}$   $\det J(A_2) < 0$ , и точка  $A_2$  будет неустойчива, тип неподвижной точки — седло.

Если же  $b > \frac{a}{a+1}$ , то  $\det J(A_2) > 0$ ,  $\text{tr } J(A_2) = a(1-a) - b + \frac{a}{a+1} < 0$ , и точка  $A_2$  — аттрактор.

Рассмотрим теперь

$$J(A_3) = \begin{bmatrix} u^* \left( -2u^* + a + 1 + \frac{v^*}{(u^* + 1)^2} \right) & -b \\ \frac{v^*}{(u^* + 1)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

при ограничениях (2), являющихся критерием существования неподвижной точки  $A_3$ .

$$\det J(A_3) = \frac{bv^*}{(u^* + 1)^2} > 0$$

Знак  $\text{tr } J(A_3)$  совпадает со знаком выражения  $-2u^* + a + 1 + \frac{v^*}{(u^* + 1)^2}$ .

Подставляя  $v^* = ((u^*)^2 - 1)(a - u^*)$  и преобразуя, получаем

$$\text{tr } J(A_3) < 0 \Leftrightarrow b > \left( 1 + \frac{3}{a + \sqrt{a^2 + 3}} \right)^{-1}. \quad (3)$$

В случае выполнения этого условия точка  $A_3$  — фокус, если же  $b < \left( 1 + \frac{3}{a + \sqrt{a^2 + 3}} \right)^{-1}$ , то  $A_3$  — репеллер, точнее, неустойчивый фокус. Отметим, что при строгом равенстве в (3)  $\text{tr } J(A_3) = 0$ , и собственные значения являются чисто мнимыми.

## 5 Параметрический портрет

Объединив все проведенные выше рассуждения, заметим, кривые

$$b = 0.5, \quad b = \frac{a}{a+1}, \quad b = \left( 1 + \frac{3}{a + \sqrt{a^2 + 3}} \right)^{-1}$$

разбивают пространство параметров на 4 класса эквивалентности относительно отношения топологической эквивалентности систем (можно показать, что  $\frac{a}{a+1} > \left( 1 + \frac{3}{a + \sqrt{a^2 + 3}} \right)^{-1}$  для любых  $a > 1$ ).

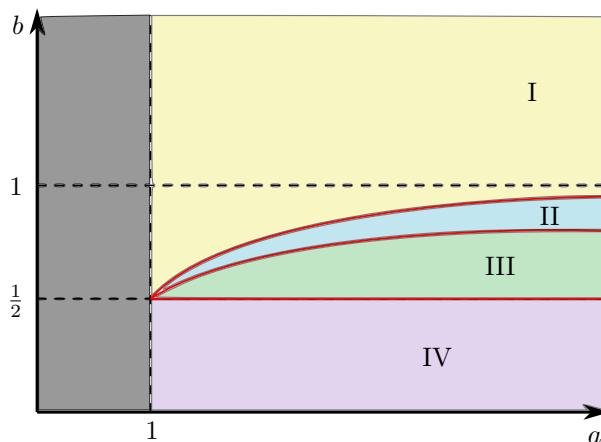


Рис. 1: Параметрический портрет системы (1)

Для исследования поведения системы в каждой области будем использовать метод нуль-изоклинов:

$$\dot{u} = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ или } v = (u^2 - 1)(a - u)$$

$$\dot{v} = 0 \Leftrightarrow v = 0 \text{ или } u = \frac{b}{1-b}$$

**Область I** Точка  $A_1$  — репеллер,  $A_2$  — фокус. Здесь и далее для наглядности будем обозначать зеленым устойчивые точки, синим — неустойчивые, красные линии — нуль-изоклины.

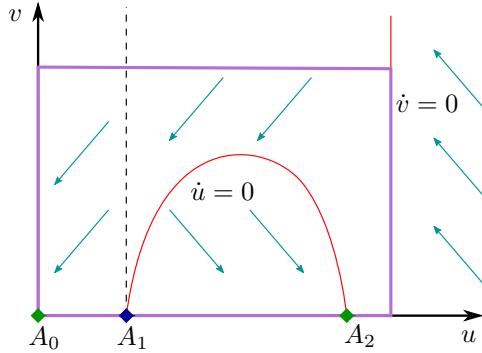


Рис. 2: Поведение системы в области I ( $b < 1$ )

Видно, что при любом начальном условии система попадает в положительно инвариантную область  $\left[0, \frac{b}{1-b}\right] \times \mathbb{R}_+$ , в которой  $\dot{v} < 0$ , и  $v$  убывает, стремясь к нулю. При  $u(t)$  при этом стремится либо к 0, либо к  $a$ , что определяется начальным условием.

Сиреневый прямоугольник на рис.2 — область захвата, поэтому, по теореме Пуанкаре-Бендиксона, любая траектория притягивается либо к  $A_1$ , либо к  $A_2$  (другие предельные множества невозможны в силу строгого убывания  $v$  всюду внутри области захвата). Более точно, фазовое пространство разбивается некоторой кривой  $\gamma$ , проходящей через  $A_1$ , на две области  $\mathbb{R}_+^2 = U_{A_0} \cup \gamma \cup U_{A_2}$ . Если  $x(0) \in U_{A_0}$ , то  $x(t) \rightarrow A_0$ , если  $x(0) \in U_{A_2}$ , то  $x(t) \rightarrow A_2$ . Кривая  $\gamma$  является сепаратрисой седла  $A_1$ , поэтому при  $x(0) \in \gamma$  траектории сходятся к  $A_1$ . ( $\gamma$  отмечена на фазовом портрете зеленым).

При  $b > 1$  нуль-изоклина  $\dot{v} = 0$  исчезает, и  $v$  убывает на всем фазовом пространстве. Все остальные рассуждения при этом сохраняются.

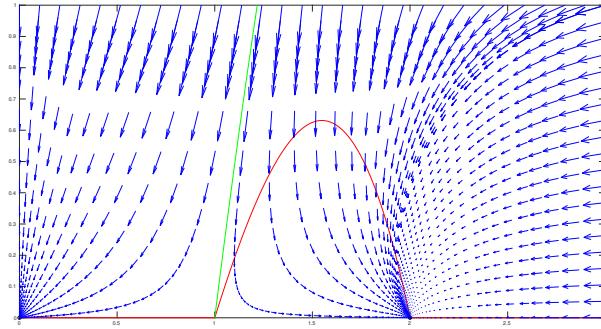


Рис. 3: Фазовый портрет системы при  $a = b = 2$ .

**Область II** Здесь  $A_1$  — репеллер,  $A_2$  — седло,  $A_3$  — устойчивый фокус.

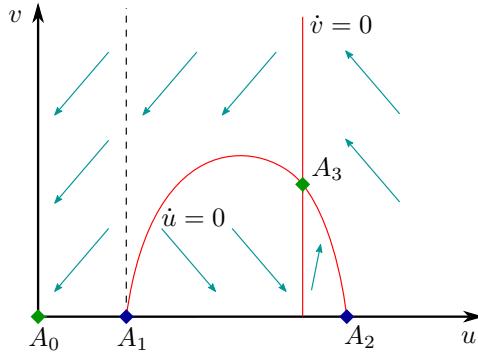


Рис. 4: Поведение системы в области II

На границе областей I и II происходит бифуркация, при которой точка  $A_2$  разделяется на  $A_2$  и  $A_3$ , в результате чего теряет устойчивость.

Фазовое пространство так же разделяется сепаратрисой седла  $A_1$  на две области: зона притяжения  $A_0$  и  $A_3$ .

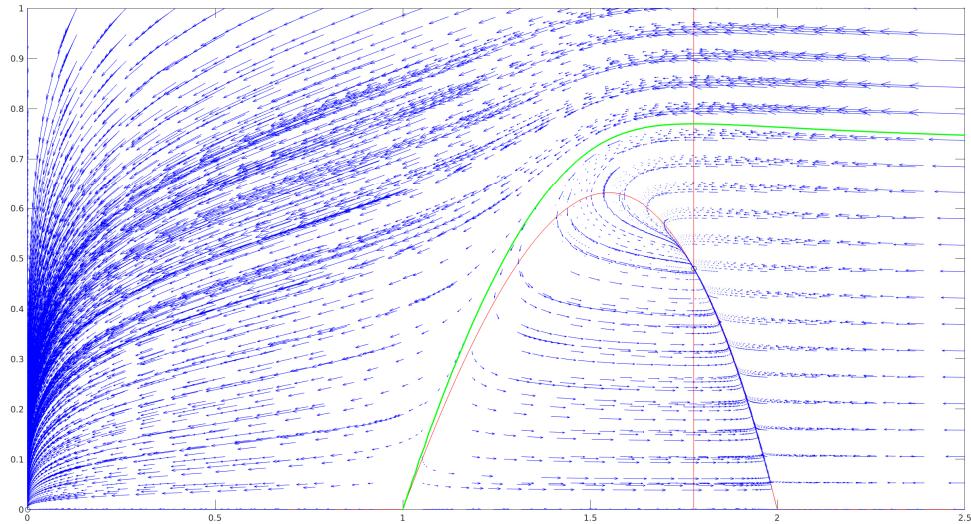


Рис. 5: Фазовый портрет системы при  $a = 2$ ,  $b = 0.64$ .

**Область III**  $A_1$  — репеллер,  $A_2$  — седло,  $A_3$  — неустойчивый фокус.

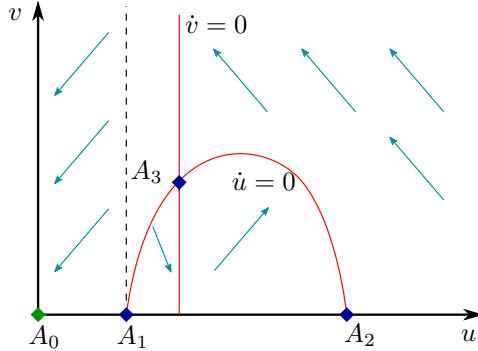


Рис. 6: Поведение системы в области III

При переходе из области II в III точка  $A_3$  теряет устойчивость, и все траектории стремятся к  $A_0$ . Далее будет показано, что при этом в системе возникает бифуркация Пуанкаре-Андронова-Хопфа с мягкой потерей устойчивости: при значениях параметра, близким к бифуркационным в окрестности неустойчивого фокуса  $A_3$  возникает устойчивый цикл, который затем сливаются с сепаратрисой узла  $A_2$  и исчезает. Это будет более подробно рассмотрено в разделе 6.

На фазовом портрете видно, что сепаратриса седла  $A_2$  разделяет фазовое пространство на две области, биологическая интерпретация которых будет дана в разделе 7.

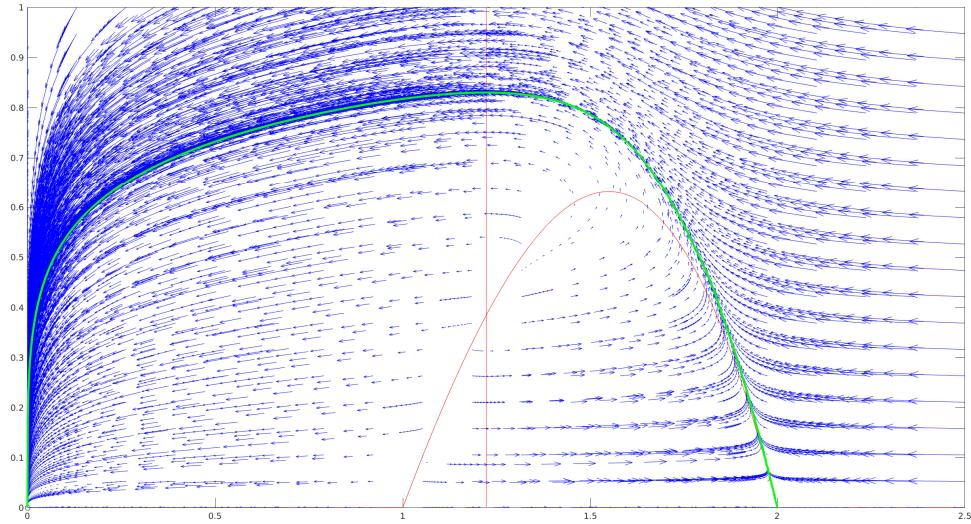


Рис. 7: Фазовый портрет системы при  $a = 2$ ,  $b = 0.55$ .

**Область VI**  $A_1$  — седло,  $A_2$  — седло.

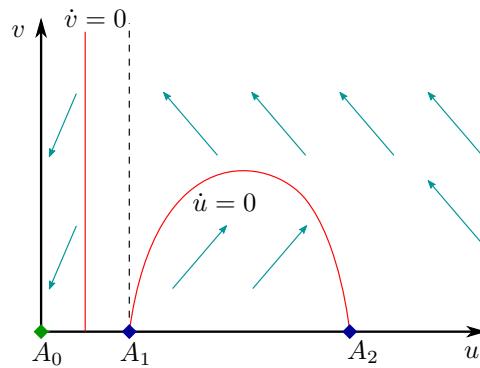


Рис. 8: Поведение системы в области IV

При переходе из области III в IV происходит бифуркация, при которой точки  $A_1$  и  $A_3$  сливаются, и неподвижная точка  $A_3$  исчезает. Все траектории по-прежнему стремятся к  $A_0$ .

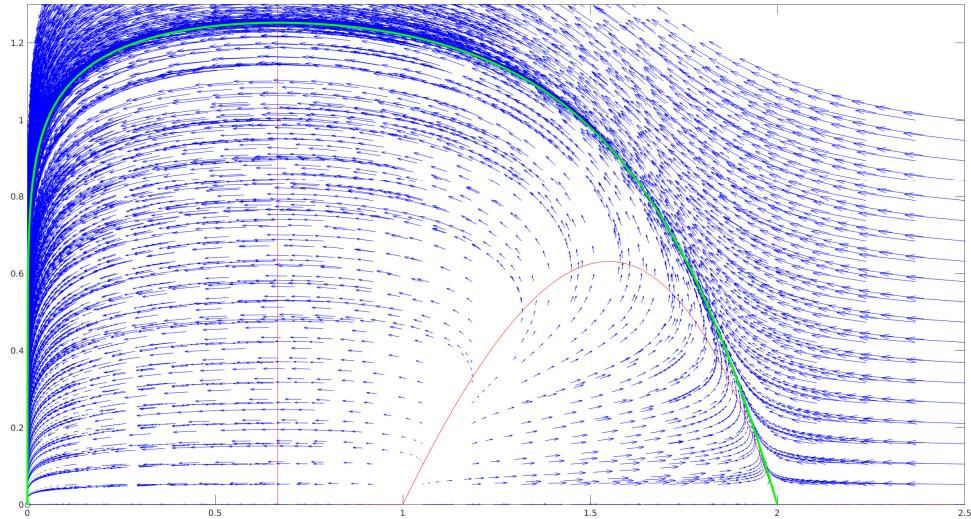


Рис. 9: Фазовый портрет системы при  $a = 2$ ,  $b = 0.4$ .

## 6 Бифуркация Пуанкаре-Андронова-Хопфа

Для проверки бифуркации Пуанкаре-Андронова-Хопфа воспользуемся достаточным условием, которое можно найти в [1]. В окрестности особой точки функция  $f$  представима в виде

$$f(x) = J(a, b)x + F(x; a, b), \quad F = o(\|x - A_3\|).$$

Обозначим  $\lambda = \mu + i\omega$  — собственное значение матрицы  $J$ . При бифуркационном значении параметров  $a, b$  (на границе областей II и III)  $\lambda = i\omega_0$ .

Далее,  $q$  — собственный вектор  $J$ , отвечающий  $\lambda$ , а  $p$  — собственный вектор  $J^T$ , отвечающий  $\bar{\lambda}$ . Нормализуем их так, чтобы  $\langle p, q \rangle = 1$ .

Будем теперь, фиксируя  $a$ , изменять параметр  $b$  вблизи бифуркационного значения  $b_{cr}$  (полученного из (3)). С помощью пакета символьных вычислений SymPy можно показать, что выполнено условие нетривиальности

$$\left. \frac{d\mu(b)}{db} \right|_{b=b_{cr}} \neq 0.$$

Составим теперь комплексную функцию

$$G(z, w) = \langle p, F(zq_1 + w\bar{q}_1, zq_2 + w\bar{q}_2) \rangle$$

и вычислим ее частные производные

$$g_{20} = G_{zz}, \quad g_{11} = G_{zw}, \quad g_{21} = G_{zsw}$$

в точке  $z = w = 0$ .

Тогда первую ляпуновскую величину можно найти по формуле

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{re}(ig_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21}).$$

Ее зависимость от параметра  $a$  приведена на графике.

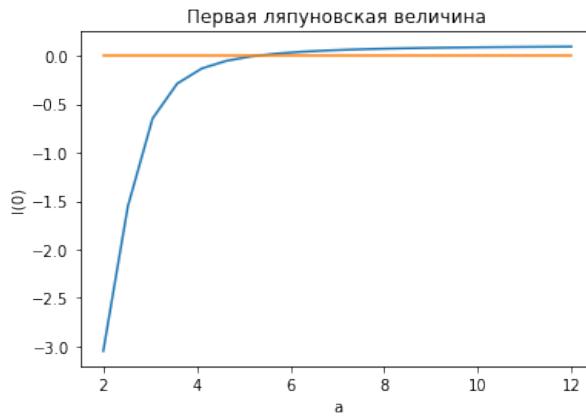


Рис. 10: Зависимость  $l_1(0)$  от  $a$ .

Видно, что при  $a < 5.2$  (примерно)  $l_1(0) < 0$ , и происходит субкритическая бифуркация Пуанкаре-Андронова-Хопфа с мягкой потерей устойчивости, при больших  $a$  бифуркация суперкритическая с жесткой потерей устойчивости.

Проиллюстрируем бифуркацию при  $a = 2$ .

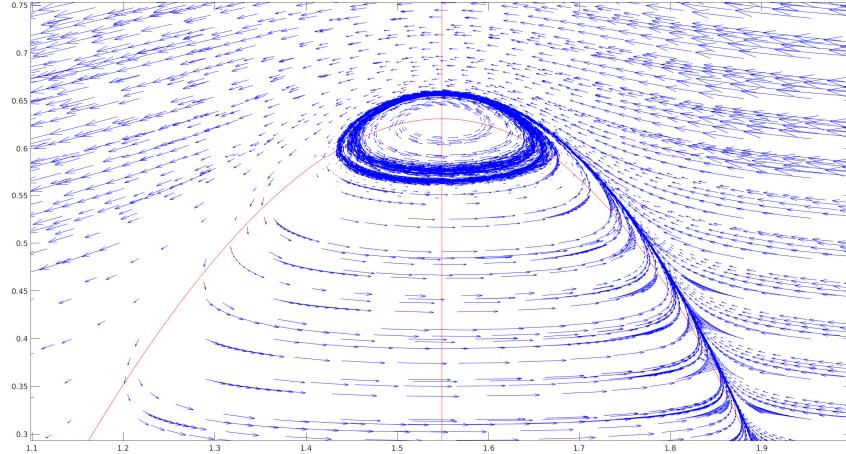


Рис. 11: Бифуркация Пуанкаре-Андронова-Хопфа при  $a = 2$ .

При незначительном уменьшении параметра  $b$  вокруг точки  $A_3$  появляется устойчивый предельный цикл.

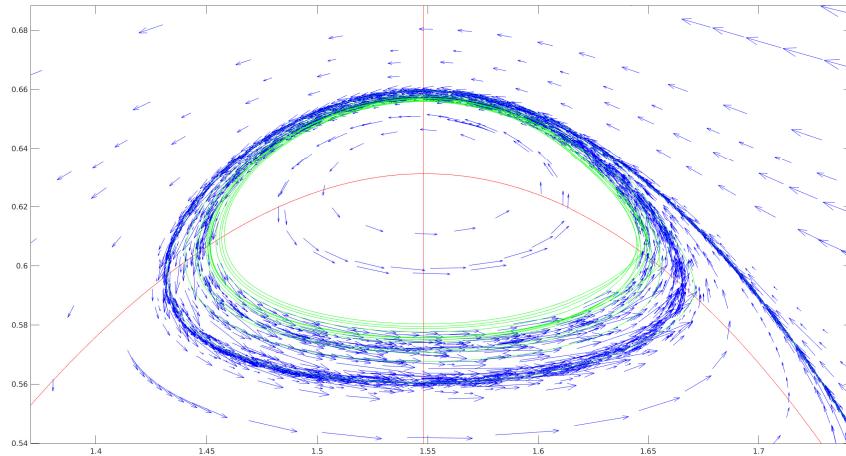


Рис. 12: Предельный цикл при  $a = 2$ .

При дальнейшем уменьшении параметра  $b$  цикл сливается с сепаратрисой седла  $A_2$  и исчезает. Это согласуется с теорией, так как результат теоремы о бифуркации Пуанкаре-Андронова-Хопфа описывает топологическую структуру фазового портрета лишь в некоторой окрестности особой точки.

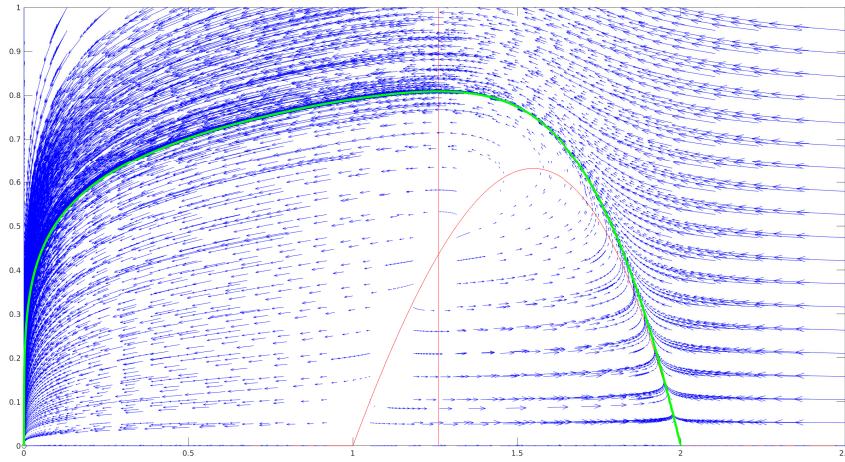


Рис. 13: Загадочное исчезновение цикла.

## 7 Биологическая интерпретация результатов

**Область I** Из-за высокой смертности хищников их популяция вымирает независимо от числа жертв: ограниченность трофической функции хищника приводит к тому, что энергии, полученной хищником при взаимодействии с популяцией жертв, не хватает для поддержания численности собственной популяции. Популяция жертв либо вымирает, либо стабилизируется в положении устойчивого равновесия. Сепаратриса отделяет зону, в которой численности жертв достаточно для избежания вымирания.

**Область II** В этом и только в этом случае существует устойчивое положение равновесия, допускающее сосуществование популяций. Однако при значительном уменьшении числа жертв, обе популяции вымирают, как и в случае сильного увеличения числа хищников, которое также влечет за собой сокращение популяции жертв и вымирание.

**Область III** Здесь также существует нетривиальное равновесие, при котором численность обеих популяций положительна, однако сколь угодно малое отклонение от него приводит к росту числа хищников, затем сокращению числа жертв и полному вымиранию обеих популяций. При этом возможны три сценария:

1. Большое число жертв в начальный момент приводит к быстрому росту численности хищников, число жертв же убывает из-за внутривидовой конкуренции и разросшейся популяции хищников, попадая в критическую зону  $u < 1$ .
2. Начальное условие находится под  $u$ -нуль-изоклиной. Тогда из-за благоприятных условий численность жертв растет, приводя к росту числа хищников и повторению прошлого сценария.
3. Изначальное число жертв мало, и из-за большого числа хищников уменьшается до критического значения, что также приводит к вымиранию.

**Область IV** Как и в прошлом случае, обе популяции вымирают. В обоих случаях это связано со слишком низкой смертностью хищников: их популяция разрастается, число жертв уменьшается до критического уровня, при котором восстановление невозможно. Сценарии вымирания абсолютно аналогичны сценариям в области III.

## **Список литературы**

- [1] Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.