В. А. ТРЕНОГИН
Б. М. ПИСАРЕВСКИЙ
Т. С. СОБОЛЕВА

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальностям: «Математика», «Прикладная математика»

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1984

Задачи и упражнения по функциональному анализу. Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.— 256 с.

Сборник содержит задачи по всем основным разделам курса функционального анализа, читаемого в вузах. Он ориентирован на учебное пособие В. А. Треногина «Функциональный анализ», вышедшее в 1980 г. Рамки задачника несколько шире требований программы. В задачник вошли такие разделы, как: «Нелинейные операторные уравнения в банаховых пространствах», «Дискретные приближения решений операторных уравнений», «Монотонные операторы», «Элементы теории экстремумов и выпуклого анализа» и др.

Рецензенты: кафедра высшей математики Московского инженерно-физического института:
доктор физико-математических наук
А. А. Кириллов.

Владилен Александрович Треногин
Борис Меерович Писаревский
Татьяна Сергеевна Соболева

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Редактор А. И. Штерн
Техн. редактор С. Я. Шкляр
Корректоры Т. Г. Егорова, И. Я. Криштаиь

ИБ № 12499

Сдано в набор 19.09.83. Подписано к печати 05.07.84. Формат 84×108 1/32. Бумага тип. № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 13,44 Условн. кр.-отт. 13,44. Уч.-изд. л. 14,84. Тираж 20 000 экз. Заказ № 806. Цена 80 коп.

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25

$T\frac{1702050000-125}{053(02)-84}$ 58-84

© Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1984

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава 1. **Нормированные пространства** 9
§ 1. Линейные нормированные пространства . . . 9
§ 2. Банаховы пространства 22
§ 3. Гильбертовы пространства 26
§ 4. Пространства Лебега и Соболева 33
§ 5. Построение элемента наилучшего приближения в гильбертовых и банаховых пространствах . . . 37
§ 6. Метрические пространства 43

Глава 2. **Линейные операторы** 46
§ 7. Непрерывность, ограниченность и норма линейного оператора 46
§ 8. Пространство ограниченных линейных операторов 51
§ 9. Обратные операторы 58
§ 10. Замкнутые операторы 62

Глава 3. **Сопряженные пространства и сопряженные операторы** 65
§ 11. Непрерывные линейные функционалы 65
§ 12. Теорема Хана — Банаха. Структура сопряженного пространства 67
§ 13. Слабая сходимость. Рефлексивность 79
§ 14. Сопряженные операторы 73

Глава 4. **Компактные множества и вполне непрерывные операторы** 81
§ 15. Компактные множества в нормированных пространствах 81
§ 16. Линейные вполне непрерывные операторы . . . 88
§ 17. Нормально разрешимые операторы 96

Глава 5. **Самосопряженные операторы. Спектральная теория** 102
§ 18. Самосопряженные операторы 102
§ 19. Спектр линейного оператора 107
§ 20. Спектр вполне непрерывного и самосопряженного оператора 111

§ 21. Линейные интегральные уравнения 114
§ 22. Неограниченные операторы в гильбертовом пространстве 123

Глава 6. **Нелинейные операторы и уравнения в банаховых пространствах** 127
§ 23. Дифференцирование нелинейных операторов . . 127
§ 24. Принцип сжимающих отображений, итерационный процесс Ньютона и принцип неподвижной точки Шаудера 136
§ 25. Неявные операторы 146

Глава 7. **Дискретные приближения решений операторных уравнений** 151
§ 26. Приближенные и разностные схемы 151
§ 27. Интерполяция сплайнами 164
§ 28. Приближенные схемы Галеркина 170
§ 29. Метод монотонных операторов 177

Глава 8. **Элементы теории экстремума и выпуклого анализа** 186
§ 30. Необходимые условия экстремума функционала 186
§ 31. Достаточные условия экстремума функционала 195
§ 32. Полунепрерывные и выпуклые функционалы . . 201

Ответы и указания 205

Литература 250
Список обозначений 252
Предметный указатель 254

ПРЕДИСЛОВИЕ

Функциональный анализ — одна из важнейших областей современной математики. Его возникновение и развитие связано с именами таких крупнейших ученых как Д. Гильберт, Ф. Рисс, С. Банах, М. Фреше, А. Н. Колмогоров, С. Л. Соболев, А. Н. Тихонов, С. М. Никольский и др. Началом создания функционального анализа можно считать систематическое построение теории операторов в бесконечномерных гильбертовых пространствах, а затем и в линейных нормированных пространствах (начало XX века).

Важной особенностью функционального анализа является общая абстрактная форма рассмотрения проблем анализа, позволяющая единообразно исследовать далекие, казалось бы, друг от друга вопросы. Именно поэтому сегодня идеи, концепции и методы функционального анализа пронизывают чуть ли не все области математики, объединяя их в единое целое.

Функциональный анализ играет важную роль в современном математическом образовании инженера-исследователя, которому предстоит применять математические методы в конкретной области науки. На языке функционального анализа получают ясное выражение основные проблемы прикладной и вычислительной математики.

Предлагаемый задачник рассчитан на студентов технических вузов, специализирующихся в области прикладной математики. Его структура и применяемая терминология ориентированы на учебное пособие В. А. Треногина «Функциональный анализ» [25]. Однако задачник составлен так, чтобы читатель мог пользоваться любым другим пособием по функциональному анализу.

Задачник будет полезен инженерам, математикам-прикладникам при изучении курса функционального анализа, студентам университетов при первоначальном изучении этого курса.

Данный задачник отражает многолетний опыт авторов по преподаванию функционального анализа в Московском физико-техническом институте, Московском институте нефтехимической и газовой промышленности им. И. М. Губкина, Московском институте стали и сплавов. Наряду с традиционными задачами, при составлении которых была использована приведенная в конце книги литература, сборник содержит большое число новых, отвечающих современным потребностям практики. Сюда, в частности, относятся все задачи, при решении которых предполагается использование ЭВМ, многие задачи нелинейного и прикладного функционального анализа.

Сборник неоднороден по своему содержанию. По каждой теме имеются задачи различной степени трудности, предназначенные как для аудиторной, так и для самостоятельной работы студентов. Кроме задач технического или вычислительного характера имеются задачи, позволяющие лучше уяснить то или иное понятие или результат. Встречаются группы задач, которые могут служить для самостоятельного изучения отдельных вопросов теории, представляя непростое утверждение в виде его разложения на более или менее элементарные упражнения. К подавляющему большинству задач приведены ответы или указания к решениям.

Задачник состоит из восьми глав, каждая из которых содержит, в свою очередь, несколько параграфов. Параграф начинается с краткого теоретического введения, содержащего необходимые для решения последующих задач основные определения и теоремы, а также краткие описания используемых математических приемов. Иногда теоретические сведения вклиниваются внутрь параграфа, предшествуя группе задач на заданную тему.

В главе 1 подобраны задачи, относящиеся к теории линейных нормированных, банаховых, гильбертовых, лебеговых, соболевских и метрических пространств. Отдельный параграф (§ 5) посвящен важному в приложениях вопросу построения элемента наилучшего приближения в гильбертовых и банаховых пространствах.

Глава 2 включает материал по теории линейных операторов. Наряду с задачами общего плана, связанными с понятиями непрерывности, ограниченности, нормы линейных операторов, а также обратного оператора, значительное внимание уделено конкретным линейным операторам, в частности, интегральным и дифференциальным, которые находят широкое применение в решении прикладных задач. Рассматриваются также и неограниченные замкнутые линейные операторы.

Задачи по теории сопряженных пространств и сопряженных операторов подобраны в главе 3.

В главе 4 рассмотрены компактные множества, вполне непрерывные и нормально разрешимые операторы.

В главе 5 собраны задачи по теории самосопряженных операторов в гильбертовых пространствах, задачи на теорию спектра линейного, вполне непрерывного и самосопряженного операторов. Специальные параграфы посвящены линейным интегральным уравнениям. Рассматриваются решения интегральных уравнений II рода, а также метод регуляризации для интегральных уравнений I рода (§ 21). Здесь же уделяется внимание неограниченным операторам, в частности, оператору Штурма — Лиувилля (§ 22).

Глава 6 содержит задачи нелинейного функционального анализа. Рассматриваются дифференцирование в нелинейном случае, сжимающие отображения, метод касательных Ньютона, принцип Шаудера, неявные операторы.

Отметим, что эти и другие разделы нелинейного функционального анализа появились в связи с выросшими потребностями теории дифференциальных уравнений, численных методов, математического программирования и других разделов математики.

Определенный интерес для прикладников может представить глава 7, которая содержит подборку задач и упражнений на важнейшие современные приближенные методы — метод разностных схем, метод сплайнов, метод Галеркина и метод монотонных операторов.

Последняя, 8-я глава посвящена вариационному исчислению, как классическому (§§ 30, 31), так и абстрактному (§ 32). При этом авторы старались найти единый подход к этим вопросам.

Поскольку задачник предназначен, в основном, для студентов технических вузов, авторы сочли нецелесообразным включать в него упражнения по теории топологических и линейных топологических пространств и по теории меры. В сборник из-за ограниченного объема не вошли также некоторые важные прикладные разделы функционального анализа, в частности, применения к тео-

рии дифференциальных уравнений с частными производными (общий метод Фурье, обобщенные функции, полугруппы, приближенные схемы) и к теории оптимального управления.

Авторы глубоко признательны профессору кафедры теории функций и функционального анализа МГУ им. М. В. Ломоносова А. А. Кириллову, профессору А. И. Прилепко и возглавляемому им коллективу кафедры высшей математики МИФИ за большое число ценных советов, учтенных при подготовке настоящего издания.

Авторы искренне благодарны А. И. Штерну, проверившему текст рукописи во всех его деталях и высказавшему много полезных замечаний, а также Л. Б. Корельштейну за помощь в составлении ответов и указаний.

В. А. Треногин
Б. М. Писаревский
Т. С. Соболева

Глава 1

НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Линейные нормированные пространства

Линейное пространство X над множеством вещественных чисел $\mathbf{R}$ (комплексных чисел $\mathbf{C}$) называется *нормированным* пространством, если каждому $x \in X$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$, называемое *нормой* x, так, что выполнены следующие три аксиомы:

1) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ для любого $x \in X$ и любого вещественного (комплексного) числа λ;

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in X$.

Открытым шаром с центром в точке $x_0 \in X$ и радиусом $r > 0$ называется множество $S_r(x_0) = \{x \in X: \|x - x_0\| < r\}$. *Замкнутым шаром* с центром в точке $x_0 \in X$ и радиусом $r > 0$ называется множество $\bar{S}_r(x_0) = \{x \in X: \|x - x_0\| \leqslant r\}$. *Сферой* с центром в точке $x_0 \in X$ и радиусом $r > 0$ называется множество $\sigma_r(x_0) = \{x \in X: \|x - x_0\| = r\}$.

Множество $A \subset X$ называется *ограниченным*, если его можно заключить в некоторый шар (открытый или замкнутый). *Диаметром* множества $A \subset X$ называется число $\operatorname{diam} A = \sup\limits_{x, y \in A} \|x - y\|$. *Расстоянием от точки $x \in X$ до множества* $A \subset X$ называется число $\rho(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \|x - y\|$. *Расстоянием между множествами* $A, B \subset X$ называется число $\rho(A, B) = \inf\limits_{x \in A, y \in B} \|x - y\|$.

Множество $M \subset X$ называется *открытым*, если для любой $x_0 \in M$ существует $r > 0$ такое, что $S_r(x_0) \subset M$. Точка $a \in X$ называется *предельной* точкой множества $M \subset X$, если в любом шаре $S_r(a)$ найдется точка $x \in M$ $(x \neq a)$. Множество всех предельных точек множества M обозначается M'. Множество $M \cup M'$ называется *замыканием* множества M и обозначается $\bar{M}$. Множество $M \subset X$ называется *замкнутым*, если $\bar{M} = M$.

Последовательность $x_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$ называют *сходящейся* к элементу $x_0 \in X$ и записывают $x_n \to x_0$, если $\|x_n - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Множество $L \subset X$ называется *линейным многообразием*, если из $x, y \in L$ следует, что $x + y \in L$ и $\lambda x \in L$ для любого числа λ. Если линейное многообразие является замкнутым в X множеством, то оно называется *подпространством*. *Алгебраической суммой* множеств A и B пространства X называется множество $A + B$ всевозможных сумм вида $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$. Пусть $x_0 \in X$ — произвольный элемент, $L \subset X$ — линейное многообразие. Множество $x_0 + L$ называется *аффинным многообразием*. Пусть L, M — подпространства пространства X такие, что любой элемент $x \in X$ единственным образом представим в виде $x = u + v$, где $u \in L$, $v \in M$. В этом случае говорят, что X есть *прямая сумма* L и M и записывают $X = L \oplus M$.

Отрезком, соединяющим точки $x, y \in X$, называется множество точек вида $\alpha x + \beta y$, где $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. Множество $A \subset X$ называется *выпуклым*, если отрезок, соединяющий любые две точки A, целиком лежит в A.

Множество $A \subset X$ называется *всюду плотным* в X, если $\bar{A} = X$. Пространство X называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество. Множество $A \subset X$ называется *нигде не плотным* в X, если в каждом шаре $S \subset X$ содержится другой шар S_1, не содержащий точек A.

Пространство X называется *строго нормированным*, если в нем равенство $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$ возможно только для $y = \lambda x$, где $\lambda > 0$.

Отображение $F\colon X \to Y$ линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in S_\delta(x_0)$ $f(x) \in S_\varepsilon(f(x_0))$. Отображение $F\colon X \to Y$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$. Отображение $F\colon X \to Y$ называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x_0 \in X$ из $x \in S_\delta(x_0)$ следует $f(x) \in S_\varepsilon(f(x_0))$.

1.1. Доказать, что в определении линейного нормированного пространства аксиому 1) можно заменить на аксиому: из $\|x\| = 0$ следует $x = 0$.

1.2. Пусть $x_n, x, y_n, y \in X$ $(n \in \mathbf{N})$. Доказать, что:

а) если $x_n \to x$, то x_n — ограниченная последовательность;

б) если $x_n \to x$, $\lambda_n \to \lambda$, $\lambda_n \in \mathbf{C}$, то $\lambda_n x_n \to \lambda x$;

в) если $x_n \to x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$;

г) если $x_n \to x$ и $\|x_n - y_n\| \to 0$, то $y_n \to x$;

д) если $x_n \to x$, то $\|x_n - y\| \to \|x - y\|$;

е) если $x_n \to x$, $y_n \to y$, то $\|x_n - y_n\| \to \|x - y\|$.

1.3. Доказать, что открытый шар $S_r(x_0)$ — открытое множество, замкнутый шар $\bar{S}_r(x_0)$ — замкнутое множество и замыкание $S_r(x_0)$ совпадает с $\bar{S}_r(x_0)$.

1.4. Доказать, что $\operatorname{diam} S_r(x_0) = 2r$.

1.5. Пусть $\bar{S}_r(a) \subset \bar{S}_R(b) \subset X$. Доказать, что $r \leqslant R$ и $\|a - b\| \leqslant R - r$.

1.6. Доказать, что для любых элементов $x, y \in X$ выполняется неравенство $\|x\| \leqslant \max\{\|x + y\|, \|x - y\|\}$.

1.7. Доказать, что алгебраическая сумма и объединение двух ограниченных множеств — ограниченные множества.

1.8. Доказать, что множество $A \subset X$ является ограниченным тогда и только тогда, когда $\operatorname{diam} A < \infty$.

1.9. Доказать, что множество $A \subset X$ является ограниченным тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x_n \in A$ и любой последовательности $\lambda_n \in \mathbf{C}$, стремящейся к нулю, последовательность $\lambda_n x_n$ стремится к нулю.

1.10. Пусть $A \subset X$ — ограниченное множество. Доказать, что $\bar{A}$ — ограниченное множество и $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \bar{A}$.

1.11. Доказать, что для произвольного множества $A \subset X$ множество A' замкнуто.

1.12. Доказать, что для произвольного множества $A \subset X$ имеет место включение $(A')' \subset A'$. Возможно ли здесь строгое включение?

1.13. Следует ли из $A, B \subset X$, $\bar{A} \subset \bar{B}$, что $A \subset B$?

1.14. Пусть $A \subset X$ — замкнутое множество. Доказать, что $\rho(x, A) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in A$.

1.15. Пусть $A, B \subset X$ — произвольные множества. Доказать, что $\rho(A, B) = \rho(\bar{A}, B) = \rho(A, \bar{B}) = \rho(\bar{A}, \bar{B})$.

1.16. Пусть $x \in X$ — произвольная точка, $A \subset X$ — произвольное множество. Доказать, что $\rho(x, A) = \rho(x, \bar{A})$.

1.17. Пусть $A, B \subset X$ — замкнутые множества. Возможно ли, что $\rho(A, B) = 0$, если $A \cap B = \varnothing$?

1.18. Пусть $A \subset X$ — произвольное множество. Назовем *границей* множества A множество ∂A таких точек $x \in X$, что любой открытый шар с центром в x содержит хотя бы одну точку из A и хотя бы одну точку из дополнения к A. Доказать, что ∂A — замкнутое множест-

во и что граница A совпадает с границей дополнения к A.

1.19. Доказать, что если хотя бы одно из множеств A, $B \subset X$ открыто, то $A+B$ — открытое множество.

1.20. Пусть A_1, $A_2 \subset X$ — замкнутые множества, причем $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Построить открытые множества B_1, $B_2 \subset X$ такие, что $A_1 \subset B_1$, $A_2 \subset B_2$ и $B_1 \cap B_2 = \varnothing$.

1.21. Доказать, что в любом линейном нормированном пространстве существуют два непересекающиеся открытые множества, которые нельзя поместить в непересекающиеся замкнутые.

1.22. Убедиться, что в следующих случаях выполняются аксиомы нормы, т. е. норма определена корректно. Что означает сходимость последовательности в каждом из перечисленных ниже пространств?

а) Пространство E^m столбцов $x=(x_k)_{k=1}^m$ ($x_k \in \mathbf{R}$ $x_k \in \mathbf{C}$)) с нормой $\|x\| = \left[\sum_{k=1}^m |x_k|^2\right]^{1/2}$.

б) Пространство c^m столбцов $x=(x_k)_{k=1}^m$ ($x_k \in \mathbf{R}$ ($x_k \in \mathbf{C}$)) с нормой

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |x_k|.$$

в) Пространство l^m столбцов $x=(x_k)_{k=1}^m$ ($x_k \in \mathbf{R}$ ($x_k \in \mathbf{C}$)) с нормой

$$\|x\| = \sum_{k=1}^m |x_k|.$$

г) Пространство l_p^m $(p>1)$ столбцов $x=(x_k)_{k=1}^m$ ($x_k \in \mathbf{R}$ ($x_k \in \mathbf{C}$)) с нормой

$$\|x\| = \left[\sum_{k=1}^m |x_k|^p\right]^{1/p}.$$

д) Пространство l_1 последовательностей $x=(x_1, x_2, \ldots)$ ($x_k \in \mathbf{R}$ ($x_k \in \mathbf{C}$)), удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^\infty |x_k| < \infty$, с нормой

$$\|x\| = \sum_{k=1}^\infty |x_k|.$$

е) Пространство l_2 последовательностей $x=(x_1, x_2, \ldots)$ ($x_k \in \mathbf{R}$ ($x_k \in \mathbf{C}$)), удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 < \infty$, с нормой

$$\|x\| = \left[\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2\right]^{1/2}.$$

ж) Пространство l_p $(p>1)$ последовательностей $x=(x_1, x_2, \ldots)$ ($x_k \in \mathbf{R}$ ($x_k \in \mathbf{C}$)), удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < \infty$, с нормой

$$\|x\| = \left[\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right]^{1/p}.$$

з) Пространство m ограниченных последовательностей $x=(x_1, x_2, \ldots)$ ($x_k \in \mathbf{R}$ ($x_k \in \mathbf{C}$)) с нормой

$$\|x\| = \sup_k |x_k|.$$

и) Пространство c_0 стремящихся к нулю последовательностей $x=(x_1, x_2, \ldots)$ ($x_k \in \mathbf{R}$ ($x_k \in \mathbf{C}$)) с нормой

$$\|x\| = \max_k |x_k|.$$

к) Пространство c сходящихся последовательностей $x=(x_1, x_2, \ldots)$ ($x_k \in \mathbf{R}$ ($x_k \in \mathbf{C}$)) с нормой

$$\|x\| = \sup_k |x_k|.$$

1.23. Убедиться, что в следующих случаях выполняются аксиомы нормы, т. е. норма определена корректно. Что означает сходимость последовательности в каждом из перечисленных ниже пространств?

а) Пространство $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

б) Пространство $C^k[a, b]$ k раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \sum_{i=0}^k \max_{t \in [a,b]} |x^{(i)}(t)|.$$

в) Пространство $M[a, b]$ всех ограниченных на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

г) Пространство K непрерывных на вещественной прямой финитных функций (равных нулю вне некоторого

интервала, своего для каждой функции) с нормой

$$\|x\| = \max_t |x(t)|.$$

д) Пространство $L_p[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \left[\int_a^b |x(t)|^p dt\right]^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

е) Пространство $V[a, b]$ функций с ограниченной на $[a, b]$ вариацией с нормой

$$\|x\| = |x(a)| + \bigvee_a^b x(t).$$

Функция $x(t)$, заданная на $[a, b]$, называется *функцией с ограниченной вариацией*, если существует постоянная c такая, что для любого разбиения отрезка $[a, b]$: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})| < c$. Для функции с ограниченной на $[a, b]$ вариацией ее *полной вариацией* называется число

$$\bigvee_a^b x(t) = \sup \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})|,$$

где верхняя грань берется по всевозможным конечным разбиениям отрезка $[a, b]$.

1.24. Изобразить единичный замкнутый шар $\bar{S}_1(0)$ в вещественных пространствах E^2, c^2, l^2, l_3^2.

1.25. Можно ли в множестве столбцов $x = (x_k)_{k=1}^m$ $(x_k \in \mathbf{R})$ положить

$$\|x\| = \left[\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p\right]^{1/p},$$

если $p < 1$, $m \geqslant 2$?

1.26. Доказать следующие неравенства для норм:

а) $\alpha_m \|x\|_{E^m} \leqslant \|x\|_{c^m} \leqslant \beta_m \|x\|_{E^m}$;

б) $\gamma_m \|x\|_{l^m} \leqslant \|x\|_{c^m} \leqslant \delta_m \|x\|_{l^m}$;

в) $\varepsilon_m \|x\|_{E^m} \leqslant \|x\|_{l^m} \leqslant \nu_m \|x\|_{E^m}$.

Указать наилучшие значения входящих в них положительных постоянных α_m, β_m, γ_m, δ_m, ε_m, ν_m.

1.27. Пусть $\alpha_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Доказать, что в пространстве столбцов $x = (x_k)_{k=1}^m$ $(x_k \in \mathbf{R})$ можно ввести норму следующими способами:

а) $\|x\| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} (\alpha_k |x_k|)$;

б) $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k |x_k|$;

в) $\|x\| = \left[\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k |x_k|^2\right]^{1/2}$.

1.28. Доказать, что в пространстве столбцов $x = (x_k)_{k=1}^m$ $(x_k \in \mathbf{R})$ можно ввести норму следующими способами:

а) $\|x\| = \left[\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{i} |x_k|^2\right]^{1/2}$;

б) $\|x\| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} \left|\sum\limits_{i=1}^{k} x_i\right|$.

1.29. Пусть $A = \|a_{ij}\|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ — симметричная положительно определенная матрица. Доказать, что в пространстве столбцов $x = (x_k)_{k=1}^m$ $(x_k \in \mathbf{R})$ можно ввести норму

$$\|x\| = \left[\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j\right]^{1/2}.$$

1.30. Привести пример последовательности $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$ $(x_k \in \mathbf{R})$, которая принадлежала бы каждому из рассматриваемой пары пространств и:

а) сходилась в m, но не сходилась в l_1;

б) сходилась в m, но не сходилась в l_2;

в) сходилась в l_2, но не сходилась в l_1;

г) сходилась в c_0, но не сходилась в l_1;

д) сходилась в c_0, но не сходилась в l_2.

1.31. Доказать, что при любом $p \geqslant 1$ каждый элемент пространства l_p является и элементом пространства c_0, но элемент $x = (1, 1/\ln 2, 1/\ln 3, \ldots, 1/\ln n, \ldots) \in c_0$ не принадлежит l_p ни при каком $p \geqslant 1$.

1.32. Доказать, что если рассматривать пространство l_1 как множество в пространстве m, то его замыкание есть c_0.

1.33. Сходится ли в пространстве $C[0, 1]$ последовательность:

а) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$;

б) $y_n(t) = t^n - t^{2n}$?

1.34. Сходится ли последовательность

$$x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$$

в пространстве:

а) $C[0, 1]$; б) $C^1[0, 1]$?

1.35. Пусть $x_n(t)$, $x(t)$, $y(t) \in C^1[a, b]$, $x_n(t) \to x(t)$ при $n \to \infty$. Доказать, что $x_n(t)y(t) \to x(t)y(t)$ при $n \to \infty$.

1.36. Доказать, что всякая последовательность, сходящаяся в пространстве $C[a, b]$, будет сходящейся и в пространстве $\tilde{L}_2[a, b]$. Построить пример последовательности, сходящейся в пространстве $\tilde{L}_2[a, b]$, но не сходящейся в пространстве $C[a, b]$.

1.37. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций принять за норму элемента $x(t)$:

а) $|x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]}$;

б) $\|x''\|_{C[a,b]} + \|x\|_{\tilde{L}_2[a,b]}$;

в) $|x(a)| + |x(b)| + \|x''\|_{C[a,b]}$;

г) $|x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]} + \|x''\|_{\tilde{L}_2[a,b]}$?

1.38. Можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций принять за норму элемента $x(t)$:

а) $\max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$;

б) $\max\limits_{t \in [a,b]} |x'(t)|$;

в) $|x(b) - x(a)| + \max\limits_{t \in [a,b]} |x'(t)|$;

г) $|x(a)| + \max\limits_{t \in [a,b]} |x'(t)|$;

д) $\int\limits_a^b |x(t)|\,dt + \max\limits_{t \in [a,b]} |x'(t)|$?

1.39. Будет ли множество всех многочленов в пространстве $C[a, b]$:

а) открытым; б) замкнутым?

1.40. Будет ли замкнутым в пространстве $C[a, b]$ множество многочленов степени:

а) $\leqslant k$; б) $= k$?

1.41. Доказать, что в пространстве $C[a, b]$ множество функций $x(t)$ таких, что для любого $t \in [a, b]$ выполняется неравенство $|x(t)| < 1$, является открытым.

1.42. Пусть множество $M \subset \mathbf{R}$ фиксировано. Положим $A_M = \{x(t) \in C[a, b]:\ x(t) \in M$ для любого $t \in [a, b]\}$. Будет ли множество A_M:

а) открыто, если M открыто;

б) замкнуто, если M замкнуто?

1.43. Функция $x = f(t)$ определена и непрерывна на всей вещественной оси. Доказать, что множество $\{t \in \mathbf{R}:\ f(t) < 1\}$ является открытым в $\mathbf{R}$.

1.44. Доказать, что множество непрерывных кусочно линейных функций всюду плотно в пространстве $C[a, b]$.

1.45. Доказать, что множество многочленов всюду плотно в пространстве $C^k[a, b]$.

1.46. При каком условии на последовательность $a_n \in \mathbf{R}$ $(a_n > 0)$ будет ограниченным множеством:

а) параллелепипед $\{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots):\ |x_n| < a_n\}$;

б) эллипсоид $\left\{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots):\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2/a_n^2 < 1\right\}$?

1.47. Доказать, что параллелепипед $\{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots):\ |x_n| < 1\}$ — открытое множество.

1.48. При каком условии на последовательность $a_n \in \mathbf{R}$ $(a_n > 0)$ будет открытым множеством параллелепипед $\{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots):\ |x_n| < a_n\}$?

1.49. Доказать, что параллелепипед $\{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots):\ |x_n| \leqslant a_n\}$ — замкнутое множество.

1.50. Доказать, что линейное нормированное пространство X является строго нормированным тогда и только тогда, когда сфера $\sigma_1(0)$ не содержит никакого отрезка, т. е. из $x, y \in \sigma_1(0)$ $(x \neq y)$ следует, что $\alpha x + (1 - \alpha)y \notin \sigma_1(0)$ для любого $\alpha \in (0, 1)$.

1.51. Какие из следующих пространств являются строго нормированными:

а) c^2; б) l_1; в) l_2; г) m; д) $C[0, 1]$; е) $\tilde{L}_2[0, 1]$?

1.52. Пусть $A, B \subset X$ — выпуклые множества. Какие из следующих множеств $A \cup B$, $A \cap B$, $A + B$ также являются выпуклыми?

1.53. Пусть $A \subset X$ — выпуклое множество и λ — число. Доказать, что множество $\lambda A = \{x \in X:\ x = \lambda y,\ y \in A\}$ — выпуклое. Будет ли множество всех выпуклых подмножеств пространства X линейным пространством?

1.54. Будет ли замыкание выпуклого множества в линейном нормированном пространстве выпуклым множеством?

1.55. Доказать, что шары $S_r(x_0)$ и $\bar{S}_r(x_0)$ — выпуклые множества. Будет ли выпуклым множеством сфера $\sigma_r(x_0)$?

1.56. Доказать, что аксиома треугольника в определении нормы эквивалентна требованию выпуклости шара $S_1(0)$.

1.57. Доказать, что всякое аффинное многообразие в линейном нормированном пространстве является выпуклым множеством.

1.58. Будет ли выпуклым в пространстве $C[0, 1]$ множество:

а) многочленов степени $=k$;

б) многочленов степени $\leqslant k$;

в) непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 |x(t)|\,dt \leqslant 1;$$

г) непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 |x(t)|^2 dt \leqslant 1;$$

д) непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию

$$\max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)| \leqslant 1?$$

1.59. Доказать, что в пространстве l_2 выпуклыми множествами являются:

а) параллелепипед $\{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots):\ |x_n| < 2^{-n+1}\}$;

б) эллипсоид $\left\{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots):\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 < 1\right\}$.

1.60. Доказать, что всякое линейное многообразие в конечномерном линейном нормированном пространстве есть подпространство.

1.61. Доказать, что всякое конечномерное линейное многообразие в линейном нормированном пространстве есть подпространство.

1.62. Доказать, что шар в линейном нормированном пространстве не может содержать ненулевого линейного многообразия.

1.63. Пусть $L \subset X$ — линейное многообразие, $L \neq X$. Доказать, что L не содержит никакого шара.

1.64. Доказать, что множество решений линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n(t)\,x = y(t),$$

где коэффициенты $a_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и правая часть $y(t)$ непрерывны на $[a, b]$, образует n-мерное аффинное многообразие в пространстве $C[a, b]$.

1.65. Доказать, что в линейном нормированном пространстве замыкание линейного многообразия есть подпространство.

1.66. Пусть $L_1, L_2 \subset X$ — подпространства. Доказать, что если хотя бы одно из них конечномерно, то $L_1 + L_2$ — подпространство.

1.67. Образуют ли в пространстве $C[-1, 1]$ подпространство следующие множества функций:

а) монотонные функции;

б) четные функции;

в) многочлены;

г) многочлены степени $\leqslant k$;

д) непрерывно дифференцируемые функции;

е) непрерывные кусочно линейные функции;

ж) непрерывные функции с ограниченной вариацией;

з) функции $x(t)$, удовлетворяющие условию $x(0) = 0$;

и) функции $x(t)$, удовлетворяющие условию

$$\int_{-1}^{1} x(t)\,dt = 0;$$

к) функции, удовлетворяющие условию Липшица с какой-нибудь постоянной, зависящей от функции?

1.68. Пусть $L = \left\{x \in l_2, x = (x_1, x_2, \ldots):\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\right\}$.

а) Доказать, что L — линейное многообразие.

б) Является ли L подпространством?

1.69. Образуют ли последовательности $x = (x_1, x_2, \ldots)$ $(x_k \in \mathbf{R})$ такие, что $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0$, подпространство в пространстве:

а) l_1; б) m?

1.70. Доказать, что пространство c_0 является подпространством в пространстве c.

1.71. Доказать, что пространство c является подпространством в пространстве m.

1.72. Пусть $A, B \subset X$ — всюду плотные множества. Возможно ли, что $A \cap B = \varnothing$?

1.73. Доказать, что дополнение к нигде не плотному множеству всюду плотно. Справедливо ли обратное утверждение?

1.74. Доказать, что дополнение к открытому всюду плотному множеству нигде не плотно.

1.75. Доказать, что замыкание нигде не плотного множества нигде не плотно.

1.76. Пусть L — подпространство сепарабельного пространства X. Доказать, что L сепарабельно.

1.77. Пусть в пространстве X существует такое несчетное множество A, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и любых $x, y \in A$ выполняется неравенство $\|x - y\| > \varepsilon$. Доказать, что X — не сепарабельное пространство.

1.78. Какие из пространств задач 1.22, 1.23 сепарабельны?

1.79. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим множество L таких функций $x(t)$, что $x(1) = 0$. Доказать, что:

а) L — подпространство в $C[0, 1]$;

б) существует такое одномерное подпространство M, что $C[0, 1] = L \oplus M$.

1.80. Представить пространство $C[0, 1]$ в виде прямой суммы двух бесконечномерных подпространств.

1.81. Пусть $A \subset X$ — замкнутое множество, $x \in X$, $x \notin A$. Всегда ли найдется $y \in A$ такое, что $\rho(x, A) = \|x - y\|$?

1.82. Доказать, что для того чтобы отображение f: $X \to Y$ было непрерывно в точке $x_0 \in X$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \in X$, сходящейся к x_0, последовательность $f(x_n)$ сходилась бы к $f(x_0)$.

1.83. Обязательно ли при непрерывном отображении f: $X \to Y$:

а) образ $f(A)$ открытого множества $A \subset X$ — открытое множество;

б) образ $f(B)$ замкнутого множества $B \subset X$ — замкнутое множество?

1.84. Доказать, что непрерывное отображение f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, обладающее тем свойством, что образ каждого открытого множества есть открытое множество,— монотонная функция.

1.85. Доказать, что каждое из следующих условий необходимо и достаточно для того, чтобы отображение f. $X \to Y$ было непрерывно:

а) для любого множества $A \subset X$ имеет место включение $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$;

б) прообраз любого открытого множества $B \subset Y$ есть открытое множество в X.

1.86. Пусть f: $X \to Y$ — непрерывное отображение пространства X на все пространство Y, A — всюду плотное в X множество. Доказать, что $f(A)$ — множество, всюду плотное в пространстве Y.

1.87. Пусть множество $A \subset X$ фиксировано. Доказать, что $f(x) = \rho(x, A)$ — непрерывное отображение X в $\mathbf{R}$.

1.88. Доказать, что для любого множества $A \subset X$ и любого $\varepsilon > 0$ множество $\{x \in X: \rho(x, A) < \varepsilon\}$ открыто, а множество $\{x \in X: \rho(x, A) \leqslant \varepsilon\}$ замкнуто.

1.89. Пусть $A_1, A_2 \subset X$ — замкнутые множества, причем $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Для $x \in X$ положим

$$\varphi(x) = \frac{\rho(x, A_1)}{\rho(x, A_1) + \rho(x, A_2)}.$$

а) Доказать, что φ: $X \to \mathbf{R}$ — непрерывное отображение, причем $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$; $\varphi(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in A_1$; $\varphi(x) = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in A_2$.

б) Полагая $B_1 = \varphi^{-1}([0, 1/2))$, $B_2 = \varphi^{-1}((1/2, 1])$, доказать, что B_1, B_2 — открытые множества, причем $A_1 \subset B_1$, $A_2 \subset B_2$. Тем самым получаем новое доказательство утверждения задачи 1.20.

в) Является ли отображение φ равномерно непрерывным на X?

1.90. Доказать, что отображение f: $C^1[a, b] \to C[a, b]$, $f(x) = dx/dt$ непрерывно.

1.91. Является ли непрерывным отображение f: $L \to C[a, b]$, $f(x) = dx/dt$, где L — линейное многообразие непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $C[a, b]$?

1.92. Будет ли непрерывным отображение $f(x) = x(1)$, если оно рассматривается как действующее:

а) из $C[0, 1]$ в $\mathbf{R}$;

б) из $L_2[0, 1]$ в $\mathbf{R}$ (см. задачу 1.23))?

1.93. Будет ли непрерывным отображение $f(x) = x^2(t)$, если оно рассматривается как действующее:

а) из $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$;

б) из $L_2[0, 1]$ в $L_2[0, 1]$;

в) из $C[0, 1]$ в $L_2[0, 1]$?

Будет ли это отображение равномерно непрерывным?

1.94. Пусть $f\colon X \to Y$, $g\colon X \to Y$ — непрерывные отображения. Доказать, что множество $\{x \in X\colon f(x) = g(x)\}$ замкнуто в X.

1.95. Пусть A, $B \subset X$ — произвольные множества, причем $\rho_X(A, B) = 0$. Возможно ли, что $\rho_Y(f(A), f(B)) \neq 0$, если $f\colon X \to Y$ есть:

а) непрерывное отображение;

б) равномерно непрерывное отображение?

§ 2. Банаховы пространства

Пусть X — линейное нормированное пространство. Последовательность $x_n \in X$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon)$, что для любого $n > N$ и для всех натуральных p выполняется неравенство $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$. Пространство X называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится. Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым*.

Две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ в линейном пространстве X называются *эквивалентными*, если существуют такие числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1$.

Линейные нормированные пространства X и Y называются *изоморфными*, если на всем X определено отображение $J\colon X \to Y$, являющееся линейным, осуществляющее изоморфизм X и Y как линейных пространств и такое, что существуют такие постоянные $\alpha > 0$, $\beta > 0$, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\alpha\|x\| \leqslant \|J(x)\| \leqslant \beta\|x\|$. Если $\|J(x)\| = \|x\|$, то пространства X и Y называются *изометричными*.

Линейное нормированное пространство X называется *вложенным* в линейное нормированное пространство Y, если на всем X определено отображение $J\colon X \to Y$, являющееся линейным и взаимно однозначным на области значений причем существует такая постоянная $\beta > 0$, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\|J(x)\| \leqslant \beta\|x\|$.

Банахово пространство $\widehat{X}$ называется *пополнением* линейного нормированного пространства X, если X — линейное многообразие, всюду плотное в пространстве $\widehat{X}$.

Теорема 2.1. *Каждое линейное нормированное пространство X имеет пополнение, и это пополнение единственно с точностью до изометрического отображения, переводящего X в себя.*

Теорема 2.2. *Пусть в банаховом пространстве X дана последовательность шаров $\overline{S}_{r_n}(x_n)$, вложенных друг в друга $(\overline{S}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset \overline{S}_{r_n}(x_n))$, причем $r_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда в X существует, и притом единственна, точка, принадлежащая всем шарам.*

2.1. Доказать, что всякая фундаментальная последовательность в линейном нормированном пространстве ограничена.

2.2. Пусть $x_n \in X$ — фундаментальная последовательность и подпоследовательность x_{n_k} сходится. Доказать, что вся последовательность x_n сходится.

2.3. Пусть $x_n \in X$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|$ сходится. Доказать, что x_n — фундаментальная последовательность. Верно ли обратное утверждение?

2.4. Пусть x_n, $y_n \in X$ — фундаментальные последовательности. Доказать, что последовательность $\lambda_n = \|x_n - y_n\|$ сходится.

2.5. В линейном пространстве многочленов, рассматриваемых на $[a, b]$, положим

$$\|x\|_1 = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|, \qquad \|x\|_2 = \left[\int_a^b |x(t)|^2\, dt\right]^{1/2}.$$

а) Проверить аксиомы нормы.

б) Будет ли какое-либо из получающихся пространств банаховым?

в) Описать пополнение рассматриваемого пространства по каждой из норм.

2.6. В линейном пространстве вещественных непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $H^1[a, b]$ положим

$$\|x\| = \left\{\int_a^b \left[x^2(t) + x'^2(t)\right] dt\right\}^{1/2}.$$

а) Проверить аксиомы нормы.

б) Будет ли получающееся нормированное пространство банаховым?

2.7. Какие из пространств задач 1.22, 1.23 являются банаховыми?

2.8. На линейном пространстве X заданы две эквивалентные нормы, и в одной из них X — банахово пространство. Доказать, что X является банаховым пространством и в другой норме.

2.9. Доказать, что две нормы, введенные на одном линейном пространстве, эквивалентны тогда и только тогда, когда из сходимости последовательности по одной из этих норм вытекает ее сходимость по другой норме.

2.10. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на $[a, b]$ функций норма $\|x\|_{\tilde{L}_2[a,b]}$ эквивалентна норме

$$\|x\| = \left\{\int_a^b v(t)\, x^2(t)\, dt\right\}^{1/2},$$

где $v(t)$ непрерывна на $[a, b]$ и $v(t) \geqslant \alpha > 0$ на $[a, b]$.

2.11. Будут ли эквивалентны на линейном пространстве непрерывных на $[a, b]$ функций нормы $\|x\|_{C[a,b]}$ и $\|x\|_{\tilde{L}_2[a,b]}$?

2.12. Какие из норм, определенных в задаче 1.38 на линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций, будут эквивалентны норме пространства $C^1[a, b]$?

2.13. Доказать, что всякое конечномерное линейное нормированное пространство является банаховым.

2.14. Доказать, что подпространство банахова пространства является банаховым пространством.

2.15. Пусть в линейном нормированном пространстве X имеется линейное многообразие L, которое в норме X является полным пространством. Доказать, что L замкнуто в X, т. е. является подпространством.

2.16. Пусть X — произвольное множество, E — линейное нормированное пространство, f: $X \to E$ — ограниченное отображение, т. е. такое, что множество $f(X)$ ограничено в E.

а) Доказать, что множество $f_E(X)$ всех ограниченных отображений будет линейным нормированным пространством, если положить $\|f\| = \sup\limits_X \|f(X)\|$.

б) Пусть X — линейное нормированное пространство. Доказать, что ограниченные непрерывные отображения φ: $X \to E$ образуют подпространство в пространстве $f_E(X)$.

в) Пусть E — банахово пространство. Доказать, что $f_E(X)$ — банахово пространство.

2.17. Пусть X — банахово пространство, $L \subset X$ — линейное многообразие. Доказать, что пополнение L по норме X совпадает с замыканием L.

2.18. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, J: $X \to Y$ — отображение, устанавливающее изоморфизм. Доказать, что:

а) J — непрерывное отображение;

б) отображение J имеет обратное, которое также непрерывно.

2.19. Доказать, что всякое n-мерное линейное нормированное пространство изоморфно пространству E^n.

2.20. Банахово пространство X изоморфно линейному нормированному пространству Y. Доказать, что Y — банахово пространство.

2.21. Доказать, что тождественное отображение $Jx = x$ осуществляет вложение пространства $C[a, b]$ в пространство $\tilde{L}_2[a, b]$.

2.22. Доказать, что тождественное отображение $Jx = x$ осуществляет вложение пространства $C^k[a, b]$ в пространство $C[a, b]$ при любом натуральном k.

2.23. Доказать, что утверждение теоремы 2.2 о вложенных шарах, вообще говоря, несправедливо, если, оставляя в силе остальные предположения теоремы, считать, что:

а) шары не являются замкнутыми;

б) пространство не является полным.

2.24. Доказать, что в банаховом пространстве последовательность непустых замкнутых вложенных множеств, диаметры которых стремятся к нулю, имеет, и притом единственную, общую точку.

2.25. Пусть в линейном нормированном пространстве X любая последовательность замкнутых вложенных шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение. Доказать, что X — банахово пространство.

2.26. Доказать, что в банаховом пространстве любая последовательность непустых замкнутых вложенных шаров имеет общую точку.

2.27. Может ли в банаховом пространстве иметь пустое пересечение последовательность непустых замкнутых вложенных множеств?

2.28. Пусть X — линейное нормированное пространство, L — подпространство X. Отнесем элементы $x, y \in X$ к одному классу смежности ξ, если $x - y \in L$. Множество классов смежности образует линейное пространство, называемое *факторпространством* и обозначаемое X/L. Доказать, что:

а) в X/L можно ввести норму равенством $\|\xi\|_{X/L} = \inf\limits_{x \in \xi} \|x\|$;

б) если X — банахово пространство, то в введенной норме X/L — банахово пространство;

в) X/L изоморфно $\mathbf{R}$, если $X = C[0, 1]$, $L = \{x(t) \in C[0, 1]: x(0) = 0\}$.

§ 3. Гильбертовы пространства

Вещественное линейное пространство называется *евклидовым*, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие вещественное число, обозначаемое (x, y) и называемое *скалярным произведением*, так что выполняются следующие аксиомы:

1) $(x, x) \geqslant 0$, $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2) $(x, y) = (y, x)$;

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для любого $\lambda \in \mathbf{R}$;

4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Комплексное линейное пространство называется *унитарным*, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие комплексное число, обозначаемое (x, y) и называемое *скалярным произведением*, так что выполняются следующие аксиомы:

1) $(x, x) \geqslant 0$, $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (черта означает комплексное сопряжение);

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для любого $\lambda \in \mathbf{C}$;

4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Из *неравенства Коши — Буняковского* $|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y)$ вытекает, что в евклидовом и унитарном пространствах можно ввести *норму* равенством $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Пространство H со скалярным произведением (евклидово или унитарное) называется *гильбертовым*, если оно является полным в этой норме.

Углом между ненулевыми элементами x, y вещественного гильбертова пространства называется угол φ, заключенный между 0 и π такой, что

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Элементы $x, y \in H$ называют *ортогональными* и записывают $x \perp y$, если $(x, y) = 0$. Множество $z \in H$ таких, что $(z, x) = 0$ для любого $x \in M \subset H$, обозначается $M^{\perp}$.

Система элементов $h_1, h_2, \ldots \in H$ называется *ортогональной*, если $(h_i, h_j) = 0$ при $i \neq j$, $h_i \neq 0$ и *ортонормированной*, если

$$(h_i, h_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j; \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Система элементов $x_1, x_2, \ldots \in H$ называется *линейно независимой*, если при любом натуральном n система $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно независима.

Теорема 3.1. *Пусть $h_1, h_2, \ldots \in H$ — линейно независимая система элементов. Тогда в H существует такая ортогональная система элементов $f_1, f_2, \ldots$, что*

$$f_k = a_{k1}h_1 + a_{k2}h_2 + \ldots + a_{kk}h_k, \quad a_{ki} \in \mathbf{C}, \ a_{kk} \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots;$$

$$h_j = b_{j1}f_1 + b_{j2}f_2 + \ldots + b_{jj}f_j; \quad b_{ji} \in \mathbf{C}, \quad b_{jj} \neq 0, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Построение ортогональной системы по заданной линейно независимой называется *ортогонализацией*.

Определителем Грама системы элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$ называется определитель

$$\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \ldots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_2, x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \ldots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}.$$

Ортогональная система $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \in H$ называется *полной*, если любой элемент из H может быть представлен в виде так называемого *ряда Фурье*:

$$x = \sum_k c_k \varphi_k,$$

где $c_k = (x, \varphi_k)/\|\varphi_k\|^2$ $(k \in \mathbf{N})$ — коэффициенты Фурье (т. е. ряд $\sum_k c_k \varphi_k$ сходится по норме H и его сумма равна x). Полная ортогональная система называется *ортогональным базисом* пространства H.

Теорема 3.2. *Пусть M — замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве H и элемент $x \notin M$. Тогда существует такой единственный элемент $y \in M$, что $\rho(x, M) = \|x - y\|$.*

Теорема 3.3. *Пусть $L \subset H$ — подпространство. Тогда $H = L \oplus L^{\perp}$, т. е. любой элемент x из H допускает единственное представление в виде $x = u + v$, где $u \in L$, $v \in L^{\perp}$. При этом $\rho(x, L) = \|x - u\| = \|v\|$.*

Элемент μ называется *проекцией* элемента x на подпространство L.

3.1. Доказать, что в определении евклидова (унитарного) пространства аксиому 1) можно заменить на аксиому: $(x, x) \geqslant 0$, из $(x, x) = 0$ следует $x = 0$.

3.2. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением:

а) для любых элементов x, y, z имеет место *тождество Аполлония*:

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|^2;$$

б) для любых элементов x, y, z, t имеет место *неравенство Птолемея*:

$$\|x - z\| \cdot \|y - t\| \leqslant \|x - y\| \, \|z - t\| + \|y - z\| \cdot \|x - t\|;$$

когда в нем реализуется равенство?

3.3. Доказать, что в евклидовом пространстве элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$.

3.4. Доказать, что в унитарном пространстве элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2 = \|\lambda x + \mu y\|^2$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$.

3.5. Пусть X — вещественное линейное нормированное пространство и для любых $x, y \in X$ выполняется равенство параллелограмма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Доказать, что формула

$$(x, y) = \frac{1}{2}\{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\}$$

задает в X скалярное произведение, согласующееся с нормой в X, т. е. такое, что $(x, x) = \|x\|^2$.

3.6. Пусть X — комплексное линейное нормированное пространство и для любых $x, y \in X$ выполняется равенство параллелограмма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Доказать, что формула

$$(x, y) = \frac{1}{4}\{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\} - \frac{i}{4}\{\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\}$$

задает в X скалярное произведение, согласующееся с нормой в X.

3.7. Доказать, что в пространстве $C[0, 1]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства.

3.8. Доказать, что в пространстве l_1 нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства.

3.9. В линейном пространстве $\tilde{L}_2[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций положим

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt.$$

Является ли это пространство гильбертовым?

3.10. В линейном пространстве $\tilde{H}_1[a, b]$ непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций положим

$$(x, y) = \int_a^b [x(t)\, y(t) + x'(t)\, y'(t)]\, dt.$$

Является ли пространство $\tilde{H}_1[a, b]$ гильбертовым?

3.11. В линейном пространстве последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ $(x_k \in \mathbf{R})$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty,$$

положим

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k y_k,$$

где $\lambda_k \in \mathbf{R}$, $0 < \lambda_k < 1$. Будет ли полученное евклидово пространство гильбертовым?

3.12. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Доказать, что всякая ортонормированная система в H не более чем счетна.

3.13. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — ортогональная система в гильбертовом пространстве H, $x = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Доказать, что $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$.

3.14. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — ортогональная система в гильбертовом пространстве H. Доказать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится в H тогда и только тогда, когда сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$.

3.15. Пусть e_n $(n \in \mathbf{N})$ — ортонормированная система в гильбертовом пространстве H, λ_n — последовательность

вещественных или комплексных чисел. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ сходится в H тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$.

3.16. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ — такие системы элементов H, что

$$(x_i, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases}$$

(Системы $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ называются *биортогональными*.) Доказать, что каждая из этих систем линейно независима.

3.17. Доказать, что система элементов гильбертова пространства линейно независима тогда и только тогда, когда ее определитель Грама отличен от нуля.

3.18. Доказать, что гильбертово пространство является строго нормированным.

3.19. Пусть в пространстве H со скалярным произведением для $x_1, x_2 \in H$ выполняется равенство $\operatorname{Re}(x_1, x_2) = \|x_1\|^2 = \|x_2\|^2$. Доказать, что $x_1 = x_2$.

3.20. Пусть x_n, y_n принадлежат замкнутому единичному шару $\bar{S}_1(0)$ в гильбертовом пространстве H и $(x_n, y_n) \to 1$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\|x_n - y_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

3.21. Доказать, что для того чтобы элемент x гильбертова пространства H был ортогонален подпространству $L \subset H$, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $y \in L$ имело место неравенство $\|x\| \leqslant \|x - y\|$.

3.22. Доказать, что для произвольного множества M в гильбертовом пространстве H множество $M^{\perp}$ является подпространством.

3.23. Доказать, что для любого множества M в гильбертовом пространстве H имеет место включение $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$. Возможно ли здесь строгое включение?

3.24. Доказать, что для множества M в гильбертовом пространстве H равенство $M = (M^{\perp})^{\perp}$ выполняется тогда и только тогда, когда M — подпространство H.

3.25. Пусть M, N — такие множества в гильбертовом пространстве H, что $M \subset N$. Доказать, что $M^{\perp} \supset N^{\perp}$.

3.26. В линейном пространстве непрерывных на $[0, \infty)$ функций $x(t)$ таких, что $\int_0^{\infty} |x(t)|^2 e^{-t}\, dt$ сходится,

положим

$$(x, y) = \int_0^{\infty} x(t) y(t) e^{-t}\, dt.$$

а) Проверить выполнение аксиом скалярного произведения.

б) Рассмотрим линейно независимую систему $1, t, t^2, \ldots$ В результате ее ортогонализации получается ортогональная система многочленов Чебышева — Лаггера. Найти три ее первых многочлена.

3.27. В линейном пространстве непрерывных на $(-\infty, \infty)$ функций $x(t)$ таких, что $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 e^{-t^2}\, dt$ сходится, положим $(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) e^{-t^2} dt$.

а) Проверить выполнение аксиом скалярного произведения.

б) Рассмотрим линейно независимую систему $1, t, t^2, \ldots$ В результате ее ортогонализации получается ортогональная система многочленов Чебышева — Эрмита. Найти три ее первых многочлена.

3.28. В пространстве l_2 рассмотрим множество

$$M = \left\{ x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots) : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0 \right\}.$$

Доказать, что M — линейное многообразие, всюду плотное в l_2.

3.29. В линейном многообразии M задачи 3.28 найти линейно независимую систему элементов, ортогонализация которой дает базис пространства l_2.

3.30. Доказать, что при фиксированном натуральном n множество

$$M = \left\{ x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots) : \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \right\}$$

является подпространством пространства l_2. Описать такое подпространство N, что $l_2 = M \oplus N$.

3.31. Пусть M, N — подпространства гильбертова пространства H и $M \perp N$. Доказать, что $M + N$ — подпространство H.

3.32. Пусть M, N — такие множества в гильбертовом пространстве H, что любой элемент $x \in H$ единственным образом представим в виде $x = u + v$, где $u \in M$, $v \in N$. Следует ли отсюда, что M и N — подпространства пространства H?

3.33. В пространстве l_2 привести пример такого множества M, что множество $M + M^{\perp}$ не совпадает со всем l_2.

3.34. Пусть M, N — такие подпространства гильбертова пространства H, что $H = M \oplus N$. Верно ли, что $N = M^{\perp}$?

3.35. Привести пример таких двух бесконечномерных подпространств M, N пространства l_2, что $l_2 = M \oplus N$.

3.36. В пространстве $L_2[-1, 1]$ рассмотрим множество M функций $x(t)$, равных нулю при $t \geqslant 0$.

а) Доказать, что M — подпространство $L_2[-1, 1]$.

б) Описать подпространство $M^{\perp}$.

в) Выполняется ли в пространстве $L_2[-1, 1]$ утверждение теоремы 3.3?

3.37. В пространстве l_2 рассмотрим последовательность

$$x_k = \left(1, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{2k}}, \frac{1}{2^{3k}}, \ldots\right), \qquad k \in \mathbf{N}.$$

Доказать, что линейная оболочка этой последовательности всюду плотна в пространстве l_2.

3.38. Пусть x_n $(n \in \mathbf{N})$ — фиксированная последовательность элементов гильбертова пространства H, λ_n $(n \in \mathbf{N})$ — фиксированная последовательность вещественных (комплексных) чисел. Рассмотрим множество $M = \{x \in H\colon (x, x_k) = \lambda_k\}$. Доказать, что если M непусто, то $M = x_0 + L$, где $x_0 \in H$, L — подпространство H.

3.39. Пусть x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — фиксированная последовательность элементов гильбертова пространства H, λ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — фиксированная последовательность вещественных чисел. Доказать, что множество $M = \{x \in H\colon \operatorname{Re}(x, x_k) \leqslant \lambda_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$ замкнуто и выпукло в H.

3.40. Пусть M — замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве H. Доказать, что в M существует и единствен элемент с наименьшей нормой.

3.41. В пространстве l_2 построить замкнутое множество, в котором нет элемента с наименьшей нормой.

3.42. Пусть M — замкнутое выпуклое множество в вещественном гильбертовом пространстве H. Доказать, что элемент $y \in M$ удовлетворяет условию $\rho(x, M) = \|x - y\|$ тогда и только тогда, когда для любого $z \in M$ выполняется неравенство $(x - y, y - z) \geqslant 0$.

3.43. В гильбертовом пространстве H рассмотрим замкнутое выпуклое множество $M = \bar{S}_r(x_0)$. Пусть $x \in H$, $x \notin M$. Доказать, что элемент $y \in M$ такой, что $\rho(x, M) = \|x - y\|$, имеет вид

$$y = x_0 + r\,\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}.$$

3.44. Доказать, что в гильбертовом пространстве любая последовательность непустых вложенных выпуклых замкнутых ограниченных множеств имеет непустое пересечение.

3.45. В пространстве $C[0, 1]$ построить последовательность непустых вложенных замкнутых выпуклых ограниченных множеств, имеющую пустое пересечение.

§ 4. Пространства Лебега и Соболева

Множество $M \subset [a, b]$ имеет *меру нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая конечная или счетная система отрезков $[\alpha_n, \beta_n]$, что $M \subset \bigcup\limits_n [\alpha_n, \beta_n]$, $\sum\limits_n (\beta_n - \alpha_n) < \varepsilon$.

Если для последовательности $x_n(t)$, $(n \in \mathbf{N})$ всюду на $[a, b]$ за исключением, быть может, множества меры нуль, существует предел, равный $x(t)$, то говорят, что $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ *почти всюду* на $[a, b]$, и записывают $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) \overset{\text{п.в.}}{=} x(t)$.

Пусть $L_1[a, b]$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)|\,dt;$$

сходимость по этой норме называется *сходимостью в среднем*. Пространство $L_1[a, b]$ — не полное; его пополнение называется *пространством Лебега* и обозначается $L_1[a, b]$. Функцию $x(t)$ называют *интегрируемой по Лебегу* на отрезке $[a, b]$, если существует такая фундаментальная в среднем последовательность непрерывных функций $x_n(t)$, $(n \in \mathbf{N})$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) \overset{\text{п.в.}}{=} x(t)$. Тогда *интегралом Лебега* по $[a, b]$ от функции $x(t)$ называется число

$$(\mathscr{L})\int_a^b x(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)\,dt.$$

Элементы пространства $L_1[a, b]$ — это функции $x(t)$, для которых

$$(\mathscr{L})\int_a^b |x(t)|\,dt < \infty$$

Пусть $\tilde{L}_p[a, b]$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \left[\int_a^b |x(t)|^p\, dt\right]^{1/p}, \quad p > 1.$$

Пространство $\tilde{L}_p[a, b]$ — не полное: его пополнение обозначается $L_p[a, b]$. Элементы $L_p[a, b]$ — это функции $x(t)$, для которых

$$(\mathscr{L}) \int_a^b |x(t)|^p\, dt < \infty.$$

Пространство $L_2[a, b]$, как пополнение евклидова пространства $\tilde{L}_2[a, b]$, является *гильбертовым*; скалярное произведение в нем имеет вид

$$(x, y) = (\mathscr{L}) \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt.$$

Пусть $\tilde{H}^1[a, b]$ — пространство непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_a^b [x(t)\, y(t) + x'(t)\, y'(t)]\, dt.$$

Это пространство — не полное; его пополнение — гильбертово пространство, называемое *пространством Соболева* и обозначаемое $H^1[a, b]$. Элементы, присоединяемые к $\tilde{H}^1[a, b]$ при его пополнении, могут быть отождествлены с функциями $x(t)$ из пространства $L_2[a, b]$, имеющими *обобщенные производные* $x'(t)$.

Теорема 4.1. *Пространство $H^1[a, b]$ вложено в пространство $C[a, b]$.*

4.1. Доказать, что в пространстве $L_1[a, b]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой.

4.2. Доказать, что если $x(t), y(t) \in L_2[a, b]$, то $x(t)y(t) \in L_1[a, b]$.

4.3. Привести пример функции:

а) $x(t) \in L_2[0, 1]$ такой, что $x^2(t) \notin L_2[0, 1]$;

б) $x(t) \in L_1[0, 1]$ такой, что $x(t) \notin L_2[0, 1]$.

4.4. Доказать, что всякая последовательность $x_n(t)$ $(n \in \mathbf{N})$, сходящаяся в пространстве $C[a, b]$, будет сходящейся и в пространстве $L_p[a, b]$ $(p \geqslant 1)$.

4.5. Привести пример последовательности непрерывных на $[0, 1]$ функций $x_n(t)$ $(n \in \mathbf{N})$, сходящейся в пространствах $L_1[0, 1]$ и $L_2[0, 1]$, но не сходящейся в пространстве $C[0, 1]$.

4.6. Доказать, что последовательность $x_n(t) = n^2 t e^{-nt}$ $(n \in \mathbf{N})$ сходится поточечно к функции $x(t) \equiv 0$ для любого $t \geqslant 0$, но не сходится в пространстве $L_2[0, 1]$.

4.7. Доказать, что множество непрерывных на $[a, b]$ функций является всюду плотным в пространстве $L_p[a, b]$ $(p \geqslant 1)$.

4.8. Доказать, что пространство $L_p[a, b]$ $(p \geqslant 1)$ сепарабельно.

4.9. Найти угол φ между элементами $x(t) = \sin t$ и $y(t) = t$ в пространстве $L_2[0, \pi]$.

4.10. Найти углы треугольника, образованного в пространстве $L_2[-1, 1]$ элементами $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 1$, $x_3(t) = t$.

4.11. Найти норму функции $x(t) = t^\alpha$ в тех пространствах $L_p[0, 1]$ $(p \geqslant 1)$, которым эта функция принадлежит.

4.12. Провести ортогонализацию элементов $x_0(t) \equiv 1$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$, $x_3(t) = t^3$ в пространствах:

а) $L_2[-1, 1]$; б) $L_2[0, 1]$.

4.13. В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим множество A функций, обращающихся в нуль на некотором интервале, содержащем точку $t = 0{,}5$ (и зависящем, вообще говоря, от функции). Будет ли A замкнутым множеством?

4.14. Доказать, что множество функций из пространства $L_2[0, 1]$ таких, что почти все их значения лежат на $[-1, 1]$, выпукло. Является ли это множество замкнутым?

4.15. В пространстве $L_2[-1, 1]$ для произвольного $\lambda \in \mathbf{R}$ обозначим через M_λ множество всех непрерывных функций $x(t)$, для которых $x(0) = \lambda$. Доказать, что каждое M_λ выпукло и всюду плотно в пространстве $L_2[-1, 1]$.

4.16. Доказать, что множество многочленов $P(t)$ таких, что $P(1) = 0$, является выпуклым и всюду плотным в пространстве $L_2[0, 1]$.

4.17. Доказать, что множество ступенчатых функций является выпуклым и всюду плотным в пространстве $L_2[a, b]$.

4.18. Пусть $[c, d] \subset [a, b]$. Доказать, что множество $M = \{x(t) \in L_2[a, b]: x(t) = 0$ почти всюду на $[c, d]\}$ является подпространством пространства $L_2[a, b]$. Описать подпространство $M^\perp$.

4.19. Доказать, что в пространстве $L_2[0, 1]$ множество

$$M = \left\{x(t) \in L_2[0, 1]: \int_0^1 x(t)\, dt = 0\right\}$$

является подпространством. Описать подпространство $M^\perp$.

4.20. Доказать, что тождественное отображение $Jx = x$ осуществляет вложение пространства $C[a, b]$ в пространство $L_p[a, b]$ при любом $p \geqslant 1$.

4.21. Доказать, что тождественное отображение $Jx = x$ осуществляет вложение пространства $L_p[a, b]$ в пространство $L_s[a, b]$, если $1 \leqslant s \leqslant p$.

4.22. Доказать, что множество многочленов всюду плотно в пространстве $H^1[a, b]$.

4.23. Пусть $x(t) \in H^1[a, b]$, $y(t) \in C^1[a, b]$. Доказать, что $x(t)y(t) \in H^1[a, b]$.

4.24. Найти угол φ между элементами $x(t) = \sin t$ и $y(t) = t$ в пространстве $H^1[0, \pi]$.

4.25. Провести ортогонализацию системы элементов $x_0(t) \equiv 1$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$, $x_3(t) = t^3$ в пространстве $H^1[-1, 1]$.

4.26. Доказать, что система функций

$$1, \quad \sin\frac{2\pi k(t-a)}{b-a}, \quad \cos\frac{2\pi k(t-a)}{b-a}, \qquad k \in \mathbf{N},$$

ортогональна в пространстве $H^1[a, b]$.

4.27. Доказать, что множество

$$\overset{\circ}{H}{}^1[a, b] = \{x(t) \in H^1[a, b]\colon x(a) = x(b) = 0\}$$

является подпространством в пространстве $H^1[a, b]$. Описать подпространство $(\overset{\circ}{H}{}^1[a, b])^{\perp}$.

4.28. Доказать, что множество

$$M = \{x(t) \in H^1[a, b]\colon x(a) = x(b)\}$$

является подпространством в пространстве $H^1[a, b]$. Описать подпространство $M^{\perp}$.

4.29. Доказать, что множество

$$M = \left\{x(t) \in H^1[a, b]\colon \int_a^b x(t)\,dt = 0\right\}$$

является подпространством в пространстве $H^1[a, b]$. Описать подпространство $M^{\perp}$.

4.30. Доказать, что для того чтобы функция $x(t)$ из пространства $L_2[0, \pi]$ принадлежала подпространству $\overset{\circ}{H}{}^1[0, \pi] = \{x(t) \in H^1[0, \pi]\colon x(0) = x(\pi) = 0\}$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2$, где $b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x(t)\sin kt\,dt$ $(k \in \mathbf{N})$. При этом

$$\|x\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1[0,\pi]} = \int\limits_0^{\pi}\left[x^2(t) + x'^2(t)\right]dt = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(k^2+1)\,b_k^2.$$

4.31. Какие из функций $x(t) = \operatorname{sgn} t$, $y(t) = |t|$ принадлежат пространству $H^1[-\pi, \pi]$?

4.32. Доказать, что вложение пространства $H^1[0, \pi]$ в пространство $C[0, \pi]$ является строгим, т. е. существует непрерывная на $[0, \pi]$ функция $x(t) \notin H^1[0, \pi]$.

§ 5. Построение элемента наилучшего приближения в гильбертовых и банаховых пространствах

Пусть X — линейное нормированное пространство, L — подпространство X, $x \in X$. Если существует такой элемент $u^* \subset L$, что $\rho(x, L) = \|x - u^*\|$, то u^* называется *элементом наилучшего приближения* x элементами L.

Теорема 5.1. *Если L конечномерно, то для любого $x \in X$ существует элемент наилучшего приближения x элементами L.*

Теорема 5.2. *В строго нормированном пространстве X для каждого $x \in X$ может существовать не более одного элемента наилучшего приближения x элементами L.*

В гильбертовом пространстве H построение элемента наилучшего приближения для конечномерного подпространства $L \subset H$ основано на теореме 3.3. Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — базис L; тогда каждый элемент $u^* \in L$ имеет вид $u^* = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k h_k$ ($\lambda_k \in \mathbf{R}$ или $\lambda_k \in \mathbf{C}$ для $k = 1, 2, \ldots, n$) и согласно теореме 3.3. отыскание элемента наилучшего приближения сводится к решению (относительно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$) системы линейных алгебраических уравнений

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k h_k,\ h_j\right) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Система (1) всегда имеет единственное решение, так как ее определитель есть $\Gamma(h_1, h_2, \ldots, h_n) \neq 0$. Если $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — ортогональный базис L, то система (1) распадается на отдельные уравнения вида

$$\lambda_j\|h_j\|^2 = (x, h_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, n;$$

поэтому обычно к базису $h_1, h_2, \ldots, h_n$ применяют процесс ортогонализации.

В банаховом пространстве построение эффективного (даже численного) алгоритма отыскания элемента наилучшего приближения вызывает большие трудности. Поэтому вместо задачи приближения в банаховом пространстве обычно решают ту же задачу в гильбертовом пространстве, вложенном в это банахово пространство. В случае пространства $C[a, b]$ в силу теоремы 4.1 о вложении $H^1[a, b]$ в $C[a, b]$ и определения вложения существует такое $\beta \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$, что для любого $x \in H^1[a, b]$ выполняется неравенство $\|x\|_{C[a,b]} \leqslant \beta \|x\|_{H^1[a,b]}$. Пусть $L \subset C[a, b]$ — подпространство с базисом из непрерывно дифференцируемых функций, $x \in H^1[a, b]$, u^* — элемент наилучшего приближения x элементами L, найденный с помощью системы (1). Тогда $\|x - u^*\|_{C[a,b]} \leqslant \beta \|x - u^*\|_{H^1[a,b]}$ и при достаточно малой норме $\|x - u^*\|_{H^1[a,b]}$ элемент u^* хорошо приближает x и в пространстве $C[a, b]$.

5.1. Пусть X — линейное нормированное пространство, L — подпространство X, $x \in X$, $y \in L$. Доказать, что $\rho(x, L) = \rho(x + y, L)$.

5.2. Пусть X — линейное нормированное пространство, L — подпространство X, $x \in X$ и существует более одного элемента наилучшего приближения x элементами L. Доказать, что таких элементов бесконечно много.

5.3. Пусть X — вещественное линейное нормированное пространство, $x, y \in X$. Доказать, что при $t \in \mathbf{R}$ функция $\varphi(t) = \|x - ty\|$ достигает своей точной нижней грани.

5.4. Доказать, что в пространстве c^2 множество элементов наилучшего приближения элемента $x = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ элементами подпространства $L = \left\{\begin{pmatrix}0\\\alpha\end{pmatrix}, \alpha \in \mathbf{R}\right\}$ имеет вид $u^* = \begin{pmatrix}0\\\alpha\end{pmatrix}$, где $\alpha \in [-1, 1]$.

5.5. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим подпространство $L = \{x(t) \in C[0, 1]: x(0) = 0\}$. Пусть $x(t) \equiv 1$. Описать множество элементов наилучшего приближения x элементами L.

5.6. В пространстве $C[0, 1]$ найти расстояние:

а) от элемента $x_0(t) = t$ до подпространства многочленов нулевой степени;

б) от элемента $x_1(t) = t^2$ до подпространства многочленов степени $\leqslant 1$.

5.7. Пусть L — n-мерное подпространство с базисом $h_1, h_2, \ldots, h_n$ в гильбертовом пространстве H, $x \in H$ — произвольный элемент. Доказать, что величина $\rho^2(x, L)$ может быть представлена в виде отношения двух определителей Грама:

$$\rho^2(x, L) = \frac{\Gamma(x, h_1, h_2, \ldots, h_n)}{\Gamma(h_1, h_2, \ldots, h_n)}.$$

5.8. Пусть L — одномерное подпространство в гильбертовом пространстве H, $a \in L$, $a \neq 0$. Доказать, что для любого $x \in H$

$$\rho(x, L) = \frac{|(x, a)|}{\|a\|}.$$

5.9. В пространстве $L_2[0, 1]$ найти расстояние от элемента $x(t) = t^2$ до подпространства

$$L = \left\{x(t) \in L_2[0, 1]: \int_0^1 x(t)\,dt = 0\right\}.$$

5.10. В пространстве l_2 найти расстояние $\rho_n(x, L)$ от элемента $x = (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ до подпространства

$$L = \left\{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots): \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}.$$

Чему равен $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_n(x, L)$?

5.11. В пространстве $L_2[0, 1]$ найти проекцию элемента $x(t) = t^3$ на подпространство многочленов степени $m \leqslant n$, если $n = 0, 1, 2$.

5.12. Используя для непрерывно дифференцируемой на $[0, 1]$ функции $x(t)$ представление

$$x(t) = \int_0^1 x(\tau)\,d\tau + \int_0^t \tau x'(\tau)\,d\tau - \int_t^1 (1 - \tau)\,x'(\tau)\,d\tau,$$

доказать, что постоянную β при вложении пространства $H^1[0, 1]$ в пространство $C[0, 1]$ можно принять равной $2\sqrt{3}/3$.

5.13. Применить в задаче 5.6 теорему вложения.

5.14. Пусть $H_p[0, 1]$ — гильбертово пространство функций, суммируемых с квадратом на $[0, 1]$, скалярное произведение в котором имеет вид

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)\,y(t)\,p(t)\,dt,$$

где $p(t)$ непрерывна на $[0, 1]$ и $p(t) > 0$ на $[0, 1]$. Для заданной функции $x(t) \in H_p[0, 1]$ найти элемент наилучшего приближения x элементами подпространства L многочленов степени $n \leqslant 3$. Составить и реализовать на ЭВМ алгоритм решения этой задачи, предусматривающий:

1) ортогонализацию базиса L (вычисление интегралов по формуле Симпсона с шагом 0,05);

2) выдачу на печать коэффициентов многочлена $u^*(t)$ по степеням t и величины $\rho(x, L) = \|x - u^*\|_{H_p[0,1]}$;

3) в случае, когда весовая функция $p(t)$ зависит от параметра α, исследование зависимости $\rho(x, L)$ от α при $\alpha \in [0, 1]$, изменяющемся с шагом 0, 1;

4) построение графиков $x(t)$ и элемента наилучшего приближения $u^*(t)$ (в вариантах с параметром — только при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$);

5) проверку правильности составления алгоритма на варианте $x(t) = t^3$, $p(t) = 1$.

Рассмотреть варианты:

а) $x(t) = \sqrt[3]{1 + t^2}$, $p(t) = 1 + \alpha t^2$;
б) $x(t) = \sin 3\pi t$, $p(t) = 1 + t^3$;
в) $x(t) = 2\sqrt{1 + t}$, $p(t) = \sqrt{1 + \alpha t^2}$;
г) $x(t) = \ln(1 + t^2)$, $p(t) = 1 + t^2$;
д) $x(t) = 2^{1+t}$, $p(t) = 1 + t\sqrt{t}$;
е) $x(t) = \sqrt[3]{1 + t}$, $p(t) = 1 + \alpha e^t$;
ж) $x(t) = \sin 4\pi t$, $p(t) = 1 + \alpha e^t$;
з) $x(t) = \ln(1 + t^2)$, $p(t) = 1 + \alpha \sqrt[4]{t}$;
и) $x(t) = \operatorname{ch} t$, $p(t) = 1 + t$;
к) $x(t) = e^t - 2$, $p(t) = \sqrt{1 + t}$.

5.15. В пространствах $C[0, 1]$ и $L_2[0, 1]$ рассмотрим подпространство L многочленов степени $n \leqslant 4$. Для заданной непрерывно дифференцируемой на $[0, 1]$ функции $x(t)$ найти элемент наилучшего приближения x элементами L: $u^*(t)$ в норме $L_2[0, 1]$ и $v^*(t)$ в норме $H^1[0, 1]$. Составить и реализовать на ЭВМ алгоритм решения этой задачи, предусматривающий:

1) вычисление элементов матрицы и правых частей системы (1) по формуле Симпсона с шагом 0,05;

2) решение системы (1) методом Гаусса;

3) выдачу на печать коэффициентов многочленов $u^*(t)$, $v^*(t)$ и величин $\|x - u^*\|_{L_2[0,1]}$, $\|x - v^*\|_{H^1[0,1]}$;

4) построение графиков $x(t)$, $u^*(t)$, $v^*(t)$;

5) проверку правильности составления алгоритма на варианте $x(t) = t^4$.

Рассмотреть варианты

а) $x(t) = 3^t$;
б) $x(t) = \cos \pi t$;
в) $x(t) = e^t$;
г) $x(t) = \sin \pi t$;
д) $x(t) = \cos 2\pi t$;
е) $x(t) = t\sqrt{t}$;
ж) $x(t) = \sin 4\pi t$;
з) $x(t) = \ln(1 + t)$;
и) $x(t) = \operatorname{tg}(t - 0{,}5)$;
к) $x(t) = (1 - 2t^2)^3$.

5.16. Пусть $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-2} < t_{n-1} = b$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Отнесем две непрерывные на $[a, b]$ функции к одному классу, если они совпадают во всех точках разбиения.

а) Доказать, что множество классов образует n-мерное линейное пространство H_n. Сравнить с задачей 2.28.

б) Пусть x, y — представители различных классов H_n. Доказать, что соотношение

$$(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} x(t_k)\, y(t_k)$$

задает в H_n скалярное произведение.

в) Доказать, что при $k < n$ классы, порождаемые функциями $x_j(t) = t^j$ $(j = 0, 1, \ldots, k - 1)$ линейно независимы, так что линейная оболочка этих классов является подпространством $L_k \subset H_n$ размерности $k + 1$.

г) Доказать, что для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $x(t)$ существует многочлен $G(t)$ степени не выше $n - 1$, который совпадает с $x(t)$ во всех точках разбиения.

д) Убедиться, что в качестве $G(t)$ может быть взят *интерполяционный многочлен Лагранжа*:

$$G(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x(t_k) \times$$
$$\times \frac{(t - t_0)(t - t_1) \ldots (t - t_{k-1})(t - t_{k+1}) \ldots (t - t_{n-1})}{(t_k - t_0)(t_k - t_1) \ldots (t_k - t_{k-1})(t_k - t_{k+1}) \ldots (t_k - t_{n-1})}.$$

5.17. В условиях задачи 5.16 при $a = 0$, $b = 1$, $t_k = k/(n - 1)$, $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$ рассмотрим класс, порожденный функцией $x(t) = t^3$. Пусть u_0^*, u_1^*, u_2^* — элементы наилучшего приближения этого класса соответственно элементам подпространств L_0, L_1, L_2 в норме H_n; $u_0^*(t)$, $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$ — многочлены нулевой, первой и второй степени соответственно, порождающие классы u_0^*, u_1^*, u_2^*. Составить и реализовать на ЭВМ при $j = 0, 1, 2$ алгоритм нахождения $u_j^*(t)$, предусматривающий при целом n, изменяющемся от 5 до 15 с шагом 1:

1) ортогонализацию системы классов, порождаемых функциями $x_0(t) \equiv 1$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$;

2) построение графиков $x(t)$ и $u_j^*(t)$ $(j = 0, 1, 2)$ при $n = 5$, $n = 10$, $n = 15$;

3) выдачу на печать коэффициентов многочленов $u_j^*(t)$ $(j = 0, 1, 2)$ по степеням t и величин $\rho(x, L_0)$, $\rho(x, L_1)$, $\rho(x, L_2)$.

Полученные результаты сравнить с результатами задачи 5.11.

5.18. В условиях задачи 5.16 пусть $n \geqslant 2$ и x — представитель произвольного класса из H_n, u^* — элемент наилучшего приближения этого класса элементами подпространства L_1 в норме H_n.

а) Доказать, что всякая линейная функция, входящая в класс L_1, имеет вид $u^*(t) = \alpha t + \beta$, где коэффициенты α, β определяются из системы линейных уравнений

$$\alpha \sum_{k=0}^{n-1} t_k + \beta n = \sum_{k=0}^{n-1} x(t_k),$$

$$\alpha \sum_{k=0}^{n-1} t_k^2 + \beta \sum_{k=0}^{n-1} t_k = \sum_{k=0}^{n-1} t_k x(t_k).$$

(В теории вероятностей эта система называется *нормальной* и вытекает из метода наименьших квадратов.)

б) Для $a = 0$, $b = \pi$, $t_k = k\pi/(n-1)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ и класса, порождаемого функцией $x(t) = \sin t$, составить программу для ЭВМ, позволяющую определить $\alpha = \alpha_n$ и $\beta = \beta_n$ при различных n. С ее помощью выяснить, при каком значении n дальнейшее измельчение разбиения не приводит к изменению коэффициентов α_n, β_n более чем на 0,01.

в) В условиях пункта б) найти $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$.

5.19. В условиях задачи 5.16 при $a = 0$, $b = 1$, $t_k = k/(n-1)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ рассмотрим класс, порожденный заданной функцией $x(t)$. Пусть u_n^* — элемент наилучшего приближения этого класса элементами подпространства L_5 в норме H_n, $u_n^*(t) = \sum\limits_{k=0}^{5} \lambda_k t^k$ — многочлен, порождающий этот класс. Составить и реализовать на ЭВМ алгоритм нахождения $u_n^*(t)$, предусматривающий при целом n, изменяющемся от 6 до 15 с шагом 1:

1) ортогонализацию системы классов, порождаемых функциями $x_j(t) = t^j$ $(0 \leqslant j \leqslant 5)$;

2) построение графиков $x(t)$, $u_n^*(t)$ при $n = 6, 9, 12, 15$;

3) выдачу на печать коэффициентов многочлена $u_n^*(t)$ по степеням t и величины $\rho(x, L_5)$ при различных n.

Рассмотреть варианты:

а) $x(t) = \sin 4\pi t$;
б) $x(t) = \sqrt{1 + t^3}$;
в) $x(t) = \sin(t + t^2)$;
г) $x(t) = \ln(1 + t)$;
д) $x(t) = \cos 4\pi t$;
е) $x(t) = \sin \pi t$;
ж) $x(t) = e^t$;
з) $x(t) = \sqrt{t}$;
и) $x(t) = t^6$;
к) $x(t) = \operatorname{tg}(t - 0{,}5)$.

§ 6. Метрические пространства

Множество X называется *метрическим пространством*, если каждой паре элементов $x, y \in X$ поставлено в соответствие вещественное число $\rho(x, y)$, называемое *метрикой* или *расстоянием*, так что выполняются следующие три аксиомы:

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$; $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, z)$ («аксиома треугольника»).

Всякое линейное нормированное пространство является метрическим, метрика в нем вводится равенством $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Аналогично §§ 1, 2 в метрическом пространстве вводятся понятия открытого шара $S_r(x_0) = \{x \in X: \rho(x, x_0) < r\}$, замкнутого шара, открытого и замкнутого множества, фундаментальной и сходящейся последовательности, полного метрического пространства. Большую часть задач из §§ 1, 2 можно ставить и решать в метрическом пространстве. Задачи, приведенные ниже, иллюстрируют особенности метрических пространств по сравнению с линейными нормированными.

6.1. Пусть X — произвольное множество. Доказать, что

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = y, \\ 1 & \text{при } x \neq y \end{cases}$$

определяет метрику на X. Доказать, что любое подмножество X является одновременно и открытым и замкнутым множеством.

6.2. Пусть $\rho(x, y)$ — метрика на множестве X. Доказать, что функции

$$\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}, \quad \rho_2(x, y) = \ln[1 + \rho(x, y)],$$

$$\rho_3(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$$

также являются метриками. Что можно утверждать о полноте получающихся пространств, если в метрике $\rho(x, y)$ множество X было полным метрическим пространством?

6.3. Каким условиям должна удовлетворять определенная на $\mathbf{R}$ непрерывная функция $u = f(v)$, чтобы на вещественной прямой можно было задать метрику с помощью равенства $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$?

6.4. Каким условиям должна удовлетворять непрерывная функция $u = f(v)$, чтобы в метрике $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$ вещественная прямая была полным метрическим пространством?

6.5. Будет ли полным метрическим пространством вещественная прямая с метрикой:

а) $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;

б) $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$;

в) $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$?

Если нет, то описать пополнение по соответствующей метрике.

6.6. В множестве s всевозможных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ $(x_k \in \mathbf{R}, (x_k \in \mathbf{C}))$ положим

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

а) Доказать, что $\rho(x, y)$ — метрика.

б) Доказать, что s — полное метрическое пространство.

в) Можно ли в пространстве s ввести норму так, чтобы выполнялось равенство $\rho(x, y) = \|x - y\|$?

г) Привести пример последовательности $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$ $(x_k^{(n)} \in \mathbf{R})$, которая сходится в пространстве s, принадлежит пространству l_2, но не сходится в пространстве l_2.

6.7. Доказать, что в любом метрическом пространстве замыкание открытого шара $\overline{S_r(x_0)}$ лежит в замкнутом шаре $\overline{S}_r(x_0)$, т. е. $\overline{S_r(x_0)} \subset \overline{S}_r(x_0)$. Возможно ли здесь строгое включение? Сравнить с задачей 1.3.

6.8. Доказать, что в любом метрическом пространстве X для любого $x \in X$ и любого $r > 0$ выполняется неравенство $0 \leqslant \operatorname{diam} S_r(x) \leqslant 2r$. Привести пример метрического пространства X и такого элемента $x \in X$, что $\operatorname{diam} S_1(x) = 0{,}5$. Сравнить с задачей 1.4.

6.9. Может ли в метрическом пространстве шар большего радиуса лежать строго внутри шара меньшего радиуса? При каких значениях радиуса a возможно строгое включение $S_a(x) \subset S_1(y)$? Сравнить с задачей 1.5.

6.10. В множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел положим

$$\rho(n, m) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m = n, \\ 1 + \dfrac{1}{n+m} & \text{при} \quad m \neq n. \end{cases}$$

а) Доказать, что $\rho(n, m)$ — метрика.

б) Доказать, что $\mathbf{N}$ с метрикой $\rho(n, m)$ — полное метрическое пространство.

в) Построить в $\mathbf{N}$ с метрикой $\rho(n, m)$ последовательность непустых замкнутых вложенных шаров, радиусы которых не стремятся к нулю, и которая не имеет точки, принадлежащей всем шарам одновременно. Сравнить с задачей 2.26.

6.11. В множестве X всевозможных последовательностей натуральных чисел для элементов $x = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$, $y = (m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots)$ обозначим через $k_0(x, y)$ наименьший индекс, при котором $n_k \neq m_k$. Доказать, что:

а)

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = y, \\ \dfrac{1}{k_0(x, y)} & \text{при} \quad x \neq y \end{cases}$$

есть метрика на X;

б) аксиома треугольника выполняется в X в усиленной форме:

$$\rho(x, z) \leqslant \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\};$$

в) если $\rho(x, y) \neq \rho(y, z)$, то $\rho(x, z) = \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$;

г) любой открытый шар $S_r(x)$ является одновременно замкнутым множеством и $S_r(y) = S_r(x)$ для любого $y \in S_r(x)$;

д) любой замкнутый шар $\overline{S}_r(x)$ является одновременно открытым множеством и $\overline{S}_r(y) = \overline{S}_r(x)$ для любого $y \in \overline{S}_r(x)$;

е) если два шара в X имеют общую точку, то один из них содержится в другом;

ж) расстояние между двумя различными открытыми шарами радиуса r, содержащимися в замкнутом шаре радиуса r, равно r;

з) для того чтобы последовательность $x_n \in X$ была фундаментальна, необходимо и достаточно, чтобы $\rho(x_n, x_{n+1}) \to 0$ при $n \to \infty$;

и) пространство X полно;

к) пространство X сепарабельно.

Глава 2

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 7. Непрерывность, ограниченность и норма линейного оператора

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, F: $X \to Y$ — отображение или *оператор*, определенный в окрестности точки $x_0 \in X$. Он называется *непрерывным в точке* x_0, если $F(x) \to F(x_0)$ при $x \to x_0$.

Пусть F — оператор с *областью определения* $D(F) \subset X$ и с *областью значений* $R(F) \subset Y$. Он называется *ограниченным*, если переводит любое ограниченное множество из $D(F)$ в множество, ограниченное в пространстве Y.

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, оба вещественные или оба комплексные. Оператор A: $X \to Y$ с областью определения $D(A) \subset X$ называется *линейным*, если $D(A)$ — линейное многообразие в X и для любых $x, y \in D(A)$ и любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$) выполняется равенство $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2$.

Множество $N(A) = \{x \in D(A)\colon\ A(x) = 0\}$ называется *множеством нулей* или *ядром* оператора A.

Теорема 7.1. *Линейный оператор A: $X \to Y$, заданный на всем X и непрерывный в точке $0 \in X$, непрерывен в любой точке $x_0 \in X$.*

Линейный оператор A: $X \to Y$ с $D(A) = X$ называется *непрерывным*, если он непрерывен в точке $0 \in X$. Линейный оператор A: $X \to Y$ с $D(A) = X$ называется *ограниченным*, если существует $c \in \mathbf{R}$, $c > 0$ такое, что для любого $x \in \bar{S}_1(0)$ справедливо неравенство $\|Ax\| \leqslant c$.

Теорема 7.2. *Линейный оператор A: $X \to Y$ с $D(A) = X$ ограничен тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\|Ax\| \leqslant c\|x\|$.*

Теорема 7.3. *Линейный оператор A: $X \to Y$ с $D(A) = X$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

Нормой ограниченного линейного оператора A: $X \to Y$ с $D(A) = X$ называется число $\|A\| = \sup\limits_{x \in X, \|x\| < 1} \|Ax\|$.

7.1. Пусть X, Y — линейные пространства, A: $X \to Y$ — линейный оператор и система элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D(A)$ линейно зависима. Доказать, что система $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$ линейно зависима.

7.2. Пусть X, Y — линейные пространства, A: $X \to Y$ — линейный оператор и система элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D(A)$ линейно независима. Верно ли, что система элементов $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$ линейно независима?

7.3. Пусть X, Y — линейные пространства, A: $X \to Y$ — линейный оператор. Доказать, что оператор A переводит выпуклое множество из $D(A)$ в выпуклое множество в пространстве Y.

7.4. Пусть X, Y — линейные пространства, A: $X \to Y$ — линейный оператор, $B \subset R(A)$ — выпуклое множество, $M = \{x \in D(A) : Ax \in B\}$. Будет ли множество M выпуклым?

7.5. Пусть на линейном пространстве X заданы две эквивалентные нормы, A: $X \to X$ — линейный оператор. Доказать, что в обеих нормах он будет одновременно или ограниченным или неограниченным.

7.6. Доказать, что оператор, осуществляющий: а) изоморфизм линейных нормированных пространств X и Y; б) вложение линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y, является ограниченным.

7.7. Доказать, что оператор π, отображающий линейное нормированное пространство X в факторпространство X/L (см. задачу 2.28) и ставящий в соответствие элементу $x \in X$ содержащий его класс смежности ξ, является линейным ограниченным.

7.8. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства. A: $X \to Y$ — ограниченный линейный оператор с $D(A) = X$. Доказать, что

$$\|A\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

7.9. Доказать, что линейный оператор A: $X \to Y$ с $D(A) = X$ ограничен тогда и только тогда, когда существует $c \in \mathbf{R}$, $c > 0$ такое, что для любого $x \in S_1(0) \subset X$ выполняется неравенство $\|Ax\| \leqslant c$. Если это условие выполняется, то

$$\|A\| = \sup_{x \in X, \|x\| = 1} \|Ax\|.$$

7.10. Доказать, что для ограниченного линейного оператора A: $X \to Y$ с $D(A) = X$ справедливо равенство

$\|A\| = \inf c$, где c — такое число, что $\|Ax\| \leqslant c\|x\|$ для любого $x \in X$.

7.11. Пусть H — гильбертово пространство, A: $H \to H$ — ограниченный линейный оператор с $D(A) = H$. Доказать, что

$$\|A\| = \sup_{x, y \in H, x \neq 0, y \neq 0} \frac{|(Ax, y)|}{\|x\| \|y\|}.$$

7.12. Доказать, что следующие операторы являются линейными ограниченными и найти их нормы (в пунктах и), л), м) — оценить нормы):

а) A: $C[0, 1] \to C[0, 1]$, $\quad Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$;

б) A: $C[-1, 1] \to C[0, 1]$, $\quad Ax(t) = x(t)$;

в) A: $C[0, 1] \to C[0, 1]$, $\quad Ax(t) = t^2 x(0)$;

г) A: $C[0, 1] \to C[0, 1]$, $\quad Ax(t) = x(t^2)$;

д) A: $C^1[a, b] \to C[a, b]$, $\quad Ax(t) = x(t)$;

е) A: $C^1[a, b] \to C[a, b]$, $\quad Ax(t) = \frac{dx}{dt}$;

ж) A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $\quad Ax(t) = t \int_0^1 x(\tau)\, d\tau$;

з) A_λ: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $\quad A_\lambda x(t) = \begin{cases} x(t), & t \leqslant \lambda, \ \lambda \in (0, 1), \\ 0, & t > \lambda, \ \lambda \in (0, 1); \end{cases}$

и) A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $\quad Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$;

к) A: $H^1[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $\quad Ax(t) = x(t)$;

л) A: $H^1[0, 1] \to H^1[0, 1]$, $\quad Ax(t) = tx(t)$;

м) A: $H^1[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $\quad Ax(t) = tx(t)$.

7.13. Будет ли ограниченным оператор A: $C[0, 1] \to C[0, 1]$, $Ax(t) = dx/dt$, с областью определения L — линейным многообразием непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций?

7.14. Будет ли ограниченным оператор A: $H^1[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = dx/dt$?

7.15. Для каких функций $\varphi(t)$ оператор $Ax(t) = \varphi(t)x(t)$ будет ограничен, если он рассматривается как действующий:

а) из $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$; б) из $L_2[0, 1]$ в $L_2[0, 1]$?

7.16. Доказать, что оператор A: $C^k[a, b] \to C[a, b]$,

$$Ax(t) = \sum_{i=0}^{k} \varphi_i(t) x^{(i)}(t),$$

где функции $\varphi_i(t)$ для $i = 0, 1, \ldots, k$ непрерывны на $[a, b]$, является ограниченным.

7.17. Пусть e_n $(n \in \mathbf{N})$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H, $\lambda_n \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$. Доказать, что если последовательность λ_n ограничена, то равенства $Ae_n = \lambda_n e_n$ $(n \in \mathbf{N})$ определяют ограниченный линейный оператор A: $H \to H$ с $D(A) = H$ и $\|A\| = \sup_n |\lambda_n|$.

7.18. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства A: $X \to Y$ — непрерывный линейный оператор с $D(A) = X$. Всегда ли существует $x \in X$, $x \neq 0$ такое, что $\|Ax\| = \|A\| \|x\|$?

7.19. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, причем X конечномерно. Доказать, что всякий линейный оператор A: $X \to Y$ с $D(A) = X$ ограничен и существует $x \in X$, $x \neq 0$ такое, что $\|Ax\| = \|A\| \cdot \|x\|$.

7.20. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, A: $X \to Y$ — линейный оператор.

а) Доказать, что $R(A)$ — линейное многообразие в Y.

б) Всегда ли $R(A)$ — подпространство в Y?

7.21. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, A: $X \to Y$ — такой линейный оператор, что многообразие $R(A) \subset Y$ конечномерно. Следует ли отсюда, что A — ограниченный оператор?

7.22. Доказать, что ядро $N(A)$ ограниченного линейного оператора A: $X \to Y$ является подпространством пространства X.

7.23. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, A: $X \to Y$ — такой линейный оператор, что $N(A)$ является подпространством в X. Следует ли отсюда, что A — ограниченный оператор?

7.24. Пусть A: $X \to Y$ — линейный оператор с $D(A) = X$, причем $R(A)$ конечномерно, а $N(A)$ замкнуто в X. Доказать, что A — ограниченный оператор.

7.25. Пусть X — линейное нормированное пространство, A: $X \to X$ — ограниченный линейный оператор с $D(A) = X$. Верно ли, что $X = R(A) \oplus N(A)$?

7.26. Пусть X — банахово пространство, A: $X \to X$ — изометрический линейный оператор с $D(A) = X$. Доказать, что $R(A)$ — подпространство в X.

7.27. Пусть X — банахово пространство, A: $X \to X$ — такой ограниченный линейный оператор с $D(A) = X$, что

существует $c \in \mathbf{R}$, $c > 0$ такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\|Ax\| \geqslant c\|x\|$. Доказать, что $R(A)$ — подпространство в X.

7.28. Рассмотрим оператор $A: C[a, b] \to C[a, b]$, $Ax(t) = \varphi(t)x(t)$, где $\varphi(t) \in C[a, b]$. При каких условиях на функцию $\varphi \neq 0$ множество $R(A)$ является подпространством $C[a, b]$?

7.29. Пусть X, Y — банаховы пространства, $A: X \to X$ — ограниченный линейный оператор с $D(A) = X$. Всегда ли равенства:

а) $\|x\|_1 = \|Ax\|$;

б) $\|x\|_2 = \|x\| + \|Ax\|$ задают в X норму? Будет ли в этой норме X банаховым пространством?

7.30. В пространстве l_2 рассмотрим оператор A, переводящий элемент $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ в элемент $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$, где $\lambda_n \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$.

а) Доказать, что при любых λ_n оператор A — линейный.

б) При каких условиях на последовательность λ_n $D(A)$ совпадает со всем пространством l_2?

в) При каких условиях на последовательность λ_n оператор A будет ограничен и какова будет при этом его норма?

г) Если A — ограниченный оператор, то всегда ли найдется $x \in l_2$, $x \neq 0$ такое, что $\|Ax\| = \|A\|\|x\|$?

д) При каких условиях на последовательность λ_n множество $R(A)$ является подпространством l_2?

7.31. Пусть $\alpha \geqslant 0$ фиксировано, C_α — банахово пространство непрерывных на $[0, +\infty)$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{[0, +\infty)} e^{\alpha t} |x(t)| < \infty,$$

с нормой

$$\|x\|_\alpha = \sup_{[0, +\infty)} e^{\alpha t} |x(t)|.$$

Доказать, что:

а) функция $x(t) = t^\sigma e^{-\gamma t} \in C_\alpha$ при $\gamma > \alpha$, $\sigma \geqslant 0$ и

$$\|x\|_\alpha = e^{-\sigma} \left(\frac{\sigma}{\gamma - \alpha}\right)^\sigma;$$

б) непрерывная функция $x(t)$ принадлежит пространству C_α тогда и только тогда, когда существует такая постоянная $M > 0$, что для любого $t \in [0, +\infty)$ выполняется неравенство $|x(t)| \leqslant Me^{-\alpha t}$;

в) оператор B умножения: $Bx(t) = b(t)x(t)$, где $b(t) \in C_\beta$, $\beta \geqslant 0$, является непрерывным линейным оператором, действующим из пространства C_α в пространство $C_{\alpha+\beta}$, причем $\|B\| = \|b\|_\beta$;

г) интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_0^t e^{-\beta(t-s)} x(s)\, ds$$

является при $\beta > \alpha \geqslant \gamma$ непрерывным линейным оператором, действующим из пространства C_α в пространство C_γ, причем $\|A\| = 1/(\beta - \alpha)$ при $\gamma = \alpha$, а при $\gamma < \alpha$

$$\|A\| = \left[\frac{(\alpha - \gamma)^{\alpha-\gamma}}{(\beta - \gamma)^{\beta-\gamma}}\right]^{1/(\beta-\alpha)}$$

§ 8. Пространство ограниченных линейных операторов

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, оба вещественные или оба комплексные, A, B — ограниченные линейные операторы, определенные на всем X, со значениями в Y. Полагая, по определению,

$$(A + B)x = Ax + Bx, \ \lambda A(x) = \lambda Ax, \ \|A\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|Ax\|,$$

получаем линейное нормированное *пространство* $\mathscr{L}(X, Y)$ *ограниченных линейных операторов.*

В пространстве $\mathscr{L}(X, X) = \mathscr{L}(X)$ полагаем, по определению, $(AB)x = A(Bx)$, тем самым $\mathscr{L}(X)$ становится алгеброй с единицей, где единицей является *тождественный оператор* $I: X \to X$, $Ix = x$.

Последовательность $A_n \in \mathscr{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ называют *равномерно сходящейся* к оператору $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ и записывают $A_n \to A$ $(n \to \infty)$, если $\|A_n - A\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Последовательность $A_n \in \mathscr{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ называют *сильно сходящейся* к оператору $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ и записывают $A_n \to A$ $(n \to \infty)$ сильно, если для любого $x \in X$ $\|A_n x - Ax\| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Теорема 8.1. *Если Y — банахово пространство, то $\mathscr{L}(X, Y)$ — банахово пространство.*

Теорема 8.2. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $A_n \in \mathscr{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ и для любого $x \in X$ последовательность $A_n x$ ограничена. Тогда последовательность $\|A_n\|$ ограничена.*

Теорема 8.3. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $A_n \in \mathscr{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$. Для того чтобы последователь-*

ность A_n при $n \to \infty$ сильно сходилась к оператору $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, необходимо и достаточно, чтобы:

1) *последовательность $\|A_n\|$ была ограничена;*

2) *$A_n \to A$ $(n \to \infty)$ сильно на некотором линейном многообразии, всюду плотном в пространстве X.*

Теорема 8.4. *Пусть X — линейное нормированное пространство, Y — банахово пространство, A: $X \to Y$ — линейный оператор, причем $\overline{D(A)} = X$ и на $D(A)$ оператор A ограничен. Тогда существует такой ограниченный линейный оператор $\widehat{A} \in \mathscr{L}(X, Y)$, что $\widehat{A}x = Ax$ для любого $x \in D(A)$ и $\|\widehat{A}\| = \|A\|$.*

При этом оператор $\widehat{A}$ называется *продолжением* оператора A на все пространство X.

8.1. Привести пример линейного нормированного пространства X и таких операторов $A, B \in \mathscr{L}(X)$, что $AB \neq BA$.

8.2. Пусть $A, B \in \mathscr{L}(X, Y)$ — ненулевые операторы и $R(A) \cap R(B) = 0$. Доказать, что A, B линейно независимы.

8.3. Пусть $A, B \in \mathscr{L}(X, Y)$ и $R(A) = R(B)$, $N(A) = N(B)$. Следует ли отсюда, что $A = B$?

8.4. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, $U \subset X$ — открытое множество, $V \subset X$ — замкнутое множество, $A \in \mathscr{L}(X, Y)$. Будут ли образы этих множеств соответственно открытым и замкнутым множеством в Y?

8.5. Пусть L — подпространство линейного нормированного пространства X и $M = \{A \in \mathscr{L}(X, Y): N(A) = L\}$. Является ли M подпространством в пространстве $\mathscr{L}(X, Y)$?

8.6. Пусть L — подпространство линейного нормированного пространства X и $M = \{A \in \mathscr{L}(X, Y): N(A) \supset L\}$. Является ли M подпространством в $\mathscr{L}(X, Y)$?

8.7. Пусть X — линейное нормированное пространство, $A \in \mathscr{L}(X)$ — произвольный оператор, $N_k = N(A^k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

а) Доказать, что $N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_k \subset N_{k+1} \subset \ldots$

б) Пусть для некоторого натурального m впервые $N_m = N_{m+1}$. Доказать, что $N_{m+p} = N_m$ для любого натурального p.

8.8. Доказать, что отображение Φ: $\mathscr{L}(X, Y) \to \mathbf{R}$, $\Phi(A) = \|A\|$ непрерывно.

8.9. Пусть X — линейное нормированное пространство, $A \in \mathscr{L}(X)$ — фиксированный оператор. Образуют ли в пространстве $\mathscr{L}(X)$ подпространство всевозможные операторы $B \in \mathscr{L}(X)$, удовлетворяющие условию:

а) $AB = 0$; б) $AB = BA$?

8.10. Доказать, что при замене норм в линейных нормированных пространствах X и Y на эквивалентные новая норма в пространстве $\mathscr{L}(X, Y)$ будет эквивалентна старой.

8.11. Пусть X, Y — банаховы пространства, $A_n, A \in \mathscr{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ и $A_n \to A$ $(n \to \infty)$ сильно на некотором линейном многообразии, всюду плотном в пространстве X. Следует ли отсюда, что $A_n \to A$ $(n \to \infty)$ сильно?

8.12. Пусть H — гильбертово пространство, $A_n \in \mathscr{L}(H)$ $(n \in \mathbf{N})$ и $\sup\limits_n |(A_n x, y)| < \infty$ для любых $x, y \in H$. Доказать, что $\sup\limits_n |A_n| < \infty$.

8.13. Пусть X, Y — банаховы пространства, множество $M \in \mathscr{L}(X, Y)$ таково, что

$$\sup_{A \in M} \|Ax\| = \varphi(x) < \infty$$

для любого $x \in X$. Доказать, что $\sup\limits_{A \in M} \|A\| < \infty$.

8.14. Пусть X, Y — банаховы пространства, $A_n \in \mathscr{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ и для любого $x \in X$ последовательность $A_n x$ фундаментальна. Доказать, что существует такой оператор $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, что $A_n \to A$ $(n \to \infty)$ сильно.

8.15. В пространстве $C[-\pi, \pi]$ рассмотрим подпространство M функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $x(-\pi) = x(\pi)$. Для $x(t) \in M$ положим

$$y_n(t) = A_n x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt,$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin kt \, dt;$$

тем самым каждой функции $x(t) \in M$ сопоставлена частичная сумма ее ряда Фурье.

а) Доказать, что

$$y_n(t) = A_n x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) \frac{\sin[(2n+1)(\tau - t)/2]}{\sin[(\tau - t)/2]} d\tau.$$

б) Доказать, что $A_n \in \mathscr{L}(M)$ и что

$$\|A_n\| = \max_{t \in [-\pi, \pi]} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin[(2n+1)(\tau - t)/2]}{\sin[(\tau - t)/2]} \right| d\tau.$$

в) Пусть $L \subset C[-\pi, \pi]$ — подпространство тригонометрических многочленов. Доказать, что на L последовательность A_n при $n \to \infty$ сильно сходится к тождественному оператору.

г) Предположим, что $\|A_n x - x\| \to 0$ для любой $x(t) \in M$ при $n \to \infty$. Вывести отсюда, что $\sup\limits_n \|A_n\| < \infty$.

д) Составить и реализовать на ЭВМ алгоритм вычисления $\|A_n\|$ при различных n. Оправдывают ли результаты вычислений предположение г)?

8.16. Пусть $t_k = k/n$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ — разбиение отрезка $[0, 1]$, $x(t) \in C[0, 1]$. Положим

$$y_n(t) = A_n x(t) = \sum_{k=0}^{n} x(t_k)\, G_k^{(n)}(t),$$

где

$$G_k^{(n)}(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)\ldots(t-t_{k-1})(t-t_{k+1})\ldots(t-t_n)}{(t_k-t_0)(t_k-t_1)\ldots(t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1})\ldots(t_k-t_n)};$$

тем самым каждой непрерывной функции сопоставлен ее интерполяционный многочлен Лагранжа.

а) Доказать, что $A_n \in \mathscr{L}(C[0, 1])$.

б) Доказать, что $\|A_n\| = \max\limits_{t \in [0,1]} \sum\limits_{k=0}^{n} |G_k^{(n)}(t)|$.

в) Пусть $L \subset C[0, 1]$ — линейное многообразие многочленов. Доказать, что на L последовательность A_n при $n \to \infty$ сильно сходится к тождественному оператору.

г) Предположим, что для любой $x(t) \in C[0, 1]$ $\|A_n x - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Вывести отсюда, что $\sup\limits_n \|A_n\| < \infty$.

д) Составить и реализовать на ЭВМ алгоритм вычисления $\|A_n\|$ при различных n. Оправдывают ли результаты вычислений предположение г)?

8.17. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, $A_n \in \mathscr{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ и $A_n \to 0$ $(n \to \infty)$ сильно. Следует ли отсюда, что $A_n \to 0$ $(n \to \infty)$ по норме пространства $\mathscr{L}(X, Y)$?

8.18. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, $A_n \in \mathscr{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ и последовательность $A_n x$ сходится равномерно на шаре $\bar{S}_1(0) \subset X$. Доказать, что существует такой оператор $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, что $A_n \to A$ при $n \to \infty$.

8.19. В пространстве l_2 для элемента $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ определим последовательности операторов

$$A_n x = \left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \ldots\right),$$

$$B_n x = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\right), \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Каков характер сходимости каждой из последовательностей?

8.20. Рассмотрим оператор $A\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = \int_0^t e^{\tau} x(\tau)\, d\tau$$

и последовательность операторов $A_n\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$A_n x(t) = \int_0^t \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\tau^k}{k!}\right] x(\tau)\, d\tau, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Сходится ли последовательность A_n к A? Каков характер сходимости?

8.21. Рассмотрим оператор $A\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(s) = \int_0^1 e^{st} x(t)\, dt$$

и последовательности операторов $A_n, B_n\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$A_n x(s) = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(st)^k}{k!}\right] x(t)\, dt,$$

$$B_n x(s) = \int_{\varepsilon_n}^{1-\varepsilon_n} e^{st} x(t)\, dt, \qquad n \in \mathbf{N},$$

где $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Сходятся ли последовательности A_n и B_n к A? Каков характер сходимости?

8.22. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим последовательность операторов $A_n x(t) = x(t^{1+1/n})$ $(n \in \mathbf{N})$.

а) Доказать, что $A_n \in \mathscr{L}(C[0, 1])$.

б) Доказать, что при $n \to \infty$ A_n сильно сходится к тождественному оператору.

в) Будет ли сходимость A_n к I равномерной?

8.23. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, $x_n, x \in X$, $x_n \to x$, $A_n, A \in \mathscr{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$, $A_n \to A$ при $n \to \infty$. Доказать, что $A_n x_n \to Ax$ при $n \to \infty$.

8.24. Пусть X, Y — банаховы пространства, $A_n \in \mathscr{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ и при $n \to \infty$ сильно сходится к оператору $A \in \mathscr{L}(X, Y)$. Доказать, что если $x_n, x \in X$ и $x_n \to x$ при $n \to \infty$, то $A_n x_n \to Ax$ при $n \to \infty$.

8.25. Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $A_n, A \in \mathscr{L}(X, Y)$, $B_n, B \in \mathscr{L}(Y, Z)$ $(n \in \mathbf{N})$ и при $n \to \infty$ A_n сильно сходится к оператору A, B_n сильно сходится к оператору B. Доказать, что при $n \to \infty$ $B_n A_n$ сильно сходится к оператору BA.

8.26. Пусть X, Y, Z — линейные нормированные пространства, $A_n, A \in \mathscr{L}(X, Y)$, $B_n, B \in \mathscr{L}(Y, Z)$ $(n \in \mathbf{N})$ и при $n \to \infty$ $A_n \to A$, $B_n \to B$. Доказать, что в пространстве $\mathscr{L}(X, Z)$ $B_n A_n \to BA$ при $n \to \infty$.

8.27. Привести пример линейного нормированного пространства X и таких операторов $A, B \in \mathscr{L}(X)$, что $\|AB\| < \|A\|\|B\|$.

8.28. Пусть X — линейное нормированное пространство, $A \in \mathscr{L}(X)$, B: $X \to X$ — неограниченный оператор с $D(B)$, всюду плотной в X. Может ли произведение AB быть:

а) неограниченным оператором;

б) ограниченным оператором?

8.29. Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathscr{L}(X)$, $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k t^k$ $(\lambda_k \in \mathbf{R})$ — сходящийся на всем $\mathbf{R}$ степенной ряд. Доказать, что последовательность $S_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k A^k$ имеет при $n \to \infty$ предел $\varphi(A) \in \mathscr{L}(X)$.

8.30. Доказать, что в банаховом пространстве X для любого $A \in \mathscr{L}(X)$ определены операторы

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k}}{(2k)!}.$$

8.31. Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathscr{L}(X)$. Доказать, что $\|e^A\| \leqslant e^{\|A\|}$. Найти e^I, где I — тождественный оператор.

8.32. Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathscr{L}(X)$. Доказать, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится в $\mathscr{L}(X)$ тогда и только тогда, когда для некоторого натурального k выполняется неравенство $\|A^k\| < 1$.

8.33. Будет ли пространство $\mathscr{L}(X)$, где $X = L_2[0, 1]$, сепарабельным?

8.34. Пусть X, Y — банаховы пространства. $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ и для любого $y \in Y$ найдется такое $x \in X$, что $\|Ax - y\| \leqslant \alpha\|y\|$, $\|x\| \leqslant \beta\|y\|$, где $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha < 1$. Доказать, что уравнение $Ax = y$ при любом $y \in Y$ имеет решение $x \in X$, удовлетворяющее условию $\|x\| \leqslant \frac{\beta}{1-\alpha}\|y\|$.

8.35. Пусть X — банахово пространство, L, M — подпространства X, $X = L \oplus M$. *Оператор проектирования* P на подпространство L паралельно подпространству M вводится равенством $Px = u$, где $x = u + v$, $u \in L$, $v \in M$. Доказать, что P — линейный ограниченный оператор.

8.36. Пусть P: $X \to X$ — линейный оператор, заданный всюду в банаховом пространстве X. Доказать, что он является оператором проектирования на некоторое подпространство $L \subset X$ параллельно подпространству $M \subset X$ тогда и только тогда, когда P ограничен и удовлетворяет условию $P^2 = P$.

8.37. Доказать, что линейный оператор P, заданный всюду в банаховом пространстве X, отображающий его в себя и удовлетворяющий условию $P^2 = P$, ограничен (и, следовательно, является оператором проектирования на некоторое подпространство $L \subset X$ параллельно подпространству $M \subset X$) тогда и только тогда, когда линейные многообразия $R(P)$ и $R(I - P)$ замкнуты в пространстве X.

8.38. В пространстве $C[-1, 1]$ рассмотрим операторы

$$Ax(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)], \quad Bx(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)].$$

а) Доказать, что A, B — ограниченные линейные операторы и найти их нормы.

б) Найти операторы A^2, B^2. Являются ли A и B операторами проектирования?

8.39. В гильбертовом пространстве H *оператор ортогонального проектирования* на подпространство $L \subset H$ для $x = u + v$, где $u \in L$, $v \in L^{\perp}$, определяется равенством $Px = u$. Доказать, что оператор P ограничен, и найти его норму.

8.40. Пусть L_1, L_2 — подпространства гильбертова пространства H, P_1, P_2 — операторы ортогонального проектирования соответственно на L_1 и L_2. Доказать, что $\|P_1 - P_2\| \leqslant 1$.

8.41. Пусть L — подпространство гильбертова пространства H, P — оператор ортогонального проектирова-

ния на L. Что можно утверждать об операторе $A \in \mathscr{L}(H)$, если для него выполняется равенство:

а) $AP = A$;

б) $PA = A$;

в) $AP = PA$?

8.42. Пусть H — гильбертово пространство, $L \subset H$ — линейное многообразие, A — ограниченный линейный оператор, заданный на L со значениями в банаховом пространстве Y. Доказать, что A может быть продолжен на все H с сохранением нормы.

8.43. Пусть X — банахово пространство, L, M — такие подпространства банахова пространства Y, что $Y = L \oplus M$. Доказать, что $\mathscr{L}(X, Y) = \mathscr{L}(X, L) \oplus \mathscr{L}(X, M)$.

8.44. Пусть L, M — подпространства линейного нормированного пространства X, $X = L \oplus M$, Y — банахово пространство. Верно ли, что $\mathscr{L}(X, Y) = \mathscr{L}(L, Y) \oplus \mathscr{L}(M, Y)$?

§ 9. Обратные операторы

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, $A: X \to Y$ — линейный оператор, отображающий $D(A)$ на $R(A)$ взаимно однозначно. Тогда существует *обратный оператор* $A^{-1}: Y \to X$, отображающий $R(A)$ на $D(A)$ взаимно однозначно и также являющийся линейным.

Линейный оператор $A: X \to Y$ называется *непрерывно обратимым*, если $R(A) = Y$, A^{-1} существует и ограничен, т. е. $A^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$.

Теорема 9.1. *Оператор A^{-1} существует и ограничен на $R(A)$ тогда и только тогда, когда для некоторой постоянной $m > 0$ и любого $x \in D(A)$ выполняется неравенство $\|Ax\| \geqslant m\|x\|$.*

Теорема 9.2. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, $R(A) = Y$ и A обратим. Тогда A непрерывно обратим.*

Теорема 9.3. *Пусть X — банахово пространство, $C \in \mathscr{L}(X)$ и $\|C\| < 1$. Тогда оператор $I - C$ непрерывно обратим и справедлива оценка*

$$\|(I - C)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|C\|}.$$

Теорема 9.4. *Пусть X — банахово пространство, $A, B \in \mathscr{L}(X)$, A непрерывно обратим и выполняется неравенство*

$$\|B - A\| \leqslant \|A^{-1}\|^{-1}.$$

Тогда B непрерывно обратим и справедлива оценка

$$\|B^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|B - A\|\|A^{-1}\|}.$$

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, $A \in \mathscr{L}(X, Y)$. Оператор $A_r^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$ называется *правым обратным* к A, если $AA_r^{-1} = I_Y$, оператор $A_l^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$ называется *левым обратным* к A, если $A_l^{-1}A = I_X$, где I_Y и I_X — тождественные операторы соответственно в пространствах Y и X.

9.1. Пусть X, Y — линейные пространства, $A: X \to Y$ — линейный оператор, у которого существует обратный. Доказать, что системы элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D(A)$, одновременно или линейно независимы или линейно зависимы.

9.2. Пусть X — линейное пространство, $A: X \to X$ — линейный оператор, удовлетворяющий при некоторых $\lambda_k \in \mathbf{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ соотношению $I + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \ldots + \lambda_n A^n = 0$. Доказать, что оператор A^{-1} существует.

9.3. Пусть X — линейное пространство, $A, B: X \to X$ — линейные операторы с $D(A) = D(B) = X$ и существуют операторы $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$. Следует ли отсюда, что существуют операторы A^{-1}, B^{-1}?

9.4. Пусть X — линейное пространство, $A, B: X \to X$ — линейные операторы с $D(A) = D(B) = X$ и оператор $(I - AB)^{-1}$ существует. Доказать, что оператор $(I - BA)^{-1}$ существует.

9.5. Пусть X — линейное пространство, $A, B: X \to X$ — линейные операторы с $D(A) = D(B) = X$, удовлетворяющие соотношениям $AB + A + I = 0$, $BA + A + I = 0$. Доказать, что оператор A^{-1} существует.

9.6. Пусть X — линейное нормированное пространство, $A, B: X \to X$ — линейные операторы с $D(A) = D(B) = X$ такие, что $AB = BA$.

а) Пусть оператор A^{-1} существует. Доказать, что $A^{-1}B = BA^{-1}$.

б) Пусть $A, B \in \mathscr{L}(X)$ и B непрерывно обратим. Доказать, что

$$\|AB\| \leqslant \frac{\|A\|}{\|B^{-1}\|}.$$

9.7. Пусть X — линейное нормированное пространство, A, $A^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ и $k = \|A\|\|A^{-1}\|$ — *число обусловленности* оператора A. Рассмотрим уравнение $Ax = y$, где $y \in X$,

$y \neq 0$. Пусть $\bar{x} \in X$ — его приближенное решение. Доказать, что его относительная погрешность может быть оценена по формуле

$$\frac{1}{k}\frac{\|A\bar{x}-y\|}{\|y\|} \leqslant \frac{\|\bar{x}-x\|}{\|x\|} \leqslant k\frac{\|A\bar{x}-y\|}{\|y\|}.$$

9.8. Пусть X — линейное нормированное пространство, $A\colon X \to X$ — линейный оператор и в X существует такая последовательность $x_n \in D(A)$ $(n \in \mathbf{N})$, что $\|x_n\| = 1$ и $Ax_n \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что у оператора A не существует ограниченного обратного.

9.9. В пространстве l_2 рассмотрим оператор A, переводящий элемент $x = (x_1, x_2, \ldots)$ в элемент $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$, где $\lambda_n \in \mathbf{R}$, $(n \in \mathbf{N})$, $\sup\limits_n |\lambda_n| < \infty$. При каких условиях на последовательность λ_n существует обратный оператор A^{-1}? Будет ли он ограничен?

9.10. В пространстве l_2 рассмотрим операторы A, B, переводящие элемент $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ соответственно в $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$, $Bx = (x_2, x_3, \ldots)$. Какие из операторов A^{-1}, B^{-1}, A_r^{-1}, B_r^{-1}, A_l^{-1}, B_l^{-1} существуют?

9.11. Доказать, что оператор $A\colon C^1[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = \frac{dx}{dt}$$

имеет правый обратный, но не имеет левого обратного.

9.12. В пространстве $C^1[0, 1]$ рассмотрим подпространство $L = \{x(t) \in C^1[0, 1]\colon x(0) = 0\}$ и оператор $A\colon L \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = dx/dt + a(t)x(t),\ a(t) \in C[0, 1].$$

Доказать, что A непрерывно обратим.

9.13. Рассмотрим оператор $A\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau.$$

а) Что представляет собой его область значений $R(A)$?

б) Существует ли на $R(A)$ обратный оператор A^{-1} и ограничен ли он?

9.14. Рассмотрим оператор $A\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau + x(t).$$

а) Доказать, что $N(A) = 0$, так что при любом $y \in C[0, 1]$ уравнение $Ax = y$ не может иметь более одного решения.

б) Доказать, что A непрерывно обратим и найти оператор A^{-1}.

9.15. Доказать, что оператор $A\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = x(t) + \int_0^1 e^{s+t}x(s)\,ds$$

непрерывно обратим и найти оператор A^{-1}.

9.16. Рассмотрим оператор $A\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = \frac{d^2x}{dt^2} + x(t)$$

с областью определения $D(A)$ — линейным многообразием дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x(0) = x'(0) = 0$.

а) Доказать, что A — неограниченный линейный оператор.

б) Доказать, что A непрерывно обратим и найти оператор A^{-1}.

9.17. Рассмотрим оператор $A\colon C[0, 1] \to C^2[0, 1]$,

$$Ax(t) = \int_0^t e^{-|s-t|}x(s)\,ds.$$

Существует ли оператор A^{-1}?

9.18. Пусть X — линейное нормированное пространство, $A\colon X \to X$ — такой линейный оператор с $D(A) = X$, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k x$ сходится для любого $x \in X$.

а) Доказать, что существует оператор $(I - A)^{-1}$.

б) Пусть, кроме того, $A \in \mathscr{L}(X)$. Доказать, что для любого $x \in X$

$$(I - A)^{-1}x = \sum_{k=0}^{\infty} A^k x.$$

9.19. Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathscr{L}(X)$ и $\|I - A\| < 1$. Доказать, что A непрерывно обратим.

9.20. Пусть X — комплексное банахово пространство, $A \in \mathscr{L}(X)$, $\lambda \in \mathbf{C}$ и $|\lambda| > \|A\|$. Доказать, что оператор $A - \lambda I$ непрерывно обратим.

9.21. Пусть X, Y — банаховы пространства, $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ и оператор A^{-1} существует и ограничен на

$R(A)$. Доказать, что $R(A)$ является подпространством в пространстве Y.

9.22. Пусть X, Y — банаховы пространства, $A_n, A \in \mathscr{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ и A_n сходится при $n \to \infty$ к A сильно, $A_n^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$ и $R(A) = Y$. Доказать, что решения уравнения $A_n x_n = y$ сходятся к решению уравнения $Ax = y$ для любого $y \in Y$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_n \|A_n^{-1}\| < \infty.$$

9.23. Пусть X, Y — банаховы пространства, $A_n, A \in \mathscr{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ и $A_n \to A$ при $n \to \infty$. Доказать, что для того чтобы оператор A был непрерывно обратим, необходимо и достаточно, чтобы:

а) операторы A_n были непрерывно обратимы, начиная с некоторого номера N;

б) последовательность A_n^{-1} для $n \geqslant N$ была ограничена.

9.24. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathscr{L}(H)$, $R(A) = H$ и оператор A имеет единственный ограниченный правый обратный оператор A_r^{-1}. Доказать, что A непрерывно обратим.

9.25. Пусть X — банахово пространство. Доказать, что в пространстве $\mathscr{L}(X)$ множество всех непрерывно обратимых операторов является открытым.

§ 10. Замкнутые операторы

Пусть X, Y — банаховы пространства. Их *прямой суммой* называется банахово пространство $Z = X \dotplus Y$ пар $z = (x, y)$, где $x \in X$, $y \in Y$, с операциями $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$, где $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, α_1, α_2 — скаляры, и с нормой $\|z\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Графиком линейного оператора A с областью определения $D(A) \subset X$ и областью значений $R(A) \subset Y$ называется совокупность пар $(x, Ax) \subset Z = X \dotplus Y$. Линейный оператор $A: X \to Y$ называется *замкнутым*, если его график является замкнутым множеством в пространстве $Z = X \dotplus Y$. Иначе говоря, A замкнут, если из $x_n \in D(A)$ $(n \in \mathbf{N})$, $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$ вытекает, что $x \in D(A)$ и $Ax = y$.

Теорема 10.1. *Если $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, то A замкнут.*

Теорема 10.2. *Если A замкнут и оператор A^{-1} существует, то A^{-1} замкнут.*

Теорема 10.3. *Пусть A — замкнутый линейный оператор с $D(A) = X$. Тогда A ограничен.*

10.1. Рассмотрим оператор $A: C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = x(t)/t$$

с областью определения $D(A) = \{x(t) \in C[0, 1]: \lim_{t \to +0} t^{-1} x(t)$ существует$\}$. Доказать, что A — замкнутый оператор.

10.2. Рассмотрим оператор $A: C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = dx/dt$$

с областью определения $D(A)$ — линейным многообразием непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x(0) = x(1) = 0$. Доказать, что A — замкнутый оператор.

10.3. Рассмотрим оператор $A: C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = d^2x/dt^2 + x(t)$$

с областью определения $D(A)$ — линейным многообразием дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x(0) = x'(0) = 0$. Доказать, что A — неограниченный замкнутый оператор.

10.4. Доказать, что оператор проектирования P на подпространство L банахова пространства X параллельно подпространству M (см. задачу 8.35) замкнут и, следовательно, ограничен.

10.5. Доказать, что в пространстве $C[a, b]$ оператор $Ax(t) = dx/dt$, определенный на линейном многообразии непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций, замкнут.

10.6. Доказать, что в прямой сумме банаховых пространств можно ввести норму следующими способами: $\|z\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$, $\|z\| = (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}$, $p \geqslant 1$, $\|z\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Доказать, что все эти нормы эквивалентны.

10.7. Доказать, что график линейного оператора $A: X \to Y$ является линейным многообразием в пространстве $Z = X \dotplus Y$.

10.8. Всякое ли линейное многообразие в пространстве $Z = X \dotplus Y$ может являться графиком некоторого линейного оператора?

10.9. Доказать, что ограниченный линейный оператор $A: X \to Y$ замкнут тогда и только тогда, когда $D(A)$ замкнуто в X.

10.10. Пусть $A: X \to Y$ — замкнутый линейный оператор. Верно ли, что:

а) $D(A)$ замкнуто в X; б) $R(A)$ замкнуто в Y?

10.11. Доказать, что множество нулей замкнутого оператора является замкнутым множеством.

10.12. Пусть A: $X \to Y$ — такой линейный оператор, что $R(A)$ замкнуто в Y и существует такое $m \in \mathbf{R}$ $(m > 0)$, что для любого $x \in D(A)$ выполняется неравенство $\|Ax\| \geqslant m\|x\|$. Доказать, что A — замкнутый оператор.

10.13. Пусть A, B: $X \to Y$ — линейные операторы, причем A замкнут, B ограничен и $D(A) \subset D(B)$. Доказать, что $A + B$ — замкнутый оператор.

10.14. Пусть A: $X \to Y$ — замкнутый линейный оператор, $R(A) = Y$ и оператор A^{-1} существует. Доказать, что $A^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$.

10.15. Пусть A: $X \to Y$ — линейный оператор. Доказать, что A является замкнутым тогда и только тогда, когда $D(A)$ в норме $\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$, является банаховым пространством.

Глава 3

СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 11. Непрерывные линейные функционалы

Пусть X — линейное нормированное пространство. Всякий оператор f: $X \to Y$, где $Y = \mathbf{R}$ или $Y = \mathbf{C}$, называется *функционалом*, при этом значение функционала f на элементе $x \in X$ обозначается $\langle x, f\rangle$. В этой главе рассматриваются только *линейные функционалы*. Поскольку линейный функционал является частным случаем линейного оператора, для него остаются в силе понятия непрерывности, ограниченности и нормы, а также теоремы из §§ 7, 8. Пространство непрерывных линейных функционалов $\mathscr{L}(X, Y)$, где $Y = \mathbf{R}$ или $Y = \mathbf{C}$, называется *сопряженным* к X и обозначается X^*. *Гиперплоскостью* называется множество $\{x \in X: \langle x, f\rangle = \lambda\}$, где f — линейный функционал, $\lambda \in \mathbf{R}$ $(\lambda \in \mathbf{C})$.

11.1. Пусть X — комплексное линейное пространство, f — определенный на X и не равный тождественно нулю линейный функционал. Доказать, что область значений f есть все $\mathbf{C}$.

11.2. Пусть X — линейное нормированное пространство, $f \in X^*$. Доказать, что:

а) $\|f\| = \sup\limits_{x \in X, x \neq 0} \dfrac{|\langle x, f\rangle|}{\|x\|}$;

б) $\|f\| = \sup\limits_{x \in X, \|x\| = 1} |\langle x, f\rangle|$;

в) $\|f\| = \sup\limits_{x \in X, \|x\| = 1} \langle x, f\rangle$, если пространство X — вещественное.

11.3. Доказать, что следующие функционалы в пространстве $C[-1, 1]$ являются линейными непрерывными и найти их нормы:

а) $\langle x, f\rangle = \frac{1}{3}[x(-1) + x(1)]$;

б) $\langle x, f\rangle = 2[x(1) - x(0)]$;

в) $\langle x, f\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x(t_k)$, где набор чисел $\alpha_k \in \mathbf{R}$ и $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [-1, 1]$ — фиксированные;

г) $\langle x, f_\varepsilon\rangle = \frac{1}{2\varepsilon}[x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)]$, $\varepsilon \in [-1, 1]$;

д) $\langle x, f\rangle = \int_0^1 x(t)\,dt$;

е) $\langle x, f\rangle = \int_{-1}^1 x(t)\,dt - x(0)$;

ж) $\langle x, f\rangle = \int_{-1}^0 x(t)\,dt - \int_0^1 x(t)\,dt$;

з) $\langle x, f\rangle = \int_{-1}^1 x(t)\,dt - \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)$.

11.4. Будут ли ограниченными в пространстве $C[0, 1]$ следующие линейные функционалы:

а) $\langle x, f\rangle = \int_0^1 x(\sqrt{t})\,dt$;

б) $\langle x, f\rangle = \int_0^1 x(t^2)\,dt$;

в) $\langle x, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x(t^n)\,dt$?

11.5. Доказать, что следующие функционалы являются линейными непрерывными, и найти их нормы:

а) $\langle x, f\rangle = \int_{-1}^1 tx(t)\,dt$, $x \in C[-1, 1]$;

б) $\langle x, f\rangle = \int_0^1 tx(t)\,dt$, $x \in C^1[-1, 1]$;

в) $\langle x, f\rangle = \int_{-1}^1 tx(t)\,dt$, $x \in L_1[-1, 1]$;

г) $\langle x, f\rangle = \int_{-1}^1 tx(t)\,dt$, $x \in L_2[-1, 1]$;

д) $\langle x, f\rangle = \int_0^1 t^{-1/3}x(t)\,dt$, $x \in L_2[0, 1]$;

е) $\langle x, f\rangle = x_1 + x_2$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$;

ж) $\langle x, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$;

з) $\langle x, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1$;

и) $\langle x, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_k$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1$;

к) $\langle x, f\rangle = x_1 + x_2$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in m$;

л) $\langle x, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} x_k$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0$;

м) $\langle x, f\rangle = \lim_{n\to\infty} x_n$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c$.

11.6. При каком значении p функционалы а), б) задачи 11.4 являются непрерывными в пространстве $L_p[0, 1]$?

11.7. Будет ли непрерывен функционал $\langle x, f\rangle = x'(0)$, если он рассматривается:

а) на пространстве $C^1[-1, 1]$;

б) на всюду плотном в пространстве $C[-1, 1]$ линейном многообразии непрерывно дифференцируемых функций?

11.8. В пространстве $C^1[a, b]$ рассмотрим подпространство $L = \{x(t) \in C^1[a, b]\colon x(a) = x(b) = 0\}$.

а) Пусть $u(t), v(t), w(t) \in C[a, b]$. Доказать, что

$$\langle x, f\rangle = \int_a^b u(t)\,x'(t)\,dt,$$

$$\langle x, g\rangle = \int_a^b [v(t)\,x(t) + w(t)\,x'(t)]\,dt$$

есть непрерывные линейные функционалы на пространстве $C^1[a, b]$.

б) Пусть $\langle x, f\rangle = 0$ для любой $x(t) \in L$. Доказать, что $u(t) = \text{const}$.

в) Пусть $\langle x, g\rangle = 0$ для любой $x(t) \in L$. Доказать, что $w(t) \in C^1[a, b]$ и $w'(t) = v(t)$.

11.9. Рассматривая непрерывные линейные функционалы, определенные на пространстве $C[-1, 1]$ в задаче 11.3, убедиться, что не для любого $f \in C^*[-1, 1]$ найдется такое $x(t) \in C[-1, 1]$, $x(t) \not\equiv 0$, что $|\langle x, f\rangle| = \|x\| \cdot \|f\|$.

11.10. В пространствах l_1, c_0 привести примеры непрерывных линейных функционалов, которые достигают и которые не достигают своей нормы на единичном замкнутом шаре.

11.11. Пусть X — линейное нормированное пространство, $f \in X^*$ и для некоторого шара $\bar{S}_r(x_0)$

$$\sup_{x,y \in \bar{S}_r(x_0)} |\langle x, f\rangle - \langle y, f\rangle| = 1.$$

Найти $\|f\|$.

11.12. Пусть X — вещественное линейное нормированное пространство, f — линейный функционал, определенный на X. Доказать, что f непрерывен тогда и только тогда, когда для любого $c \in \mathbf{R}$ множества $\{x \in X: \langle x, f\rangle < c\}$ и $\{x \in X: \langle x, f\rangle > c\}$ являются открытыми в пространстве X.

11.13. Пусть f — линейный функционал, определенный на линейном нормированном пространстве X, причем для любой последовательности $x_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$ такой, что $x_n \to 0$ при $n \to \infty$, множество $\langle x_n, f\rangle$ ограничено. Доказать, что $f \in X^*$.

11.14. Пусть линейный функционал f определен на вещественном линейном нормированном пространстве X и неограничен. Доказать, что в любой окрестности нуля он принимает все вещественные значения.

11.15. Доказать, что линейный функционал f в линейном нормированном пространстве X непрерывен тогда и только тогда, когда его множество нулей (ядро) $N(f) = \{x \in X: \langle x, f\rangle = 0\}$ замкнуто в X.

11.16. Пусть X — линейное нормированное пространство, $f \in X^*$, $f \neq 0$. Доказать, что $X = N(f) \oplus M$, где M — одномерное подпространство.

11.17. Доказать, что два непрерывных линейных функционала, определенные на одном и том же линейном нормированном пространстве и имеющие общее множество нулей (ядро), пропорциональны.

11.18. Пусть L — такое подпространство X, что $L \neq X$ и L не содержится ни в каком другом подпространстве, отличном от L и X. Доказать, что существует такое $f \in X^*$, что $L = N(f)$.

11.19. Доказать, что всякая гиперплоскость в линейном нормированном пространстве является выпуклым множеством.

11.20. Пусть f — фиксированный линейный функционал на линейном нормированном пространстве X. Доказать, что если одна из гиперплоскостей замкнута, то и все они замкнуты.

11.21. Доказать, что всякая гиперплоскость в линейном нормированном пространстве X или замкнута в X, или всюду плотна в нем.

11.22. Пусть X — линейное нормированное пространство, $f \in X^*$, $f \neq 0$. Рассмотрим в X гиперплоскость $L = \{x \in X: \langle x, f\rangle = 1\}$. Доказать, что

$$\|f\| = \frac{1}{\inf\limits_{x \in L} \|x\|}.$$

11.23. Пусть X — линейное нормированное пространство, $f \in X^*$, $L = N(f)$. Доказать, что для любого $x \in X$

$$\rho(x, L) = \frac{|\langle x, f\rangle|}{\|f\|}.$$

11.24. Пусть X — линейное нормированное пространство, $f \in X^*$, $L = N(f)$, $x \in X$, $x \notin L$ и существует такое $y \in L$, что $\rho(x, L) = \|x - y\|$. Доказать, что f достигает своей нормы на единичном замкнутом шаре пространства X.

11.25. В пространстве $C[-1, 1]$ рассмотрим множество

$$L = \left\{x(t) \in C[-1, 1]: \int_{-1}^{0} x(t)\,dt = \int_{0}^{1} x(t)\,dt\right\}.$$

а) Доказать, что L — подпространство $C[-1, 1]$, и найти такое $f \in C^*[-1, 1]$, что $L = N(f)$.

б) Доказать, что для $x(t) \in C[-1, 1]$, $x \notin L$ не существует такого $y \in L$, что $\rho(x, L) = \|x - y\|$.

11.26. Для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0$ положим

$$\langle x, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} x_k.$$

а) Доказать, что f — непрерывный линейный функционал на пространстве c_0.

б) Пусть $L = N(f)$, $x \in c_0$, $x \notin L$. Доказать, что не существует такого $y \in L$, что $\rho(x, L) = \|x - y\|$.

§ 12. Теорема Хана — Банаха. Структура сопряженного пространства

Теорема 12.1. *Пусть в вещественном линейном нормированном пространстве X задан ограниченный линейный функционал f с $D(f) \subset X$. Тогда существует опреде-*

ленный всюду в X ограниченный линейный функционал $\tilde{f}$, такой что $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ и $\langle x, \tilde{f}\rangle = \langle x, f\rangle$ для любого $x \in D(f)$.

Следствие 1. *Пусть $x \in X$, $x \neq 0$. Тогда существует такое $f \in X^*$, что $\|f\| = 1$, $\langle x, f\rangle = \|x\|$.*

Следствие 2. *Пусть $L \subset X$ — линейное многообразие, $x_0 \in X$, $x_0 \notin L$ и $d = \rho(x_0, L) > 0$. Тогда существует такое $f \in X^*$, что $\langle x, f\rangle = 0$ для любого $x \in L$, $\langle x_0, f\rangle = 1$, $\|f\| = 1/d$.*

Теорема 12.2. *Пусть H — гильбертово пространство. Для любого ограниченного линейного функционала f, заданного всюду на H, существует единственный элемент $y \in H$, такой что $\langle x, f\rangle = (x, y)$ для любого $x \in H$. При этом $\|f\| = \|y\|$.*

Теорема 12.3. *Любой ограниченный линейный функционал f, заданный на всем пространстве $C[a, b]$, может быть представлен в виде интеграла Стилтьеса*

$$\langle x, f\rangle = \int_a^b x(t)\, dg(t),$$

где $g(t)$ — функция с ограниченной на $[a, b]$ вариацией. При этом для некоторой $g(t)$ выполняется равенство $\|f\| = \bigvee_a^b g(t)$.

(Определение интеграла Стилтьеса и доказательство теоремы 12.3 приведены, например, в [15].)

12.1. Пусть X — банахово пространство, $f_n \in X^*$ $(n \in \mathbf{N})$ и для любого $x \in X$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x, f_n\rangle = \langle x, f\rangle$. Доказать, что $f \in X^*$.

12.2. Пусть X — линейное нормированное пространство, $f_n \in X^*$ $(n \in \mathbf{N})$. Доказать, что f_n сходится в X^* тогда и только тогда, когда $\langle x, f_n\rangle$ сходится равномерно в шаре $\{x \in X\colon \|x\| \leqslant 1\}$.

12.3. Пусть X — линейное нормированное пространство, $x, y \in X$, $x \neq y$. Доказать, что существует такое $f \in X^*$, что $\langle x, f\rangle \neq \langle y, f\rangle$.

12.4. Доказать, что в любом линейном нормированном пространстве X для любого $\lambda \in \mathbf{R}$ и любого ненулевого $f \in X^*$ гиперплоскость $\{x \in X\colon \langle x, f\rangle = \lambda\}$ есть непустое множество.

12.5. Пусть X — линейное нормированное пространство, $x \in X$. Доказать, что

$$\|x\| = \sup_{f \in X^*, \|f\|=1} |\langle x, f\rangle|.$$

12.6. Пусть X — линейное нормированное пространство, $x_0 \in X$ и для любого $f \in X^*$ такого, что $\|f\| = 1$, выполняется неравенство $|\langle x_0, f\rangle| \leqslant 1$. Доказать, что $\|x_0\| \leqslant 1$.

12.7. Пусть X — линейное нормированное пространство, $f \in X^*$, $A \in \mathscr{L}(X)$. Доказать, что $\|A\| = \sup |\langle Ax, f\rangle|$, где верхняя грань берется по множеству $\{x \in X\colon \|x\| = 1, f \in X^*, \|f\| = 1\}$.

12.8. Пусть X — линейное нормированное пространство, $x_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$ — фиксированная система элементов, L — ее линейная оболочка, $x \in X$ — произвольный элемент. Доказать, что $x \in \bar{L}$ тогда и только тогда, когда из $f \in X^*$, $\langle x_k, f\rangle = 0$ для $k \in \mathbf{N}$ следует $\langle x, f\rangle = 0$.

12.9. Доказать, что если линейное нормированное пространство X бесконечномерно, то и пространство X^* бесконечномерно.

12.10. Пусть X — линейное нормированное пространство, $M \subset X$ — произвольное множество. Положим $M^\perp = \{f \in X^*\colon \langle x, f\rangle = 0$ для любого $x \in M\}$.

а) Доказать, что $M^\perp$ — подпространство в пространстве X^*.

б) Что представляет собой $M^\perp$, если X — гильбертово пространство?

в) Пусть $M \subset X$ — подпространство. Доказать, что $M = \{x \in X\colon \langle x, f\rangle = 0$ для любого $f \in M^\perp\}$.

12.11. Пусть X — банахово пространство. Для произвольного множества $M \subset X$ определим его *поляру*

$$M^* = \{f \in X^*\colon |\langle x, f\rangle| \leqslant 1 \text{ для любого } x \in M\}.$$

Доказать, что M^* — выпуклое замкнутое множество.

12.12. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, $Z = X + Y$ — их прямая сумма. Доказать, что всякий ограниченный линейный функционал, заданный всюду на пространстве Z, однозначно представим в виде $\langle (x, y), h\rangle = \langle x, f\rangle + \langle y, g\rangle$, где $f \in X^*$, $g \in Y^*$.

12.13. Пусть X — банахово пространство. Доказать, что если пространство X^* сепарабельно, то и X сепарабельно. Верно ли обратное утверждение?

12.14. Доказать, что непрерывный линейный функционал $\langle x, f\rangle = x(0)$ в пространстве $C[-1, 1]$ не представим в виде

$$\langle x, f\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)\, g(t)\, dt,$$

где $g(t) \in C[-1, 1]$. Найти такую функцию $g(t)$ с ограниченной на $[-1, 1]$ вариацией, что

$$\langle x, f\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)\, dg(t).$$

12.15. Для $x(t) \in C[-1, 1]$ положим

$$\langle x, f\rangle = \frac{x(-1) + x(1)}{2} + \int_{-1}^{1} tx(t)\, dt.$$

а) Доказать, что f — ограниченный линейный функционал.

б) Найти такую функцию $g(t)$ с ограниченной на $[-1, 1]$ вариацией, что

$$\langle x, f\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)\, dg(t).$$

12.16. Пусть $x_0(t) \in C[0, 1]$ фиксировано. Рассмотрим в пространстве $C[0, 1]$ одномерное подпространство $L = \{\lambda x(t)\}$, где $\lambda \in \mathbf{R}$. Определим на L линейный функционал f равенством $\langle x, f\rangle = \lambda$, если $x = \lambda x_0$.

а) Доказать, что $\|f\| = 1$.

б) По теореме 12.1 f может быть продолжен на все пространство $C[0, 1]$ с сохранением нормы. Однозначно ли такое продолжение, если: 1) $x_0(t) = t$; 2) $x_0(t) = 1 - 2t$?

12.17. В пространстве E^2 с элементами $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ на подпространстве $L = \{x \in E^2\colon 2x_1 - x_2 = 0\}$ задан линейный функционал $\langle x, f\rangle = x_1$. Доказать, что существует единственное продолжение f на все E^2 с сохранением нормы, и найти это продолжение.

12.18. Пусть H — гильбертово пространство, $L \subset H$ — подпространство, f — ограниченный линейный функционал, заданный на L. Доказать, что существует единственное продолжение f на все H с сохранением нормы.

12.19. Доказать, что всякий ненулевой ограниченный линейный функционал, заданный всюду в гильбертовом пространстве H, достигает своей нормы на единичном замкнутом шаре H и притом только в одной точке этого шара.

12.20. Пусть f — ограниченный линейный функционал, заданный на подпространстве $c_0 \subset m$. Доказать, что существует единственное продолжение f на все m с сохранением нормы.

12.21. Доказать, что при $p > 1$ $(l_p)^* = l_q$, $1/p + 1/q = 1$, т. е. что всякий непрерывный линейный функционал в пространстве l_p при $p > 1$ имеет вид

$$\langle x, f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p$, $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l_q$, $1/p + 1/q = 1$ и $\|f\| = \|y\|_{l_q}$.

12.22. Доказать, что $(c_0)^* = l_1$, т. е. что всякий непрерывный линейный функционал в пространстве c_0 имеет вид

$$\langle x, f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0$, $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l_1$ и $\|f\| = \|y\|_{l_1}$.

12.23. Используя задачу 12.13, доказать, что $(m)^* \neq l_1$.

12.24. Доказать, что $(l_1)^* = m$, т. е. что всякий непрерывный линейный функционал в пространстве l_1 имеет вид

$$\langle x, f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1$, $y = (y_1, y_2, \ldots) \in m$ и $\|f\| = \|y\|_m$.

12.25. В пространстве $H^1[-1, 1]$ положим

$$\langle x, f\rangle = \int_{-1}^{1} [x(t) \sin t + x'(t) \cos t]\, dt.$$

Доказать, что f — непрерывный линейный функционал и найти его норму.

12.26. Задает ли равенство

$$\langle x, f\rangle = \int_{-1}^{1} [x(t) \cos t + x'(t) \sin t]\, dt$$

непрерывный линейный функционал в пространстве $H^1[-1, 1]$? Если да, то какая функция $y(t) \in H^1[-1, 1]$ удовлетворяет условию $\langle x, f\rangle = (x, y)$?

§ 13. Слабая сходимость. Рефлексивность

Пусть X — линейное нормированное пространство. Последовательность $x_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$ называют *слабо сходящейся* к элементу $x \in X$ и записывают $x_n \to x$ $(n \to \infty)$

слабо, если $\langle x_n, f\rangle \to \langle x, f\rangle$ для любого $f \in X^*$. Последовательность $f_n \in X^*$ $(n \in \mathbf{N})$ называют **-слабо сходящейся* к элементу $f \in X$ и записывают $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ *-слабо, если $\langle x, f_n\rangle \to \langle x, f\rangle$ для любого $x \in X$.

Теорема 13.1. *Для того чтобы $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ слабо, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\|x_n\|$ была ограничена и $\langle x_n, f\rangle \to \langle x, f\rangle$ для любого f из всюду плотного в X^* линейного многообразия.*

Теорема 13.2. *Для того чтобы $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ *-слабо, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\|f_n\|$ была ограничена и $\langle x, f_n\rangle \to \langle x, f\rangle$ для любого x из всюду плотного в X линейного многообразия.*

Теорема 13.3. *Пусть X — банахово пространство. При каждом фиксированном $x \in X$ равенство $\langle f, F_x\rangle = \langle x, f\rangle$ определяет ограниченный линейный функционал F_x на пространстве X^* и при этом $\|F_x\| = \|x\|$.*

Таким образом, имеет место *изометрическое вложение* $X \subset X^{**}$. Если при этом $X = X^{**}$, то пространство X называется *рефлексивным*.

Последовательность x_n, принадлежащая банахову пространству X, называется *слабо ограниченной*, если для любого $f \in X^*$ множество $\langle x_n, f\rangle$ ограничено, и *слабо фундаментальной*, если для любого $f \in X^*$ последовательность $\langle x_n, f\rangle$ фундаментальна.

Теорема 13.4. *Всякое слабо ограниченное множество в банаховом пространстве ограничено.*

Теорема 13.5. *Если $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ слабо в банаховом пространстве X, то существует такая последовательность выпуклых линейных комбинаций точек x_k*

$$\tilde{x}_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} x_k, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} = 1, \quad \alpha_{nk} \geqslant 0,$$

что $\tilde{x}_n \to x$ $(n \to \infty)$.

13.1. Пусть X — банахово пространство, $x_n, x \in X$, $f_n, f \in X^*$ $(n \in \mathbf{N})$ и:

1) $x_n \to x$, $f_n \to f$ при $n \to \infty$;
2) $x_n \to x$ при $n \to \infty$ слабо, $f_n \to f$ при $n \to \infty$;
3) $x_n \to x$ при $n \to \infty$, $f_n \to f$ при $n \to \infty$ *-слабо.

Доказать, что $\langle x_n, f_n\rangle \to \langle x, f\rangle$ при $n \to \infty$.

13.2. Пусть X — линейное нормированное пространство, $f_n, f \in X^*$ $(n \in \mathbf{N})$ и $f_n \to f$ $(n \to \infty)$. Доказать, что $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ *-слабо.

13.3. Пусть H — гильбертово пространство, $x_n, x, y_n, y \in H$ $(n \in \mathbf{N})$. Что можно утверждать о сходимости последовательности (x_n, y_n), если:

а) $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ слабо, $y_n \to y$;
б) $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ слабо, $y_n \to y$ $(n \to \infty)$ слабо?

13.4. Пусть H — гильбертово пространство, $x_n, x \in H$ $(n \in \mathbf{N})$, $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ слабо и $\|x_n\| \to \|x\|$. Доказать, что $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.

13.5. Пусть X — линейное нормированное пространство, $x_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$. Доказать, что последовательность x_n сходится в X тогда и только тогда, когда x_n слабо сходится равномерно в шаре $\{f \in X^*: \|f\| \leqslant 1\}$.

13.6. Пусть H — гильбертово пространство, $x_n \in H$ $(n \in \mathbf{N})$ — ортогональная система элементов. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ слабо сходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ сходится.

13.7. Пусть X — линейное нормированное пространство, $f_n, f_0 \in X^*$ $(n \in \mathbf{N})$, $f_n \to f_0$ $(n \to \infty)$ *-слабо. Верно ли, что $f_0 \in \bar{L}$, где L — линейная оболочка последовательности f_n?

13.8. В пространстве l_2 для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ положим $\langle x, f_n\rangle = x_n$. Доказать, что $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$ *-слабо Верно ли, что $f_n \to 0$?

13.9. Для $x(t) \in L_2[-1, 1]$ положим

$$\langle x, f_n\rangle = \int_{-1}^{1} x(t) \cos n\pi t \, dt.$$

а) Доказать, что f_n — ограниченный линейный функционал, и найти $\|f_n\|$.
б) Доказать, что $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$ *-слабо.
в) Верно ли, что $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$?

13.10. Для $x(t) \in C^1[-1, 1]$ положим

$$\langle x, f_\varepsilon\rangle = \frac{1}{2\varepsilon}[x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)], \quad \langle x, f_0\rangle = x'(0),$$

где $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $|\varepsilon| < 1$.

а) Доказать, что f_ε и f_0 — непрерывные линейные функционалы и найти $\|f_\varepsilon\|$, $\|f_0\|$.
б) Доказать, что $f_\varepsilon \to f_0$ $(\varepsilon \to 0)$ *-слабо.
в) Верно ли, что $f_\varepsilon \to f_0$ $(\varepsilon \to 0)$?

13.11. Пусть $x^{(n)}, x \in l_2, x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$. Доказать, что $x^{(n)} \to x$ $(n \to \infty)$ слабо тогда и только тогда, когда $\sup_n \|x^{(n)}\| < \infty$ и $x_k^{(n)} \to x_k$ при $n \to \infty$ для $k \in \mathbf{N}$.

13.12. В пространстве $C[0, 1]$ привести пример слабо сходящейся последовательности, которая не сходится по норме пространства $C[0, 1]$.

13.13. Доказать, что в пространстве l_1 слабая сходимость совпадает со сходимостью по норме.

13.14. Пусть X, Y — банаховы пространства, $A_n \in \mathscr{L}(X, Y)$ и для любого $x \in X$ и любого $f \in Y^*$ последовательность $\langle A_n x, f\rangle$ ограничена. Доказать, что последовательность $\|A_n\|$ ограничена.

13.15. Пусть X — рефлексивное банахово пространство, $M \subset X$ — подпространство, $M^\perp = \{f \in X^*: \langle x, f\rangle = 0$ для любого $x \in M\}$. Доказать, что $(M^\perp)^\perp = M$.

13.16. Пусть X — рефлексивное банахово пространство, $f \in X^*$. Доказать, что существует $x \in X$, $x \neq 0$ такое, что $\langle x, f\rangle = \|x\|\,\|f\|$.

13.17. Используя задачи 11.9, 11.10, 13.16, доказать, что пространства $C[0, 1]$, l_1, c_0 нерефлексивны.

13.18. Доказать, что множество в банаховом пространстве является слабо ограниченным тогда и только тогда, когда оно ограничено.

13.19. Доказать, что всякая слабо фундаментальная последовательность в банаховом пространстве ограничена.

13.20. Доказать, что всякая слабо сходящаяся последовательность в банаховом пространстве слабо фундаментальна.

13.21. Назовем множество M в банаховом пространстве X *слабо замкнутым*, если из того, что $x_n \in M$, $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ слабо, следует $x \in M$.

а) Доказать, что всякое слабо замкнутое множество замкнуто.

б) Привести пример замкнутого множества в банаховом пространстве, не являющегося слабо замкнутым.

13.22. Доказать, что всякое подпространство банахова пространства слабо замкнуто.

13.23. Доказать, что всякое выпуклое замкнутое множество в банаховом пространстве слабо замкнуто.

13.24. Будет ли пространство $C[0, 1]$ слабо полным?

13.25. Пусть X — сепарабельное линейное нормированное пространство. Доказать, что в пространстве X^* существует счетное множество, всюду плотное в смысле $*$-слабой сходимости.

13.26. Пусть X — линейное нормированное пространство. Верно ли, что для всякого подпространства $L \subset X^*$ существует подпространство $M \subset X$ такое, что $L = M^\perp$ (ортогональность понимается в смысле задачи 12.10)?

§ 14. Сопряженные операторы

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, $A: X \to Y$ — линейный оператор с областью определения $D(A)$, плотной в X, возможно, неограниченный. Введем множество $D^* \subset Y^*$ таких $f \in Y^*$, для которых при $\varphi \in X^*$ имеет место равенство $\langle Ax, f\rangle = \langle x, \varphi\rangle$. Оператор $A^*f = \varphi$ с областью определения $D(A^*) = D^* \subset Y^*$ и со значениями в X^* называется *сопряженным* к оператору A. Таким образом, $\langle Ax, f\rangle = \langle x, A^*f\rangle$ для любого x из $D(A)$ и любого f из $D(A^*)$.

Теорема 14.1. *A^* — замкнутый линейный оператор.*

Теорема 14.2. *Равенство $D(A^*) = Y^*$ имеет место тогда и только тогда, когда A ограничен на $D(A)$. В этом случае $A^* \in \mathscr{L}(Y^*, X^*)$, $\|A^*\| = \|A\|$.*

Из теоремы 14.2 вытекает, что для $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, $A^* \in \mathscr{L}(Y^*, X^*)$, $\|A^*\| = \|A\|$.

14.1. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, $A, B \in \mathscr{L}(X, Y)$. Доказать, что $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B$ (черта означает комплексное сопряжение).

14.2. Пусть X — линейное нормированное пространство, $A, B \in \mathscr{L}(X)$. Доказать, что $(AB)^* = B^*A^*$.

14.3. Пусть $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ и непрерывно обратим. Доказать, что A^* непрерывно обратим и $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

14.4. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства. Доказать, что отображение $\Phi: \mathscr{L}(X, Y) \to \mathscr{L}(Y^*, X^*)$, $\Phi(A) = A^*$ непрерывно.

14.5. Пусть X — рефлексивное банахово пространство, Y — линейное нормированное, $A \in \mathscr{L}(X, Y)$. Доказать, что $(A^*)^*X \subset Y$ и $(A^*)^* = A$ как оператор из X в Y.

14.6. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathscr{L}(H)$. Доказать, что:

а) $N(AA^*) = N(A^*)$;

б) $N(A^*A) = N(A)$;

в) $R(AA^*) = R(A)$;

г) $\|AA^*\| = \|A\|^2$.

14.7. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathscr{L}(H)$. Доказать, что:

а) $(R(A))^{\perp} = N(A^*)$;

б) $(R(A^*))^{\perp} = N(A)$;

в) $(N(A))^{\perp} = \overline{R(A^*)}$;

г) $(N(A^*))^{\perp} = \overline{R(A)}$.

14.8. Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathscr{L}(X)$. Доказать, что $(R(A))^{\perp} = N(A^*)$ (ортогональность понимается в смысле задачи 12.10)..

14.9. Найти сопряженный к оператору A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, если:

а) $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\, d\tau$;

б) $Ax(t) = tx(t)$;

в) $Ax(t) = \int\limits_0^1 tx(s)\, ds$;

г) $Ax(t) = \int\limits_0^1 tx(t)\, dt$.

14.10. Найти оператор, сопряженный к оператору A: $l_1 \to l_1$, если

а) $Ax = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$;

б) $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$, где $\lambda_n \in \mathbf{R}$, $|\lambda_n| \leqslant 1$, $n \in \mathbf{N}$;

в) $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$;

г) $Ax = (x_2, x_3, \ldots)$.

14.11. Найти сопряженные к операторам задачи 14.10, если они рассматриваются как действующие:

а) из c_0 в c_0;

б) из l_2 в l_2;

в) из l_1 в c_0.

14.12. В пространстве l_2 для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ положим $A_n x = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$.

а) Доказать, что $A_n \in \mathscr{L}(l_2)$ и $A_n \to 0$ $(n \to \infty)$ сильно.

б) Найти A_n^* и выяснить, верно ли, что $A_n^* \to 0$ $(n \to \infty)$ сильно?

14.13. Найти оператор, сопряженный к оператору вложения J: $l_2 \to c_0$, $Jx = x$.

14.14. Пусть H — гильбертово пространство, $y, z \in H$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ — произвольные фиксированные элементы. Для $x \in H$ положим $Ax = (x, y)z$. Доказать, что $A \in \mathscr{L}(H)$ и найти оператор A^*.

14.15. Пусть H — гильбертово пространство, A, B: $H \to H$ — линейные операторы, определенные на всем H и такие, что для любых $x, y \in H$ выполняется равенство $(Ax, y) = (x, By)$. Доказать, что A — ограниченный оператор и $B = A^*$.

14.16. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, A: $X \to Y$ — такой линейный оператор, что $\overline{D(A)} = X$, оператор A^{-1} существует и принадлежит $\mathscr{L}(Y, X)$. Доказать, что $(A^*)^{-1}$ существует, принадлежит $\mathscr{L}(X^*, Y^*)$ и при этом $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

14.17. В пространстве l_2 рассмотрим для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ оператор A: $l_2 \to l_2$, $Ax = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots)$ с областью определения $D(A) = \left\{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots): \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 |x_n|^2 < \infty\right\}$.

а) Доказать, что $\overline{D(A)} = l_2$.

б) Доказать, что A — неограниченный на $D(A)$ линейный оператор.

в) Найти $D(A^*)$ и A^*.

14.18. Рассмотрим оператор A: $l_2 \to l_1$, $Ax = x$ с областью определения $D(A)$, состоящей из элементов $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$, для которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$.

а) Доказать, что $\overline{D(A)} = l_2$.

б) Доказать, что A — линейный оператор, неограниченный на $D(A)$.

в) Найти $D(A^*)$ и A^*.

14.19. Рассмотрим оператор A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = x(t^2)$ с областью определения

$$D(A) = \left\{x(t) \in L_2[0, 1]: \int\limits_0^1 x^2(t^2)\, dt < \infty\right\}.$$

а) Доказать, что $\overline{D(A)} = L_2[0, 1]$.

б) Доказать, что A — линейный оператор, неограниченный на $D(A)$.

в) Найти $D(A^*)$ и A^*.

14.20. Рассмотрим оператор A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = dx/dt$ с областью определения $D(A)$ — линейным многообразием непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x(0) = x(1) = 0$.

а) Доказать, что $\overline{D(A)} = L_2[0, 1]$.

б) Доказать, что A — неограниченный на $D(A)$ линейный оператор.

в) Найти $D(A^*)$ и A^*.

14.21. Рассмотрим оператор $A\colon L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = tx(0)$ с областью определения $D(A)$ — линейным многообразием непрерывных на $[0, 1]$ функций. Найти $D(A^*)$ и A^*.

14.22. Найти оператор, сопряженный к оператору вложения $J\colon H^1[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Jx = x$.

14.23. Найти оператор, сопряженный к оператору $A\colon H^1[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = dx/dt$.

Глава 4

КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА И ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 15. Компактные множества в нормированных пространствах

Множество Q в банаховом пространстве X называется *бикомпактным*, если из каждой последовательности $x_n \in Q$ $(n \in \mathbf{N})$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит Q.

Теорема 15.1. *Пусть $f\colon Q \to \mathbf{R}$ — непрерывная функция, определенная на бикомпактном множестве $Q \subset X$. Тогда f ограничена на Q, достигает на Q своей точной верхней и нижней граней и равномерно непрерывна на Q.*

Система открытых множеств F_α линейного нормированного пространства X называется *покрытием* множества $A \subset X$, если каждая точка $x \in A$ принадлежит хотя бы одному из F_α.

Множество M линейного нормированного пространства X называется *компактным*, если из каждой последовательности $x_n \in M$ $(n \in \mathbf{N})$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность. Множество $M_\varepsilon \subset X$ называется *ε-сетью* множества $M \subset X$, если для любого $x \in M$ найдется такое $\hat{x} \subset M_\varepsilon$, что $\|x - \hat{x}\| < \varepsilon$.

Теорема 15.2. *Множество M в линейном нормированном пространстве X компактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть для M.*

Пусть $\overline{G}$ — замкнутая ограниченная область в пространстве E^n, $C(\overline{G})$ — пространство непрерывных на $\overline{G}$ функций с нормой $\|x\| = \max\limits_{t \in \overline{G}} |x(t)|$, $M \subset C(\overline{G})$ — некоторое множество функций. Это множество называется *равномерно ограниченным*, если существует такое $c \in \mathbf{R}$, что для любого $x \in M$ выполняется неравенство $\|x\| \leqslant c$; *равностепенно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любых $t_1, t_2 \in \overline{G}$, удовлетворяющих неравенству $\|t_1 - t_2\| < \delta$, сразу для всех $x \in M$ выполняется неравенство $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$.

Теорема 15.3. *Для того чтобы множество $M \subset C(\overline{G})$ было компактно, необходимо и достаточно, чтобы оно*

было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным.

Множество M элементов линейного нормированного пространства X называется *локально компактным*, если пересечение M с любым замкнутым шаром в X компактно.

Теорема 15.4. *Для того чтобы линейное многообразие L линейного нормированного пространства X было локально компактно, необходимо и достаточно, чтобы L было конечномерно.*

Множество M банахова пространства X называется *слабо компактным*, если из любой бесконечной последовательности его элементов можно выбрать слабо фундаментальную подпоследовательность.

Теорема 15.5. *Всякое слабо компактное множество в банаховом пространстве ограничено.*

Теорема 15.6. *Всякое ограниченное множество рефлексивного банахова пространства слабо компактно.*

15.1. Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$ — такое замкнутое множество, что для любого $\varepsilon > 0$ в X существует для M конечная ε-сеть. Доказать, что M бикомпактно.

15.2. Доказать, что замыкание компактного множества бикомпактно.

15.3. Доказать, что всякое подмножество бикомпактного множества компактно.

15.4. Пусть множество M в линейном нормированном пространстве X таково, что для любого $\varepsilon > 0$ в X существует для M компактная ε-сеть. Доказать, что M компактно.

15.5. Доказать, что в конечномерном линейном нормированном пространстве всякое ограниченное множество компактно.

15.6. Пусть M — бикомпактное множество в банаховом пространстве X, $x_n \in M$ $(n \in \mathbf{N})$, x_0 — единственная предельная точка последовательности x_n. Доказать, что $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.

15.7. Доказать, что множество $x_n = \sin nt \in L_2[-\pi, \pi]$ $(n \in \mathbf{N})$ замкнуто и ограничено, но не компактно.

15.8. Пусть M — бикомпактное множество в банаховом пространстве X. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ множество M может быть представлено в виде

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} F_i,$$

где F_i — замкнутые множества и для $i = 1, 2, \ldots, n$ $\operatorname{diam} F_i < \varepsilon$.

15.9. Доказать, что для того чтобы множество M из банахова пространства X было бикомпактно, необходимо и достаточно, чтобы из любого покрытия M можно было выделить конечное подпокрытие.

15.10. Пусть A — бикомпактное множество в банаховом пространстве X. Доказать, что для любого $x \in X$ найдется такое $y \in A$, что $\rho(x, A) = \|x - y\|$.

15.11. Пусть A — бикомпактное, B — замкнутое множество в банаховом пространстве X и $A \cap B = \varnothing$. Доказать, что $\rho(A, B) > 0$.

15.12. Пусть A, B — бикомпактные множества в банаховом пространстве X. Доказать, что существуют такие $x_0 \in A$, $y_0 \in B$, что $\rho(A, B) = \|x_0 - y_0\|$. Обязательно ли найдутся такие точки, если A бикомпактно, а B замкнуто?

15.13. Пусть A — бикомпактное множество в банаховом пространстве X. Доказать, что найдутся такие x_0, $y_0 \in A$, что $\operatorname{diam} A = \|x_0 - y_0\|$.

15.14. Доказать, что бикомпактное множество нельзя изометрично отобразить на свою часть.

15.15. В пространстве E^2 построить компактное множество, изометричное своей части.

15.16. Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$ — бикомпактное множество, Φ: $M \to M$ — такое отображение, что для любых $x, y \in M$ выполняется неравенство $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \geqslant \|x - y\|$. Доказать, что Φ есть изометрическое отображение M на себя.

15.17. Доказать, что в банаховом пространстве всякая система непустых вложенных бикомпактных множеств имеет непустое пересечение.

15.18. Пусть M_n — такая последовательность бикомпактных множеств в банаховом пространстве X, что пересечение любого конечного числа этих множеств непусто. Доказать, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ непусто.

15.19. Пусть U_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — конечное покрытие бикомпактного множества M в банаховом пространстве X. Положим

$$\varphi_i(x) = \rho(x, M \setminus U_i), \quad e_i(x) = \varphi_i(x)\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\right)^{-1};$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказать, что система функций $\{e_i(x)\}$, называемая *разбиением единицы*, соответствующим покрытию U_i, обладает следующими свойствами:

а) $0 \leqslant e_i(x) \leqslant 1$;

б) $e_i(x) = 0$ при $x \notin U_i$;

в) $\sum_{i=1}^{n} e_i(x) = 1$ для любого $x \in M$;

г) $e_i(x)$ — непрерывные функции на M.

15.20. Пусть X — банахово пространство, A, $B \subset X$ и:

а) A, B бикомпактны; доказать, что множество $A + B$ бикомпактно;

б) A бикомпактно, B замкнуто; доказать, что множество $A + B$ замкнуто;

в) A, B компактны; доказать, что множество $A + B$ компактно;

г) A, B замкнуты; верно ли, что $A + B$ — замкнутое множество?

15.21. Пусть M — бикомпактное множество в банаховом пространстве X, $C(M)$ — пространство вещественных непрерывных на M функций с нормой $\|x\| = \max_{t \in M} |x(t)|$. Доказать, что $C(M)$ — сепарабельное банахово пространство.

15.22. Пусть X, Y — банаховы пространства, $M \subset X$ — бикомпактное множество, $C(M, Y)$ — множество непрерывных отображений, определенных на M с областью значений в Y. Доказать, что:

а) $C(M, Y)$ — линейное пространство;

б) в $C(M, Y)$ можно задать норму равенством $\|f\| = \sup_{x \in M} \|f(x)\|$;

в) в этой норме $C(M, Y)$ является банаховым пространством.

15.23. Пусть M — такое множество в банаховом пространстве X, что для любой вещественной непрерывной на M функции f выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) f ограничена на M;

2) если f ограничена на M, то f достигает на M точной верхней и точной нижней граней.

Доказать, что M бикомпактно.

15.24. Пусть M — такое множество в банаховом пространстве X, что любая вещественная непрерывная на M функция равномерно непрерывна. Следует ли отсюда, что M бикомпактно?

15.25. Доказать, что непрерывное отображение переводит бикомпактное множество в бикомпактное множество.

15.26. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение банахова пространства X в банахово пространство Y, $M \subset X$ — компактное множество. Доказать, что множество $f(M) \subset Y$ компактно.

15.27. Верно ли утверждение предыдущей задачи, если непрерывное отображение определено не на всем пространстве X, а только на множестве M?

15.28. Доказать, что если функция равномерно непрерывна на компактном множестве M линейного нормированного пространства X, то она ограничена на M.

15.29. Пусть $M \subset C[a, b]$ — множество функций и известно, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $t_0 \in [a, b]$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, что если $|t - t_0| < \delta$, то для любого $x(t) \in M$ выполняется неравенство $|x(t) - x(t_0)| < \varepsilon$. Будет ли множество M равностепенно непрерывным?

15.30. Пусть $x_n(t) \in C[a, b]$ $(n \in \mathbf{N})$ — равностепенно непрерывное множество функций и $x_n(t)$ при $n \to \infty$ сходится к $x_0(t)$ поточечно на $[a, b]$. Доказать, что $x_0(t) \in C[a, b]$.

15.31. Пусть M — равномерно ограниченное множество функций в пространстве $C[a, b]$. Доказать, что множество N функций вида

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau,$$

где $x(t) \in M$, компактно.

15.32. Доказать, что равномерно ограниченное множество функций $M \subset C[a, b]$, удовлетворяющих условию Липшица с общей постоянной, бикомпактно в пространстве $C[a, b]$.

15.33. Доказать, что множество функций $M \subset C[a, b]$, ограниченных при некотором фиксированном $t_0 \in [a, b]$ и удовлетворяющих условию Липшица с общей постоянной, бикомпактно в пространстве $C[a, b]$.

15.34. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $x(t)$ таких, что

$$|x(0)| \leqslant k_1, \quad \int_a^b |x'(t)|^2\, dt \leqslant k_2$$

(постоянная $k_1 \geqslant 0$, постоянная $k_2 > 0$) компактно в пространстве $C[a, b]$.

15.35. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $x(t)$ таких, что

$$\int_a^b [|x(t)|^2 + |x'(t)|^2]\,dt < k$$

с постоянной $k > 0$, компактно в пространстве $C[a, b]$.

15.36. Пусть M — множество непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) для любого $t \in [a, b]$ и любой $x(t) \in M$ выполняется неравенство $|x'(t)| < k$, где постоянная $k > 0$;

2) для любой $x(t) \in M$ уравнение $x(t) = 0$ имеет на $[a, b]$ хотя бы один корень. Доказать, что M — компактное множество в пространстве $C[a, b]$.

15.37. Будет ли равномерно ограниченное множество многочленов степени n бикомпактным в пространстве $C[a, b]$?

15.38. Доказать, что равномерно ограниченное множество многочленов степени, не выше n, бикомпактно в пространстве $C[a, b]$.

15.39. Доказать, что для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $x(t)$ существует многочлен $P(t)$ степени, не выше n, который является многочленом наилучшего приближения, т. е.

$$\max_{t\in[a,b]} |x(t) - P(t)| \leqslant \max_{t\in[a,b]} |x(t) - Q(t)|$$

для любого многочлена $Q(t)$ степени, не выше n.

15.40. Пусть $x(t)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция и существует последовательность многочленов ограниченной степени, которая сходится к $x(t)$ равномерно на $[a, b]$. Доказать, что $x(t)$ — многочлен.

15.41. Доказать, что шар $\bar{S}_1(0)$ пространства $C^1[a, b]$ является компактным множеством в пространстве $C[a, b]$. Является ли он бикомпактным множеством в пространстве $C[a, b]$?

15.42. Доказать, что всякое множество, компактное в пространстве $C^1[a, b]$, является компактным и в пространстве $C[a, b]$.

15.43. Привести пример множества непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций, компактного в пространстве $C[0, 1]$, но не компактного в пространстве $C^1[0, 1]$.

15.44. Компактны ли следующие множества функций в пространстве $C[0, 1]$:

а) $x_n(t) = t^n$, $n \in \mathbf{N}$;
б) $x_n(t) = \sin nt$, $n \in \mathbf{N}$;
в) $x_n(t) = \sin(t + n)$, $n \in \mathbf{N}$;
г) $x_\alpha(t) = \sin \alpha t$, $\alpha \in \mathbf{R}$;
д) $x_\alpha(t) = \sin \alpha t$, $\alpha \in [1, 2]$;
е) $x_\alpha(t) = \operatorname{arctg} \alpha t$, $\alpha \in \mathbf{R}$;
ж) $x_\alpha(t) = e^{t-\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \geqslant 0$?

15.45. Будет ли компактным в пространстве $C[0, 1]$ множество функций $x(t) \in C[0, 1]$, удовлетворяющих при любом $t \in [0, 1]$ неравенству $|x(t)| \leqslant \varphi(t)$, где $\varphi(t) \in C[0, 1]$, $\varphi(t) \geqslant 0$ — фиксированная функция?

15.46. Доказать, что всякое компактное множество в пространстве а) $C[a, b]$; б) l_2 нигде не плотно.

15.47. Доказать, что для того чтобы множество функций $M \subset C^k[a, b]$ было компактно, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограничено, а множество производных порядка k входящих в M функций было равностепенно непрерывно.

15.48. Доказать, что множество M элементов $x = (x_1, x_2, \ldots)$ из пространства c или c_0 компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует равномерно относительно $x \in M$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N$ для любого $x = (x_1, x_2, \ldots) \in M$ выполняется неравенство

$$|x_n - \lim_{n\to\infty} x_n| < \varepsilon.$$

15.49. Доказать, что множество M элементов $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p$ $(p \geqslant 1)$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p$$

существует равномерно относительно $x \in M$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N$ для любого $x = (x_1, x_2, \ldots) \in M$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon.$$

15.50. Доказать, что параллелепипед $\{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots)\colon |x_n| \leqslant 1/n\}$ является бикомпактным множеством в пространстве l_2.

15.51. При каком условии на последовательность $\lambda_n \in \mathbf{R}$, $\lambda_n > 0$ $(n \in \mathbf{N})$, является бикомпактным множеством в пространстве l_2:

а) параллелепипед $\{x \in l_2,\ x \in (x_1, x_2, \ldots):\ |x_n| < \lambda_n\}$;

б) эллипсоид $\left\{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots):\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{\lambda_n^2} \leqslant 1\right\}$?

15.52. Доказать, что если подпространство в пространстве $C[a, b]$ состоит из непрерывно дифференцируемых функций, то оно конечномерно.

15.53. Пусть X, Y — банаховы пространства, $M \subset X$ — компактное множество, A_n, $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ и $A_n \to A$ $(n \to \infty)$ сильно. Доказать, что $A_n x$ равномерно сходится к Ax при $n \to \infty$ для всех $x \in M$.

15.54. Пусть X — банахово пространство, $x_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$, x_n компактна и $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ слабо. Доказать, что $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.

15.55. Пусть X — рефлексивное банахово пространство, $x_0 \in X$, $x_n \in \bar{S}_r(x_0)$, $n \in \mathbf{N}$. Доказать, что найдется такая подпоследовательность x_{n_k} $(k \in \mathbf{N})$, что $x_{n_k} \to \bar{x}$ $(n \to \infty)$ слабо и $\bar{x} \in \bar{S}_r(x_0)$.

15.56. Доказать, что всякое компактное множество в банаховом пространстве слабо компактно, и привести пример слабо компактного множества, не являющегося компактным.

15.57. Доказать, что единичный замкнутый шар пространства $C[0, 1]$ не является слабо компактным множеством.

§ 16. Линейные вполне непрерывные операторы

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства. Оператор $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ называется *вполне непрерывным*, если он переводит замкнутый единичный шар пространства X в компактное множество пространства Y. Множество всех вполне непрерывных операторов из $\mathscr{L}(X, Y)$ обозначается $\sigma(X, Y)$.

Теорема 16.1. *Если $A \in \sigma(X, Y)$, то любое ограниченное в X множество он переводит в множество, компактное в Y.*

Теорема 16.2. *$\sigma(X, Y)$ является подпространством в пространстве $\mathscr{L}(X, Y)$.*

Теорема 16.3. *Пусть $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, $B \in \mathscr{L}(Y, Z)$. Если хотя бы один из этих операторов вполне непрерывен, то вполне непрерывным оператором будет и их произведение BA.*

Теорема 16.4. *Пусть $A \in \sigma(X, Y)$. Если $x_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ слабо, то $Ax_n \to Ax_0$.*

Теорема 16.5. *Пусть $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, где Y — банахово пространство. Оператор A вполне непрерывен тогда и только тогда, когда A^* вполне непрерывен.*

Пусть X — банахово пространство, $A \in \sigma(X, X) = \sigma(X)$, x, $y \in X$. Уравнение

$$Ax = y$$

называется *уравнением 1-го рода*, уравнение

$$x - Ax = y \tag{1}$$

называется *уравнением 2-го рода*. Наряду с (1), рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$z - Az = 0, \tag{2}$$

а также сопряженное уравнение

$$f - A^* f = \omega \tag{3}$$

и сопряженное однородное уравнение

$$\psi - A^* \psi = 0. \tag{4}$$

Теорема 16.6. *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) *уравнение (1) имеет решение при любой правой части y;*

б) *уравнение (2) имеет только тривиальное решение;*

в) *уравнение (3) имеет решение при любой правой части ω;*

г) *уравнение (4) имеет только тривиальное решение.*

Если выполнено одно из условий а), б), в), г), то операторы $I - A$ и $I - A^*$ непрерывно обратимы.

Теорема 16.7. *Уравнения (2) и (4) имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений.*

Теорема 16.8. *Для того чтобы уравнение (1) имело хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения ψ уравнения (4) выполнялось условие $\langle y, \psi \rangle = 0$.*

Теорема 16.9. *Пусть X, Y — бесконечномерные линейные нормированные пространства, причем Y — банахово, $A \in \sigma(X, Y)$ и $R(A)$ бесконечномерна. Тогда $R(A)$ не является замкнутой в Y.*

Теорема 16.10. *Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, причем X бесконечномерно, $A \in$*

$\in \sigma(X, Y)$ *и на* $R(A)$ *существует обратный оператор* A^{-1}. *Тогда* A^{-1} *неограничен на* $R(A)$.

16.1. Какие из следующих операторов A: $C[0, 1] \to C[0, 1]$ являются вполне непрерывными:

а) $Ax(t) = tx(t)$;

б) $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau$;

в) $Ax(t) = x(0) + tx(1)$;

г) $Ax(t) = \int\limits_0^1 e^{ts}x(s)\,ds$;

д) $Ax(t) = x(t^2)$?

16.2. Будет ли вполне непрерывным оператор

$$A\colon C[-1,1] \to C[-1,1],\ Ax(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]?$$

16.3. При каком условии на функцию $\varphi(t) \in C[0, 1]$ оператор A: $C[0, 1] \to C[0, 1]$, $Ax(t) = \varphi(t)x(t)$ будет вполне непрерывным?

16.4. Оператор A: $C[0, 1] \to C[0, 1]$ определяется равенством

$$Ax(t) = \int\limits_0^1 K(t, s)\,x(s)\,ds + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\,x(t_k),$$

где $K(t, s)$ непрерывна при $0 \leqslant s,\ t \leqslant 1$, $\varphi_k(t) \in C[0, 1]$, $t_k \in [0, 1]$ для $k = 1, 2, \ldots, n$. Доказать, что A — вполне непрерывный оператор.

16.5. Будет ли вполне непрерывным оператор $Ax(t) = dx/dt$, если он рассматривается как действующий:

а) из $C^1[0, 1]$ в $C[0, 1]$;

б) из $C^2[0, 1]$ в $C^1[0, 1]$;

в) из $C^2[0, 1]$ в $C[0, 1]$?

16.6. Доказать, что оператор A: $L_2[a, b] \to L_2[a, b]$, $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau$ вполне непрерывен.

16.7. Доказать, что оператор ортогонального проектирования в гильбертовом пространстве вполне непрерывен тогда и только тогда, когда его образ конечномерен.

16.8. Какие из следующих операторов, определенных для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ с областью значений в l_2, вполне непрерывны:

а) $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$;

б) $Bx = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right)$;

в) $Cx = \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right)$?

16.9. Доказать, что оператор вложения:

а) J: $C^1[a, b] \to C[a, b]$, $Jx = x$;

б) J: $H^1[a, b] \to C[a, b]$, $Jx = x$

вполне непрерывен.

16.10. Будет ли вполне непрерывен оператор вложения J: $l_1 \to l_2$, $Jx = x$?

16.11. Доказать, что оператор A: $H^1[a, b] \to L_2[a, b]$, $Ax(t) = dx/dt$ вполне непрерывен.

16.12. В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим оператор $Ax(t) = d^2x/dt^2$ с областью определения $D(A)$, состоящей из дважды непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, удовлетворяющих граничным условиям $x(0) = x(1) = 0$. Доказать, что оператор A^{-1} существует, найти его и доказать, что он вполне непрерывен.

16.13. Пусть $X = Y$ — одно из пространств l_p, m, c, c_0. Для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X$ положим $y = Ax = (y_1, y_2, \ldots)$, где $y_k = 0$, если k — нечетное и $y_k = x_{k-1}$, если k — четное. Доказать, что A не является вполне непрерывным, хотя $A^2 = 0$ вполне непрерывен.

16.14. Пусть X, Y — банаховы пространства, $A \in \sigma(X, Y)$, $B \in \mathscr{L}(X, Y)$ и $R(B) \subset R(A)$. Доказать, что $B \in \sigma(X, Y)$.

16.15. Пусть X — линейное нормированное пространство. Может ли оператор $A \in \sigma(X)$ быть изометрическим отображением пространства X в себя?

16.16. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, A: $X \to Y$ — линейный оператор. Верно ли, что $A \in \sigma(X, Y)$, если:

а) X конечномерно;

б) Y конечномерно;

в) A — ограниченный оператор и Y конечномерно?

16.17. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, $A_n \in \sigma(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ и $A_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ сильно. Следует ли отсюда, что $A \in \sigma(X, Y)$?

16.18. Доказать, что любой оператор $A \in \mathscr{L}(H)$, где H — гильбертово пространство, является сильным пределом последовательности вполне непрерывных операторов.

16.19. Пусть $A \in \sigma(l_2)$. Доказать, что существует последовательность $A_n \in \mathscr{L}(l_2)$ $(n \in \mathbf{N})$ такая, что $A_n \to A$ $(n \to \infty)$, и $R(A_n)$ конечномерно для всех n.

16.20. Пусть e_n $(n \in \mathbf{N})$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H, $\lambda_n \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, $\lambda_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Для $x \in H$ положим

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n.$$

Доказать, что оператор A определен на всем H, переводит его в себя и является вполне непрерывным.

16.21. Пусть $A \in \mathscr{L}(l_p)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ и для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p$ $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$, где $\lambda_k \in \mathbf{R}$, $\sup\limits_k |\lambda_k| < \infty$. Доказать, что $A \in \sigma(l_p)$ тогда и только тогда, когда $\lambda_k \to 0$ $(k \to \infty)$.

16.22. Пусть e_n $(n \in \mathbf{N})$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H, Y — банахово пространство, $A \in \mathscr{L}(H, Y)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2$ сходится. Доказать, что $A \in \sigma(H, Y)$.

16.23. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathscr{L}(H)$, $A^*A \in \sigma(H)$. Доказать, что $A \in \sigma(H)$.

16.24. Используя предыдущую задачу, доказать, что если $A \in \sigma(H)$, то и $A^* \in \sigma(H)$.

16.25. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, причем X бесконечномерно, $A \in \sigma(X, Y)$. Доказать, что найдется последовательность $x_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$ такая, что $\|x_n\| = 1$ и $Ax_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

16.26. Доказать, что область значений вполне непрерывного оператора сепарабельна.

16.27. Пусть e_n $(n \in \mathbf{N})$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H, $A \in \sigma(H)$. Доказать, что $Ae_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

16.28. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathscr{L}(H)$. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

а) если x_n, x, y_n, $y \in H$ $(n \in \mathbf{N})$ и $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ слабо, $y_n \to y$ $(n \to \infty)$ слабо, то $(Ax_n, y_n) \to (Ax, y)$ $(n \to \infty)$;

б) если x_n, $x \in H$ $(n \in \mathbf{N})$, $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ слабо, то $Ax_n \to Ax$ $(n \to \infty)$;

в) $A \in \sigma(H)$.

16.29. Доказать, что для любого линейного оператора A, заданного всюду в банаховом пространстве X и принимающего значения в банаховом пространстве Y, следующие свойства эквивалентны:

а) A переводит любую сходящуюся последовательность $x_n \in X$ в сходящуюся последовательность $Ax_n \in Y$;

б) A переводит любую слабо сходящуюся последовательность $x_n \in X$ в слабо сходящуюся последовательность $Ax_n \in Y$;

в) A переводит любую сходящуюся последовательность $x_n \in X$ в слабо сходящуюся последовательность $Ax_n \in Y$.

16.30. Пусть X, Y — банаховы пространства, причем X рефлексивно, $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ и переводит любую слабо сходящуюся последовательность $x_n \in X$ в сходящуюся последовательность $Ax_n \in Y$. Доказать, что $A \in \sigma(X, Y)$.

16.31. Доказать, что любой непрерывный линейный оператор $A \in \mathscr{L}(l_2, l_1)$ вполне непрерывен.

16.32. Пусть X — линейное нормированное пространство, Y — сепарабельное банахово пространство, $A \in \mathscr{L}(X, Y)$. Доказать, что $A \in \sigma(X, Y)$ тогда и только тогда, когда A^* переводит любую слабо сходящуюся в Y^* последовательность в сходящуюся в X^* последовательность.

16.33. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \sigma(H)$, $M \subset H$ — замкнутое ограниченное выпуклое множество. Доказать, что:

а) образ множества M замкнут в H;

б) для любого $y \in H$ существует такое $x_0 \in M$, что $\inf\limits_{x \in M} \|Ax - y\| = \|Ax_0 - y\|$. (Согласно [24], определенный таким образом элемент $x_0 \in H$ называется *квазирешением* уравнения $Ax = y$, где x, $y \in H$, $A \in \sigma(H)$.)

16.34. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \sigma(H)$. Доказать, что образ единичного замкнутого шара — бикомпактное множество.

16.35. Верно ли утверждение предыдущей задачи для оператора $A \in \sigma(X)$, рассматриваемого:

а) в произвольном банаховом пространстве X;

б) в рефлексивном банаховом пространстве X?

16.36. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \sigma(H)$. Доказать, что существует такое $x \in H$, $x \neq 0$, что $\|Ax\| = \|A\| \|x\|$.

16.37. Верно ли утверждение предыдущей задачи для оператора $A \in \sigma(X)$, рассматриваемого:

а) в произвольном банаховом пространстве X;

б) в рефлексивном банаховом пространстве X?

16.38. Пусть X — бесконечномерное банахово пространство, $A \in \sigma(X)$. Доказать, что существует такое $y \in X$, что уравнение 1-го рода $Ax = y$ не имеет решения.

16.39. Может ли вполне непрерывный оператор иметь:
а) ограниченный обратный;
б) ограниченный правый обратный;
в) правый обратный?

16.40. Может ли оператор A: $C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt,$$

где $K(s, t)$ непрерывна при $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, иметь ограниченный обратный?

16.41. Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathscr{L}(X)$ и существует такое $c \in \mathbf{R}$, $c > 0$, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\|Ax\| \geqslant c\|x\|$. Может ли оператор A быть вполне непрерывным?

16.42. Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathscr{L}(X)$ и уравнение $z - Az = 0$ имеет только тривиальное решение. Следует ли отсюда, что уравнение $x - Ax = y$ имеет решение при любом $y \in X$?

16.43. Привести пример банахова пространства X и оператора $A \in \mathscr{L}(X)$ такого, что уравнение $z - Az = 0$ имеет бесконечное число линейно независимых решений.

16.44. Теоремы 16.6—16.8 относятся к уравнению $Cx = y$, где $C = I - A$, $A \in \sigma(X)$, X — банахово пространство. Доказать, что их утверждения остаются в силе, если в банаховом пространстве X рассмотреть уравнение $Cx = y$, где $C = B - A$, $B \in \mathscr{L}(X)$ и непрерывно обратим, $A \in \sigma(X)$.

16.45. Рассмотрим оператор A: $C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau.$$

а) Доказать, что уравнение $x - Ax = y$ имеет решение при любом $y \in C[0, 1]$.

б) Найти оператор $(I - A)^{-1}$.

16.46. Пусть A — линейный оператор, определенный всюду в линейном нормированном пространстве X со значениями в X, $N_k = N(A^k)$, $R_k = R(A^k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Доказать, что

а) $N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_k \subset N_{k+1} \subset \ldots$, и при этом либо все N_k различны, либо существует такое наименьшее целое $n \geqslant 0$, что при $0 \leqslant r \leqslant n$ все N_r различны, а все последующие N_r совпадают с N_n (в этом случае говорят, что A имеет *конечный подъем* n);

б) $R_0 \supset R_1 \supset \ldots \supset R_k \supset R_{k+1} \supset \ldots$ и при этом либо все R_k различны, либо существует такое наименьшее целое $m \geqslant 0$, что при $0 \leqslant r \leqslant m$ все R_r различны, а все последующие R_r совпадают с R_m (в этом случае говорят, что A имеет *конечный спуск* m).

16.47. Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathscr{L}(X)$ и имеет конечный подъем n и конечный спуск m. Доказать, что $n = m$ и $X = N_n \oplus R_n$.

16.48. Пусть X — банахово пространство, $A = I + B$, где $B \in \sigma(X)$. Доказать, что:

а) A имеет конечный подъем n и конечный спуск m и, следовательно, по предыдущей задаче $n = m$;

б) каждое подпространство N_r конечномерно, каждое линейное многообразие R_r замкнуто;

в) A отображает R_n на R_n взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

16.49. Пусть e_n $(n \in \mathbf{N})$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H. Оператор $A \in \mathscr{L}(H)$ называется *оператором Гильберта — Шмидта*, если величина

$$\|A\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2$$

конечна. Доказать, что:

а) величина $\|A\|_2$ не зависит от выбора ортонормированного базиса в H;

б) $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$;

в) $\|A\| \leqslant \|A\|_2$;

г) величина $\|A\|_2$, определенная на классе операторов Гильберта — Шмидта, является нормой;

д) в пространстве $\mathscr{L}(H)$ операторы Гильберта — Шмидта образуют линейное многообразие;

е) равенство

$$(A, B) = \sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n, Be_n)$$

задает на классе операторов Гильберта — Шмидта скалярное произведение;

ж) операторы Гильберта — Шмидта образуют банахово пространство относительно $\|A\|_2$;

з) всякий оператор Гильберта — Шмидта вполне непрерывен;

и) оператор A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$,

$$Ax(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt,$$

где $K(s, t) \in L_2[0, 1] \times [0, 1]$, есть оператор Гильберта — Шмидта;

к) если A — оператор Гильберта — Шмидта и $B \in \mathscr{L}(H)$, то AB и BA — операторы Гильберта — Шмидта и при этом $\|AB\|_2 \leqslant \|A\|_2\|B\|$, $\|BA\|_2 \leqslant \|A\|_2\|B\|$.

л) При каком условии на последовательность $\lambda_n \in \mathbf{R}$ оператор $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$ для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ будет оператором Гильберта — Шмидта?

м) В пространстве l_2 построить вполне непрерывный оператор, не являющийся оператором Гильберта — Шмидта.

16.50. Оператор $A \in \mathscr{L}(H)$ называется *ядерным*, если он представим в виде $A = BC$, где B, C — операторы Гильберта — Шмидта. Доказать, что если A — ядерный оператор, то:

а) A — оператор Гильберта — Шмидта и, следовательно, вполне непрерывный оператор;

б) AD и DA, где $D \in \mathscr{L}(H)$, — ядерные операторы;

в) A^* — ядерный оператор;

г) для любого ортонормированного базиса e_n $(n \in \mathbf{N})$ в H ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (Ae_n, e_n)$ абсолютно сходится.

16.51. В пространстве l_2 привести пример ядерного оператора и оператора Гильберта — Шмидта, не являющегося ядерным.

§ 17. Нормально разрешимые операторы

Пусть X, Y — банаховы пространства, оба вещественные или оба комплексные, $A: X \to Y$ — линейный оператор с $\overline{D(A)} = X$ и $A^*: Y^* \to X^*$ — сопряженный к A оператор.

Оператор A называется *нормально разрешимым*, если для разрешимости уравнения $Ax = y$ необходимо и достаточно, чтобы $\langle y, \psi \rangle = 0$ для любого решения ψ уравнения $A^*\psi = 0$.

Нормально разрешимый оператор A называется *нётеровым*, если многообразия $N(A)$ и $N(A^*)$ конечномерны. При этом число $n = \dim N(A)$ называется *числом нулей* оператора A, число $m = \dim N(A^*)$ называется *дефектным числом* оператора A, а число $\chi = n - m$ называется *индексом* оператора A.

Нётеров оператор нулевого индекса называется *фредгольмовым* оператором.

17.1. Доказать, что если уравнение $Ax = y$ имеет хотя бы одно решение, то $\langle y, \psi \rangle = 0$ для любого $\psi \in H(A^*)$.

17.2. Пусть L — линейное многообразие в пространстве Y^*. Введем множество

$$^{\perp}L = \{y \in Y;\ \langle y, f \rangle = 0 \text{ для любого } f \in L\}.$$

Проверить, что утверждение предыдущей задачи равносильно включению

$$R(A) \subset {}^{\perp}N(A^*).$$

17.3. Доказать, что в обозначениях задач 17.1 и 17.2

$$\overline{R(A)} \subset {}^{\perp}N(A^*).$$

17.4. Пусть $y_0 \notin \overline{R(A)}$. Пользуясь следствием 1 теоремы 12.1, доказать, что найдется такое $\psi_0 \in N(A^*)$, что $\langle y_0, \psi_0 \rangle \neq 0$.

17.5. Вывести из задач 17.3 и 17.4, что $\overline{R(A)} = {}^{\perp}N(A^*)$. Сравнить с задачей 14.7.

17.6. Проверить, что $\overline{R(A)} = Y$, т. е. что уравнение $Ax = y$ разрешимо для всех y из плотного в Y линейного многообразия, тогда и только тогда, когда дефектное число оператора A равно нулю.

17.7. Доказать, что для нормальной разрешимости оператора A необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\overline{R(A)} = R(A)$, т. е. чтобы область значений оператора A была замкнута.

17.8. Пусть A нормально разрешим и имеет нулевое дефектное число. Проверить, что уравнение $Ax = y$ имеет хотя бы одно решение для любого $y \in Y$, т. е. что $R(A) = Y$.

17.9. Пусть для оператора A его область значений $R(A)$ конечномерна. Следует ли отсюда, что A нормально разрешим?

17.10. Доказать, что оператор $A \in \mathscr{L}(E^k, E^m)$ является нётеровым оператором индекса $k - m$.

17.11. Доказать, что оператор $A \in \mathscr{L}(E^k, E^k)$ является фредгольмовым оператором.

17.12. Пусть $A \in \mathscr{L}(E^k, E^m)$, $B \in \mathscr{L}(E^n, E^k)$. Доказать, что $\chi(AB) = \chi(A) + \chi(B)$.

17.13. Доказать, что если оператор $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ непрерывно обратим, то он фредгольмов.

17.14. Рассмотрим оператор $A: l_2 \to l_2$, определяемый равенством $Ax = (x_2, x_3, \ldots)$ для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$.

а) Найти оператор A^*.

б) Доказать, что операторы A и A^* нётеровы и найти их индексы.

в) Доказать, что при $k \in \mathbf{N}$ операторы A^k и $(A^*)^k$ нётеровы и найти их индексы.

17.15. Пусть A — нётеров оператор. Проверить справедливость следующих утверждений (теорем Нётера):

а) или уравнение $Ax = y$ имеет хотя бы одно решение при любой правой части y, или уравнение $A^*\psi = 0$ имеет нетривиальное решение;

б) каждое из уравнений $Ax = 0$ и $A^*\psi = 0$ имеет конечномерное подпространство решений;

в) если уравнение $A^*\psi = 0$ имеет нетривиальные решения, то уравнение $Ax = y$ имеет хотя бы одно решение для тех и только тех правых частей y, которые ортогональны любому решению уравнения $A^*\psi = 0$.

17.16. Пусть A — фредгольмов оператор. Проверить справедливость следующих утверждений (теорем Фредгольма):

а) или уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение при любой правой части y, или уравнение $Ax = 0$ имеет нетривиальные решения;

б) уравнения $Ax = 0$ и $A^*\psi = 0$ или оба имеют только тривиальные решения, или оба имеют одинаковое число линейно независимых решений;

в) если число нулей оператора A не равно нулю, то уравнение $Ax = y$ имеет решения для тех и только тех y, которые ортогональны любым решениям уравнения $A^*\psi = 0$.

17.17. Пусть оператор A вполне непрерывен и его область значений $R(A)$ бесконечномерна. Будет ли A нормально разрешим?

17.18. Пусть оператор $T \in \sigma(X)$ (т. е. вполне непрерывен). Доказать, что оператор $A = I - T$ фредгольмов.

17.19. Будет ли оператор A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$,

$$Ax(t) = \int_0^t x(s)\,ds$$

нормально разрешим?

17.20. Пусть оператор A: $X \to Y$ замкнут и существует такое $m > 0$, что для любого $x \in D(A)$ выполняется неравенство $\|Ax\| \geqslant m\|x\|$. Доказать, что A нормально разрешим.

17.21. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — линейно независимая система элементов в банаховом пространстве X. Доказать, что в сопряженном пространстве X^* существует такая система

элементов $\{\gamma_j\}_{j=1}^n$, что

$$\langle \varphi_i, \gamma_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j, \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

(Системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\gamma_j\}_{j=1}^n$ называются *биортогональными*.) Доказать, что система $\{\gamma_j\}_{j=1}^n$ также линейно независима.

17.22. Пусть системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \in X$, $\{\gamma_j\}_{j=1}^n \in X^*$ биортогональны. Рассмотрим оператор P: $X \to X$,

$$Px = \sum_{i=1}^n \langle x, \gamma_i \rangle \varphi_i.$$

а) Доказать, что $P \in \mathscr{L}(X)$.

б) Используя задачи 8.35, 8.36, доказать, что P является оператором проектирования в X.

в) Проверить, что оператор P порождает разложение пространства X в прямую сумму подпространств

$$X = X_n \oplus X_{\infty - n},$$

где $X_n = R(P)$, $X_{\infty-n} = R(I - P)$.

17.23. Пусть $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ — линейно независимая система в пространстве Y^*, сопряженном к банахову пространству Y. Введем подпространства в Y и в Y^*:

$$\widetilde{Y} = \{y \in Y\colon \langle y, \psi_i \rangle = 0, i = 1, 2, \ldots, n\},$$

$$\widetilde{Y}^{\perp} = \{f \in Y^*\colon \langle y, f \rangle = 0 \quad \text{для любого } y \in \widetilde{Y}\}.$$

Доказать, что существует ровно n линейно независимых элементов $y_i \notin \widetilde{Y}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и такие элементы $f_i \in Y^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, что системы $\{y_i\}_{i=1}^n$ и $\{f_j\}_{j=1}^n$ биортогональны.

17.24. Пусть $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ — линейно независимая система в банаховом пространстве Y^*, сопряженном к банахову пространству Y. Доказать, что:

а) в пространстве Y существует такая линейно независимая система элементов $\{z_i\}_{i=1}^n$, что системы $\{\psi_j\}_{j=1}^n$, $\{z_i\}_{i=1}^n$ биортогональны;

б) оператор Q: $Y \to Y$, определяемый формулой

$$Qy = \sum_{i=1}^n \langle y, \psi_i \rangle z_i$$

ограничен, является оператором проектирования в Y и порождает разложение пространства Y в прямую сумму подпространств $Y = Y^n \oplus Y^{\infty-n}$, где $Y^n = R(Q)$, $Y^{\infty-n} = R(I-Q)$.

17.25. Пусть системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset X$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^n \in X^*$, а также системы $\{\psi_i\}_{i=1}^n \in Y$, $\{z_i\}_{i=1}^n \subset Y$ биортогональны. Образуем конечномерный оператор $K: X \to Y$,

$$Kx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \gamma_i \rangle z_i.$$

а) Доказать, что

$$K^* f = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle z_i, f \rangle}\, \gamma_i,$$

где черта означает комплексное сопряжение в случае комплексных пространств X, Y.

б) Проверить, что $K\varphi_i = z_i$, $K^*\psi_i = \gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

17.26. Пусть оператор $A: X \to Y$ фредгольмов с числом нулей $n > 0$. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \in X$, $\{\psi_i\}_{i=1}^n \in Y^*$ — базисы соответственно в $N(A)$ и $N(A^*)$, а $\{\gamma_i\}_{i=1}^n \in X^*$, $\{z_i\}_{i=1}^n \in Y$ — биортогональные к ним системы. Образуем оператор $\tilde{A} = A + K$, где оператор K определен в предыдущей задаче. Доказать, что операторы $\tilde{A}$ и $(\tilde{A})^*$ имеют нулевые числа нулей.

17.27. В условиях предыдущей задачи доказать, что $R(\tilde{A}) = Y$.

17.28. Проверить, что в условиях задачи 17.26 оператор $\tilde{A}$ непрерывно обратим (это утверждение называется леммой Шмидта).

17.29. Проверить, что в условиях задачи 17.26:

а) справедливы прямые разложения задач 17.22, 17.24, причем $X_n = N(A)$, $Y^{\infty-n} = R(A)$;

б) $\tilde{A} = A$ на $D(A)$ и оператор A отображает $X_{\infty-n} \cap D(A)$ на $Y^{\infty-n}$ взаимно однозначно;

в) $\tilde{A}$ отображает X_n на Y^n взаимно однозначно.

17.30. Доказать, что если оператор A фредгольмов, то он представим в виде $A = B + P$, где B непрерывно обратим, а область значений $R(P)$ конечномерна.

17.31. Доказать, что если оператор A фредгольмов, то он представим в виде $A = C + T$, где C непрерывно обратим, а T вполне непрерывен.

17.32. Пусть оператор C непрерывно обратим, а оператор T вполне непрерывен. Доказать, что оператор $A = C + T$ фредгольмов.

17.33. Проверить, что для фредгольмовости оператора $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ необходимо и достаточно выполнения каждого из следующих условий:

а) оператор представим в виде $A = B + P$, где $B \in \mathscr{L}(X, Y)$ и непрерывно обратим, а $P \in \mathscr{L}(X, Y)$ и $R(P)$ конечномерна;

б) оператор представим в виде $A = C + T$, где $C \in \mathscr{L}(X, Y)$ и непрерывно обратим, а $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ вполне непрерывен.

17.34. Пусть $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, $R(A)$ замкнута и существует такая система элементов $\{y_i\}_{i=1}^n \subset Y$, что любой $y \in Y$ единственным образом представим в виде $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i + z$, где $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $z \in R(A)$. Доказать, что дефектное число оператора A равно n.

17.35. Пусть H — комплексное гильбертово пространство, $A \in \mathscr{L}(H)$ — нётеров оператор и $y \in H$. Пусть существует такое число $r > 0$, что оператор $B: H \to H$, $Bx = r^2 AA^* x - (\overline{x, y})\, y$ является неотрицательным. Доказать, что:

а) уравнение $Ax = y$ разрешимо, т. е. $y \in R(A)$;

б) уравнение $AA^* f = y$ разрешимо;

в) элемент $\hat{x} = A^* f$, где f — решение уравнения $AA^* f = y$, не зависит от f и является наименьшим по норме решением уравнения $Ax = y$;

г) если число нулей оператора A не равно нулю, то система $Ax = y$, $\|x\| = r$ разрешима.

Глава 5

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

§ 18. Самосопряженные операторы

Пусть H — комплексное гильбертово пространство. Оператор $A \in \mathscr{L}(H)$ называется *самосопряженным*, если $A^* = A$, т. е. для любых $x, y \in H$ выполняется равенство $(Ax, y) = (x, Ay)$. Множество всех самосопряженных операторов из $\mathscr{L}(H)$ обозначается $\delta(H)$.

Теорема 18.1. *Если $A, B \in \delta(H)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, то $\alpha A + \beta B \in \delta(H)$.*

Теорема 18.2. *Пусть $A, B \in \delta(H)$. Оператор AB самосопряжен тогда и только тогда, когда $AB = BA$.*

Теорема 18.3. *Если $A \in \delta(H)$, то $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |(Ax, x)|$.*

Оператор $A \in \delta(H)$ называют *неотрицательным* и записывают $A \geqslant 0$, если $(Ax, x) \geqslant 0$ для любого $x \in H$. Для операторов $A, B \in \delta(H)$ запись $A \geqslant B$ или $B \leqslant A$ означает, что $A - B \geqslant 0$.

Теорема 18.4. *Пусть P — оператор проектирования в гильбертовом пространстве H на подпространство M. Тогда:*

а) *$P \in \mathscr{L}(H)$, причем $\|P\| = 1$, если $M \neq 0$;*

б) *$P^2 = P$;*

в) *$P \in \delta(H)$;*

г) *$P \geqslant 0$;*

д) *$x \in M$ тогда и только тогда, когда $\|Px\| = \|x\|$;*

е) *$(Px, x) \leqslant \|x\|^2$ для любого $x \in H$.*

Теорема 18.5. *Пусть $A \in \delta(H)$, $A^2 = A$. Тогда A есть проектор на некоторое подпространство $M \subset H$.*

Теорема 18.6. *Каждый неотрицательный оператор $A \in \delta(H)$ имеет единственный так называемый квадратный корень $\sqrt{A} \in \delta(H)$ такой, что $(\sqrt{A})^2 = A$ и $\sqrt{A} \geqslant 0$. При этом $\sqrt{A}$ перестановочен с оператором $C \in \mathscr{L}(H)$ тогда и только тогда, когда C перестановочен с A.*

Для $A \in \delta(H)$ введем следующие обозначения:

$$|A| = \sqrt{A^2}; \quad A^+ = \frac{1}{2}\{|A| + A\}; \quad A^- = \frac{1}{2}\{|A| - A\},$$

где $\sqrt{A^2}$ — неотрицательный квадратный корень из оператора A^2.

18.1. Доказать, что $A\colon l_2 \to l_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$ для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$, где $\lambda_k \in \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{N})$, $\sup\limits_k |\lambda_k| < \infty$, есть самосопряженный оператор. При каком условии на последовательность λ_k он будет неотрицательным?

18.2. Доказать, что оператор $A\colon L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = tx(t)$ есть неотрицательный самосопряженный оператор.

18.3. Доказать, что оператор $A\colon L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$,

$$Ax(t) = \int_0^1 e^{s+t} x(s)\, ds$$

есть самосопряженный неотрицательный.

18.4. Пусть $h \in \mathbf{R}$, $h \neq 0$ фиксировано. Доказать, что разностный оператор $A\colon L_2(-\infty, \infty) \to L_2(-\infty, \infty)$,

$$Ax(t) = \frac{1}{h}\left[x\left(t + \frac{h}{2}\right) - x\left(t - \frac{h}{2}\right)\right]$$

является самосопряженным.

18.5. Пусть $A, B \in \mathscr{L}(H)$, $A \in \delta(H)$. Доказать, что $B^*AB \in \delta(H)$.

18.6. Пусть $A \in \delta(H)$. Доказать, что:

а) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$;

б) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1, \|y\|=1} |(Ax, y)|$.

18.7. Пусть H — комплексное гильбертово пространство, $A \in \mathscr{L}(H)$ и для любого $x \in H$ число (Ax, x) вещественно. Доказать, что $A \in \delta(H)$.

18.8. Пусть $A \in \delta(H)$. Будет ли замкнутым на вещественной прямой множество (Ax, x), если $x \in H$, $\|x\| = 1$?

18.9. Пусть $A \in \mathscr{L}(H)$ и $(Ax, x) = 0$ для любого $x \in H$. Доказать, что $A = 0$. Верно ли это утверждение для ограниченного линейного оператора, рассматриваемого в вещественном гильбертовом пространстве?

18.10. Пусть $A \in \delta(H)$, $x_n \in H$ $(n \in \mathbf{N})$, $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Доказать, что $(Ax_n, x_n) \to (Ax, x)$ $(n \to \infty)$. Существенно ли, что $A \in \delta(H)$?

18.11. Является ли подпространством в гильбертовом пространстве H множество $N = \{x \in H\colon (Ax, x) = 0\}$, если:

а) $A \in \delta(H)$;

б) $A \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$?

18.12. Пусть $A \in \mathscr{L}(H)$. Доказать, что:

а) $\lambda(A + A^*) \in \delta(H)$ для любого $\lambda \in \mathbf{R}$;

б) A представим в виде $A = A_1 + iA_2$, где $A_1, A_2 \in \delta(H)$.

18.13. Может ли область значений самосопряженного оператора быть незамкнутой?

18.14. Пусть $A \in \delta(H)$, $N(A) = 0$. Доказать, что $\overline{R(A)} = H$.

18.15. Пусть $A \in \delta(H)$. Доказать, что $\|A^2\| = \|A\|^2$.

18.16. Пусть $A_n \in \delta(H)$ $(n \in \mathbf{N})$ и при $n \to \infty$ сильно сходится к оператору A. Доказать, что $A \in \delta(H)$.

18.17. Пусть $A_n \in \delta(H)$ $(n \in \mathbf{N})$, $A_n \geqslant 0$ и при $n \to \infty$ сильно сходится к оператору A. Доказать, что $A \geqslant 0$.

18.18. Пусть $A \in \delta(H)$. Доказать, что если для некоторого $x \in H$ $Ax \neq 0$, то $A^n x \neq 0$ для любого натурального n.

18.19. Пусть $A \in \delta(H)$.

а) Доказать, что для любого $x \in H$ и любого натурального $n > 1$ выполняется неравенство $\|A^n x\|^2 \leqslant \|A^{n-1}x\| \times \|A^{n+1}x\|$.

б) Пусть $x \in H$, $x \notin N(A)$. Доказать, что последовательность

$$\alpha_n = \frac{\|A^{n+1}x\|}{\|A^n x\|}, \quad n \in \mathbf{N},$$

сходится.

18.20. Пусть $A \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

а) $R(A)$ всюду плотна в H;

б) $N(A) = 0$;

в) $(Ax, x) > 0$ для любого $x \in H$, $x \neq 0$.

18.21. Пусть $P \in \mathscr{L}(H)$, $P^2 = P$. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

а) $P \in \delta(H)$;

б) $PP^* = P^*P$;

в) $R(P) = (N(P))^{\perp}$;

г) $(Px, x) = \|Px\|^2$ для любого $x \in H$.

18.22. Пусть $A \in \mathscr{L}(H)$. Доказать, что AA^* и A^*A — неотрицательные самосопряженные операторы.

18.23. Пусть $A, B \in \delta(H)$ и $A \geqslant 0$. Доказать, что $BAB \geqslant 0$.

18.24. Пусть $A, B \in \delta(H)$, $A \geqslant B$, $C \in \mathscr{L}(H)$. Доказать, что $C^*AC, C^*BC \in \delta(H)$ и $C^*AC \geqslant C^*BC$.

18.25. Пусть $A, B \in \delta(H)$ и выполняются неравенства $A \geqslant B$ и $B \geqslant A$. Доказать, что $A = B$.

18.26. Можно ли про любые два оператора $A, B \in \delta(H)$ утверждать, что либо $A \geqslant B$, либо $B \geqslant A$?

18.27. Пусть $A \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$. Доказать, что для любого $x \in H$ выполняется неравенство $\|Ax\|^2 \leqslant \|A\|(Ax, x)$.

18.28. Пусть $A \in \delta(H)$, $0 \leqslant A \leqslant \lambda I$, где $\lambda \in \mathbf{R}$. Доказать, что $\|A\| \leqslant \lambda$.

18.29. Пусть $A \in \delta(H)$ и непрерывно обратим. Доказать, что $A^{-1} \in \delta(H)$.

18.30. Пусть $A \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$ и A непрерывно обратим. Доказать, что $A^{-1} \geqslant 0$.

18.31. Пусть $A \in \delta(H)$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Доказать, что оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ существует.

18.32. Пусть $A \in \mathscr{L}(H)$. Доказать, что оператор $(I + AA^*)^{-1}$ существует.

18.33. Пусть $A \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$. Доказать, что оператор $(I + A)^{-1}$ существует.

18.34. Пусть $A \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$. Доказать, что для любого $\lambda > 0$ оператор $A + \lambda I$ непрерывно обратим.

18.35. Доказать, что оператор $A \in \mathscr{L}(H)$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда существуют такие $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, что $AA^* \geqslant \alpha I$, $A^*A \geqslant \beta I$.

18.36. Пусть $A, B \in \delta(H)$, $0 < I \leqslant A \leqslant B$. Доказать, что A, B непрерывно обратимы и $B^{-1} \leqslant A^{-1}$.

18.37. Пусть $A, B \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$ и $AB = BA$. Доказать, что $AB \geqslant 0$.

18.38. Пусть $A, B, C \in \delta(H)$, $A \geqslant B$, $C \geqslant 0$, $AC = CA$, $BC = CB$. Доказать, что $AC \geqslant BC$.

18.39. Рассмотрим оператор $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (0, 0, x_3, x_4, \ldots)$ для $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l_2$. Доказать, что $A \in \delta(l_2)$, $A \geqslant 0$. Найти $\sqrt{A}$.

18.40. Пусть $A \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$. Доказать, что $\|\sqrt{A}\| = \sqrt{\|A\|}$.

18.41. В пространстве E^2 оператор A переводит $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ в $Ax = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}$. Доказать, что $A \in \delta(E^2)$ и что $A \geqslant 0$. Найти $\sqrt{A}$.

18.42. Пусть $A, B, C \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$, $B^2 = C^2 = A$. Доказать, что $BC = CB$.

18.43. Для операторов задач 18.1, 18.2 найти операторы $|A|$, A^+, A^-.

18.44. Доказать, что для $A \in \delta(H)$:

а) $A^+A^- = A^-A^+ = 0$;

б) $|A| > 0$, $|A| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$;

в) $|A|^2 = A^2$;

г) если $A^- = 0$, то $A = A^+ = |A|$;

д) если $A^+ = 0$, то $A = -A^- = -|A|$.

18.45. Доказать, что для $A \in \delta(H)$ норма оператора $|A|$ равна норме оператора A.

18.46. Пусть $A \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$. Доказать, что $|A| = A$.

18.47. Пусть e_n $(n \in \mathbf{N})$ — ортонормированный базис в H. Определим оператор A: $H \to H$ равенствами $Ae_1 = 0$, $Ae_n = e_{n-1}/n$ при $n > 1$. Доказать, что:

а) $A \in \mathscr{L}(H)$ и вполне непрерывен;

б) не существует оператора $B \in \mathscr{L}(H)$ такого, что $B^2 = A$.

18.48. Пусть $A \in \mathscr{L}(H)$. Доказать, что существует и единствен оператор $B \in \delta(H)$, такой, что $B \geqslant 0$, и для любого $x \in H$ выполняется равенство $\|Ax\| = \|Bx\|$.

18.49. Пусть A: $H \to H$ — такой линейный оператор с $D(A) = H$, что для любых x, $y \in H$ выполняется равенство $(Ax, y) = (x, Ay)$. Доказать, что A — ограниченный оператор и, следовательно, $A \in \delta(H)$.

18.50. Пусть $A \in \mathscr{L}(H)$, $AA^* = A^*A$ (оператор, перестановочный со своим сопряженным, называется *нормальным*). Доказать, что:

а) $\|Ax\| = \|A^*x\|$ для любого $x \in H$;

б) $N(A) = N(A^*) = (R(A))^\perp$;

в) $\|A^2\| = \|A\|^2$;

г) если $A^2 = A$, то $A \in \delta(H)$;

д) если $A^2 = 0$, то $A = 0$.

18.51. Пусть $A \in \mathscr{L}(H)$ — нормальный оператор, причем $A^{-1} \in \mathscr{L}(H)$. Доказать, что A^{-1} — нормальный оператор.

18.52. Пусть $A \in \mathscr{L}(H)$, α, $\beta \in \mathbf{C}$, $|\alpha| = |\beta| = 1$. Доказать, что оператор $\alpha A + \beta A^*$ — нормальный.

18.53. Пусть A_n, $A \in \mathscr{L}(H)$ — нормальные операторы $(n \in \mathbf{N})$ и $A_n \to A$ при $n \to \infty$ сильно. Доказать, что $A_n^* \to A^*$ при $n \to \infty$ сильно.

18.54. Пусть $A \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$ и вполне непрерывен. Доказать, что $\sqrt{A}$ вполне непрерывен.

18.55. Пусть A, $B \in \delta(H)$, $0 \leqslant A \leqslant B$ и B — вполне непрерывный оператор. Доказать, что A — вполне непрерывный оператор.

18.56. Пусть оператор U определен всюду в комплексном гильбертовом пространстве H и отображает его на все H. Он называется *унитарным*, если для любых x, $y \in H$ выполняется равенство $(Ux, Uy) = (x, y)$. Доказать, что:

а) унитарный оператор линеен и ограничен;

б) унитарный оператор имеет обратный, который также унитарен;

в) произведение двух унитарных операторов есть унитарный оператор;

г) линейный изометрический оператор, заданный на всем H и отображающий его на все H, есть унитарный оператор;

д) оператор $U \in \mathscr{L}(H)$ является унитарным тогда и только тогда, когда $U^* = U^{-1}$.

18.57. Пусть $A \in \mathscr{L}(H)$ и непрерывно обратим, $B = \sqrt{A^*A}$.

а) Доказать, что $B \in \delta(H)$, $B \geqslant 0$ и непрерывно обратим.

б) Положим $U = AB^{-1}$, так что справедливо представление $A = UB$, которое называется *полярным разложением*. Доказать, что U — унитарный оператор.

§ 19. Спектр линейного оператора

Пусть X — комплексное банахово пространство, A: $X \to X$ — линейный оператор с областью определения $D(A)$, плотной в X, λ — комплексное число.

Точка λ называется *регулярной точкой* оператора A, если оператор $A - \lambda I$ непрерывно обратим. Совокупность регулярных точек оператора A называется *резольвентным множеством* оператора A и обозначается $\rho(A)$. Если $\lambda \in \rho(A)$, то ограниченный линейный оператор $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ называется *резольвентой* оператора A. Дополнение к множеству $\rho(A)$ в комплексной плоскости называется *спектром* оператора A и обозначается $\sigma(A)$.

Теорема 19.1. *Спектр оператора $A \in \mathscr{L}(X)$ есть замкнутое множество, лежащее в круге $|\lambda| \leqslant \|A\|$.*

Число $\lambda \in \mathbf{C}$ называется *собственным значением* оператора A, если существует такой элемент $x \in D(A)$, $x \neq 0$, что $Ax = \lambda x$. При этом x называется *собственным вектором* оператора A, соответствующим собственному значению λ. Всякое собственное значение оператора A является точкой его спектра, при этом оператор $A - \lambda I$ не обратим.

Теорема 19.2. *Пусть $A \in \mathscr{L}(X)$, где X — банахово пространство. Тогда существует конечный предел*

$$r_\sigma(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n},$$

называемый спектральным радиусом оператора A. При этом

$$\inf_{n \geqslant 1} \|A^n\|^{1/n} = r_\sigma(A) \leqslant \|A\|.$$

Теорема 19.3. *Пусть $A \in \mathscr{L}(X)$, где X — банахово пространство. Если $|\lambda| > r_\sigma(A)$, то $\lambda \in \rho(A)$.*

Оператор-функция $A(\lambda)$ называется *аналитической в точке* λ_0, если она разлагается в некоторой окрестности точки λ_0 в степенной ряд

$$A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (\lambda - \lambda_0)^k,$$

сходящийся по норме $\mathscr{L}(X)$ в этой окрестности.

Теорема 19.4. *$R_\lambda(A)$ — аналитическая функция λ в любой точке $\lambda \in \rho(A)$. Если $A \in \mathscr{L}(X)$, то при $|\lambda| > r_\sigma(A)$ —*

$$R_\lambda(A) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n.$$

Теорема 19.5. *Если $A \in \mathscr{L}(X)$, где X — банахово пространство, то $\sigma(A)$ — непустое множество.*

19.1. Пусть $A: X \to X$ — линейный оператор и оператор A^{-1} существует. Доказать, что A и A^{-1} имеют одни и те же собственные векторы.

19.2. Может ли оператор $A \in \mathscr{L}(X)$, удовлетворяющий условию $A^2 = 0$, иметь ненулевые собственные значения?

19.3. Пусть $A \in \mathscr{L}(X)$ и оператор A^2 имеет собственный вектор. Доказать, что A имеет собственный вектор.

19.4. В вещественном линейном пространстве $C[-\pi, \pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора:

а) $Ax(t) = x(-t)$;

б) $Ax(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(s+t)\, x(s)\, ds$.

19.5. В вещественном линейном пространстве $C[0, \pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора $Ax(t) = d^2x/dt^2$, если:

а) $D(A) = \{x(t) \in C[0, \pi]: x'' \in C[0, \pi],\ x(0) = x(\pi) = 0\}$;

б) $D(A) = \{x(t) \in C[0, \pi]: x'' \in C[0, \pi],\ x'(0) = x'(\pi) = 0\}$;

в) $D(A) = \{x(t) \in C[0, \pi]: x'' \in C[0, \pi],\ x(0) = x(\pi),\ x'(0) = x'(\pi)\}$.

19.6. Пусть $A \in \mathscr{L}(X)$, где X — банахово пространство. Доказать, что при $|\lambda| > r_\sigma(A)$ выполняется неравенство $\|R_\lambda(A)\| \leqslant (|\lambda| - \|A\|)^{-1}$.

19.7. Доказать, что оператор и его резольвента перестановочны.

19.8. Доказать, что если $\lambda, \mu \in \rho(A)$, то

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu) R_\lambda(A) R_\mu(A) = (\lambda - \mu) R_\mu(A) R_\lambda(A).$$

19.9. Пусть $A, B \in \mathscr{L}(X)$, $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Доказать, что

$$R_\lambda(A) - R_\lambda(B) = R_\lambda(A)(B - A) R_\lambda(B).$$

19.10. Пусть операторы A, B определены на всем X. Доказать, что для того чтобы A и B были перестановочны, необходимо, чтобы B был перестановочен с $R_\lambda(A)$ для любого $\lambda \in \rho(A)$, и достаточно, чтобы B и $R_\lambda(A)$ были перестановочны хотя бы для одного $\lambda \in \rho(A)$.

19.11. Пусть $A, B \in \mathscr{L}(X)$, $\lambda \in \rho(A)$, $\|B - A\| < \|R_\lambda(A)\|^{-1}$. Доказать, что $\lambda \in \rho(B)$ и

$$R_\lambda(B) = R_\lambda(A) \sum_{n=0}^{\infty} [(A - B) R_\lambda(A)]^n.$$

19.12. Пусть $A \in \mathscr{L}(X)$, $\lambda \in \rho(A)$ и $\mu \in \mathbf{C}$ таково, что $|\mu| \leqslant \|R_\lambda(A)\|^{-1}$. Доказать, что $\lambda - \mu \in \rho(A)$.

19.13. Пусть $A \in \mathscr{L}(X)$. Может ли оператор $R_\lambda(A)$ быть вполне непрерывным?

19.14. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим оператор $Ax(t) = tx(t)$. Доказать, что $\sigma(A) = [0, 1]$, причем ни одна точка спектра не является собственным значением.

19.15. В пространстве $C[0, 2\pi]$ рассмотрим оператор $Ax(t) = e^{it}x(t)$. Доказать, что $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbf{C}: |\lambda| = 1\}$.

19.16. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим оператор $Ax(t) = x(0) + tx(1)$. Найти $\sigma(A)$, $r_\sigma(A)$, $R_\lambda(A)$.

19.17. Пусть M — ненулевое подпространство гильбертова пространства A. Найти спектр оператора P ортогонального проектирования на M. Выразить через P резольвенту $R_\lambda(P)$.

19.18. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau.$$

Найти $\sigma(A)$, $R_\lambda(A)$.

19.19. Пусть e_n $(n \in \mathbf{N})$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H. Определим оператор $A: H \to H$ равенствами $Ae_1 = 0$, $Ae_{k+1} = e_k$ $(k \in \mathbf{N})$.

а) Доказать, что $A \in \mathscr{L}(H)$.

б) Найти оператор A^*.

в) Доказать, что $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbf{C}: |\lambda| \leqslant 1\}$, причем внутренность круга состоит из собственных значений A.

г) Доказать, что $\sigma(A^*) = \{\lambda \in \mathbf{C}: |\lambda| \leqslant 1\}$, причем A^* не имеет собственных значений.

19.20. Рассмотрим оператор $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$ для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$, где $\lambda_n \in \mathbf{C}$ $(n \in \mathbf{N})$, $\sup\limits_n |\lambda_n| < \infty$. Найти $\sigma(A)$.

19.21. Доказать, что любое бикомпактное множество на комплексной плоскости является спектром некоторого оператора $A \in \mathscr{L}(l_2)$.

19.22. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим $Ax(t) = dx/dt$. Доказать, что:

а) $\sigma(A)$ пусто, если

$$D(A) = \{x(t) \in C[0, 1]: x' \in C[0, 1], x(0) = 0\};$$

б) $\sigma(A)$ состоит из одних собственных значений, заполняющих всю комплексную плоскость, если

$$D(A) = \{x(t) \in C[0, 1]: x' \in C[0, 1]\};$$

в) $\sigma(A)$ состоит из собственных значений $2\pi i n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, если

$$D(A) = \{x(t) \in C[0, 1]: x' \in C[0, 1], x(0) = x(1)\}.$$

19.23. Пусть $A, B \in \mathscr{L}(X)$. Доказать, что ненулевые элементы $\sigma(AB)$ и $\sigma(BA)$ совпадают.

19.24. Пусть $A \in \mathscr{L}(X)$, $\lambda \in \mathbf{C}$ и существует такая последовательность $x_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$, что $\|x_n\| = 1$ и $Ax_n - \lambda x_n \to 0$. Доказать, что $\lambda \in \sigma(A)$.

19.25. Пусть $A \in \mathscr{L}(X)$, $\lambda \in \sigma(A)$. Доказать, что $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ при любом натуральном n.

19.26. Пусть $A \in \mathscr{L}(X)$ и непрерывно обратим. Доказать, что если $\lambda \in \sigma(A^{-1})$, то $\lambda^{-1} \in \sigma(A)$ и обратно, если $\mu \in \sigma(A)$, то $\mu^{-1} \in \sigma(A^{-1})$.

19.27. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathscr{L}(H)$ и является нормальным, т. е. удовлетворяет условию $AA^* = A^*A$. Доказать, что если $r_\sigma(A) = 0$, то $A = 0$.

19.28. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathscr{L}(H)$. Доказать, что операторы AA^* и A^*A имеют одинаковые ненулевые собственные значения.

19.29. Рассмотрим оператор $A: L_2[a, b] \to L_2[a, b]$,

$$Ax(s) = \int_a^s K(s, t)\, x(t)\, dt,$$

где $K(s, t)$ непрерывна в треугольнике $a \leqslant t \leqslant s$, $a \leqslant s \leqslant b$. Доказать, что $r_\sigma(A) = 0$. Будет ли $\lambda = 0$ собственным значением оператора A?

19.30. Доказать, что для самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве $r_\sigma(A) = \|A\|$.

19.31. Пусть $A \in \mathscr{L}(X)$, где X — банахово пространство. Доказать, что на окружности $|\lambda| = r_\sigma(A)$ имеется хотя бы одна точка из $\sigma(A)$.

19.32. Пусть $A, B \in \mathscr{L}(X)$, где X — банахово пространство, $AB = BA$. Доказать, что

$$r_\sigma(A + B) \leqslant r_\sigma(A) + r_\sigma(B), \quad r_\sigma(AB) \leqslant r_\sigma(A) r_\sigma(B).$$

19.33. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathscr{L}(H)$. Доказать, что $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$ (черта означает комплексное сопряжение).

§ 20. Спектр вполне непрерывного и самосопряженного оператора

Теорема 20.1. *Пусть X — комплексное банахово пространство, $A \in \sigma(X)$. Тогда спектр A состоит не более чем из счетного множества собственных значений, единственной предельной точкой которых может служить лишь точка $\lambda = 0$. Если X бесконечномерно, то $0 \in \sigma(A)$. Собственное подпространство A, соответствующее собственному значению $\lambda \neq 0$, конечномерно.*

Теорема 20.2. *Пусть A — вполне непрерывный самосопряженный оператор в комплексном гильбертовом пространстве H. Тогда:*

1) *если $A \neq 0$, то A имеет по крайней мере одно собственное значение, отличное от нуля;*

2) *все собственные значения A вещественны и расположены на отрезке $[m, M]$, где*

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x);$$

3) *если $M \neq 0$, то M является наибольшим собственным значением A, если $m \neq 0$, то m является наименьшим собственным значением A.*

Теорема 20.3. *Если A — вполне непрерывный самосопряженный оператор в комплексном гильбертовом пространстве H, то при любом $x \in H$ элемент Ax разлагается в сходящийся ряд Фурье по ортонормированной системе собственных векторов A.*

Теорема 20.4. *Если A — вполне непрерывный самосопряженный оператор в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве H, то в H существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора A.*

20.1. Доказать, что оператор A: $l_2 \to l_2$, $Ax = (0, x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots)$ для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ вполне непрерывен и найти его спектр.

20.2. Доказать, что оператор A: $L_2[-1, 1] \to L_2[-1, 1]$,

$$Ax(s) = \int_{-1}^{1} s^2 t x(t)\, dt$$

вполне непрерывен, и найти его спектр.

20.3. Доказать, что оператор A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$,

$$Ax(s) = \int_{0}^{1} st(1 - st)\, x(t)\, dt$$

вполне непрерывен, и найти его спектр.

20.4. Пусть $\lambda \in \sigma(X)$, где X — банахово пространство и $\lambda \neq 0$. Доказать, что $R(A - \lambda I)$ замкнуто в X.

20.5. Доказать, что собственные векторы самосопряженного оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

20.6. Доказать, что собственные векторы нормального оператора в гильбертовом пространстве (см. задачу 18.50), соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

20.7. Доказать, что оператор A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = tx(t)$ самосопряжен, и найти его спектр.

20.8. Доказать, что спектр самосопряженного оператора вещественен и лежит на отрезке $[m, M]$.

20.9. Доказать, что самосопряженный оператор является неотрицательным тогда и только тогда, когда для любого $\lambda \in \sigma(A)$ выполняется неравенство $\lambda \geqslant 0$.

20.10. Пусть A — самосопряженный оператор в H и λ не является его собственным значением. Доказать, что $R(A - \lambda I)$ всюду плотна в H.

20.11. Пусть A — самосопряженный оператор в H и $R(A - \lambda I) = H$. Доказать, что $\lambda \in \rho(A)$.

20.12. Пусть A — самосопряженный оператор в H и $\lambda \in \rho(A)$ — вещественное число. Доказать, что резольвента $R_\lambda(A)$ — самосопряженный оператор.

20.13. Пусть A — самосопряженный оператор в H и $\lambda \in \rho(A)$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Доказать, что $\|R_\lambda(A)\| \leqslant |\operatorname{Im} \lambda|^{-1}$.

20.14. Пусть A — вполне непрерывный оператор в комплексном банаховом пространстве X. Может ли собственное подпространство A, соответствующее собственному значению $\lambda = 0$, быть бесконечномерным?

20.15. Пусть вполне непрерывный самосопряженный оператор A в бесконечномерном гильбертовом пространстве H имеет конечное множество собственных значений. Доказать, что $\lambda = 0$ — собственное значение оператора A.

20.16. Пусть e_n $(n \in \mathbb{N})$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H, $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_n \to 0$, A: $H \to H$ — такой линейный оператор, что для любого $x \in H$ справедливо разложение в ряд Фурье

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n)\, e_n.$$

Доказать, что A — вполне непрерывный самосопряженный оператор.

20.17. Рассмотрим оператор A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$,

$$Ax(t) = \int_{0}^{1} K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

где

$$K(t, s) = \begin{cases} t(1 - s) & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ s(1 - t) & \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Доказать, что A — вполне непрерывный самосопряженный оператор, и найти собственные значения и собственные векторы A.

20.18. Пусть A — самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, спектр которого состоит из собственных значений $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$. Доказать, что A — оператор ортогонального проектирования.

20.19. Пусть A — вполне непрерывный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

а) Доказать, что A^*A — вполне непрерывный самосопряженный оператор.

б) Доказать, что в представлении

$$A^*Ax = \sum_n \mu_n (x, h_n)\, h_n,$$

вытекающем из теоремы 20.3, все $\mu_n > 0$.

в) Пусть $\lambda_n = \sqrt{\mu_n}$, $e_n = \frac{1}{\lambda_n} Ah_n$. Доказать, что e_n — ортонормированная система и для любого $x \in H$ справедливо представление

$$Ax = \sum_n \lambda_n (x, h_n) e_n$$

(при этом λ_n называются *сингулярными числами* оператора A).

20.20. Пусть A — вполне непрерывный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, h_k $(k \in \mathbf{N})$ — ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора A с собственными значениями λ_k, $f \in H$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Доказать, что решение уравнения $(A - \lambda I)x = f$:

а) имеет вид

$$x = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda}(f, h_n) h_n - f\right],$$

если λ отлично от всех собственных значений λ_n;

б) при $\lambda = \lambda_j = \lambda_{j+1} = \ldots = \lambda_{j+n-1}$ существует тогда и только тогда, когда $(f, h_{j+k}) = 0$ для $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и в этом случае решение имеет вид

$$x = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_k \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda}(f, h_k) h_k - f\right] + \sum_{k=0}^{n-1} C_k h_{j+k},$$

причем в $\sum\limits_k$ пропущены слагаемые с номерами $j, j+1, \ldots, j+n-1$, а $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ — произвольные постоянные.

§ 21. Линейные интегральные уравнения

Интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода называется уравнение вида

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) x(t)\, dt = f(s), \tag{1}$$

где $x(s)$ — неизвестная функция, $K(s, t)$, $f(s)$ — известные функции, λ — числовой параметр. Относительно функции $K(s, t)$, называемой *ядром* уравнения (1), предполагается, что

$$\int_a^b \int_a^b K^2(s, t)\, ds\, dt < \infty.$$

Если $K(s, t) = 0$ при $t > s$, то уравнение (1) принимает вид

$$x(s) - \lambda \int_a^s K(s, t) x(t)\, dt = f(s) \tag{2}$$

и называется *уравнением Вольтерра 2-го рода.*

Если ядро уравнения (1) является *вырожденным*, т. е. имеет вид

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(t),$$

где функции $f_i(s)$, $g_i(t)$ для $i = 1, 2, \ldots, n$ непрерывны и линейно независимы, то (1) можно записать в виде

$$x(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^n C_i f_i(s),$$

и неизвестные C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений.

Введем *интегральный оператор Фредгольма*

$$Ax = \int_a^b K(s, t) x(t)\, dt;$$

если ядро $K(s, t)$ и функция $f(s)$ непрерывны, то A: $C[a, b] \to C[a, b]$, в общем случае, если $f(s) \in L_2[a, b]$, то A: $L_2[a, b] \to L_2[a, b]$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$x - \lambda A x = f, \tag{3}$$

а сопряженное к нему в пространстве $L_2[a, b]$ имеет вид

$$y - \bar{\lambda} A^* y = \varphi, \tag{4}$$

и так как оператор A вполне непрерывен, то применимы теоремы Фредгольма 16.6—16.8.

Если для некоторого $\lambda \neq 0$ однородное уравнение

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) x(t)\, dt = 0$$

имеет ненулевое решение $x_0(s) \in L_2[a, b]$, то λ называется *характеристическим числом* ядра (уравнения), $x_0(s)$ — *собственной функцией* ядра (уравнения), а максимальное число линейно независимых собственных функций, отвечающих характеристическому числу λ, называется *кратностью* этого числа.

Если ядро $K(s, t)$ в (1) симметрично, то интегральный оператор Фредгольма не только вполне непрерывен, но и самосопряжен. Если λ — характеристическое число, то $1/\lambda$ — собственное значение оператора A, если $\mu \neq 0$ — собственное значение оператора A, то $\lambda = 1/\mu$ — характеристическое число. Поэтому применимы теоремы 20.1—20.4.

Уравнения

$$\int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt = f(s), \tag{5}$$

$$\int_a^s K(s, t)\, x(t)\, dt = f(s) \tag{6}$$

при тех же предположениях, что и в (1), (2), называются соответственно *уравнениями Фредгольма и Вольтерра 1-го рода*.

Согласно теоремам 16.9, 16.10 при заданной $f(s) \in L_2[a, b]$ уравнение (5) может не иметь решения, а если это решение и существует, то в силу неограниченности оператора A^{-1} на $R(A)$ решения уравнения (5) с близкими по норме $L_2[a, b]$ правыми частями могут быть далеки друг от друга. Таким образом, задача (5) является *некорректной*. В то же время задача (1) *корректна* — если $(I - \lambda A)^{-1}$ существует, то он ограничен. *Метод регуляризации* [24] позволяет свести некорректную задачу (5) к корректной (1). Для случая $f \in R(A)$ он основан на следующих утверждениях.

Теорема 21.1. *Пусть $A \in \mathscr{L}(H)$ — вполне непрерывный оператор. Тогда для любой $f \in H$ и любого значения параметра регуляризации $\alpha > 0$ существует единственное решение $x_\alpha \in H$, на котором реализуется*

$$\inf_{x \in H} \{\|Ax - f\|^2 + \alpha \|x\|^2\}.$$

При этом x_α является решением уравнения 2-го рода

$$\alpha x + A^* A x = A^* f. \tag{7}$$

Теорема 21.2. *Пусть x_α — решение уравнения (7), $f \in R(A)$. Тогда при $\alpha \to 0$ величина $\|Ax_\alpha - f\|^2$ монотонно убывает и стремится к нулю.*

21.1. В пространстве $C[a, b]$ найти решение интегрального уравнения

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt = f(s),$$

если

а) $a = -\pi/4$, $b = \pi/4$, $K(s, t) = \operatorname{tg} t$, $f(s) = 1$;
б) $a = 0$, $b = \pi/2$, $K(s, t) = \sin s \cos t$, $f(s) = \sin s$;
в) $a = 0$, $b = \pi$, $K(s, t) = \sin s \cos t$, $f(s) = \sin s$;
г) $a = 0$, $b = 1$, $K(s, t) = s + t - 2st$, $f(s) = s + s^2$;
д) $a = -1$, $b = 1$, $K(s, t) = st - s^2t^2$, $f(s) = s^2 + s^4$;
е) $a = 0$, $b = 2\pi$, $K(s, t) = |\pi - t| \sin s$, $f(s) = s$;
ж) $a = 0$, $b = \pi$, $K(s, t) = \sin t + t \cos s$, $f(s) = 1 - 2s/\pi$;
з) $a = 0$, $b = \pi$, $K(s, t) = \sin(s - 2t)$, $f(s) = \cos 2s$.

21.2. В пространстве $C[a, b]$ найти характеристические числа λ_i и собственные функции φ_i для уравнения

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt = 0,$$

если:

а) $a = 0$, $b = 2\pi$, $K(s, t) = \sin(s + t)$;
б) $a = 0$, $b = \pi$, $K(s, t) = \cos(s + t)$;
в) $a = 0$, $b = 1$, $K(s, t) = 2st - 4s^2$;
г) $a = -1$, $b = 1$, $K(s, t) = st + s^2t^2$.

21.3. В пространстве $C[0, \pi]$ найти характеристические числа и собственные функции для уравнения

$$x(s) - \lambda \int_0^\pi K(s, t)\, x(t)\, dt = 0,$$

если

$$K(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sin ns \sin nt.$$

21.4. В пространстве $C[a, b]$ найти решение интегрального уравнения

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt = f(s)$$

при всех значениях параметров α, β, γ, входящих в свободный член этого уравнения, если:

а) $a = -1$, $b = 1$, $K(s, t) = st$, $f(s) = \alpha s^2 + \beta s + \gamma$;
б) $a = 0$, $b = \pi$, $K(s, t) = \cos(s + t)$, $f(s) = \alpha \sin s + \beta$;
в) $a = -1$, $b = 1$, $K(s, t) = s^2 - 2st$, $f(s) = \alpha s^3 - \beta s$;
г) $a = -1$, $b = 1$, $K(s, t) = 3s + st - 5s^2t^2$, $f(s) = \alpha s$.

21.5. Доказать, что уравнение

$$x(s) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin(s - 2t)\, x(t)\, dt = f(s)$$

разрешимо при любом $\lambda \in \mathbf{C}$ и любой $f(s) \in L_2[0, 2\pi]$ и найти его решение.

21.6. В пространстве $C[a, b]$ найти характеристические числа λ_n и собственные функции φ_n для уравнения

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt = 0,$$

если:

а) $a = 0,\ b = 1,$

$$K(s, t) = \begin{cases} s & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ t & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1; \end{cases}$$

б) $a = 0,\ b = \pi/2,$

$$K(s, t) = \begin{cases} \sin s \cos t & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \pi/2, \\ \sin t \cos s & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \pi/2; \end{cases}$$

в) $a = 0,\ b = \pi,$

$$K(s, t) = \begin{cases} \sin s \cos t & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \pi, \\ \sin t \cos s & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \pi; \end{cases}$$

г) $a = 0,\ b = 1,$

$$K(s, t) = \begin{cases} t(s+1) & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ s(t+1) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1; \end{cases}$$

д) $a = 0,\ b = 1, \qquad K(s, t) = e^{-|s-t|};$

е) $a = 0,\ b = 1,$

$$K(s, t) = \begin{cases} (s+1)(t-2) & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ (t+1)(s-2) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

21.7. Пусть λ не является характеристическим числом для симметрического ядра $K(s, t)$. Доказать, что решение уравнения

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt = f(s)$$

в пространстве $L_2[a, b]$ можно представить в виде ряда Фурье по собственным функциям ядра

$$x(s) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(s) + f(s),$$

а если ядро $K(s, t)$ непрерывно, то этот ряд сходится равномерно на $[a, b]$.

21.8. Пусть $\lambda = \lambda_j = \lambda_{j+1} = \ldots = \lambda_{j+n-1}$ является характеристическим числом кратности n для симметрического ядра $K(s, t)$. Доказать, что решение уравнения

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt = f(s)$$

в пространстве $L_2[a, b]$ существует тогда и только тогда, когда $f(s)$ ортогональна всем собственным функциям $\varphi_{j+k}(s)$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$, соответствующим характеристическому числу λ. Если это условие выполняется, то решение данного уравнения имеет вид

$$x(s) = \lambda \sum_k \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(s) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \varphi_{j+k}(s),$$

где C_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ — произвольные постоянные, а в первой сумме пропущены слагаемые с номерами j, $j+1, \ldots, j+n-1$.

21.9. Найти решение уравнения

$$x(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt = f(s),$$

в пространстве $L_2[a, b]$, если:

а) $f(s) = s,$

$$K(s, t) = \begin{cases} s(t-1) & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ t(s-1) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1; \end{cases}$$

б) $f(s) = \cos \pi s,$

$$K(s, t) = \begin{cases} (s+1)t & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ (t+1)s & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

21.10. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n(t)\, y = F(t) \qquad (*)$$

с непрерывными коэффициентами $a_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и начальными условиями $y(0) = c_0$, $y'(0) = c_1, \ldots, y^{n-1}(0) = c_{n-1}$.

а) Доказать, что для любой непрерывной функции $\varphi(x)$ справедлива формула

$$\underbrace{\int_0^x dx \int_0^x dx \ldots \int_0^x}_{k} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x (x - \xi)^{k-1} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

б) Полагая $d^n y/dt^n = x(t)$ и используя результат предыдущего пункта, доказать, что уравнение (*) с учетом начальных условий равносильно уравнению Вольтерра 2-го рода

$$x(s) - \int_0^s K(s, t)\, x(t)\, dt = f(s),$$

где

$$K(s, t) = -\sum_{m=1}^{n} a_m(s) \frac{(s-t)^{m-1}}{(m-1)!},$$

$$f(s) = F(s) - c_{n-1} a_1(s) - (c_{n-1} s + c_{n-2})\, a_2(s) - \ldots$$
$$\ldots - \left(c_{n-1} \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + c_1 s + c_0\right) a_n(s).$$

21.11. Используя преобразование Лапласа, решить уравнение

$$x(s) - \int_0^s K(s-t)\, x(t)\, dt = f(s),$$

если:

а) $K(z) = e^{-2z}$, $f(s) = 1 + s$;
б) $K(z) = \sin z$, $f(s) = s$;
в) $K(z) = 2\cos z$, $f(s) = e^s$;
г) $K(z) = 1$, $f(s) = \cos s$.

21.12. Для интегрального уравнения

$$x(s) - \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt = f(s),$$

где ядро $K(s, t)$ непрерывно при $a \leqslant s,\ t \leqslant b$, $f(s) \in C[a, b]$, рассмотрим разбиение отрезка $[a, b]$:

$$s_1 = a,\ s_2 = a + h,\ \ldots,\ s_{2n+1} = a + 2nh,\ h = \frac{b-a}{2n}.$$

Тогда равенства

$$x(s_k) - \int_a^b K(s_k, t)\, x(t)\, dt = f(s_k),\ k = 1, 2, \ldots, 2n+1,$$

являются точными. С помощью формулы Симпсона заменим их на приближенные

$$x(s_k) - \sum_{m=1}^{2n+1} A_m K(s_k, s_m)\, x(s_m) = f(s_k),\ k = 1, 2, \ldots, 2n+1,$$

где $A_1 = A_{2n+1} = h/3$, $A_2 = A_4 = \ldots = A_{2n} = 4h/3$, $A_3 = A_5 = \ldots = A_{2n-1} = 2h/3$. Полученная система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $x(s_m)$ $(m = 1, 2, \ldots, 2n+1)$ может быть решена численно; в итоге получаем приближенные значения решения исходного уравнения в точках разбиения.

Составить и реализовать на ЭВМ алгоритм численного решения данного интегрального уравнения при $n = 5$, $n = 10$, $n = 15$ и сравнить полученные приближения, если:

а) $a = 0$, $b = 1$, $K(s, t) = s \cos st$, $f(s) = 1 - \sin s$;
б) $a = 0$, $b = 1$, $K(s, t) = s(e^{st} - 1)$, $f(s) = e^s - s - 2$;
в) $a = 0$, $b = \pi$, $f(s) = \sin s$,

$$K(s, t) = \begin{cases} \sin\left(s + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \pi; \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(s - \frac{\pi}{4}\right) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \pi; \end{cases}$$

г) $a = -1$, $b = 1$, $K(s, t) = 1{,}125s^3 + 1{,}125t^3 - 3{,}375s^2t^2 - 1{,}5st - 1{,}875$, $f(s) = s$;
д) $a = -1$, $b = 1$, $K(s, t) = -1{,}125s^3 - 1{,}125t^3 + 3{,}375s^2t^2 + 1{,}5st + 1{,}875$, $f(s) = s$.

21.13. Пусть ядро и правая часть уравнения (6) удовлетворяют следующим условиям:

1) функции $K(s, t)$, $K'_s(s, t)$ непрерывны в области $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$;
2) $K(s, s) \neq 0$ для всех s;
3) $f(s) \in C^1[a, b]$, $f(0) = 0$.

Доказать, что уравнение (6) равносильно уравнению Вольтерра 2-го рода

$$x(s) + \int_a^s \frac{K'_s(s, t)}{K(s, s)}\, x(t)\, dt = \frac{f'(s)}{K(s, s)}$$

и, следовательно, имеет в интервале $[a, b]$ единственное непрерывное решение.

21.14. Существует ли в классе непрерывных функций решение уравнения

$$\int_0^s (t - s)\, x(t)\, dt = f(s),$$

если:

а) $f(s) = \cos s$;
б) $f(s) = \sin s$;
в) $f(s) = \sin^2 s$.

21.15. Используя преобразование Лапласа, в пространстве $C[a, b]$ найти решение уравнения

$$\int_0^s K(s-t)\,x(t)\,dt = f(s),$$

если:

а) $K(z) = \cos z, \quad f(s) = \sin s;$

б) $K(z) = \cos z, \quad f(s) = s \sin s;$

в) $K(z) = \cos z, \quad f(s) = s + s^2;$

г) $K(z) = e^z, \quad f(s) = s^2;$

д) $K(z) = \sin z, \quad f(s) = 1 - \cos s.$

21.16. Рассмотрим оператор A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$,

$$Ax(s) = \int_0^1 e^{-|s-t|}x(t)\,dt$$

и уравнение

$$Ax = f. \qquad (**)$$

1) Доказать, что $A^* = A$ и

$$A^*Ax(s) = \int_0^1 K(s, t)\,x(t)\,dt,$$

где

$$K(s, t) = \begin{cases} -\dfrac{e^{-s-t} + e^{-2+s+t}}{2} + (t - s + 1)\,e^{s-t} \\ \qquad\qquad \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ -\dfrac{e^{-s-t} + e^{-2+s+t}}{2} + (s - t + 1)e^{t-s} \\ \qquad\qquad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

2) Найти $A^*f = Af$ и при $\alpha = 1$; 0,1; 0,01; 0,001 и $n = 10$ методом, описанным в задаче 21.12, численно решить уравнение (7), если:

а) $f(s) = 2s + e^{-s} - 2e^{s-1}$;

б) $f(s) = e^s(1 - s) + \operatorname{sh} s$;

в) $f(s) = 2 - e^{-s} - e^{s-1}$;

г) $f(s) = \frac{1}{2}\left[(2s + 1)\,e^{-s} - e^{s-2}\right]$.

3) Доказать, что если $f(s) \in C^2[0, 1]$ и уравнение $(**)$ имеет решение $x(t)$, то $x(t)$ удовлетворяет уравнению Фредгольма 2-го рода

$$x(s) - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-|s-t|}x(t)\,dt = -\frac{1}{2}f''(s).$$

4) Используя результаты задачи 21.6 д) и утверждение пункта 3), доказать, что уравнение $(**)$ не имеет решения при $f(s) = as + b$, $ab \neq 0$.

5) При $f(s) = s$, $\alpha = 1$; 0,1; 0,01; 0,001 и $n = 10$ методом, описанным в задаче 21.12, численно решить уравнение (7) и объяснить полученные результаты.

§ 22. Неограниченные операторы в гильбертовом пространстве

В комплексном гильбертовом пространстве H рассмотрим линейный оператор A с плотной в H областью определения $D(A)$. Пусть A^* — сопряженный к A оператор.

Оператор A называется *симметрическим*, если $D(A^*) \supset D(A)$ и на $D(A)$ выполняется равенство $A^*x = Ax$. Оператор A называется *самосопряженным*, если $D(A^*) = D(A)$ и на $D(A)$ выполняется равенство $A^*x = Ax$. Таким образом, как для симметрического, так и для самосопряженного оператора при любых $x, y \in D(A)$ справедливо равенство $(Ax, y) = (x, Ay)$.

Симметрический оператор A называется *неотрицательным*, если $(Ax, x) \geqslant 0$ для любого $x \in D(A)$.

Оператор U: $L_2[a, b] \to L_2[a, b]$,

$$Ux(t) = -\frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{dx}{dt}\right] + q(t)\,x(t)$$

с областью определения $D(U)$, состоящей из дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\alpha_1 x(a) - \alpha_2 x'(a) = 0, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0,$$

$$\beta_1 x(b) - \beta_2 x'(b) = 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0,$$

называется *оператором Штурма — Лиувилля*. При этом предполагается, что $p(t) \in C^1[a, b]$ и не обращается в нуль на $[a, b]$, $q(t) \in [a, b]$.

Теорема 22.1. *Оператор U — симметрический в пространстве $L_2[a, b]$.*

Функцией Грина для оператора U называется функция

$$G(s, t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{W_0}u(s)\,v(t) & \text{при} \quad a \leqslant s \leqslant t \leqslant b, \\ -\dfrac{1}{W_0}u(t)\,v(s) & \text{при} \quad a \leqslant t \leqslant s \leqslant b, \end{cases}$$

где $u(t)$ и $v(t)$ — ненулевые решения уравнения $Ux=0$, удовлетворяющие соответственно первому и второму граничному условию, $W_0=p(t)W(t)-p(a)W(a)$,

$$W(t)=\begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix}.$$

Теорема 22.2. *Для любой $f\in C[a, b]$ уравнение $Ux=f$ имеет единственное решение $x(s)\in D(U)$, определяемое равенством*

$$x(s)=\int_a^b G(s, t)f(t)\,dt.$$

22.1. В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим оператор $Ax(t)=-d^2x/dt^2$ с областью определения $D(A)$, состоящей из функций $x(t)$ таких, что $x(t)\in C^2[0, 1]$ и удовлетворяет граничным условиям $x(0)=x(1)=0$. Доказать, что A — симметрический оператор.

22.2. Доказать, что оператор задачи 22.1 является неотрицательным.

22.3. В пространстве $L_2[a, b]$ рассмотрим оператор $Ax(t)=i\frac{dx}{dt}$ с областью определения $D(A)$, состоящей из абсолютно непрерывных функций $x(t)$ таких, что $x'(t)\in L_2[a, b]$, и удовлетворяющих граничным условиям $x(a)=x(b)=0$. Доказать, что оператор A симметрический, но не самосопряженный.

22.4. В пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ рассмотрим оператор $Ax(t)=tx(t)$ с областью определения, состоящей из функций $x(t)$, для которых $tx(t)\in L_2(-\infty, \infty)$. Доказать, что A — самосопряженный оператор.

22.5. Доказать, что для любого плотно определенного в H оператора A выполняется соотношение $(R(A))^{\perp}=N(A^*)$. Верно ли в этом случае соотношение $(N(A))^{\perp}=\overline{R(A^*)}$?

22.6. Доказать, что симметрический оператор A, для которого $R(A)=H$, есть оператор самосопряженный.

22.7. Пусть A, B — симметрические операторы с общей областью определения D, $\alpha, \beta\in\mathbf{R}$. Доказать, что $\alpha A+\beta B$ — симметрический оператор.

22.8. Пусть A — симметрический оператор с областью значений $R(A)$, плотной в H. Доказать, что оператор A^{-1} существует и также является симметрическим.

22.9. Пусть $A\in\mathscr{L}(H)$ — ограниченный самосопряженный оператор и оператор A^{-1} (ограниченный или неограниченный) существует. Доказать, что A^{-1} — самосопряженный оператор.

22.10. Доказать, что собственные значения симметрического оператора вещественны, а собственные векторы, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.

22.11. Пусть A — симметрический оператор. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

а) A — самосопряжен;

б) A — замкнут и $N(A^*\pm iI)=0$;

в) $R(A\pm iI)=H$.

22.12. Рассмотрим уравнение

$$p_0(t)x''+p_1(t)x'+p_2(t)x=\varphi(t),$$

где $p_0(t)\in C^1[a, b]$ и не обращается в нуль на $[a, b]$, а функции $p_1(t)$, $p_2(t)$, $\varphi(t)$ непрерывны на $[a, b]$. Доказать, что при умножении обеих частей этого уравнения на

$$h(t)=-\exp\left\{\int\frac{p_1(t)-p_0'(t)}{p_0(t)}\,dt\right\}$$

оно сводится к виду $Ux=f$.

22.13. Доказать, что собственное подпространство оператора Штурма — Лиувилля, соответствующее данному собственному значению, одномерно.

22.14. Найти функцию Грина для оператора U при данных граничных условиях:

а) $Ux=-x''$, $x(0)=x(1)=0$;

б) $Ux=-x''$, $x'(0)=x(0)$, $x'(1)+x(1)=0$;

в) $Ux=-x''-x$, $x(0)=x(\pi)=0$;

г) $Ux=-x''+x$, $x(0)=x(1)=0$;

д) $Ux=-x''+x$, $x(0)=x'(0)$, $x(1)+\gamma x'(1)=0$, $\gamma\in\mathbf{R}$.

22.15. Свести к интегральному уравнению в пространстве $L_2[0, 1]$ нахождение решения данного дифференциального уравнения при данных граничных условиях:

а) $-(1+t^2)x''-2tx'+\lambda x=0$, $x(0)=x'(1)=0$;

б) $-x''+\lambda x=f(t)$, $x(0)=2x'(0)$, $x(1)=0$;

в) $-x''+\lambda x=f(t)$, $x(0)+x'(0)=0$, $x(1)=0$.

22.16. Пусть всюду на $[a, b]$ $p(t)>0$, $q(t)\geqslant 0$, $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2\geqslant 0$, $\beta_1\geqslant 0$, $\beta_2\geqslant 0$. Доказать, что для оператора Штурма — Лиувилля существует функция Грина, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

а) $q(t)\not\equiv 0$; б) $\alpha_1\neq 0$; в) $\beta_1\neq 0$.

22.17. Доказать, что в предположениях предыдущей задачи:

а) оператор Штурма — Лиувилля является неотрицательным;

б) множество собственных значений оператора Штурма — Лиувилля непусто, не более чем счетно и не имеет конечных предельных точек;

в) система собственных функций оператора Штурма — Лиувилля плотна в пространстве $L_2[a, b]$.

22.18. Доказать, что в предположениях задачи 22.16:

а) квадратичная форма (Ux, x) достигает своего минимума на множестве $D = D(U) \cap \sigma_1(0)$;

б) $\min\limits_{x \in D} (Ux, x) = (Ux_0, x_0) = \lambda$, где λ — наименьшее собственное значение U, а x_0 — нормированная собственная функция с собственным значением λ.

22.19. Используя предыдущую задачу, доказать, что наименьшее значение функционала

$$\varphi(x) = \int_0^1 [x'(t)]^2\, dt,$$

рассматриваемого на множестве дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям

$$x(0) = x(1) = 0, \quad \int_0^1 x^2(t)\, dt = 1,$$

равно π^2 и найти функцию $x_0(t)$, на которой оно реализуется.

Глава 6

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 23. Дифференцирование нелинейных операторов

Пусть X, Y — банаховы пространства, $F\colon X \to Y$ — нелинейный оператор с областью определения $D(F) \subset X$. Он называется:

непрерывным в точке $x_0 \in D(F)$, если из $x_n \in D(F)$, $\|x_n - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$ следует, что $\|F(x_n) - F(x_0)\| \to 0$ при $n \to \infty$;

непрерывным на множестве $M \subset D(F)$, если он непрерывен в каждой точке $x_0 \in D(F)$;

вполне непрерывным, если он непрерывен на $D(F)$ и переводит каждое ограниченное множество, лежащее в $D(F)$, в компактное в пространстве Y множество;

ограниченным на множестве $M \subset D(F)$, если $\sup\limits_{x \in M} \|F(x)\| < \infty$.

Нелинейный оператор $F(x)$, определенный в окрестности S точки x_0 банахова пространства X, и со значениями в банаховом пространстве Y называется *дифференцируемым в точке* x_0 *в смысле Фреше*, если существует линейный оператор $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ такой, что для всех $x \in S$

$$F(x) - F(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x - x_0),$$

где $\|\omega(x - x_0)\| = o(\|x - x_0\|)$ при $x \to x_0$. При этом оператор A называется *производной Фреше* оператора F в точке x_0 и обозначается $F'(x_0)$, а выражение $F'(x_0)h = dF(x_0; h)$ называется *дифференциалом Фреше* оператора F в точке x_0 при приращении h.

Пусть $F_k(x_1, \ldots, x_k)$ — оператор, зависящий от k переменных $x_1, \ldots, x_k \in X$, со значениями в Y. Оператор $F_k(x_1, \ldots, x_k)$ называется *k-линейным*, если он линеен по каждому своему аргументу x_i при фиксированных остальных аргументах. k-линейный оператор $F_k(x_1, \ldots, x_k)$ называется *ограниченным*, если существует постоянная $m \in \mathbf{R}$, $m > 0$ такая, что

$$\|F_k(x_1, \ldots, x_k)\| \leqslant m\|x_1\| \ldots \|x_k\|.$$

Наименьшая из таких постоянных m называется *нормой* F_k и обозначается $\|F_k\|$. k-линейный оператор $F_k(x_1, \ldots, x_k)$ называется *симметричным*, если его значения не меняются при любой перестановке его аргументов. Пусть $F_k(x_1, \ldots, x_k)$ — k-линейный симметричный оператор. Оператор $F_k(x, \ldots, x)$ называется *k-степенным* оператором и обозначается $F_k x^k$.

Далее k-линейный оператор записывается в виде $F_k x_1, \ldots, x_k$.

Пусть оператор $F(x)$ дифференцируем в окрестности S, а дифференциал $dF(x;\ h)$ также дифференцируем в точке x_0:

$$F'(x_0 + g)h - F'(x_0)h = (Bg)h + \rho(g)h,$$

где $\|\rho(g)\| = o(\|g\|)$ при $g \to 0$. При этом оператор $B = F''(x_0) \in \mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$ называется *второй производной* оператора $F(x)$ в точке x_0. Из определения $F''(x_0)$ следует, что $F''(x_0)hg$ есть ограниченный билинейный симметричный оператор. Далее

$$d^2F(x_0;\ h) = d[dF(x;\ h);\ x_0,\ g]|_{g=h},$$

откуда $d^2F(x_0;\ h) = F''(x_0)h^2$ — квадратичный или 2-степенной оператор, получающийся из билинейного при $g = h$.

Если $d^nF(x;\ h) = F^{(n)}(x)h^n$ уже определен, то в предположении его дифференцируемости в точке x_0 полагают

$$d^{n+1}F(x_0;\ h) = d[d^nF(x;\ h);\ x_0,\ g]|_{g=h},$$

откуда $d^{n+1}F(x_0;\ h) = F^{(n+1)}(x_0)h^{n+1}$. Оператор $F^{(n)}(x_0)h_1, \ldots, h_n$ является n-линейным симметричным оператором, а $d^nF(x_0;\ h)$ — n-степенным оператором.

Пусть $F_k x^k$ — k-степенные операторы из X в Y $(k \in \mathbf{N})$, а $F_0 \in Y$. Образуем формальный степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k \qquad (F_0 x^0 = F_0).$$

Предположим, что числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|F_k\| \|x\|^k,$$

мажорирующий рассматриваемый степенной, имеет *радиус сходимости* $\rho_u > 0$. Тогда в любом шаре $S_\rho(0)$, где $\rho \in (0, \rho_u)$, исходный степенной ряд сходится абсолютно и равномерно. Пусть $\rho_u > 0$, а $F(x)$ — сумма исходного

степенного ряда, т. е.

$$\sum_{k=0}^{n} F_k x^k \to F(x)$$

при $n \to \infty$. Тогда оператор $F(x)$ называется *аналитическим оператором* в точке $x = 0$.

Если дан бесконечно дифференцируемый оператор $F(x)$, то степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

называется *рядом Тейлора* $F(x)$ в точке $x = 0$. Поскольку разложение оператора $F(x)$ в степенной ряд единственно, то всякий степенной ряд аналитического оператора является его рядом Тейлора.

23.1. Доказать, что оператор A: $l_2 \to l_2$, $Ax = (x_1, x_2^2, x_3^3, \ldots)$ для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ определен для всех x из l_2, непрерывен в каждой точке пространства l_2, но не ограничен ни на каком шаре $\bar{S}_r(0)$ при $r > 1$.

23.2. Пусть X — бесконечномерное банахово пространство, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $0 < \varepsilon < 1$, $x_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$ — такая последовательность, что $\|x_n\| = 1$ $(n \in \mathbf{N})$ и $\|x_k - x_n\| > \varepsilon$ при $k \neq n$ (существование x_n вытекает из теоремы 15.4). Рассмотрим функционал f, определенный следующими условиями:

1) $\langle x_k, f\rangle = k$ $(k \in \mathbf{N})$;

2) $\langle x, f\rangle = k - \frac{2k}{\varepsilon}\|x - x_k\|$ в шаре $\bar{S}_{\varepsilon/2}(x_k)$ $(k \in \mathbf{N})$;

3) вне шаров $\bar{S}_{\varepsilon/2}(x_k)$ $\langle x, f\rangle = 0$.

Доказать, что f непрерывен на X, но не ограничен на шаре $\|x\| \leqslant 1 + \varepsilon/2$.

23.3. Пусть X, Y — конечномерные банаховы пространства. Доказать, что любой непрерывный оператор F: $X \to Y$ является вполне непрерывным.

23.4. Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, F: $X \to Y$ — ограниченный на $D(F)$ непрерывный оператор, A: $Y \to Z$ — линейный вполне непрерывный оператор. Доказать, что оператор AF вполне непрерывен.

23.5. Доказать, что всякий вполне непрерывный оператор F: $X \to Y$ является ограниченным на любом ограниченном множестве $M \subset D(F)$.

23.6. Пусть функция $K(t, s, x)$ непрерывна по совокупности переменных в области $0 \leqslant t,\ s \leqslant 1,\ |x| \leqslant r$.

Рассмотрим оператор

$$F(x) = \int_0^1 K(t, s, x(s))\, ds,$$

определенный на шаре $\bar{S}_r(0)$ пространства $C[0, 1]$. Доказать, что область значений $R(F)$ лежит в пространстве $C[0, 1]$ и что оператор F вполне непрерывен на шаре $\bar{S}_r(0)$.

23.7. Пусть функция $f(t, x)$ определена при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $-\infty < x < \infty$ и непрерывна по совокупности переменных. Рассмотрим оператор

$$F(x) = f(t, x(t)),$$

определенный на пространстве $C[0, 1]$. Доказать, что область значений $R(F)$ лежит в пространстве $C[0, 1]$, что оператор непрерывен и ограничен на каждом шаре. Является ли оператор F вполне непрерывным?

23.8. Пусть оператор F: $X \to Y$ дифференцируем в точке $x_0 \in X$. Доказать, что F непрерывен в точке x_0.

23.9. Пусть оператор F: $X \to Y$ постоянен на открытом множестве $D \subset X$. Доказать, что $F'(x) = 0$ на D.

23.10. Пусть $F(x) = Ax$, где $A \in \mathscr{L}(X, Y)$. Доказать, что $F'(x) = A$.

23.11. Пусть F: $X \to Y$ и G: $X \to Y$ — операторы, дифференцируемые в точке x_0. Доказать, что оператор $\alpha F + \beta G$, где α и β — скаляры, также дифференцируем в точке x_0 и $(\alpha F + \beta G)'(x_0) = \alpha F'(x_0) + \beta G'(x_0)$.

23.12. Пусть оператор $y = F(x)$, F: $X \to Y$ дифференцируем в точке x_0, а оператор $x = G(z)$, G: $Z \to X$ дифференцируем в точке z_0, причем $G(z_0) = x_0$. Доказать, что в окрестности точки z_0 определена суперпозиция

$$y = (F * G)(z) = F(G(z)),$$

оператор $F * G$ дифференцируем в точке z_0 и

$$(F * G)'(z_0) = F'(x_0)G'(z_0).$$

23.13. Найти производные Фреше функционалов $F(x) = (x, x)$ и $G(x) = \|x\|$ в вещественном гильбертовом пространстве.

23.14. Пусть функция $y = f(x)$, f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ определена в окрестности точки x_0. Доказать, что ее обычная производная $f'(x_0)$ совпадает с ее производной Фреше в точке x_0.

23.15. Пусть отображение F: $E^2 \to E^2$, задаваемое в декартовых прямоугольных координатах формулами

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y),$$

определено в окрестности точки (x_0, y_0). Доказать, что если F дифференцируемо в точке (x_0, y_0), то его производная Фреше задается матрицей Якоби

$$F'(x_0, y_0) = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \end{Vmatrix}.$$

23.16. Пусть отображение комплексной плоскости в себя F: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ задается формулой $w = F(z)$, где $z = x + iy$, $w = u + iv$. Доказать, что если F дифференцируемо в точке z_0 в смысле Фреше, то в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ выполняются условия Коши — Римана

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

23.17. Пусть отображение F: $E^k \to E^n$, задаваемое в декартовых прямоугольных координатах формулами

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_k), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

дифференцируемо по Фреше в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_k^0)$. Доказать, что $F'(x^0)$ задается матрицей Якоби

$$F'(x^0) = \left\| \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_j} \right\|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

23.18. Вычислить производную Фреше следующих отображений:

а) F: $E^3 \to \mathbf{R}$, $y = x_1 + x_2^2 + x_3^3$ в точке $(1, 1, 1)$;

б) F: $\mathbf{R} \to E^3$, $y_1 = \sin \pi t$, $y_2 = \cos \pi t$, $y_3 = t$ в точке $t = 1$;

в) F: $E^2 \to E^3$, $y_1 = e^{x_1} \sin \pi x_2$, $y_2 = e^{x_1} \cos \pi x_2$, $y_3 = e^{x_1}$ в точке $(1, 1)$;

г) F: $E^3 \to E^2$, $y_1 = \sqrt{4 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2}$, $\quad y_2 = x_1 x_2 x_3$ в точке $(1, 1, 1)$.

23.19. Пусть отображение F: $E^k \to E^n$ дифференцируемо в точке x_0, а $x_0 = G(t_0)$, где G: $E^m \to E^k$ дифференцируемо в точке t_0. Найти $(F * G)'(t_0)$.

23.20. Пусть функции $f(x, u)$ и $f_u(x, u)$ непрерывны по совокупности переменных при $x \in [a, b]$, $-\infty < u < \infty$. Рассмотрим оператор F: $C[a, b] \to C[a, b]$, $F(u) = f(x, u(x))$. Доказать, что производная F в точке $u_0(x) \in C[a, b]$ и ее дифференциал в этой точке при приращении $h(x) \in C[a, b]$ соответственно равны $F'(u_0) = f_u(x, u_0(x))$; $dF(u_0; h) = f_u(x, u_0(x))h(x)$.

23.21. Найти производные следующих операторов в точке u_0:

а) $F(u) = \sin u(x)$ в пространстве $C[0, \pi]$, $u_0(x) = \cos x$;

б) $F(u) = \cos u(x)$ в пространстве $C[0, \pi]$, $u_0(x) = \sin x$;

в) $F(u) = u(x) - e^{xu(x)}$ в пространстве $C[0, 1]$, $u_0(x) \equiv 0$;

г) $F(u) = x^2 u(x) + \operatorname{sh} u(x)$ в пространстве $C[0, 1]$, $u_0(x) \equiv 0$.

В каких случаях оператор $F'(u_0)$ непрерывно обратим?

23.22. Пусть функция $f(x, s, u)$ непрерывна по совокупности переменных при $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < u < \infty$ вместе с частной производной $f_u(x, s, u)$. Доказать, что интегральный оператор F: $C[a, b] \to C[a, b]$

$$F(u) = u(x) - \int_a^b f(x, s, u(s))\, ds$$

дифференцируем в любой точке $u_0(x) \in C[a, b]$ и

$$F'(u_0)\, h = h(x) - \int_a^b f_u(x, s, u_0(s))\, h(s)\, ds.$$

23.23. Найти производную Фреше по u в точке $u_0 \equiv 0$ интегрального оператора F: $C[0, \pi] \to C[0, \pi]$ с параметром λ

$$F(u) = u(x) - \lambda \int_0^\pi \cos(x + u(s))\, ds.$$

Найти все решения уравнения $F'(0)h = \cos x$.

23.24. Пусть оператор F: $X \to Y$ непрерывно дифференцируем в каждой точке отрезка $[x_1, x_2] \subset X$. Доказать формулу конечных приращений

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_0^1 F'(x_1 + \theta(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)\, d\theta.$$

23.25. Доказать, что если оператор F: $X \to Y$ непрерывно дифференцируем на отрезке $[x_1, x_2] \subset X$, то он удовлетворяет условию Липшица $\|F(x_1) - F(x_2)\| \leqslant l\|x_1 - x_2\|$, где $l = \sup\limits_{x \in [x_1, x_2]} \|F'(x)\|$.

23.26. Пусть оператор F: $X \to Y$ непрерывно дифференцируем на отрезке $[x_1, x_2] \subset X$ и $F'(x) = 0$ на $[x_1, x_2]$. Доказать, что $F(x)$ постоянен на $[x_1, x_2]$.

23.27. Пусть оператор F: $X \to Y$ непрерывно дифференцируем на выпуклом множестве $\Omega \subset X$ и $F'(x) = 0$ на Ω. Доказать, что $F(x)$ постоянен на Ω.

23.28. Пусть оператор F: $X \to Y$ дифференцируем на выпуклом множестве $\Omega \subset X$, причем для любых $x_1, x_2 \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\|F'(x_1) - F'(x_2)\| \leqslant l\|x_1 - x_2\|,$$

т. е. F' удовлетворяет на Ω условию Липшица с постоянной l. Доказать, что для любых $x_1, x_2 \in \Omega$ справедливо неравенство

$$\|F(x_1) - F(x_2) - F'(x_2)(x_1 - x_2)\| \leqslant \frac{1}{2} l \|x_1 - x_2\|^2.$$

23.29. Пусть оператор F: $X \to Y$ дифференцируем на выпуклом множестве $\Omega \subset X$ и производная $F'(x)$ непрерывна в точке x_0. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что

$$\|F(x) - F(y) - F'(x_0)(x - y)\| \leqslant \varepsilon \|x - y\|$$

для всех $x, y \in \Omega \cap S_\delta(x_0)$.

23.30. Пусть $f_n(x)$ $(n \in \mathbf{N})$ — последовательность функций, дифференцируемых на $(-\infty, \infty)$. Пусть, далее, функции $f_n(x)$ и их первые производные равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на каждом отрезке $[a, b]$. На пространстве m ограниченных последовательностей определим оператор F:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n), \ldots).$$

Доказать, что область значений F лежит в пространстве m, что оператор F дифференцируем в смысле Фреше, и найти оператор F'.

23.31. Найти производную Фреше функционала

$$\varphi(x) = \int_a^b \Phi(t, x(t), x'(t))\, dt,$$

определенного на банаховом пространстве $\mathring{C}^1[a, b]$ непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $x(t)$, обращающихся в нуль на концах $[a, b]$. Функция $\Phi(x, y, z)$ предполагается дважды непрерывно дифференцируемой.

23.32. Пусть $F_k x^k$ — k-степенной ограниченный оператор. Доказать формулу бинома Ньютона

$$F_k(x + h)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j F_k x^{k-j} h^j.$$

23.33. С помощью формулы бинома Ньютона из предыдущей задачи доказать, что всякий k-степенной ограниченный оператор $F_k x^k$ дифференцируем в смысле Фреше в любой точке x и $(F_k x^k)' = kF_k x^{k-1}$,

$$d(F_k x^k;\ h) = kF_k x^{k-1} h.$$

23.34. Доказать, что всякий k-линейный ограниченный оператор непрерывен в любой точке $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

23.35. В пространстве c^m m-мерных столбцов

$$x_1 = \{x_j^{(1)}\}_{j=1}^m, \quad x_2 = \{x_j^{(2)}\}_{j=1}^m, \quad y = \{y_j\}_{j=1}^m$$

рассмотрим оператор $y = F(x_1, x_2)$, определяемый формулами

$$y_k = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^{(k)} x_i^{(1)} x_j^{(2)}, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad a_{ij}^{(k)} \in \mathbf{R}.$$

Доказать, что $F(x_1, x_2)$ является билинейным ограниченным оператором. Найти оценку его нормы. Как выглядит соответствующий квадратичный оператор? Когда оператор $F(x_1, x_2)$ симметрический?

23.36. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим квадратичный интегральный оператор

$$(F_2 x^2)(t) = x(t) \int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

где функция $K(t, s)$ непрерывна в квадрате $0 \leqslant t, s \leqslant 1$.

а) Найти соответствующий ему билинейный симметрический оператор.

б) Вычислить производные $F_2 x^2$ любого порядка.

23.37. Пусть $\overset{\circ}{C}{}^2[0, l]$ — банахово пространство дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, l]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих граничным условиям $x(0) = x(l) = 0$. Рассмотрим оператор $F\colon \overset{\circ}{C}{}^2[0, l] \to C[0, l]$, $F(x) = x'' + f(t, x)$, где функция $f(t, x)$ непрерывна вместе с частной производной $f_x(t, x)$ по совокупности переменных в прямоугольнике $0 < t < l$, $|x| < r$. Пусть $x_0(t) \in \overset{\circ}{C}{}^2[0, l]$ и $\|x_0\| < r$. Доказать, что

$$F'(x_0)z = z'' + f_x(t, x_0(t))z.$$

23.38. Рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор

$$F(x) = \frac{d^2x}{dt^2} + \sin x(t),$$

действующий из пространства $C^2[0, 1]$ в пространство $C[0, 1]$.

а) Вычислить $d^k F(x_0;\ h)$ $(k \in \mathbf{N})$, где $x_0(t) = t$.

б) Разложить $F(x)$ в ряд Тейлора в точке $x_0(t) = t$.

23.39. Пусть $\sum\limits_{k=0}^{\infty} F_k x^k$ — степенной ряд из X в Y. Доказать, что область его сходимости Ω является C-звездой вокруг точки 0, т. е. как только $x \in \Omega$, то $\lambda x \in \Omega$ при $|\lambda| \leqslant 1$.

23.40. Доказать, что радиус сходимости ρ_u степенного ряда может быть определен по формуле Коши — Адамара

$$\rho_u = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|F_n\|}}.$$

23.41. Пусть $\rho_u > 0$. Доказать, что при любом $\rho \in (0, \rho_u)$ степенной ряд сходится в шаре $S_\rho(0)$ абсолютно и равномерно.

23.42. Пусть $X = E^2$, $Y = \mathbf{R}$. Для степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (x_1 x_2)^k$ найти область сходимости Ω и радиус сходимости ρ_u.

23.43. Пусть $\rho_u > 0$. Доказать, что разложение $F(x)$ в степенной ряд единственно.

23.44. Пусть ядро $K(t, s)$ непрерывно в квадрате $a \leqslant t, s \leqslant b$. Рассмотрим действующий в пространстве $C[a, b]$ нелинейный интегральный оператор

$$F(x) = x(t) + \int_a^b K(t, s)\, e^{x(s)} ds.$$

Доказать, что $F(x)$ разлагается в ряд Тейлора с $\rho_u = +\infty$, и выписать его разложение.

23.45. В пространстве $C[0, T]$ рассмотрим оператор

$$F(x) = \frac{x(t)}{1 - tx(t)}.$$

Доказать, что $F(x)$ определен на шаре $\|x\| < T^{-1}$, аналитичен в точке $x_0 = 0$ и $\rho_u = T^{-1}$.

23.46. В пространстве C_α (см. задачу 7.31) рассмотрим оператор

$$F(x) = \frac{x(t)}{1 - tx(t)}.$$

Доказать, что $F(x)$ определен в шаре $\|x\|_\alpha < e\alpha$, аналитичен в точке $x_0 = 0$ и $\rho_u = e\alpha$.

§ 24. Принцип сжимающих отображений, итерационный процесс Ньютона, принцип неподвижной точки Шаудера

Нелинейный оператор $\Phi(x)$, отображающий лежащее в банаховом пространстве X множество Q в себя, называется *сжимающим*, если существует число $q \in (0, 1)$ такое, что для любых $x, y \in Q$ выполняется неравенство

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leqslant q\|x - y\|.$$

Число q называется *коэффициентом сжатия*. Точка x^* называется *неподвижной точкой* оператора $\Phi(x)$, $\Phi\colon X \to X$, если $\Phi(x^*) = x^*$.

Теорема 24.1. *Пусть $\Phi(x)$ является сжимающим оператором на замкнутом множестве Q. Тогда существует и единственна в Q неподвижная точка x^* оператора $\Phi(x)$. Последовательность итераций*

$$x_n = \Phi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $x_0 \in Q$ произвольно, лежит в Q и $x_n \to x^*$ при $n \to \infty$. Справедлива оценка скорости сходимости

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{q^n}{1-q}\|\Phi(x_0) - x_0\|.$$

Следствие. *Пусть оператор $\Phi(x)$ отображает замкнутый шар $\bar{S}_r(a)$ в X, является сжатием на этом шаре с коэффициентом сжатия q, причем $\|\Phi(a) - a\| \leqslant (1-q)r$. Тогда Φ отображает $\bar{S}_r(a)$ в себя и на $Q = \bar{S}_r(a)$ справедливо утверждение теоремы 24.1.*

Теорема 24.2. *Пусть в шаре $S_r(x_0)$ выполняются следующие предположения:*

1) оператор $F\colon X \to Y$ дифференцируем и его производная удовлетворяет условию Липшица, т. е. для любых $x_1, x_2 \in S_r(x_0)$ выполняется неравенство $\|F'(x_1) - F'(x_2)\| \leqslant l\|x_1 - x_2\|$;

2) оператор $F'(x)$ непрерывно обратим и для любого $x \in S_r(x_0)$ выполняется неравенство $\|[F'(x)]^{-1}\| \leqslant m$;

3) точка x_0 такова, что $\|F(x_0)\| \leqslant \eta$ (l, m, η — постоянные). Тогда, если $q = \frac{1}{2}m^2 l\eta$, $r' = m\eta\sum_{k=0}^{\infty} q^{2^k-1} < r$, то уравнение $F(x) = 0$ имеет решение $x^* \in \bar{S}_{r'}(x_0)$, к которому сходится следующий итерационный процесс Ньютона:

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_{n-1})]^{-1}F(x_{n-1}), \quad n \in \mathbf{N},$$

начатый с x_0. Скорость сходимости x_n к x^* может быть оценена из неравенства

$$\|x_n - x^*\| \leqslant m\eta\frac{q^{2^n-1}}{1-q^{2^n}}.$$

Теорема 24.3. *Пусть выполняются предположения 1), 2), 3) теоремы 24.2. Если $2m^2 l\eta < 1$ и*

$$r' = \frac{1 - \sqrt{1 - 2m^2 l\eta}}{ml} < r,$$

то уравнение $F(x) = 0$ имеет в шаре $\bar{S}_{r'}(x_0)$ единственное решение x^*, к которому сходится начатый с x_0 модифицированный процесс Ньютона

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_0)]^{-1}F(x_{n-1}), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Справедлива оценка скорости сходимости

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{(1 - \sqrt{1 - 2m^2 l\eta})^n}{\sqrt{1 - 2m^2 l\eta}}\, m\eta.$$

Теорема 24.4. *Пусть оператор $\Phi(x)$ отображает замкнутое ограниченное выпуклое множество D банахова пространства X в себя. Тогда, если Φ вполне непрерывен на D, то он имеет на D неподвижную точку.*

Следствие. *Если непрерывный оператор Φ отображает замкнутое выпуклое множество D банахова пространства X в компактное множество $D_0 \subset D$, то он имеет на D неподвижную точку.*

24.1. Доказать, что оператор $\Phi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\Phi(t) = t^3$ является сжимающим на шаре $\bar{S}_r(0) = \{t \in \mathbf{R}\colon |t| \leqslant r\}$, где $r < 1/\sqrt{3}$, но не является сжимающим вблизи неподвижных точек $t = 1$ и $t = -1$.

24.2. Пусть функция $x = f(t)$ задана и дифференцируема на $[a, b]$ и отображает этот отрезок в себя, причем

$$\max_{[a,b]} |f'(t)| < 1.$$

Доказать, что уравнение $f(t) = t$ имеет на $[a, b]$ единственное решение.

24.3. Пусть функция $x = f(t)$ определена и дифференцируема на всей вещественной оси и для любого $t \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство:

а) $|f'(t)| \leqslant \lambda < 1$; б) $|f'(t)| \geqslant \lambda > 1$.

Доказать, что уравнение $f(t) = t$ имеет, и притом единственное, решение.

24.4. Рассмотрим уравнение $2te^t = 1$ ($t \in \mathbf{R}$).

а) Доказать, что это уравнение имеет единственное решение и что это решение лежит на интервале (0, 1).

б) Привести уравнение к виду, пригодному для составления итераций, и определить число итераций, необходимых для того, чтобы приближенное решение отличалось от точного не более чем на 0,01, если в качестве начального приближения принято $t_0 = 0$.

в) Составить и реализовать на ЭВМ программу для нахождения приближенного решения, выводя на печать результат каждой итерации.

г) Решить это же уравнение с помощью стандартной программы и сравнить результаты.

24.5. Доказать, что всякое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

24.6. Пусть задано уравнение $F(t) = 0$, где $y = F(t)$ — непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция. Рассмотрим равносильное уравнение $t - \lambda F(t) = t$, где $\lambda \in \mathbf{R}$. Всегда ли значение параметра λ можно выбрать так, чтобы оператор $t \to t - \lambda F(t)$ был сжимающим на $[a, b]$?

24.7. Рассмотрим уравнение $t^5 + t + 1 = 0$ $(t \in \mathbf{R})$.

а) Доказать, что это уравнение имеет единственный вещественный корень, и найти отрезок, на котором он лежит.

б) Привести уравнение к такому виду, чтобы его можно было решать итерационным методом.

в) Найти число итераций, необходимых для нахождения корня с погрешностью, не превышающей 0,01.

г) Составить и реализовать на ЭВМ программу для нахождения приближенного решения, выводя на печать результат каждой итерации.

д) Решить это же уравнение с помощью стандартной программы и сравнить результаты.

24.8. При движении планеты вокруг Солнца по эллиптической орбите ее положение в момент времени t, отсчитываемый от момента прохождения перигелия, определяется уравнением Кеплера

$$E - e \sin E = 2\pi \frac{t}{T},$$

где E — определяющая положение планеты эксцентрическая аномалия, e — эксцентриситет орбиты $(0 < e < 1)$, T — период обращения по орбите.

а) Доказать, что уравнение Кеплера имеет для любого t единственное решение, которое определяет функцию $E(t) \in C[0, T]$.

б) Принимая $e = 0{,}5$, $t \in [0, T]$, определить число итераций, необходимых для нахождения $E(t)$ с погрешностью, не превышающей 0,01, если в качестве нулевого приближения взято $E_0 = 0$.

в) Составить программу для ЭВМ нахождения приближенного решения и реализовать ее, выводя на печать результат каждой итерации. Построить график $E(t)$ на $[0, T]$ при $e = 0{,}5$, придавая t значения с шагом $T/12$.

г) Составить программу для ЭВМ, позволяющую определить зависимость $E(T/4)$ от e, учитывая, что с изменением e меняется и число итераций, необходимых для достижения погрешности, не превышающей 0,01. С помощью этой программы построить график $E(T/4)$ при $e \in [0{,}25, 0{,}75]$ с шагом 0,05.

24.9. Рассмотрим уравнение $x(t) = t + \varepsilon x(t^k)$, где $0 < \varepsilon < 1$, $k > 1$.

а) Доказать, что это уравнение имеет единственное решение $x(t) \in C[0, 1]$.

б) Полагая $x_0 = 0$, $\varepsilon = 0{,}5$, определить число итераций, необходимых для нахождения $x(t)$ на $[0, 1]$ с погрешностью, не превышающей 0,01.

в) Составить программу для ЭВМ и с ее помощью построить график $x(t)$ на $[0, 1]$, придавая t значения с шагом 0,1 при $\varepsilon = 0{,}5$ и k, изменяющемся от 2 до 7 с шагом 1.

24.10. Доказать, что при $0 \leqslant a \leqslant 1$ итерации

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a), \quad x_0 = 0, \quad n \in \mathbf{N},$$

сходятся к $\sqrt{a}$.

24.11. Доказать, что последовательность цепных дробей

$$2;\ 2 + \frac{1}{2};\ 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}};\ 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}, \ldots$$

имеет предел, и найти его.

24.12. Доказать, что в пространстве E^n линейное отображение $A\colon E^n \to E^n$ с матрицей $\|a_{ij}\|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ будет сжимающим, если

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 < 1.$$

24.13. Доказать, что в пространстве c^n линейное отображение $A\colon c^n \to c^n$ с матрицей $\|a_{ij}\|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$

будет сжимающим, если

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1.$$

24.14. Доказать, что в пространстве l^n линейное отображение A: $l^n\to l^n$ с матрицей $\|a_{ij}\|$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ будет сжимающим, если

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|<1.$$

24.15. Следующие системы линейных алгебраических уравнений преобразовать так, чтобы их можно было решать итерационным методом:

а) $2x+y=2,$ $\quad$ б) $3x+y=4,$
$\quad x-3y=1;$ $\quad\quad x+2y=3.$

Исследовать характер приближения итераций к точному решению.

24.16. Рассмотрим в пространстве E^n систему линейных алгебраических уравнений $Cx=b$, где $x, b\in E^n$, $C=\|c_{ij}\|$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$. Рассмотрим равносильную систему $x=(\lambda C+I)x-\lambda b$, где $\lambda\in\mathbf{R}$, I — единичная матрица. Положим $A=\lambda C+I$ и составим итерации $x_n=Ax_{n-1}-\lambda b$, $n\in\mathbf{N}$, где $x_0\in E^n$ — произвольно. Предположим, что выполняется следующее условие:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}c_{ii}\right)^2>(n-1)\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}c_{ij}^2.$$

Доказать, что существует $\lambda\in\mathbf{R}$, при котором итерационный процесс сходится к решению исходной системы.

24.17. Рассмотрим оператор A: $C[0, 1]\to C[0, 1]$

$$Ax(t)=\lambda\int_0^t x(\tau)\,d\tau+1.$$

а) Доказать, что при $|\lambda|<1$ этот оператор является сжимающим в пространстве $C[0, 1]$.

б) Найти неподвижную точку этого оператора при $\lambda=0{,}5$.

в) Составить итерации, выбрав в качестве начального приближения $x_0\equiv 0$, и убедиться, что они являются частичными суммами ряда Тейлора для неподвижной точки.

г) Найти оценку погрешности, допускаемой на n-м шаге итерационного процесса, исходя из оценки остаточного члена в формуле Тейлора и из оценки в теореме 24.1.

д) Имеет ли рассматриваемый оператор неподвижные точки при $|\lambda|\geqslant 1$?

24.18. Пусть Φ: $X\to X$ — такой непрерывный оператор, переводящий банахово пространство X в себя, что некоторая его итерация является сжимающим на X оператором. Доказать, что оператор Φ имеет в X неподвижную точку.

24.19. Привести пример оператора Φ: $X\to X$, переводящего банахово пространство X в себя, удовлетворяющего при $x, y\in X$ $(x\neq y)$ условию $\|\Phi(x)-\Phi(y)\|<\|x-y\|$ и не имеющего в X неподвижной точки.

24.20. Пусть Q — бикомпактное множество в банаховом пространстве X, Φ: $Q\to Q$ — оператор, удовлетворяющий при $x\neq y$ условию $\|\Phi(x)-\Phi(y)\|<\|x-y\|$. Доказать, что оператор Φ имеет в Q единственную неподвижную точку и что итерации $x_n=\Phi(x_{n-1})$ $(n\in\mathbf{N})$ сходятся к ней при любом $x_0\in Q$. Является ли оператор Φ сжимающим?

24.21. Рассмотрим уравнение

$$x(s)-\lambda\int_a^b K(s, t)\,x(t)\,dt=f(s)$$

или $(I-\lambda A)x=f$, где $\lambda\in\mathbf{C}$, $f(s)\in C[a, b]$, $K(s, t)$ непрерывна при $a\leqslant s, t\leqslant b$, $M=\max\limits_{a\leqslant s,\, t\leqslant b}|K(s, t)|$.

а) С помощью теоремы 24.1 доказать, что при $|\lambda|<1/(M(b-a))$ данное уравнение имеет, и притом единственное, решение $x(s)\in C[a, b]$.

б) Доказать, что при $|\lambda|<1/(M(b-a))$

$$x=(I-\lambda A)^{-1}f=(I+\lambda A+\lambda^2A^2+\ldots)f$$

и что A^n — интегральный оператор с ядром

$$K_n(s, t)=\int_a^b K(s, \tau)\,K_{n-1}(\tau, t)\,d\tau,\qquad n=2, 3, \ldots,$$

$$K_1(\tau, t)=K(\tau, t).$$

в) Доказать, что *ряд Неймана*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(s, t)$$

сходится равномерно в круге $|\lambda|<1/(M(b-a))$ и его

сумма $R(s, t, \lambda)$ (резольвента ядра) аналитична по λ в этом круге.

г) Доказать, что при $|\lambda| < 1/(M(b-a))$ решение данного уравнения имеет вид

$$x(s) = f(s) + \lambda \int_a^b R(s, t, \lambda) f(t)\, dt.$$

24.22. Доказать, что при $|\lambda| < 1/(M(b-a))$ резольвента $R(s, t, \lambda)$ непрерывного ядра $K(s, t)$ удовлетворяет уравнениям:

а) $R(s, t, \lambda) = \lambda \int_a^b K(s, \tau) R(\tau, t, \lambda)\, d\tau + K(s, t);$

б) $R(s, t, \lambda) = \lambda \int_a^b K(\tau, t) R(s, \tau, \lambda)\, d\tau + K(s, t);$

в) $\dfrac{\partial R(s, t, \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b R(s, \tau, \lambda) R(\tau, t, \lambda)\, d\tau.$

24.23. Рассмотрим уравнение

$$x(s) - \lambda \int_0^1 stx(t)\, dt = f(s),$$

где $f(s) \in C[0, 1]$.

а) Доказать, что ряд Неймана для данного уравнения сходится при $|\lambda| < 3$.

б) Найти итерированные ядра $K_n(s, t)$, просуммировать ряд Неймана и записать решение данного уравнения.

в) Имеет ли данное уравнение решения при $|\lambda| > 1$?

24.24. Доказать, что ряд Неймана для уравнения Вольтерра 2-го рода с непрерывным ядром сходится при любом значении параметра λ и, следовательно, решение этого уравнения существует при любой непрерывной правой части.

24.25. Доказать, что уравнение Вольтерра 2-го рода не имеет характеристических чисел.

24.26. Оператор F: $X \to Y$ будем называть *нерастягивающим* на выпуклом множестве $D \subset X$, если для любых $x_1, x_2 \in D$ выполняется неравенство $\|F(x_1) - F(x_2)\| \leqslant \|x_1 - x_2\|$. Доказать, что непрерывно дифференцируемый на выпуклом множестве D оператор $F(x)$ является

нерастягивающим тогда и только тогда, когда

$$\sup_{x \in D} \|F'(x)\| \leqslant 1.$$

24.27. Пусть оператор $\Phi(x)$ отображает замкнутое выпуклое множество $D \subset X$ в себя и непрерывно дифференцируем на D. Доказать, что оператор $\Phi(x)$ является сжимающим на D тогда и только тогда, когда

$$\sup_{x \in D} \|\Phi'(x)\| = q < 1.$$

24.28. Пусть оператор $\Phi(x)$ отображает замкнутое множество $Q \subset X$ в себя и при некотором натуральном m оператор

$$\Phi^m(x) = \underbrace{\Phi[\Phi[\ldots[\Phi(x)]\ldots]]}_{m \text{ раз}}$$

является сжимающим на Q. Доказать, что в Q существует единственная неподвижная точка оператора $\Phi(x)$ и что итерации $x_n = \Phi(x_{n-1})$ $(n \in \mathbf{N})$ сходятся к ней при любой $x_0 \in Q$.

24.29. Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на $[a, b]$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, причем $f'(x) \geqslant m > 0$, $f''(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$.

а) Доказать, что последовательные приближения x_n итерационного процесса Ньютона, начатые с $x_0 = b$, не возрастают, ограничены снизу и сходятся к точке x^* — корню уравнения $f(x) = 0$.

б) Сформулировать аналогичные утверждения в случаях:

1) $f'(x) \geqslant m > 0$, $f''(x) \leqslant 0$ на $[a, b]$;
2) $f'(x) \leqslant -m < 0$, $f''(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$;
3) $f'(x) \leqslant -m < 0$, $f''(x) \leqslant 0$ на $[a, b]$.

24.30. В условиях предыдущей задачи рассмотрим последовательные приближения метода хорд

$$\tilde{x}_0 = a, \quad \tilde{x}_n = \tilde{x}_{n-1} - \frac{(b - \tilde{x}_{n-1}) f(\tilde{x}_n)}{f(b) - f(\tilde{x}_n)}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Доказать, что:

а) последовательность $\tilde{x}_n$ не убывает, ограничена сверху и сходится к x^*;

б) справедливо неравенство $\tilde{x}_n < x^* < x_n$ $(n \in \mathbf{N})$;

в) справедливы оценки $|x_n - x^*| \leqslant \dfrac{f(x_n)}{m}$, $x^* - \tilde{x}_n \leqslant \dfrac{|f(\tilde{x}_n)|}{m}$.

24.31. Пусть в условиях задачи 24.29 а) при $x_0 < b$ выполняется неравенство $|f(x_0)| < \frac{2}{m^2 l}$, где $l = \max\limits_{[a,b]} f''(x)$. Доказать, что для скорости сходимости x_n к x^* справедлива оценка, приведенная в теореме 24.2.

24.32. Составить формулы последовательных приближений для итерационного и модифицированного итерационного процессов Ньютона, когда $X = \mathbf{R}$ и $X = E^n$.

24.33. В пространстве l_2 рассмотрим оператор $F(x)$, определенный на шаре $\bar{S}_1(0)$ и переводящий элемент $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ в $F(x) = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \ldots)$. Доказать, что $F(x)$:

а) переводит шар $\bar{S}_1(0)$ в себя;

б) непрерывен на шаре $\bar{S}_1(0)$;

в) не имеет неподвижных точек на шаре $\bar{S}_1(0)$;

г) не является вполне непрерывным.

24.34. Пусть функция $f(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных в области $|t - t_0| \leqslant a$, $|x - x_0| \leqslant b$, M — максимум $|f(t, x)|$ в этой области, $h = \min(a, b/M)$. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0.$$

а) Доказать, что эта задача эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau,$$

б) Доказать, что оператор

$$F(x) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau,$$

определенный на шаре $\|x - x_0\| \leqslant b$ в пространстве $C[t_0 - h, t_0 + h]$, переводит этот шар в себя и является вполне непрерывным на нем.

в) Доказать, что рассматриваемая задача Коши имеет на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ хотя бы одно решение.

г) Привести пример непрерывной функции $f(t, x)$ и точки (t_0, x_0) таких, что рассматриваемая задача Коши имеет на некотором отрезке, содержащем точку t_0, более одного решения.

24.35. В пространстве $C^3[0, 1]$ рассмотрим следующую краевую задачу для обыкновенного квазилинейного дифференциального уравнения 3-го порядка (модельная задача теории пограничного слоя):

$$x''' + xx'' = 0, \quad 0 < t < 1,$$
$$x(0) = a, \quad x'(0) = b, \quad x(1) = c.$$

а) Доказать, что эта задача эквивалентна следующему нелинейному интегральному уравнению в пространстве $C[0, 1]$:

$$x(t) = a + bt + (c - a - b)\frac{\int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \exp\left\{-\int\limits_0^\sigma x(s)\, ds\right\} d\sigma\, d\tau}{\int\limits_0^1 \int\limits_0^\tau \exp\left\{-\int\limits_0^\sigma x(s)\, ds\right\} d\sigma\, d\tau};$$

б) Пусть хотя бы одно из чисел a, b, $c - a - b$ отлично от нуля. Доказать, что оператор $\Phi(x)$, задаваемый правой частью интегрального уравнения, отображает шар $\bar{S}_r(0)$ радиуса $r = |a| + |b| + |c - a - b|$ в себя.

в) С помощью теоремы 15.3 доказать, что $\Phi(x)$ вполне непрерывен в этом шаре.

Таким образом, согласно принципу Шаудера, установлено существование решения исходной краевой задачи.

24.36. Пусть функция $K(t, s) \not\equiv 0$ непрерывна при $a \leqslant t$, $s \leqslant b$, функция $y(t) \not\equiv 0$ непрерывна на $[a, b]$, причем выполняется неравенство

$$\|K\|\, n \left(\|y\| \frac{n}{n-1}\right)^{n-1} < 1,$$

где

$$\|K\| = \max_{[a,b]} \int_a^b |K(t, s)|\, ds, \quad \|y\| = \max_{[a,b]} |y(t)|,$$

а $n > 1$ — натуральное. Пусть, далее, $r_* < r^*$ — неотрицательные решения уравнения $\|K\| r^n + \|y\| = r$. Рассмотрим в пространстве $C[a, b]$ интегральный оператор

$$\Phi(x) = \int_a^b K(t, s)\, x^n(s)\, ds + y(t).$$

а) С помощью принципа сжимающих отображений доказать, что в шаре $\|x\| \leqslant r_*$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку.

б) С помощью принципа Шаудера доказать, что в шаре $\|x\| \leqslant r^*$ оператор Φ имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

§ 25. Неявные операторы

Пусть X, Y, Λ — банаховы пространства, $X + \Lambda$ — прямая сумма пространств X и Λ. Уравнение $F(x, \lambda) = 0$, где F: $X + \Lambda \to Y$, может определять решения $x = x(\lambda)$, каждое из которых называется *неявным оператором* (*неявной функцией*), определяемым исходным уравнением.

Теорема 25.1. *Пусть оператор $F(x, \lambda)$ непрерывно дифференцируем в окрестности точки (x_0, λ_0). Пусть, далее, $F(x_0, \lambda_0) = 0$, а оператор $F_x(x_0, \lambda_0)$ непрерывно обратим. Тогда найдутся числа $\rho > 0$ и $r > 0$ такие, что для каждого $\lambda \in S_\rho(\lambda_0)$ уравнение $F(x, \lambda) = 0$ имеет в шаре $S_r(x_0)$ единственное решение $x = x(\lambda)$. При этом $x(\lambda_0) = x_0$, неявная функция $x(\lambda)$ дифференцируема в $S_r(x_0)$ и*

$$x'(\lambda) = -F_x^{-1}(x(\lambda), \lambda) \cdot F_\lambda(x(\lambda), \lambda).$$

В частности, $x'(\lambda_0) = -F_x^{-1}(x_0, \lambda_0) \cdot F_\lambda(x_0, \lambda_0)$.

Теорема 25.2. *Если в условиях теоремы 25.1 оператор $F(x, \lambda)$ аналитичен в точке (x_0, λ_0), то неявный оператор $x(\lambda)$ также аналитичен в точке λ_0, т. е. в некотором шаре $\|\lambda - \lambda_0\| < \rho$ $(\rho > 0)$ представим абсолютно и равномерно сходящимся рядом*

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k (\lambda - \lambda_0)^k.$$

25.1. Проверить, что при $x, \lambda \in \mathbf{R}$ уравнение:

а) $x^2 + \lambda^2 + 1 = 0$ не определяет ни одной неявной функции;

б) $x^2 + \lambda^2 = 0$ определяет единственную неявную функцию $x \equiv 0$, определенную только при $\lambda = 0$;

в) $x - \lambda^2 = 0$ определяет единственную неявную функцию, определенную для любого $\lambda \in \mathbf{R}$;

г) $x^2 + \lambda^2 = 1$ определяет две непрерывные неявные функции при $\lambda \in [-1, 1]$;

д) $x^2 - \lambda^2 = 0$ определяет на $\mathbf{R}$ две дифференцируемые неявные функции и четыре непрерывные функции.

25.2. Доказать, что в пунктах г) и д) задачи 25.1 существует бесконечное множество разрывных неявных функций.

25.3. Найти числа ρ и r, о которых говорится в формулировке теоремы 25.1, в пункте г) задачи 25.1, когда $x_0^2 + \lambda_0^2 = 1$ $(x_0 \neq 0)$. Применима ли эта теорема в точках $x_0 = 0$, $\lambda = \pm 1$?

25.4. Найти числа ρ и r, о которых говорится в формулировке теоремы 25.1, в пункте д) задачи 25.1, когда $x_0^2 = \lambda_0^2$ $(x_0 \neq 0)$. Применима ли эта теорема в точке $(0, 0)$?

25.5. Переформулировать теоремы 25.1, 25.2 о неявных функциях для случаев:

а) $X = \Lambda = Y = \mathbf{R}$;

б) $X = Y = E^k$, $\Lambda = E^n$.

25.6. Пусть $X = Y = C[a, b]$, $\Lambda = \mathbf{R}$. Переформулировать теоремы 25.1 и 25.2 о неявных операторах для интегрального оператора:

а) $F(x, \lambda) = x(t) - \int_a^b K(t, s) f(s, x(s), \lambda)\, ds$;

б) $F(x, \lambda) = x(t) - \int_a^b K(t, s, x(s), \lambda)\, ds$;

в) $F(x, \lambda) = \Phi(x(t), t, \lambda) - \int_a^b \psi(t, s, x(t), x(s), \lambda)\, ds$.

25.7. Доказать, что интегральное уравнение

$$x(t) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^\pi \sin t\, [x(s) \sin s + x^2(s)]\, ds$$

имеет при $\lambda = \lambda_0 = 1$ решение $x_0(t) = \sin t$. Найти непрерывное по (t, λ) решение этого уравнения $x(t, \lambda)$ такое, что $x(t, 1) = \sin t$.

25.8. Найти все неявные функции, определяемые интегральным уравнением задачи 25.7.

25.9. Рассмотрим краевую задачу для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка с малым параметром

$$x'' + f(t, x, x', \varepsilon) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant l,\ x(0) = x(l) = 0.$$

Предположим, что функция $f(t, x, y, \varepsilon)$ является достаточно гладкой по совокупности своих переменных при

$$t \in [0, l], \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0.$$

Пусть, далее, при $\varepsilon = 0$ эта задача имеет решение $x_0(t)$,

причем линеаризованная задача

$$z'' + f_y(t, x_0(t), x_0'(t), 0)\, z' + f_x(t, x_0(t), x_0'(t), 0)\, z = 0$$

имеет только тривиальное решение $z \equiv 0$. Полагая

$$X = C^2[0, l], \quad Y = C[0, l], \quad \Lambda = \mathbf{R},$$
$$F(x, \varepsilon) = x'' + f(t, x, x', \varepsilon),$$

переформулировать для данного случая теоремы 25.1, 25.2 о неявных функциях.

25.10. Найти с точностью до $O(\varepsilon^2)$ решение краевой задачи

$$x'' + \sin x = \varepsilon \sin \pi t, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

25.11. Пусть функция $\varphi(x)$, φ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ аналитична в окрестности S точки a_0. Рассмотрим уравнение

$$x = a + \varepsilon\varphi(x)$$

с параметрами $a \in S$ и $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Доказать, что:

а) существуют числа $\rho > 0$ и $r > 0$ такие, что при всех (a, ε), удовлетворяющих условиям $|a - a_0| < \rho$, $|\varepsilon| < \rho$, рассматриваемое уравнение имеет на интервале $|x - a_0| < r$ единственное решение $x = x(a, \varepsilon)$; это решение аналитично по a, ε и удовлетворяет условию $x(a_0, 0) = a_0$;

б) для производных $x(a, \varepsilon)$ по ε справедливы формулы Лапласа

$$\frac{\partial^k x}{\partial \varepsilon^k} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\left[\varphi^k(x)\frac{\partial x}{\partial a}\right], \qquad k \in \mathbf{N},$$

из которых, в частности, следует, что

$$\left.\frac{\partial^k x}{\partial \varepsilon^k}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\left[\varphi^k(a)\right];$$

в) для $x(a, \varepsilon)$ справедлива формула Лагранжа

$$x(a, \varepsilon) = a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!}\frac{d^{k-1}}{da^{k-1}}\left[\varphi^k(a)\right].$$

25.12. Пользуясь формулой Лагранжа из задачи 25.11, доказать, что аналитическое при $\varepsilon = 0$ решение уравнения Кеплера (см. задачу 24.8)

$$E - \varepsilon \sin E = M, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1,$$

задается рядом

$$E = M + \varepsilon \sin M + \frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{d}{dM}\sin^2 M + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\varepsilon^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}}\sin^n M + \ldots$$

25.13. Сформулировать и решить задачу 25.11 для случая, когда φ — отображение комплексной плоскости, а ε и a — комплексные параметры.

25.14. Рассмотрим уравнение $f(x) = \varepsilon$, где функция $f(x)$ аналитична в точке $x = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$. Это уравнение определяет в окрестности точки $\varepsilon = 0$ единственную обратную функцию $x = x(\varepsilon)$, причем $x(0) = 0$, и эта функция аналитична в точке $\varepsilon = 0$. Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x^k, \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x^{k-1}.$$

Доказать, что обратная функция определяется рядом Лагранжа

$$x(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left[\frac{1}{\psi(x)}\right]\Bigg|_{x=0}.$$

25.15. Пусть функция $F(x, \lambda)$, F: $E^2 \to \mathbf{R}$ непрерывна вместе с частной производной $F_x(x, \lambda)$ в полосе $a \leqslant \lambda \leqslant b$, $-\infty < x < +\infty$, и в этой полосе $0 < m \leqslant F_x(x, \lambda) \leqslant M$, где $0 < m \leqslant M$ — постоянные, не зависящие от x и λ. Доказать, что уравнение $F(x, \lambda) = 0$ определяет в пространстве $C[a, b]$ единственную неявную функцию $x = x(\lambda)$.

25.16. Пусть оператор $F(x, \lambda)$, F: $E^k \times E^n \to E^k$ непрерывен вместе с частной производной $F_x(x, \lambda)$ в цилиндре $x \in E^k$, $\lambda \in \bar{G} \subset E^n$, где $\bar{G}$ — замкнутая ограниченная область. Пусть для точек этого цилиндра выполняется неравенство

$$m\|h\|^2 \leqslant (F_x(x, \lambda)h, h) \leqslant M\|h\|^2,$$

где $0 < m < M$ — постоянные, не зависящие от x и λ. Доказать, что уравнение $F(x, \lambda) = 0$ определяет единственный неявный оператор $x = x(\lambda)$, непрерывный на $\bar{G}$.

25.17. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x = \varphi(x), \quad 0 < t < +\infty, \quad x|_{t=0} = a,$$

где $\alpha > 0$, функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема в окрестности S точки $x = 0$, $a \in S$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. До-

казать, что эта задача эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = ae^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} q(x(s))\, ds,$$

т. е. всякое решение задачи Коши является решением интегрального уравнения и обратно, всякое непрерывное решение интегрального уравнения непрерывно дифференцируемо на полуоси, удовлетворяет начальному условию и является решением дифференциального уравнения.

25.18. Запишем интегральное уравнение предыдущей задачи в виде $x = \Phi(a, x)$. С помощью теоремы о неявных операторах доказать, что при достаточно малых $|a|$ интегральное уравнение имеет единственное малое решение $x(t, a) \to 0$ при $a \to 0$ в пространстве C_α (см. задачу 7.31). Переформулировать полученное утверждение для задачи Коши из 25.17.

Глава 7

ДИСКРЕТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 26. Приближенные и разностные схемы

Для приближенного решения уравнения $Ax = y$ с линейным оператором A, действующим из области определения $D(A) \subset X$ в область значений $R(A) \subset Y$ (X, Y — банаховы пространства), и правой частью $y \in Y$ рассматривают последовательность приближенных уравнений $\bar{A}_n \bar{x}_n = \bar{y}_n$ ($n \in \mathbf{N}$), называемую *приближенной схемой* с линейными операторами $\bar{A}_n$, действующими из $D(\bar{A}_n) \subset \bar{X}_n$ в $R(\bar{A}_n) \subset \bar{Y}_n$ и $\bar{y}_n \in \bar{Y}_n$ ($\bar{X}_n$ и $\bar{Y}_n$ — банаховы пространства). Связь между пространствами X и $\bar{X}_n$ (Y и $\bar{Y}_n$) осуществляется линейными операторами $T_n \in \mathscr{L}(X, \bar{X}_n)$ (соответственно $T'_n \in \mathscr{L}(Y, \bar{Y}_n)$) такими, что $T_n X = \bar{X}_n$ $(T'_n Y = \bar{Y}_n)$, и называемыми *операторами сужения*.

Последовательность $\bar{x}_n \in \bar{X}_n$ ($n \in \mathbf{N}$), называется *T-сходящейся* к элементу $x \in X$ (записывают $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$, $n \to \infty$), если $\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n} \to 0$ при $n \to \infty$. Если $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ при $n \to \infty$, то говорят, что $\bar{x}_n$ *аппроксимирует* x. Аналогично определяется *T-сходимость* последовательности $\bar{y}_n \in \bar{Y}_n$ к элементу $y \in Y$. Если при некотором натуральном k справедливо неравенство

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n} \leqslant c(x)/n^k,$$

то говорят, что $\bar{x}_n$ *аппроксимирует x с порядком k*. Аналогично определяется порядок аппроксимации элемента $y \in Y$ последовательностью $\bar{y}_n \in \bar{Y}_n$.

Говорят, что на решении x^* исходного уравнения выполнено *условие аппроксимации*, если $T_n x^* \in D(\bar{A}_n)$ и при $n \to \infty$

$$\|\bar{A}_n T_n x^* - \bar{y}_n\|_{\bar{Y}_n} \to 0.$$

В этом случае говорят также, что исходное уравнение *аппроксимируется на x^** приближенной схемой. Если,

кроме того, существуют постоянная $c>0$ и натуральное k такие, что при $n\in\mathbf{N}$ выполняется неравенство

$$\|\bar{A}_n T_n x^* - \bar{y}_n\|_{\bar{Y}_n} \leqslant c/n^k,$$

то говорят, что приближенная схема аппроксимирует исходное уравнение с *порядком* k.

Если существует постоянная $\gamma>0$ такая, что для любых $\bar{x}_n\in D(\bar{A}_n)$ выполняется неравенство

$$\|\bar{A}_n\bar{x}_n\|_{\bar{Y}_n} \geqslant \gamma\|\bar{x}_n\|_{\bar{X}_n},$$

то говорят, что приближенная схема $\bar{A}_n\bar{x}_n=\bar{y}_n$ *устойчива* или выполнено *условие устойчивости*.

Предположим, что точное уравнение $Ax=y$ однозначно разрешимо, x^* — его решение, приближенные уравнения $\bar{A}_n\bar{x}_n=\bar{y}_n$ для всех n однозначно разрешимы и $\bar{x}_n^*$ — их решения. Если $\bar{x}_n^* \xrightarrow{T} x^*$ при $n\to\infty$, то говорят, что приближенная схема *сходится*. Если, кроме того, существуют постоянная $c>0$ и натуральное l такие, что справедливо неравенство

$$\|\bar{x}_n^* - T_n x^*\|_{\bar{X}_n} \leqslant c/n^l,$$

то говорят, что приближенная схема *сходится с порядком* l, или *порядок точности* приближенной схемы равен l.

Теорема 26.1. *Пусть точное и приближенные уравнения однозначно разрешимы. Если выполнены условия аппроксимации и устойчивости, то приближенная схема сходится и справедливо неравенство*

$$\|\bar{x}_n^* - x^*\| \leqslant \gamma^{-1}\|\bar{A}_n T_n x^* - \bar{y}_n\|.$$

Если приближенная схема аппроксимирует точное уравнение на x^* с порядком l, то l есть порядок точности приближенной схемы.

В этом параграфе рассмотрены задачи общего характера и задачи о разностных схемах, когда A — дифференциальный оператор, а $\bar{A}_n$ — аппроксимирующий его разностный оператор. В § 28 рассматривается другая реализация приближенных схем — схемы Галеркина.

26.1. Пусть при $n\to\infty$ $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$, $\bar{y}_n \xrightarrow{T} y$. Доказать, что для любых скаляров α и β

$$\alpha\bar{x}_n + \beta\bar{y}_n \xrightarrow{T} \alpha x + \beta y.$$

26.2. Пусть $X=l_2$, $\bar{X}_n=l_2^{(n)}$. Определим операторы сужения T_n так: для любого $x=(\xi_k)_{k=1}^{\infty}\in l_2$ положим $T_n x=(\xi_{k+1})_{k=1}^{n}$. Пусть $x_0=(\xi_k^{(0)})_{k=1}^{\infty}\in l_2$. Доказать, что последовательность $\bar{x}_n=(\xi_{k+1}^0)_{k=1}^n$ имеет бесконечное число T-пределов (что свидетельствует о плохой аппроксимации пространства l_2 пространствами $l_2^{(n)}$ с помощью операторов сужения T_n).

26.3. Если из соотношения $\|T_n x\|_{\bar{X}_n}\to 0$ при $n\to\infty$ вытекает, что $x=0$, то нормы в $\bar{X}_n$ называют *невырожденными*. Доказать, что для единственности T-предела необходима и достаточна невырожденность норм в $\bar{X}_n$.

26.4. Если $\|T_n x\|_{\bar{X}_n}\to\|x\|$ для любого $x\in X$ при $n\to\infty$, то нормы в $\bar{X}_n$ называют *согласованными* с нормой в X. Доказать, что если нормы в $\bar{X}_n$ согласованы с нормой в X, то T-предел единствен.

26.5. Доказать, что если последовательность $\|T_n x\|_{\bar{X}_n}$ ограничена при каждом $x\in X$, то ограничена и последовательность

$$\|T_n\|_{\mathscr{L}(X,\bar{Y}_n)}.$$

26.6. Пусть $X=C[0, l]$. Выберем на $[0, l]$ при каждом $n\in\mathbf{N}$ сетку, т. е. набор узлов $0\leqslant t_1^{(n)}\leqslant\ldots\leqslant t_n^{(n)}\leqslant l$. Введем операторы сужения T_n, полагая $T_n x=\left(x\left(t_k^{(n)}\right)\right)_{k=1}^n$. В качестве $\bar{X}_n$ возьмем *сеточное пространство* (линейное пространство функций, заданных лишь на сетке) со следующей нормой: если $\bar{x}_n=\left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^n\in\bar{X}_n$, то $\|\bar{x}_n\|_{\text{куб}}=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left|x_k^{(n)}\right|$ (таким образом, $\bar{X}_n=c^n$). Доказать, что нормы в $\bar{X}_n$ согласованы с нормой в X, т. е. для любой функции $x(t)\in C[0, l]$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|x\left(t_k^{(n)}\right)\right| = \max_{t\in[0,l]}|x(t)|,$$

если $\lambda_n=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1}\left|t_{i+1}^{(n)}-t_i^{(n)}\right|\to 0$ при $n\to\infty$.

26.7. В условиях предыдущей задачи зададим нормы в $\bar{X}_n$ так:

$$\|\bar{x}_n\|_{\text{ср}}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left|x_k^{(n)}\right|^2\left(t_k^{(n)}-t_k^{(n-1)}\right)}.$$

Доказать, что при $\lambda_n \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n x \|_{\text{сф}} = \left[\int_0^l |x(t)|^2 \, dt \right]^{1/2}$$

откуда вытекает невырожденность сферических норм в $\bar{X}_n$.

26.8. Доказать неравенство

$$\sqrt{\frac{l}{n}} \| \bar{x}_n \|_{\text{куб}} \leqslant \| \bar{x}_n \|_{\text{сф}} \leqslant \sqrt{l} \| \bar{x}_n \|_{\text{куб}}.$$

26.9. Последовательность $\bar{x}_n \in \bar{X}_n$ называют *T-сходящейся* к элементу $x \in X$:

а) *в среднем*, если $\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\text{сф}} \to 0$, $n \to \infty$;

б) *равномерно*, если $\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\text{куб}} \to 0$, $n \to \infty$.

Доказать, что из равномерной T-сходимости вытекает T-сходимость в среднем, но обратное утверждение неверно.

26.10. Если $\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n} \leqslant \varphi_n \to 0 \, (n \to \infty)$, то говорят, что $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ *со скоростью* φ_n. Если $\psi_n > 0$ и $\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n} = o(\psi_n)$ $(n \to \infty)$, то говорят, что $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ *со скоростью* $o(\psi_n)$. Доказать, что:

а) если $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ равномерно со скоростью φ_n, то $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ в среднем с той же скоростью;

б) если $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ в среднем со скоростью $o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, то $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ равномерно;

в) если $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ в среднем со скоростью $\varphi_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, то $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ равномерно со скоростью $\sqrt{n}\,\varphi_n$.

26.11. Пусть $x(t)$ — достаточно гладкая функция на $[0, l]$, а операторы сужения T_n и пространства $\bar{X}_n$ заданы, как в задаче 26.6. Будет ли $\bar{x}_n$ T-сходиться к x и с каким порядком, если $t_i = il/n$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ и:

а) $\bar{x}_n = \left\{ \frac{1}{2} x\left(t_i^{(n)}\right) + \frac{1}{2} x\left(t_{i-1}^{(n)}\right) \right\}_{i=1}^{n}$;

б) $\bar{x}_n = \left\{ \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} x(s)\, ds \right\}_{i=1}^{n}$?

26.12. Пусть Q — прямоугольник: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 0$, $C(Q)$ — пространство непрерывных на Q функций с нор-

мой

$$\|u\| = \max_{(x,t)\in Q} |u(x, t)|.$$

Разобьем $[0, 1]$ на n равных частей точками $x_i = i/n$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, а отрезок $[0, \theta]$ — на m равных частей точками $t_j = j\theta/m$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$. Пусть Q_{nm} — сеточное множество

$$Q_{nm} = \{(x_i, t_j),\ i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m\}.$$

Рассмотрим сеточное пространство $C(Q_{nm})$ с нормой

$$\|\bar{u}_{nm}\| = \max_{(x,t)\in Q_{nm}} |u(x, t)|.$$

Доказать, что нормы в $C(Q_{nm})$ согласованы с нормой в $C(Q)$.

26.13. Говорят, что последовательность $\bar{A}_n$ *аппроксимирует* A *на элементе* $x \in D(A)$, если $T_n x \in D(A_n)$ $(n \in \mathbf{N})$, и при $n \to \infty$

$$\|\bar{A}_n T_n x - T'_n A x\|_{\bar{Y}_n} \to 0.$$

Пусть $\bar{A}_n$ аппроксимирует A на точном решении x^*, $\bar{y}_n$ аппроксимирует y. Доказать, что тогда уравнение $Ax = y$ аппроксимируется на x^* приближенной схемой $\bar{A}_n \bar{x}_n = \bar{y}_n$.

26.14. Пусть $\bar{X}_n \equiv X$, $\bar{Y}_n \equiv Y$, T_n и T'_n — тождественные операторы. Доказать, что условие аппроксимации оператора A последовательностью операторов A_n на некотором множестве $M \subset D(A)$ означает сильную сходимость A_n к A на M.

26.15. Пусть $X = Y = C[0, 1]$, $\bar{X}_n = \bar{Y}_n = c^n$, $T_n x = T'_n x = \left(x\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{k=1}^{n}$, $Ax = \frac{dx}{dt}$ с $D(A)$, состоящей из непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $x(0) = 0$. Доказать, что оператор A на $D(A)$ аппроксимируется последовательностью операторов

$$\bar{A}_n = \begin{Vmatrix} n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -n & n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -n & n & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -n & n \end{Vmatrix}.$$

26.16. Если выполняется неравенство

$$\|\bar{A}_n T_n x - T'_n A x\|_{\bar{Y}_n} \leqslant c(x)\, n^l,$$

то говорят, что последовательность $\bar{A}_n$ аппроксимирует

A на элементе x с порядком l. Пусть в условиях предыдущей задачи $x(t) \in D(A)$ и имеет на $[0, 1]$ ограниченную вторую производную. Доказать, что $\bar{A}_n$ аппроксимирует A на x с порядком 1, причем справедлива оценка

$$\|\bar{A}_n T_n x - T'_n A x\|_{\bar{Y}_n} \leqslant \gamma_2/(2n),$$

где $\gamma_2 = \sup\limits_{t \in [0,1]} |x''(t)|$.

26.17. Пусть последовательность $\bar{A}_n$ аппроксимирует A на точном решении x^* с порядком l, а последовательность $\bar{y}_n$ аппроксимирует y с порядком k. Доказать, что приближенная схема аппроксимирует точное решение с порядком $\min(l, k)$.

26.18. Пусть $\bar{R}_n = R(A_n)$ — подпространства в $\bar{Y}_n$, на $\bar{R}_n$ определены операторы $\bar{A}_n^{-1}$ и

$$\|\bar{A}_n^{-1}\|_{\mathscr{L}(\bar{R}_n, \bar{X}_n)} \leqslant \gamma^{-1}, \text{ где } \gamma > 0 \text{ — постоянная.}$$

Доказать, что для последовательности $\bar{A}_n$ выполнено условие устойчивости. Доказать, что если выполнено условие устойчивости, то $R(\bar{A}_n)$ замкнуты и, следовательно, являются подпространствами в $\bar{Y}_n$.

26.19. Пусть $\bar{Y}_n = \bar{X}_n^*$. Доказать, что для $\bar{A}_n$ выполнено условие устойчивости, если для любой последовательности $\bar{x}_n \in D(\bar{A}_n)$ выполняется неравенство

$$\langle \bar{x}_n, \bar{A}_n \bar{x}_n \rangle \geqslant \gamma \|\bar{x}_n\|^2,$$

где $\gamma > 0$ — постоянная.

26.20. Доказать, что в условиях задачи 26.15 $\|\bar{A}_n^{-1}\| \leqslant 2$, и, следовательно, условие устойчивости выполнено.

26.21. Пусть $\bar{X}_n$ и $\bar{Y}_n$ конечномерны, их размерности равны и выполнено условие устойчивости. Доказать, что $N(\bar{A}_n) = 0$, т. е. $\bar{A}_n$ отображает $\bar{X}_n$ на $\bar{Y}_n$ взаимно однозначно.

26.22. Пусть для всех возможных решений $\bar{x}_n$ приближенной схемы $\bar{A}_n \bar{x}_n = \bar{y}_n$ получена оценка $\|\bar{x}_n\| \leqslant \gamma^{-1}\|\bar{y}_n\|$, где γ — постоянная (такие оценки называются *априорными*). Доказать, что в этом случае условие устойчивости выполняется.

26.23. Пусть приближенная схема $\bar{A}_n \bar{x}_n = \bar{y}_n$ при $\bar{y}_n \in R(\bar{A}_n)$ имеет единственное решение $\bar{x}_n$. Говорят, что решение $\bar{x}_n$ непрерывно зависит от правых частей $\bar{y}_n$ равномерно по n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\bar{y}_n, \bar{y}'_n \in R(\bar{A}_n)$ таких, что $\|\bar{y}_n - \bar{y}'_n\| < \delta$, для соответствующих решений $\bar{x}_n, \bar{x}'_n$ выполняется неравенство $\|\bar{x}_n - \bar{x}'_n\| < \varepsilon$. Доказать, что для устойчивости приближенной схемы необходима и достаточна непрерывная зависимость ее решений от правых частей равномерно по n.

26.24. Пусть выполнено условие устойчивости. Доказать, что каждое приближенное уравнение имеет не более одного решения.

26.25. Пусть x_1, x_2 — точные решения; т. е. $Ax_1 = y$, $Ax_2 = y$ и выполнено условие устойчивости. Доказать, что справедливо неравенство

$$\gamma \|T_n(x_1 - x_2)\|_{\bar{X}_n} \leqslant$$
$$\leqslant \|\bar{A}_n T_n x_1 - T'_n A x_1\|_{\bar{Y}_n} + \|\bar{A}_n T_n x_2 - T'_n A x_2\|_{\bar{Y}_n}.$$

26.26. Пусть последовательность $\bar{A}_n$ аппроксимирует A на каждом точном решении, нормы в $\bar{X}_n$ невырождены (см. задачу 26.3) и выполнено условие устойчивости. Пользуясь неравенством предыдущей задачи, доказать, что точное уравнение имеет не более одного решения.

26.27. Пусть в условиях предыдущей задачи $y_n \xrightarrow{T} y$ при $n \to \infty$. Доказать:

а) справедливость оценки

$$\|x_n - T_n x\|_{\bar{X}_n} \leqslant \gamma^{-1} \left\{ \|\bar{y}_n - T'_n y_n\|_{\bar{Y}_n} + \|T'_n A x - \bar{A}_n T_n x\| \right\},$$

где x — точное решение;

б) сходимость приближенной схемы.

В задачах 26.28—26.34 на отрезке $[0, l]$ рассматривается задача Коши

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = f(t), \qquad x(0) = \alpha.$$

Положим $X = C[0, l]$, $Y = C[0, l] \dotplus \mathbf{R}$, $Ax = \left\{ \frac{dx}{dt} + a(t)x, x(0) \right\}$, $D(A) \in C^1[0, l]$, $a(t)$, $f(t) \in C[0, l]$. На $[0, l]$ зададим равномерную сетку $\sum = \{t_k\}_{k=1}^n$, $t_k = k\tau$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, где $\tau = ln^{-1}$ — шаг сетки. Пусть $\bar{X}_n$ — n-мерное пространство столбцов $\bar{x}_n = (x_i)_{i=1}^n$, $\|\bar{x}_n\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, $\bar{Y}_n = \bar{X}_n \dotplus \mathbf{R}$, операторы сужения имеют вид $T_n x = (x(t\ ))_{=1}^n$, $T'_n y = \{T_n f, \alpha\}$.

26.28. Рассмотрим разностную схему

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\tau} + a_i x_{i-1} = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_0 = \alpha, \ (f_i)_{i=1}^n = T_n f, \quad (a_i)_{i=1}^n = T_n a.$$

а) Записать схему в каноническом виде:

$$x_i = R_i(\tau) x_{i-1} + \tau f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \ x_0 = \alpha,$$

где $|R_i(\tau)| \leqslant 1 + c\tau$, $c = \|a\|_{C[0, l]}$.

б) Доказать, что схема имеет единственное решение $\bar{x}_n = (x_i)_{i=1}^n$, причем для $i = 1, 2, \ldots, n$ справедлива оценка

$$|x_i| \leqslant (1 + c\tau)^i |\alpha| + \sum_{k=0}^{i-1} (1 + c\tau)^k \tau \|\bar{f}_n\|.$$

в) Получить априорную оценку

$$\|\bar{x}_n\| \leqslant e^{cl} |\alpha| + \frac{e^{cl} - 1}{c} \|\bar{f}_n\|.$$

г) Доказать устойчивость разностной схемы.

26.29. Запишем разностную схему предыдущей задачи в сеточной форме (Σ — сетка):

$$\frac{\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t - \tau)}{\tau} + a(t) \ \tilde{x}(t - \tau) = f(t), \ t \in \Sigma, \ \tilde{x}(0) = \alpha.$$

а) Пользуясь формулой Тейлора, доказать, что на точном решении в каждом узле t_k сетки Σ разностная схема аппроксимирует исходную задачу Коши.

б) Доказать, что справедлива оценка

$$\Delta_n = \|\bar{A}_n T_n x - \bar{y}_n\|_{\bar{Y}_n} =$$

$$= \sup_{t \in \Sigma} \left| \frac{\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t - \tau)}{\tau} - a(t) \tilde{x}(t - \tau) - f(t) \right| \leqslant \frac{1}{2} \gamma_2 \tau,$$

где $\gamma_2 = \sup\limits_{t \in [0, l]} \|x''(t)\|$.

26.30. Рассмотрим разностную схему

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\tau} + [\alpha_1 a(t_{i-1}) + \alpha_2 a(t_i)] [\beta_1 x_{i-1} + \beta_2 x_i] =$$

$$= \gamma_1 f(t_{i-1}) + \gamma_2 f(t_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n; x_0 = \alpha.$$

Как надо выбрать постоянные α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2, чтобы она аппроксимировала точную задачу со 2-м порядком?

26.31. Рассмотрим разностную схему предыдущей задачи при $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$.

а) Доказать, что эта схема имеет единственное решение, если

$$c\tau < 2, \quad c = \|a\|_{C[0, l]}.$$

б) Записать схему в каноническом виде

$$x_i = R_i(\tau) x_{i-1} + \tau h_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \ x_0 = \alpha.$$

в) Доказать, что справедливы неравенства

$$|R_i(\tau)| \leqslant 1 + 2c\tau, \quad |h_i| \leqslant 2\|\bar{f}_n\|.$$

г) Пользуясь неравенствами из пункта в), доказать устойчивость разностной схемы.

26.32. Пусть точное решение $x(t)$ имеет на $[0, l]$ ограниченную третью производную.

а) Доказать, что разностная схема задачи 26.29 имеет 2-й порядок точности.

б) Оценить $\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n}$.

26.33. Доказать, что разностная схема

$$\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\tau} + a_i x_i = f_i, \ (a_i)_{i=1}^n = T_n a,$$

$$(f_i)_{i=1}^n = T_n f, \ i = 1, 2, \ldots, n - 1, \ x_0 = \alpha,$$

$$\frac{x_1 - x_0}{\tau} = f(0) - a(0)\alpha$$

однозначно разрешима. Записать ее в сеточной форме и доказать, что она аппроксимирует исходную задачу с порядком 2, если точное решение имеет на $[0, l]$ ограниченную третью производную.

26.34. Запишем разностную схему предыдущей задачи в матрично-каноническом виде:

$$u_i = R_i(\tau) u_{i-1} + \tau h_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n - 1,$$

где u_0 задано;

$$u_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad u_i = \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix}, \quad R_i(\tau) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 2a_i\tau \end{Vmatrix},$$

$$h_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 2f_i \end{pmatrix}, \ \beta = \alpha + \tau [f(0) + a(0)\alpha].$$

В возникшем двумерном пространстве фиксируем норму: для $u = (\xi_1, \xi_2)$ полагаем $\|u\| = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}$.

а) Доказать, что справедливы оценки

$$\|R_i(\tau)\| \leqslant 1 + 2c\tau, \quad c = \|a\|_{C[0,\,l]}, \quad \|h_i\| \leqslant 2\|\bar{f}_{n-1}\|_{\bar{X}_{n-1}}.$$

б) Пользуясь оценками из пункта а), доказать устойчивость разностной схемы.

в) Доказать, что разностная схема задачи 26.33 имеет порядок точности 2.

г) Оценить $\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n}$.

26.35. Доказать, что разностная схема

$$\frac{2x_{i+1} + 3x_i - 5x_{i-1}}{\tau} = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1; \quad x_0 = 1, \; x_1 = 1 + \tau^2, \; \tau = 1/n,$$

аппроксимирует задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad x(0) = 1, \quad t \in [0, 1],$$

на ее точном решении.

26.36. Доказать, что:

а) разностная схема предыдущей задачи имеет решение

$$x_i = 1 + \tau^2(2^i - 1), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1;$$

б) если x — точное решение, то $\|\bar{x}_n - T_n x\| \to \infty$ при $n \to \infty$ и, следовательно, разностная схема расходится. Объяснить, почему из пункта б) вытекает неустойчивость схемы.

26.37. Доказать, что разностная схема

$$\frac{ax_{i+1} - (a+c)x_i + cx_{i-1}}{\tau} = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1; \quad x_0 = 1; \quad x_1 = 1 + \tau^2, \quad \tau = 1/n,$$

при $c \neq a$, $a \neq 0$ аппроксимирует задачу Коши $x'(t) = 0$, $x(0) = 1$ ($t \in [0, 1]$) на ее точном решении.

26.38. Доказать, что разностная схема предыдущей задачи сходится, если $|c/a| < 1$ или $c = -a$, и расходится, если $|c/a| > 1$.

В задачах 26.39—26.41 рассматривается задача Коши для системы k дифференциальных уравнений с k неизвестными функциями переменного $t \in [0, l]$:

$$\frac{dx}{dt} + B(t)x = f(t), \qquad x(0) = \alpha.$$

Здесь неизвестная функция разыскивается в X — пространстве непрерывных вектор-функций $x(t) = (x_s(t))_{s=1}^{k}$ с нормой

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant s \leqslant k} \max_{t \in [0, l]} |x_s(t)|,$$

$B(t)$ — квадратная матрица порядка k с непрерывными элементами $b_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2, \ldots, k$). $f(t) \in X$, $\alpha \in c^k$, $Y = X + c^k$. Введем оператор A: пусть $D(A)$ состоит из функций x, непрерывно дифференцируемых на $[0, l]$, $Ax = \{x'(t) + B(t)x, \; x(0)\}$ для $x \in D(A)$. На $[0, l]$ задается равномерная сетка с шагом $\tau = l/n$. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что задача $Ax = y$, где $y = \{f, \alpha\}$, имеет единственное классическое решение.

26.39. Рассмотрим разностную схему

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\tau} + B(t_i)x_{i-1} = f(t_i), \; i = 1, 2, \ldots, n; \; x_0 = \alpha.$$

а) Записать разностную схему в сеточной форме и доказать, что если точное решение имеет на $[0, l]$ ограниченную вторую производную, то разностная схема аппроксимирует исходную задачу на точном решении с 1-м порядком.

б) Записать разностную схему в каноническом виде:

$$x_i = R_i(\tau)x_{i-1} + \tau f_i, \; i = 1, 2, \ldots, n; \; x_0 = \alpha$$

и доказать устойчивость разностной схемы.

в) Доказать, что разностная схема сходится, и дать оценку

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n}.$$

26.40. Пусть $f(t) \equiv 0$, $A(t) \equiv A$ — постоянная на $[0, l]$ матрица, имеющая k линейно независимых собственных векторов φ_j ($j = 1, 2, \ldots, k$), отвечающих собственным значениям λ_j ($j = 1, 2, \ldots, k$). Рассмотрим разностную схему

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\tau} + Ax_{i-1} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \; x_0 = \alpha.$$

а) Найти решения точной задачи и разностной схемы в виде разложений по собственным векторам матрицы A:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k} \xi_j(t)\varphi_j, \qquad x_i = \sum_{j=1}^{k} \xi_{ij}\varphi_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

б) Доказать неравенство

$$\left|(1+\lambda\tau)^{t/\tau}-e^{\lambda t}\right|\leqslant\frac{t}{2}\lambda^2\tau e^{\lambda t}$$

и с его помощью оценить $\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n}$.

26.41. Рассмотрим на $[0, +\infty)$ задачу Коши с постоянной матрицей C $(x \in E^k)$:

$$\frac{dx}{dt}=Cx, \qquad x(0)=\alpha$$

и семейство разностных схем $(\tau\|C\|<1,\ \tau>0)$

$$\frac{\tilde{x}(t+\tau)-\tilde{x}(t)}{\tau}=C\tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(0)=\alpha.$$

а) Проверить, что $x(t)=e^{Ct}\alpha$ — точное решение, $\tilde{x}(t)=(I+\tau C)^{t/\tau}\alpha$ — единственное решение разностной схемы.

б) Доказать, что в $\mathscr{L}(X)$ при $\tau\to+0$

$$(I+\tau C)^{t/\tau}\to e^{Ct}.$$

в) Дать оценку для $\|x(t)-\tilde{x}(t)\|$ при $\tau\to+0$.

26.42. Рассмотрим на $[0, l]$ задачу Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2}+b(t)\frac{dx}{dt}+c(t)x(t)=y(t), \quad x(0)=\alpha, \quad x'(0)=\beta.$$

Запишем ее в виде системы

$$\frac{dx}{dt}-u(t)=0,$$

$$\frac{du}{dt}+b(t)u+c(t)x(t)=y(t),\ x(0)=\alpha,\ u(0)=\beta.$$

а) Доказать, что при равномерной сетке разностная схема

$$\frac{x_i-x_{i-1}}{\tau}-u_{i-1}=0, \qquad i=1,2,\ldots,n;\ x_0=\alpha,$$

$$\frac{u_i-u_{i-1}}{\tau}+b(t_{i-1})u_{i-1}+c(t_{i-1})x_{i-1}=y(t_{i-1}),$$

$$i=1,2,\ldots,n;\ u_0=\beta$$

сходится, причем $\bar{x}_n$ аппроксимирует $x(t)$, а $\bar{u}_n$ аппроксимирует $x'(t)$.

в) Привести соответствующие оценки.

26.43. Доказать, что в условиях задачи 26.42 разностная схема

$$\frac{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}}{\tau^2}+b(t_{i-1})\frac{x_i-x_{i-1}}{\tau}+c(t_{i-1})x_{i-1}=y(t_{i-1}),$$

$$i=1,2,\ldots,n-1;\ x_0=\alpha, \quad \frac{x_1-x_0}{\tau}=\beta$$

однозначно разрешима и сходится, причем $\bar{x}_n=(x_i)_{i=1}^n$ аппроксимирует $x(t)$, а $\bar{x}_n'=\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{\tau}\right)_{i=1}^n$ аппроксимирует $x'(t)$.

В задачах 26.44—26.47 рассматривается краевая задача

$$-\frac{d^2x}{dt^2}+c(t)x(t)=y(t), \quad t\in[0,l],\ x(0)=x(l)=0.$$

Здесь $X=Y=C[0, l]$, $c(t)$, $y(t)\in C[0, l]$, $Ax=-\frac{d^2x}{dt^2}+c(t)x$, $D(A)$ — множество дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, l]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих граничным условиям $x(0)=x(l)=0$. Для равномерной на $[0, l]$ сетки $\bar{X}_n=\bar{Y}_n$ — пространства столбцов высоты $n-1$ $\bar{x}_n=(x_k)_{k=1}^{n-1}$ с нормой $\|\bar{x}_n\|_{\text{сф}}^2=\tau\sum_{k=1}^{n-1}|x_k|^2$, операторы сужения $T_n x=T_n' x=(x(t_k))_{k=1}^{n-1}$.

26.44. Доказать, что разностная схема

$$\frac{x_{k+1}-2x_k+x_{k-1}}{\tau^2}+c(t_k)x_k=y(t_k),$$

$$k=1,2,\ldots,n-1; \quad x_0=x_n=0$$

аппроксимирует исходную задачу со 2-м порядком, если точное решение имеет на $[0, l]$ ограниченную четвертую производную.

26.45. Доказать неравенства $(x_0=x_n=0)$:

а) $-\sum_{s=1}^{n-1}(x_{s+1}-2x_s+x_{s-1})x_s=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})^2$;

б) $\|\bar{x}_n\|^2=\sum_{s=1}^{n-1}|x_s|^2\leqslant\frac{l^2}{2}\tau^{-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})^2$.

26.46. Пусть $c(t)\geqslant 0$ на $[0, l]$.

а) Записать разностную схему задачу 26.44 в матричной форме $\bar{A}_n\bar{x}_n=\bar{y}_n$.

б) Пользуясь неравенствами задачи 26.45, доказать априорную оценку

$$(\bar{\Lambda}_n \bar{x}_n, \bar{x}_n) \geqslant 2l^{-2} \|\bar{x}_n\|^2_h,$$

откуда, согласно задаче 26.19, следует устойчивость разностной схемы.

26.47. Пусть точное решение $x(t)$ имеет на $[0, l]$ ограниченную четвертую производную, $\gamma_4 = \sup\limits_{t \in [0, l]} |x^{(4)}(t)|$, $\bar{x}_n$ — решение разностной схемы задачи 26.44.

а) Доказать, что справедлива оценка

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\text{сф}} \leqslant \frac{\gamma_4 l^4 \sqrt{l}}{24n^2}.$$

б) Пользуясь задачей 26.46, доказать, что

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\text{куб}} = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k - x(t_l)| \leqslant \frac{\gamma_4 l^4 \sqrt{l}}{24n^{3/2}}.$$

§ 27. Интерполяция сплайнами

Пусть X, $\bar{X}$ — гильбертовы пространства, причем $\bar{X} = TX$, где $T \in \mathscr{L}(X, \bar{X})$ — оператор сужения в терминах § 26. Пусть Y — гильбертово пространство и оператор $A \in \mathscr{L}(X, Y)$. Элемент $s \in X$ называется *интерполяционным сплайном* (*(T, A)-сплайном*), соответствующим «вектору входных данных» $\bar{x} \in \bar{X}$, если

$$\|As\|^2_Y = \inf_{x \in T^{-1}(\bar{x})} \|Ax\|^2.$$

Через $T^{-1}(\bar{x})$ здесь обозначено множество прообразов элемента $\bar{x}$ при отображении T, т. е. множество решений уравнения $Tx = \bar{x}$. Наиболее часто T — оператор сужения функции на сеточное множество. Таким образом, интерполяционный сплайн s осуществляет в определенном смысле оптимальное продолжение (интерполяцию) элемента $\bar{x}$ в элемент пространства X.

Теорема 27.1. *Если линейное многообразие $AN(T)$ замкнуто и $N(A) \cap N(T) = 0$, то для каждого $\bar{x} \in \bar{X}$ существует единственный интерполяционный (T, A)-сплайн s.*

Теорема 27.2. *Пусть оператор A нормально разрешим, его ядро $N(A)$ конечномерно и $N(A) \cap N(T) = 0$. Тогда линейное многообразие $AN(T)$ замкнуто.*

27.1. Пусть s — интерполяционный (T, A)-сплайн. Доказать, что для любых $z \in X$ таких, что $Tz = 0$, выполняется соотношение ортогональности $(As, Az) = 0$.

27.2. Пусть элемент $s \in X$ интерполирует $\bar{x}$, т. е. удовлетворяет соотношению $Ts = x$, так что для любых $z \in N(T)$ выполняется соотношение ортогональности $(As, Az) = 0$. Доказать, что s — интерполяционный (T, A)-сплайн.

27.3. Пусть $X = H^1[0, l]$, $Y = L_2[0, l]$, $\bar{X} = E^{n+1}$ — сеточное пространство функций, заданных на сетке $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = l$, T — оператор сужения функции $x(t) \in H^1[0, l]$ на эту сетку. Пусть $Ax = \frac{dx}{dt}$, $A \in \mathscr{L}(H^1[0, l], L_2[0, l])$. Доказать, что кусочно линейная функция

$$s_1(t) = x_i + (x_{i+1} - x_i) \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i},$$
$$t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

интерполирует вектор $\bar{x} = \{x_i\}_{i=0}^n$, удовлетворяет соотношению ортогональности и, следовательно, согласно задаче 27.2, является интерполяционным сплайном (такие сплайны называются *линейными*).

27.4. Пусть $\theta_k(t)$ — характеристическая функция отрезка $[t_{k-1}, t_k]$: $\theta_k(t) = 1$ на $[t_{k-1}, t_k]$ и $\theta_k(t) = 0$ вне $[t_{k-1}, t_k]$. Проверить, что

$$s_1(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k-1}(t_k - t) + x_k(t - t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \theta_k(t).$$

27.5. Пусть s, $\tilde{s}$ — два (T, A)-сплайна, соответствующих одному и тому же вектору $\bar{x}$.

а) Пользуясь соотношением ортогональности, доказать, что $(As, A\tilde{s}) = \|As\|^2 = \|A\tilde{s}\|^2$.

б) Используя задачу 3.19, доказать, что $A(s - \tilde{s}) = 0$, т. е. что $s - \tilde{s} \in N(A)$.

27.6. Пусть $N(A) \cap N(T) = 0$. Доказать, что каждому $\bar{x} \in \bar{X}$ соответствует не более одного (T, A)-сплайна.

27.7. Используя задачи 27.4, 27.5, доказать, что кусочно линейная функция является единственным интерполяционным линейным сплайном.

27.8. Рассмотрим на отрезке $[0, l]$ систему функций-«шапочек»:

$$\omega_0(t) = \begin{cases} 1 - t/t_1 & \text{на } [0, t_1], \\ 0 & \text{на } [t_1, t_n]; \end{cases}$$

$$\omega_i(t) = \begin{cases} \dfrac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} & \text{на } [t_{i-1}, t_i], \\ \dfrac{t_i - t}{t_{i+1} - t_i} & \text{на } [t_i, t_{i+1}], \\ 0 & \text{вне } [t_{i-1}, t_{i+1}], \quad i = 1, 2, \ldots, n-1; \end{cases}$$

$$\omega_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{на } [0, t_{n-1}], \\ \dfrac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} & \text{на } [t_{n-1}, t_n]. \end{cases}$$

а) Нарисовать графики этих функций.

б) Доказать, что в условиях задачи 27.3 $\omega_i(t)$ является сплайном, отвечающим вектору входных данных $\bar{x}^i$ с координатами $x_i = 1$, $x_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$.

27.9. Пусть $\theta_i(t)$ — характеристическая функция отрезка $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Проверить, что на $[0, l]$

$$\omega_0(t) = \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)\theta_1(t), \quad \omega_n(t) = \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}\theta_n(t),$$

$$\omega_i(t) = \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\theta_i(t) + \frac{t_i - t}{t_i - t_{i-1}}\theta_{i+1}(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

27.10. Проверить, что $s_1(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i\omega_i(t)$, т. е. что система $\omega_i(t)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ образует базис в пространстве линейных сплайнов.

27.11. Для случая равномерной сетки $t_i = ih$, $nh = l$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ доказать, что на $[0, l]$

$$\omega_i(t) = \omega\left(\frac{t}{h} - i\right), \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

где

$$\omega(s) = \begin{cases} 1 + s & \text{на } [-1, 0], \\ 1 - s & \text{на } [0, 1], \\ 0 & \text{вне } [-1, 1]. \end{cases}$$

27.12. Пусть $X = H^2[0, l]$, $Y = L_2[0, l]$, $\bar{X} = E^{n+1}$, $n \geqslant 1$, $Tx(t) = \{x(t_i)\}_{i=0}^{n}$, $Ax(t) = x''(t)$. Доказать, что $N(A) \cap N(T) = 0$ и, следовательно, задача отыскания (T, A)-сплайнов имеет не более одного решения.

27.13. Доказать, что если линейное многообразие $AN(T)$ замкнуто, то аффинное многообразие $AT^{-1}(\bar{x})$ также замкнуто.

27.14. С помощью теоремы 15.4 доказать, что в условиях задачи 27.13 существует единственный элемент y, реализующий в пространстве Y расстояние от 0 до аффинного многообразия $AT^{-1}(\bar{x})$. Доказать, что существует сплайн s, интерполирующий $\bar{x}$, и он является общим решением уравнений $As = y$, $Ts = \bar{x}$.

27.15. С помощью задач 27.13 и 27.14 доказать, что в условиях задачи 27.12 (T, A)-сплайн существует.

27.16. Назовем функцию $s_3(t)$ кубическим сплайном, интерполирующим сеточную функцию $\bar{x} = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, если:

1) $s_3(t) \in C^2[0, l]$;

2) на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ $s_3(t)$ является многочленом не выше третьей степени;

3) $Ts_3 = \bar{x}$;

4) $s_3''(0) = s_3''(l) = 0$.

Пусть на $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$

$$s_3''(t) = \beta_i \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} + \beta_{i+1}\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i},$$

где $\beta_0 = \beta_n = 0$ согласно п. 4). Доказать, что на $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$

$$s_3(t) = \beta_i \frac{(t_{i+1} - t)^3}{6\tau_{i+1}} + \beta_{i+1}\frac{(t - t_i)^3}{6\tau_{i+1}} +$$
$$+ \left(x_i - \frac{\beta_i\tau_{i+1}^2}{6}\right)\frac{t_{i+1} - t}{\tau_{i+1}} + \left(x_{i+1} - \frac{\beta_{i+1}\tau_{i+1}^2}{6}\right)\frac{t - t_i}{\tau_{i+1}},$$

где $\tau_{i+1} = t_{i+1} - t_i$.

27.17. В условиях задачи 27.16:

а) вычислить $s_3'(t)$;

б) приравнивая $s_3'(t_i - 0)$ и $s_3'(t_i + 0)$, доказать, что постоянные $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\tau_1 + \tau_2}{6} & \dfrac{\tau_2}{6} & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{\tau_2}{6} & \dfrac{\tau_2 + \tau_3}{6} & \dfrac{\tau_3}{6} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{\tau_{n-1} + \tau_n}{6} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_{n-1} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \dfrac{x_2 - x_1}{\tau_2} - \dfrac{x_1 - x_0}{\tau_1} \\ \cdots \\ \dfrac{x_n - x_{n-1}}{\tau_n} - \dfrac{x_{n-1} - x_{n-2}}{\tau_{n-1}} \end{Vmatrix};$$

в) доказать, что эта система имеет единственное решение, и, таким образом, для каждого $\bar{x}$ существует единственный кубический сплайн $s_3(t)$.

27.18. Проверить, что для кубического сплайна $s_3(t)$ выполняется соотношение ортогональности и, следовательно, согласно задаче 27.2 $s_3(t)$ есть (T, A)-сплайн в условиях задачи 27.12.

27.19. Рассмотрим функцию

$$\sigma(t) = \frac{1}{6}\begin{cases} 0 & \text{при } t \geqslant 2, \\ (2-t)^3 & \text{на } [1, 2], \\ 1 + 3(1-t) + 3(1-t)^2 - 3(1-t)^3 & \text{на } [0, 1], \end{cases}$$

$\sigma(t) = \sigma(-t)$ при $t < 0$. Доказать, что функция $\sigma(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $(-\infty, +\infty)$, и нарисовать ее график.

27.20. В условиях задачи 27.19 введем на $[0, l]$ систему функций

$$\sigma_i(t) = \sigma(t/h - i),\ t = 0, 1, \ldots, n;\ h = l/n.$$

Доказать, что для любой функции $z(t) \in H^2[0, l]$ такой, что $z(jh) = 0$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$, выполняется соотношение ортогональности

$$\int_0^l \sigma_i''(t)\, z''(t)\, dt = 0,$$

и, следовательно, согласно задаче 27.2, $\sigma_i(t)$ является кубическим сплайном, отвечающим вектору входных данных $\bar{x}$ с координатами $x_i = 2/3$, $x_{i-1} = x_{i+1} = 1/6$, $x_k = 0$ при $k \neq i-1, i, i+1$ (при $i = 0$ $x_0 = 2/3$, $x_1 = 1/6$, $x_k = 0$, если $k > 1$, а при $i = n$ $x_k = 0$, если $k < n-1$, $x_{n-1} = 1/6$, $x_n = 2/3$).

27.21. Проверить, что в условиях задачи 27.20 система $\sigma_i(t)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ образует базис в пространстве кубических сплайнов в случае равномерной сетки, причем

$$s_3(t) = \sum_{i=0}^{n} \xi_i \sigma_i(t),$$

где вектор $\bar{\xi}$ определяется из системы линейных уравнений

$$\begin{Vmatrix} 2/3 & 1/6 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2/3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \cdots \\ \xi_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x(0) \\ x(h) \\ \cdot \\ x(l) \end{Vmatrix}.$$

27.22. Пусть $X = H^1[0, l]$, $\bar{X}_n$ — пространство $(n+1)$-мерных столбцов с нормой

$$\|\bar{x}_n\| = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |x_k| + \tau^{-1} \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |x_{k+1} - x_k|,$$

$t_k = k\tau$, $n\tau = l$, $T_n x = (x(t_k))_{k=0}^n$. Пусть S_n — оператор кусочно-линейной интерполяции, ставящий в соответствие вектору входных данных $(x(t_k))_{k=0}^n$ линейный сплайн $s_1(t)$. Доказать, что:

а) $S_n \in \mathscr{L}(\bar{X}_n, X)$ и $\|S_n\| \leqslant 2\sqrt{l}$;

б) оператор S_n является правым обратным к оператору T_n.

27.23. Пусть даны банаховы пространства X, $\bar{X}_n$ $(n \in \mathbf{N})$ и операторы сужения $T_n \in \mathscr{L}(X, X_n)$, $T_n X = \bar{X}_n$. Доказать, что если оператор $S_n \in \mathscr{L}(\bar{X}_n, X)$ является правым обратным к оператору T_n $(n \in \mathbf{N})$, то операторы $P_n = S_n T_n$ являются ограниченными проекторами на $X_n = S_n \bar{X}_n$ $(n \in \mathbf{N})$.

27.24. В условиях задач 27.22 и 27.23:

а) доказать, что проектор P_n можно задать в виде

$$P_n x = \sum_{i=0}^{n} x(t_i)\, \omega_i(t),$$

где $\omega_i(t)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ — система функций из задачи 27.8;

б) доказать, что

$$x - P_n x = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(t) \left\{ x(t) - x(t_{i-1}) - [x(t_i) - x(t_{i-1})] \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right\};$$

в) с помощью формулы Тейлора доказать, что при $n \to \infty$

$$\|x - P_n x\|_{H^1[0,l]} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{если } x \in H^1[0, l],$$

$$\|x - P_n x\|_{H^2[0,l]} = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \text{если } x \in H^2[0, l].$$

27.25. Пусть $X = L_2[0, l]$, $\bar{X}_n$ — евклидово пространство столбцов $\bar{x} = (x_i)_{i=1}^n$ с нормой

$$\|\bar{x}_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 (t_i - t_{i-1}).$$

Пусть, далее,

$$T_n x = \left\{ \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} x(s)\, ds \right\}_{i=1}^{n}.$$

Доказать, что:

а) (T, I)-сплайны имеют вид $S_n \bar{x}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \theta_i(t)$;

б) $\min\limits_{x \in T_n^{-1}(\bar{x}_n)} \|x\|^2_{L_2[0,l]} = \|\bar{x}_n\|^2_{\bar{X}_n}$.

27.26. В условиях предыдущей задачи доказать, что $T_n \in \mathscr{L}(X, \bar{X}_n)$, $\|T_n\| \leqslant 1$, $S_n \in \mathscr{L}(\bar{X}_n, X)$, $\|S_n\| = 1$, $S_n = (T_n)_r^{-1}$, $P_n = S_n T_n$ — проекторы, и $\|P_n x - x\| = O(1/n)$ $(n \to \infty)$ при $x \in H^1_{[0,l]}$.

§ 28. Приближенные схемы Галеркина

Пусть X, Y — банаховы пространства, A — линейный оператор с $D(A) \subset X$, $R(A) \subset Y$. Для отыскания приближенного решения уравнения $Ax = y$ $(y \in R(A))$ задают две последовательности подпространств $X_n \subset D(A)$, $Y_n \subset Y$ и *две последовательности проекторов* P_n и Q_n, $P_n X = X_n$, $Q_n Y = Y_n$. Последовательность приближенных уравнений (*схема Галеркина*) задается в виде

$$Q_n A x_n = Q_n y, \quad x_n \in X_n.$$

Это частный случай более общего подхода, рассмотренного в § 26.

Теорема 28.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

а) $Q_n y = R(Q_n A P_n)$, *т. е. приближенные уравнения разрешимы;*

б) $P_n x \to x$ $(n \to \infty)$ *на каждом точном решении* x;

в) $Q_n y \to y$ $(n \to \infty)$;

г) $\|Q_n A x - Q_n A P_n x\| \to 0$ $(n \to \infty)$ *на каждом точном решении* x, *т. е. выполнено условие аппроксимации:*

д) $\|Q_n A x_n\| \geqslant \gamma \|x_n\|$ *для каждого* $x_n \in X_n$ *и каждого* $n \in \mathbf{N}$, *где* γ — *положительная постоянная, т. е. выполнено условие устойчивости.*

Тогда точное и приближенные решения единственны, галеркинская схема сходится и справедлива оценка

$$\|x_n - x\| \leqslant \|P_n x - x\| + \gamma^{-1} \|Q_n A x - Q_n A P_n x\|.$$

Пусть подпространства X_n, Y_n — n-мерные, $\{\varphi_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ — базис в X_n, $\{\gamma_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ — биортогональная к нему система

линейных функционалов. Тогда оператор P_n можно задать в виде

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \gamma_i^{(n)} \rangle \varphi_i^{(n)}.$$

Аналогично, пусть $\{z_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ — базис в Y_n, $\{\psi_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ — биортогональная к нему система линейных функционалов; тогда

$$Q_n y = \sum_{k=1}^{n} \langle y, \psi_k^{(n)} \rangle z_k^{(n)}.$$

Разыскивая галеркинское приближение x_n в виде

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(n)} \varphi_i^{(n)}$$

и подставляя его в приближенное уравнение, получаем для определения $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$ систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \langle A\varphi_i^{(n)}, \psi_k^{(n)} \rangle \xi_i^{(n)} = \langle y, \psi_k^{(n)} \rangle, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Отметим важный частный случай, когда X_n и Y_n являются соответственно линейными оболочками первых n векторов систем $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{z_k\}_{k=1}^\infty$. Тогда системы $\{\gamma_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ также можно выбрать не зависящими от n.

28.1. Пусть $x_n \in X_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Запись $x_n \xrightarrow{P} x$ $(n \to \infty)$ означает, что $\|x_n - P_n x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что если $x_n \xrightarrow{P} x$, $y_n \xrightarrow{P} y$ $(n \to \infty)$, то для любых скаляров α, β будет $\alpha x_n + \beta y_n \xrightarrow{P} \alpha x + \beta y$.

28.2. Точка $x \in X$ называется *P-предельной точкой* последовательности подпространств X_n, $X_n = P_n X$ $(n \in \mathbf{N})$, если $P_n x \to x$ при $n \to \infty$. Пусть x — P-предельная точка последовательности X_n. Доказать, что для того чтобы последовательность x_n P-сходилась к x, необходимо и достаточно, чтобы x_n сходилась к x в пространстве X.

28.3. Если всякий элемент $x \in X$ является P-предельной точкой последовательности X_n, то последовательность подпространств X_n называют предельно плотной в пространстве X. Доказать, что если последовательность X_n предельно плотна в X, то понятия P-сходимости и сходимости в X совпадают.

28.4. Пусть

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \gamma_i^{(n)} \rangle \varphi_i^{(n)}, \quad Q_n y = \sum_{k=1}^{n} \langle y, \psi_k^{(n)} \rangle z_k^{(n)},$$

где системы $\{\varphi_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ и $\{\gamma_i^{(n)}\}_{i=1}^n$, $\{z_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ и $\{\psi_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ биортогональны. Доказать, что $P_n^2 = P_n$, $Q_n^2 = Q_n$.

28.5. Пусть $\omega_n > 0$, $\|Q_n\| \leqslant \omega_n$, $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, а x есть P-предельная точка последовательности подпространств X_n, причем $\|x - P_n x\| = o(\omega_n^{-1})$ при $n \to \infty$. Доказать, что на элементе x выполнено условие аппроксимации.

28.6. Пусть существуют линейно независимые системы $\varphi_i \in D(A)$, $\psi_j \in D(A^*)$ $(i, j \in \mathbf{N})$ такие, что $\langle A\varphi_i, \psi_j\rangle = \delta_{ij}$ $(i, j \in \mathbf{N})$. Положим

$$P_n x = \sum_{i=1}^n \langle x, A^*\psi_i\rangle \varphi_i,$$

$$Q_n y = \sum_{i=1}^n \langle y, \psi_i\rangle A\varphi_i.$$

(Полученная схема называется *схемой наименьших квадратов*.) Доказать, что в этом случае $\|Q_n A x - Q_n A P_n x\| = 0$ для любого $x \in D(A)$, т. е. условие аппроксимации выполнено точно.

28.7. Пусть $A = A_1 + A_2$, причем для каждого из операторов A_1, A_2 условие аппроксимации выполнено. Доказать, что оно выполнено и для оператора A.

28.8. Пусть для любого $x \in D(A)$ выполняется неравенство $\|Ax\| \geqslant \alpha\|x\|$, а для любой последовательности $y_n \in AX_n$ выполняется неравенство $\|Q_n y_n\| \geqslant \beta\|y_n\|$, где α, β — положительные постоянные. Доказать, что галеркинская аппроксимация устойчива с постоянной $\gamma = \alpha\beta$.

28.9. Пусть оператор A действует в вещественном гильбертовом пространстве H и для любого $x \in D(A)$ выполняется неравенство $(Ax, x) \geqslant \gamma(x, x)$, где $\gamma > 0$ — постоянная. Доказать, что $(P_n A x_n, x_n) \geqslant \gamma\|x_n\|^2$ для любой последовательности $x_n \in X_n$. Вывести отсюда устойчивость галеркинской аппроксимации.

28.10. Пусть в схеме наименьших квадратов (задача 28.6) $D(A)$ плотна в X и для любого $x \in D(A)$ выполняется неравенство $\|Ax\| \geqslant \gamma\|x\|$, где γ — положительная постоянная. Доказать устойчивость этой схемы.

28.11. Доказать, что в условиях задачи 28.10 для схемы наименьших квадратов справедлива оценка

$$\|x_n - x\| \leqslant \gamma^{-1}\|Q_n y - y\|$$

и, следовательно, схема сходится при $Q_n y \to y$ $(n \to \infty)$.

28.12. Пусть H — гильбертово пространство, $A\colon H \to H$ — линейный оператор с $D(A)$, плотной в H. Проверить, что на решении уравнения $Ax = y$ реализуется минимум функционала

$$\varphi(x) = \|Ax - y\|^2.$$

28.13. В условиях задачи 28.12 пусть φ_i $(i \in \mathbf{N})$ — линейно независимая система в H. Приближенное решение $x_n = \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i$ будем разыскивать из требования

$$\varphi(x_n) = \left\|\sum_{i=1}^n c_i A\varphi_i - y\right\|^2 = \min.$$

Выписать систему уравнений для $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Доказать, что этот метод (*метод Ритца*) приводит к схеме наименьших квадратов.

28.14. Пусть подпространства X_n, Y_n — n-мерные. Доказать, что из устойчивости схемы Галеркина вытекает однозначная разрешимость приближенных уравнений.

28.15. Пусть X, Y — гильбертовы пространства, P_n, Q_n — операторы ортогонального проектирования $P_n x = \sum_{i=1}^n (x, \varphi_i)\varphi_i$, $Q_n y = \sum_{i=1}^n (y, \psi_i)\psi_i$. Доказать, что условие устойчивости можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \gamma \sum_{k=1}^n \xi_k^2.$$

Вычислить коэффициенты c_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

28.16. Пусть оператор $A = A_1 + A_2$ действует в вещественном гильбертовом пространстве H, причем для любого $x \in D(A)$ справедливы неравенства $(A_1 x, x) \geqslant \gamma_1\|x\|^2$, $(A_2 x, x) \geqslant \gamma_2\|x\|^2$, где γ_1, γ_2 — постоянные, $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$. Доказать, что для оператора A выполнено условие устойчивости (по Галеркину).

28.17. В пространстве $H = L_2[0, 1]$ рассмотрим оператор $Ax = -\dfrac{d^2x}{dt^2}$ с областью определения $D(A)$, состоящей из дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих граничным условиям $x(0) = x(1) = 0$. Выберем в H систему элементов $\varphi_k = \psi_k = \sqrt{2}\sin k\pi t$ $(k \in \mathbf{N})$, одновременно координатную и проекционную; тогда

$$Q_n x = P_n x = \sum_{k=1}^n (x, \varphi_k)\varphi_k.$$

Доказать, что:

а) $\|P_n\| = 1$;

б) $P_n A x = \sum_{k=1}^{n} k^2\pi^2 (x, \varphi_k)\varphi_k = AP_n x$, откуда $P_n A P_n x - P_n A x = 0$ для всех $x \in D(A)$, т. е. выполняется условие галеркинской аппроксимации.

28.18. В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим оператор $Ax(t) = c(t)x(t)$, где $c(t)$ — непрерывная на $[0, 1]$ функция. Зададим $P_n = Q_n$, как в задаче 28.17. Пользуясь задачей 28.6, доказать, что для оператора A выполнено условие галеркинской аппроксимации.

28.19. Пусть $A = A_1 + A_2$, где оператор A_1 определен в задаче 28.17, а оператор A_2 — в задаче 28.18. Пользуясь задачей 28.7, проверить, что для оператора A выполнено условие аппроксимации по Галеркину.

28.20. Пусть A — дифференциальный оператор, определенный в задаче 28.17.

а) Доказать, что для любого $x \in D(A)$ выполняется

$$(Ax, x) = \int_0^1 x'^2(t)\,dt.$$

б) Используя задачу 22.19, доказать, что для любого A выполняется неравенство $(Ax, x) \geqslant \pi^2(x, x)$.

в) Используя задачу 28.9, доказать что для оператора A выполнено условие устойчивости.

28.21. Пусть A — оператор, определенный в задаче 28.18, причем всюду на $[0, 1]$ выполняется неравенство $c(t) \geqslant \alpha$. Доказать, что для оператора A выполнено условие $(Ax, x) \geqslant \alpha(x, x)$.

28.22. Доказать, что для оператора $A = A_1 + A_2$, где A_1 определен в задаче 28.17, а A_2 — в задаче 28.21, причем $\alpha > -\pi^2$, выполнено условие устойчивости.

28.23. Пусть функция $y(t)$ непрерывна на $[0, 1]$. Рассмотрим краевую задачу

$$-x'' + c(t)x = y, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Пусть $\varphi_k = \psi_k = \sqrt{2}\sin k\pi t$ $(k \in \mathbf{N})$.

а) Доказать, что галеркинские приближения решения этой задачи имеют вид

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t),$$

где коэффициенты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ определяются из системы

линейных уравнений

$$(k\pi)^2 \xi_k + \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\xi_i = \eta_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

б) Найти выражения для c_{ik} и η_k $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

28.24. Пользуясь задачами 28.17—28.23, проверить для краевой задачи 28.23 выполнение условий теоремы о сходимости галеркинской схемы. Дать оценку скорости сходимости галеркинского приближения к точному решению.

28.25. Пусть $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, операторы $Q_n A P_n$ непрерывно обратимы и для $n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство

$$\|(Q_n A P_n)^{-1}\| \leqslant \gamma.$$

а) Доказать, что галеркинское условие устойчивости выполнено.

б) Пусть A непрерывно обратим, точное решение x является P-предельной точкой, а $\|Q_n\| \leqslant c$. Доказать, что условие галеркинской аппроксимации выполнено и что справедлива оценка

$$\|x_n - x\| \leqslant \gamma c \|A\| \, \|P_n x - x\|.$$

28.26. Пусть $Y = X$, $A = I - K$, $K \in \mathscr{L}(X)$, $Q_n = P_n$. Предположим, что операторы $I_n - P_n K P_n$, где I_n — тождественный оператор в $P_n X$, непрерывно обратимы, и для любого $n \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство

$$\|(I_n - P_n K P_n)^{-1}\| \leqslant \gamma.$$

Доказать устойчивость галеркинской схемы.

28.27. В условиях предыдущей задачи пусть операторы $I - K$ и $I - P_n K$ $(n \in \mathbf{N})$ непрерывно обратимы и для любого $n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство

$$\|P_n K - K\| \leqslant q \|(I - K)^{-1}\|^{-1},$$

где $q \in (0, 1)$. Доказать устойчивость галеркинской схемы с

$$\gamma = \frac{\|(I - K)^{-1}\|}{1 - q}.$$

28.28. Пусть в условиях задачи 28.26 $P_n K \to K$ при $n \to \infty$, а $P_n x \to x$ при $n \to \infty$. Доказать, что:

а) для галеркинской схемы выполнены условия аппроксимации и устойчивости;

б) выполняется неравенство $\|x_n - x\| \leqslant \gamma \|P_n x - x\|$.

28.29. Пусть в условиях задачи 28.26 при $n \to \infty$ $P_n K \to K$, $P_n y \to y$. Доказать, что справедлива оценка

$$\|x_n - x\| \leqslant \gamma \|P_n y - y\| + \gamma \|(I - K)^{-1}\| \, \|P_n K - K\| \, \|y\|.$$

28.30. В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим интегральный оператор

$$Kx = \int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

где

$$K(t, s) = \frac{4 - s^2}{4 - 4s\cos \pi t + s^2}.$$

Выберем в $L_2[0, 1]$ координатную систему $\varphi_k = \sqrt{2}\cos k\pi t$ $(k \in \mathbf{N})$ и построим проекторы

$$P_n x = \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\, \varphi_k.$$

Доказать, что $P_n K \to K$ при $n \to \infty$.

28.31. В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$x(t) - \int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, ds = y(t).$$

Выберем в $L_2[0, 1]$ координатную систему $\varphi_k(t)$ $(k \in \mathbf{N})$.

а) Выписать систему для вычисления коэффициентов галеркинского приближения.

б) Для случая, рассмотренного в задаче 28.30, доказать сходимость галеркинской схемы.

28.32. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим интегральное уравнение предыдущей задачи с $y(t) \in C[0, 1]$ и ядром $K(t, s)$, непрерывным при $0 \leqslant t, s \leqslant 1$. Положим

$$P_n x = Q_n x = \sum_{i=0}^{n} \xi_i \omega_i(t),$$

где функции $\omega_i(t)$ определены в задаче 27.8.

а) Выписать систему уравнений для определения коэффициентов $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$.

б) Пусть $\max\limits_{t, s \in [0,1]} |K(t, s)| = k < 1/2$. Доказать, что при $n > \frac{2k}{1 - 2k}$ приближенные уравнения однозначно разрешимы и галеркинская схема устойчива.

в) Доказать сходимость галеркинской схемы.

28.33. На отрезке $[0, l]$ рассмотрим задачу Коши

$$Ax = x' + c(t)x = y(t), \quad x(0) = 0$$

с $D(A) \subset H^1[0, l]$ — пространством функций из $H^1[0, l]$, удовлетворяющих начальному условию $x(0) = 0$, и с $R(A) = L_2[0, l]$ (предполагается, что $c(t) \in C[0, l]$). Для равномерной на $[0, l]$ сетки с шагом τ введем проекторы

$$P_n x = \sum_{i=0}^{n} x(t_i)\, \omega_i(t),$$

$$Q_n y = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} y(s)\, \theta_i(s)\, ds \right) \theta_i(t),$$

где $\omega_i(t)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ — базисные функции подпространства линейных сплайнов (задача 27.8), а $\theta_i(t)$ — характеристическая функция отрезка $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

а) Вычислить $(A\omega_i, \theta_j)$, (y, θ_j) и выписать систему для определения коэффициентов $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ галеркинского приближения

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_i \omega_i(t).$$

б) Доказать, что при $\tau \|c\|_{C[0,l]} < 1$ существует единственное галеркинское приближение.

в) Для исследования сходимости положим $z = x - x_n$. Доказать, что z есть решение задачи Коши

$$z' + c(t)z = \widehat{f}(t), \quad z(0) = 0,$$

где $\widehat{f}(t) \in L_2[0, l]$ и $Q_n \widehat{f} = 0$. Пользуясь этим, доказать, что если $f \in L_2[0, l]$, то

$$\|z\|_{H^1[0,l]} = O(\tau^{3/2})$$

при $\tau \to 0$, а если $f(t)$ еще и ограничена, то

$$\|z\|_{H^1[0,l]} = O(\tau^2)$$

при $\tau \to 0$.

§ 29. Метод монотонных операторов

Пусть X — вещественное сепарабельное нормированное пространство, X^* — пространство, сопряженное к X, $A\colon X \to X^*$ — нелинейный оператор с $D(A) = X$ и $R(A) \subset X^*$.

Оператор A называется *монотонным*, если для любых $x, y \in X$ выполняется неравенство $\langle x - y, A(x) - A(y) \rangle \geqslant 0$. Если при $x \neq y$ имеет место строгое неравенство, то оператор A называется *строго монотонным*. Если же су-

ществует непрерывная и неотрицательная при $t \geqslant 0$ функция $c(t)$ такая, что $c(0) = 0$, $c(t) > 0$ при $t > 0$, $c(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ и такая, что справедливо неравенство $\langle x - y, A(x) - A(y) \rangle \geqslant c(\|x - y\|) \cdot \|y - x\|$, то оператор A называется *сильно монотонным*. Оператор A называется *коэрцитивным*, если существует функция $\gamma(t)$, заданная при $t \geqslant 0$ и стремящаяся к $+\infty$ при $t \to +\infty$ такая, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\langle x, A(x) \rangle \geqslant \gamma(\|x\|) \cdot \|x\|$. Оператор A называется *деминепрерывным* в точке $x_0 \in X$, если из $x_n \to x_0$ по норме X следует, что $A(x_n) \to A(x_0)$ $(n \to \infty)$ слабо, т. е. $\langle x, A(x_n) \rangle \to \langle x, A(x_0) \rangle$ $(n \to \infty)$ для любого $x \in X$.

Теорема 29.1. *Пусть оператор A отображает вещественное сепарабельное банахово пространство X в пространство X^* и является сильно монотонным и деминепрерывным. Тогда уравнение $A(x) = y$ имеет единственное решение $\hat{x}$ для любого $y \in X^*$.*

Для приближенного отыскания решения $\hat{x}$ в условиях теоремы 29.1 применяется *метод Галеркина*. Пусть X_n $(n \in \mathbf{N})$ — последовательность n-мерных подпространств в X с базисом $\{\varphi_i^{(n)}\}_{i=1}^n$, предельно плотная в X. Галеркинское приближение

$$x_n = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(n)} \varphi_i^{(n)}$$

здесь разыскивается из системы уравнений

$$\langle \varphi_k^{(n)}, A(x_n) \rangle = \langle \varphi_k^{(n)}, y \rangle, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 29.2. *В условиях теоремы 29.1 при каждом n существует единственное галеркинское приближение x_n точного решения $\hat{x}$. При этом $x_n \to \hat{x}$ $(n \to \infty)$ по норме пространства X. Если $\|A(u) - A(v)\| \leqslant K\|u - v\|$ в некотором шаре S, содержащем все x_n и $\hat{x}$, то справедлива оценка скорости сходимости*

$$\|x_n - \hat{x}\| \leqslant c^{-1}(K)\|x - P_n x\|,$$

где $c(t)$ — функция из определения сильной монотонности, а P_n — проектор на X_n.

29.1. Пусть оператор $f(x)$, $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ удовлетворяет условию $(x - y)[f(x) - f(y)] \geqslant 0$ для любых $x, y \in \mathbf{R}$. Доказать, что f — монотонный оператор.

29.2. Пусть оператор $f(x)$, $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ удовлетворяет условию $(x - y)[f(x) - f(y)] \geqslant \alpha|x - y|^2$ для любых $x, y \in \mathbf{R}$,

где $\alpha > 0$ — постоянная. Доказать, что f — сильно монотонный оператор.

29.3. Доказать, что функция $f(x) = x^3 + x + 1$ $(x \in \mathbf{R})$ определяет в $\mathbf{R}$ сильно монотонный оператор.

29.4. Пусть функция $f(x)$, $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ дифференцируема на $\mathbf{R}$ и $f'(x) \geqslant \alpha$ на $\mathbf{R}$, где α — постоянная. Доказать, что при $\alpha \geqslant 0$ f — монотонный оператор, а при $\alpha > 0$ f — сильно монотонный оператор.

29.5. Пусть для всех $x = \{x_i\}_{i=1}^k \in E^k$ определен оператор $A\colon E^k \to E^k$,

$$A(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_k) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_k(x_1, \ldots, x_k) \end{pmatrix}.$$

Проверить, что если для любых $x \in E^k$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^k (x_i - y_i)[f_i(x_1, \ldots, x_k) - f_i(y_1, \ldots, y_k)] \geqslant c \sum_{i=1}^k |x_i - y_i|^2,$$

где c — постоянная, то при $c \geqslant 0$ оператор $A(x)$ монотонен, а при $c > 0$ — сильно монотонен.

29.6. Рассмотрим оператор $A(x)$ задачи 29.5 при $k = 2$. Пусть координатные функции f_1 и f_2 имеют всюду в E^2 частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i, j = 1, 2)$, причем во всех точках E^2 выполняются неравенства

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \geqslant \alpha, \quad i = 1, 2; \quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \leqslant \beta, \quad i \neq j; \ i, j = 1, 2,$$

где α, β — постоянные. Доказать, что оператор $A(x)$ при $\beta \leqslant \alpha$ является монотонным, а при $\beta < \alpha$ — строго монотонным с $c(t) = (\alpha - \beta)t$.

29.7. Доказать, что оператор $A\colon E^2 \to E^2$

$$A(x) = \begin{pmatrix} x_1^3 + 3x_1 - 2x_2 + 1 \\ 2x_2^7 + x_1 + 5x_2 - 4 \end{pmatrix}$$

является сильно монотонным оператором.

29.8. Пусть оператор $A\colon X \to X^*$ — сильно монотонный. Доказать, что A — коэрцитивный оператор с $\gamma(t) = c(t) - \|A(0)\|$.

29.9. Доказать, что если оператор $A\colon X \to X^*$ коэрцитивен, то $\langle x, A(x) \rangle \to +\infty$ при $\|x\| \to +\infty$.

29.10. Доказать, что если оператор $A\colon X \to X^*$ коэрцитивен, то $\|A(x)\| \to +\infty$ при $\|x\| \to \infty$.

29.11. Пусть H — гильбертово пространство, A: $H \to H$ — оператор с $D(A) = H$. Сформулировать для A определения монотонности, сильной монотонности, коэрцитивности.

29.12. Пусть $A \in \mathscr{L}(H)$, причем для любого $x \in H$ выполняется неравенство $(Ax, x) \geqslant \gamma(x, x)$, где $\gamma > 0$ — постоянная. Доказать, что A сильно монотонен и коэрцитивен.

29.13. Пусть оператор $f(x)$, f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрерывен и монотонен на $\mathbf{R}$ и $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Доказать, что уравнение $f(x) = 0$ имеет в $\mathbf{R}$ хотя бы одно решение, а если f строго монотонен, то это решение единственно.

29.14. Проверить, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 5 & \text{при} \quad x < -1, \\ x + 2 & \text{при} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^7 + 4 & \text{при} \quad x > 1 \end{cases}$$

монотонна, стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$, но разрывна, и уравнение $f(x) = 0$ решений не имеет.

29.15. Пусть оператор f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрерывен и сильно монотонен. Доказать, что уравнение $f(x) = 0$ имеет в $\mathbf{R}$ единственное решение.

29.16. Пусть функция двух переменных $f(x, t)$, f: $E^2 \to \mathbf{R}$ непрерывна на E^2 и при любых $x, y, t \in \mathbf{R}$ удовлетворяет неравенству

$$(x - y)[f(x, t) - f(y, t)] \geqslant c|x - y|^2,$$

где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от t. Доказать, что уравнение $f(x, t) = 0$ определяет на $\mathbf{R}$ единственную неявную функцию $x = \varphi(t)$, непрерывную на $\mathbf{R}$.

29.17. Обобщить результат задачи 29.16 на случай, когда $t \in G$ — открытой или замкнутой области в E^k.

29.18. Пусть непрерывная в E^2 функция $f(x, t)$ удовлетворяет неравенству $f_x(x, t) \geqslant c > 0$. Доказать, что справедливо утверждение задачи 29.16.

29.19. Пусть оператор $A(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$ для любых $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E^2$ непрерывен и удовлетворяет условию сильной монотонности

$$(x_1 - y_1)(f_1(x_1, x_2) - f_1(y_1, y_2)) + (x_2 - y_2)(f_2(x_1, x_2) - f_2(y_1, y_2)) \geqslant c[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2],$$

где $c > 0$ — постоянная. Доказать, что уравнение

$f_2(x_1, x_2) = 0$ имеет для любых $x_1 \in \mathbf{R}$ единственное решение $x_2 = \varphi(x_1)$ и оно непрерывно на $\mathbf{R}$.

29.20. В условиях задачи 29.19 рассмотрим оператор $A_1(x_1) = f(x_1, \varphi(x_1))$. Доказать, что A_1 непрерывен и сильно монотонен на $\mathbf{R}$.

29.21. В условиях задачи 29.19 доказать, что уравнение $A(x) = 0$ имеет в E^2 единственное решение.

29.22. Пусть оператор A: $E^k \to E^k$ непрерывен в E^k и сильно монотонен при $c(t) = ct$, где $c > 0$. Доказать методом математической индукции по k, что уравнение $A(x) = 0$ имеет в E^k единственное решение.

29.23. Пусть оператор A: $E^k \to E^k$ непрерывен и монотонен. Доказать, что при $c > 0$ оператор $A_c(x) = A(x) + cx$ непрерывен и сильно монотонен с $c(t) = ct$.

29.24. Пусть оператор A: $E^k \to E^k$ обладает следующим свойством: существует $r > 0$ такое, что для всех x с $\|x\| > r$ выполняется неравенство $(x, A(x)) \geqslant 0$. Доказать, что при $\|x\| > r$ справедливо неравенство $(x, A_c(x)) > 0$ (оператор $A_c(x)$ определен в задаче 29.23).

29.25. Пусть оператор A: $E^k \to E^k$ непрерывен, монотонен и удовлетворяет условию задачи 29.24. Доказать, что уравнение $A(x) = 0$ имеет в E^k решение. Для этого рассмотреть операторы $A_n(x) = A(x) + \frac{1}{n}x$ и, пользуясь результатами задач 29.23 и 29.24, доказать, что:

а) при $n \in \mathbf{N}$ каждое уравнение $A_n(x) = 0$ имеет в E^k единственное решение x_n;

б) решения x_n удовлетворяют неравенству $\|x_n\| \leqslant r$ $(n \in \mathbf{N})$;

в) существует подпоследовательность x_{n_k} $(k \in \mathbf{N})$ последовательности x_n, сходящаяся к x_0 — решению уравнения $A(x) = 0$.

В задачах 29.26—29.38 на отрезке $[0, l]$ рассматривается краевая задача

$$\mathscr{L}x(t) - f(t, x(t)) = 0,$$

$$\mathscr{D}^k x(0) = \mathscr{D}^k x(l) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m - 1,$$

с формальным дифференциальным выражением $(m \geqslant 1)$

$$\mathscr{L}x(t) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \mathscr{D}^k [P_k(t) \mathscr{D}^k x(t)].$$

Здесь $\mathscr{D} = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования, коэффициенты $P_k(t) \in C[0, l]$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$, а функция $f(t, x)$ непрерывна в полосе $t \in [0, l]$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Пусть $\tilde{H}^m[0, l]$ — линейное пространство m раз непрерывно дифференцируемых на $[0, l]$ функций со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_0^l \left[\sum_{i=0}^{m} x^{(i)}(t)\, y^{(i)}(t) \right] dt,$$

$$\left(x^{(0)}(t) = x(t), \quad y^{(0)}(t) = y(t)\right).$$

Пополнение пространства $\tilde{H}^m[0, l]$ есть гильбертово пространство, называемое *пространством Соболева* и обозначаемое $H^m[0, l]$. Элементы, присоединяемые к $\tilde{H}^m[0, l]$ при его пополнении, могут быть отождествлены с функциями из пространства $C^{m-1}[0, l]$, имеющими обобщенные производные. Справедливо утверждение о вложении пространства $H^m[0, l]$ в пространство $C^{m-1}[0, l]$, аналогичное теореме 4.1.

В пространстве $H^m[0, l]$ рассмотрим подпространство

$$\overset{\circ}{H}{}^m[0, l] = \{x(t) \in H^m[0, l]: \mathscr{D}^k x(0) = \mathscr{D}^k x(l) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Функция $x(t) \in \overset{\circ}{H}{}^m[0, l]$ называется *обобщенным решением* данной краевой задачи, если для любого $z \in \overset{\circ}{H}{}^m[0, l]$ выполняется интегральное тождество

$$a(x, z) = \int_0^l \sum_{k=0}^{m} P_k(t)\, \mathscr{D}^k x(t)\, \mathscr{D}^l z(t)\, dt = \int_0^l f(t, x(t))\, z(t)\, dt.$$

29.26. Доказать, что при каждом $x \in \overset{\circ}{H}{}^m[0, l]$ выражение $a(x, z)$ является ограниченным линейным функционалом относительно $z \in \overset{\circ}{H}{}^m[0, l]$ и, следовательно, представимо в виде

$$a(x, z) = (\tilde{x}, z)_{H^m[0,l]} = (Ax, z)_{H^m[0,l]}.$$

29.27. Доказать, что $A \in \mathscr{L}\left(\overset{\circ}{H}{}^m[0, l], \overset{\circ}{H}{}^m[0, l]\right)$, где оператор $Ax = \tilde{x}$ определен в предыдущей задаче.

29.28. Пусть существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что для всех $x \in \overset{\circ}{H}{}^m[0, l]$ выполняется неравенство

$$a(x, x) \geqslant \alpha \|x\|^2_{H^m[0,l]}.$$

Используя задачу 29.12, доказать, что оператор A сильно монотонен.

29.29. Доказать, что для любой функции $f(t) \in L_2[0, l]$

$$\int_0^l f(t)\, z(t)\, dt$$

является ограниченным линейным функционалом относительно $z \in \overset{\circ}{H}{}^m[0, l]$ и, следовательно, существует единственная функция $y \in \overset{\circ}{H}{}^m[0, l]$ такая, что

$$\int_0^l f(t)\, z(t)\, dt = (y, z)_{H^m[0,l]}.$$

29.30. Рассмотрим в $\overset{\circ}{H}{}^m[0, l]$ уравнение $Ax = y$, где A, y определены в задачах 29.26—29.29. Доказать, что в предположениях задачи 29.28 это уравнение имеет единственное решение, являющееся обобщенным решением исходной линейной краевой задачи с $f(t, x) \equiv f(t)$.

29.31. Пусть $m = 1$, $P_1(t) \equiv 1$, а норма в $\overset{\circ}{H}{}^1[0, l]$ порождается скалярным произведением

$$(x, y)_{\overset{\circ}{H}{}^1[0,l]} = \int_0^l x'(t)\, y'(t)\, dt.$$

Пусть $G(t, s)$ — функция Грина для оператора Штурма — Лиувилля $Ux = -x''$, $x(0) = x(l) = 0$. Доказать, что уравнение, введенное в задаче 29.30, является следующим линейным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода:

$$x(t) + \int_0^l G(t, s)\, P_0(s)\, x(s)\, ds = \int_0^l G(t, s)\, f(s)\, ds.$$

29.32. Доказать, что при выполнении условия задачи 29.28 скалярное произведение в $H^m[0, l]$ можно задать формулой

$$(x, z)_{H^m[0,l]} = a(x, z).$$

29.33. Пользуясь задачей 29.29, доказать, что исходная линейная краевая задача (при $f(t, x) \equiv f(t)$) имеет единственное обобщенное решение $x = y$, где y таково, что

$$\int_0^l f(t)\, z(t)\, dt = (y, z)_{H^m[0,l]}.$$

29.34. Доказать, что при каждом $x \in \overset{\circ}{H}{}^m[0, l]$ выражение

$$\int_0^l f(t, x(t))\, z(t)\, dt$$

является ограниченным линейным функционалом относительно $z \in \overset{\circ}{H}{}^m[0, l]$, и, следовательно, существует единственный линейный оператор $\Phi(x)$, отображающий $\overset{\circ}{H}{}^m[0, l]$ в себя и такой, что

$$\int_0^l f(t, x(t))\, z(t)\, dt = (\Phi(x), z)_{H^m[0,l]}.$$

29.35. Пусть в предположениях задачи 29.28 для всех $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$; $t \in [0, l]$ выполняется неравенство

$$[f(t, x_1) - f(t, x_2)](x_1 - x_2) \leqslant 0.$$

Доказать, что оператор $F(x) = A - \Phi(x)$ сильно монотонен и, следовательно, краевая задача имеет единственное обобщенное решение.

29.36. Пусть H_n — n-мерное подпространство в $\overset{\circ}{H}{}^m[0, l]$. Галеркинское приближение $x_n \in H_n$ обобщенного решения исходной краевой задачи определим как функцию, удовлетворяющую для любого $z_n \in H_n$ интегральному тождеству

$$a(x_n, z_n) = (f(t, x_n), z_n)_{L_2[0,l]}.$$

Доказать, что существует единственное галеркинское приближение x_n.

29.37. Пусть $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^n$ — базис в H_n. Доказать, что интегральное тождество для

$$x_n = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i$$

равносильно следующей системе уравнений:

$$\sum_{k=1}^n a(\varphi_k, \varphi_m)\, \xi_k = \left(f\left(t, \sum_{k=1}^n \xi_k \varphi_k\right), \varphi_m\right)_{L_2[0,l]},$$

$$m = 1, 2, \ldots, n.$$

29.38. Пусть $m = 1$, $f(t, x) \equiv f(t)$. Рассмотрим подпространство линейных сплайнов, обращающихся в нуль при $t = 0$ и $t = l$ (см. задачу 27.8). Положим

$$x_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \omega_k(t).$$

а) Вычислить для этого случая $a(\omega_k, \omega_m)$ и $(y, \omega_m)_{L_2[0,l]}$ $(k, m = 1, 2, \ldots, n-1)$.

б) Написать галеркинскую систему уравнений для $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$.

в) Доказать сходимость схемы и оценить порядок $\|x_n - x\|_{H^1[0,l]}$.

(В задачах 29.37 и 29.38 зависимость базисных функций $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^n$ и координат $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ от размерности n подпространства H_n не обозначена.)

Глава 8

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЭКСТРЕМУМОВ И ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА

§ 30. Необходимые условия экстремума функционала

Пусть $\varphi(x)$ — функционал в вещественном линейном нормированном пространстве X, определенный в окрестности S точки x_0. Говорят, что $\varphi(x)$ достигает в точке x_0 *локального минимума* (*максимума*), если найдется окрестность $S_1 \subset S$ точки x_0 такая, что $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)$ $(\varphi(x) \leqslant \leqslant \varphi(x_0))$ для всех $x \in S_1$. Если $\varphi(x)$ достигает в точке x_0 локального минимума или максимума, то говорят, что $\varphi(x)$ имеет в точке x_0 *локальный экстремум*.

Пусть $F(x)$ — нелинейный оператор, определенный в окрестности S точки x_0 банахова пространства X со значениями в банаховом пространстве Y. Если при всех $h \in \in X$ существует предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} = \delta F(x_0; h),$$

то этот предел называется *первой вариацией* оператора $F(x)$ в точке x_0. Если $\delta F(x_0; h) = Ah$, где $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, то говорят, что оператор F *дифференцируем в точке* x_0 *в смысле Гато* и $A = \varphi'(x_0)$.

Теорема 30.1. *Пусть функционал $\varphi(x)$ определен в окрестности точки x_0, достигает в точке x_0 локального экстремума и имеет в точке x_0 первую вариацию $\delta\varphi(x_0; h)$. Тогда $\delta\varphi(x_0; h) \equiv 0$.*

Следствие. *Если в условиях теоремы 30.1 пространство X банахово, а функционал $\varphi(x)$ дифференцируем в точке x_0 в смысле Гато (Фреше), то $\varphi'(x_0) = 0$.*

В классическом вариационном исчислении в качестве X берется пространство $\overset{\circ}{C}[t_0, t_1]$ непрерывных на отрезке $[t_0, t_1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x(t_0) = = x(t_1) = 0$, или пространство $\overset{\circ}{C}{}^n[t_0, t_1]$ n раз непрерывно дифференцируемых на $[t_0, t_1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x^{(k)}(t_0) = x^{(k)}(t_1) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

При этом рассматриваются функционалы

$$\varphi(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, x')\, dt, \tag{1}$$

$$\varphi(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, y, x', y')\, dt, \tag{2}$$

$$\varphi(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)})\, dt. \tag{3}$$

Экстремум функционала называется *сильным*, если окрестность S_1, в которой выполняется неравенство, понимается в смысле пространства $\overset{\circ}{C}[t_0, t_1]$, и *слабым*, если она понимается в смысле пространства $\overset{\circ}{C}{}^n[t_0, t_1]$ $(n \geqslant 1)$.

Если функция F в (1)—(3) является достаточно гладкой, то вытекающее из теоремы 30.1 *необходимое условие экстремума* имеет вид:

для функционала (1) — *уравнение Эйлера*

$$F'_x - \frac{d}{dt} F'_{x'} = 0, \tag{4}$$

для функционала (2) — *система уравнений Эйлера*

$$\begin{cases} F'_x - \dfrac{d}{dt} F'_{x'} = 0, \\ F'_y - \dfrac{d}{dt} F'_{y'} = 0, \end{cases} \tag{5}$$

для функционала (3) — *уравнение Эйлера — Пуассона*

$$F'_x - \frac{d}{dt} F'_{x'} + \frac{d^2}{dt^2} F'_{x''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} F'_{x^{(n)}} = 0. \tag{6}$$

Функция или пара функций из рассматриваемого пространства, являющаяся решением (4), (5) или (6), называется *экстремалью*; существование экстремали, вообще говоря, не гарантируется.

Если экстремум функционалов (1), (2) или (3) ищется в классе функций, удовлетворяющих неоднородным граничным условиям

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \tag{7}$$

или

$$x^{(k)}(t_0) = x_0^{(k)}, \quad x^{(k)}(t_1) = x_1^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{8}$$

то необходимые условия (4)—(6) сохраняют силу, а удовлетворяющая соответствующему из уравнений (4)—(6) экстремаль должна удовлетворять также условиям (7) или (8).

Пусть кривая $x = x(t)$ является решением *вариационной задачи с подвижными границами*, т. е. реализует экстремум функционала

$$\varphi(\gamma) = \int_{\gamma} F(t, x, x')\, dt$$

среди всех кривых γ класса C^1, соединяющих произвольные точки двух данных гладких кривых $x = f_1(t)$ и $x = f_2(t)$. Из теоремы 30.1 вытекает, что для нахождения экстремалей в задаче с подвижными границами надо:

1) составить и решить уравнение Эйлера (4), получив семейство экстремалей $x = f(t, C_1, C_2)$, зависящее от двух параметров C_1 и C_2;

2) из *условий трансверсальности*

$$\left[F + (f_1' - x') F_{x'}'\right]\Big|_{t=t_0} = 0,$$
$$\left[F + (f_2' - x') F_{x'}'\right]\Big|_{t=t_1} = 0$$

и из уравнений $f(t_0, C_1, C_2) = f_1(t_0)$, $f(t_1, C_1, C_2) = f_2(t_1)$ определить точки t_0, t_1 и постоянные C_1, C_2.

Пусть кривая γ реализует экстремум функционала

$$\varphi(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, x')\, dt,$$

удовлетворяет граничным условиям $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ и является кусочно гладкой, т. е. может иметь скачок производной (*угловую точку*) в некоторой точке τ ($t_0 < \tau < t_1$). Тогда $F_{x'x'}''\big|_{t=\tau} = 0$ и из теоремы 30.1 вытекает, что в угловой точке экстремаль должна удовлетворять *условиям Вейерштрасса — Эрдмана*

$$\begin{gathered} F_{x'}'\big|_{t=\tau-0} - F_{x'}'\big|_{t=\tau+0} = 0, \\ \left(F - x'F_{x'}'\right)\big|_{t=\tau-0} - \left(F - x'F_{x'}'\right)\big|_{t=\tau+0} = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

На каждом из отрезков $[t_0, \tau]$ и $[\tau, t_1]$ экстремаль должна удовлетворять уравнению Эйлера (4). Возникающие при решении (4) четыре произвольные постоянные можно, вообще говоря, определить из граничных условий, условий непрерывности экстремали и условий (9).

Пусть функция $x = x(t)$ является решением *изопериметрической задачи* на условный экстремум, т. е. реализует экстремум функционала

$$\varphi(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, x')\, dt$$

при граничных условиях $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ и условии

$$\psi(x) = \int_{t_0}^{t_1} G(t, x, x')\, dt = C.$$

Из теоремы 30.1 вытекает, что для определения экстремалей в изопериметрической задаче надо:

1) составить функционал Лагранжа $L = \varphi + \lambda\psi$;

2) составить и решить уравнение Эйлера (4) для функционала L, получив семейство экстремалей $x = f(t, C_1, C_2, \lambda)$;

3) определить постоянные C_1, C_2 и параметр λ из граничных условий и условия $\psi(x) = C$.

30.1. Доказать, что всякий сильный экстремум функционала (1) является одновременно и слабым экстремумом.

30.2. В пространстве $\overset{\circ}{C}{}^1[0, \pi]$ рассмотрим функционал

$$\varphi(x) = \int_0^{\pi} x^2 (1 - x'^2)\, dt.$$

а) Доказать, что слабый минимум $\varphi(x)$ достигается на функции $x \equiv 0$.

б) Полагая $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nt$ ($n \in \mathbf{N}$) убедиться, что на функции $x(t) \equiv 0$ сильный минимум $\varphi(x)$ не достигается.

30.3. Доказать, что для функционала

$$\varphi(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(x, x')\, dt$$

уравнение Эйлера (4) может быть записано в виде

$$F - x'F_{x'}' = C,$$

где C — произвольная постоянная.

30.4. Найти экстремали функционалов в классе гладких кривых:

а) $\varphi(x) = \int\limits_0^1 \left(x^2 + x'^2 + 2xe^t\right) dt, \quad x(0) = 0{,}5, \ x(1) = e;$

б) $\varphi(x) = \int\limits_{-1}^0 \left(12tx - x'^2\right) dt, \quad x(-1) = 1, \ x(0) = 0,$

в) $\varphi(x) = \int\limits_1^2 \left(x'^2 + 2xx' + x^2\right) dt, \quad x(1) = 1, \ x(2) = e;$

г) $\varphi(x) = \int\limits_1^e \left(tx'^2 + xx'\right) dt, \quad x(1) = 0, \ x(e) = 1;$

д) $\varphi(x) = \int\limits_0^1 xx'^2\, dt, \quad x(0) = 1, \ x(1) = \sqrt[3]{4};$

е) $\varphi(x) = \int\limits_0^\pi \left(4x\cos t + x'^2 - x^2\right) dt, \quad x(0) = x(\pi) = 0;$

ж) $\varphi(x) = \int\limits_0^{2\pi} \left(x'^2 - x^2\right) dt, \quad x(0) = x(2\pi) = 1;$

з) $\varphi(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[2tx + \left(t^2 + e^x\right)x'\right] dt, \quad x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1$

и) $\varphi(x) = \int\limits_0^1 \left(e^x + tx'\right) dt, \quad x(0) = 0, \ x(1) = x_1;$

к) $\varphi(x) = \int\limits_0^{\pi/4} \left(x'^2 - x^2\right) dt, \quad x(0) = 1, \ x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$

л) $\varphi(x) = \int\limits_0^1 \left(2e^x - x^2\right) dt, \quad x(0) = 1, \ x(1) = e;$

м) $\varphi(x) = \int\limits_1^2 x'\left(1 + t^2x'\right) dt, \quad x(1) = 3, \ x(2) = 1;$

н) $\varphi(x) = \int\limits_0^2 \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{x}\, dt, \quad x(0) = 2, \ x(2) = 0, \ x > 0;$

о) $\varphi(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + x'^2}\, dt, \quad x(t_0) = t_0, \ x(t_1) = t_1.$

30.5. Найти экстремали функционалов, содержащих старшие производные:

а) $\varphi(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x''^2\, dt, \quad x(0) = x(1) = 0, \ x'(0) = 0, \ x'(1) = 1;$

б) $\varphi(x) = \int\limits_0^1 \left(x^2 + 2x'^2 + x''^2\right) dt, \quad x(0) = x(1) = 0, \ x'(0) = 1, \ x'(1) = -\operatorname{sh} 1;$

в) $\varphi(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (x + x')\, dt, \quad x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1; \ x'(t_0) = x_0', \ x'(t_1) = x_1';$

г) $\varphi(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(x'^2 + xx''\right) dt, \quad x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1, \ x'(t_0) = x_0', \ x'(t_1) = x_1',$

д) $\varphi(x) = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\frac{1}{2}x''^2 + 24x\right) dt, \quad x(-\varepsilon) = x(\varepsilon) = x'(-\varepsilon) = x'(\varepsilon) = 0;$

е) $\varphi(x) = \int\limits_0^{\pi/2} \left(x''^2 - x^2 + t^2\right) dt, \quad x(0) = 1, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \ x'(0) = 0, \ x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1;$

ж) $\varphi(x) = \int\limits_{-1}^0 \left(240x - x''^2\right) dt, \quad x(-1) = 1, \quad x(0) = 0, \ x'(-1) = -4{,}5, \ x'(0) = 0, \ x''(-1) = 16, \ x''(0) = 0;$

з) $\varphi(x) = \int\limits_0^1 \left(x'^2 + x''^2\right) dt, \quad x(0) = 0, \ x(1) = \operatorname{sh} 1, \ x'(0) = 1, \ x'(1) = \operatorname{ch} 1.$

30.6. Найти экстремали функционалов, зависящих от нескольких функций:

а) $\varphi(x, y) = \int\limits_0^{\pi/4} \left(2y - 4x^2 + x'^2 - y'^2\right) dt, \quad x(0) = 0, \ x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \ y(0) = 0, \ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$

б) $\varphi(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} \left(2tx - x'^2 + \frac{y'^3}{3}\right) dt,\ x(-1) = 2,\ x(1) = 0,\ y(-1) = -1,\ y(1) = 1;$

в) $\varphi(x, y) = \int\limits_{0}^{\pi/2} \left(x'^2 + y'^2 - 2xy\right) dt,\ x(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$

г) $\varphi(x, y) = \int\limits_{0}^{1} \left(x'^2 + y'^2 + 2x\right) dt,\ x(0) = 1,\ x(1) = 1{,}5,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1;$

д) $\varphi(x, y) = \int\limits_{0}^{\pi/2} \left(2xy - 2x^2 + x'^2 - y'^2\right) dt,\quad x(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2,\ y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$

е) $\varphi(x, y) = \int\limits_{0}^{1} \left(x'^2 + y'^2\right) dt,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1,\ y(0) = 0,\ y(1) = -3.$

30.7. Пусть подвижные границы для функционала $\varphi(x)$ задаются уравнениями $t = a$ и $t = b$. Используя теорему 30.1, записать необходимое условие экстремума функционала и найти экстремали, если:

а) $\varphi(x) = \int\limits_{0}^{\pi/2} \left(x^2 - x'^2 - 2x \sin t\right) dt;$

б) $\varphi(x) = \int\limits_{0}^{\pi/4} \left(x'^2 - 2xx' - 16x^2\right) dt.$

30.8. Записать условие трансверсальности для функционала

$$\varphi(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{\operatorname{arctg} x'} \sqrt{1 + x'^2}\, dt,$$

если $x(t_0) = x_0$, а точка (t_1, x_1) может перемещаться по кривой $x = \psi(t)$.

30.9. Найти экстремали функционала

$$\varphi(x) = \int\limits_{0}^{\pi/4} \left(x^2 - x'^2\right) dt,$$

если $x(0) = 0$, а другая граничная точка может перемещаться по прямой $t = \pi/4$.

30.10. Найти экстремали функционала

$$\varphi(x) = \int\limits_{0}^{t_1} \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{x}\, dt,$$

если $x(0) = 0$, а точка (t_1, x_1) может перемещаться:

а) по прямой $x = t - 5$;

б) по окружности $(t - 9)^2 + x^2 = 9$.

30.11. Методами вариационного исчисления найти расстояние:

а) между параболой $y = x^2$ и прямой $x - y = 5$;

б) от точки $A(1, 0)$ до эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$.

30.12. Существуют ли решения с угловыми точками в задаче об экстремуме функционала:

а) $\varphi(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(x'^2 + 2tx - x^2\right) dt,\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1;$

б) $\varphi(x) = \int\limits_{0}^{2} \left(x'^4 - 6x'^2\right) dt,\ x(0) = 0,\ x(2) = 0?$

30.13. Найти решение с одной угловой точкой в задаче о минимуме функционала:

а) $\varphi(x) = \int\limits_{0}^{2} x'^2 (x' - 1)^2\, dt,\ x(0) = 0,\ x(2) = 1;$

б) $\varphi(x) = \int\limits_{0}^{4} (x' - 1)^2 (x' + 1)^2\, dt,\ x(0) = 0,\ x(4) = 2.$

30.14. Найти решение с угловой точкой в задаче о минимуме функционала

$$\varphi(x) = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \left(1 - x'^2\right) dt,\ x(-1) = 0,\ x(1) = 1.$$

30.15. Найти экстремали изопериметрической задачи:

а) $\varphi(x) = \int\limits_{0}^{1} \left(x^2 + x'^2\right) dt,\ x(0) = 0{,}5,\ x(1) = e$ при условии $\int\limits_{0}^{1} 2xe^t\, dt = \frac{3e^2 - 1}{4};$

б) $\varphi(x)=\int_0^1 (x'^2+t^2)\,dt,\ x(0)=x(1)=0$ при условии $\int_0^1 x^2(t)\,dt=2$;

в) $\varphi(x)=\int_0^1 x'^2\,dt,\ x(0)=1,\ x(1)=6$ при условии $\int_0^1 x\,dt=3$;

г) $\varphi(x)=\int_0^1 x'^2\,dt,\ x(0)=0,\ x(1)=\frac{1}{4}$ при условии $\int_0^1 (x-x')^2\,dt=\frac{1}{12}$.

30.16. Среди кривых данной длины l, соединяющих точки $A(t_0, x_0)$ и $B(t_1, x_1)$, найти ту, у которой центр тяжести лежит наиболее низко.

30.17. Найти экстремаль в изопериметрической задаче. об экстремуме функционала

$$\varphi(x,y)=\int_0^1 (x'^2+y'^2-4ty'-4y)\,dt$$

при условии $\int_0^1 (x'^2-tx'-y'^2)\,dt=2$ и граничных условиях $x(0)=0,\ x(1)=1,\ y(0)=0,\ y(1)=1$.

30.18. Найти экстремаль функционала

$$\varphi(x,y)=\int_0^1 (x'^2+y'^2)\,dt$$

при наличии связи $x^2+y^2=R^2$ и граничных условиях $x(0)=R,\ x(1)=0,\ y(0)=0,\ y(1)=R$.

30.19. Найти экстремаль функционала при наличии дифференциальной связи:

а) $\varphi(x,y)=\int_0^{\pi/4} \left(\frac{y^2}{2}-2t^2x^2\right)dt,\ x(0)=0,\ x\left(\frac{\pi}{4}\right)=1,$

при условии $\frac{dx}{dt}=2y-4tx$;

б) $\varphi(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+y^2)\,dt,\ x(0)=0,\ x(1)=1,$

при условии $\frac{dx}{dt}=y-x$.

30.20. Пусть A — самосопряженный оператор в вещественном гильбертовом пространстве H, $y\in H$ — фиксированный элемент. Доказать, что необходимое условие экстремума функционала $\varphi(x)$ сводится к уравнению:

а) $Ax=y$, если $\varphi(x)=(Ax,x)-2(x,y)$;

б) $x+Ax=y$, если $\varphi(x)=(Ax,x)+(x,x)-2(x,y)$.

Что можно утверждать о разрешимости этих уравнений, если A — вполне непрерывный оператор?

30.21. Доказать, что изопериметрическая задача для функционала

$$\varphi(x)=\int_a^b [p(t)x'^2+q(x)x^2]\,dt$$

при граничных условиях $x(a)=x(b)=0$ и условии

$$\int_a^b x^2(t)\,dt=1,$$

где $p(t)\in C^1[a,b]$, $p(t)\geqslant 0$ на $[a,b]$, $q(t)\in C[a,b]$, $q(t)\geqslant 0$ на $[a,b]$, равносильна задаче о собственных функциях оператора Штурма — Лиувилля.

§ 31. Достаточные условия экстремума функционала

Теорема 31.1. *Пусть функционал $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируем по Фреше в окрестности S точки x_0 банахова пространства X и $\varphi'(x_0)=0$. Если существует $\alpha>0$ такое, что для любого $h\in X$ выполняется неравенство $\varphi''(x_0)h^2\geqslant\alpha\|h\|^2$ $(\varphi''(x_0)h^2\leqslant-\alpha\|h\|^2)$, то x_0 — точка локального минимума (максимума) $\varphi(x)$.*

Ниже рассматривается вопрос о достаточных условиях экстремума функционала

$$\varphi(x)=\int_{t_0}^{t_1} F(t,x,x')\,dt \qquad (1)$$

в пространстве $\overset{\circ}{C}{}^k[t_0,t_1]$ $(k\geqslant 0)$.

Семейство кривых $x=x(t,C)$ $(x\in C^1[a,b])$ образует *собственное поле* в заданной области, если через каждую точку (t,x) этой области проходит одна и только одна

кривая $x(t, C)$ этого семейства. Угловой коэффициент $p(t, x)$ касательной к кривой семейства $x(t, C)$, проходящей через точку (t, x), называется *наклоном поля* в точке (t, x). Семейство кривых $x = x(t, C)$ образует *центральное поле* в заданной области, если кривые этого семейства покрывают всю область, не пересекаются в этой области и исходят из одной точки (t_0, x_0), лежащей вне заданной области. Точка (t_0, x_0) называется *центром пучка* кривых. Собственное или центральное поле, образованное семейством экстремалей некоторой вариационной задачи, называется *полем экстремалей*.

Пусть кривая $x = x(t)$ является экстремалью функционала (1). Говорят, что экстремаль $x = x(t)$ *включена в поле экстремалей*, если найдено семейство экстремалей $x = x(t, C)$, образующее поле, содержащее при некотором значении $C = C_0$ экстремаль $x = x(t)$, причем эта экстремаль не лежит на границе заданной области, в которой семейство $x = x(t, C)$ образует поле. Если пучок экстремалей с центром в точке $A(t_0, x_0)$ в окрестности экстремали $x = x(t)$, проходящей через ту же точку, образует поле, то тем самым найдено центральное поле, включающее данную экстремаль $x = x(t)$. За параметр семейства в данном случае можно взять угловой коэффициент касательной к кривым пучка в точке $A(t_0, x_0)$.

Для того чтобы на данной экстремали функционала (1) достигался слабый минимум, необходимо выполнение условия $F''_{x'x'} \geqslant 0$ во всех точках рассматриваемой экстремали (условие $F''_{x'x'} > 0$ называется *условием Лежандра*).

Уравнение вида

$$\left(F''_{xx} - \frac{d}{dt} F''_{x'x'}\right) u(t) - \frac{d}{dt}\left(F''_{x'x'} u'(t)\right) = 0$$

называется *уравнением Якоби* для функционала (1). Если существует решение уравнения Якоби, удовлетворяющее условию $u(t_0) = 0$, не обращающееся в нуль ни в какой точке полуинтервала $t_0 < t < t_1$, то дугу экстремали AB, где $A(t_0, x_0)$, $B(t_1, x_1)$, можно включить в центральное поле экстремалей с центром в точке A.

Функцией Вейерштрасса для функционала (1) называется функция

$$E(t, x, p, x') = F(t, x, x') - F(t, x, p) - (x' - p) F'_p(t, x, p),$$

где $p(t, x)$ — наклон экстремалей в точке (t, x).

Для достижения функционалом (1) *слабого экстремума* на кривой C достаточно выполнения следующих условий:

1) кривая C является экстремалью;

2) экстремаль C может быть включена в поле экстремалей;

3) функция $E(t, x, p, x')$ не меняет знака во всех точках (t, x), близких к точкам кривой C, и для x', близких к $p(t, x)$. Минимум реализуется в случае $E \geqslant 0$, максимум — в случае $E \leqslant 0$.

Если наряду с условиями 1), 2) выполняется условие

3°) функция $E(t, x, p, x')$ не меняет знака во всех точках (t, x), близких к точкам кривой C, и для произвольных значений x', то на кривой C реализуется *сильный экстремум*, минимум — в случае $E \geqslant 0$ и максимум — в случае $E \leqslant 0$.

31.1. Указать собственное и центральное поле экстремалей функционала:

а) $\varphi(x) = \int\limits_0^a (x'^2 + x^2)\, dt, \ a > 0;$

б) $\varphi(x) = \int\limits_0^{\pi/4} (x'^2 - x^2 + t^2 + 4)\, dt.$

31.2. Выяснить, включается ли экстремаль данного функционала в поле экстремалей (собственное или центральное):

а) $\varphi(x) = \int\limits_0^2 (x'^3 + \sin^2 t)\, dt, \quad x(0) = 1, \quad x(2) = 1;$

б) $\varphi(x) = \int\limits_0^2 (x'^3 + \sin^2 t)\, dt, \quad x(0) = 0, \quad x(2) = 4;$

в) $\varphi(x) = \int\limits_{-1}^1 x'\left(2t - \frac{1}{2} x'\right) dt, \quad x(-1) = 0, \ x(1) = 0{,}5;$

г) $\varphi(x) = \int\limits_0^1 (x'^2 - 2tx)\, dt, \quad x(0) = x(1) = 0;$

д) $\varphi(x) = \int\limits_0^1 (2e^t x + x'^2)\, dt, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = e;$

е) $\varphi(x) = \int\limits_0^a (x^2 - x'^2)\, dt, \quad x(0) = x(a) = 0, \ a > 0, \ a \neq k\pi, \ k \in \mathbf{N};$

ж) $\varphi(x) = \int_0^2 (x'^2 + t^2)\,dt, \quad x(0) = 1, \quad x(2) = 3?$

31.3. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала, проходящей через заданные точки:

а) $\varphi(x) = \int_0^a (x'^2 + t^2)\,dt, \quad x(0) = 0, \quad x(a) = 3, \quad a > 0;$

б) $\varphi(x) = \int_0^a \left[x'^2 - 4x^2 + e^{-t^2}\right] dt, \quad x(0) = x(a) = 0,$

$a > \frac{\pi}{2}, \quad a \neq \frac{2k+1}{2}\pi, \quad k \in \mathbf{N};$

в) $\varphi(x) = \int_0^a (x'^2 + x^2 + t^2)\,dt, \quad x(0) = x(a) = 0;$

г) $\varphi(x) = \int_0^a (x'^2 - x^2)\,dt, \quad x(0) = x(a) = 0;$

д) $\varphi(x) = \int_{-1}^1 (12tx + x'^2 + t^2)\,dt, x(-1) = -2, x(1) = 0;$

е) $\varphi(x) = \int_0^1 (1 + x'^2)\,dt, \quad x(0) = x(1) = 0;$

ж) $\varphi(x) = \int_0^{2\pi} (x'^2 - x^2)\,dt, \quad x(0) = 0, \quad x(2\pi) = 1;$

з) $\varphi(x) = \int_0^1 (x'^2 + 9x^2 - 3t)\,dt, \quad x(0) = x(1) = 0?$

31.4. Доказать, что если подынтегральная функция функционала (1) явно не содержит x, то каждая экстремаль может быть включена в поле экстремалей.

31.5. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала, проходящей через заданные точки:

а) $\varphi(x) = \int_0^2 (x'^4 + x'^2)\,dt, \quad x(0) = 1, \quad x(2) = 5;$

б) $\varphi(x) = \int_{-1}^1 (t^2x'^2 + 12x^2)\,dt, \quad x(-1) = 1, \quad x(1) = 1;$

в) $\varphi(x) = \int_0^1 (x'^2 - xx'^3)\,dt, \quad x(0) = x(1) = 0;$

г) $\varphi(x) = \int_0^a x'^3\,dt, \quad x(0) = 0, \quad x(a) = b > 0, \quad a > 0;$

д) $\varphi(x) = \int_0^1 (x'^2 - xx'^3)\,dt, \quad x(0) = x(1) = 0;$

е) $\varphi(x) = \int_0^2 (6x'^2 - x'^4 + xx')\,dt, \quad x(0) = 0, \quad x(2) = 1;$

ж) $\varphi(x) = \int_0^1 xx'^2\,dt, \quad x(0) = 3, \quad x(1) = 3;$

з) $\varphi(x) = \int_2^3 \frac{t^3}{x'^2}\,dt, \quad x(2) = 4, \quad x(3) = 9;$

и) $\varphi(x) = \int_1^2 (tx'^4 - 2xx'^3)\,dt, \quad x(1) = 0, \quad x(2) = 1.$

31.6. Исследовать на экстремум функционалы:

а) $\varphi(x) = \int_0^1 (x'^3 + x')\,dt, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 2;$

б) $\varphi(x) = \int_0^1 \left(t + 2x + \frac{1}{2}x'^2\right) dt, \quad x(0) = x(1) = 0;$

в) $\varphi(x) = \int_0^2 (e^{x'} + 3)\,dt, \; x(0) = 0, \; x(2) = 1;$

г) $\varphi(x) = \int_0^1 e^t\left(x^2 + \frac{1}{2}x'^2\right) dt, \; x(0) = 1, \; x(1) = e;$

д) $\varphi(x) = \int_0^1 e^x x'^2\,dt, \; x(0) = 0, \; x(1) = \ln 4;$

е) $\varphi(x) = \int_{-1}^2 x'(1 + t^2x')\,dt, \; x(-1) = 1, \; x(2) = 1;$

ж) $\varphi(x) = \int_1^2 \frac{t^3}{x'^2}\,dt, \; x(1) = 1, \; x(2) = 4;$

з) $\varphi(x) = \int_0^a \frac{dt}{x'}, \; x(0) = 0, \; x(a) = b > 0, \; a > 0;$

и) $\varphi(x) = \int_0^1 (1+t)\,x'^2\,dt,\ x(0)=0,\ x(1)=1;$

к) $\varphi(x) = \int_{-1}^1 (x'^3 + x'^2)\,dt,\ x(-1)=-1,\ x(1)=3;$

л) $\varphi(x) = \int_0^{\pi/4} (4x^2 - x'^2 + 8x)\,dt,\ x(0)=-1;\ x\left(\frac{\pi}{4}\right)=0;$

м) $\varphi(x) = \int_1^2 \left(t^2x'^2 - 12x^2\right)dt,\ x(1)=1,\ x(2)=8;$

н) $\varphi(x) = \int_0^{\pi/4} \left(x^2 - x'^2 + 6x\sin 2t\right)dt,\ x(0)=0,\ x\left(\frac{\pi}{4}\right)=1;$

о) $\varphi(x) = \int_0^2 \left(1 - e^{-x'^4}\right)dt,\ x(0)=0,\ x(2)=1;$

п) $\varphi(x) = \int_0^1 \left(x'^2 - xx'^3\right)dt,\ x(0)=x(1)=0.$

31.7. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим функционал

$$\varphi(x) = \int_0^1 x^2(t-x)\,dt.$$

а) Доказать, что единственной экстремалью $\varphi(x)$ является $x \equiv 0$.

б) Найти $d^2\varphi$ в точке $x \equiv 0$ и убедиться, что при любом приращении $h \in C[0, 1]$ $(h \not\equiv 0)$ выполняется неравенство $d^2\varphi > 0$.

в) Убедиться, что в любой окрестности точки $x \equiv 0$ $\varphi(x)$ может принимать значения разных знаков и, следовательно, $x \equiv 0$ не является точкой экстремума.

31.8. В пространстве l_2 для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ рассмотрим функционал

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^4.$$

а) Доказать, что в точке $x_0 = (0, 0, \ldots)$ $\delta\varphi(x_0;\ h) \equiv 0$.

б) Найти $d^2\varphi$ в точке x_0 и убедиться, что при любом приращении $h = (h_1, h_2, \ldots) \in l_2$ $(h \neq 0)$ выполняется неравенство $d^2\varphi > 0$.

в) Убедиться, что в любой окрестности точки x_0 $\varphi(x)$

может принимать значения разных знаков и, следовательно, точка x_0 не является точкой экстремума.

31.9. В вещественном гильбертовом пространстве H рассмотрим функционал $\varphi(x) = \|x\|^2$. Используя теорему 31.1, доказать, что $\varphi(x)$ достигает минимума в точке $x = 0$.

§ 32. Полунепрерывные и выпуклые функционалы

Вещественный функционал, определенный на множестве M банахова пространства X, называется:

выпуклым, если M выпукло и для любых $x_1, x_2 \in M$ и любого $t \in [0, 1]$ выполняется неравенство $\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2)$;

полунепрерывным снизу, если из того, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ $(x_n, x_0 \in M,\ n \in \mathbf{N})$, следует, что $\varphi(x_0) \leqslant \varliminf \varphi(x_n)$;

слабо полунепрерывным снизу, если из того, что $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ слабо $(x_n, x_0 \in M,\ n \in \mathbf{N})$, следует, что $\varphi(x_0) \leqslant \varliminf \varphi(x_n)$.

Теорема 32.1. *Слабо полунепрерывный снизу функционал, заданный в рефлексивном банаховом пространстве X, ограничен снизу и достигает наименьшего значения на каждом ограниченном слабо замкнутом (ограниченном замкнутом выпуклом) множестве $M \subset X$.*

Теорема 32.2. *Пусть функционал $\varphi(x)$ дифференцируем по Гато в каждой точке банахова пространства X. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$\varphi(x)$ — выпуклый функционал;*

2) *оператор $\varphi'(x)$ монотонен;*

3) *для любых $x, y \in X$ выполняется неравенство $\varphi(y) - \varphi(x) \geqslant \varphi'(x)(y-x)$.*

Следствие. *Всякий заданный всюду в банаховом пространстве дифференцируемый по Гато выпуклый функционал слабо полунепрерывен снизу.*

32.1. Пусть $\varphi(x)$ — линейный функционал на банаховом пространстве X. Доказать, что $|\varphi(x)|$ — выпуклый функционал.

32.2. Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$ — выпуклое множество, $\varphi(x)$ — определенный на M выпуклый функционал такой, что $\varphi(x) \geqslant 0$ для любого $x \in M$. Доказать, что $\varphi^2(x)$ — выпуклый функционал.

32.3. Пусть X — банахово пространство; для $x \in X$ положим $\varphi(x) = \|x\|$. Будет ли функционал $\varphi(x)$:

а) выпуклым;

б) непрерывным;

в) слабо непрерывным;

г) слабо полунепрерывным снизу?

32.4. Пусть X — рефлексивное банахово пространство, $M \subset X$ — ограниченное замкнутое выпуклое множество. Доказать, что:

а) в M найдется элемент с наименьшей нормой;

б) для любого $z \in X$ найдется $x \in M$ такое, что $\rho(z, M) = \|z - x\|$.

32.5. Пусть выпуклый функционал $\varphi(x)$ определен на выпуклом множестве M банахова пространства X, $m = \inf\limits_{x \in M} \varphi(x)$. Доказать, что множество $\{x \in M\colon \varphi(x) = m\}$ выпукло.

32.6. Пусть выпуклый функционал $\varphi(x)$ определен на выпуклом множестве M банахова пространства X. Доказать, что всякая точка локального минимума $\varphi(x)$ является точкой его глобального минимума.

32.7. Пусть $\varphi(x)$ — выпуклый функционал, определенный на банаховом пространстве X. Доказать, что для любого вещественного числа λ множество $C_\lambda = \{x \in X\colon \varphi(x) \leqslant \lambda\}$ выпукло.

32.8. Пусть $\varphi(x)$ — такой функционал в банаховом пространстве X, что для любого вещественного числа λ множество $C_\lambda = \{x \in X\colon \varphi(x) \leqslant \lambda\}$ выпукло. Следует ли отсюда, что $\varphi(x)$ — выпуклый функционал?

32.9. Доказать, что функционал $\varphi(x)$ в банаховом пространстве X является полунепрерывным снизу (слабо полунепрерывным снизу) тогда и только тогда, когда для любого вещественного числа λ множество $C_\lambda = \{x \in X\colon \varphi(x) \leqslant \lambda\}$ замкнуто (слабо замкнуто) в X.

32.10. Доказать, что выпуклый функционал в банаховом пространстве слабо полунепрерывен снизу тогда и только тогда, когда он полунепрерывен снизу.

32.11. Доказать, что выпуклый полунепрерывный снизу функционал, заданный в рефлексивном банаховом пространстве X, достигает наименьшего значения на каждом ограниченном замкнутом выпуклом множестве $M \subset X$.

32.12. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим множество

$$M = \{x(t) \in C[0, 1]\colon |x(t)| \leqslant 1,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1\}.$$

Для $x(t) \in C[0, 1]$ положим

$$\varphi(x) = \int_0^1 x^2(t)\,dt.$$

а) Доказать, что множество M ограничено, замкнуто и выпукло.

б) Доказать, что $\varphi(x)$ — непрерывный выпуклый функционал.

в) Достигает ли $\varphi(x)$ на M своего наименьшего значения?

32.13. Доказать, что всякий слабо полунепрерывный снизу функционал в банаховом пространстве достигает своего наименьшего значения на каждом бикомпактном множестве.

32.14. В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим функционал

$$\varphi(x) = \int_0^1 |x(t)|\,dt.$$

Доказать, что $\varphi(x)$ достигает своего наименьшего значения на каждом ограниченном замкнутом выпуклом множестве.

32.15. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathscr{L}(H)$ — самосопряженный оператор, $\varphi(x) = (Ax, x)$. Будет ли функционал $\varphi(x)$:

а) непрерывным;

б) слабо непрерывным;

в) слабо полунепрерывным снизу?

32.16. Доказать, что функционал $\varphi(x)$ из предыдущей задачи является выпуклым тогда и только тогда, когда $A \geqslant 0$.

32.17. В пространстве l_2 для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ рассмотрим функционал

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^4.$$

а) Доказать, что $\varphi(x)$ определен на всем l_2 и дифференцируем.

б) Будет ли $\varphi(x)$ слабо полунепрерывным снизу?

32.18. Пусть X — рефлексивное банахово пространство, $A \in \mathscr{L}(X, X^*)$, $\varphi(x) = \langle x, Ax\rangle$.

а) Доказать, что функционал $\varphi(x)$ дифференцируем по Гато и найти его производную.

б) Пусть оператор A является положительным, т. е. для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\langle x, Ax\rangle \geqslant 0$. Доказать, что $\varphi'(x)$ — монотонный оператор.

в) Доказать, что при положительном операторе A функционал $\varphi(x)$ достигает своего наименьшего значения на

каждом ограниченном замкнутом выпуклом множестве $M \subset X$.

32.19. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathscr{L}(H)$, $b \in H$ — фиксированный элемент. Для $x \in H$ положим $\varphi(x) = \|Ax - b\|^2$. Доказать, что $\varphi(x)$:

а) дифференцируем по Гато и найти его производную;

б) достигает своего наименьшего значения на каждом ограниченном замкнутом выпуклом множестве $M \subset H$.

32.20. Пусть в условиях предыдущей задачи $H = E^2$ и в некотором ортонормированном базисе оператор A определяется матрицей

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В какой точке достигается наименьшее значение функционала $\varphi(x)$ на шаре $\bar{S}_r(0)$ при различных r?

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

ГЛАВА 1

§ 1

1.12. Строгое включение возможно **1.13.** Вообще говоря, не следует. **1.17.** Возможно. **1.25.** Нет. Положим

$$x = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad y = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix};$$

тогда для $z = x/2 + y/2$ нарушается аксиома треугольника. **1.26.** $\alpha_m = 1/\sqrt{m}$, $\beta_m = 1$, $\gamma_m = 1/m$, $\delta_m = 1$, $\varepsilon_m = 1$, $\nu_m = \sqrt{m}$. **1.30.** а), в), г)

$$x^{(n)} = \Big(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{2^n}, \frac{1}{(2^n+1)}, \frac{1}{(2^n+2)}, \dots, \frac{1}{(2^n+n)}, 0, 0, \dots\Big).$$

Тогда $x^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$ в пространствах m l_2, c_0, но расходится в пространстве l_1. б), д)

$$x^{(n)} = \Big(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, \dots\Big).$$

Тогда $x^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$ в пространствах c_0 и m, но расходится в пространстве l_2. **1.32.** Для c_0 и l_1 установить два противоположных включения. Включение $c_0 \subset l_1$ вытекает из того, что всякий элемент пространства c_0 можно приблизить, заменяя «хвост» нулями. Обратное включение — из свойств равномерной сходимости. **1.33.** а) Да. б) Нет **1.34.** а) Да. б) Да. **1.37.** Во всех четырех случаях можно. **1.38.** а), г), д) Можно. б), в) Нельзя. **1.39.** а) Нет. Дополнение к нему не замкнуто. б) Нет. Оно всюду плотно в пространстве $C[a, b]$. **1.40.** а) Да. Доказательство замкнутости использует либо конечномерность, либо представление многочленов интерполяционной формулой Лагранжа. б) Нет. Последовательность многочленов степени n может равномерно сходиться к многочлену меньшей степени. **1.42.** а) Да. б) Да. **1.44.** Использовать равномерную непрерывность. **1.45.** Доказательство — индукцией по k. Пусть $P(t)$ — многочлен такой, что

$$\|f' - P\|_{C[a,b]}^{k-1} < \frac{\varepsilon}{b - a + 1}, \quad Q(t) = f(a) + \int_a^t P(\tau)\, d\tau.$$

Убедиться, что

$$\|f - Q\|_{C^k[a,b]} < \varepsilon.$$

1.46. а) Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$. б) Если a_n — ограниченная последовательность. **1.48.** Если существует $\varepsilon \in \mathbf{R}$ $(\varepsilon > 0)$ такое, что для любого $n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $a_n > \varepsilon$. В противном случае дополнение к параллелепипеду не замкнуто. **1.50.** Пусть $\sigma_1(0)$ содержит отрезок $[x, y]$, $x \neq y$. Убедиться, что $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Обратно, если $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, причем $x \neq 0$, $y \neq 0$, и не существует $\lambda > 0$ такого, что $y = \lambda x$, то положим $a = x/\|x\|$, $b = y/\|y\|$. Убедиться, что $[a, b] \subset \sigma_1(0)$. **1.51.** Строго нормированными являются пространства l_2 и $L_2[0, 1]$. **1.52.** $A \cap B$ и $A + B$. **1.53.** Нет, так как $A - A = A + (-A) \neq 0$. **1.54.** Да. **1.55.** Нет. **1.58.** а) Нет. б), в), г), д) Да. **1.66.** Пусть L_2 — конечномерно. Доказательство — индукцией по $n = \dim L_2$. **1.67.** а), в), д), е), ж), к) Нет. б), г), з), и) Да. **1.68.** б) Нет. Положим

$$x_n = \Big(1, \underbrace{-1/n, -1/n, \ldots, -1/n}_{n}, 0, 0, \ldots\Big);$$

тогда при $n \to \infty$ $x_n \to x = (1, 0, 0, \ldots) \notin L$. **1.69.** а) Да. б) Нет. **1.72.** Возможно. **1.73.** Обратное утверждение, вообще говоря, несправедливо. **1.78.** В задаче 1.22 несепарабельно только пространство m, в задаче 1.23 несепарабельны пространства $M[a, b]$ и $V[a, b]$. **1.81.** Нет. В пространстве l_2 рассмотрим последовательность

$$x_n = \Big(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, 1 + 1/n, 0, 0, \ldots\Big)$$

и элемент $x = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. **1.83.** а), б) Вообще говоря, нет. Рассмотреть $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 1/(1 + x^2)$. **1.88.** Использовать задачи 1.87 и 1.85. **1.89.** в) Вообще говоря, нет. **1.91.** Нет. Пусть $x_n = \sin nt/n \in L$. Тогда $x_n \to 0$ при $n \to \infty$, но $f(x_n) \not\to 0$. **1.92.** а) Да. б) Нет. Положим

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1 - 1/n^2, \\ n^3(t - 1 + 1/n^2) & \text{при } 1 - 1/n^2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда в пространстве $L_2[0, 1]$ $x_n(t) \to x \equiv 0$, но $x_n(1) = n \not\to x(1) = 0$. **1.93.** а) Будет, но не равномерно. б) Нет. Пример — из задачи 1.92 б). в) Будет, но не равномерно. **1.95.** а) Да. Пусть $F\colon E^2 \to \mathbf{R}$, $F(x, y) = xy$, A — гипербола $xy = 1$, B — прямая $y = 0$. б) Нет.

§ 2

2.3. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. **2.5.** б) Нет. Последовательность

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}, \qquad n \in \mathbf{N},$$

фундаментальна в обеих нормах, но не сходится в рассматриваемом пространстве. в) Пополнения изометрически изоморфны соответственно пространствам $C[a, b]$ и $L_2[a, b]$. **2.6.** б) Нет. **2.7.** В задаче 1.22 все пространства — банаховы. В задаче 1.23 банаховыми являются все пространства, кроме K и $L_p[a, b]$. При доказательстве полноты пространства $V[a, b]$ используется то обстоятельство, что фундаментальная в норме $V[a, b]$ последовательность $x_n(t)$ оказывается поточечно на $[a, b]$ сходящейся к некоторой функции $x(t)$. Остается доказать, что $x(t) \in V[a, b]$ и что $x_n(t) \to x(t)$ при $n \to \infty$. **2.11.** Нет. Использовать задачи 2.9 и 1.36. **2.12.** Нормы пунктов г) и д) задачи 1.38 эквивалентны норме пространства $C^1[a, b]$. **2.24.** Аналогично доказательству теоремы 2.2. **2.25.** Пусть $x_n \in X$ — фундаментальная последовательность. Найдется номер n_1 такой, что при всех $n > n_1$ $\|x_n - x_{n_1}\| \leqslant 1/2$, номер n_2 такой, что $n_2 > n_1$ и для всех $n > n_2$ $\|x_n - x_{n_2}\| \leqslant 1/2^2$ и т. д. Далее рассмотреть последовательность шаров $\overline{S}_k = \overline{S}_{1/2^k}(x_{n_k})$ и воспользоваться задачей 2.2. **2.26.** В силу задачи 1.5 последовательность радиусов r_n является невозрастающей. Если $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, то все сводится к теореме 2.2. В противном случае или r_n стабилизируется и тогда все доказано, или $r_n \to \rho > 0$, $r_n > \rho$. Тогда последовательность шаров с теми же центрами радиусов $r_n - \rho$ также является вложенной. **2.27.** Может. Пусть $e_k = \Big(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, 1, 0, \ldots\Big)$, $X_k = \bigcup_{k=n}^{\infty} e_k$. **2.28.** б) Пусть ξ_n фундаментальна в X/L, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что для любого $n > N$ и для любого $m \geqslant 1$ выполняется неравенство $\|\xi_{n+m} - \xi_n\| < \varepsilon$. Пусть $\varepsilon_k = 2^{-k}$, n_k таковы, что $\|\xi_{n_k+m} - \xi_{n_k}\| < 2^{-k}$. Тогда $\|\xi_{n_2} - \xi_{n_1}\| < 1/2$ и найдутся $x_1 \in \xi_{n_1}$, $x_2 \in \xi_{n_2}$ такие, что $\|x_2 - x_1\| < 1$. Аналогично строятся $x_k \in \xi_{n_k}$ такие, что $\|x_k - x_{k-1}\| < 1/2^{k-1}$. Последовательность x_k фундаментальна в X, поэтому $x_k \to x_0 \in X$. Пусть ξ_0 — класс, содержащий x_0. Тогда $\xi_{n_k} \to \xi_0$, а значит, и $\xi_n \to \xi_0$.

§ 3

3.9. Нет. **3.11.** Вообще говоря, нет. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ сходится и для выбранного $\varepsilon > 0$ число N таково, что $\sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k < \varepsilon$. Рассмотрим последовательность $x_n = \Big(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots\Big)$. Тогда при $m, n > N$ имеем $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$, но x_n не является сходящейся. **3.23.** Строгое включение возможно (если, например, множество M всюду плотно в пространстве H). **3.26.** б) $f_1(t) \equiv 1$, $f_2(t) = -t + 1$, $f_3(t) = t^2 - 4t + 2$. **3.27.** б) $f_1(t) \equiv 1$, $f_2(t) = 2t$, $f_3(t) = 4t^2 - 2$. **3.29.** В качестве такой системы можно, например, выбрать $x_n = \Big(1, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, -1, 0, 0, \ldots\Big)$. **3.30.** $N = M^{\perp}$ — одномерное подпространство с базисом $a_n = \Big(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots\Big)$. **3.32.** Нет. M и N

могут даже не являться линейными многообразиями. **3.33.** В качестве M достаточно взять всюду плотное в пространстве l_2 множество. **3.34.** Нет. Пусть, например, M есть подпространство пространства l_2 из задачи 3.30, N — одномерное подпространство с базисом $(1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Тогда, согласно задаче 3.30, $N \neq M^{\perp}$, но $l_2 = M \oplus N$. **3.36.** б) $M^{\perp} = \{x(t) \in L_2[-1, 1]: x(t) = 0$ при $t \geqslant 0\}$. в) Нет. **3.37.** Из предположения, что элемент $x \in l_2$ ортогонален линейной оболочке, сделать вывод, что $x = 0$. **3.38.** Доказать, что

$$M - x_0 = \{x \in H: (x, x_k) = 0, k \in \mathbf{N}\}.$$

3.41. Рассмотреть последовательность

$$x_n = \Big(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1 + 1/n, 0, 0, \ldots\Big) \in l_2.$$

3.42. Пусть для любого $z \in M$ выполняется неравенство $(x - y, y - z) \geqslant 0$. Тогда

$$\|x - z\|^2 = ((x - y) + (y - z), (x - y) + (y - z)) \geqslant \|x - y\|^2.$$

Обратно, если $y \in M$ таково, что $\rho(x, M) = \|x - y\|$ и $z \in M$, то для любого $\lambda \in [0, 1]$ $\lambda y + (1 - \lambda) z \in M$, следовательно, $\|x - y\|^2 \leqslant \leqslant \|x - \lambda y - (1 - \lambda) z\|^2$, откуда при $\lambda \in [0, 1)$ $(x - y, y - z) \geqslant \geqslant -\frac{1}{2}(1 - \lambda)\|y - z\|^2$ и, устремляя λ к 1, получаем требуемое утверждение. **3.43.** Использовать задачу 3.42. Предварительно рассмотреть случай $x_0 = 0$. **3.44.** Пусть $M_1 \supset M_2 \supset \ldots$ — такая последовательность, $a_k \in M_k$ $(k \in \mathbf{N})$ — элемент с наименьшей нормой, существующей согласно задаче 3.40. Используя выпуклость и ограниченность M_k, а также равенство параллелограмма, доказать, что последовательность a_k фундаментальна. **3.45.** $A_n = \{x(t) \in C[0, 1]: \|x\| \leqslant 1, x(0) = 0, x(1) = 1$ при $1/n \leqslant t \leqslant 1\}$.

§ 4

4.9. $\cos\varphi = \sqrt{6}/\pi$. **4.10.** $\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = \pi/3$, $\varphi_3 = \pi/6$. **4.11.** При $\alpha \neq 0$ $t^{\alpha} \in L_p[0, 1]$, $p \geqslant 1$ для $\alpha > -1/p$, при этом $\|t^{\alpha}\| = (p\alpha + 1)^{-1/p}$. При $\alpha = 0$ $x(t) \equiv 1 \in L_p[0, 1]$ для любого $p \geqslant 1$ и $\|1\| = 1$. **4.12.** а) $f_1(t) \equiv 1$, $f_2(t) = t$, $f_3(t) = 3t^2 - 1$, $f_4(t) = 5t^3 - 3t$. б) $f_1(t) \equiv 1$, $f_2(t) = 2t - 1$, $f_3(t) = 6t^2 - 6t + 1$, $f_4(t) = 20t^3 - 30t^2 + 12t - 1$. **4.13.** Нет. Положим

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } |t - 1/2| \leqslant 1/n, \\ 1 & \text{при } |t - 1/2| > 1/n, \quad n \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

Тогда $x_n(t) \in A$, но при $n \to \infty$ $x_n(t) \to x(t) \equiv 1 \notin A$. **4.14.** Да. **4.16.** Выпуклость очевидна. Достаточно доказать, что множество является всюду плотным в множестве всех многочленов. Для произвольного многочлена $P(t)$ последовательность $P_n(t) = P(t)(1 - t^n)$ удовлетворяет условию $P_n(1) = 0$ $(n \in \mathbf{N})$ и сходится к $P(t)$ при $n \to \infty$.

4.18. $M^{\perp} = \{x(t) \in L_2[a, b]: x(t) = 0$ при $t \notin [c, d]$ почти всюду$\}$. **4.19.** $M^{\perp}$ — одномерное подпространство с базисом $x(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 1$.

4.21. Положим для $x(t) \in L_p[a, b]$, $Jx = x$. Так как $p > s$, то

$$(\mathscr{L}) \int_a^b |x(t)|^s\, dt \leqslant b - a + (\mathscr{L}) \int_a^b |x(t)|^p\, dt < \infty.$$

В неравенстве Гёльдера

$$\left|(\mathscr{L}) \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\right| \leqslant \left((\mathscr{L}) \int_a^b |f(t)|^{p'}\, dt\right)^{1/p'} \left((\mathscr{L}) \int_a^b |g(t)|^{q'}\, dt\right)^{1/q'}$$

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1,$$

положим $f(t) = |x(t)|^s$, $g(t) \equiv 1$, $p' = p/s > 1$. Тогда

$$(\mathscr{L}) \int_a^b |x(t)|^s\, dt \leqslant \left[(\mathscr{L}) \int_a^b dt\right]^{1/q'} \left[(\mathscr{L}) \int_a^b |x(t)|^{p's}\, dt\right]^{s/p}$$

или

$$\left[(\mathscr{L}) \int_a^b |x(t)|^s\, dt\right]^{1/s} \leqslant (b - a)^{1/s - 1/p} \left[(\mathscr{L}) \int_a^b |x(t)|^p\, dt\right]^{1/p},$$

т. е. $\|J(x)\| \leqslant \beta\|x\|$. **4.22.** Использовать задачу 1.45. **4.24.** $\cos\varphi = \sqrt{\frac{3}{\pi^2 + 3}}$. **4.25.** $f_1(t) \equiv 1$, $f_2(t) = t$, $f_3(t) = 1 - 3t^2$, $f_4(t) = 9t - 10t^3$. **4.27.** $(\overset{\circ}{H}{}^1[a, b])^{\perp}$ — двумерное подпространство с базисом $x_1(t) = e^t$, $x_2(t) = e^{-t}$. **4.28.** $M^{\perp}$ — одномерное подпространство с базисом $x(t) = \operatorname{sh}(t - (a + b)/2)$. **4.29.** $M^{\perp}$ — одномерное подпространство с базисом $x(t) \equiv 1$. **4.31.** $y(t) = |t|$. **4.32.** $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n\sqrt{n}}$.

§ 5

5.5. Множество элементов вида $\{y(t) \in C[0, 1]: y(0) = 0, 0 \leqslant \leqslant y(t) \leqslant 2$ для любого $t \in [0, 1]\}$. **5.6.** а) $u^* = 1/2$, $\rho(x_0, L) = 1/2$. б) $u^* = t - 1/8$, $\rho(x_1, L) = 1/8$. **5.9.** Воспользоваться задачами 4.19 и 5.8. $\rho(x, L) = 1/3$. **5.10.** Воспользоваться задачами 3.30 и 5.8. $\rho_n(x, L) = 1/\sqrt{n}$. **5.11.** 0,25 при $n = 0$; $0{,}9t - 0{,}2$ при $n = 1$; $1{,}5t^2 - 0{,}6t + 0{,}05$ при $n = 2$. **5.12.** Переписать указанное в задаче представление в виде

$$x(t) = \int_0^1 x(\tau)\, d\tau + \int_0^1 K(t, \tau)\, x'(\tau)\, d\tau,$$

в каждом из слагаемых в правой части воспользоваться неравенством Коши — Буняковского. При этом

$$\int_0^1 K^2(t, \tau)\, d\tau \leqslant \frac{1}{3},$$

так что

$$\|x\|_{C[0,1]} \leqslant \left[\int_0^1 x^2(\tau)\,d\tau\right]^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\int_0^1 x'^2(\tau)\,d\tau\right]^{1/2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\|x\|_{H^1[0,1]}.$$

5.13. а) $u^* = 1/2$, $\rho(x_0, L) = \sqrt{39}/6$. б) $u^* = t - 1/6$, $\rho(x_1, L) = \sqrt{210}/30$. **5.14.** Ортогонализацию базиса L, состоящего из функций $1, t, t^2, t^3$, удобно выполнить следующим образом: первоначальный базис записывается в виде единичной матрицы F, затем первая строка F переписывается в первую строку матрицы A — матрицы преобразованного базиса — и нормируется. Последующие строки матрицы F переписываются в строки матрицы A в соответствии с формулами ортогонализации, причем всякий раз строки нормируются. Когда матрица A сформирована, вычисляется скалярное произведение $x(t)$ на элементы строки, транспонированной столбцу

$$A\begin{pmatrix}1\\ t\\ t^2\\ t^3\end{pmatrix}.$$

Умножая полученную строку на столбец матрицы A, получаем соответствующий коэффициент многочлена наилучшего приближения.

Скалярные произведения и нормы в пространстве $H_p[0, 1]$ вычисляются обращением к соответствующей подпрограмме.

Коэффициенты многочленов округлены до двух знаков после запятой, в вариантах с параметром ответ приводится при $\alpha = 0$.

а) $u^*(t) = 1{,}00 - 0{,}01t + 0{,}37t^2 - 0{,}11t^3$;
б) $u^*(t) = 1{,}31 + 7{,}98t + 12{,}17t^2 - 4{,}65t^3$;
в) $u^*(t) = 2{,}00 + 0{,}99t - 0{,}21t^2 + 0{,}05t^3$;
г) $u^*(t) = -0{,}01t + 1{,}12t^2 - 0{,}42t^3$;
д) $u^*(t) = 2{,}00 + 1{,}40t + 0{,}44t^2 + 0{,}16t^3$;
е) $u^*(t) = 1{,}00 + 0{,}33t - 0{,}09t^2 + 0{,}02t^3$;
ж) $u^*(t) = 1{,}17 - 9{,}24t + 20{,}72t^2 - 13{,}82t^3$;
з) $u^*(t) = -0{,}01t + 1{,}13t^2 - 0{,}42t^3$;
и) $u^*(t) = 1{,}00 - 0{,}02t + 0{,}44t^2 + 0{,}09t^3$;
к) $u^*(t) = -1{,}00 + 1{,}02t + 0{,}42t^2 + 0{,}28t^3$.

5.15. Основная программа осуществляется структурно по алгоритму, описанному в условии задачи. Для этого: 1) последовательным обращением к подпрограммам скалярных произведений заполняются матрица коэффициентов и правая часть системы линейных уравнений; 2) производится обращение к стандартной подпрограмме решения систем линейных уравнений; 3) полученные в результате решения коэффициенты многочленов наилучшего приближения выдаются на печать; 4) интегрированием вычисляются и выдаются на печать величины $\|x - u^*\|_{L_2[0,1]}$ и $\|x - v^*\|_{H^1[0,1]}$; 5) если построение графика не предусмотрено программой, выдаются на печать значения x, u^*, v^*.

Интегралы вычисляются по формуле Симпсона, реализованной в необходимых местах циклически. Для вычисления скалярных произведений в пространствах $L_2[0, 1]$ и $H^1[0, 1]$ заносятся по два оператора-функции.

Коэффициенты многочленов округлены до двух знаков после запятой:

а) $u^*(t) = 1{,}00 + 1{,}10t + 0{,}62t^2 + 0{,}18t^3 + 0{,}11t^4$, $v^*(t) = 1{,}00 + 1{,}10t + 0{,}62t^2 + 0{,}18t^3 + 0{,}11t^4$;
б) $u^*(t) = 0{,}99 + 0{,}25t - 6{,}69t^2 + 4{,}45t^3 - 0{,}01t^4$, $v^*(t) = 1{,}00 + 0{,}16t - 6{,}47t^2 + 4{,}31t^3$;
в) $u^*(t) = 1{,}00 + 1{,}00t + 0{,}51t^2 + 0{,}14t^3 + 0{,}07t^4$, $v^*(t) = 1{,}00 + 1{,}00t + 0{,}51t^2 + 0{,}14t^3 + 0{,}07t^4$;
г) $u^*(t) = 3{,}10t + 0{,}47t^2 - 7{,}14t^3 + 3{,}57t^4$, $v^*(t) = 3{,}12t + 0{,}39t^2 - 7{,}02t^3 + 3{,}51t^4$;
д) $u^*(t) = 0{,}97 + 1{,}91t - 40{,}65t^2 + 77{,}48t^3 - 38{,}74t^4$, $v^*(t) = 1{,}00 + 1{,}09t - 36{,}64t^2 + 71{,}11t^3 - 35{,}55t^4$;
е) $u^*(t) = 0{,}22t + 1{,}32t^2 - 0{,}82t^3 + 0{,}28t^4$, $v^*(t) = 0{,}12t + 1{,}68t^2 - 1{,}29t^3 + 0{,}48t^4$;
ж) $u^*(t) = 1{,}14 - 8{,}92t + 20{,}37t^2 - 14{,}49t^3 + 0{,}77t^4$, $v^*(t) = 0{,}01 + 4{,}49t - 13{,}87t^2 + 9{,}98t^3 - 0{,}63t^4$;
з) $u^*(t) = 1{,}00t - 0{,}46t^2 + 0{,}21t^3 - 0{,}05t^4$, $v^*(t) = 1{,}00t - 0{,}47t^2 + 0{,}22t^3 - 0{,}06t^4$;
и) $u^*(t) = -0{,}55 + 1{,}28t - 0{,}56t^2 + 0{,}37t^3$, $v^*(t) = -0{,}55 + 1{,}29t - 0{,}58t^2 + 0{,}39t^3$;
к) $u^*(t) = 0{,}93 + 2{,}36t - 22{,}11t^2 + 38{,}79t^3 - 20{,}88t^4$, $v^*(t) = 1{,}00 + 1{,}52t - 20{,}35t^2 + 38{,}30t^3 - 21{,}47t^4$.

5.17. Коэффициенты многочленов наилучшего приближения при $n = 5$ округлены до двух знаков после запятой: $u_0^* = 0{,}31$, $\rho(x, L_0) = 0{,}38$; $u_1^*(t) = -0{,}17 + 0{,}96t$, $\rho(x, L_1) = 0{,}16$; $u_2^*(t) = 0{,}02 - 0{,}54t + 1{,}50t^2$, $\rho(x, L_2) = 0{,}03$. **5.18.** б) $n = 9$. в) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 2/\pi$.

5.19. Коэффициенты многочленов наилучшего приближения при $n = 15$ округлены до двух знаков после запятой:

а) $u_*(t) = -0{,}12 + 35{,}28t - 502{,}37t^2 + 859{,}16t^3 - 986{,}37t^4 + 394{,}55t^5$;
б) $u_*(t) = 0{,}10 - 0{,}03t^2 + 0{,}61t^3 - 0{,}12t^4 - 0{,}04t^5$;
в) $u_*(t) = 1{,}02t + 0{,}68t^2 + 1{,}04t^3 - 0{,}41t^4 + 0{,}51t^5$;
г) $u_*(t) = 0{,}99t - 0{,}49t^2 + 0{,}28t^3 - 0{,}13t^4 + 0{,}03t^5$;
д) $u_*(t) = 1{,}33 - 25{,}58t + 112{,}04t^2 - 172{,}92t^3 + 84{,}46t^4$;
е) $u_*(t) = 3{,}10t + 0{,}48t^2 - 7{,}17t^3 + 3{,}58t^4$;
ж) $u_*(t) = 0{,}10 + 1{,}00t + 0{,}50t^2 + 0{,}17t^3 + 0{,}03t^4 + 0{,}01t^5$;
з) $u_*(t) = 0{,}47t - 13{,}56t^2 + 26{,}20t^3 - 24{,}03t^4 + 8{,}28t^5$;
и) $u_*(t) = 0{,}34t - 0{,}41t^2 + 1{,}75t^3 - 3{,}38t^4 + 3{,}00t^5$;
к) $u_*(t) = -0{,}54 + 1{,}30t - 0{,}69t^2 + 0{,}73t^3 - 0{,}40t^4 + 0{,}16t^5$.

§ 6

6.2. Все три пространства являются полными. **6.3.** Функция $u = f(v)$ должна быть монотонной. **6.4.** Функция $u = f(v)$ должна быть монотонной, а область ее значений должна совпадать с $\mathbf{R}$. **6.5.** а) Пространство неполное, его пополнение изометрично отрезку $[-\pi/2, \pi/2]$. б) Пространство неполное, его пополнение изометрично полупрямой $[0, +\infty)$. в) Пространство полное. **6.6.** в) Ес-

ли $\rho(x, y) = \|x - y\|$, то $\rho(x, 0) = \|x\|$. Рассмотрим элемент $x = (1, 1, 1, \ldots) \in s$. Тогда $\|2x\| \neq 2\|x\|$, поэтому норму ввести нельзя. г) $x_n = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0 \ldots)$. 6.7. Строгое заключение возможно, например, в пространстве задачи 6.1. 6.9. Строгое включение $S_a(x) \subset S_1(y)$ возможно, если $a < 2$. 6.10. $\overline{S}_{1+1\,(2n)}(n)$.

ГЛАВА 2

§ 7

7.2. Вообще говоря, нет. 7.4. Да. 7.12. а) — е) $\|A\| = 1$. ж) $\|A\| = 1/\sqrt{3}$. з) $\|A\| = 1$. и) $\|A\| \leqslant 1$. к) $\|A\| = 1$. л) $\|A\| \leqslant 2$. м) $\|A\| \leqslant 1$. 7.13. Нет. Рассмотреть последовательность $x_n(t) = t^n$ $(n \in \mathbf{N})$. 7.14. Да, $\|A\| \leqslant 1$. 7.15. а) $\varphi(t) \in C[0,1]$, $\|A\| = \|\varphi\|_{C[0,1]}$. б) $\varphi(t) \in C[0,1]$, $\|A\| = \|\varphi\|_{C[a,1]}$. 7.18. Нет. Для построения примера воспользоваться задачей 7.17. 7.20. б) Нет. Воспользоваться задачей 7.12 д). 7.21. Нет. Построить пример неограниченного оператора, для которого $Y = \mathbf{R}$. 7.23. Нет. Воспользоваться задачей 7.13. 7.24. Так как $N(A)$ — подпространство, рассмотрим факторпространство $X/N(A)$ и оператор π: $X \to X/N(A)$ (см. задачу 7.7). Оператор A определяет взаимно однозначный оператор A': $X/N(A) \to R(A)$ такой, что $A = A'\pi$. Так как A' взаимно однозначен и $R(A)$ конечномерно, то и $X/N(A)$ конечномерно. Согласно задаче 7.19, оператор A' непрерывен, согласно задаче 7.7, оператор π непрерывен. Тем самым, непрерывен и оператор A. 7.25. Нет. Рассмотреть оператор A: $E^2 \to E^2$, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$. 7.28. Тогда и только тогда, когда $\varphi(t)$ не обращается в нуль на $[a, b]$. 7.29. а) Нет, так как возможно, что $N(A) \neq 0$. Если $N(A) = 0$, то пространство не обязано быть полным, так как оно изометрично $R(A)$. б) Да. В этой норме X является банаховым пространством. 7.30. б) $\sup\limits_n |\lambda_n| < +\infty$. в) $\sup\limits_n |\lambda_n| < +\infty$, $\|A\| = \sup\limits_n |\lambda_n|$. г) Нет. д) Тогда и только тогда, когда $\inf\limits_{\lambda_k \neq 0} |\lambda_k| > 0$.

§ 8

8.3. Вообще говоря, нет. Пример построить для оператора A: $E^2 \to E^2$. 8.4. Вообще говоря, нет. Воспользоваться задачей 7.12 д). 8.5. Нет, M может не быть даже линейным многообразием. 8.6. Да. 8.9. а), б). Да. 8.11. Вообще говоря, нет. В пространстве l_2 рассмотреть $A = I$ — тождественному оператору, $A_n x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, nx_n, x_{n+1}, \ldots)$ для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$, в качестве линейного многообразия рассмотреть множество элементов пространства l_2, у которых лишь конечное число координат отлично от нуля. 8.15. д) С ростом n последовательность $\|A_n\|$ растет, но медленно: $\|A_3\| = 2{,}07$, $\|A_6\| = 2{,}35$, $\|A_8\| = 2{,}41$, $\|A_{10}\| = 2{,}57$. Поэтому вывод об ограниченности или неограниченности последовательности $\|A_n\|$ по полученным результатам сделать трудно. В [11] доказывается, что последовательность $\|A_n\|$ неограничена. 8.16. д) С ростом n последовательность $\|A_n\|$ растет быстро: $\|A_3\| = 3{,}80$, $\|A_5\| = 4{,}75$, $\|A_8\| = 7{,}60$, $\|A_{10}\| = 9{,}50$, поэтому правдоподобно (и это доказано — см. [14]), что последовательность $\|A_n\|$ неограничена. 8.17. Нет. Рассмотреть последовательность операторов A_n: $l_2 \to l_2$,

$$A_n x = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$$

для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$. 8.19. Последовательность A_n сходится к нулевому оператору равномерно, последовательность B_n — сильно. 8.20. Последовательность A_n сходится к оператору A равномерно. 8.21. Последовательности A_n и B_n сходятся к оператору A равномерно. 8.22. в) Нет. 8.28. а), б) Да. 8.31. $e^I = eI$. 8.33. Нет. Для $u \in [0, 1]$ положить

$$\lambda_u(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \leqslant u, \\ 0 & \text{при} \quad t > u \end{cases}$$

и воспользоваться задачами 7.12 з) и 1.77. 8.34. Пусть $y \in Y$. Существует $x_1 \in X$ такое, что $\|Ax_1 - y\| \leqslant \alpha\|y\|$, $\|x_1\| \leqslant \beta\|y\|$. Далее, существует $x_2 \in X$ такое, что $\|Ax_2 - (Ax_1 - y)\| = \|A(x_1 - x_2) - y\| \leqslant \alpha\|Ax_1 - y\| \leqslant \alpha^2\|y\|$, $\|x_2\| \leqslant \alpha\beta\|y\|$ и т. д. В итоге получаем последовательность $x_n \in X$ такую, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leqslant \beta\|y\| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{\beta}{1-\alpha}\|y\|,$$

и ряд $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots$ сходится к некоторому $x \in X$. С другой стороны, $A\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i\right) \to y$ при $n \to \infty$, и так как A — непрерывный оператор, то $Ax = y$. 8.35. Пусть $x = u + v$, $u \in L$, $v \in M$. Положим $\|x\|_1 = \|u\| + \|v\|$ и докажем, что пространство X полно относительно $\|\ \|_1$. Нормы $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$ эквивалентны (см. [25], с. 168, теорема 3). Это и означает ограниченность оператора P. 8.36. Пусть P — ограниченный оператор, удовлетворяющий условию $P^2 = P$. Положить $L = N(I - P)$, $M = N(P)$ и доказать, что $X = L \oplus M$. 8.37. Пусть P ограничен и $P^2 = P$. Установить, что $R(I - P) = N(P)$ и $R(P) = N(I - P)$, и воспользоваться задачей 7.22. Обратно, если линейные многообразия $R(P)$ и $R(I - P)$ замкнуты, то доказать, что $X = R(P) \oplus R(I - P)$ и что P — оператор проектирования, после чего воспользоваться задачей 8.35. 8.38. а) $\|A\| = \|B\| = 1$. б) $A^2 = A$, $B^2 = B$; являются. 8.39. $\|P\| = 1$. 8.41. а) $L^\perp \subset N(A)$. б) $R(A) \subset L$. в) L, $L^\perp$ — инвариантные подпространства для A, т. е. из $x \in L$ следует $Ax \in L$, из $x \in L^\perp$ следует $Ax \in L^\perp$. 8.42. Пусть $\bar{L}$ — замыкание L; тогда оператор A может быть продолжен на $\bar{L}$ с сохранением нормы по теореме 8.4. Пусть P — оператор ортогонального проектирования на L. Положим $Bx = A(Px)$ для $x \in H$. Тогда B — продолжение A с сохранением нормы. 8.43. Пусть P — оператор проектирования на L параллельно M. Оператор $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ представим в виде $A = PA + (I - P)A$. 8.44. Неверно. Пример привести для случая $X = Y = E^2$.

§ 9

9.3. Да. Доказать, что $N(A) = N(B) = 0$. 9.4. Пусть $(I - AB)^{-1} = C$. Доказать, что $(I - BA)^{-1} = I + BCA$. 9.5. Доказать, что $A^{-1} = -I - B$. 9.8. Воспользоваться теоремой 9.1.

9.9. Оператор A^{-1} существует при $\lambda_n \neq 0$ и ограничен тогда и только тогда, когда $\inf_n |\lambda_n| > 0$. **9.10.** Существуют операторы $A_l^{-1} = B$ и $B_r^{-1} = A$. **9.13.** а) $R(A)$ — линейное многообразие непрерывно дифференцируемых функций $y(t)$, удовлетворяющих условию $y(0) = 0$. б) Оператор A^{-1} существует, но не ограничен. **9.14.** б)

$$A^{-1}y = y(t) - \int_0^t e^{\tau - t} y(\tau)\, d\tau.$$

9.15. $$A^{-1}y = y(t) - \frac{2}{e^2 - 1}\int_0^1 y(s)\, e^{s+t}\, ds.$$

9.16. б) $$A^{-1}y = \int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau)\, d\tau.$$

9.17. Да. Из равенства $Ax = y$ вывести, что $y'' - y = -2x$. **9.19.** Положить $B = I - A$ и воспользоваться теоремой 9.3. **9.20.** Представить $A - \lambda I$ в виде $A - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}A)$ и воспользоваться теоремой 9.3. **9.22.** Если для $n \in \mathbf{N}$ $\|A_n^{-1}\| < c$, $A_n x_n = y$, $Ax = y$, то $\|x_n - x\| = \|A_n^{-1} A_n (x_n - x)\| \leqslant c \|A_n (x_n - x)\| = c\|A_n x - Ax + Ax - A_n x_n\| = c\|A_n x - Ax\| \to 0$. Обратно, если $x_n \to x$ при $n \to \infty$, то последовательность $x_n = A_n^{-1} y$ ограничена для любого $y \in Y$, и в силу теоремы 8.2 последовательность $\|A_n^{-1}\|$ ограничена. **9.23.** Пусть оператор A непрерывно обратим. Найдется N такое, что при $n > N$ $\|A_n A^{-1} - I\| = \|A_n A^{-1} - AA^{-1}\| \leqslant \|A_n - A\| \times \|A^{-1}\| < 1/2$. Далее воспользоваться теоремой 9.4. При доказательстве достаточности воспользоваться той же теоремой. **9.24.** Пусть $AB = I$, т. е. $B = A_r^{-1}$. Если $N(A) \neq 0$, то для $y \in N(A)$ положим $C\colon H \to H$, $Cx = (x, y)y$. Тогда $C \neq 0$ и $B + C \in \mathscr{L}(H)$, при этом $A(B + C) = I$, что противоречит единственности оператора B.

§ 10

10.1. Доказать, что $A^{-1} \in \mathscr{L}(C[0, 1])$ и воспользоваться теоремой 10.2. **10.2.** Найти оператор A^{-1} и воспользоваться теоремой 10.2. **10.3.** Воспользоваться задачей 9.16 и теоремой 10.2. **10.4.** Согласно теореме 10.3 достаточно доказать, что P замкнут. Замкнутость P вытекает из замкнутости L и M. **10.8.** Нет. Подпространство $L \subset X + Y$ элементов вида $(0, y)$, где $y \in Y$, не является графиком никакого оператора. **10.10.** а) Нет. Воспользоваться примером из задачи 10.2. б) Нет. Рассмотреть оператор $A\colon C^1[0, 1] \to C[0, 1]$, $Ax = x$. **10.12.** Воспользоваться теоремой 9.1. **10.14.** Воспользоваться теоремами 10.2 и 10.3. **10.15.** Пусть оператор A замкнут и последовательность g_n фундаментальна в $\|\ \|_1$. Тогда $g_n \to g$ в X и $Ag_n \to h$ в Y, в силу замкнутости $g \in D(A)$ и $Ag = h$. Отсюда $\|g_n - g\|_1 = \|g_n - g\|_X + \|Ag_n - Ag\|_Y \to 0$. Обратно, если $D(A)$ — банахово, $g_n \in D(A)$, $g_n \to g$, $Ag_n \to h$ при $n \to \infty$, и так как g_n фундаментальна в $\|\ \|_1$, то существует $f \in D(A)$ такое, что

$\|g_n - f\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Так как $\|g_n - f\| \leqslant \|g_n - f\|_1$, то $g_n \to f$ в норме X, следовательно, $g = f$ и $\|Ag_n - Ag\| \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда $h = Af = Ag$.

ГЛАВА 3

§ 11

11.1. Если существует $x \in X$ такое, что $\langle x, f\rangle = \lambda \neq 0$, то $\langle x/\lambda, f\rangle = 1$. **11.3.** а) $\|f\| = 2/3$ б) $\|f\| = 4$ в) $\|f\| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|$. г) $\|f\| = 2/e$. д) $\|f\| = 1$. е) $\|f\| = 3$. ж) $\|f\| = 2$. з) $\|f\| = 3 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k+1}$. **11.4.** а), б), в) Да. **11.5.** а) $\|f\| = 1$. б) $\|f\| = 1/2$. в) $\|f\| = 1$. г) $\|f\| = \sqrt{2/3}$. д) $\|f\| = \sqrt{3}$. е) $\|f\| = \sqrt{2}$. ж) $\|f\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$. з), и) $\|f\| = 1$. к), л) $\|f\| = 2$. м) $\|f\| = 1$. **11.6.** а) При $p \geqslant 1$. б) При $p > 2$. **11.7.** а) Да, $\|f\| = 1$. б) Нет. Рассмотреть последовательность $x_n(t) = \sin nt/n$. **11.8.** б) Положим

$$c = \frac{1}{b - a}\int_a^b u(t)\, dt, \quad x(t) = \int_0^t [u(\tau) - c]\, d\tau;$$

тогда $x(t) \in L$ и $x'(t) = u(t) - c$, следовательно,

$$\int_a^b u(t)(u(t) - c)\, dt = 0,$$

откуда

$$\int_a^b [u(t) - c]^2\, dt = \int_a^b u(t)(u(t) - c)\, dt - c\int_a^b (u(t) - c)\, dt = 0,$$

и так как $u(t) - c$ — непрерывная на $[a, b]$ функция, то $u(t) \equiv c$. в) Интегрируя по частям, с учетом того, что $x(t) \in L$, получаем

$$\int_a^b v(t)\, x(t)\, dt = -\int_a^b \left(\int_a^t v(\tau)\, d\tau\right) x'(t)\, dt.$$

Поэтому

$$\langle x, g\rangle = \int_a^b \left[w(t) - \int_a^t v(\tau)\, d\tau\right] x'(t)\, dt.$$

Согласно пункту б) отсюда вытекает, что $w(t) - \int_a^t v(\tau)\, d\tau = c$, а это и означает, что $w(t) \in C^1[a, b]$ и $w'(t) = v(t)$. **11.9.** Восполь-

зоваться задачей 11.3 ж). **11.10.** Воспользоваться задачами 11.5 и), л). **11.11.** $\|f\| = 1/(2r)$. **11.12.** При доказательстве достаточности воспользоваться тем фактом, что всякое открытое множество на прямой есть объединение конечного или счетного числа интервалов и задачей 1.85 б). **11.13.** Если f не ограничен, то он не ограничен на шаре $\bar{S}_1(0)$, поэтому существует последовательность $x_n \in X$ такая, что $\|x_n\| \leqslant 1$ и $|\langle x_n, f\rangle| > n$. Рассмотреть последовательность $a_n = x_n/\sqrt{n}$. **11.15.** При доказательстве достаточности воспользоваться задачей 11.14. **11.16.** Пусть $x \in X$ — таково, что $\langle x, f\rangle = c \neq 0$; тогда $\langle x/c, f\rangle = 1$ и $x_0 = x/c$ есть базис M. **11.18.** Если $x \notin L$, то $L + \{\lambda x\}$, где $\lambda \in \mathbf{R}$, — подпространство, содержащее L, поэтому $L + \{\lambda x\} = X$. Определим на X функционал f равенством $\langle y, f\rangle = \lambda$, если $y = u + \lambda x$, где $u \in L$. **11.21.** Воспользоваться задачами 11.14, 11.15 и 11.20. **11.22.** При $x \in L$ $|\langle x, f\rangle| = 1 \leqslant \|x\|\|f\|$, откуда $\inf\limits_{x \in L} \|x\| \geqslant 1/\|f\|$. С другой стороны, существует последовательность $x_n \in X$ такая, что $\|x_n\| = 1$ и $|\langle x_n, f\rangle| \geqslant \frac{n}{n+1}\|f\|$. Если $y_n = \frac{x_n}{\langle x_n, f\rangle}$, то $y_n \in L$ и $\|y_n\| \leqslant \frac{n+1}{n}\frac{1}{\|f\|}$, поэтому $\inf\limits_{x \in L} \|x\| \leqslant \frac{1}{\|f\|}$. **11.23.** Если $y \in L$, то $|\langle x - y, f\rangle| \leqslant \|x - y\| \cdot \|f\|$, но $\langle x - y, f\rangle = \langle x, f\rangle$, поэтому $\|x - y\| \geqslant \frac{|\langle x, f\rangle|}{\|f\|}$, и, следовательно, $\rho(x, L) = \inf\limits_{y \in L} \|x - y\| \geqslant \frac{|\langle x, f\rangle|}{\|f\|}$. С другой стороны, существует последовательность $x_n \in X$ такая, что $\|x_n\| = 1$ и $|\langle x_n, f\rangle| > \frac{n}{n+1}\|f\|$. Положим $y = x - \frac{\langle x, f\rangle}{\langle x_n, f\rangle} x_n$; тогда $y \in L$ и $\|x - y\| \leqslant \frac{n+1}{n}\frac{|\langle x, f\rangle|}{\|f\|}$. **11.24.** Воспользоваться предыдущей задачей.

§ 12

12.3—12.5. Воспользоваться следствием 1 теоремы 12.1. **12.8.** Воспользоваться следствием 2 теоремы 12.1. **12.9.** В X существует конечномерное подпространство L любой размерности; тогда размерность L^* равна размерности L. Заданный на L непрерывный линейный функционал продолжается на все X. **12.10.** б) Ортогональное дополнение к M. в) Воспользоваться следствием 2 теоремы 12.1. **12.13.** Пусть $f_1, f_2, \ldots \subset X^*$ — всюду плотное множество. Для каждого f_k выберем $x_k \in X$ такое, что $\|x_k\| = 1$ и $|\langle x_k, f_k\rangle| \geqslant \|f_k\|/2$. Множество K всех линейных комбинаций x_k с рациональными коэффициентами счетно. Если $\bar{K} \neq X$, то по следствию 2 теоремы 12.1 найдется $f \in X^*$ такое, что $f \neq 0$ и $\langle x, f\rangle = 0$ для любого x из $\bar{K}$, в частности, $\langle x_k, f\rangle = 0$ для $k \in \mathbf{N}$. Найдется $m \in \mathbf{N}$ такое, что $\|f - f_m\| < \varepsilon$. Тогда $|\langle x_m, f - f_m\rangle| = |\langle x_m, f_m\rangle| \geqslant \frac{\|f_m\|}{2} = \frac{\|f_m\|}{2}\|x_m\|$; отсюда $\|f - f_m\| \geqslant \frac{\|f_m\|}{2}$, $\|f_m\| < 2\varepsilon$ и, следовательно, $\|f\| \leqslant \|f_m\| + \|f - f_m\| < 3\varepsilon$. Таким образом, $f \equiv 0$ — противоречие. Обратное утверждение, как это следует из задачи

12.24, неверно. **12.14.** Если

$$\langle x, f\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)\, g(t)\, dt, \quad g(t) \in C[-1, 1],$$

то положим $x(t) = t^2 g(t)$. Функция

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \leqslant 0, \\ 1 & \text{при} \quad t > 0 \end{cases}$$

имеет ограниченную на $[-1, 1]$ вариацию и удовлетворяет условию

$$x(0) = \int_{-1}^{1} x(t)\, dg(t).$$

12.15. б)

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t = -1, \\ t^2/2 & \text{при} \quad -1 < t < 1, \\ 1 & \text{при} \quad t = 1. \end{cases}$$

12.16. б). 1) Однозначно, $\langle x, f\rangle = x(1)$. 2) Неоднозначно, продолжения $\langle x, f_1\rangle = x(0)$ и $\langle x, f_2\rangle = -x(1)$ совпадают с f на L. **12.17.** Если $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E^2$, то продолжение есть $\langle x, \hat{f}\rangle = \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2$.

12.20. Убедиться, что в лемме об элементарном продолжении ([25], § 16.1) $\alpha = \beta$, так что γ определено однозначно. **12.25.** $\|f\| = \sqrt{2}$. **12.26.** Да.

$$|\langle x, f\rangle| = \left|\int_{-1}^{1} [x \cos t + x' \sin t]\, dt\right| =$$

$$= \left|\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + x'^2} \cos(t + \varphi)\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_{-1}^{1} (x^2 + x'^2)\, dt\right]^{1/2} \left[\int_{-1}^{1} 1\, dt\right]^{1/2} = \sqrt{2}\|x\|.$$

Из условия $\langle x, f\rangle = (x, y)$ вытекает, что функция $y(t)$ является решением краевой задачи $y'' - y = 0$, $y'(1) = \sin 1$, $y'(-1) = \sin(-1)$, откуда $y(t) = \frac{\sin 1}{\operatorname{sh} 1} \operatorname{ch} t$.

§ 13

13.3. а) $(x_n, y_n) \to (x, y)$ при $n \to \infty$. б) (x_n, y_n) может и не иметь предела. Пусть, например, e_n $(n \in \mathbf{N})$ — ортонормированная система в H. Положим $x_n = e_n$,

$$y_n = \begin{cases} e_n & \text{при} \quad n \text{ нечетном}, \\ e_{n-1} & \text{при} \quad n \text{ четном}. \end{cases}$$

13.7. Нет. Пусть, например, $X = l_1$; согласно задаче 12.24, $X^* = m$. Положим $f_n = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)$. Тогда $L \subset c_0 \subset m$, но для любого $x \in l_1$ $\langle x, f_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i$, следовательно, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \langle x, f_0\rangle$, где $f_0 = (1, 1, \ldots, 1, \ldots) \notin c_0$. **13.8.** Нет. Найти $\|f_n\|$. **13.9.** а) $\|f\| = 1$. в) Нет, это вытекает из пункта а). **13.12.** Положим для $n \in \mathbf{N}$

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2^n}, \\ \left(t - \frac{1}{2^n}\right) 2^{n+1} & \text{при } \frac{1}{2^n} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}, \\ 1 + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} - t\right) \cdot 2^{n+1} & \text{при } \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}, \\ 0 & \text{при } \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда $x_n \in C[0, 1]$, $\|x_n\| = 1$ и, следовательно, x_n не сходится к нулю. В то же время $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ слабо. Действительно,

$$|\langle x_n, f\rangle| = \left|\int_0^1 x_n(t)\, dg(t)\right| = \left|\int_{1/2^n}^{1/2^{n-1}} x_n(t)\, dg(t)\right| \leqslant \|x_n\| \bigvee_{1/2^n}^{1/2^{n-1}} g \to 0$$

при $n \to \infty$ для любой функции $g(t)$ с ограниченной на $[0, 1]$ вариацией. **13.13.** Надо доказать, что в пространстве l_1 из слабой сходимости следует сходимость по норме, причем это достаточно доказать для сходимости к нулю. Пусть $x^{(n)} \in l_1$, $x^{(n)} \to 0$ $(n \to \infty)$ слабо, $f_i = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, 0, \ldots) \in m = l_1^*$ и $\langle x, f_i\rangle = x_i$ — соответствующий функционал в l_1; тогда $\langle x^{(n)}, f_i\rangle = x_i^{(n)}$ и, следовательно, для любого i при $n \to \infty$ $x_i^{(n)} \to 0$. Пусть $x^{(n)}$ не стремится к нулю, тогда найдется подпоследовательность $x^{(n_k)}$ такая, что для всех $k \in \mathbf{N}$ будем иметь $\|x^{(n_k)}\| \geqslant M > 0$. Тогда $\|x^{(n_1)}\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n_1)}| \geqslant M$ и найдется m_1 такое, что $\sum_{i=1}^{m_1} |x_i^{(n_1)}| > \frac{4}{5} M$, $\sum_{i=m_1+1}^{\infty} |x_i^{(n_1)}| < \frac{M}{10}$.

Положим $\alpha_1 = 1$. Так как $x_i^{(n_{\alpha_1})} \to 0$ для любого i, то $\sum_{i=1}^{m_1} |x_i^{(n_{\alpha_1})}| \to 0$, и найдется $\alpha_2 > \alpha_1$ такое, что $\sum_{i=1}^{m_1} |x_i^{(n_{\alpha_2})}| < \frac{M}{10}$, откуда

$\sum_{i=m_1+1}^{\infty} |x_i^{(n_{\alpha_2})}| > \frac{9}{10} M$, и найдется $m_2 > m_1$ такое, что $\sum_{i=m_1+1}^{m_2} |x_i^{(n_{\alpha_2})}| \geqslant \frac{4}{5} M$, $\sum_{i=m_2+1}^{\infty} |x_i^{(n_{\alpha_2})}| < \frac{M}{10}$. Продолжая этот процесс, получим последовательность $x^{(n_{\alpha_k})}$ и соответствующую последовательность $m_1 < m_2 < \ldots$ такие, что для любого k

$$\sum_{i=1}^{m_{k-1}} |x_i^{(n_{\alpha_k})}| < \frac{M}{10}, \quad \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} |x_i^{(n_{\alpha_k})}| \geqslant \frac{4}{5} M,$$

$$\sum_{i=m_k}^{\infty} |x_i^{(n_{\alpha_k})}| \leqslant \frac{M}{10}, \quad m_0 = 0.$$

Определим теперь $c = (c_1, c_2, \ldots) \in m$ следующим образом: для каждого j найдем такое k, чтобы выполнялись неравенства $m_{k-1} \leqslant j \leqslant m_k$, и положим $c_j = 1$, если $x_j^{(n_{\alpha_k})} \geqslant 0$ и $c_j = -1$, если $x_j^{(n_{\alpha_k})} < 0$. Тогда для соответствующего функционала $\langle x, f\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$ будем иметь

$$\left\langle x^{(n_{\alpha_k})}, f\right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i x_i^{(n_{\alpha_k})} - \sum_{i=1}^{m_{k-1}} |x_i^{(n_{\alpha_k})}| - \sum_{i=m_k+1}^{\infty} |x_i^{(n_{\alpha_k})}| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} |x_i^{(n_{\alpha_k})}| - \frac{M}{10} - \frac{M}{10} \geqslant \frac{4}{5} M - \frac{M}{5} = \frac{3}{5} M,$$

и $\left\langle x^{(n_{\alpha_k})}, f\right\rangle$ не стремится к нулю при $k \to \infty$. **13.16.** Если $f \equiv 0$, то можно взять любое x. Пусть $f \not\equiv 0$. Согласно следствию 1 теоремы 12.1 найдется $F \in X^{**}$ такое, что $\|F\| = 1/\|f\|$ и $\langle f, F\rangle = 1 = \|F\| \cdot \|f\|$. Так как X рефлексивно, то $\langle g, F\rangle$, где $g \in X^*$, имеет вид $\langle x, g\rangle$, где $\|x\| = \|F\| = 1/\|f\| \neq 0$. Таким образом, $\langle f, F\rangle = \langle x, f\rangle = \|f\| \cdot \|F\| = \|f\| \cdot \|x\|$. **13.21.** б) Ортонормированная система в гильбертовом пространстве. **13.22, 13.23.** Воспользоваться теоремой 13.5. **13.24.** Нет. Рассмотреть последовательность $x_n(t) = t^n$ $(n \in \mathbf{N})$. **13.25.** Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — счетное всюду плотное в X множество (можно считать, что его элементы линейно независимы), L_n — подпространство X, порожденное $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — рациональные числа. Набору $(n, r_1, r_2, \ldots, r_n)$ поставим в соответствие следующий функционал: на L_n определим его значениями на элементах базиса $\langle e_i, f\rangle = r_i$, а затем продолжим на X с сохранением нормы. Ясно, что множество таких функционалов счет-

но. Остается доказать, что оно всюду плотно в X^* в смысле $*$-слабой сходимости. 13.26. Нет. В качестве L взять пространство $C[0, 1]$ как подпространство пространства X^*, где $X = C[0, 1]^*$.

§ 14

14.4. Так как отображение линейно, достаточно доказать его непрерывность в точке 0. 14.6. г) Воспользоваться задачей 7.11.

14.9. а) $A^*y = \int_t^1 y(\tau)\,d\tau$; б) $A^*y = ty(t)$;

в) $A^*y = \int_0^1 ty(t)\,dt$; г) $A^*y = \int_0^1 ty(s)\,ds$.

14.10. а) $A^*\colon m \to m$, $A^*x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$.

б) $A^*\colon m \to m$, $A^*x = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$.

в) $A^*\colon m \to m$, $A^*x = (x_2, x_3, \ldots)$.

г) $A^*\colon m \to m$, $A^*x = (0, x_1, x_2, \ldots)$.

14.11. Формулы те же, что и в задаче 14.10, но операторы действуют в случае а) из l_1 в l_1, б) — из l_2 в l_2, в) — из l_1 в m. 14.12. б) $A_n^*\colon l_2 \to l_2$, $A_n^*x = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, x_1, x_2, \ldots)$. Так как $\|A_n^*x\| = \|x\|$, то A_n^* не стремится к нулю при $n \to \infty$ сильно. 14.13. $J^*\colon l_1 \to l_2$, $J^*x = x$. 14.14. $A^*\colon H \to H$, $A^*x = (x, z)y$. 14.15. Пусть существует последовательность $f_k \in H$ такая, что $\|f_k\| = 1$ и $\|Af_k\| > k$. Положим $\langle g, \varphi_k\rangle = (g, Af_k)$; тогда φ_k — линейные функционалы в H, причем $\langle g, \varphi_k\rangle = (Bg, f_k)$, откуда последовательность $\langle g, \varphi_k\rangle$ ограничена при любом $g \in H$. По теореме 8.2 последовательность $\|\varphi_k\| = \|Af_k\|$ ограничена — противоречие. 14.17. в) $D(A^*) = D(A)$, $A^*x = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots)$. 14.18. в) $A^*\colon m \to l_2$, $D(A^*) = \left\{x \in m,\ x = (x_1, x_2, \ldots)\colon \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\right\}$, $A^*x = x$. 14.19. в) $D(A^*) = \left\{x(t) \in L_2[0, 1]\colon \int_0^1 \frac{x^2(t)}{t}\,dt < \infty\right\}$, $A^*x(t) = \frac{x(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$. 14.20. $D(A^*)$ — линейное многообразие функций на $[0, 1]$, принадлежащих $H^1[0, 1]$ $A^*x(t) = dx/dt$. 14.21. $D(A^*)$ — ортогональное дополнение к функции $x(t) = t$, $A^*x = 0$ для $x \in D(A^*)$. 14.22. $J^*\colon L_2[0, 1] \to H^1[0, 1]$, $J^*y = \int_0^1 G(s, t)\,y(s)\,ds$, где

$$G(s, t) = \frac{1}{2(e^2 - 1)}\begin{cases}(e^s - e^{-s})(e^t + e^{2-t}) & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1,\\ (e^t - e^{-t})(e^s + e^{2-s}) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1.\end{cases}$$

Для $z = J^*y$ решить краевую задачу $-z'' + z = y$, $z'(0) = z'(1) = 0$. 14.23. $A^*\colon L_2[0, 1] \to H^1[0, 1]$,

$$A^*y = \int_0^t y(s)\,\mathrm{ch}\,(s - t)\,ds + \frac{\mathrm{ch}\,t}{\mathrm{sh}\,1}\int_0^1 y(s)\,\mathrm{sh}\,(s - 1)\,ds.$$

Для $z = A^*y$ решить краевую задачу $z'' - z = y'$, $z'(0) = y(0)$, $z'(1) = y(1)$.

ГЛАВА 4

§ 15

15.8. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — $\varepsilon/3$-сеть для M. Положим $F_k = S_{\varepsilon/3}(a_k) \cap M$. 15.10. Воспользоваться задачей 1.87 и теоремой 15.1. 15.12. Если A бикомпактно, а B замкнуто, то таких точек может и не найтись,— воспользоваться задачей 1.81. 15.14. Пусть M — бикомпактное множество, $f\colon M \to M$ — изометрия, $f(M) \neq M$, $x_0 \in M$, $x_0 \notin f(M)$, $x_n = f(x_{n-1})$ $(n \in \mathbf{N})$. Тогда $x_n \in f(M)$ для $n \geqslant 1$, при этом множество $f(M)$ замкнуто, а множество $A = M \setminus f(M)$ открыто, поэтому при некотором $\varepsilon > 0$ $S_\varepsilon(x_0) \not\subset M$. С другой стороны, из бикомпактности M следует, что найдутся номера k, l такие, что $k < l$ и $\|x_k - x_l\| < \varepsilon$. Тогда $\|x_0 - x_{k-l}\| < \varepsilon$ и $x_{k-l} \in S_\varepsilon(x_0)$ — противоречие. 15.15. Рассмотреть на плоскости множество $A = (\cos \pi\sqrt{2}n, \sin \pi\sqrt{2}n)$ $(n \in \mathbf{N})$ и поворот этого множества вокруг начала координат на угол $\sqrt{2}$. 15.16. Достаточно доказать, что отображение Φ изометрично; то, что оно является отображением «на», вытекает из задачи 15.14. Пусть для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует ε-сеть M_ε множества M такая, что $\Phi(M_\varepsilon)$ также является ε-сетью и для любых $x_1, x_2 \in M_\varepsilon$ $\|x_1 - x_2\| = \|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\|$. Отсюда вытекает, что отображение Φ изометрично. В самом деле, если $a, b \in M$, то найдутся $x_1, x_2 \in M_\varepsilon$ такие, что $\|x_1 - a\| < \varepsilon$, $\|x_2 - b\| < \varepsilon$, $\|\Phi(x_1) - \Phi(a)\| < \varepsilon$. $\|\Phi(x_2) - \Phi(b)\| < \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned}&\big|\|a - b\| - \|\Phi(a) - \Phi(b)\|\big| \leqslant\\ &\leqslant \big|\|a - b\| - \|x_1 - b\|\big| + \big|\|x_1 - b\| - \|x_1 - x_2\|\big| + \big|\|\Phi(x_1) - \\ &- \Phi(x_2)\| - \|\Phi(x_1) - \Phi(b)\|\big| + \big|\|\Phi(x_1) - \Phi(b)\| - \|\Phi(a) - \\ &- \Phi(b)\|\big| < 4\varepsilon.\end{aligned}$$

Пусть M_n — такое множество, состоящее из n точек M, что величина $d_n = \min\limits_{x_i, x_j \in M_n} \|x_i - x_j\|$, $i \neq j$, максимальна. Если таких множеств несколько, то выберем из них то, для которого

$$\sigma_n = \sum_{x_i, x_j \in M_n} \|x_i - x_j\| \qquad i \neq j,$$

максимально. Тогда M_n отображается на $\Phi(M_n)$ изометрично. Существование M_n вытекает из бикомпактности M.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, $A_{\varepsilon/2}$ — $\varepsilon/2$-сеть для M, содержащая k элементов. Тогда $d_{k+1} < \varepsilon$. Пусть l — наименьшее натуральное такое, что $d_l < \varepsilon$. Тогда M_{l-1} — искомая ε-сеть. 15.18. Положить $A_n = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$ и воспользоваться задачей 15.17. 15.20.

г) Нет. **15.23.** Пусть M — не бикомпактно, $x_n \in M$ $(n \in \mathbf{N})$ и не имеет предельных точек, причем элементы x_n не повторяются, $r_n = \frac{1}{3} \inf\limits_{n \neq m} \|x_n - x_m\|$. Определим $f\colon M \to \mathbf{R}$, $f(x) = 0$ для $x \in M$, $x \notin S_{r_n}(x_n)$ и в случае а) $f(x) = n(1 - \|x - x_n\|/r_n)$, а в случае б) $f(x) = (1 - 1/n)(1 - \|x - x_n\|/r_n)$. Убедиться, что в обоих случаях $f(x)$ непрерывна на M, но в а) не ограничена, а в б) не достигает точной верхней грани. **15.24.** Нет. Рассмотреть в $\mathbf{R}$ множество натуральных чисел и определенную на нем числовую функцию. **15.26.** Воспользоваться задачами 1.85 а) и 15.25. **15.27.** Нет. Рассмотреть случай $X = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{R}$, $M = (-\pi/2, \pi/2)$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. **15.29.** Да, это связано с бикомпактностью отрезка. **15.37.** Нет, так как оно не замкнуто. **15.39.** Воспользоваться задачами 15.38 и 15.10. **15.40.** Воспользоваться задачей 1.40 а) или 15.38. **15.41.** Шар $\bar{S}_1(0)$ не является бикомпактным множеством. Рассмотреть функцию $x(t) = |t - 1/2|$ и существующую в силу теоремы Вейерштрасса последовательность многочленов $P_n(t)$, равномерно на $[0, 1]$ сходящуюся к $x(t)$. **15.43.** Пусть

$$x_n(t) = \begin{cases} 2^n t & \text{при } t \in [0, 1/2^n], \\ 1 & \text{при } t \in (1/2^n, 1], \end{cases} \quad y_n(t) = \int\limits_0^t x_n(\tau)\, d\tau.$$

Тогда y_n компактна в $C[0, 1]$, но не имеет предельных точек в $C^1[0, 1]$. **15.44.** а) Нет. б) Нет. в) Да. г) Нет. д) Да. е) Нет. ж) Да. **15.45.** Будет, только если $\varphi(t) \equiv 0$. **15.46.** Если бы компактное множество M не было нигде не плотным, то его замыкание содержало бы некоторый шар, что противоречит теореме 15.4. **15.47.** Доказательство — индукцией по k. **15.51.** а) Тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$. б) Тогда и только тогда, когда $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$. **15.52.** Если L — подпространство $C[a, b]$, состоящее из непрерывно дифференцируемых функций, и $x_n \in L$, $x_n \to x_0$ по норме $C^1[a, b]$, то $x_n \to x_0$ и по норме $C[a, b]$, следовательно, $x_0 \in L$. Таким образом, на L можно ввести две нормы и получить два банаховых пространства $LC[a, b]$ и $LC^1[a, b]$. Тождественный оператор $J\colon LC^1[a, b] \to LC[a, b]$, $Jx = x$ линеен и непрерывен. Поэтому оператор J^{-1} непрерывен, обе нормы на L эквивалентны, единичный шар в $LC[a, b]$ ограничен по норме $LC^1[a, b]$ и, следовательно, компактен. По теореме 15.4 подпространство L конечномерно. **15.55.** Воспользоваться теоремой 15.6 и задачей 13.23. **15.57.** Рассмотреть последовательность $x_n(t) = t^n$ $(n \in \mathbf{N})$.

§ 16

16.1. а) Нет. Рассмотреть Ax_n, где $x_n = t^n$ $(n \in \mathbf{N})$. б) Да. в) Да. г) Да. д) Нет. **16.2.** Нет. Рассмотреть Ax_n, где $x_n = t^{2n}$. **16.3.** Только при $\varphi(t) \equiv 0$. **16.4.** Воспользоваться теоремой 16.2. **16.5.** а) Нет. Рассмотреть Ax_n, где $x_n = t^n/n$ $(n \in \mathbf{N})$. б) Нет. Рассмотреть Ax_n, где $x_n = t^{n+1}/(n(n+1))$ $(n \in \mathbf{N})$. в) Да. Шар $\bar{S}_1(0)$ пространства $C^2[0, 1]$ оператор A переводит в множество M, лежащее в шаре $S = \bar{S}_1(0)$ пространства $C^1[0, 1]$, а всякое подмножество S компактно в $C[0, 1]$. **16.8.** а) Нет. б) Да. Воспользоваться задачей 15.50. в) Да. Воспользоваться теоремой 16.3. **16.10.** Нет.

16.12.

$$A^{-1}y = \int\limits_0^1 G(s, t)\, y(t)\, dt, \mathcal{D}(A^{-1}) = C[0,1],$$

где $G(s, t) = \begin{cases} s(t-1) & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ t(s-1) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$

16.15. Только если X конечномерно. **16.16.** а) Да. б) Нет. В этом случае A может не быть непрерывным. в) Да. **16.17.** Нет. Рассмотреть последовательность операторов $P_n\colon l_2 \to l_2$, $P_n x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$. **16.18.** Рассмотреть последовательность операторов $A_n = AP_n$, где P_n — оператор из предыдущей задачи. **16.19.** Пусть для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ $Ax = (y_1, y_2, \ldots)$. Рассмотреть последовательность $A_n x = (y_1, y_2, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots)$. **16.20.** Пусть $M \subset H$ — ограниченное множество; так как оно слабо компактно, то в нем найдется слабо фундаментальная последовательность f_n $(n \in \mathbf{N})$. Тогда $\|A(f_n - f_m)\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |(f_n - f_m, e_k)|^2 = S_r + R_r$, где $S_r = \sum\limits_{k=1}^{r}$, $R_r = \sum\limits_{k=r+1}^{\infty}$. Так как $\lambda_k \to 0$, то при достаточно большом r будет $R_r < \varepsilon^2 \sum\limits_{k=r+1}^{\infty} |(f_n - f_m, e_k)|^2 \leqslant \varepsilon^2 \|f_n - f_m\|^2$. Фиксировав r, в силу слабой сходимости последовательности f_n выберем такое N, чтобы при $n, m > N$ каждое слагаемое в S_r не превышало бы ε^2/r; тогда $S_r < \varepsilon^2$, $\|A(f_n - f_m)\|^2 < c\varepsilon^2$ и A вполне непрерывен. **16.21.** Если λ_n не стремится к нулю при $n \to \infty$, то найдется подпоследовательность λ_{n_k} такая, что для всех $k \in \mathbf{N}$ будет $|\lambda_{n_k}| > M > 0$. Положить $e_k = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n_k - 1}, 1, 0, 0, \ldots)$ и доказать, что множество Ae_k некомпактно. **16.22.** Определим последовательность операторов $B_n\colon H \to H$ равенствами

$$B_n e_m = \begin{cases} Ae_m & \text{при } m \leqslant n,\ n \in \mathbf{N}, \\ 0 & \text{при } m > 0. \end{cases}$$

Доказать, что B_n — вполне непрерывные операторы и что

$$\|A - B_n\| \leqslant \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \|Ae_i\|^2\right]^{1/2} \to 0$$

при $n \to \infty$. **16.23.** Пусть $x_n \in H$ — ограниченная последовательность; тогда $A^*Ax_{n_k}$ сходится, но $\|Ax_{n_k} - Ax_{n_i}\|^2 \leqslant 2\|x_n\| \|A^*Ax_{n_k} - A^*Ax_{n_i}\| \to 0$ при $n_k, n_i \to \infty$. **16.24.** Если A вполне непрерывен, то по теореме 16.3 оператор AA^* вполне непрерывен, но $A = (A^*)^*$, поэтому $(A^*)^*A^*$ вполне непрерывен, согласно задаче 16.23, A^* вполне непрерывен. **16.25.** Воспользоваться теоремой 16.10 и теоремой 9.1. **16.26.** $R(A) = \bigcup\limits_n A[S_n(0)]$. **16.27.** Воспользоваться теоремой 16.4. **16.28.** в) $\Rightarrow$ б) совпадает с теоремой 16.4. б) $\Rightarrow$ а) очевидно. Докажем а) $\Rightarrow$ б). Пусть $x_n \to x$ $(n \to \infty)$, слабо, тогда

$y_n = Ax_n \to y = Ax$ при $n \to \infty$ слабо, поэтому

$$(Ax_n, y_n) = (Ax_n, Ax_n) = \|Ax_n\|^2 \to (Ax, y) = \|Ax\|^2.$$

Таким образом, $Ax_n \to Ax$ $(n \to \infty)$ слабо и $\|Ax_n\| \to \|Ax\|$. Согласно задаче 13.4, $Ax_n \to Ax$. 16.29. а) $\Rightarrow$ б) $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ и если $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ слабо, то для $f \in Y^*$ $A^*f \in X^*$ и $\langle x_n, A^*f\rangle = \langle Ax_n, f\rangle \to \langle Ax, f\rangle$, поэтому $Ax_n \to Ax$ $(n \to \infty)$ слабо. б) $\Rightarrow$ в) Всякая сходящаяся последовательность является слабо сходящейся. в) $\Rightarrow$ а) Пусть а) неверно; тогда существует последовательность $x_n \in X$, такая, что $x_n \to 0$, но Ax_n отделена от нуля при $n \to \infty$. Можно считать, что при всех n $x_n \neq 0$. Положим $\alpha_n = x_n/\sqrt{\|x_n\|}$; тогда $\|\alpha_n\| = \sqrt{\|x_n\|}$ и $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, но $A\alpha_n = Ax_n/\sqrt{\|x_n\|}$ неограничена и, следовательно, не является слабо сходящейся, что противоречит в). 16.30. Воспользоваться теоремой 15.6. 16.31. Воспользоваться задачей 13.13. 16.32. Если A вполне непрерывен, то утверждение вытекает из теорем 16.5 и 16.4. Обратно, если Y сепарабельно, то всякое ограниченное множество в Y^* слабо компактно ([25], стр. 211), поэтому A^*, а следовательно и A, вполне непрерывен. 16.33. а) Воспользоваться тем, что M слабо компактно и слабо замкнуто. б) Воспользоваться тем, что множество $A(M)$ бикомпактно.

16.35. а) Нет. Рассмотреть оператор A: $C[-1, 1] \to C[-1, 1]$,

$$Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau.$$

Тогда $x_0(t) = |t| \notin A(S_1(0))$, но $x_n(t) = \sqrt{t^2 + 1/n^2} \in A(S_1(0))$ и при $n \to \infty$ $x_n(t) \to x_0(t)$. б) Да. 16.36. Множество $A(S_1(0))$ бикомпактно согласно задаче 16.34; поэтому в нем существует элемент с наибольшей нормой. 16.37. а) Нет. б) Да. 16.38. Воспользоваться теоремой 16.9. 16.39. а), б) Только если X конечномерно. в) Да. 16.40. Нет. 16.41. Только если X конечномерно. 16.42. Нет. В пространстве $C[0, \pi]$ рассмотрим оператор $Ax(t) = x(t)\sin t$; тогда уравнение $z - Az = 0$ имеет только нулевое решение, но уравнение $x(t)(1 - \sin t) = y(t)$ не имеет решения при $y(t) \equiv 1$. 16.44. Применяя к обеим частям уравнения $(B - A)x = y$ оператор B^{-1}, получаем уравнение $I - B^{-1}Ax = B^{-1}y$, где $B^{-1}A \in \sigma(X)$. 16.45. а) Уравнение $x - Ax = 0$ имеет только нулевое решение.

$$\text{б) } (I - A)^{-1} y(t) = y(t) + e^t \int_0^t y(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau.$$

16.48. а) Предположим, что последовательность $R(A^k)$ строго убывает. По лемме о почти перпендикуляре ([25], стр. 35) для любого $k \in \mathbf{N}$ найдется $x_k \in R(A^k)$ такое, что $\|x_k\| = 1$ и $\|x_k - z\| \geqslant 1/2$ для любого $z \in R(A^{k+1})$. Тогда $Bx_k = Ax_k - x_k$ обладает тем свойством, что $\|Bx_k - Bx_l\| \geqslant 1/2$ при $k < l$, а оператор B вполне непрерывен — противоречие. б) Воспользоваться теоремами 16.3, 16.7 и теоремой 1 с. 220 в [25]. в) Воспользоваться задачей 4.49 б) и теоремой 9.2. 16.49. а), б) Пусть e_i, e'_i — базисы в H, $\sum_i \|Ae_i\|^2 < \infty$.

Тогда

$$\sum_i \|Ae'_i\|^2 = \sum_i \sum_j |(Ae'_i, e_j)|^2 = \sum_j \|A^*e_j\|^2 = \sum_j \sum_i |(e_i, A^*e_j)|^2 =$$
$$= \sum_i \sum_j |(Ae_i, e_j)|^2 = \sum_i \|Ae_i\|^2 < \infty.$$

в) Пусть $x \in H$, $\|x\| = 1$; тогда $x = \sum_i \alpha_i e_i$, где $\sum_i \alpha_i^2 = 1$. Но

$$\|Ax\|^2 = \sum_j |(Ax, e_j)|^2 = \sum_j \left|\sum_i \alpha_i (Ae_i, e_j)\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_j \left(\sum_i \alpha_i^2 \sum_i \left|(Ae_i, e_j)\right|^2\right) = \sum_j \sum_i \left|(Ae_i, e_j)\right|^2 = \sum_i \|Ae_i\|^2.$$

Таким образом, $\|Ax\| \leqslant \|A\|_2$ для любого $x \in H$ такого, что $\|x\| = 1$. ж) Пусть последовательность A_n фундаментальна по $\|\cdot\|_2$, тогда она фундаментальна и по обычной норме и, следовательно, $A_n \to B$. При этом существует M такое, что $\|A_n\|_2 < M$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Так как для любого j $A_n e_j \to Be_j$, то для любого n существует m такое, что $\sum_{j=1}^n \|A_m e_j - Be_j\|^2 < 1$. Отсюда $\sum_{j=1}^n \|Be_j\|^2 \leqslant 1 + M$ и B — оператор Гильберта — Шмидта. Остается доказать, что $A_n \to B$ в смысле $\|\cdot\|_2$. з) Аналогично задаче 16.22. и) Воспользоваться неравенством Бесселя в пространстве $L_2[0, 1] \times [0, 1]$. л) $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^2 < \infty$. м) Оператор предыдущей задачи с $\lambda_n = 1/\sqrt{n}$. 16.50. а) Воспользоваться задачей 16.49 к). б) Если $A = BC$, то $AD = B(CD)$ и $DA = (DB)C$. в) $A^* = C^*B^*$, а C^*, B^* — операторы Гильберта — Шмидта по задаче 16.49 б). г) $|(Ae_n, e_n)| = |(BCe_n, e_n)| = |(Ce_n, B^*e_n)| \leqslant 1/2\{\|Ce_n\|^2 + \|B^*e_n\|^2\}$. 16.51. Оператор A: $l_2 \to l_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$ для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ с $\lambda_n = 1/n$ является оператором Гильберта — Шмидта в силу задачи 16.49 л), но не является ядерным в силу задачи 16.50 г).

§ 17

17.1. $\langle y, \psi\rangle = \langle Ax, \psi\rangle = \langle x, A^*\psi\rangle = 0$. 17.2. Если $y \in R(A)$, то $\langle y, \psi\rangle = 0$ по предыдущей задаче. 17.3. Пусть $y \in \overline{R(A)}$; тогда существует последовательность $y_n \in R(A)$, такая, что $y_n \to y$ при $n \to \infty$. Но $\langle y_n, \psi\rangle = 0$ и по непрерывности ψ при $n \to \infty$ также $\langle y, \psi\rangle = 0$. 17.7. Определение нормальной разрешимости A можно записать в виде $R(A) = {}^\perp N(A^*)$. Далее воспользоваться задачей 17.5. 17.10. Воспользоваться тем, что число нулей A равно $k - r$, а его дефектное число равно $m - r$, где r — ранг матрицы A. 17.14. б) $\chi(A) = -1$, $\chi(A^*) = 1$. в) $\chi(A^k) = -k$, $\chi(A^{*k}) = k$. 17.17. Нет. 17.19. Нет, ибо

$$A^*z(t) = \int_t^1 z(s)\, ds,$$

откуда $N(A^*) = \{0\}$. Из нормальной разрешимости A следовало

бы (задача 17.8), что $R(A) = Y$. Это не так: функции из $R(A)$ непрерывны и равны 0 при $t = 0$. **17.20.** Если $y_n = Ax_n$, где $x_n \in D(A)$ и $y_n \to y_0$ $(n \to \infty)$, то $\|x_n - x_l\| \leqslant m^{-1}\|y_n - y_l\| \to 0$ $(n, l \to \infty)$. Но тогда из-за полноты X существует $x_0 \in X$ такое, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Вследствие замкнутости A $x_0 \in D(A)$ и $y_0 = Ax_0$, т. е. $y_0 \in R(A)$. Значит, $R(A)$ замкнута. **17.21.** Воспользоваться следствием 2 теоремы 12.1. Возьмем φ_1 и через L_1 обозначим линейную оболочку элементов $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Найдем γ_1 такое, что $\langle \varphi_1, \gamma_1 \rangle = 1$, $\langle x, \gamma_1 \rangle = 0$ на L_1. Аналогично найдем $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$. **17.23.** Пусть $y_1, \ldots, y_n$ линейно независимы и их линейная оболочка имеет нулевое пересечение с Y. По задаче 17.21 существуют функционалы $f_1, \ldots, f_n$, $f_i \in Y^{\perp}$. **17.24.** При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно верно для $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^{n-1}$ и $\{z_i\}_{i=1}^{n-1}$ биортогональны. Для любого $x \in X$ рассмотрим элемент $y = x - \sum_{l=1}^{n-1} \langle x, \psi_l \rangle z_l$ и заметим, что $\langle y, \psi_l \rangle = 0$ $(l = 1, \ldots, n-1)$. Но $\langle y, \varphi_n \rangle = 0$ невозможно для $x \in X$, иначе система $\{\psi_i\}_{i=1}^{n}$ была бы линейно зависима. Значит, найдется $x_n \in X$ такая, что $\langle x_n, \psi_n \rangle \neq 0$. Другое решение следует из задачи 17.23. Разложим ψ_l по базису $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ и будем искать z_k в виде разложения по базису $\{y_j\}_{j=1}^{n}$, требуя биортогональности систем $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ и $\{\psi_l\}_{l=1}^{n}$. Если первое разложение задается матрицей T, то второе, как нетрудно проверить,— матрицей $(T')^{-1}$.

17.25. $\langle Kx, f \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \gamma_i \rangle \langle z_i, f \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{z_i, f} \rangle \gamma_i \right\rangle$. **17.26.** Если $\widetilde{A}x = 0$, то $Ax = -Kx$, т. е. $Ax = -\sum_{i=1}^{n} \xi_i z_i$, где $\xi_i = \langle x, \gamma_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$. Но $\langle Ax, \psi_j \rangle = 0 = -\xi_j$, откуда $Ax = 0$, т. е. $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$ и $0 = \xi_l = \langle x, \gamma_l \rangle = \alpha_l$, т. е. $x = 0$. Аналогично $N(A^*) = \{0\}$. **17.27.** Для любого $y \in Y$ найдется $x \in X$ такое, что $Ax = y$. Можно взять $x = \widetilde{x} + \sum_{i=1}^{n} \left(\langle y, \psi_i \rangle - \langle \widetilde{x}, \gamma_i \rangle \right) \varphi_i$, где $\widetilde{x}$ — решение уравнения $Ax = y - \sum_{i=1}^{n} \langle y, \psi_i \rangle z_i$. **17.28.** Следствие задач 17.26 и 17.27. **17.30.** $A = \widetilde{A} - K$, т. е. $B = \widetilde{A}$, $P = -K$. **17.31.** $C = \widetilde{A}$, $T = -K$, так как конечномерный оператор является вполне непрерывным (см. задачу 16.16б)). **17.32.** Воспользоваться равенством $A = C[I + C^{-1}T]$. **17.33.** Следствие задач 17.30—17.32. **17.34.** Система $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ линейно независима. Выберем в Y^* систему $\{\psi_j\}_{j=1}^{n}$ биортогонально к $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ и ортогонально к $R(A)$. Тогда $\{\psi_j\}_{j=1}^{n} \subset N(A^*)$, откуда $\dim N(A^*) \geqslant n$. Если $\psi \in N(A^*)$, то положим $\psi = \sum_{i=1}^{n} \langle y_i, \psi \rangle \psi_i + f$. Теперь для любого $y \in Y$ будет $\langle y, f \rangle = 0$, откуда $f = 0$, т. е. $\dim N(A^*) = n$. **17.35.** а) Из определения неотрицательного оператора вытекает, что $(r^2 AA^* x, x) \geqslant |(x, y)|^2$.

Если $x \in N(A^*)$, то $(x, y) = 0$, и тогда $y \in R(A)$. б) $(AA^*)^* = AA^*$, и если $AA^*x = 0$, то $x \in N(A^*)$ и $(x, y) = 0$.

ГЛАВА 5

§ 18

18.1. $\lambda_n \geqslant 0$. **18.7.** $(Ax, y) = \frac{1}{4}((A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) + \frac{i}{4}((A(x+iy), x+iy) - (A(x-iy), x-iy))$. Меняя здесь местами x и y, получаем, что $(Ax, y) = \overline{(Ay, x)} = (x, Ay)$. **18.8.** Вообще говоря, нет. Рассмотреть оператор A: $l_2 \to l_2$, $Ax = (x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots)$ для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$. **18.9.** Если $(Ax, x) = 0$ для любого $x \in H$, то для любого $h \in H$ $(A(x+h), x+h) = (Ax, h) + (Ah, x) = 0$. Полагая $h' = ih$, получаем $(Ax, h') + (Ah', x) = 0$ или $-(Ax, h) + (Ah, x) = 0$, поэтому $(Ax, h) = 0$, $Ax = 0$ и $A = 0$. В вещественном пространстве утверждение неверно — рассмотреть в пространстве E^2 оператор поворота на угол $\pi/2$. **18.10.** Утверждение справедливо для любого ограниченного линейного оператора. **18.11.** а) Нет. Привести пример в E^2. б) Да. Замкнутость N вытекает из задачи 18.10. Ясно, что из $x \in N$ следует $\lambda x \in N$ для любого $\lambda \in \mathbf{C}$. Пусть $x, y \in N$; тогда $(A(x+y), x+y) = (Ax, y) + (Ay, x) = 2\mathrm{Re}(Ax, y) \geqslant 0$. С другой стороны, $(A(x-y), x-y) = -2\mathrm{Re}(Ax, y) \geqslant 0$. Поэтому $\mathrm{Re}(Ax, y) = 0$, $(A(x+y), x+y) = 0$ и $x + y \in N$. **18.12.** б) $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$. **18.13.** Да. Рассмотреть оператор задачи 18.8. **18.14.** Воспользоваться задачей 14.7 в). **18.15.** Для самосопряженного оператора A^2 воспользоваться задачей 18.6 а). **18.18.** Если $A^n x = 0$, то $0 = (A^n x, A^{n-2}x) = (A^{n-1}x, A^{n-1}x) = \|A^{n-1}x\|^2$, следовательно, $A^{n-1}x = 0$. **18.19.** б) Доказать, что последовательность α_n не убывает и ограничена сверху. **18.20.** б) $\Rightarrow$ в) Пусть $x \neq 0$, $(Ax, x) = 0$. Тогда $(Ax, x) = (\sqrt{A}x, \sqrt{A}x) = \|\sqrt{A}x\|^2 = 0$, откуда $\sqrt{A}x = 0$ и $Ax = 0$, $N(A) \neq 0$. **18.21.** в) $\Rightarrow$ а) $Px - P^2x = 0$, следовательно, $(I - P)x \in N(P)$ для любого $x \in H$, поэтому $(Px, y) = (Px, Py + (I - P)y) = (Px, Py)$ для любых $x, y \in H$ или $(Px, y) = (Px, Py) = (x, Py)$. г) $\Rightarrow$ а) $\|Px\|^2 = (Px, x) = (x, P^*x)$, и так как левая часть вещественна, то $(x, P^*x) = (P^*x, x)$. Таким образом, $(Px, x) = (P^*x, x)$ для любого $x \subset H$ и в силу задачи 18.9 $P = P^*$. **18.24.** $((C^*AC - C^*BC)x, x) = ((A - B)Cx, Cx) \geqslant 0$. **18.25.** Воспользоваться задачей 18.9. **18.26.** Нет. Рассмотреть в пространстве E^2 операторы, задаваемые матрицами

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}.$$

18.28. Воспользоваться задачей 18.6 а). **18.29.** $(A^{-1}x, y) = (A^{-1}x, AA^{-1}y) = (x, A^{-1}y)$. **18.30.** $(A^{-1}x, x) = (A^{-1}x, AA^{-1}x) = (A(A^{-1}x), A^{-1}x) \geqslant 0$. **18.31.** Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$. Тогда $\|(A - \lambda I)x\|^2 = \|(A - \alpha I)x\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \geqslant \beta^2\|x\|^2$. **18.34.** Доказать, что $\|(A + \lambda I)x\| \geqslant \lambda\|x\|$. **18.35.** Воспользоваться теоремой 9.1. **18.36.** $\|x\|^2 = (Ix, x) \leqslant (Ax, x) = \|\sqrt{A}x\|^2$. Отсюда $N(\sqrt{A}) = 0$ и в силу неравенства $\|\sqrt{A}x\| \geqslant \|x\|$ оператор $\sqrt{A}$ непрерывно обратим, а тогда существует

и непрерывен оператор $A^{-1/2} = [(\sqrt{A})^{-1}]^2$. При этом $(A^{-1/2}x, x) = \|A^{-1/2}x\|^2 \leqslant \|x\|^2 = (x, x)$. Покажем теперь, что $B^{-1} \leqslant A^{-1}$. В неравенстве $(Ax, x) \leqslant (Bx, x)$ положим $x = A^{-1/2}y$; тогда $(A^{1/2}y, A^{-1/2}y) = \|y\|^2 \leqslant (BA^{-1/2}y, A^{-1/2}y) = (A^{-1/2}BA^{-1/2}y, y)$. Отсюда, как и выше, следует, что оператор $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ непрерывно обратим и что $(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{-1} \leqslant I$, т. е. $A^{1/2}B^{-1}A^{1/2} \leqslant I$, откуда, согласно задаче 18.24, $B^{-1} \leqslant A^{-1}$. **18.38.** Воспользоваться задачей 18.24. **18.39.** $\sqrt{A} = A$. **18.40.** Воспользоваться задачей 18.15. **18.41.** $\sqrt{A}x = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$. **18.47.** б) Пусть $B^2 = A$. Если $N(B) = 0$, то $N(B^2) = N(A) = 0$. Так как $N(B) \subset N(B^2) = N(A)$, то $N(B)$ — одномерное подпространство, порожденное элементом e_1. Далее, $Ae_2 = B^2e_2 = e_1/2$, поэтому $BB^2e_2 = Be_1/2 = 0$, т. е. $ABe_2 = 0$, откуда $Be_2 = \lambda e_1$ и $Ae_2 = B(Be_2) = B(\lambda e_1) = 0$ — противоречие. **18.48.** Докажем единственность. Если $B_1, B_2 \in \delta(H)$, $B_1, B_2 \geqslant 0$, $\|Ax\| = \|B_1x\| = \|B_2x\|$, то $(B_1^2x, x) = \|B_1x\|^2 = \|B_2x\|^2 = (B_2^2x, x)$, откуда $B_1^2 = B_2^2$ и $B_1 = B_2$. В качестве B возьмем оператор $\sqrt{A^*A}$. **18.49.** Воспользоваться задачей 14.15. **18.53.** $\|A_n^*x\|^2 = (A_n^*x, A_n^*x) = \|A_nx\|^2 \to \|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = \|A^*x\|^2$. Отсюда $\|A_n^*x - A^*x\|^2 = \|A_n^*x\|^2 - (A^*x, A_n^*x) - (A_n^*x, A^*x) + \|A^*x\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$. **18.54.** Пусть $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ слабо. Так как A вполне непрерывен, то $Ax_n \to 0$, но $(Ax_n, x_n) = (\sqrt{A}x_n, \sqrt{A}x_n) = \|\sqrt{A}x_n\|^2$. Поэтому $\sqrt{A}x_n \to 0$ и $\sqrt{A}$ — вполне непрерывный оператор. **18.55.** Пусть $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ слабо. Так как B вполне непрерывен, то $(Bx_n, x_n) \to 0$. Но $0 \leqslant (Ax_n, x_n) \leqslant (Bx_n, x_n)$, поэтому $(Ax_n, x_n) \to 0$ и, следовательно, $\sqrt{A}x_n \to 0$. Так как $\sqrt{A}$ непрерывен, то $\sqrt{A}(\sqrt{A}x_n) = Ax_n \to 0$. **18.56.** а) Доказать, что $\|U(\lambda x) - \lambda Ux\|^2 = 0$ и $\|U(x + y) - Ux - Uy\|^2 = 0$. б) Воспользоваться равенством $\|Ux\| = \|x\|$ и тем, что $R(U) = H$. г) Если A — изометрический оператор, то $(Ax, Ay) = \frac{1}{2}[(A(x+y), A(x+y)) - (Ax, Ax) - (Ay, Ay)] = \frac{1}{2}[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2] = (x, y)$. **18.57.** б) $(Ux, Uy) = (AB^{-1}x, AB^{-1}y) = (A^*AB^{-1}x, B^{-1}y) = (B^2B^{-1}x, B^{-1}y) = (Bx, B^{-1}y) = (x, BB^{-1}y) = (x, y)$.

§ 19

19.2. Нет. **19.4.** а) Собственному значению $\lambda = 1$ соответствует собственное подпространство четных функций, собственному значению $\lambda = -1$ — подпространство нечетных функций. б) $\lambda_1 = \pi$, $x_1(t) = \cos t$, $\lambda_2 = -\pi$, $x_2(t) = \sin t$, собственному значению $\lambda = 0$ соответствует собственное подпространство $\{\alpha \sin t + \beta \cos t\}^\perp$, где $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ — произвольны, а ортогональность понимается в смысле вещественного пространства $L_2[-\pi, \pi]$. **19.5.** а) $\lambda_n = -n^2$, $x_n(t) = \sin nt$ $(n = 1, 2, \ldots)$. б) $\lambda_0 = 0$, $x_0(t) \equiv 1$, $\lambda_n = -n^2$, $x_n(t) = \cos nt$ $(n = 1, 2, \ldots)$. в) $\lambda_0 = 0$, $x_0(t) \equiv 1$, $\lambda_n = -4n^2$, $x_n(t) = \cos 2nt$, $\sin 2nt$ $(n = 1, 2, \ldots)$. **19.7.** Пусть существует $(A - \lambda I)^{-1}$. Обе части равенства $A(A - \lambda I) = (A - \lambda I)A$ умножить слева на $(A - \lambda I)^{-1}$. **19.8.** Убедиться, что

справедливо равенство $(R_\lambda(A) - R_\mu(A))(A - \mu I)(A - \lambda I) = (\lambda - \mu)I$. **19.10.** Если $AB = BA$, то $B(A - \lambda I) = (A - \lambda I)B$, и, умножая обе части последнего равенства на R_λ справа и слева, получаем требуемое утверждение. Если для некоторого λ справедливо равенство $R_\lambda B = BR_\lambda$, то, умножая обе его части слева и справа на $A - \lambda I$, получаем, что $B(A - \lambda I) = (A - \lambda I)B$ или $AB = BA$. **19.11.** Воспользоваться тем, что оператор $A - \lambda I$ непрерывно обратим, $B - A = (B - \lambda I) - (A - \lambda I)$, и теоремой 9.4. **19.12.** Воспользоваться тем, что $A - (\lambda - \mu)I = A - \lambda I + \mu I$ и теоремой 9.4. **19.13.** Тогда и только тогда, когда X конечномерно. **19.16.** $\sigma(A)$ состоит из собственного значения $\lambda = 1$ с собственным подпространством, порожденным функцией $x(t) = t$, и собственного значения $\lambda = 0$ с собственным подпространством $\{x(t) \in C[0, 1]: x(0) = x(1) = 0\}$, $r_\sigma(A) = 1$,

$$R_\lambda(A)\,y(t) = -\frac{1}{\lambda}\,y(t) + \frac{y(0)}{\lambda(1-\lambda)} + \frac{ty(1)}{\lambda(1-\lambda)} - \frac{ty(0)}{\lambda(1-\lambda)^2}.$$

19.17. Спектр состоит из собственного значения $\lambda = 1$ с собственным подпространством M и собственного значения $\lambda = 0$ с собственным подпространством $M^\perp$. $R_\lambda(P) = \frac{P}{1-\lambda} - \frac{(I-P)}{\lambda}$. **19.18.** $\sigma(A)$ состоит только из точки $\lambda = 0$ и

$$R_\lambda(A)\,y = -\frac{1}{\lambda}\,y - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^t e^{\frac{1}{\lambda}(s-t)}\,y(s)\,ds.$$

19.20. $\sigma(A)$ совпадает на комплексной плоскости с замыканием множества $\{\lambda_i\}$. **19.21.** Воспользоваться задачей 19.20. **19.23.** Пусть $\lambda \neq 0$, оператор $(AB - \lambda I)^{-1}$ существует и $C = (AB - \lambda I)^{-1}$. Убедиться, что $(BA - \lambda I)^{-1} = \frac{-1}{\lambda}[I - BCA]$. **19.26.** Пусть $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \sigma(A^{-1})$. Тогда оператор $A^{-1} - \lambda I$ не является непрерывно обратимым и, следовательно, $A(A^{-1} - \lambda I) = I - \lambda A = -\lambda\left(A - \frac{1}{\lambda}I\right)$ также не является таковым. **19.27.** Воспользоваться задачей 18.50 в). **19.28.** Пусть $\lambda \neq 0$, $x \neq 0$, $AA^*x = \lambda x$. Тогда $A^*x \neq 0$ и $(A^*A)(A^*x) = \lambda(A^*x)$ и аналогично наоборот. **19.29.** Точка $\lambda = 0$ принадлежит спектру, но при $K \neq 0$ не является собственным значением. **19.30.** Воспользоваться задачей 18.15. **19.32.** Пусть $\varepsilon > 0$. Найдется N такое, что

$$\sup_{n>N} \|A^n\|^{1/n} < r_\sigma(A) + \varepsilon, \quad \sup_{n>N} \|B^n\|^{1/n} < r_\sigma(B) + \varepsilon.$$

Тогда для $n > 2N$

$$\|(A+B)^n\| = \left\|\sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k \|A^k\| \|B^{n-k}\| \leqslant$$

$$\leqslant (r_\sigma(A) + r_\sigma(B) + 2\varepsilon)^n + \sum_{k=0}^{N} C_n^k \|A^k\| \|B^{n-k}\| +$$

$$+\sum_{k=n-N}^{N} C_n^k \|A^k\| \cdot \|B^{n-k}\| \leqslant (r_\sigma(A)+r_\sigma(B)+2\varepsilon)^n +$$

$$+\sum_{k=0}^{N} C_n^k \|A^k\| (r_\sigma(B)+\varepsilon)^{n-k} + \sum_{k=0}^{N} C_n^k \|B^k\| (r_\sigma(A)+\varepsilon)^{n-k}.$$

Отсюда

$$\frac{\|(A+B)^n\|}{(r_\sigma(A)+r_\sigma(B)+2\varepsilon)^n} \leqslant 1+cq^n,\ q<1,$$

и при $n\to\infty$ $r_\sigma(A+B)\leqslant r_\sigma(A)+r_\sigma(B)+2\varepsilon$. Второе неравенство устанавливается из справедливого для коммутирующих операторов неравенства $\|(AB)^n\|\leqslant\|A^n\|\cdot\|B^n\|$.

§ 20

20.1. $\sigma(A)$ состоит из точки непрерывного спектра $\lambda=0$. **20.2.** $\sigma(A)$ состоит из точки $\lambda=0$, которая является собственным значением бесконечной кратности. **20.3.** $\sigma(A)$ состоит из точки $\lambda=0$ — собственного значения бесконечной кратности и собственных значений λ_1, λ_2, являющихся корнями уравнения $240\lambda^2-32\lambda-1=0$, для которых собственные подпространства одномерны. **20.4.** Пусть $y_n\in R(A-\lambda I)$, $y_n\to y$ при $n\to\infty$; тогда $y_n=(A-\lambda I)x_n$. Если x_n содержит ограниченную подпоследовательность, то в силу полной непрерывности оператора A некоторая подпоследовательность Ax_{n_k} сходится, следовательно, $x_{n_k}=\frac{1}{\lambda}\left(Ax_{n_k}-y_{n_k}\right)\to x_0$, откуда $y=(A-\lambda I)x_0$, $y\in R(A-\lambda I)$. Если же x_n не содержит ограниченной подпоследовательности, то $\|x_n\|\to+\infty$ при $n\to\infty$ и, полагая $z_n=x_n/\|x_n\|$, повторяем прежнее доказательство. **20.6.** Воспользоваться утверждением задачи 18.50 б), применив его к оператору $A-\lambda I$. **20.7.** $\sigma(A)=[0,1]$, причем все точки являются точками непрерывного спектра. **20.8.** Пусть $\lambda=\alpha+i\beta$, $y=(A-\lambda I)x$. Тогда $(x,y)-(y,x)=2i\beta\|x\|^2$, откуда $\|y\|\geqslant|\beta|\cdot\|x\|$ или $\|Ax-\lambda x\|\geqslant|\beta|\cdot\|x\|$. Согласно теореме 9.1. $\lambda\in\rho(A)$. Если $\lambda<m$, то при $\|x\|=1$ $\|(A-\lambda I)x\|\geqslant m-\lambda$ и снова воспользуемся той же теоремой. **20.10.** Воспользоваться задачей 18.14. **20.11.** Если $R(A-\lambda I)=H$, то λ не является собственным значением и тогда существует оператор $(A-\lambda I)^{-1}$. Далее воспользоваться задачей 18.49. **20.14.** Да. **20.16.** A определен на всем H и вполне непрерывен в силу задачи 16.20. Непосредственной проверкой убеждаемся, что для любых $x,y\in H$ справедливо равенство $(Ax,y)=(x,Ay)$. Согласно задаче 18.49, A самосопряжен. **20.17** $\sigma(A)$ состоит из собственных значений вида $\lambda_n=1/(\pi^2n^2)$ с соответствующими собственными функциями $x_n=\sin n\pi t$ $(n\in\mathbf{N})$. Дважды продифференцировать обе части уравнения $Ax=\lambda x$. **20.18.** Рассмотрим собственное подпространство L оператора A, соответствующее собственному значению $\lambda=1$; тогда L инвариантно относительно A, и так как A самосопряжен, то и $L^\perp$ инвариантно относительно A. Если $Ax=0$ для любого $x\in L^\perp$, то утверждение доказано, в противном случае у оператора A в подпространстве $L^\perp$ нашлась бы точка спектра, отличная от

$\lambda=0$ и $\lambda=1$. **20.19.** б) $(A^*Ax,x)=\sum_n (x,h_n)^2\mu_n$. То, что $\mu_n>0$ для всех n, вытекает из неотрицательности левой части. в) $(e_n,e_k)=\left(\frac{1}{\lambda_n}Ah_n,\frac{1}{\lambda_k}Ah_k\right)=\frac{1}{\lambda_n\lambda_k}(h_n,A^*Ah_k)=\frac{\mu_k}{\lambda_k\lambda_n}(h_n,h_k)=0$. При $k=n$ из предыдущей выкладки $\|e_n\|^2=\frac{\mu_n}{\lambda_n^2}\|h_n\|^2=1$. Далее доказываем, что ряд сходится, оценивая его остаток

$$\left\|\sum_{n=k}^{k+p}\lambda_n(x,h_n)e_n\right\|^2=\sum_{n=k}^{k+p}\lambda_n^2\left|(x,h_n)\right|^2\leqslant\lambda_n^2\|x\|^2,$$

и так как $\lambda_n\to0$ при $n\to\infty$, то ряд сходится и остается доказать, что он сходится именно к Ax. Достаточно доказать это для всюду плотного подмножества H; в качестве такого подмножества можно взять линейную оболочку всех собственных векторов оператора A^*A (включая и лежащие в $N(A)$).

§ 21

21.1. а) $x(s)\equiv1$. б) При $\lambda\neq2$ $x(s)=\frac{2}{2-\lambda}\sin s$, при $\lambda=2$ решений нет. в) $x(s)=\sin s$. г) При $\lambda\neq2$, $\lambda\neq-6$

$$x(s)=s^2+\frac{6-\lambda}{6+\lambda}s+\frac{\lambda(42-\lambda)}{6(2-\lambda)(6+\lambda)},$$

при $\lambda=2$ или $\lambda=-6$ решений нет. д) При $\lambda\neq-5/2$, $\lambda\neq3/2$ $x(s)=s^4+\frac{35-10\lambda}{35+14\lambda}s^2$, при $\lambda=-5/2$ решений нет, при $\lambda=3/2$ $x(s)=s^4+\frac{5}{14}s^2+Cs$, где C произвольно. е) $x(s)=s+\lambda\pi^3\sin s$. ж) При $\lambda\neq1/2$, $\lambda\neq-1/2$ $x(s)=1-\frac{2}{\pi}s-\frac{\lambda}{6}\frac{\pi^2}{1+2\lambda}\cos s$, при $\lambda=-1/2$ решений нет, при $\lambda=1/2$ $x(s)=C-\frac{2}{\pi}s+\left(C\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{3}\right)\cos s$, где C — произвольно. з) При $\lambda\neq-3/2$, $\lambda\neq-3/4$ $x(s)=\frac{3\pi\lambda}{2(2\lambda+3)}\times\sin s+\cos 2s$, при $\lambda=-3/2$ решений нет, при $\lambda=-3/4$ $x(s)=\cos 2s-\frac{3\pi}{4}\sin s+C\cos s$, где C произвольно. **21.2.** а) $\lambda_1=1/\pi$, $\varphi_1=\sin s+\cos s$, $\lambda_2=-1/\pi$, $\varphi_2=\sin s-\cos s$. б) $\lambda_1=2/\pi$, $\varphi_1=\cos s$, $\lambda_2=-2/\pi$, $\varphi_2=\sin s$. в) $\lambda_1=\lambda_2=3$, $\varphi=s-2s^2$, г) $\lambda_1=\frac{5}{2}$, $\varphi_1=s^2$, $\lambda_2=\frac{3}{2}$, $\varphi_2=s$.

21.3. $\lambda_k=2^{k+1}/\pi$, $\varphi_k=\sin ks$ $(k\in N)$. **21.4.** а) При $\lambda\neq3/2$ разрешимо при любых α, β, γ и

$$x(s)=\alpha s^2+\frac{3\beta}{3-2\lambda}s+\gamma,$$

при $\lambda=3/2$ разрешимо тогда и только тогда, когда $\beta=0$ и $x(s)=\alpha s^2+\gamma+Cs$, где C произвольно. б) При $\lambda\neq\pm2/\pi$ разрешимо

при любых α, β и

$$x(s) = \frac{2(\alpha - 2\lambda\beta)}{2 + \lambda\pi} \sin s + \beta,$$

при $\lambda = 2/\pi$ разрешимо при любых α, β и

$$x(s) = \frac{\alpha\pi + 4\beta}{2\pi} \sin s + \beta + C \cos s,$$

где C — произвольно, при $\lambda = -2/\pi$ разрешимо тогда и только тогда, когда $\alpha\pi + 4\beta = 0$ и $x(s) = \beta + C \sin s$, где C произвольно. в) При $\lambda \neq 3/2$, $\lambda \neq -3/4$ разрешимо при любых α, β и

$$x(s) = \alpha s^3 - \frac{15\beta + 12\lambda\alpha}{15 + 20\lambda} s,$$

при $\lambda = 3/2$ разрешимо при любых α, β и

$$x(s) = \alpha s^3 + Cs^2 - \frac{25\beta - 6\alpha}{15} s,$$

где C произвольно, при $\lambda = -3/4$ разрешимо тогда и только тогда, когда $3\alpha - 5\beta = 0$ и $x(s) = \alpha s^3 + Cs$, где C произвольно. г) При $\lambda \neq 3/2$, $\lambda \neq -1/2$ разрешимо при любом α и $x(s) = \frac{3\alpha}{3 - 2\lambda} s$, при $\lambda = -1/2$ разрешимо при любом α и $x(s) = \frac{3}{4}(\alpha - C)s + Cs^2$, где C произвольно, при $\lambda = 3/2$ разрешимо тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$ и $x(s) = Cs$, где C произвольно. **21.5.** $x(s) = f(s) + \lambda \int_0^{2\pi} \sin(s - 2t) f(t)\, dt$.

21.6. а) $\lambda_n = (\pi/2 + \pi n)^2$, $\varphi_n = \sin(\pi/2 + \pi n)s$ $(n \in \mathbf{N})$. б) $\lambda_n = 4n^2 - 1$, $\varphi_n = \sin 2ns$ $(n \in \mathbf{N})$. в) $\lambda_n = (n + 1/2)^2 - 1$, $\varphi_n = \sin(n + 1/2)s$ $(n \in \mathbf{N})$. г) $\lambda_0 = 1$, $\varphi_0 = e^s$, $\lambda_n = -\pi^2 n^2$, $\varphi_n = \sin n\pi s + n\pi \cos n\pi s$ $(n \in \mathbf{N})$. д) $\lambda_n = \frac{1}{2}(1 + k_n^2)$, $\varphi_n = k_n \cos k_n s + \sin k_n s$ $(n \in \mathbf{N})$, где k_n — положительные корни уравнения $2 \operatorname{ctg} k = k - 1/k$. е) $\lambda_n = -k_n^2/3$, $\varphi_n = k_n \cos k_n s + \sin k_n s$ $(n \in \mathbf{N})$, где k_n — те же, что и в предыдущей задаче. **21.7, 21.8.** Воспользоваться задачей 20.19. **21.9.** а) Характеристические числа $\lambda_n = -n^2\pi^2$, собственные функции $\varphi_n = \sin n\pi s$ $(n \in \mathbf{N})$. При $\lambda \neq \lambda_n$

$$x(s) = s - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(\lambda + n^2\pi^2)} \sin n\pi s,$$

при $\lambda = -n^2\pi^2$ $(n \in \mathbf{N})$ решений нет. б) Характеристические числа и собственные функции определены в задаче 21.6 г): $\lambda_0 = 1$, $\varphi_0 = e^s$, $\lambda_n = -\pi^2 n^2$, $\varphi_n = \sin n\pi s + n\pi \cos n\pi s$ $(n \in \mathbf{N})$. При $\lambda \neq \lambda_k$ $(k \in \mathbf{N})$

$$x(s) = \cos \pi s + \frac{\lambda}{1 + \pi^2} \left[\frac{2}{(e - 1)(\lambda - 1)} e^s - \frac{\pi}{\pi^2 + \lambda} (\sin \pi s + \pi \cos \pi s) \right],$$

при $\lambda = 1$ и $\lambda = -\pi^2$ решений нет, при $\lambda = -n^2\pi^2$ $(n = 2, 3, \ldots)$

$$x(s) = \cos \pi s + \frac{\lambda}{1 + \pi^2} \left[\frac{2}{(e - 1)(\lambda - 1)} e^s - \frac{\pi}{\pi^2 + \lambda} (\sin \pi s + \pi \cos \pi s) \right] + C[\sin n\pi s + n\pi \cos n\pi s],$$

где C произвольно. **21.11.** а) $x(s) = 2s + 1$, б) $x(s) = s + s^3/6$, в) $x(s) = e^s(1 + s)^2$, г) $x(s) = \frac{1}{2}(e^s + \sin s + \cos s)$. **21.12.** а) Точное решение $x(s) \equiv 1$. б) Точное решение $x(s) \equiv -1$. в) Точное решение $x(s) \equiv -1$. г) Точное решение $x(s) = s/2$. д) Уравнение решения не имеет. **21.14.** а), б) Нет. в) Да. **21.15** а) $x(t) \equiv 1$. б) $x(t) = 2 \sin t$. в) $x(t) = 1 + 2t + t^2/2 + t^3/3$. г) $x(t) = 2t - t^2$. д) $x(t) \equiv 1$. **21.16.** а) Имеется точное решение $x(t) = t$. б) Имеется точное решение $x(t) = e^t$. в) Имеется точное решение $x(t) \equiv 1$. г) Имеется точное решение $x(t) = e^{-t}$.

§ 22

22.3. $(Ax, y) - (x, Ay) = i \int_0^1 (x'\bar{y} + x\bar{y}')\, dt - i[x\bar{y}]\Big|_0^1 = 0$. Пусть $(x', y) = (x, y^*)$ и y^{**} — неопределенный интеграл от y^*; тогда

$$i \int_0^1 x'(\bar{y} + i\overline{y^{**}})\, dt = 0,$$

откуда $h = y + iy^{**}$ почти всюду на $[0, 1]$ постоянна; изменив ее значения на множестве меры нуль, получим $y + iy^{**} = c$, откуда $y' + iy^* = 0$ почти всюду. Поэтому область определения A^* состоит из всех абсолютно непрерывных функций $y(t)$, производные которых лежат в $L_2[0, 1]$ без всяких ограничений на граничные значения. **22.5.** Вообще говоря, неверно, так как возможно, что $D(A^*) = 0$. **22.6.** Пусть $y \in D(A^*)$ и $A^*y = y^*$. Так как $R(A) = H$, то найдется $h \in D(A)$ такое, что $Ah = y^*$, поэтому при любом $x \in D(A)$ будет $(Ax, y) = (x, y^*) = (x, Ah) = (Ax, h)$. Отсюда $y = h \in D(A)$. **22.8.** Если $Au = 0$, то $(u, Av) = (Au, v) = 0$ для любого $v \in D(A)$, поэтому u ортогонален $R(A)$ и, следовательно, $u = 0$ и оператор A^{-1} существует. Далее устанавливается, что существует оператор $(A^*)^{-1}$ и что $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, откуда и вытекает, что оператор A^{-1} симметрический. **22.9.** В проверке нуждается лишь плотность $R(A)$. В противном случае найдется $h \in H$ $(h \neq 0)$ такое, что $h \perp R(A)$. Тогда $(f, Ah) = (Af, h) = 0$ для любого $f \in H$, откуда $Ah = 0$, а это противоречит существованию обратного оператора. **22.11.** а) $\Rightarrow$ б) $A = A^*$, и так как A^* замкнут, то и A замкнут. Если найдется $x \in D(A^*) = D(A)$ такое, что $A^*x = ix$, то $Ax = ix$ и $-i(x, x) = (ix, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = i(x, x)$, откуда $x = 0$. Тем самым $N(A - iI) = 0$, аналогично устанавливается, что $N(A + iI) = 0$. б) $\Rightarrow$ в) Если $R(A - iI)$ не плотно в H, то для $y \in [R(A - iI)]^\perp$ $(y \neq 0)$, мы имели бы $((A - iI)x, y) = 0$ для любого $x \in D(A)$, а тогда $y \in D(A^*)$ и $(A - iI)^*y = (A^* + iI)y = 0$, что невозможно, так как $N(A^* + iI) =$

$=0$. Осталось доказать замкнутость $R(A-iI)$. Если $x \in D(A)$, то $\|(A-iI)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2$ и если $x_n \in D(A)$ и $(A-iI)x_n \to y$, то $x_n \to x_0$ и Ax_n также сходится. Так как A замкнут, то $x_0 \in D(A)$ и $(A-iI)x_0 = y$. Таким образом, $R(A-iI)$ замкнуто и совпадает с H. Аналогично устанавливается, что $R(A+iI) = H$. в) $\Rightarrow$ а) Пусть $x \in D(A^*)$. Так как $R(A-iI) = H$, то найдется $y \in D(A)$ такое, что $(A-iI)y = (A^*-iI)x$. Но $D(A) \subset D(A^*)$, поэтому $x-y \in D(A^*)$ и $(A^*-iI)(x-y) = 0$. Так как $R(A+iI) = H$, то $N(A^*-iI) = 0$, следовательно, $x = y \in D(A)$ и $D(A^*) = D(A)$. **22.13.** Предположить, что существуют две собственные функции с одним и тем же собственным значением и доказать, что их определитель Вронского равен нулю.

22.14. а) $G(s,t) = \begin{cases} s(1-t) & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ t(1-s) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$

б) $G(s,t) = \dfrac{1}{3}\begin{cases} (s+1)(2-t) & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ (t+1)(2-s) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$

в) $G(s,t) = \begin{cases} \sin s \cos t & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \pi, \\ \sin t \cos s & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \pi. \end{cases}$

г) $G(s,t) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} 1}\begin{cases} \operatorname{sh} s \operatorname{sh}(1-t) & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(1-s) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$

д) При $|\gamma| \neq 1$ $G(s,t) = \dfrac{1}{2}\begin{cases} e^{s-t} - \dfrac{1-\gamma}{1+\gamma} \cdot e^{s+t-2} & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ e^{t-s} - \dfrac{1-\gamma}{1+\gamma} \cdot e^{s+t-2} & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$

При $\gamma = -1$ $G(s,t)$ не существует, при $\gamma = 1$ $G(s,t) = \dfrac{1}{2} e^{-|s-t|}$.

22.15. а) $x(s) = \lambda \int\limits_0^1 G(s,t)\, x(t)\, dt$, где

$$G(s,t) = -\begin{cases} \operatorname{arctg} s & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ \operatorname{arctg} t & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

б) $x(s) = \lambda \int\limits_0^1 G(s,t)\, x(t)\, dt + \int\limits_0^1 G(s,t)\, f(t)\, dt$, где

$$G(s,t) = -\frac{1}{3}\begin{cases} (s+2)(1-t) & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ (t+2)(1-s) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

в) Функция Грина при данных граничных условиях не существует. **22.16.** Утверждения а), б), в) вытекают из равенства

$$(Ux, x) = \int\limits_a^b (px'^2 + qx^2)\, dt + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} p(a)\, x^2(a) + \frac{\beta_1}{\beta_2} p(b)\, x^2(b).$$

22.17. б) Собственные значения оператора U обратны собственным значениям интегрального оператора с ядром $G(s,t)$. Воспользоваться теоремой 20.1. в) Воспользоваться теоремой 20.4. **22.18.** Пусть $x(t) \in D$, $\varphi_k(t)$ $(k \in \mathbb{N})$ — плотная в пространстве $L_2[a,b]$ в силу задачи 22.17 в) ортонормированная система собственных функций оператора U, соответствующих собственным значениям λ_k, $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$. Тогда $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k)\, \varphi_k$ и $(Ux, x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(x, \varphi_k)|^2 \geqslant \lambda_1 \sum\limits_{k=1}^{\infty} |(x, \varphi_k)|^2 = \lambda_1 \|x\|^2 = \lambda_1$. С другой стороны, $\varphi_1(t) \in D$ и $(U\varphi_1, \varphi_1) = \lambda_1 \|\varphi_1\|^2 = \lambda_1$. **22.19.** $x_0(t) = \sqrt{2} \sin \pi t$.

ГЛАВА 6

§ 23

23.5. Следствие ограниченности компактного множества **23.6.** Непрерывность F вытекает из непрерывности функции $K(t, s, x)$ по x и возможности предельного перехода под знаком интеграла при равномерной сходимости, полная непрерывность — из теоремы 15.3. **23.7.** Вообще говоря, нет. **23.12.** $F(x) - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0) + \omega(x - x_0)$ $(x \in S)$, где $\|\omega(h)\| = o(\|h\|)$ при $h \to 0$ вследствие дифференцируемости F. Далее, $G(z) - G(z_0) = G'(z_0)(z - z_0) + \delta(z - z_0)$ $(z \in \Sigma)$, где $\|\delta(g)\| = o(\|g\|)$ при $g \to 0$ вследствие дифференцируемости G. Но тогда в некоторой окрестности точки z_0

$$(F * G)(z) - (F * G)(z_0) = F(G(z)) - F(G(z_0)) = F'(x_0) \times$$
$$\times (G(z) - G(z_0)) + \omega(G(z) - G(z_0)) = F'(x_0) G'(z_0) + \rho(z - z_0),$$

где $\rho(z - z_0) = F'(x_0)\delta(z - z_0) + \omega(G(z) - G(z_0))$ и $\|\rho(g)\| = o(\|g\|)$ при $g \to 0$. **23.13.** $F'(x_0)h = 2(x_0, h)$, $G'(x_1)h = \dfrac{(x_1, h)}{(x_1, x_1)} = \left(\dfrac{x_1}{\|x_1\|^2}, h\right)$ при $x_1 \neq 0$.

23.18. а) $F'(1,1,1) = \|1 \quad 2 \quad 3\|$, б) $F'(1) = \begin{Vmatrix} -\pi \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$;

в) $F'(1,1) = \begin{Vmatrix} 0 & -\pi e \\ -e & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$; г) $F'(1,1,1) = \begin{Vmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

23.19. $(F * G)'(t_0) = \left\| \dfrac{\partial F_i(x_0)}{\partial x_j} \right\|_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,k}} \cdot \left\| \dfrac{\partial G_r(t_0)}{\partial z_s} \right\|_{\substack{r=1,2,\ldots,k \\ s=1,2,\ldots,m}}$.

23.21. а) $F'(u_0) = \cos \sin x$; б) $F'(u_0) = \sin \cos x$; в) $F'(0) = 1 - x$; г) $F'(0) = 1 + x^2$.

23.22.

$$F(u) - F(u_0) = h(x) - \int\limits_a^b [f(x, s, u_0(s) + h(s)) - f(x, s, u_0(s))]\, ds$$

23.23. $F'(0)h = h(x) + \lambda \int_0^\pi \sin xh(s)\,ds$. Интегрируя уравнение

$$h(x) + \lambda \sin x \int_0^\pi h(s)\,ds = \cos x$$

от нуля до π, получим

$$\alpha - 2\lambda\alpha = 0, \quad \alpha = \int_0^\pi h(s)\,ds.$$

При $\lambda \neq -1/2$ $\alpha = 0$ и $h(x) = \cos x$. При $\lambda = -1/2$ $h(x) = \cos x + C \sin x$, где C — произвольная постоянная. **23.24.** Согласно задаче 23.12, $\frac{d}{d\theta}[F(x_1 + \theta(x_2 - x_1)] = F'[x_1 + \theta(x_2 - x_1)](x_2 - x_1)$. Интегрируя это тождество по $[0, 1]$, получаем формулу Лагранжа. **23.28.** Применяя сначала формулу Лагранжа для F, а затем условие Липшица для F', получаем

$$\|F(x_1) - F(x_2) - F'(x_2)(x_1 - x_2)\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \int_0^1 [F'(x_2 + \theta(x_1 - x_2)) - F'(x_2)]d\theta \right\| \cdot \|x_1 - x_2\| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 \|F'(x_2 + \theta(x_1 - x_2)) - F'(x_2)\|\,d\theta\,\|x_1 - x_2\| \leqslant \int_0^1 l\theta\,d\theta \|x_1 - x_2\|^2 =$$
$$= \frac{1}{2} l \|x_1 - x_2\|^2.$$

23.30. Пусть $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \subset m$ и $\|x\| \leqslant c$, пусть $M = \sup_{\substack{n \\ |\xi| \leqslant c}} |f_n(\xi)|$; тогда $|f_n(x_n)| \leqslant M$ $(n \in \mathbf{N})$ и, следовательно, $F(x) \in m$. По формуле Тейлора при $x^0 = \{x_k^0\}_{k=1}^\infty \in m$

$$f_n(x_n) - f_n(x_n^0) - f_n'(x_n^0)(x_n - x_n^0) =$$
$$= \int_0^1 \left[f_n'(x_n^0 + \theta(x_n - x_n^0)) - f_n'(x_n^0)\right] d\theta\,(x_n - x_n^0).$$

Вследствие равностепенной непрерывности f_n' правая часть последнего равенства есть $o(|x_n - x_n^0|)$ при $x_n \to x_n^0$. Следовательно, $F'(x^0)h = (f_1'(x_1^0)h_1, f_2'(x_2^0)h_2, \ldots)$.

23.31.

$$\varphi'(r_0)h = \int_a^b \left[\frac{\partial\Phi(t, r_0(t), x_0'(t))}{\partial x} h(t) + \frac{\partial\Phi(t, x_0(t), x_0'(t))}{dx'} h'(t)\right] dt.$$

23.36 $[F_2xy](t) = \frac{1}{2}x(t)\int_0^1 K(t, s)\,y(s)\,ds + \frac{1}{2}y(t)\int_0^1 K(t, s)\,x(s)\,ds,$

$$\left[\frac{d}{dx}F_2x^2\right]h = 2F_2xh; \quad \left[\frac{d^2}{dx^2}F_2x^2\right]h^2 = 2F_2h^2.$$

23.38. а) $dF(r_0, h) = h'' + h\cos t$. $d^kF(r_0, h) = \sin(t + k\pi/2) \times h^k$, $k \geqslant 2$.

б) $F(x_0 + h) = \sin t + h'' + h\cos t + \sum_{k=2}^\infty \frac{\sin(t + k\pi/2)}{k!} h^k$. **23.39.**

Повторить рассуждения доказательства теоремы Абеля. **23.42** $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}: |x_1x_2| < 1\}$. $\rho_u = 1$.

23.44. $F(x_0 + h) = F(x_0) + h(t) + \int_a^b K(t, s)e^{x_0(s)}h(s)\,ds +$

$$+ \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k!}\int_a^b K(t, s)\,e^{x_0(s)}h^k(s)\,ds.$$

23.46. При $x(t) \in C_\alpha$ $\sup_{[0, +\infty)} |tx(t)| \leqslant \sup_{[0, +\infty)} |te^{-\alpha t}| \cdot \|x\|_\alpha = (\alpha e)^{-1}\|x\|_\alpha < 1$ при $\|x\|_\alpha < \alpha e$. Следовательно,

$$\|F(x)\|_\alpha \leqslant \frac{\|x\|_\alpha}{1 - (\alpha e)^{-1}\|x\|_\alpha}.$$

§ 24

24.3. а) Воспользоваться теоремой Лагранжа и теоремой 24.1. б) С помощью теоремы Лагранжа доказать, что для $f(x)$ существует обратная функция. Далее воспользоваться теоремой 24.1. **24.4.** $t = 0{,}35$. **24.7.** $t = -0{,}75$. **24.8.** в) $E_0 = 0{,}00$, $E_1 = 0{,}92$, $E_2 = 1{,}55$, $E_3 = 2{,}02$, $E_4 = 2{,}42$, $E_5 = 2{,}79$, $E_6 = 3{,}14$, $E_7 = 3{,}49$, $E_8 = 3{,}86$, $E_9 = 4{,}26$, $E_{10} = 4{,}73$, $E_{11} = 5{,}36$, $E_{12} = 6{,}28$, $E_k = E\left(\frac{kT}{12}\right)$ $(k = 0, 1, \ldots, 12)$. г) $E(T/4) = 1{,}81$ при $e = 0{,}25$, $E(T/4) = 2{,}02$ при $e = 0{,}5$, $E(T/4) = 2{,}18$ при $e = 0{,}75$. **24.9.** в) При $k = 2$ $x_0 = 0{,}00$, $x_1 = 0{,}10$, $x_2 = 0{,}22$, $x_3 = 0{,}35$, $x_4 = 0{,}49$, $x_5 = 0{,}64$, $x_6 = 0{,}81$, $x_7 = 1{,}01$, $x_8 = 1{,}25$, $x_9 = 1{,}54$, $x_{10} = 2{,}00$, $x_m = x(m/10)$, $m = 0, 1, \ldots, 10$. **24.10.** Рассмотреть функцию $f(x) = x - \frac{1}{2}(x^2 - a)$ и убедиться, что она является сжимающим отображением $[a/2, 1]$ в себя. **24.11.** Предел равен $1 + \sqrt{2}$. Рассмотреть функцию $f(x) = 2 + 1/x$ и убедиться, что она является сжимающим отображением $[2, 3]$ в себя. **24.19.** Рассмотреть отображение Φ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\Phi(x) = x + \pi/2 - \operatorname{arctg} x$. **24.20.** Пусть φ: $Q \to \mathbf{R}$ — вещественная функция на Q, определенная равенством $\psi(x) = \|\Phi(x) - x\|$, $x \in Q$.

Так как Φ — непрерывное отображение, то φ непрерывна. В силу бикомпактности Q функция φ достигает на Q наименьшего значения $a \geqslant 0$ в некоторой точке $x_0 \in Q$. Если $a > 0$, то $\varphi(\Phi(x_0)) = \|\Phi(\Phi(x_0)) - \Phi(x_0)\| < \|\Phi(x_0) - x_0\| = \varphi(x_0) = a$, что противоречит определению a. Поэтому $a = 0$ и x_0 — неподвижная точка Φ. Отображение Φ может и не являться сжимающим — рассмотрим $\Phi(x) = \sin x$ для $x \in [0, \pi/2]$. **24.23.** б) $K_n(s, t) = st/3^{n-1}$, $R(s, t, \lambda) = 3st/(3-\lambda)$. в) При $\lambda \neq 3$ решение имеет вид $x(s) = f(s) + \frac{3\lambda}{3-\lambda}\int_0^1 stf(t)\,dt$. **24.28.** Оператор $\psi = \Phi^m$ имеет единственную неподвижную точку x^*. Но ψ и Φ перестановочны на Q, поэтому $\Phi(x^*)$ — также неподвижная точка ψ, т. е. $\Phi(x^*) = x^*$. Если $\bar{x}$ — еще одна неподвижная точка Φ, то $\psi(\bar{x}) = \Phi^m(\bar{x}) = \bar{x}$, т. е $\bar{x} = x^*$.

24.31. По формуле Тейлора

$$f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi_n)(x^* - x_n)^2.$$

Отсюда $0 \leqslant x_{n+1} - x^* \leqslant \frac{l}{2m}(x_n - x^*)^2$. Кроме того, $f(x^*) = f(x_0) + f'(\eta)(x^* - x_0)$ и, следовательно, $0 < x_0 - x^* \leqslant |f(x_0)|/m$. Отсюда по индукции устанавливается требуемая оценка. **24.33.** Если $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ — неподвижная точка для F, то, так как $\|F(x)\| = 1$ для всех $x \in l_2$, $\|x\| = 1$. Из условия $x = F(x)$ следует, что $x_1 = x_2 = \ldots = 0$, — противоречие. **24.34.** б) Непрерывность оператора F вытекает из непрерывности функции $f(t, x)$ и возможности предельного перехода под знаком интеграла при равномерной сходимости, полная непрерывность вытекает из оценок $|F(x)| \leqslant |x_0| + b|h|$, $|F(x)(t_1) - F(x)(t_2)| \leqslant b|t_1 - t_2|$ и теоремы 15.3. в) Воспользоваться теоремой 24.4. г) $f(t, x) = \sqrt[3]{x}$ $(t_0 = 0,$ $x_0 = 0)$. **24.35.** а) Пусть $x(t)$ — решение краевой задачи. Тогда из дифференциального уравнения находим

$$x''(t) = K \exp\left\{-\int_0^t x(s)\,ds\right\},$$

следовательно,

$$x(t) = Lt + M + K\int_0^t\int_0^\tau \exp\left\{-\int_0^\sigma x(s)\,ds\right\} d\sigma\, d\tau,$$

где постоянные K, L, M определяются из граничных условий, что приводит к интегральному уравнению. Обратно, если $x(t) \in C[0, 1]$ есть решение интегрального уравнения, то оно удовлетворяет граничным условиям и дифференциальному уравнению. б) Пусть $|x(t)| \leqslant r = |a| + |b| + |c - a - b|$, тогда и $|\Phi(x)| \leqslant |a| + |b| + |c - a - b| = r$. в) Из пункта б) следует, что множество функций $y(t) = \{\Phi(x)\}(t)$ ограничено. Далее проверяется, что

$$|y(t_2) - y(t_1)| \leqslant [|b| + 2e^{2r}|c - a - b|] \cdot |t_2 - t_1|,$$

откуда следует равностепенная непрерывность функций этого множества. **24.36.** Условие

$$\|K\| \cdot n \cdot \left(\|y\| \frac{n}{n-1}\right)^{n-1} < 1$$

обеспечивает существование ровно двух положительных решений

$$r_* < \frac{1}{(n \cdot \|K\|)^{1/(n-1)}} < r^*$$

уравнения $\|K\| r^n + \|y\| = r$. Шар $\|x\| \leqslant r_*$ оператор Φ отображает в себя, как и шар $\|x\| \leqslant r^*$. В первом шаре Φ является сжатием, ибо в нем $\|\Phi(x') - \Phi(x'')\| \leqslant \|K\| \cdot n \cdot r_*^{n-1}\|x' - x''\|$ и $\|K\| \cdot n \cdot r_*^{n-1} < 1$. Во втором шаре Φ вполне непрерывен как произведение вполне непрерывного линейного интегрального оператора и ограниченного нелинейного оператора (см. задачу 23.4).

§ 25

25.7. Заметим, что $x(t) = A \sin t$, поэтому A удовлетворяет уравнению $A = \frac{\lambda}{\pi}\left[A\frac{\pi}{2} + A^2\frac{\pi}{2}\right]$, корень $A = 0$ не подходит и, следовательно, $A = \frac{2-\lambda}{\lambda}$, $x(t) = \frac{2-\lambda}{\lambda}\sin t$ $(\lambda \neq 0)$. **25.8.** Кроме решения, найденного в задаче 25.7, интегральное уравнение при любых λ имеет решение $x(t) \equiv 0$. **25.10.** Решение ищем в виде (при $\varepsilon \to 0$) $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + O(\varepsilon^2)$. Для $x_0(t)$ и $x_1(t)$ имеем задачи

$$x_0'' + \sin x_0 = 0, \qquad x_0(0) = x_0(1) = 0,$$
$$x_1'' + x_1 \cos x_0 = \sin \pi t, \quad x_1(0) = x_1(1) = 0.$$

Отсюда $x_0(t) \equiv 0$, $x_1(t) = -\frac{1}{\pi^2 - 1}\sin \pi t$.

25.11. а) Следствие теоремы 25.2.

б) $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = [1 - \varepsilon\varphi'(x)]^{-1}\varphi(x)$, $\frac{\partial x}{\partial a} = (1 - \varepsilon\varphi'(x))^{-1}$,

откуда $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = \varphi(x)\frac{\partial x}{\partial a}$. Далее по индукции получаются требуемые равенства. в) Следствие формулы Тейлора. **25.14.** Рассмотрим вспомогательное уравнение $x = a + \varepsilon/\psi(x)$. Согласно задаче 25.11 в) его решение дается рядом

$$x(a, \varepsilon) = a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!}\frac{d^{k-1}}{da^{k-1}}\left[\frac{1}{\psi(a)}\right].$$

При $a = 0$ получаем искомое решение

$$x(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left[\frac{1}{\psi(x)}\right]\Bigg|_{x=0}.$$

25.15. Оператор $\Phi(x) = x - \frac{2}{m+M}F(x, \lambda)$ при $\lambda \in [a, b]$ является сжимающим отображением в пространстве $C(-\infty, \infty)$ с коэффициентом сжатия $\frac{M-m}{M+m}$.

ГЛАВА 7

§ 26

26.2. $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x = \left(\xi_k^0\right)_{k=1}^{\infty}$, где ξ_1^0 произвольно. **26.3.** Пусть нормы в X_n невырожденны. Допустим, что последовательность $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x'$ и $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x''$. Тогда

$$\|T_n(x' - x'')\|_{\bar{X}_n} \leqslant \|T_n x' - \bar{x}_n\|_{\bar{X}_n} + \|\bar{x}_n - T_n x''\|_{\bar{X}_n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Но тогда $x' - x'' = 0$. Обратно, если $\|T_n x\|_{\bar{X}_n} \to 0$ при некотором $x \neq 0$, то $\hat{x}_n = T_n x \xrightarrow{T} x$ и $\bar{x}_n \xrightarrow{T} 0$ $(n \to \infty)$. **26.4.** Воспользоваться результатом предыдущей задачи. **26.5.** Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 8.2. **26.6.** Множество узлов сетки плотно на $[0, l]$, поэтому существует последовательность $\left(t_{k_s}^{(n_s)}\right)_{s=1}^{\infty}$ узлов, сходящаяся к t_0, в которой $|x(t_0)| = \|x\|_{C[0,l]}$. **26.7.** Достаточно заметить, что $\|x_n\|_{C\Phi}^2$ есть интегральная сумма Римана для непрерывной функции $x^2(t)$. **26.9.** Воспользоваться предыдущей задачей. **26.11.** а) Да, с первым порядком, если $x'(t)$ ограничена на $[0, l]$. б) Да, с третьим порядком, если $x'(t)$ интегрируема на $[0, l]$. **26.13.** Следует из неравенства

$$\|\bar{A}_n T_n x - \bar{y}_n\|_{Y_n} \leqslant \|\bar{A}_n T_n x - T'_n A x\|_{\bar{Y}_n} + \|T'_n y - \bar{y}_n\|_{\bar{Y}_n}.$$

26.15.

$$\|\bar{A}_n T_n x - T_n A x\|_{\bar{Y}_n} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| x'\left(\frac{i}{n}\right) - n\left[x\left(\frac{i}{n}\right) - x\left(\frac{i-1}{n}\right)\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \int_0^1 \left| x'\left(\frac{i}{n}\right) - x'\left(\frac{i-1}{n} + \theta\frac{1}{n}\right)\right| d\theta \to 0, \quad n \to \infty,$$

вследствие равномерной непрерывности $x'(t)$ на $[0, l]$. **26.16.** Согласно формуле Лагранжа

$$\|\bar{A}_n T_n x - T_n A x\|_{\bar{Y}_n} \leqslant \sup_{[0,l]} |x''(t)| \cdot \frac{1}{2n}.$$

26.18. $\|\bar{x}_n\| = \|\bar{A}_n^{-1} A_n \bar{x}_n\| \leqslant \gamma^{-1} \|\bar{A}_n \bar{x}_n\|$. См. также задачу 17.20. **26.19.** Следует из неравенства $\langle \bar{x}_n, \bar{A}\bar{x}_n \rangle \leqslant \|\bar{x}_n\| \|\bar{A}_n \bar{x}_n\|$. **26.21.** Выберем базисы в X_n и Y_n; тогда определитель матрицы оператора отличен от нуля. **26.27.** Следует из неравенства задачи 26.25 и преобразования $\|\bar{c}_n - T_n c\| \leqslant \gamma^{-1} \|\bar{A}_n \bar{x}_n - \bar{A}_n T_n x\| = \gamma^{-1} \|\bar{y}_n - T'_n y + T'_n A x - \bar{A}_n T_n x\| \leqslant \gamma^{-1} \|\bar{y}_n - T'_n y\| + \gamma^{-1} \|T'_n A x - \bar{A}_n T_n x\|$. **26.28.** а) $R_1(\tau) = 1 - \tau a_1$. б) Уравнения системы решаются последовательно, откуда и следует, что она имеет единственное решение. в) Воспользоваться методом математической индукции. г) См. задачу 26.22. **26.30.** Рассмотреть разность

$$\frac{x(t) - x(t-\tau)}{\tau} + [\alpha_1 a(t-\tau) + \alpha_2 a(t)] \cdot [\beta_1 x(t-\tau) + \beta_2 x(t)] -$$
$$- [\gamma_1 f(t-\tau) - \gamma_2 f(t)]$$

и применить к ней формулу Тейлора, содержащую члены до 2-го порядка малости. При $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$ имеем 2-й порядок точности. **26.31.** а) Разрешить t-е уравнение относительно x_1. **26.35.** На точном решении $x(t) \equiv 1$ разностные уравнения удовлетворяются точно, как и первое начальное условие. Второе начальное условие удовлетворяется с точностью τ^2. **26.36.** Частные решения этой разностной схемы можно найти в виде $x_i = \lambda^i$, откуда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Общее решение системы без начальных условий имеет вид $x_i = c_1 + c_2 2^i$. Используя начальные значения при $i = 0$ и $i = 1$, находим решение разностной схемы. **26.37.** См. решение задачи 26.35. **26.38.** Заметим, что $x_i = 1 - \tau^2 + \tau^2 (c/a)^i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Если $|c/a| < 1$, то $\|\bar{x}_n - T_n 1\|_{\bar{X}_n} \to 0$ $(n \to \infty)$. Если $|c/a| > 1$, то $\|\bar{x}_n - T_n 1\|_{\bar{X}_n} \to \infty$ $(n \to \infty)$. **26.39.** а) Воспользоваться формулой Тейлора для вектор-функции $x(t)$. б) Оценить предварительно норму матрицы $R_1(\tau)$. **26.40.** б) Применить к функции

$$(1 + \lambda\tau)^{\frac{t}{\tau}} = e^{\frac{t}{\tau} \ln(1+\lambda\tau)}$$

формулу Тейлора по τ, содержащую члены 1-го порядка относительно τ и остаточный член в интегральной форме, а затем оценить этот остаточный член.

§ 27

27.1. Точка $t = 0$ является точкой минимума функции $\varphi(t) = \|As + tAz\|^2$ при любом $z \in X$ с $Ts = 0$. По теореме Ферма $\varphi'(0) = 2(As, Az) = 0$. **27.2.** Вследствие условия ортогональности $\|A(s+z)\|^2 = \|As\|^2 + \|Az\|^2 \geqslant \|As\|^2$. **27.3.** Проверяем условие ортогональности. Для любого $z(t) \in H^1[0, l]$ такого, что $z(t_i) = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, имеем

$$(As_1, Az) = \int_0^l s_1' z' dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} z'(t)\, dt = 0.$$

27.5. Так как $\bar{s} - s \in N(T)$, то $(A(\bar{s} - s), As) = 0$ или $\|As\|^2 = (A\bar{s}, As)$. Меняя местами $\bar{s}$ и s, получаем искомое утверждение. Согласно задаче 3.19 $A(\bar{s} - s) = 0$. **27.6.** Согласно предыдущей задаче, $\bar{s} - s \in N(A)$. Кроме того, $T(\bar{s} - s) = T\bar{s} - Ts = \bar{x} - \bar{x} = 0$, т. е. $\bar{s} - s \in N(T)$. Но тогда $\bar{s} - s \in \{0\}$, т. е. $\bar{s} - s = 0$. **27.7.** Докажем, что здесь $N(A) \cap N(T) = \{0\}$. $N(A)$ состоит из многочленов первой или нулевой степени вида $C_1 t + C_2$. Если $T\{C_1 t + C_2\} = 0$, то при

$n \geqslant 1$ $C_1 = C_2 = 0$, ибо многочлен первой степени имеет не более одного нуля. **27.8.** б) $T\omega_1 = \bar{x}^1$, далее для любого $z \in H^1[0, l]$ с $Tz = 0$ выполнено условие ортогональности (см. задачи 27.3 и 27.2). **27.12.** См. указание к задаче 27.7. **27.13.** Достаточно заметить, что $AT^{-1}(\bar{x}) = Ax_0 + AN(T)$, где $x_0 \in X$ таково, что $Tx_0 = \bar{x}$. **27.14.** Аффинное многообразие $AT^{-1}(x)$ является замкнутым выпуклым множеством. Элемент y, реализующий расстояние от 0 до $AT^{-1}(x)$, принадлежит ему. Следовательно, существует s такое, что $As = y$, $Ts = \bar{x}$. **27.15.** Пусть $y_m(t) \in AN(T)$ $(m \in \mathbb{N})$ и $y_m(t) \to y_0(t)$ $(m \to \infty)$ в $L_2[0, l]$. Найдется $x_m(t) \in N(T)$ такое, что $x_m''(t) = y_m(t)$. Отсюда

$$x_m(t) = \int_0^l (t - s)\, y_m(s)\, ds - \frac{t}{l} \int_0^l (l - s)\, y_m(s)\, ds$$

(из $x_m \in N(T)$ следует, в частности, что $x_m(0) = x_m(l) = 0$). При $m \to \infty$ $x_m(t) \to x_0(t) \in N(T)$, т. е. $y_0 \in AN(T)$. **27.16.** Дважды проинтегрировать $s_3''(t)$, а произвольные постоянные определить из требования $s_3(t_i) = x_i$, $s_3(t_{i+1}) = x_{i+1}$. **27.17.** в) Запишем систему в виде $K\beta = f$ с симметричной матрицей K. Имеем

$$(K\beta, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_i}{6} (\beta_i + \beta_{i-1})^2,$$

где $\beta_0 = \beta_n = 0$. Если $K\beta = 0$, то отсюда $\beta = 0$. Следовательно, $\det K \neq 0$. **27.18.**

$$(As_3, Az) = \int_0^l s_3''(t)\, z''(t)\, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} s_3''(t)\, z''(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} s_3''(t)\, dz'(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_3''(t)\, z'(t) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} z'(t)\, ds_3''(t).$$

Но s_3''' — постоянная — третья производная $s_3(t)$ на $[t_{i-1}, t_i]$, а $\int_{t_{i-1}}^{t_i} z'(t)\, dt = z(t_i) - z(t_{i-1}) = 0$, ибо $Tz = 0$. Поэтому $(As_3, Az) = s_3''(l)\, z'(l) - s_3''(0)\, z(0) = 0$ вследствие условия 4).

§ 28

28.2. Воспользоваться оценками $\|x_n - P_n x\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x - P_n x\|$, $\|x_n - x\| \leqslant \|x_n - P_n x\| + \|P_n x - x\|$. **28.3.** Воспользоваться предыдущей задачей. **28.5.** Воспользоваться оценкой $\|Q_n A P_n x - Q_n A x\| \leqslant \omega_n \|A\|\, \|P_n x - x\|$.

28.6. Убедиться, что $Q_n Ax = \sum_{i=1}^{n} \langle Ax, \psi_i \rangle A\varphi_i = AP_n x = Q_n A P_n x$.

28.9. $\gamma(x_n, x_n) \leqslant (Ax_n, x_n) = (Ax_n, P_n x_n) = (P_n A x_n, x_n) \leqslant \|P_n A x_n\| \cdot \|x_n\|$, откуда $\|P_n A x_n\| \geqslant \gamma \|x_n\|$. **28.10.** Согласно задаче 28.6, $\|Q_n A x_n\| = \|AP_n x_n\| = \|Ax_n\| \geqslant \gamma \|x_n\|$. **28.11.** Воспользовавшись задачами 28.6 и 28.10, получим

$$\|x_n - x\| \leqslant \|P_n x - x\| \leqslant \gamma^{-1} \|AP_n x - Ax\| =$$
$$= \gamma^{-1} \|AP_n x - y\| = \gamma^{-1} \|Q_n y - y\|.$$

28.13. $\varphi(x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} (A\varphi_i, \varphi_j)\, c_i c_j - 2\sum_{i=1}^{n} (A\varphi_i, y)\, c_i + (y, y)$. В точке минимума $\partial\varphi(x_n)/\partial c_s = 0$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$. **28.14.** Если A_n — сужение оператора $Q_n A$ на X_n, то, вследствие условия устойчивости, $N(A_n) = \{0\}$, и как оператор, действующий из n-мерного пространства в n-мерное, A_n непрерывно обратим.

28.25. а) $\|x_n\| = \|(Q_n A P_n)^{-1} Q_n A P_n x_n\| \leqslant \gamma \|Q_n A x_n\|$.

б) $\|x_n - x\| = \|(Q_n A P_n)^{-1} Q_n A P_n (x_n - x)\| \leqslant$
$\leqslant \gamma \|Q_n A (x_n - P_n x)\| = \gamma \|Q_n A x_n - Q_n A P_n x\| \leqslant$
$\leqslant \gamma c \|A\| \cdot \|x_n - P_n x\|$.

28.27. Воспользоваться предыдущей задачей и теоремой 9.4. **28.28.** Следует из тождества $x_n - x = (I - P_n K)^{-1}(P_n x - x)$. **28.29.** Следует из тождества $x_n - x = (I - P_n K)^{-1}(P_n y - y) + (I - P_n K)^{-1}(P_n K - K)(I - K)^{-1} y$. **28.30.** Воспользоваться тождеством

$$1 + 2\sum_{l=1}^{\infty} \rho^l \cos l\omega = \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \omega}$$

при $\rho = s/2$, $\omega = \pi\tau$, откуда

$$K(t, s) = 1 + 2\sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{s}{2}\right)^l \cos \pi l \tau,$$

$$P_n K(t, s) = 1 + 2\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{s}{2}\right)^l \cos \pi l \tau,$$

$$\|P_n K - K\|^2 = 2\sum_{l=n+1}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{s}{2}\right)^{2l} ds \to 0, \quad n \to \infty.$$

28.31. б) Воспользоваться задачей 28.29.

§ 29

29.6. Воспользоваться формулой конечных приращений Лагранжа. **29.7.** Воспользоваться предыдущей задачей. **29.8.** Полагая $y = 0$ в неравенстве $\langle x - y, A(x) - A(y) \rangle \geqslant c(\|x - y\|)\, \|x - y\|$,

получим $\langle x, A(x)\rangle \geqslant c(\|x\|)\cdot\|x\| - \langle x, A(0)\rangle \geqslant (c(\|x\|) - \|A(0)\|)\times$ $\times\|x\|$. **29.10.** Из условия коэрцитивности следует, что $\|A(x)\| \geqslant$ $\geqslant \gamma\|x\|$. **29.16.** Существование и единственность неявной функции $x = \varphi(t)$ вытекают из теоремы 29.1. Полагая в заданном неравенстве $x = \varphi(t)$; $y = \varphi(t_0)$, получим $|\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leqslant$ $\leqslant c^{-1}|f(\varphi(t_0), t)| \to 0$ при $t \to t_0$. **29.18.** По формуле конечных приращений. Лагранжа $(x - y)[f(x, t) - f(y, t)] = f_x(\xi, t)(x - y)^2 \geqslant$ $\geqslant c(x - y)^2$. **29.19.** Полагая в условии сильной монотонности $y_1 =$ $= x_1$, получим $(x_2 - y_2)[f_2(x_1, x_2) - f_2(x_1, y_2)] \geqslant c(x_2 - y_2)^2$, и можно воспользоваться задачей 29.16. **29.20.** Полагая в условии сильной монотонности задачи 29.19 $x_2 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(y_1)$, получим

$$(x_1 - y_1)[f_1(x_1, \varphi(x_1)) - f_1(y_1, \varphi(y_1))] \geqslant$$
$$\geqslant c[(x_1 - y_1)^2 + (\varphi(x_1) - \varphi(y_1))^2] \geqslant c(x_1 - y_1)^2.$$

Оператор $A_1(x_1)$ непрерывен как суперпозиция непрерывных функций. **29.21.** Согласно задаче 29.15. уравнение $A_1(x_1) = 0$ имеет единственное решение x_1^0; тогда $x^0 = \left(x_1^0, \varphi\left(x_1^0\right)\right)$ — единственное решение уравнения $A(x) = 0$. **29.23.** $(A_c(x) - A_c(y), x - y) \geqslant c\|x - y\|^2$. **29.25.** а) Следствие задачи 29.22. б) Пусть для некоторого n $\|x_n\| >$ $> r$; тогда $0 = (x_n, A_n(x_n)) > 0$ — противоречие. в) По теореме Вейерштрасса из x_n как ограниченной в E^k последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}. Пусть $x_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$. Тогда $0 = A\left(x_{n_k}\right) + \frac{1}{n_k} x_{n_k} \to A(x_0)$ при $k \to \infty$, т. е. $A(x_0) = 0$.

29.26. $$|a(x, z)| \leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant m} \|P_k\|_{C[a, b]} \int_0^l \sum_{k=0}^m |\mathscr{L}^k x|\,|\mathscr{D}^k z|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant m} \|P_k\|_{C[a, b]} \cdot \|x\|_{H^m[0, l]} \cdot \|z\|_{H^m[0, l]}$$

и, кроме того, $a(x, z)$ линеен по z. **29.28.** Воспользоваться равенством $(Ax - Ay, x - y) = a(x - y, x - y)$. **29.29.** Следует из оценки

$$\left|\int_0^l f(t)\, z(t)\, dt\right| \leqslant \|f\|_{L_2[0,l]} \cdot \|z\|_{L_2[0,l]} \leqslant \|f\|_{L_2[0,l]} \cdot \|z\|_{H^m[0,l]}.$$

29.30. Воспользоваться теоремой 29.1. **29.31.** Согласно теореме 12.2 существует и единственна $g(t) \in \overset{\circ}{H}{}^1[0, l]$ такая, что

$$\int_0^l f(t)\, z(t)\, dt = \int_0^l g'(t)\, z'(t)\, dt$$

для любого $z \in \overset{\circ}{H}{}^1[0, l]$. Этому уравнению удовлетворяет

$$g(t) = \int_0^l G(t, s)\, f(s)\, ds.$$

29.36 Воспользоваться теоремой 29.1. **29.38.** а)

$$a(\omega_0, \omega_0) = n^2 \int_0^h P_0(t)\, dt + \int_0^h P_1(t)(1 - nt)^2\, dt,$$

$$a(\omega_n, \omega_{n+1}) = n^2 \int_{1-h}^1 P_0(t)\, dt + \int_{1-h}^1 P_1(t)(nt - n - 1)^2\, dt,$$

$$a(\omega_k, \omega_{k+1}) =$$
$$= -n^2 \cdot \int_{kh}^{(k+1)h} P_0(t)\, dt + \int_{kh}^{(k+1)h} P_1(t)(nt - k)(nt - k - 1)\, dt,$$

$$a(\omega_{k-1}, \omega_k) = -n^2 \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} P_0(t)\, dt + \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} P_1(t)(nt - k - 1)^2\, dt,$$

$$a(\omega_k, \omega_l) = 0 \quad \text{при} \quad l \neq k - 1,\ k + 1,$$

$$(y, \omega_k) = \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} \omega_k(t)\, y(t)\, dt.$$

б) Получается трехдиагональная система. в) Оператор A ограничен: $\|A\| < K$, согласно теореме 29.2 и задаче 27.24,

$$\|x_n - \hat{x}\| \leqslant (cK)^{-1}\|\hat{x}_n - P_n\hat{x}_n\| = O(1/n).$$

ГЛАВА 8

§ 30

30.3. Произвести дифференцирование по t и умножение на x'.

30.4. а) $x(t) = \frac{t+1}{2} e^t$. б) $x(t) = -t^3$. в) $x(t) = e^{t-1}$. г) $x(t) =$ $= \ln t$ д) $x(t) = \sqrt[3]{(t+1)^2}$, функция $x(t) = \sqrt[3]{(3t-1)^2}$ в данном случае не считается экстремалью, так как в точке $t = 1/3$ не имеет конечной производной. е) $x(t) = (C + t)\sin t$, где C — произвольная постоянная. ж) $x(t) = C\sin t + \cos t$, C — произвольная постоянная. з) Вариационная задача не имеет смысла, так как интеграл не зависит от пути интегрирования. и) $x(t) \equiv 0$, если $x_1 = 0$, при $x_1 \neq 0$ экстремалей среди гладких кривых не существует. к) $x(t) = \cos t$. л) Экстремалей нет. м) $x(t) = 4/t - 1$. н) $x(t) = \sqrt{4 - t^2}$. Воспользоваться задачей 30.3. о) $x(t) = t$. **30.5.** а) $x(t) = t^3 - t^2$. б) $x(t) = (1 - t)\operatorname{sh} t$. в) Экстремалей нет. г) Вариационная задача не имеет смысла, так как интеграл не зависит от пути интегрирования. д) $x(t) = -(t^2 - e^2)^2$. е) $x(t) =$ $= \cos t$. ж) $x(t) = \frac{t^3}{6}(t^3 + 6t + 1)$. з) $x(t) = \operatorname{sh} t$.

30.6. а) $$\begin{cases} x(t) = \sin 2t, \\ y(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{32 + \pi^2}{8\pi} t; \end{cases}$$

б) $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{6}(t^3 + 5t - 6), \\ y(t) = t; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x(t) = \sin t, \\ y(t) = \sin t; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{2} + 1, \\ y(t) = t; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x(t) = 2\sin t + t\cos t, \\ y(t) = t\cos t; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = -3t. \end{cases}$

30.7. а) $x(t) = -\frac{t\cos t}{2} + \frac{\pi}{4}\cos t + \frac{1}{2}\sin t.$

б) $x(t) = C(\sin 4t + 4\cos 4t)$, где C произвольно.

30.8. Условие трансверсальности имеет вид

$$\frac{\psi' - x'}{1 + \psi' x'} = -1$$

и означает, что экстремали должны пересекать заданную кривую $x = \psi(t)$ под углом $\pi/4$. **30.9.** $x(t) \equiv 0$. **30.10.** а) $x(t) = \pm\sqrt{25 - (t-5)^2}$. Использовать задачу 30.3. б) $x(t) = \pm\sqrt{8t - t^2}$. Использовать задачу 30.3. **30.11.** а) Расстояние равно $19\sqrt{2}/8$ б) Расстояние равно $4/\sqrt{5}$. **30.12.** а) Нет. б)

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{3}\,t & \text{при } 0 \leqslant t < 1, \\ -\sqrt{3}(t-2) & \text{при } 1 \leqslant t \leqslant 2 \end{cases}$$

и

$$x(t) = \begin{cases} -\sqrt{3}\,t & \text{при } 0 \leqslant t < 1, \\ \sqrt{3}(t-2) & \text{при } 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

30.13. а) Ломаные линии, составленные из отрезков прямых $x(t) = t$ и $x(t) \equiv 1$ или из отрезков прямых $x(t) \equiv 0$ и $x(t) = t - 1$, реализуют абсолютный минимум, прямая $x(t) = t/2$ реализует слабый максимум. б)

$$x(t) = \begin{cases} -t & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ t - 2 & \text{при } 1 < t \leqslant 4 \end{cases} \quad \text{и} \quad x(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 3, \\ -t + 6 & \text{при } 3 < t \leqslant 4, \end{cases}$$

на обеих ломаных функционал достигает абсолютного минимума.

30.14.

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ t & \text{при } 0 < t \leqslant 1. \end{cases}$$

30.15. а) $x(t) = \frac{t+1}{2}e^t$; б) $x(t) = 2\sin \pi n t$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$;

в) $x(t) = 3t^2 + 2t + 1$; г) $x(t) = \frac{2t - t^2}{4}$. **30.16.** Исследовать на

экстремум функционал

$$\int_{t_0}^{t_1} x\sqrt{1 + x'^2}\,dt$$

при условии

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + x'^2}\,dt = l.$$

Получаем семейство экстремалей $x(t) = C_1 \operatorname{ch}\frac{t - C_2}{C_1} - \lambda$. Решение находится из системы уравнений относительно C_1, C_2, λ:

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \operatorname{ch}\frac{t_0 - C_2}{C_1} - \lambda, \\ x_1 = C_1 \operatorname{ch}\frac{t_1 - C_2}{C_1} - \lambda, \\ C_1\left[\operatorname{sh}\frac{t_1 - C_2}{C_1} - \operatorname{sh}\frac{t_0 - C_2}{C_1}\right] = l. \end{cases}$$

30.17. $\begin{cases} x(t) = -\frac{5}{2}t^2 + \frac{7}{2}t, \\ y(t) = t. \end{cases}$ **30.18.** $\begin{cases} x(t) = R\cos\frac{\pi}{2}t, \\ y(t) = R\sin\frac{\pi}{2}t. \end{cases}$

30.19. а) $\begin{cases} x(t) = \sin 2t, \\ y(t) = \cos 2t + 2t\sin 2t. \end{cases}$

Найти экстремали функционала

$$L(x, y) = \int_0^{\pi/4} \left[\frac{y^2}{2} - 2t^2x^2 + \lambda\left(\frac{dx}{dt} - 2y + 4tx\right)\right]dt.$$

Уравнение Эйлера дает $y - 2\lambda = 0$. Исключить y из этого уравнения и уравнения связи.

б) $x(t) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{2}\,t}{\operatorname{sh}\sqrt{2}}$,

$$y(t) = \frac{\sqrt{2}\operatorname{ch}\sqrt{2}\,t + \operatorname{sh}\sqrt{2}\,t}{\operatorname{sh}\sqrt{2}}.$$

§ 31

31.1. а) Решение уравнения Эйлера имеет вид $x(t) = C_1\operatorname{ch} t + C_2\operatorname{sh} t$. Кривые $x(t, C) = C\operatorname{ch} t$ образуют собственное поле, кривые $x(t, C) = C\operatorname{sh} t$ — центральное поле. б) $x(t, C) = C\cos t$ — собственное поле экстремалей, $x(t, C) = C\sin t$ — центральное поле. **31.2.** а) Экстремаль $x(t) \equiv 1$ включается в собственное поле

экстремалей $x(t, C) = C$. б) Экстремаль $x(t) = 2t$ включается в центральное поле экстремалей $x(t, C) = Ct$ с центром в точке $A(0, 0)$. в) Экстремаль $x(t) = t^2 + t/4 - 3/4$ включается в собственное поле экстремалей $x(t, C) = t^2 + t/4 + C$. г) Экстремаль $x(t) = t/6(1 - t^2)$ включается в центральное поле экстремалей $x(t, C) = Ct - t^3/6$ с центром в точке $A(0, 0)$. д) Экстремаль $x(t) = e^t$ включается в собственное поле экстремалей $x(t, C) = e^t + C$. е) При $a < \pi$ экстремаль $x(t) \equiv 0$ включается в центральное поле экстремалей $x(t, C) = C \sin t$ с центром в точке $A(0, 0)$, при $a > \pi$ семейство кривых $x(t, C) = C \sin t$ поля не образует. ж) Экстремаль $x(t) = t + 1$ включается в собственное поле экстремалей $x(t, C) = t + C$. **31.3.** а) Да. Решение уравнения Якоби с условием $u(0) = 0$ имеет вид $u(t) = Ct$, экстремаль $x(t) = \frac{3}{a} t$ включается в центральное поле экстремалей с центром в точке $A(0, 0)$. б) Нет. Решение уравнения Якоби с условием $u(0) = 0$ имеет вид $u(t) = C \sin 2t$ и при $a > \pi/2$ обращается в нуль в точке $t = \pi/2$. в) Да. Решение уравнения Якоби с условием $u(0) = 0$ имеет вид $u(t) = C \operatorname{sh} t$. г) Решение уравнения Якоби с условием $u(0) = 0$ имеет вид $u(t) = C \sin t$; если $0 < a < \pi$, то условие Якоби выполнено, если $a \geqslant \pi$, то нет. д) Да. е) Да. ж) Нет. з) Да. **31.4.** Так как уравнение Эйлера имеет вид $F'_{x'} = C$, то условие Якоби выполняется тождественно для любой экстремали. **31.5.** а) Экстремаль $x(t) = 2t + 1$, условие выполнено. б) Экстремаль $x(t) = t^3$, условие не выполнено. в) Экстремаль $x(t) \equiv 0$, условие выполнено. г) Экстремаль $x(t) = \frac{b}{a} t$, условие выполнено. д) Экстремаль $x(t) \equiv 0$, условие выполнено. е) Экстремаль $x(t) = t/2$, условие выполнено. ж) Экстремаль $x(t) \equiv 3$, условие выполнено. з) Экстремаль $x(t) = t^2$, условие выполнено. и) Экстремаль $x(t) = t - 1$, условие выполнено. **31.6.** а) $x(t) = 2t$ — слабый минимум. б) $x(t) = t^2 - t$ — сильный минимум. в) $x(t) = t/2$ — сильный минимум. г) $x(t) = e^t$ — сильный минимум. д) $x(t) = 2 \ln (t + 1)$ — сильный минимум. е) $x(t) \equiv 1$ — сильный минимум. ж) $x(t) = t^2$ — слабый минимум. з) $x(t) = \frac{b}{a} t$ — слабый минимум. и) $x(t) = \ln (1 + t)/\ln 2$ — сильный минимум. к) $x(t) = 2t + 1$ — слабый минимум. л) $x(t) = \sin 2t - 1$ — сильный максимум. м) $x(t) = t^3$ — сильный минимум. н) $x(t) = \sin 2t$ — сильный максимум. о) $x(t) = t/2$ — слабый минимум. п) $x(t) \equiv 0$ — слабый минимум.

31.7. б) $d^2\varphi|_{x \equiv 0} = \int\limits_0^1 th^2(t)\,dt > 0$ при любой $h(t) \in C[0, 1]$, $h(t) \not\equiv 0$. в) Пусть

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} -t + \varepsilon & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \\ 0 & \text{при } t > \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда $\varphi(x_\varepsilon) = -\varepsilon^4/6 < 0$. **31.8.** б) $d^2\varphi|_{x=x_0} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{n^3} > 0$ при любом $h \in l_2$ $(h \not\equiv 0)$. в) Пусть $x^{(n)} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1/n, 0, 0, \ldots)$. Тогда $\varphi(x^{(n)}) = 1/n^5 - 1/n^4 < 0$.

32.2. $\varphi^2(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant t^2\varphi^2(x_1) + 2t(1-t)\varphi(x_1)\varphi(x_2) + (1-t)^2\varphi^2(x_2) = t\varphi^2(x_1) + (1-t)\varphi^2(x_2) - t(1-t) \cdot [\varphi(x_1) - \varphi(x_2)]^2 \leqslant t\varphi^2(x_1) + (1-t)\varphi^2(x_2)$. **32.3.** а) Да. б) Да. в) Вообще говоря, нет. Рассмотреть в пространстве l_2 последовательность $e_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, \ldots)$. г) Да. Если $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ слабо и $\|x_0\| > \varliminf \|x_n\|$, то найдется c такое, что $\|x_0\| > c > \varliminf \|x_n\|$ и, следовательно, существует подпоследовательность x_{n_k} такая, что $\|x_0\| > c > \|x_{n_k}\|$ при $k \in \mathbf{N}$. Определим функционал f_0: $\langle x_0, f_0\rangle = \|x_0\|$ и продолжим его на все X с сохранением нормы. Тогда $\langle x_{n_k}, f_0\rangle$ не стремится к $\langle x_0, f_0\rangle$, так как $\langle x_{n_k}, f_0\rangle \leqslant \|f_0\| \cdot \|x_{n_k}\| < c$, а $\langle x_0, f_0\rangle = \|x_0\| > c$ — противоречие. **32.6.** Пусть u — точка локального минимума $\varphi(x)$ на M; тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $v \in S_\varepsilon(u) \cap M$ выполняется неравенство $\varphi(u) \leqslant \varphi(v)$. Пусть $x \in M$ — произвольно, $\alpha > 0$ таково, что $\alpha\|x - u\| < \varepsilon$. Тогда $u + \alpha(x - u) \in S_\varepsilon(u) \cap M$, поэтому $\varphi(u + \alpha(x - u)) \geqslant \varphi(u)$. Но $\varphi(u) \leqslant \varphi(u) + \alpha[\varphi(x) - \varphi(u)]$ и так как $\alpha > 0$, то $\varphi(x) - \varphi(u) \geqslant 0$ и, следовательно, u — глобальный минимум на M. **32.8.** Нет. Рассмотреть $\varphi(x) = \sqrt{|x|}$ для $x \in \mathbf{R}$. **32.9.** Необходимость сразу вытекает из (слабой) полунепрерывности снизу. При доказательстве достаточности воспользоваться идеей решения задачи 32.3. г). **32.10.** Из слабой полунепрерывности снизу следует полунепрерывность снизу без дополнительного требования выпуклости. Если φ — выпуклый и полунепрерывный снизу функционал, то по задаче 32.9 для любого вещественного λ множество C_λ замкнуто, по задаче 32.7 — выпукло, по задаче 13.23 C_λ слабо замкнуто, по задаче 32.9 φ слабо полунепрерывен снизу. **32.12.** в) Нет. Теорема 32.1 не применима, так как пространство $C[0, 1]$ нерефлексивно. **32.13.** Пусть $M \subset X$ — бикомпактно, $\varphi(x)$ определен на M и слабо полунепрерывен снизу. Если $m = \inf\limits_{x \in M} \varphi(x)$ и $x_n \in M$ таково, что $\varphi(x_n) \to m$ при $n \to \infty$, то найдется подпоследовательность x_{n_k} такая, что $x_{n_k} \to x_0 \in M$, и тогда $\varphi(x_0) = m$. **32.14.** $\varphi(x)$ — непрерывный выпуклый функционал. **32.15.** а) Да. б), в) Вообще говоря, нет. **32.16.** $\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) = t^2(Ax_1, x_1) + t(1-t)(Ax_1, x_2) + t(1-t)(Ax_2, x_1) + (1-t)^2(Ax_2, x_2) = t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2) - t(1-t)(A(x_1 - x_2), x_1 - x_2)$ и так как $t \in [0, 1]$, то $t(1-t)(A(x_1 - x_2), x_1 - x_2) \geqslant 0$. **32.17.** б) Нет. Рассмотреть последовательность $e_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots) \in l_2$. **32.18.** а) $\varphi'(x) = Ax + A^*x$. б) $\langle x - y, \varphi'(x) - \varphi'(y)\rangle = 2\langle x - y, A(x - y)\rangle \geqslant 0$. в) Воспользоваться теоремой 32.2, непрерывностью оператора A и задачей 32.11. **32.19.** а) $\varphi'(x) = 2A^*(Ax - b)$. б) Доказать, что $\varphi'(x)$ — монотонный оператор, воспользоваться теоремой 32.2, непрерывностью оператора A и задачей 32.11. **32.20.** При $r \geqslant 5$ наименьшее значение φ равно нулю и достигается в точке C (4, 3). При $r < 5$ наименьшее значение φ равно $2r^2 - 20r + 50$ и достигается в точке пересечения $\sigma_r(0)$ с прямой OC.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыко Я. В. Задачи и упражнения по функциональному анализу.— Минск: Высшая школа, 1978.
2. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач.— М.: Наука, 1981.
3. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление.— М: Физматгиз, 1961.
4. Гуревич А. П., Зеленко Л. Б. Сборник задач по функциональному анализу.— Саратов: Изд-во СГУ, 1978.
5. Дробышевич В. И., Дымников В. П., Ривин Г. С. Задачи по вычислительной математике.— М.: Наука, 1980.
6. Дьедонне Ж. Основы современного анализа.— М.: Мир, 1964.
7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах.— М.: Физматгиз, 1959.
8. Като Т. Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир, 1972.
9. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа.— М.: Наука, 1979.
10. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика.— М.: Мир, 1969.
11. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1968.
12. Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И. Вариационное исчисление.— М.: Наука, 1973.
13. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения.— М.: Наука, 1976.
14. Лоран П. Ж. Аппроксимация и оптимизация.— М.: Мир, 1975.
15. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа.— М.: Наука, 1965.
16. Наймарк М. А., Мартынов В. В. Функциональный анализ.— Долгопрудный: Изд-во МФТИ, 1970.
17. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том I. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1977.
18. Рудин У. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1975.
19. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем.— М.: Наука, 1971.
20. Сборник задач по функциональному анализу.— М.: Изд-во МГУ, 1977.
21. Сборник задач по уравнениям математической физики/Под редакцией В. С. Владимирова.— М.: Наука, 1974.
22. Соболев В. И. Лекции по дополнительным главам математического анализа.— М.: Наука, 1968.
23. Соболева Т. С. Задачи по функциональному анализу.— М.: Изд-во МИНХ и ГП, 1977.
24. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М: Наука, 1974.
25. Треногин В. А. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1980.
26. Фет А. И. Задачи по функциональному анализу.— Новосибирск: Изд-во НГУ, 1968.
27. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах.— М.: Мир, 1970.
28. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Часть 3.— М.: Наука, 1970.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел
$\mathbf{R}$ — множество вещественных чисел
$\mathbf{C}$ — множество комплексных чисел
$A+B$ — алгебраическая сумма множеств A и B (10)
$\widehat{A}$ — продолжение оператора A (52)
$\sqrt{A}$ — квадратный корень из оператора A (102)
$\|A\|$ — норма оператора A (46)
$|A|$ — модуль оператора A (102)
A^+ — положительная часть оператора A (102)
A^- — отрицательная часть оператора A (102)
A^* — оператор, сопряженный к A (77)
A^{-1} — оператор, обратный к A (58)
A_l^{-1} — оператор, левый обратный к A (59)
A_r^{-1} — оператор, правый обратный к A (59)
C, L_p — пространства непрерывных функций (13, 14)
C^k — пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций (13)
C — пространство сходящихся числовых последовательностей (13)
C_0 — пространство сходящихся к нулю числовых последовательностей (13)
C^m, E^m, l^m, l_p^m — пространства числовых столбцов (12)
$\operatorname{diam} A$ — диаметр множества A (9)
∂A — граница множества A (11)
$E(t, x, p, x')$ — функция Вейерштрасса (196)
$F_k x^k$ — k-степенной оператор (128)
$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — k-линейный оператор (127)
$G(s, t)$ — функция Грина (123)
H — гильбертово пространство (26)
H^1, H^m — пространства Соболева (34, 182)
I — тождественный оператор (51)
K — пространство финитных функций (13)
$K(s, t)$ — ядро интегрального уравнения (114)
L_1, L_2, L_p — пространства Лебега (33, 34)
$L \oplus M$ — прямая сумма подпространств L и M (10)
$\mathscr{L}(X)$, $\mathscr{L}(X, Y)$ — пространства ограниченных линейных операторов (51)
l_1, l_2, l_p — пространства числовых последовательностей (12, 13)
M' — множество предельных точек для множества M (9)
$\overline{M}$ — замыкание множества M (9)
$M^\perp$ — ортогональное дополнение к множеству M (26)
$M[a, b]$ — пространство ограниченных функций (13)
m — пространство числовых последовательностей (13)

$N(A)$ — множество нулей (ядро) оператора (46)
$R_\lambda(A)$ — резольвента оператора (107)
$r_\sigma(A)$ — спектральный радиус оператора (107)
$S_r(x_0)$ — открытый шар с центром в x_0 радиуса r (9)
$\bar{S}_r(x_0)$ — замкнутый шар с центром в x_0 радиуса r (9)
$V[a, b]$ — пространство функций с ограниченной вариацией (14)
$\overset{b}{\underset{a}{V}}\, x(t)$ — полная вариация функции (14)
X/L — факторпространство (25)
X^* — сопряженное пространство (65)
X^{**} — второе сопряженное пространство (74)
$X+Y$ — прямая сумма пространств (62)
$\|x\|$ — норма элемента (9)
(x, y) — скалярное произведение (26)
$\langle x, f\rangle$ — значение функционала f на элементе x (65)
$x \perp y$ — ортогональные элементы (26)
$\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — определитель Грама (27)
$\delta F(x_0; h)$ — первая вариация оператора (186)
$\delta(H)$ — множество самосопряженных операторов (102)
ρ_u — радиус сходимости (128)
$\rho(A)$ — резольвентное множество (107)
$\rho(x, y)$ — метрика, расстояние между точками (9, 43)
$\sigma(A)$ — спектр оператора (107)
$\sigma(X)$, $\sigma(X, Y)$ — множество вполне непрерывных операторов (88, 89)

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксиома треугольника 43
Аналитическая оператор-функция 108
Аппроксимация 151, 155

Биортогональные системы 99

Вариационная задача с подвижными границами 188
Вариация оператора 186
Вложение нормированных пространств 22
Вторая производная оператора 128

Гиперплоскость 65
Граница множества 11
График линейного оператора 62

Диаметр множества 9
Дифференциал Гато 186
— Фреше 127

Задача корректная 116
— некорректная 116
Замыкание 9

Изометричные пространства 22
Изоморфные пространства 22
Изопериметрическая задача 189
Индекс оператора 96
Интеграл Лебега 33
— Стилтьеса 70
Интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода 114
— — — 2-го рода 116
— — Фредгольма 1-го рода 114
— — — 2-го рода 116
Интегральный оператор Фредгольма 115
Интерполяционный многочлен Лагранжа 41
— сплайн 164
Итерации 136

Квазирешение 93
Конечный подъем 94
— спуск 95

Коэффициент сжатия 136
Кратность характеристического корня 115

Линейно независимая система 27
Локальный максимум 186
— минимум 186
— экстремум 186

Метод Галеркина 178
— наименьших квадратов 172
— регуляризации 116
— Ритца 173
Метрика 43
Многообразие аффинное 10
— линейное 10
Множество бикомпактное 81
— всюду плотное 10
— выпуклое 10
— замкнутое 9, 43
— компактное 81
— локально компактное 82
— меры нуль 33
— нигде не плотное 10
— нулей оператора 46
— ограниченное 9
— открытое 9, 43
— равномерно ограниченное 81
— равностепенно непрерывное 81
— слабо замкнутое 76

Наклон поля 196
Неподвижная точка 136
Неравенство Птолемея 28
— Коши — Буняковского 26
Норма k-линейного оператора 128
— ограниченного линейного оператора 46
— элемента 9
Нормы невырожденные 153
— согласованные 153

Область значений оператора 46
— определения оператора 46
Обобщенная производная 34, 182
Обобщенное решение краевой задачи 182
Оператор 48
— аналитический 129
— Гильберта — Шмидта 95
— деминепрерывный 178
оператор, дифференцируемый в точке в смысле Фреше 127
— замкнутый 62
— возрастающий 178
— левый обратный 59
— линейный 46
— — вполне непрерывный 88
— k-линейный 127
— — ограниченный 127
— — симметрический 128
— монотонный 177
— нелинейный вполне непрерывный 127
— неотрицательный 102
— непрерывно обратимый 58
— непрерывный 46, 127
— — в точке 46, 127
— нерастягивающий 142
— неявный 146
— нётеров 96
— нормально разрешимый 96
— нормальный 106
— обратный 58
— ограниченный 46, 127
— ортогонального проектирования 57
— правый обратный 59
— проектирования 57
— самосопряженный 102, 123
— — неотрицательный 102
— сжимающий 136
— симметрический 123
— — неотрицательный 123
— сильно монотонный 178
— сопряженный 77
— k-степенный 128
— строго монотонный 177
— сужения 151
— тождественный 51
— унитарный 106
— фредгольмов 96
— Штурма — Лиувилля 123
— ядерный 96
Определитель Грама 27
Ортогонализация 27
Ортогональная система 27
— — многочленов Чебышева — Лагерра 31
Ортогональный базис 27
Ортонормированная система 27
Отображение непрерывное 10
— — в точке 10
— равномерно непрерывное 10
Отрезок 10
Оценка априорная 156

Параметр регуляризации 116
Подпространство 10
Покрытие множества 81
Поле экстремалей 196
Полная вариация функции 14
Полюра 71
Полярное разложение 107
Пополнение 22
Порядок аппроксимации 151, 152
— точности приближенной схемы 152
Последовательность слабо ограниченная 74
— — фундаментальная 74
Предельная точка 9
P-предельная точка 171
Продолжение оператора 52

Проекция элемента 27
Производная Гато 186
— Фреше 127
Пространство банахово 22
— гильбертово 26
— евклидово 26
— Лебега 33
— линейное нормированное 9
— метрическое 43
— ограниченных линейных операторов 51
— полное 22
— рефлексивное 74
— сеточное 153
— Соболева 34, 182
— сопряженное 65
— строго нормированное 10
— унитарное 26
Прямая сумма пространств 62

Радиус сходимости 128
Разностная схема 158
Расстояние 43
— между множествами 9
— от точки до множества 9
Регулярная точка 107
Резольвента 107
Резольвентное множество 107
Ряд Неймана 141
— Тейлора 129
— Фурье 27

Сингулярные числа 114
Скалярное произведение 26
Собственная функция ядра 115
Собственное значение 107
— поле 195
Собственный вектор 107
Спектр оператора 107
Спектральный радиус 107
Сплайн интерполяционный 164
— кубический 167
— линейный 165
Сумма алгебраическая 10
— прямая 10
Сфера 9
Схема Галеркина 170
— наименьших квадратов 172
— приближенная 151
Сходимость 10, 43
— в среднем 33
— почти всюду 33
— приближенной схемы 152
— равномерная 51
— сильная 51
— слабая 73
— *-слабая 74
T-сходимость 151
— в среднем 154
— равномерная 154
ε-сеть 81

Тождество Аполлония 28

Угловая точка 188
Угол между элементами 26
Уравнение Эйлера 187
— Эйлера — Пуассона 187

Уравнение Якоби 196
Уравнения 1-го рода 89
— 2-го рода 89
Условие аппроксимации 151
— Лежандра 196
— устойчивости 152
Условия Вейерштрасса — Эрдмана 188
— трансверсальности 188
Устойчивость 152

Факторпространство 25
Фундаментальная последовательность 22
Функционал 65
— выпуклый 201
— линейный 65
— полунепрерывный снизу 201
— слабо полунепрерывный снизу 201
Функция Вейерштрасса 196
— Грина 123
—, интегрируемая по Лебегу 33
— неявная 146
— с ограниченной вариацией 14

Характеристическое число ядра 115

Центр пучка 196
Центральное поле 196

Число дефектное 96
— нулей 96
— обусловленности 59

Шар замкнутый 9, 43
— открытый 9, 43

Эквивалентные нормы 22
Экстремаль 187
Экстремум функционала 186
— — сильный 167
— — слабый 187
Элемент наилучшего приближения 37

Ядро интегрального оператора 114
— оператора 46