N1.

(1) $A=\begin{pmatrix}0 & 1.2\\ 0.9 & 0\end{pmatrix}$

$\det|E-A| = -0.08 < 0 \Rightarrow$ не продуктивна

Неразложима, т.к. при единственной перест. $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ перех. в $\begin{pmatrix}0 & 0.9\\ 1.2 & 0\end{pmatrix}$

Так как $\begin{pmatrix}0 & +\\ + & 0\end{pmatrix}^n = \begin{cases}\begin{pmatrix}+ & 0\\ 0 & +\end{pmatrix}, & n \text{ чет}\\ \begin{pmatrix}0 & +\\ + & 0\end{pmatrix}, & n \text{ нечет}\end{cases}$, то неустойчива $(\forall n \cdot A^n \not> 0)$

\+ обозн. полож. эл-т

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0.9 & 0.5\end{pmatrix}$

$[D]_{11} = 0 \Rightarrow$ непродуктивна

При перест. $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ получ. $\left(\begin{array}{c|c}0.5 & 0.9\\ \hline 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow$ разложима

Так как $\begin{pmatrix}+ & 0\\ + & +\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+ & 0\\ + & +\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}+ & 0\\ + & +\end{pmatrix}$, неустойчива

(3) $A=\begin{pmatrix}0.7 & 0.6\\ 0.9 & 0\end{pmatrix}$

$\det D = 0.3 - 0.54 = -0.24 < 0 \Rightarrow$ не прод.

Неразложима, т.к. нет нулей вне диагонали

$A^2 = \begin{pmatrix}+ & +\\ + & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+ & +\\ + & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}+ & +\\ + & +\end{pmatrix} > 0 \Rightarrow$ устойчива

(4) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$

$[D]_{11} = 0 \Rightarrow$ не продуктив.

Неразлож. (нет нулей вне диаг.)

Устойч. (см. (3)) $\Leftrightarrow$ не допуск. циклич. разлож. (критерий)

(5) $A=\left(\begin{array}{cc|c}0 & 1.1 & 0\\ 0.8 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0.3\end{array}\right)$ - разлож. по опред.

$D=\begin{pmatrix}1 & -1.1 & 0\\ -0.8 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0.7\end{pmatrix}$ $\quad \left.\begin{array}{l}\Delta_1 = 1 > 0\\ \Delta_2 = 1 - 1.1\cdot 0.8 > 0\\ \Delta_3 = 0.7\,\Delta_2 > 0\end{array}\right\} \Rightarrow$ продуктивна

$\begin{pmatrix}0 & + & 0\\ + & 0 & 0\\ 0 & 0 & +\end{pmatrix}^n = \begin{cases}\begin{pmatrix}+ & 0 & 0\\ 0 & + & 0\\ 0 & 0 & +\end{pmatrix}, & n \text{ четно}\\ \begin{pmatrix}0 & + & 0\\ + & 0 & 0\\ 0 & 0 & +\end{pmatrix}, & n \text{ нечетно}\end{cases} \Rightarrow$ неустойчива

№2 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

$\lambda(A) = 1$

$Ax_A = x_A \Rightarrow x_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\det(E-A) = 0 \Rightarrow$ не прод.

$A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ - разлож. по опр.

(как A_2)

$A^2 = \begin{pmatrix} + & 0 & + \\ 0 & + & + \\ 0 & 0 & + \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ 0 & 0 & + \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} + & 0 & + \\ 0 & + & + \\ 0 & 0 & + \end{pmatrix}$, --- $\Rightarrow$ неустойчива.

№3 $A \geq 0$

$s_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ $r_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$

$s = \max_{i=\overline{1,n}} s_i$, $r = \max_{j=\overline{1,n}} r_j$. Д-ть, что если $s<1$ или $r<1$, то A продукт.

Δ Пусть $s_i < 1$.

Рассм $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. ~~$[Ax]_i$~~ $[Dx]_i = 1 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 1 - s > 0$ $\forall i$,

т.е $\exists x \geq 0 : Dw > 0$ - продуктивность $\square$

№5. $A \geq 0$

A неразложима $\Leftrightarrow \forall i,j \ \exists t \geq 1: [A^t]_{ij} > 0$

Δ

$\Leftarrow$ Пусть A разложима.

Перестановкой приводим к виду
$$A = \begin{array}{c} \\ r \\ n-r \end{array} \begin{array}{cc} r & n-r \\ \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right] \end{array}$$

Для произв. $i > r$, $j \leq r$:

$\forall t \in \mathbb{N} \ [A^t]_{ij} = 0$ (из вида матрицы A) ?!

$\Rightarrow$ От противного: $\exists i,j: \ \forall t \geq 1 \ \underset{(*)}{[A^t]_{ij} = 0}$ ((i,j) удовл. (*))

$$A^t = (a_{ij}^{(t)})_{i,j=1}^n$$

$$[A^t]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(t-p)} a_{kj}^{(p)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(p)} a_{kj}^{(t-p)} = 0$$

$a_{ik}^{(t-p)} a_{kj}^{(p)} = 0 \quad \forall k = \overline{1,n} \qquad p = 1, \dots, t-1$

$a_{ik}^{(p)} a_{kj}^{(t-p)} = 0 \ \forall k = \overline{1,n}$

Пусть для нек. $k \ \exists p: \ a_{kj}^{(p)} > 0$

Тогда (i,k) удовл. (*):

$\forall t \quad [A^{t+p}]_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ik}^{(t)} \overset{>0}{a_{kj}^{(p)}} = 0 \Rightarrow a_{ik}^{(t)} = 0$

$J = \{k : (i,k)$ удовл. (*)$\}$ ($J \neq \emptyset$: $j \in J$) если $J = N$, то привод. к $\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A \\ \hline 0 \dots 0 & 0 \end{array}\right)$?!

$\forall k \in N \setminus J$ (k,j) удовл. (*).

Аналогичными рассуждениями $\forall j \in J \ \forall i \in N \setminus J$ (i,j) уд. (*)

т.е. $a_{ij} = 0$ - опред. разложимости. ?! $\square$

№4 A симметр. $A \geq 0$

A продукт. $\Leftrightarrow (E - A)$ полож. определена

Δ $D = E - A$

по критерию продукт. Δ

A продукт. $\Leftrightarrow$ все послед. главные минори положит. $\overset{\text{критерий Сильвестра}}{\Leftrightarrow}$ полож. опр $\square$