В общем виде

$$(1)\begin{cases} c_1x_1+c_2x_2\to\max \\ A_{11}x_1+A_{12}x_2\le b_1 \\ A_{21}x_1+A_{22}x_2=b_2 \\ x_1\ge 0 \end{cases}$$

Двойств. к (1):

$$(2)\begin{cases} b_1u_1+b_2u_2\to\min \\ A_{11}^*u_1+A_{21}^*u_2\ge c_1 \\ A_{12}^*u_1+A_{22}^*u_2=c_2 \\ u_1\ge 0 \end{cases}$$

№1

(a) $\begin{cases} c_1x_1+c_2x_2\to\max \\ A_1x_1+A_2x_2\le b \\ x_1\ge 0 \end{cases}$

$A_{21}=A_{22}=b_2=0$

$\begin{cases} bu_1\to\min \\ A_1^*u_1\ge c_1 \\ A_2^*u_1=c_2 \\ u_1\ge 0 \end{cases}$

$b\in\mathbb{R}^m,\quad u_1\in\mathbb{R}^m$

(b) $\begin{cases} c_1x_1+c_2x_2\to\max \\ A_1x_1+A_2x_2=b \\ x_1\le 0 \end{cases}$

$\sim\quad y_1=-x_1\quad y_2=x_2$

$\begin{cases} (-c_1)y_1+c_2y_2\to\max \\ (-A_1)y_1+A_2y_2=b \\ y_1\ge 0 \end{cases}$

$A_{11}=A_{12}=b_1=0$

$\begin{cases} bu_2\to\min \\ -A_1^*u_2\ge -c_1 \\ A_2^*u_2=c_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} c_1x_1+c_2x_2\to\min \\ A_1x_1+A_2x_2\ge b \end{cases}$ $\sim$ $\begin{cases} -cx\to\max \\ -Ax\le -b \end{cases}$

$\left(\begin{matrix} c_1=0 & c_2=-c \\ A_{11}=[\,] & A_{12}=-A \\ A_{21}=[\,] & A_{22}=b_2=0 \end{matrix}\right)$

$A=[A_1\,|\,A_2]\in\mathbb{R}^{m\times(n_1+n_2)}$

$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}$

$c=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}$

Двойств.:

$\begin{cases} -bu_1\to\min \\ +A^*u_1=+c \\ u_1\ge 0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} bu_1\to\max \\ A^*u_1=c \\ u_1\ge 0 \end{cases}$ $\left(\Leftrightarrow\ \begin{matrix} A_1^*u_1=c_1 \\ A_2^*u_1=c_2 \end{matrix}\right)$ $\quad u_1\in\mathbb{R}^m$

(d) $\begin{cases} c_1x_1+c_2x_2\to\max \\ A_1x_1+A_2x_2=b \end{cases}$

$\sim$ Аналог. прошлому

$\begin{cases} cx\to\max \\ Ax=b \end{cases}$

$A\in\mathbb{R}^{m\times(n_1+n_2)}$

$c\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}$

Двойственная

$\begin{cases} bu_2\to\min \\ A^*u_2=c \end{cases}$ $\left(\Leftrightarrow\ \begin{matrix} A_1^*u_2=c_1 \\ A_2^*u_2=c_2 \end{matrix}\right)$

N2.

$$\begin{cases} cx \to \max \\ A_1 x \le b_1 \\ A_2 x = b_2 \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 u_1 + b_2 u_2 \to \min \\ A_1^* u_1 + A_2^* u_2 \ge c \\ u_1 \ge 0 \end{cases}$$

$n_2 = 0$

N3

(a)
$$\begin{cases} \cancel{x_1} + 3x_2 + 5x_3 \to \max \\ 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 \le 13 \\ 10x_1 + 9x_2 + 11x_3 = 15 \\ x_1 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 13u_1 + 15u_2 \to \min \\ 7u_1 + 10u_2 \ge 1 \\ 9u_1 + 9u_2 = 3 \\ 11u_1 + 11u_2 = 5 \\ u_1 \ge 0 \end{cases} \qquad \cancel{u_1}, u_2 \in \mathbb{R}^1$$

$c_1 = (1)$ $\quad A_{11} = (7)$ $\quad A_{12} = (9\ 11)$ $\quad b_1 = (13)$

$c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad A_{21} = (10)$ $\quad A_{22} = (9\ 11)$ $\quad b_2 = (15)$

(b)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \max \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 7 \\ 8x_1 + 9x_2 - 10x_3 = 14 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7u_1 + 14u_2 \to \min \\ \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 9 \\ -6 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad c_2 = ()$

$A_{21} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 8 & 9 & -10 \end{pmatrix}$

$b_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}$

(c)
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max \\ -4x_1 - 5x_2 - 6x_3 \le -7 \\ 8x_1 + 9x_2 + 10x_3 \le 16 \\ x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -7u_1 + 16u_2 \to \min \\ \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ -4u_1 + 8u_2 = 3 \\ u_1 \ge 0, u_2 \ge 0 \end{cases}$$

$c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad c_2 = (3)$ $\quad b_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 16 \end{pmatrix}$

$A_{11} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ $\quad A_{12} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

№4 Сформулировать условия несовм. лин. неравенств.

Считаем, что все огран. нетривиальны

(а) $\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \le b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$

$c_1x_1 + c_2x_2 \to max$

(а) несовм. $\Leftrightarrow$

ЗЛП

$b_1u_1 + b_2u_2 \to min$

$\begin{cases} A_{11}^*u_1 + A_{21}^*u_2 \ge c_1 \\ A_{12}^*u_1 + A_{22}^*u_2 = c_2 \\ u_1 \ge 0 \end{cases}$

не имеет. реш $\forall c_1, c_2$

Идея: поставим ЗЛП, добавив $c_1x_1 + c_2x_2 \to max$

Построим двойственную задачу (2).

Утв. Система нетривиальных лин. ограничений несовместна $\Leftrightarrow$ $\forall c_1, c_2$ двойственная задача не имеет. решений.

(нетрив: $\exists x$, не удовл. ограничениям)

Δ $\Rightarrow$ следует из т. двойственности

$\Leftarrow$ Пусть $\forall c_1, c_2$ двойственная задача не имеет. реш. Два случая

1. $b_1u_1 + b_2u_2$ не ограничен на допуст. мн-ве

Тогда прямая задача не имеет реш, и, т.к. $b_1u_1 + b_2u_2 \ge c_1x_1 + c_2x_2$ для (x_1, x_2), (u_1, u_2), удовл. огранич., $c_1x_1 + c_2x_2$ не может уходить на ∞ $\Rightarrow$ огр. несовместны

2. Огранич. двойственной несовместны.

Тогда либо несовместны огр. прямой задачи,

либо $\sup\limits_{x \text{ уд. огр.}}(c_1x_1 + c_2x_2) = \infty$ $\forall c_1, c_2$

Но это невозможно, если ограничения нетривиальны. $\square$

(b) $\begin{cases} A_1x_1 + A_2x_2 = b \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$ несовм. $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} bu_2 \to min \\ A_1^*u_2 \ge c_1 \\ A_2^*u_2 = c_2 \end{cases}$ не им. решений $\forall c_1, c_2$

$c_1x_1 + c_2x_2 \to max$ $\quad A_1, A_2 \ne 0$

(c) $\begin{cases} A_1x \le b_1 \\ A_2x = b_2 \end{cases}$ несовм $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} b_1u_1 + b_2u_2 \to min \\ A_1^*u_1 + A_2^*u_2 = c \\ u_1 \ge 0 \end{cases}$