Домашнее задание от 35-ого дня карантина

Задача 18.2. Доказать, что оператор $A \colon L_2[0, 1] \to L_2[0, 1],$

$$(Ax)(t) = tx(t)$$

является неотрицательным и самосопряженным.

Решение: Для любых x, y

$$\langle Ax, y \rangle = \int_{0}^{1} tx(t)y(t)dt = \langle x, Ay \rangle.$$

$$\langle Ax, x \rangle = \int_{0}^{1} tx^{2}(t)dt \geqslant 0.$$

Задача 18.3. Доказать, что оператор $A: L_2[0, 1] \to L_2[0, 1],$

$$(Ax)(t) = \int_{0}^{1} x(s)e^{s+t}ds$$

является неотрицательным и самосопряженным.

Решение: Ядро интегрального оператора симметрично, следовательно, он является самосопряженным. Покажем неотрицательность:

$$\langle Ax, x \rangle = \int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{1} x(s)e^{s+t}ds \right) x(t)dt = \left(\int_{0}^{1} x(t)e^{t}dt \right)^{2} \geqslant 0$$

Задача 18.16. Последовательность самосопряженных операторов A_n сильно сходится к A. Доказать, что A является самосопряженным.

Решение: Заметим, что

$$\langle A_n x, y \rangle \to \langle A x, y \rangle,$$

так как $\langle (A_n-A)x,\,y\rangle\leqslant \|A_n-A\|\,\|x\|\,\|y\|\to 0.$

С другой стороны имеем

$$\langle x, A_n y \rangle \to \langle x, Ay \rangle,$$

Но так как эти последовательности совпадают, $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$.

Задача 18.17. Последовательность самосопряженных неотрицательных операторов A_n сильно сходится к A. Доказать, что $A \geqslant 0$.

Решение:

$$\langle A_n x, x \rangle \to \langle Ax, x \rangle$$

Но так как $\langle A_n x, x \rangle \ge 0$, то и $\langle Ax, x \rangle \ge 0$, что и требовалось.

Задача 18.21. Пусть $P \in L(\mathbb{H}), P^2 = P$. Доказать эквивалентность утверждений

- (а) Р является самосопряженным.
- (b) $PP^* = P^*P$
- (c) $\operatorname{im} P = \ker^{\perp} P$
- (d) $\langle Px, x \rangle = ||Px||^2 \ \forall x \in \mathbb{H}$

Решение: Эквивалентность (a) и (b) следует из теоремы 1 семинара. (На самом деле (b) \Rightarrow (a) не следует из этой теоремы, но мне лень расписывать, для доказательства можно использовать разложение $\mathbb{H} = \ker P \oplus \operatorname{im} P^*$)

 $(a) \Rightarrow (c)$, так как

$$\operatorname{im} P = \ker^{\perp} P^* = \ker^{\perp} P.$$

 $(a) \Rightarrow (d)$, поскольку

$$\langle Px, Px \rangle = \langle P^2x, x \rangle = \langle Px, x \rangle.$$

Покажем, что из (c) следует (a). В силу (c) имеем $\mathbb{H}=\ker P\oplus \operatorname{im} P$, а также $\ker P=\ker P^*$. Тогда для любых x,y

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in \ker P, \ x_2 \in \operatorname{im} P \ (\exists z_2 \colon Pz_2 = x_2),$$

$$y = y_1 + y_2$$
, $y_1 \in \ker P$, $y_2 \in \operatorname{im} P$ $(\exists w_2 : Pw_2 = y_2)$,

$$\langle Px, y \rangle = \langle Px_2, y \rangle = \langle x_2, P^*y \rangle = \langle x_2, P^*y_2 \rangle = \langle P^2z_2, y_2 \rangle = \langle Pz_2, y_2 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle.$$

Аналогично показывается $\langle x, Py \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle$, откуда следует самосопряженность P. Докажем, наконец, (d) \Rightarrow (a).

$$||Px||^2 = \langle Px, x \rangle = \langle x, P^*x \rangle = \{||Px||^2 \in \mathbb{R}\} = \langle P^*x, x \rangle,$$

то есть для любых x верно $\langle (P-P^*)x, x \rangle = 0$ откуда следует (в комплексном пространстве), что $P=P^*$.

Задача 18.34. Пусть A — самосопряженный неотрицательный оператор. Доказать, что при любом $\lambda > 0$ оператор $A + \lambda I$ непрерывно обратим.

Peшение: Данный оператор является самосопряженным как сумма двух самосопряженных, при этом

$$\langle (A + \lambda I)x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle + \lambda \langle x, x \rangle > 0, \quad x \neq 0,$$

откуда следует положительная определенность оператора. Отсюда же следует, что

$$\ker A = \{0\}, \quad \operatorname{im} A = \ker^{\perp} A = \mathbb{H},$$

а следовательно, оператор обратим. Непрерывность обратного оператора следует из теоремы Банаха.

задача 18.37. Пусть неотрицательные самосопряженные операторы A, B перестановочны. Доказать, что $AB \geqslant 0$.

Решение: По теореме 18.6. оператор \sqrt{A} является перестановочным с \sqrt{B} тогда и только тогда, когда A является перестановочным с \sqrt{B} , что выполнено в силу перестановочности A и B. Таким образом $\sqrt{A}\sqrt{B} = \sqrt{B}\sqrt{A}$.

$$\langle ABx,\, x\rangle = \langle \sqrt{A}Bx,\, \sqrt{A}x\rangle = \langle B\sqrt{A}x,\, \sqrt{A}x\rangle = \langle \sqrt{B}\sqrt{A}x,\, \sqrt{B}\sqrt{A}x\rangle \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

Задача 18.41. В E^2 задан оператор

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} x.$$

Показать, что он является самосопряженным и неотрицательным. Найти \sqrt{A} . Pewenue: Самосопряженность следует из симметричности матрицы оператора, положительная определенность из критерия Сильвестра. Пусть $B=\sqrt{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Из матричного уравнения $B^2=A$ получаем систему

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2\\ ab + bc = 3\\ b^2 + c^2 = 5 \end{cases}$$

Отсюда легко находятся $a=b=1,\;c=2,$ и квадратный корень имеет матрицу $\sqrt{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$