Домашнее задание от 21-ого дня карантина

Задача 3.9. Является ли гильбертовым пространство $\tilde{L}_2[a, b]$ непрерывных функций со скалярным произведением

$$\langle x,\, y\rangle = \int\limits_a^b x(t)y(t)dt.$$

Решение: Без ограничения общности будем рассматривать отрезок $[-1,\, 1]$.
Последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & t < -\frac{1}{n} \\ nt, & t \in \left[-\frac{1}{n},\, \frac{1}{n}\right] \\ 1, & t > \frac{1}{n} \end{cases}$$

является фундаментальной относительно нормы, порожденной скалярным произведением, но не сходится по ней, поэтому пространство не является гильбертовым.

Задача 3.11. Является ли гильбертовым пространство

$$\left\{(x_1,\, x_2,\, \ldots)\colon\, \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty\right\}$$

со скалярным произведением

$$\langle x,\, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k y_k, \quad \lambda_k \in (0,\, 1)$$

Решение: Не является, поскольку при быстро убывающих $\{\lambda_k\}$ (например, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < \infty$) последовательность

$$x^{(n)} = (\underbrace{1,\, 1,\, \ldots\, 1}_{n},\, 0\, \ldots)$$

является фундаментальной, так как

$$\left\|x^{(n+p)} - x^{(n)}\right\| = \sum_{k=n}^{n+p} \lambda_k^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

в силу критерия Коши сходимости ряда, однако не является сходящейся, поэтому пространство не полно, и следовательно, не гильбертово.

Задача 3.28. Показать, что множество

$$M = \left\{x \in l_2\colon\, \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0\right\}$$

является линейным многообразием, всюду плотным в l_2.
Решение: Пусть $x, y \in M$. Тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ верно

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha\sum_{k=1}^{\infty} x_k + \beta\sum_{k=1}^{\infty} y_k = 0,$$

поэтому M является линейным многообразием. Покажем, что $M^{\perp} = \{0\}$. Из этого по теореме 5 семинара от 21-го дня карантина будет следовать, что M плотно в l_2.

Пусть $y \in M^{\perp}$. Тогда для любого $x \in M$

$$\langle x,\, y\rangle = 0.$$

Рассматривая

$$x^{(n)} = (\underbrace{0,\, \ldots,\, 0}_{n-1},\, 1, -1, 0, \ldots), \quad n \in \mathbb{N},$$

получим, что $y_n = y_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Однако $y \in l_2$, и потому $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty$, откуда следует, что $y_n = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$, а значит $y = 0$, и $M^{\perp} = \{0\}$.

Задача 3.36. В пространстве $\tilde{L}_2[-1,\, 1]$ задано множество

$$M = \{x(\cdot) \in \tilde{L}_2[-1,\, 1] \colon x(t) = 0,\ t \geqslant 0\}.$$

Показать, что M является линейным подпространством $\tilde{L}_2[-1,\, 1]$, описать $M^{\perp}$ и проверить, выполнено ли

$$\tilde{L}_2[-1,\, 1] = M \oplus M^{\perp} \tag{1}$$

Решение: Очевидно, что M является линейным многообразием, поскольку $\alpha x(t) + \beta y(t) = 0$ при $t \geqslant 0$. Покажем, что оно замкнуто. Пусть $x_n(\cdot) \in M$, $\quad x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Тогда

$$\int\limits_0^1 x^2(t)dt = \int\limits_0^1 (x_n(t) - x(t))^2 dt \leqslant \int\limits_{-1}^1 (x_n(t) - x(t))^2 dt \to 0,$$

откуда следует, что $x(t) = 0$ для почти всех $t \in [0,\, 1]$. Но так как функция $x(\cdot)$ непрерывна, то $x(t) = 0,\ t \in [0,\, 1]$, то есть $x(\cdot) \in M$. Таким образом M является замкнутым линейным многообразием, то есть линейным подпространством $\tilde{L}_2[-1,\, 1]$.

Пусть теперь $y(\cdot) \in M^{\perp}$. Тогда для любого $x(\cdot) \in M$

$$\langle x,\, y\rangle = \int\limits_{-1}^1 x(t)y(t)dt = \int\limits_{-1}^0 x(t)y(t)dt = 0,$$

поэтому $y(t) = 0$ почти всюду на $[-1,\, 0]$, а значит $y(t) = 0,\ t \in [-1,\, 0]$. Итак,

$$M^{\perp} = \{y(\cdot) \in \tilde{L}_2[-1,\, 1] \colon y(t) = 0,\ t \leqslant 0\}.$$

Однако (1) не выполнено, поскольку функцию $z(t) \equiv 1$ нельзя представить в виде

$$z(\cdot) = x(\cdot) + y(\cdot). \quad x(\cdot) \in M,\, y(\cdot) \in M^{\perp},$$

так как $x(0) = y(0) = 0$ для любых $x(\cdot) \in M,\ y(\cdot) \in M^{\perp}$, однако $z(0) = 1$.

Задача 3.37. Пусть $x_k \in l_2$, и

$$x_k = \left(1,\, \frac{1}{2^k},\, \frac{1}{2^{2k}},\, \frac{1}{2^{3k}},\, \ldots\right).$$

Доказать, что линейная оболочка множества $M = \{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ плотна в l_2.
Решение: Покажем, что $M^{\perp} = \{0\}$. Для произвольного $y \in M^{\perp}$ и любого k верно

$$\langle y,\, x_k\rangle = y_1 + \frac{1}{2^k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y_n}{2^{(n-2)k}} = 0.$$

Поскольку $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{y_n}{2^{(n-2)k}} < \infty$, устремляя k к бесконечности, получим $y_1 = 0$.

Далее,

$$2^k \langle y,\, x_k\rangle = y_2 + \frac{1}{2^k} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{y_n}{2^{(n-3)k}} = 0.$$

Вновь переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем $y_2 = 0$.

Продолжая так, получим $y = 0$. Значит, $M^{\perp} = \{0\}$, что и требовалось доказать.

Задача 3.44. Доказать, что в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ любая последовательность непустых вложенных выпуклых замкнутых ограниченных множеств A_n имеет непустое пересечение.
Решение: Выберем последовательность $x_n \in A_n$ таких, что $\rho(0, x_n) = \rho(0, A_n)$, то есть наименьший по норме элемент A_n. Это можно сделать для замкнутого выпулого множества по теореме 1 семинара от 21-го дня карантина. Заметим, что последовательность $d_n = \|x_n\|$ возрастает в силу вложенности множеств A_n и ограничена сверху в силу ограниченности множества A_1, а значит имеет предел, равный d. Покажем, что последовательность x_n фундаментальна: из тождества параллелограмма следует, что для любых n, $p \in \mathbb{N}$

$$\|x_n + x_{n+p}\|^2 + \|x_n - x_{n+p}\|^2 = 2\left(\|x_n\|^2 + \|x_{n+p}\|^2\right).$$

Заметим, что $\dfrac{x_n + x_{n+p}}{2}$ лежит в A_n в силу выпуклости множества, поэтому $2\left\|\dfrac{x_n + x_{n+p}}{2}\right\| \geqslant 2d_n$, и значит

$$\|x_n - x_{n+p}\|^2 \leqslant 2\left(\|x_n\|^2 + \|x_{n+p}\|^2\right) - (2d_n)^2 \to 0.$$

Получили, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, и следовательно, сходится к элементу x_0 ($\mathbb{H}$ гильбертово), который по построению принадлежит $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Задача 3.45. Построить в $C[0,\,1]$ пример последовательности непустых вложенных выпуклых замкнутых ограниченных множеств A_n, имеющих пустое пересечение.
Решение: Рассмотрим последовательность

$$A_n = \{x(\cdot) \in C[0,\,1] \colon 0 \leqslant x(t) \leqslant t^n,\ x(1) = 1\}.$$

Очевидно, что она удовлетворяет всем описанным условиям, однако $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$.