Домашнее задание от 28-ого дня карантина

Задача 4.10. Найти углы треугольника в $L_2[-1,\,1]$, образованного функциями

$$x_1(t) = 0, \quad x_2(t) = 1, \quad x_3(t) = t.$$

Решение: Вычислим длины сторон.

$$\|x_2 - x_1\| = \sqrt{2}$$

$$\|x_2 - x_3\| = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} (1-t)^2 dt} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\|x_1 - x_3\| = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} t^2 dt} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Из соотношений для углов получаем

$$\cos\phi_1 = \frac{\langle x_2 - x_1,\, x_3 - x_1\rangle}{\|x_2 - x_1\|\,\|x_3 - x_1\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}\int\limits_{-1}^{1} t dt = 0$$

$$\cos\phi_2 = \frac{\langle x_1 - x_2,\, x_3 - x_2\rangle}{\|x_1 - x_2\|\,\|x_3 - x_2\|} = \frac{\sqrt{3}}{4}\int\limits_{-1}^{1} (1-t) dt = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\phi_3 = \frac{\langle x_1 - x_3,\, x_2 - x_3\rangle}{\|x_1 - x_3\|\,\|x_2 - x_3\|} = \frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{1} t(t-1) dt = \frac{1}{2}$$

Таким образом $\phi_1 = \dfrac{\pi}{2},\ \phi_2 = \dfrac{\pi}{6},\ \phi_3 = \dfrac{\pi}{3}$.

Задача 4.11. Для функции $x(t) = t^\alpha$ найти ее норму в пространстве L_p для всех допустимых значений p.
Решение: Значение p допустимо в том и только том случае, когда $\alpha p > -1$. При $\alpha = 0$ имеем $x(t) = 1,\ \|(x)\| = 1$. Если $\alpha \neq 0$, то

$$\|x\|_{L_p} = \left(\int\limits_0^1 t^{\alpha p} dt\right)^{\frac{1}{p}} = (\alpha p + 1)^{-\frac{1}{p}}.$$

Задача 4.18. Пусть $[c,\,d] \subseteq [a,\,b]$. Доказать, что множество

$$M = \{x(\cdot) \in L_2[a,\,b] \colon x(t) = 0 \text{ почти всюду на } [c,\,d]\}$$

является подпространством и описать $M^\perp$.
Решение: Очевидно, что M — линейное многообразие, покажем его замкнутость. Рассмотрим сходящуюся последовательность $x_n \in M,\ x_n \to x$.

$$\int\limits_c^d x^2(t) dt = \int\limits_c^d (x_n(t) - x(t))^2 dt \leqslant \|x_n - x\|^2 \to 0,$$

поэтому $x(t) = 0$ почти всюду на $[c,\, d]$, то есть $x \in M$.

Для произвольного элемента $y \in M^\perp$ и для всех $x \in M$ верно

$$\langle x,\, y\rangle = \int\limits_a^b x(t)y(t)dt = \int\limits_{[a,\, b]\setminus[c,\, d]} x(t)y(t)dt = 0,$$

откуда получаем $y(t) = 0$ почти всюду на $[a,\, b] \setminus [c,\, d]$, и

$$M^\perp = \{x(\cdot) \in L_2[a,\, b] \colon x(t) = 0 \text{ почти всюду на } [a,\, b] \setminus [c,\, d]\}.$$

Задача 4.19. Доказать, что множество

$$M = \left\{ x(\cdot) \in L_2[0,\, 1] \colon \int\limits_0^1 x(t)dt = 0 \right\}$$

является подпространством и описать $M^\perp$.

Решение: Функционал $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt$ является непрерывным, поэтому для любой последовательности $x_n \in M,\ x_n \to x$ верно $f(x_n) = 0 = f(x)$, откуда $x \in M$, и множество M является линейным подпространством. Для $y \in M^\perp,\ x \in M$ выполнено

$$\langle x,\, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt = 0.$$

Это соотношение, очевидно, выполнено при $y(t) = \mathrm{const}$ почти всюду. Покажем, что для других функций это соотношение не будет выполнено. Действительно, если функция не эквивалентна постоянной, то найдутся $\gamma_1,\ \gamma_2$ такие, что $\gamma_1 < \gamma_2$ и два множества Δ_1, Δ_2 одинаковой меры такие, что $\gamma_1 < \gamma_2,\ \ y(t)|_{\Delta_1} < \gamma_1,\ y(t)|_{\Delta_2} > \gamma_2$. Рассмотрим функцию

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_1 \\ -1, & t \in \Delta_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Очевидно, что $x \in M$, однако $\langle x,\, y\rangle \neq 0$.

Таким образом, $M^\perp$ состоит только из функций, постоянных почти всюду.

Задача 5.9. В пространстве $L_2[0,\, 1]$ найти расстояние от элемента $x(t) = t^2$ до подпространства

$$L = \left\{ x(\cdot) \in L_2[0,\, 1] \colon \int\limits_0^1 x(t)dt = 0 \right\}.$$

Решение: В гильбертовом пространстве $x = y + z$, где $y \in M,\ z \in M^\perp$, причем эти элементы определены единственным образом. Из предыдущей задачи следует, что $z(t) = c$ почти всюду, тогда $y(t) = t^2 - c$, при этом $\int\limits_0^1 y(t)dt = 0$, откуда $c = \frac{1}{3}$. Расстояние до подпространства совпадает с длиной перпендикуляра

$$\rho(x,\, L) = \|z\| = \frac{1}{3}.$$

Многочлены Лагерра Покажем, что полиномы Лагерра, задаваемые выражением

$$x_n(t) = \frac{e^t}{n!}(e^{-t}t^n)^{(n)}$$

образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_0^\infty f(t)g(t)e^{-t}dt.$$

Пусть $m < n$.

$$\langle t^m, x_n\rangle = \frac{1}{n!}\int\limits_0^\infty t^m(e^{-t}t^n)^{(n)}dx$$

Интегрируя это выражение m раз по частям, получаем

$$(-1)^m\frac{m!}{n!}\int\limits_0^\infty (e^{-t}t^n)^{(n-m)}dt = 0,$$

поскольку $n - m > 0$. Таким образом, $\langle x_n, x_m\rangle = 0$ для любого $m < n$.

$$\langle x_n, x_n\rangle = \frac{1}{n!}\int\limits_0^\infty x_n(t)(e^{-t}t^n)^{(n)}dt = \frac{(-1)^n}{n!}\int\limits_0^\infty x_n^{(n)}(t)(e^{-t}t^n)dt.$$

Используя то, что $x_n^{(n)}(t) = (-1)^n$, получаем $\langle x_n, x_n\rangle = 1$.

Полиномы Лежандра Покажем, что полиномы

$$x_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$$

образуют ортогональную систему в $L_2[-1, 1]$. При $m < n$, интегрируя по частям, получаем

$$\langle x_n, x_m\rangle = \frac{1}{n!m!2^{n+m}}\int\limits_{-1}^1 \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n\frac{d^m}{dt^m}(t^2-1)^m dt = \frac{1}{n!m!2^{n+m}}\int\limits_{-1}^1 (t^2-1)^n\frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}}(t^2-1)^m dt = 0,$$

поскольку $(t^2-1)^m$ является полиномом степени $2m$.

Полиномы Чебышёва I рода Покажем, что система

$$T_n(t) = \cos(n\arccos(t))$$

является ортогональной относительно

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_{-1}^1 f(t)g(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Рассмотрим

$$\langle T_n, T_m\rangle = \int\limits_{-1}^1 T_n(t)T_m(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \{t = \cos\phi\} = \int\limits_0^\pi \cos n\phi\cos m\phi dt = \frac{\pi}{2}\delta_{mn}.$$

Полиномы Чебышёва II рода Покажем, что система

$$T_n(t) = \frac{T'_{n+1}(t)}{n+1} = \frac{\sin((n+1)\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

является ортогональной относительно

$$\langle f,\, g\rangle = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\sqrt{1-t^2}dt.$$

$$\langle T_n,\, T_m\rangle = \int\limits_{-1}^{1} \sin((n+1)\arccos t)\sin((m+1)\arccos t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}\delta_{mn}$$

абсолютно аналогично вычислению интеграла для полиномов Чебышёва I рода.