Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Эллипсоидальные оценки для множества достижимости»

Студент 415 группы
Д. М. Сотников

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент И. В. Востриков

Москва, 2020

Содержание

1 Постановка задачи

Рассматривается линейная управляемая система:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0), \\ u(t) \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $X_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X_0 = X_0^* > 0$, $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $q(t) \in \mathbb{R}^m$, $Q(t) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q(t) = Q^*(t) > 0$ при любых t из $[t_0,\, t_1]$. Функции $A(t)$, $B(t)$, $q(t)$, $Q(t)$ непрерывны на $[t_0, t_1]$.

Необходимо построить:

1. Внутренние и внешние эллипсоидальные оценки множества достижимости системы (1).
2. Проекции множества разрешимости на двумерную плоскость.
3. Трехмерную проекцию множества разрешимости.

2 Внутренние и внешние оценки для суммы эллипсоидов

Обозначим эллипсоид с центром $q \in \mathbb{R}^n$ и матрицей конфигурации $Q \in \mathbb{R}^{n\times n},\ Q = Q^* > 0$

$$\mathcal{E}(q, Q) = \{x\colon \langle (x-q),\, Q^{-1}(x-q)\rangle \le 1\}.$$

Нас будут интересовать верхние и нижние оценки $\mathcal{E}_-$, $\mathcal{E}_+$ суммы (по Минковскому) конечного числа эллипсоидов $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$:

$$\mathcal{E}_- \subset \mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}_+.$$

2.1 Внешняя оценка

Пусть $p_1, \ldots, p_n > 0$. Покажем, что

$$\mathcal{E}_+ = (p_1 + \ldots + p_n)\left(\frac{Q_1}{p_1} + \ldots + \frac{Q_n}{p_n}\right)$$

является внешней оценкой.

Действительно,

$$\rho(l|\mathcal{E}_+)^2 = \sum_{i=1}^{n}\langle l,\, Q_i l\rangle + \sum_{i>j}\left(\frac{p_j}{p_i}\langle l,\, Q_i l\rangle + \frac{p_i}{p_j}\langle l,\, Q_j l\rangle\right) \ge$$

$$\ge \sum_{i=1}^{n}\langle l,\, Q_i l\rangle + 2\sum_{i>j}\sqrt{\langle l,\, Q_i l\rangle\langle l,\, Q_j l\rangle} = \rho(l|\mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_n)^2.$$

Равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда $p_i = \sqrt{\langle l,\, Q_i l\rangle},\ i = 1, \ldots, n$. Таким образом, опорный вектор $\mathcal{E}_+$ по направлению l совпадает с опорным ветором $\mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_n$, и потому

$$\mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_n = \bigcap_{l \in S_1} \mathcal{E}_+(l).$$

2.2 Внутренняя оценка

Пусть матрица конфигурации для $\mathcal{E}_-$

$$Q_- = Q_*^* Q_*, \quad Q_* = \sum_{i=1}^{n} S_i Q_i^{\frac{1}{2}},$$

где S_i — ортогональные матрицы.

С помощью неравенства Коши–Буняковского можно показать, что Q_- действительно является внутренней оценкой, и, более того $\rho(l|\mathcal{E}_-) = \rho(l|\mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_n)$ в том и только том случае, когда $S_i Q_i^{\frac{1}{2}} l = \lambda_i S_1 Q_1^{\frac{1}{2}} l$.

3 Эллипсоидальные оценки для интеграла

Рассмотрим выражение

$$I(t) = \mathcal{E}_0(0, Q_0) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{E}(0, Q(\tau)) d\tau$$

— интеграл от эллипсоида $\mathcal{E}(0, Q(t)))$ по переменной $\tau \in [t_0, t]$. Введем разбиение $\{\tau_i\}_{i=1}^{N}$ отрезка интегрирования $[t_0, t]$ и будем представлять интеграл в виде сумм

$$I(t) = \lim_{N \to \infty} I_N,$$

где $I_N = \mathcal{E}_0 + \sum\limits_{i=1}^{N} \sigma \mathcal{E}_i, \quad \sigma = \dfrac{t - t_0}{N}, \quad \mathcal{E}_i = \mathcal{E}(0, Q(\tau_i))$.

3.1 Внешняя оценка

Матрица конфигурации внешней оценки интегральной суммы находится по формуле

$$Q_+^N = \left(p_0 + \sum_{i=1}^{N} p_i\right)\left(\frac{Q_0}{p_0} + \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i \sigma^2}{p_i}\right) = \left\{p_0 = \langle l, Q_0 l\rangle^{\frac{1}{2}},\ p_i = \sigma \langle l, Q_i l\rangle^{\frac{1}{2}}\right\} =$$

$$= \left(p_0 + \sum_{i=1}^{N} \sigma \langle l, Q_i l\rangle^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{Q_0}{p_0} + \sum_{i=1}^{N} \sigma \frac{Q_i}{\langle l, Q_i l\rangle^{\frac{1}{2}}}\right).$$

При стремлении N к бесконечности получим следующую матрицу конфигурации для внешней оценки интеграла:

$$Q(\tau) = \left(p_0 + \int_{t_0}^{t} p(\tau) d\tau\right)\left(\frac{Q_0}{p_0} + \int_{t_0}^{t} \frac{Q(\tau)}{p(\tau)} d\tau\right).$$

Таким образом, интеграл аппроксимируется пересечением эллипсоидов по различным направлениям l, то есть $I(t) = \bigcap\limits_{\|l\|=1} \mathcal{E}_+(l)$.

3.2 Внутренняя оценка

Аналогичными рассуждениями приходим к тому, что матрица конфигурации нижней оценки для интеграла имеет вид

$$Q_- = Q_*^* Q_*, \quad Q_* = S_0 Q_0^{\frac{1}{2}} + \int_{t_0}^{t} S(\tau) Q^{\frac{1}{2}}(\tau) d\tau,$$

причем оценка будет точной по направлению l, если

$$S_0 Q_0^{\frac{1}{2}} l = \lambda(\tau) S(\tau) Q^{\frac{1}{2}}(\tau) l.$$

В качестве S_0 далее будем использовать единичную матрицу.

4 Эллипсоидальное оценивание множества достижимости

Будем дополнительно предполагать, что в задаче (1) выполнено $B(t)Q(t)B^*(t) > 0$ при любых $t \in [t_0,\, t]$. Оценим множество достижимости $\mathcal{X}[t]$.

Найдем траекторию $x(t)$ по формуле Коши:

$$x(t) = X(t,t_0)x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

где $X(t,\tau)$ — фундаментальная матрица, полученная как решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X(t,\tau)}{\partial \tau} = -X(t,\tau)A(\tau), \\ X(t,t) = I. \end{cases} \tag{2}$$

Множество достижимости можно представить следующим образом:

$$\mathcal{X}[t] = X(t,t_0)\mathcal{E}(x_0, X_0) + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)\mathcal{E}(q(\tau), Q(\tau))d\tau.$$

Утверждение 1. *Пусть $\mathcal{E}(p,P)$ — эллипсоид с центром p и матрицей конфигурации P, а B — невырожденная квадратная матрица тогда $B\mathcal{E}(p,P) = \mathcal{E}(Bp, BPB^*)$.*

Доказательство.
Пусть $x \in \mathcal{E}(p,P)$, что равносильно $\langle x,\, P^{-1}x\rangle \leq 1$.

Рассмотрим теперь $B\mathcal{E}(p,P) = \mathcal{E}(q,Q)$, для него будет верно

$$\langle B^{-1}x, P^{-1}B^{-1}x\rangle = \langle x, \left(B^{-1}\right)^* P^{-1}B^{-1}x\rangle \leqslant 1.$$

Следовательно, $Q^{-1} = \left(B^{-1}\right)^* P^{-1}B^{-1}$ и $Q = BPB^*$, что и требовалось доказать. ■

Из утверждения следует, что множество $\mathcal{X}[t]$ может быть записано в виде:

$$\mathcal{X}[t] = \mathcal{E}(X(t,t_0)x_0,\, X(t,t_0)X_0X^*(t,t_0)) + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} \mathcal{E}(X(t,\tau)B(\tau)q(\tau),\, X(t,\tau)B(\tau)Q(\tau)B^*(\tau)X^*(t,\tau))d\tau.$$

Таким образом, задача нахождения множества достижимости сводится к задаче интегрирования эллипсоидов, рассмотренной в предыдущем разделе. Построим внешнюю и внутреннюю элипсоидальные оценки $\mathcal{X}[t]$.

Обозначим внешнюю эллипсоидальную оценку $\mathcal{E}(x_+(t), X_+(t))$. Параметры задаются формулами

$$x_+(t) = X(t,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)q(\tau)d\tau,$$

$$X_+(t) = \left(p_0 + \int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau\right)\left(\frac{X(t,t_0)X_0X^*(t,t_0)}{p_0} + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{X(t,\tau)B(\tau)Q(\tau)B^*(\tau)X^*(t,\tau)}{p(\tau)}d\tau\right),$$

где

$$p_0 = \langle l, X(t,t_0)X_0X^*(t,t_0)l\rangle^{\frac{1}{2}},$$
$$p(\tau) = \langle l, X(t,\tau)B(\tau)Q(\tau)B^*(\tau)X^*(t,\tau)l\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Выбранные таким образом p позволяют получить оценку, точную в направлении l.

Внутренняя оценка получается аналогичным образом.

$$X_-(t) = Q_*^*(t)Q_*(t),$$

$$Q_*(t) = X_0^{\frac{1}{2}}X^*(t,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} S(\tau)Q^{\frac{1}{2}}(\tau)B^*(\tau)X^*(t,\tau)d\tau.$$

Оценка будет точной по направлению l, если для любых τ будет выполнено

$$\lambda(\tau)X_0^{\frac{1}{2}}X^*(t,t_0)l = S(\tau)Q^{\frac{1}{2}}(\tau)B^*(\tau)X^*(t,\tau)l. \tag{3}$$

Поскольку $S(\tau)$ является ортогональной матрицей,

$$\lambda(\tau) = \frac{\left\|Q^{\frac{1}{2}}(\tau)B^*(\tau)X^*(t,\tau)l\right\|}{\left\|X_0^{\frac{1}{2}}X^*(t,t_0)l\right\|}.$$

Найдем теперь $S(\tau)$ из сингулярного разложения векторов

$$\lambda(\tau)X_0^{\frac{1}{2}}X^*(t,t_0)l = U_1d_1V_1,$$

$$Q^{\frac{1}{2}}(\tau)B^*(\tau)X^*(t,\tau)l = U_2d_2V_2.$$

Здесь U_1, U_2 — ортогональные матрицы, $d_1 = (d_{11}, 0, \ldots, 0)^T$, $d_2 = (d_{21}, 0, \ldots, 0)^T$, $V_1, V_2 \in \{-1, 1\}$. Так как нормы векторов совпадают, и $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, верно $d1 = d2$.

Теперь, если выбрать $S(\tau) = \dfrac{V_1}{V_2}U_1U_2^*$, равенство (3) будет выполнено, а матрица $S(\tau)$ окажется ортогональной.

5 Описание алгоритма

Верхние и нижние эллипсоидальные оценки вычисляются по формулам для $\mathcal{X}_+(t)$, $\mathcal{X}_-(t)$, которые были описаны в предыдущем разделе. Фундаментальная матрица как функция $X(t,\cdot)$ находится численно из системы (2).

Для нахождения проекции множества достижимости перебираются направления l из шара соответствующей размерности, для каждого из них вычисляется эллипсоидальная оценка, точная по этому направлению. По оценке вычисляется опорный вектор по направлению l. Объединение таких опорных векторов представляет собой численную аппроксимацию проекции множества достижимости.

6 Примеры работы алгоритма

Построение внутренних и внешних эллипсоидальных оценок приведено на рис. 1, 2.

На рис. 3 показана проекция множества достижимости трехмерной системы на координатную плоскость Ox_2x_3.

На рис. 4 изображено само множество достижимости этой системы в момент $t = 1$.

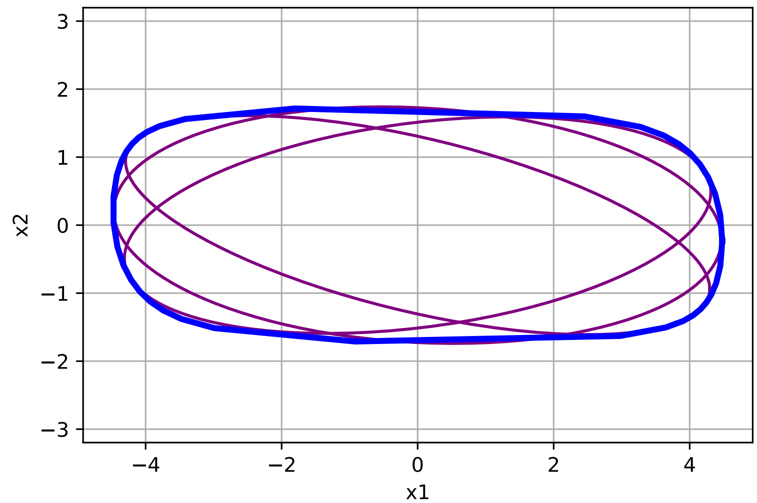

Рис. 1: Внутренние оценки.

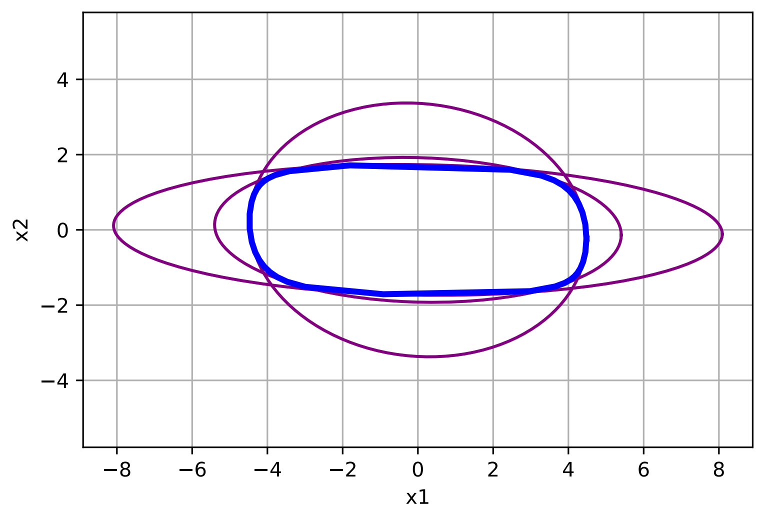

Рис. 2: Внешние оценки.

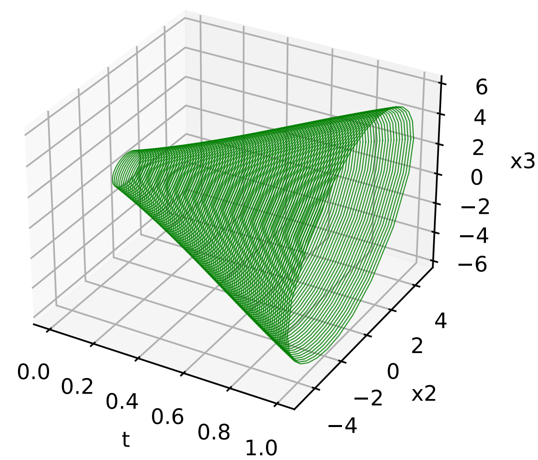

Рис. 3: Проекция множества достижимости на плоскость.

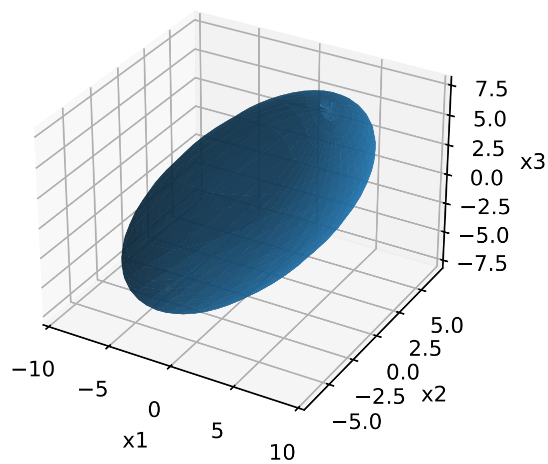

Рис. 4: Множество достижимости.