Домашнее задание от 14-ого дня карантина

Задача 14.10.(б, в, г) Найти сопряженный к опервтору $A\colon l_1 \to l_1$.

(б) $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots), \quad |\lambda_n| \leqslant 1,\ n \in \mathbb{N};$

(в) $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots);$

(г) $Ax = (x_2, x_3, \ldots).$

Решение: Поскольку $l_1^* = l_\infty$, сопряженный оператор $A^*\colon l_\infty \to l_\infty$.

(б) $\forall y \in l_\infty\ \forall x \in l_1 \quad (A^*y)(x) = y(Ax) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n y_n) x_n$, откуда получаем, что

$$A^*y = (\lambda_1 y_1, \lambda_2 y_2, \ldots).$$

(в) $\forall y \in l_\infty\ \forall x \in l_1 \quad (A^*y)(x) = y(Ax) = y_2 x_1 + y_3 x_2 + \ldots$, поэтому

$$A^*y = (y_2, y_3, \ldots).$$

(г) Аналогично прошлому пункту показывается, что

$$A^*y = (0, y_1, y_2, \ldots).$$

Задача 14.18 Оператор $A\colon l_2 \to l_1,\ Ax = x$ определен на множестве

$$D(A) = \left\{ x \in l_2\colon \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}.$$

(а) Доказать, что $\overline{D(A)} = l_2$.

(б) Доказать, что A не является ограниченным на $D(A)$.

(в) Найти A^* и $D(A^*)$.

Решение:

(а) $D(A)$ является всюду плотным в l_2, поскольку любой элемент $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ можно приблизить последовательностью

$$x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \in D(A),$$

при этом

$$\|x^{(n)} - x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2 \to 0.$$

(б) Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots\right) \in D(A)$$

. Норма ее элементов $\|x_n\|_{l_2} \leqslant 1$, однако $\|Ax\|_{l_1} = \|x_n\|_{l_1} \to \infty$, откуда следует, что функционал A не является ограниченным.

(в) Оператор $A^*\colon l_\infty \to l_2$ существует и определен однозначно. Это следует из пункта (а) и теоремы 1 параграфа 18.4 [1]. При этом

$$\forall y \in l_\infty\ \forall x \in l_2 \quad (A^*y)(x) = y(Ax) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n,$$

поэтому $A^*y = y$, и, поскольку $A^*y \in l_2$, оператор определен на множестве

$$D(A^*) = \left\{ y \in l_\infty\colon \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 < \infty \right\}.$$

Задача 14.19 Оператор $A\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ (Ax)(t) = x(t^2)$ определен на множестве

$$D(A) = \left\{ x(\cdot) \in L_2[0,1]\colon\ \int\limits_0^1 x^2(t^2) < \infty \right\}.$$

(а) Доказать, что $\overline{D(A)} = L_2[0,1]$.

(б) Доказать, что A не является ограниченным на $D(A)$.

(в) Найти A^* и $D(A^*)$.

Решение:

(а) Следует из того, что тригонометрическая система лежит в $D(A)$ и является плотным в $L_2[0,1]$ множеством.

(б) Рассмотрим последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{n}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} t^{-\frac{1}{4}}, & t \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\|x_n(\cdot)\|^2 = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \to 1,$$

однако

$$\|Ax_n\|^2 = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln n \to \infty,$$

поэтому оператор не является ограниченным.

(в) Так как пространство $L_2[0,1]$ гильбертово, верно соотношение

$$\langle y,\, Ax \rangle = \langle x,\, A^*y \rangle,$$

при этом $\langle y,\, Ax \rangle = \int\limits_0^1 y(t) x(t^2) dt = \{s = t^2\} = \int\limits_0^1 x(s) \frac{y(\sqrt{s})}{2\sqrt{s}} ds$, откуда

$$(A^*y)(t) = \frac{y(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}.$$

Поскольку спорядженный оператор принимает значения из $L_2[0,1]$, его областью определения является множество

$$D(A^*) = \left\{ y(\cdot) \in L_2[0,1]\colon\ \int\limits_0^1 \frac{y^2(\sqrt{t})}{t} dt < \infty \right\}.$$

Задача 7 Найти сопряженный оператор и его область определения к оператору $A\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ (Ax)(t) = x'(t)$, определенному на множестве

$$D(A) = \{x(\cdot) \in L_2[0,1]\colon x(\cdot) \text{ непрерывно дифференцируема},\ x(0) = x(1) = 0\}.$$

Решение: Множество $\{\sin(\pi n x),\ n \in \mathbb{Z}\} \subset D(A)$ является плотным в $L_2[0,1]$ множеством, поэтому $\overline{D(A)} = L_2[0,1]$, и сопряженный оператор определен однозначно.

$$\langle Ax,\, y\rangle = \int\limits_0^1 x'(t)y(t)dt = x(t)y(t)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x(t)y'(t)dt = -\int\limits_0^1 x(t)y'(t)dt = \langle x,\, A^*y\rangle.$$

Таким образом,

$$(A^*y)(t) = -y'(t).$$

Однако интегрирование по частям возможно, если $y(\cdot)$ непрерывно дифференцируема. Из теоремы 2 п.18.4. [1] следует замкнутость $D(A^*)$, поэтому область определения является пополнением пространства непрерывно дифференцируемых функций, то есть пространством Соболева $H^1[0,1]$, и $y'(\cdot)$ рассматривается как обобщенная производная в смысле Соболева. Интегрирование по частям для функций из $y(\cdot) \in H^1[0,1]$ можно получить предельным переходом, приближая $y(\cdot)$ непрерывно дифференцируемыми функциями.

Список литературы

[1] Треногин В.А. Функциональный анализ, — М.: Наука, 1980.