Домашнее задание от 35-ого дня карантина

Задача 18.2. Доказать, что оператор $A\colon L_2[0,\,1] \to L_2[0,\,1]$,

$$(Ax)(t) = tx(t)$$

является неотрицательным и самосопряженным.
Решение: Для любых x, y

$$\langle Ax,\, y\rangle = \int\limits_0^1 tx(t)y(t)dt = \langle x,\, Ay\rangle.$$

$$\langle Ax,\, x\rangle = \int\limits_0^1 tx^2(t)dt \geqslant 0.$$

Задача 18.3. Доказать, что оператор $A\colon L_2[0,\,1] \to L_2[0,\,1]$,

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 x(s)e^{s+t}ds$$

является неотрицательным и самосопряженным.
Решение: Ядро интегрального оператора симметрично, следовательно, он является самосопряженным. Покажем неотрицательность:

$$\langle Ax,\, x\rangle = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 x(s)e^{s+t}ds\right) x(t)dt = \left(\int\limits_0^1 x(t)e^{t}dt\right)^2 \geqslant 0$$

Задача 18.16. Последовательность самосопряженных операторов A_n сильно сходится к A. Доказать, что A является самосопряженным.
Решение: Заметим, что

$$\langle A_n x,\, y\rangle \to \langle Ax,\, y\rangle,$$

так как $\langle (A_n - A)x,\, y\rangle \leqslant \|A_n - A\|\,\|x\|\,\|y\| \to 0$.

С другой стороны имеем

$$\langle x,\, A_n y\rangle \to \langle x,\, Ay\rangle,$$

Но так как эти последовательности совпадают, $\langle Ax,\, y\rangle = \langle x,\, Ay\rangle$.

Задача 18.17. Последовательность самосопряженных неотрицательных операторов A_n сильно сходится к A. Доказать, что $A \geqslant 0$.
Решение:

$$\langle A_n x,\, x\rangle \to \langle Ax,\, x\rangle$$

Но так как $\langle A_n x,\, x\rangle \geqslant 0$, то и $\langle Ax,\, x\rangle \geqslant 0$, что и требовалось.

Задача 18.21. Пусть $P \in L(\mathbb{H})$, $P^2 = P$. Доказать эквивалентность утверждений

(a) P является самосопряженным.

(b) $PP^* = P^*P$

(c) $\operatorname{im} P = \ker^{\perp} P$

(d) $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2 \ \forall x \in \mathbb{H}$

Решение: Эквивалентность (a) и (b) следует из теоремы 1 семинара. (На самом деле (b) $\Rightarrow$ (a) не следует из этой теоремы, но мне лень расписывать, для доказательства можно использовать разложение $\mathbb{H} = \ker P \oplus \operatorname{im} P^*$)

(a) $\Rightarrow$ (c), так как
$$\operatorname{im} P = \ker^{\perp} P^* = \ker^{\perp} P.$$

(a) $\Rightarrow$ (d), поскольку
$$\langle Px,\, Px\rangle = \langle P^2x,\, x\rangle = \langle Px,\, x\rangle.$$

Покажем, что из (c) следует (a). В силу (c) имеем $\mathbb{H} = \ker P \oplus \operatorname{im} P$, а также $\ker P = \ker P^*$. Тогда для любых x, y

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in \ker P,\ x_2 \in \operatorname{im} P\ (\exists z_2\colon Pz_2 = x_2),$$

$$y = y_1 + y_2, \quad y_1 \in \ker P,\ y_2 \in \operatorname{im} P\ (\exists w_2\colon Pw_2 = y_2),$$

$$\langle Px,\, y\rangle = \langle Px_2,\, y\rangle = \langle x_2,\, P^*y\rangle = \langle x_2,\, P^*y_2\rangle = \langle P^2z_2,\, y_2\rangle = \langle Pz_2,\, y_2\rangle = \langle x_2,\, y_2\rangle.$$

Аналогично показывается $\langle x,\, Py\rangle = \langle x_2,\, y_2\rangle$, откуда следует самосопряженность P.

Докажем, наконец, (d) $\Rightarrow$ (a).

$$\|Px\|^2 = \langle Px,\, x\rangle = \langle x,\, P^*x\rangle = \{\|Px\|^2 \in \mathbb{R}\} = \langle P^*x,\, x\rangle,$$

то есть для любых x верно $\langle (P - P^*)x,\, x\rangle = 0$ откуда следует (в комплексном пространстве), что $P = P^*$.

Задача 18.34. Пусть A — самосопряженный неотрицательный оператор. Доказать, что при любом $\lambda > 0$ оператор $A + \lambda I$ непрерывно обратим.

Решение: Данный оператор является самосопряженным как сумма двух самосопряженных, при этом
$$\langle (A + \lambda I)x,\, x\rangle = \langle Ax,\, x\rangle + \lambda\langle x,\, x\rangle > 0, \quad x \neq 0,$$
откуда следует положительная определенность оператора. Отсюда же следует, что

$$\ker A = \{0\}, \quad \operatorname{im} A = \ker^{\perp} A = \mathbb{H},$$

а следовательно, оператор обратим. Непрерывность обратного оператора следует из теоремы Банаха.

задача 18.37. Пусть неотрицательные самосопряженные операторы A, B перестановочны. Доказать, что $AB \geqslant 0$.

Решение: По теореме 18.6. оператор $\sqrt{A}$ является перестановочным с $\sqrt{B}$ тогда и только тогда, когда A является перестановочным с $\sqrt{B}$, что выполнено в силу перестановочности A и B. Таким образом $\sqrt{A}\sqrt{B} = \sqrt{B}\sqrt{A}$.

$$\langle ABx,\, x\rangle = \langle \sqrt{A}Bx,\, \sqrt{A}x\rangle = \langle B\sqrt{A}x,\, \sqrt{A}x\rangle = \langle \sqrt{B}\sqrt{A}x,\, \sqrt{B}\sqrt{A}x\rangle \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

Задача 18.41. В E^2 задан оператор

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} x.$$

Показать, что он является самосопряженным и неотрицательным. Найти $\sqrt{A}$.

Решение: Самосопряженность следует из симметричности матрицы оператора, положительная определенность из критерия Сильвестра. Пусть $B = \sqrt{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Из матричного уравнения $B^2 = A$ получаем систему

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ ab + bc = 3 \\ b^2 + c^2 = 5 \end{cases}$$

Отсюда легко находятся $a = b = 1,\ c = 2$, и квадратный корень имеет матрицу $\sqrt{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.