Домашнее задание от 7-ого дня карантина

Задача 13.8. В пространстве l_2 положим $f_n(x) = x_n$. Доказать, что f_n *-слабо сходится к 0Верно ли, что $f_n \stackrel{\|\cdot\|}{\to} 0$?

Решение: *-слабая сходимость вытекает из того, что $\forall x \in l_2 \quad f_n(x) = x_n \to 0$ (так как $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n^2 < \infty$). Но, поскольку $|f_n(x)| = |x_n| \leqslant \|x\|, \quad |f_n(e_n)| = 1$, норма каждого функционала $\|f_n(\cdot)\| = 1 \nrightarrow 0$, и последовательность не является сильно сходящейся.

Задача 13.9. В пространстве $L_2[-1,1]$ заданы $f_n(x) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)\cos(\pi n t)dt$.

(a) Доказать, что f_n является линейным ограниченным функционалом и найти $\|f_n\|$.

(b) Доказать, что f_n *-слабо сходится к нулю.

(c) Верно ли, что $f_n \stackrel{\|\cdot\|}{\to} 0$?

Решение:

(a) По теореме Рисса любой линейный непрерывный функционал в $L_2[-1,1]$ имеет вид $f(x) = \langle \tilde{f}, x\rangle, \quad \tilde{f} \in L_2[-1,1]$. Для заданного функционала $\tilde{f}_n = \cos(\pi n t)$, и его норма равна

$$\|f_n(\cdot)\| = \left\|\tilde{f}_n(\cdot)\right\| = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} \cos^2(\pi n t)dt} = 1.$$

(b) Поскольку система $\{\cos(\pi n t),\ n \in \mathbb{N}\}$ является ортонормированной, $\langle \cos(\pi n t), x\rangle_{L_2} = f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \forall x \in L_2[-1,1]$ в силу неравенства Бесселя, что и является *-слабой сходимостью к нулю по определению.

(c) Неверно, так как $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n(\cdot)\| = 1 \nrightarrow 0$.

Задача 13.10. В пространстве $C^1[-1,1]$ заданы функционалы

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{2\epsilon}[x(\epsilon) - x(-\epsilon)], \quad f_0(x) = x'(0), \quad |\epsilon| < 1.$$

(a) Доказать, что $f_\epsilon,\ f_0$ — непрерывные линейные функционалы и найти их нормы.

(b) Доказать, что f_ϵ *-слабо сходится к f_0 при $\epsilon \to 0$.

(c) Верно ли, что $f_n \stackrel{\|\cdot\|}{\to} 0$ при $\epsilon \to 0$?

Решение:

(a) $|f_0(x)| = |x'(0)| \leqslant \|x(\cdot)\|_{C^1}$, поэтому функционал ограничен, и $\|f_0(\cdot)\| \leqslant 1$. Покажем, что эта величина достигается. Введем вспомогательную функцию

$$\mathrm{SI}(t) = \begin{cases} -1, & x < -\frac{\pi}{2}, \\ sin(x), & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Рассмотрим последовательность

$$x_n(t) = \frac{1}{2n}\,\mathrm{SI}(2nx), \quad \|x_n(\cdot)\|_{C^1} = \|x_n(\cdot)\|_0 + \|x_n'(\cdot)\|_0 = \frac{1}{n} + 1,$$

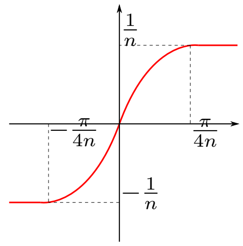

Рис. 1: График $x_n(t)$

$$\frac{|f_0(x_n)|}{\|x_n(\cdot)\|} = \frac{n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 1 \;\Rightarrow \|f_0(\cdot)\| = 1.$$

Докажем ограниченность $f_\epsilon(\cdot)$:

$$|f_\epsilon(x)| = \frac{\epsilon}{2\epsilon(1+\epsilon)}[x(\epsilon) - x(-\epsilon)] + \frac{1}{2\epsilon(1+\epsilon)}[x(\epsilon) - x(-\epsilon)].$$

Оценивая первое слагаемое нормами в $C[-1,1]$, а второе раскладывая по теореме Лагранжа, получим

$$|f_\epsilon(x)| = \frac{\|x(\cdot)\|_0}{1+\epsilon} + \frac{x'(\xi)}{1+\epsilon} \leqslant \frac{1}{1+\epsilon}\,\|x(\cdot)\|_{C^1},$$

откуда следует, что $f_\epsilon(\cdot)$ ограничен, и его норма не провосходит $\frac{1}{1+\epsilon}$. Оценка достигается на функции

$$x^*(t) = \begin{cases} -\epsilon, & t < -\epsilon, \\ t, & t \in [-\epsilon, \epsilon] \\ \epsilon, & t > \epsilon, \end{cases}$$

поскольку $\|x^*(\cdot)\| = \epsilon + 1$, и $f_\epsilon(x^*) = 1$, однако эта функция не является непрерывно дифференцирумой в точках $-\epsilon$ и ϵ. Построим последовательность функций со «скругленными углами», сходящуюся к $x^*(\cdot)$:

$$x_n(t) = x^*(t) + \frac{1}{n}\,\mathrm{SI}^+(n(t-\epsilon)) + \frac{1}{n}\,\mathrm{SI}^-(n(t+\epsilon)),$$

где $\mathrm{SI}^+(\cdot)$ и $\mathrm{SI}^-(\cdot)$ — положительная и отрицательная срезки.

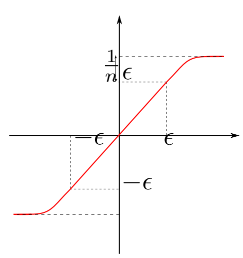

Рис. 2: График $x_n(t)$

Функции $x_n(\cdot) \in C^1[-1,1]$, и $\|x_n(\cdot)\|_{C^1} \to \|x^*(\cdot)\|_{C^1}$, $f_\epsilon(x_n) = 1$, что доказывает

$$\|f_\epsilon(\cdot)\| = \frac{1}{1+\epsilon}.$$

(b) Следует из определения производной.

(c) Докажем отсутствие сильной сходимости, ограничив снизу $\|(f_\epsilon - f_0)(\cdot)\|$.
Для этого рассмотрим функцию $x(t) = \begin{cases} \mathrm{SI}(\frac{\pi t}{\epsilon} - \frac{\pi}{2}) + 1, & t \geqslant 0, \\ \mathrm{SI}(\frac{\pi t}{\epsilon} + \frac{\pi}{2}) - 1, & t < 0. \end{cases}$

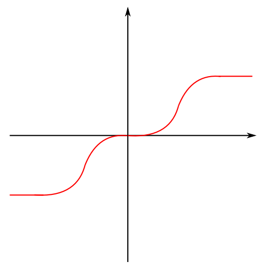

Рис. 3: График $x(t)$

Заметим, что
$$x'(0) = 0, \quad f_\epsilon(x) = \frac{2}{\epsilon}, \quad \|x(\cdot)\|_{C^1} = 2 + \frac{\pi}{\epsilon}.$$
Тогда
$$\frac{|f_\epsilon(x) - f_0(x)|}{\|x(\cdot)\|} = \frac{2}{\pi + 2\epsilon} > \frac{2}{\pi + 2} \quad \forall \epsilon \in (0, 1),$$
откуда следует, что $\|(f_\epsilon - f_0)(\cdot)\| \nrightarrow 0$.