Домашнее задание от 42-ого дня карантина

Задача 16.1. Являются ли вполне непрерывными следующие операторы

$$A\colon C[0,\,1] \to C[0,\,1]?$$

1. $(Ax)(t) = x(0) + tx(1)$
2. $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{ts}x(s)ds$
3. $(Ax)(t) = x(t^2)$

Решение:

1. Для образа единичного шара $|(Ax)(t)| \leqslant 2\,\|x\|_C \leqslant 2,\ |(Ax)(t+h) - (Ax)(t)| = h|x(1)| \leqslant h$. Из теоремы Арцела-Асколи следует полная непрерывность A.
2. $|(Ax)(t)| \leqslant e\,\|x\| \leqslant e,\ |(Ax)(t+h) - (Ax)(t)| = \left|\int\limits_0^1 e^{ts}(e^{hs}-1)x(s)ds\right| \leqslant e(e^h-1)$, то есть выполнены условия теоремы Арцела-Асколи.
3. Пусть $x_n = t^n$. $\|x_n\| \leqslant 1$, при этом из $Ax_n = t^{2n}$ нельзя выделить фундаментальную подпоследовательность, следовательно, A не является вполне непрерывным.

Задача 16.5. Будет ли оператор $(Ax)(t) = x'(t)$ вполне непрерывным, если он действует

1. $A\colon C^1[0,\,1] \to C[0,\,1]$
2. $A\colon C^2[0,\,1] \to C^1[0,\,1]$
3. $A\colon C^2[0,\,1] \to C[0,\,1]$

Решение:

1. Нет, достаточно рассмотреть последовательность $x_n = \frac{t^n}{n}$.
2. Нет, рассмотрим последовательность $x_n = \frac{t^{n+1}}{n(n+1)}$. Она ограничена в $C^2[0,\,1]$, но ее образ не предкомпактен, так как из $(Ax_n)' = t^{n-1}$ нельзя выделить фундаментальную в $C[0,\,1]$ подпоследовательность, а значит, нельзя выделить фундаментальную в $C^1[0,\,1]$ подпоследовательность из $\{Ax_n\}$.
3. Для x из единичного шара в $C^2[0,\,1]$ верно

$$x'(t) \leqslant \|x\|_{C^2} \leqslant 1,$$

$$|x'(t+h) - x'(t)| \leqslant |x''(\xi)|h \leqslant h.$$

Пользуясь теоремой Арцела-Асколи, получаем предкомпактность образа единичного шара, а следовательно, полную непрерывность A.

Задача 16.9. Доказать, что оператор вложения $Ix = x$, действующий из

1. $I\colon C^1[a,\,b] \to C[a,\,b]$
2. $I\colon H^1[a,\,b] \to C[a,\,b]$

вполне непрерывен.
Решение:

1. $\|x\|_C \leqslant \|x\|_{C^1}$, $|x(t+h)-x(t)| = |x'(\xi)|h \leqslant h$. Из теоремы Арцела-Асколи получаем требуемое утверждение.

2. Вспомним эквивалентное определение вполне непрерывного оператора: оператор A вполне непрерывен, если переводит слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся. Пусть $x_n(\cdot)$ сходится к $x(\cdot)$ в H^1 слабо. Так как H^1 гильбертово, это означает, что для любой $f(\cdot) \in H^1$

$$\int_a^b [f(t)(x_n(t)-x(t)) + f'(t)(x_n'(t)-x'(t))]dt \to 0.$$

Предположим, что $\|x_n - x\|_C \nrightarrow 0$. Тогда, в силу непрерывности функций, найдется интервал, на котором $\limsup |x_n(t)-x(t)| > \delta$ для некоторого $\delta > 0$. Взяв в качестве f индикатор этого интервала (его можно приблизить непрерывно дифференцируемыми функциями), получаем противоречие. Значит, любая слабо сходящаяся в H^1 последовательность является сильно сходящейся в C, и оператор A вполне непрерывен.

Задача 16.12. Оператор $Ax = x''$ определен на множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций с $x(0) = x(1) = 0$. Доказать существование A^{-1}, найти его и доказать, что он является вполне непрерывным.
Решение: Обратный оператор определен на множестве непрерывных функций. Решая уравнение $x'' = y$ с краевыми условиями $x(0) = x(1) = 0$, находим

$$x(t) = \int_0^t \int_0^\tau y(s)dsd\tau - t\int_0^1\int_0^\tau y(s)dsd\tau.$$

Для непрерывных $y(\cdot)$ из единичного шара относительно нормы $\|\cdot\|_{L_2}$

$$\|x(\cdot)\|_{L_2} \leqslant 4,$$

поскольку $\max|x(t)| \leqslant 2$ (неравенство треугольника и неравенство Гёльдера). Значит, множество $\{A^{-1}(y)\}$ равномерно ограничено.

$$\int_0^{1-h} [x(t+h)-x(t)]^2 dt = \int_0^{1-h}\left(\int_t^{t+h}\int_0^\tau y(s)dsd\tau - h\int_0^1\int_0^\tau y(s)dsd\tau\right)^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{1-h}\left(h + h\left|\int_0^1\int_0^\tau y(s)dsd\tau\right|\right)^2 dt \leqslant\leqslant 4h^2.$$

Из критерия предкомпактности в L_2 получаем требуемое.

Задача 16.20. Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_n \to 0$. Пусть

$$Ax = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n.$$

Показать, что A определен на всем $\mathbb{H}$, переводит его в себя и является вполне непрерывным.
Решение: Гильбертово пространство с счётным базисом изоморфно l_2, поэтому будем отождествлять элементы $x \in \mathbb{H}$ с $x \in l_2$.

Тогда видно, что оператор

$$Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$$

определен для всех $x \in l_2$ и что $Ax \in l_2$ поскольку $\{\lambda_n\}$ ограничена и не влияет на сходимость ряда.

Покажем, что образ единичного шара при действии A является предкомпактным.

$$\|Ax\| \leqslant \max |\lambda_n| \, \|x\| \,,$$

поэтому множество равномерно ограничено.

$$\sum_{n=N}^{\infty} \lambda_n^2 x_n^2 \leqslant \max_{n \geqslant N} |\lambda_n| \to 0.$$

Из критерия предкомпактности в l_2 получаем полную непрерывность A.

Задача 16.26. Доказать, что множество значений вполне непрерывного оператора A сепарабельно.

Решение: Покажем, что образ единичного шара имеет счетное всюду плотное множество. Действительно, он является предкомпактным, а значит, вполне ограничен, и для любого $\epsilon > 0$ можно найти конечную $\epsilon-$сеть. Рассмотрим $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ и возьмем S — объединение всех ϵ_n-сетей. Это множество и будет искомым счетным всюду плотным множеством. Множество значений A можно представить как $\bigcup_r A(B_r(0))$, для $A(B_r(0))$ множество rS является счетным всюду плотным, поэтому $\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} rS$ будет счетным всюду плотным множеством для множества значений A.