Сотников Дмитрий

Вариант II

① Можно ли в пр-ве дважды непр. диф. ф-ций на $[0,1]$ принять за норму

$$N(x) = |x(0)| + |x'(1)| + \max_{t\in[0,1]} |x''(t)|$$

1) $N(x) \geq 0 \quad \forall x \in C^2[0,1]$

2) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3) $N(x+y) = \underset{|x(0)|+|y(0)|}{\underset{\wedge}{|x(0)+y(0)|}} + \underset{|x'(1)|+|y'(1)|}{\underset{\wedge}{|x'(1)+y'(1)|}} + \underset{\max_{[0,1]}|x''(t)| + \max_{[0,1]}|y''(t)|}{\underset{\wedge}{\max_{[0,1]}|x''(t)+y''(t)|}} \leq N(x)+N(y)$

$x \equiv 0 \Rightarrow N(x) = 0$

$N(x) = 0 \Rightarrow x''(t) \equiv \overset{0}{\cancel{at+b}} \Rightarrow x(t) = at+b$

$\left.\begin{array}{l} x(0) = b = 0 \\ x'(1) = a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \equiv 0$

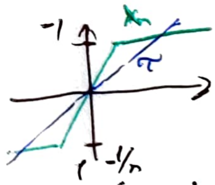
Выполнены аксиомы нормы $\Rightarrow$ можно

② $A: C[-1,1] \to C[-1,1]$ 

$$(Ax)(t) = \int_{-1}^{t} \tau x(\tau)\,d\tau$$

$$\|Ax\|_C = \max_{t\in[-1,1]} \left| \int_{-1}^{t} \tau x(\tau)\,d\tau \right| \leq \int_{-1}^{1} |\tau| \cdot \|x\|_C\,d\tau = \|x\|_C \Rightarrow A \text{ огр}; \ \|A\| \leq 1$$

При $x_n(t) = \begin{cases} -1, & t\in[-1,-\frac{1}{n}] \\ nt, & t\in(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ 1, & t\in[\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$ $\quad \|x_n\|_C = 1$



$(Ax_n)(t)$ $\quad \tau x_n(\tau) \geq 0 \ \forall \tau \in [-1,1] \Rightarrow \|Ax_n\|_C = (Ax_n)(1) = \underbrace{\int_{-1}^{-1/n} -\tau\,d\tau + \int_{1/n}^{1} \tau\,d\tau}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} + \overbrace{\int_{-1/n}^{1/n} n\tau^2\,d\tau}^{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Значит, $\|A\| = 1$

③ При каком условии на $\lambda_n \in \mathbb{R}$ оператор $A: l_2 \to l_2$

$Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$ будет а) обратимым
б) непрерывно обратим

$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} Im\,A = l_2 \\ Ker\,A = \{0\} \end{cases}$

По теореме Банаха, если $\exists A^{-1}$, то он непрерывен $\Rightarrow$ (l_2 банахово)
$\Rightarrow$ условие для а) и б) одинаковы

$Ker\,A = \{0\} \Rightarrow \lambda_n \neq 0$, иначе

$e_n = (0,0,\dots,0,\overset{n}{1},0,\dots) \in Ker\,A$

$\forall y \in l_2 \quad Ax = y \Leftrightarrow \lambda_n x_n = y_n \Leftrightarrow x_n = \frac{y_n}{\lambda_n}$

но $x \in l_2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)^2 < \infty$. Например, пусть $\exists m > 0: |\lambda_n| \geq m \ \forall n \in \mathbb{N}$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)^2 \leq \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 < \infty$ $(y \in l_2)$. $\Rightarrow Im\,A = l_2 \Rightarrow$ обратим $\xrightarrow{\text{т. Банаха}}$ непр. обратим

④ $f(x)=\int_0^1 t\,x(t)\,dt$; $x\in C^1[-1,1]$. $\|x\|_{C^1}=\|x\|_C+\|x'\|_C$

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\,\frac{dt^2}{2}=\frac{1}{2}x(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 t^2x'(t)\,dt$$

$$|f(x)|\le\frac{1}{2}\|x\|_C+\frac{1}{2}\int_0^1\|x'\|_C\,dt=\frac{1}{2}\|x\|_{C^1}\Rightarrow f \text{ огр. и } \|f\|\le\frac{1}{2}$$

при $x(t)\equiv 1$ $\quad f(x)=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}\Rightarrow \underline{\|f\|=\frac{1}{2}}$

⑤ $x(\cdot)\in C^2[-1,1]$

$$f_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^2}(x(\varepsilon)+x(-\varepsilon)-2x(0)),\quad f_0(x)=x''(0)$$

Доказать, что f_ε, f_0 – линейные непрерывные функционалы, и $f_\varepsilon\to f_0$ *-слабо. (при $\varepsilon\to 0$)

Линейность очевидна, $|f_\varepsilon(x)|\le\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 4\|x\|_C\le\frac{4}{\varepsilon^2}\|x\|_{C^2}\Rightarrow f_\varepsilon$ ограничен ($\Rightarrow$ непр)

$|f_0(x)|\le\|x''\|_C\le\|x\|_{C^2}\Rightarrow f_0$ ограничен

покажем, что $f_\varepsilon\xrightarrow{*\text{-сл.}}f_0$

$\forall x\in C^2[-1,1]$

$$f_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{x(\varepsilon)-x(0)}{\varepsilon}-\frac{x(0)-x(-\varepsilon)}{\varepsilon}\right)=\frac{1}{\varepsilon}(x'(\xi_1)-x'(\xi_2))=x''(\eta)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}x''(0)\ (x''\text{ непр.})$$

$\xi_1\in[0,\varepsilon],\ \xi_2\in[-\varepsilon,0]$ $\quad \eta\in[\xi_2,\xi_1]\Rightarrow\eta\in[-\varepsilon,\varepsilon]$

Значит $\forall x\in C^2[-1,1]$ $f_\varepsilon(x)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}f(x)\Rightarrow f_\varepsilon\xrightarrow{*\text{-сл.}}f_0$

⑥ Найти оператор, сопряженный к $A: l_2\to l_2$ $\quad Ax=(0,x_1,x_2,\ldots)$

l_2 гильбертово, $l_2^*=l_2$. $A^*: l_2\to l_2$

$D(A)=l_2$. $\quad\forall x,y\in l_2$

В гильб. $\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle\Rightarrow \underline{A^*y=(y_2,y_3,y_4,\ldots)}$

$\langle Ax,y\rangle = x_1y_2+x_2y_3+\ldots$

$D(A^*)=l_2$