



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по самому важному предмету

«Практикум в MATLAB»

Студент 315 группы
Д. М. Сотников

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2019

1 Постановка задачи

Для функции $f(\cdot)$ нужно найти аппроксимацию её преобразования Фурье при помощи быстрого преобразования Фурье и сравнить её с аналитическим решением в случае, когда вычисление этого решения не вызывает затруднений.

Для решения поставленной задачи необходимо реализовать функцию `plotFT`, принимающую на вход следующие параметры:

- `hFigure` — handle фигуры, на которую будет осуществляться вывод графиков.
- `fHandle` — функция $f(\cdot)$, для которой нужно посчитать преобразование Фурье.
- `fftHandle` — handle функции, задающей образ Фурье функции $f(\cdot)$, или []. В последнем случае выводится только численная аппроксимация.
- `step` — шаг дискретизации.
- `inpLimVec` — вектор $[a, b]$, задающий размеры окна для функции $f(\cdot)$.
- `outLimVec` — отрезок $[c, d]$ для вывода графика преобразования Фурье.

Протестировать корректность работы программы на следующих функциях

1. $f(t) = te^{-t^2}$;
2. $f(t) = \frac{\cos(t) - e^{-|t|}}{t}$;
3. $f(t) = \frac{e^{-2|t|}}{1 + \cos^2(t)}$;
4. $f(t) = \frac{2}{3 + 4t^4}$;

Для первых двух вычислить их образ Фурье аналитически.

2 Алгоритм решения

Для вычисления образа Фурье $F(\lambda)$ функции $f(\cdot)$, заданной на окне $[a, b]$, продолжим её на всю прямую с периодом $(b - a)$:

$$f_0(x) = f((x - a) \bmod (b - a) + a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

При дискретизации функции f её образ становится периодической функцией с периодом $\frac{2\pi}{\Delta}$, поэтому достаточно получить её значения на одном периоде.

Построим сетку $[-\frac{\Delta}{2}, (b - a) - \frac{\Delta}{2}]$ размера N с шагом Δ и найдем на ней значения функции f_0 , то есть отсчёты $f_0[n]$, $n = 1, \dots, N$, к которым с помощью функции `fft` применим дискретное преобразование Фурье

$$F[k] = \Delta \sum_{n=1}^N f[n] \exp\left(\frac{-2\pi i (n-1)(k-1)}{N}\right), \quad k = 1, \dots, N.$$

Полученные отсчёты задают приближённые значения функции $F(\lambda)$ на её периоде $[0, \frac{2\pi}{\Delta}]$ с шагом $\Delta_\lambda = \frac{2\pi}{b-a}$.

Для заданного отрезка $[c, d]$ найдем значения образа на нём при помощи периодического продолжения $F[k]$. В случае, когда отрезок не задан, график выводится на симметричном отрезке $[-\frac{\pi}{\Delta}, \frac{\pi}{\Delta}]$.

3 Вычисление преобразования Фурье некоторых функций

В этом разделе приводятся вычисления образов Фурье первых двух функций из постановка задачи.

1. $f(t) = te^{-t^2}$

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} e^{-i\lambda t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-(t+\frac{i\lambda}{2})^2 - \frac{\lambda^2}{4}} dt = \left\{ \xi = t + \frac{i\lambda}{2} \right\} = \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{-\xi^2} d\xi - \frac{i\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \left\{ \begin{array}{l} \text{функция под} \\ \text{первым интегралом} \\ \text{нечётна} \end{array} \right\} = -\frac{i\sqrt{\pi}\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}. \end{aligned} \quad (1)$$

2. $f(t) = \frac{\cos(t) - e^{-|t|}}{t}$ Поскольку $f(t)$ нечётна, её образ будет чисто мнимым, и

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\lambda t) dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(\lambda t)}{t} dt - 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos t \sin(\lambda t)}{t} dt = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(\lambda t)}{t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin((\lambda-1)t) + \sin((\lambda+1)t)}{t} dt = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(\lambda t)}{t} dt - \frac{\pi}{2} (\operatorname{sgn}(\lambda-1) + \operatorname{sgn}(\lambda+1)). \end{aligned} \quad (2)$$

Вычислим оставшийся интеграл $I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(\lambda t)}{t} dt$ с помощью дифференцирования по параметру:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\lambda} &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(\lambda t) dt = -e^{-t} \cos(\lambda t) \Big|_0^{+\infty} - \lambda \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(\lambda t) dt = \\ &= -1 + e^{-t} \sin(\lambda t) \Big|_0^{+\infty} - \lambda^2 \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(\lambda t) dt = -1 - \lambda^2 \frac{dI}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда $\frac{dI}{d\lambda} = -\frac{1}{1+\lambda^2}$, $I = -\arctan \lambda + c$, и, так как $I(0) = 0$, интеграл равен

$$I = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \lambda - \arctan \lambda.$$

а образ Фурье функции $f(t)$ имеет вид

$$F(\lambda) = 2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \lambda - \arctan \lambda \right) - \frac{\pi}{2} (\operatorname{sgn}(\lambda-1) + \operatorname{sgn}(\lambda+1)). \quad (4)$$

4 Визуализация результатов

Ниже представлены графики преобразований Фурье для функций $f(t)$ из постановки задачи.

1. $f(t) = te^{-t^2}$

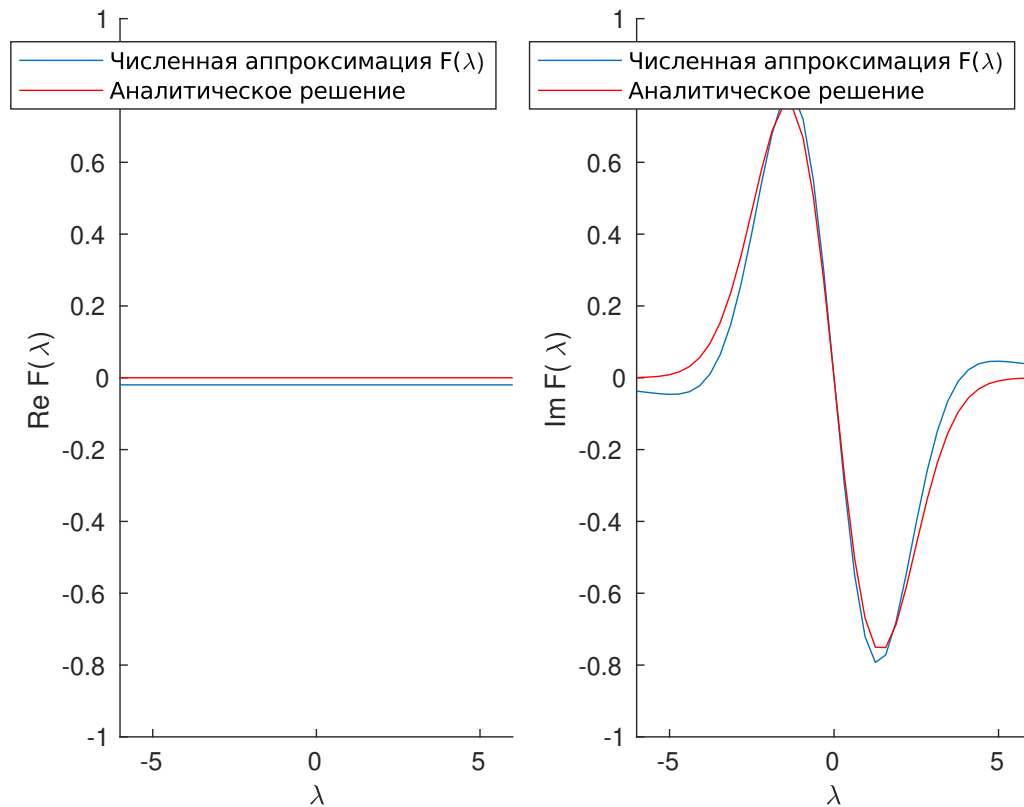


рис. 1 $\Delta = 0.2$, $b = -a = 10$.

Численная аппроксимация расходится с аналитическим решением из-за выбора маленького значения Δ .

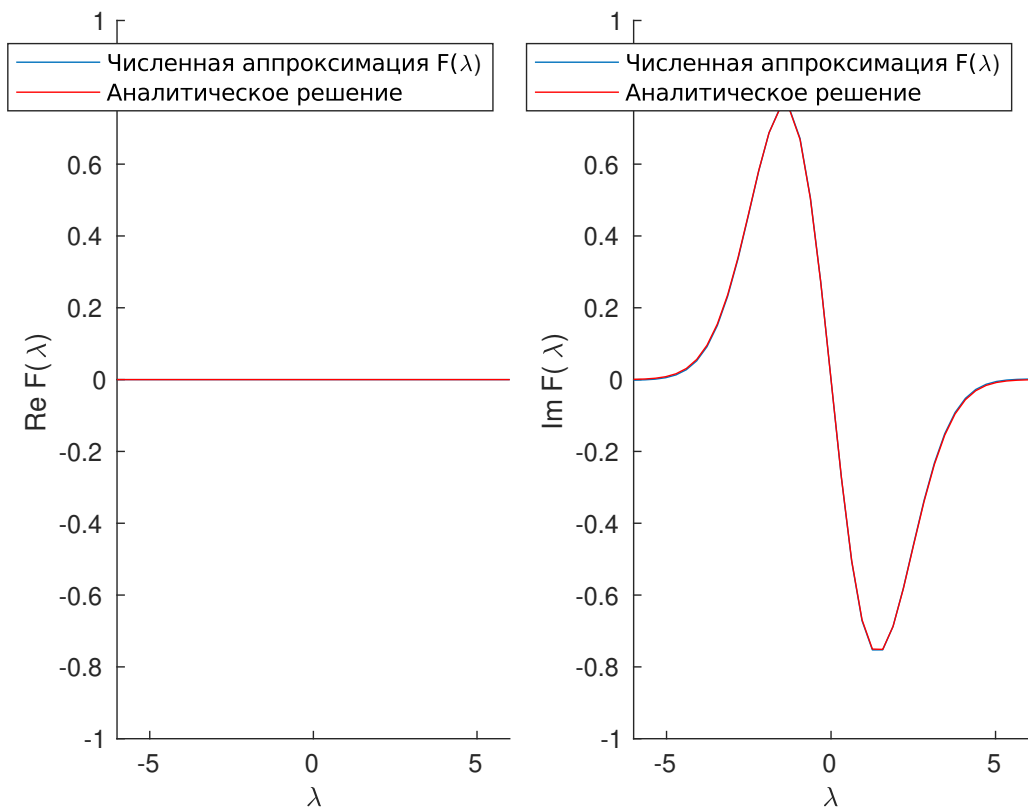


рис. 2 $\Delta = 0.01$, $b = -a = 10$.

При уменьшении Δ алгоритм дает точное приближение образа Фурье.

$$2. f(t) = \frac{\cos(t) - e^{-|t|}}{t}$$

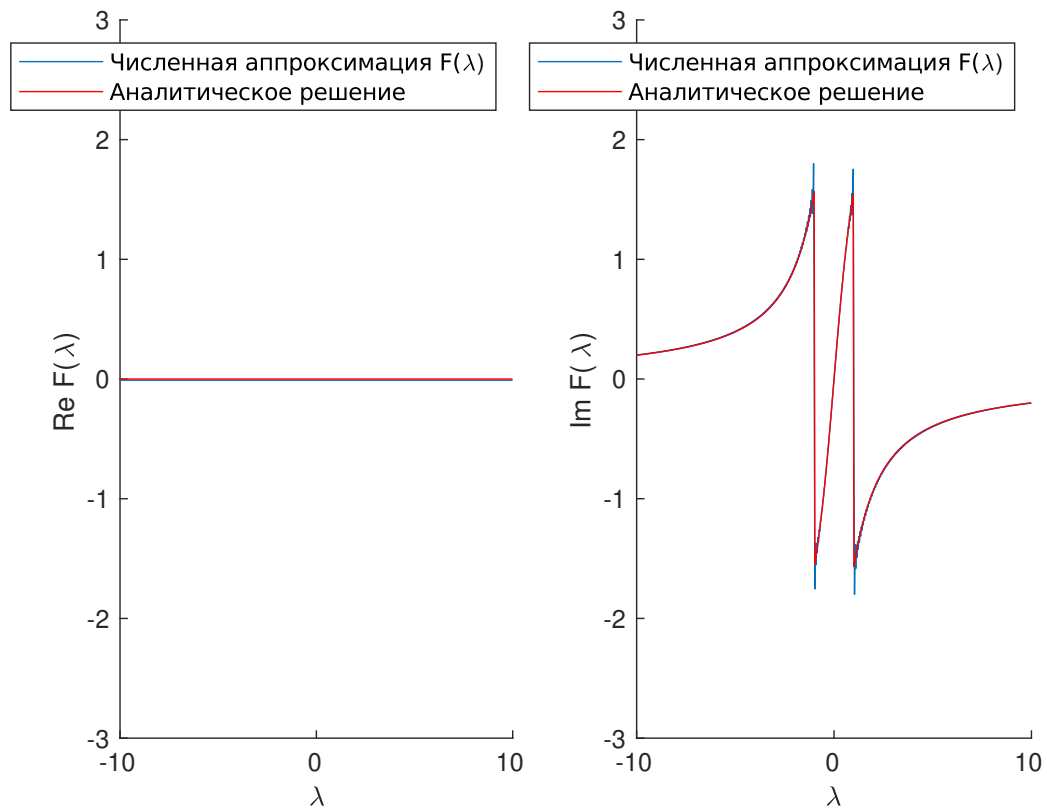


рис. 3 $\Delta = 0.01$, $b = -a = 100$.

При большом окне и маленькой величине шага дискретное преобразование Фурье дает точную аппроксимацию всюду, кроме точек разрыва функции-образа, в окрестности которой наблюдается эффект ряби.

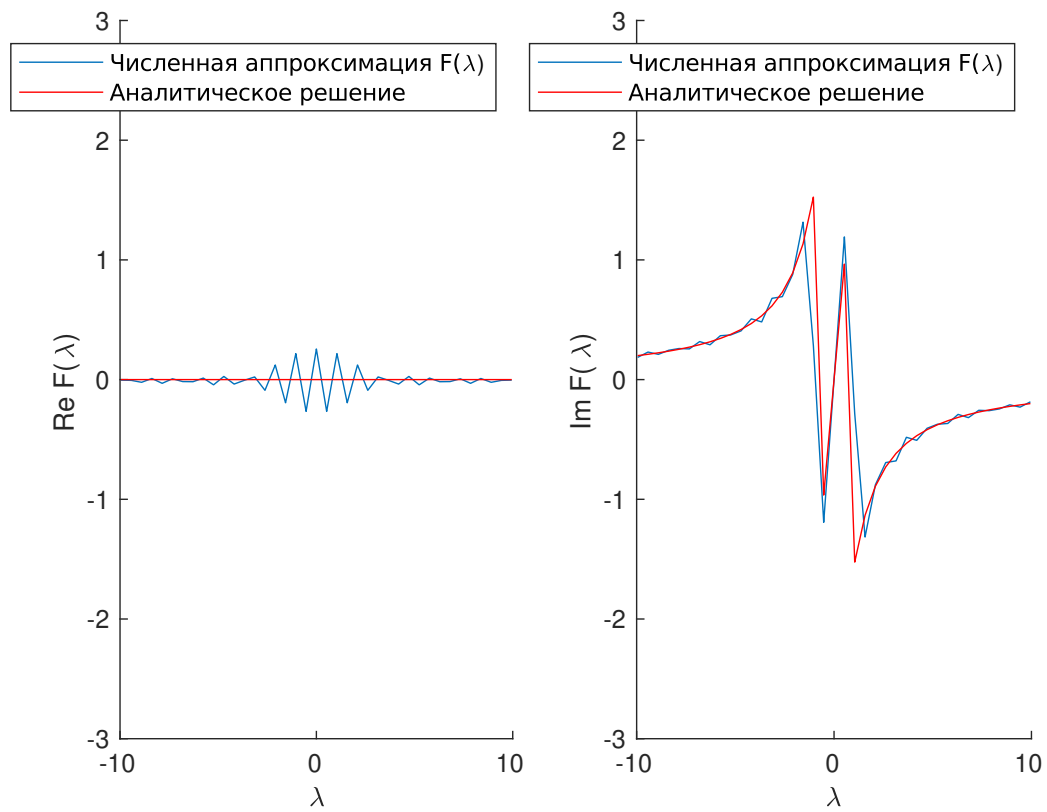


рис. 4 $\Delta = 0.01$, $a = -5$, $b = 7$.

При уменьшении окна ошибка увеличивается, и появляются возмущения в вещественной части численной аппроксимации, связанные с несимметричностью окна.

3. $f(t) = \frac{e^{-2|t|}}{1+\cos^2(t)}$

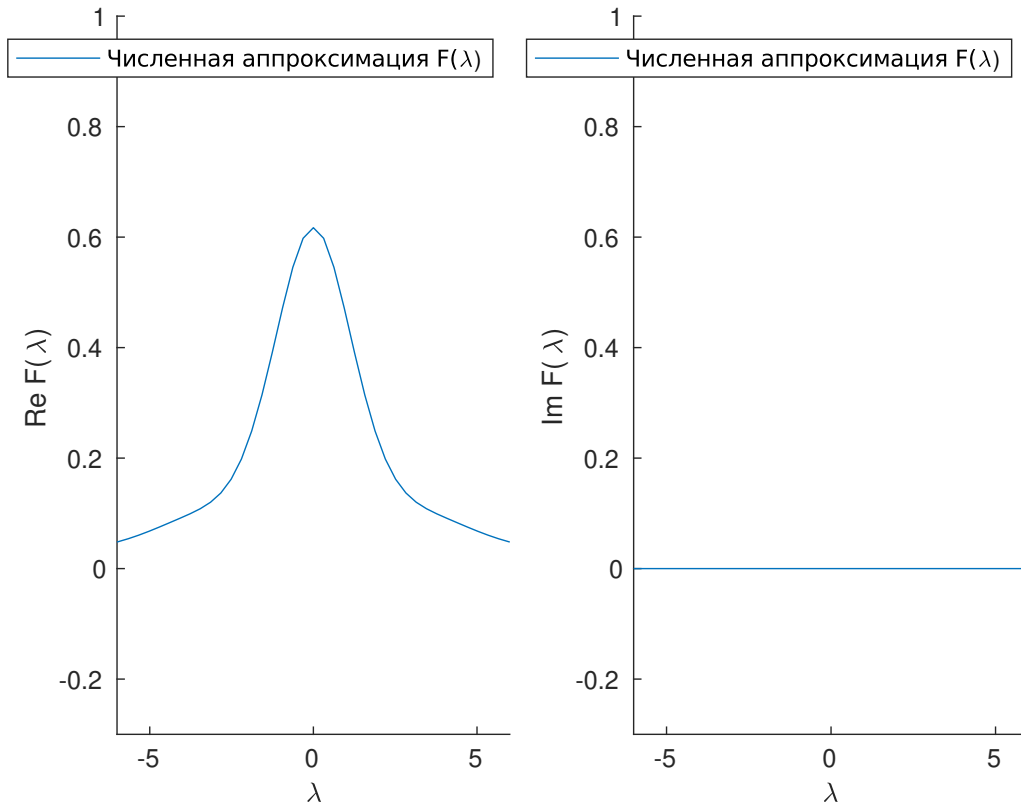


рис. 5 $\Delta = 0.05$, $b = -a = 10$.

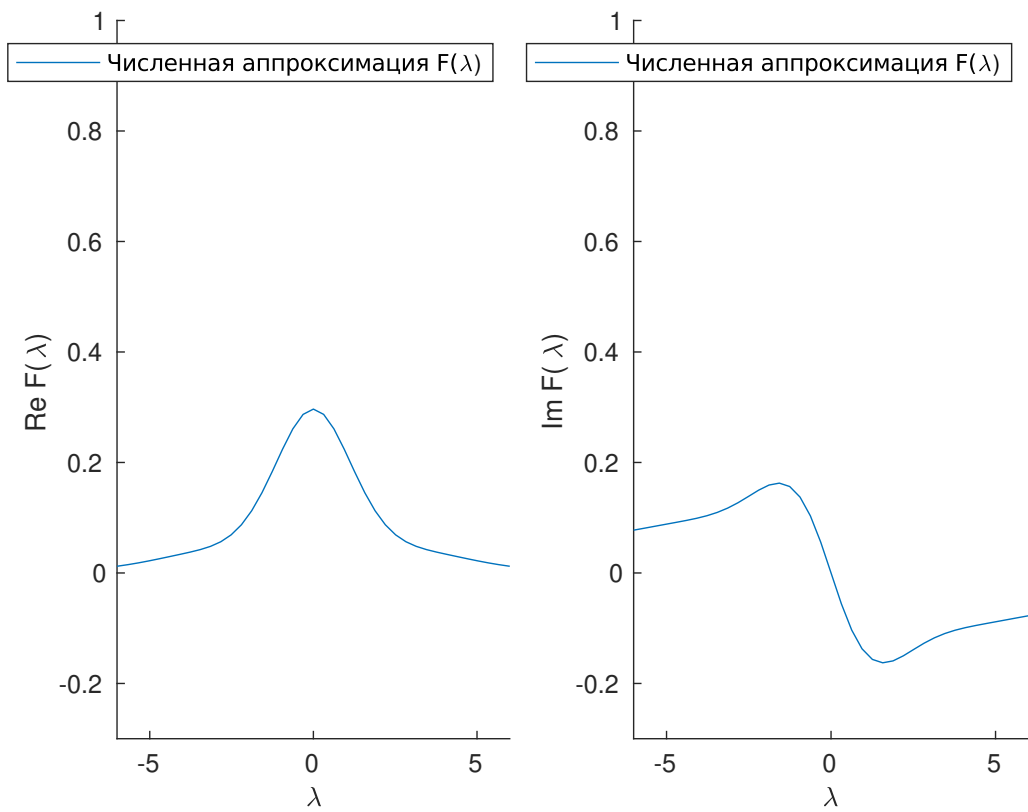


рис. 6 $\Delta = 0.05$, $a = 0$, $b = 20$.

В силу выбора несимметричного окна функция образа перестает быть чисто мнимой.

4. $f(t) = \frac{2}{3+4t^4}$

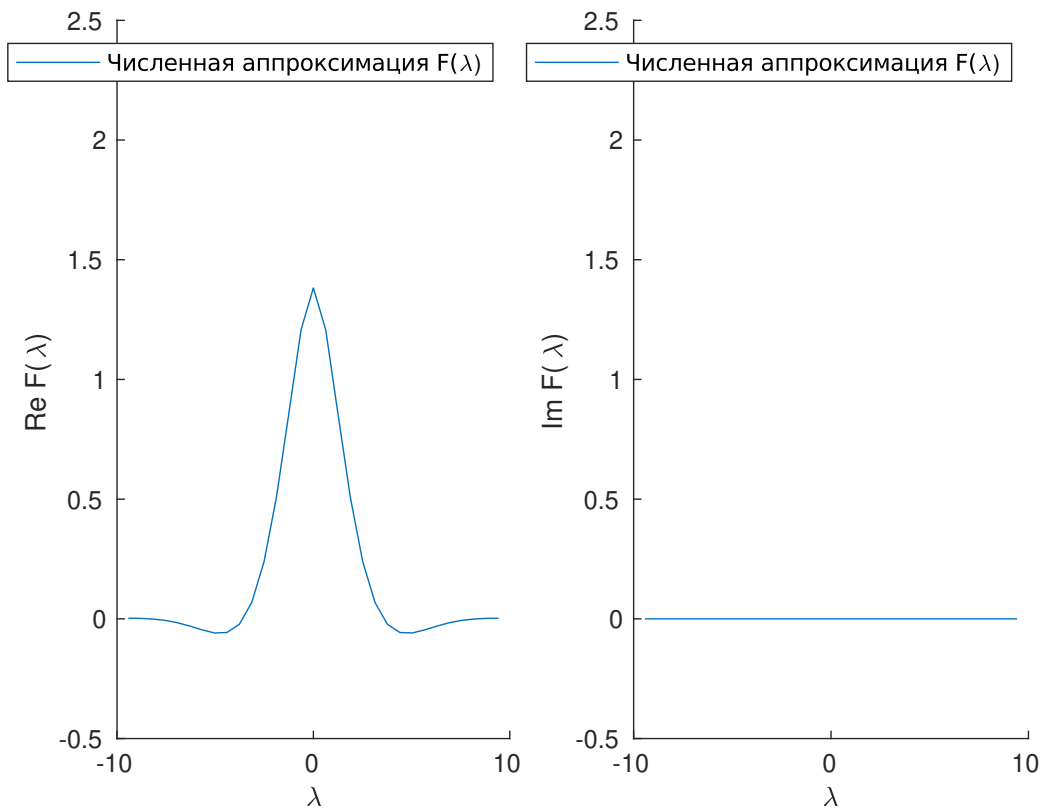


рис. 7 $\Delta = 0.01$, $b = -a = 5$.

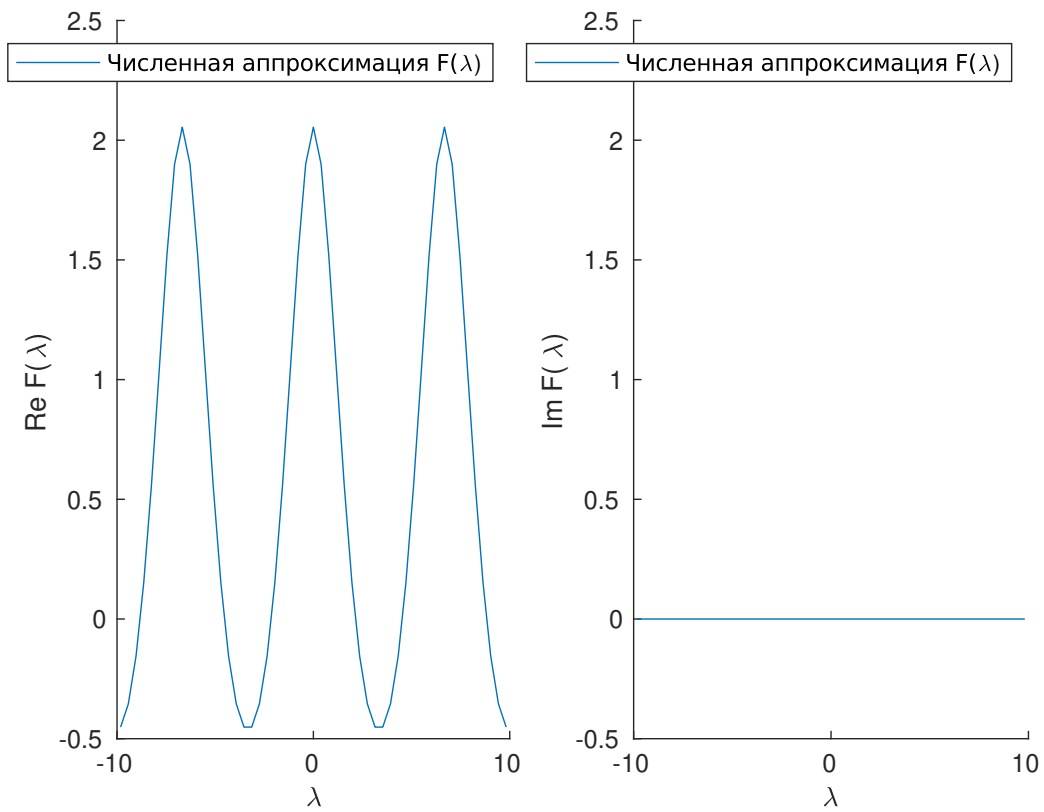


рис. 8 $\Delta = 1$, $b = -a = 8$.

Из-за выбора большого шага дискретизации уменьшается период образа.

5 Эффект наложения спектра

Пример наложения спектра для образа Фурье функции $f(t) = te^{-t^2}$. При больших размерах окна ($b - a = 14$) существенного наложения не происходит. При уменьшении размеров окна появляется наложение, и сумма образов портится.

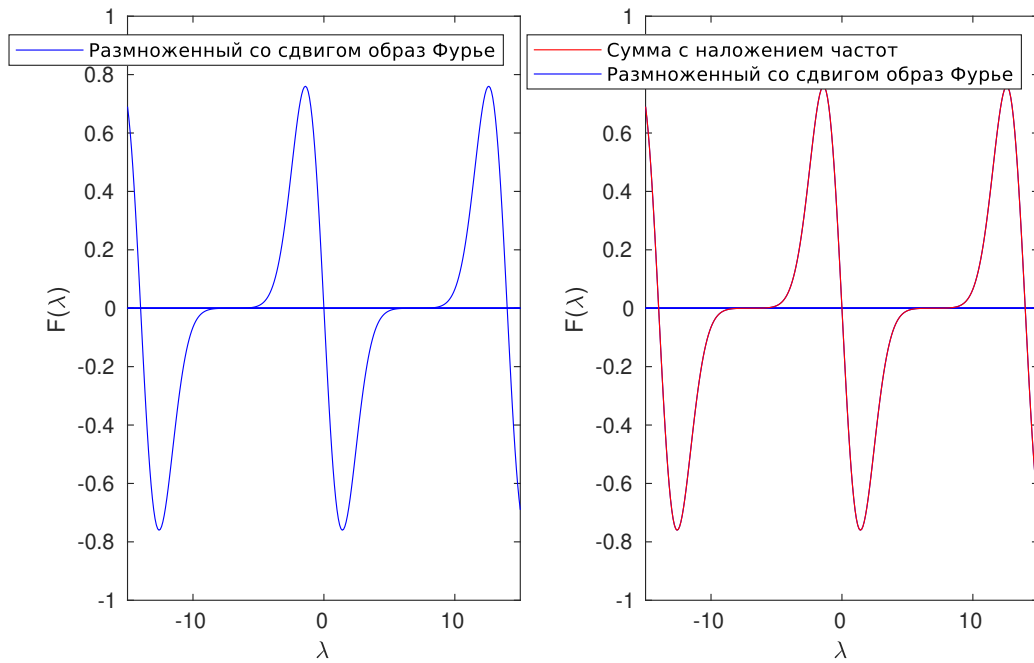


рис. 9 $b - a = 14$

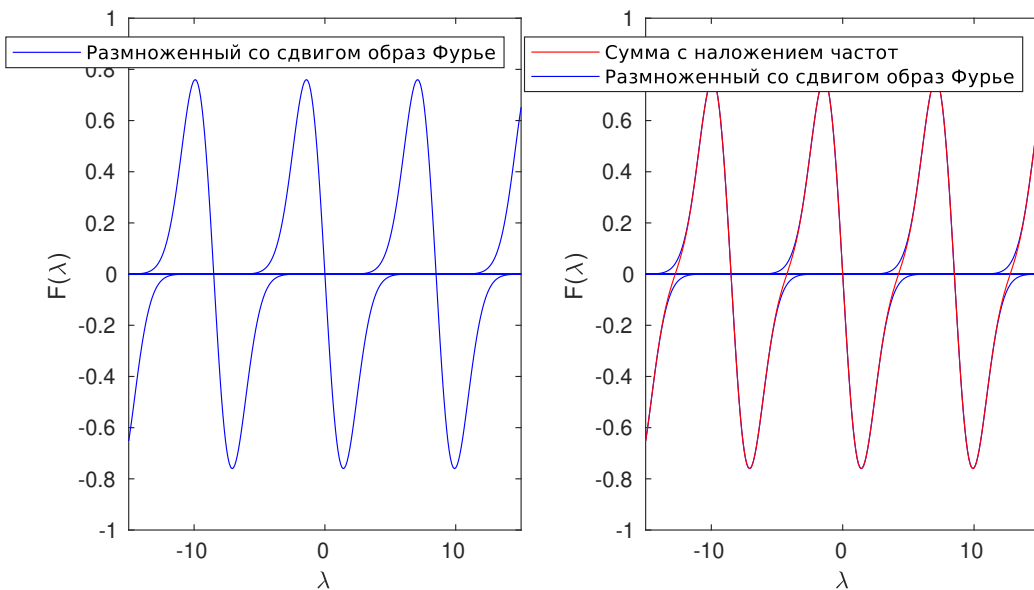


рис. 10 $b - a = 8.5$

6 Эффект ряби

Эффект ряби можно продемонстрировать на примере функции $f(t) = \frac{\cos(t) - e^{-|t|}}{t}$, образ Фурье которой является разрывной функцией.

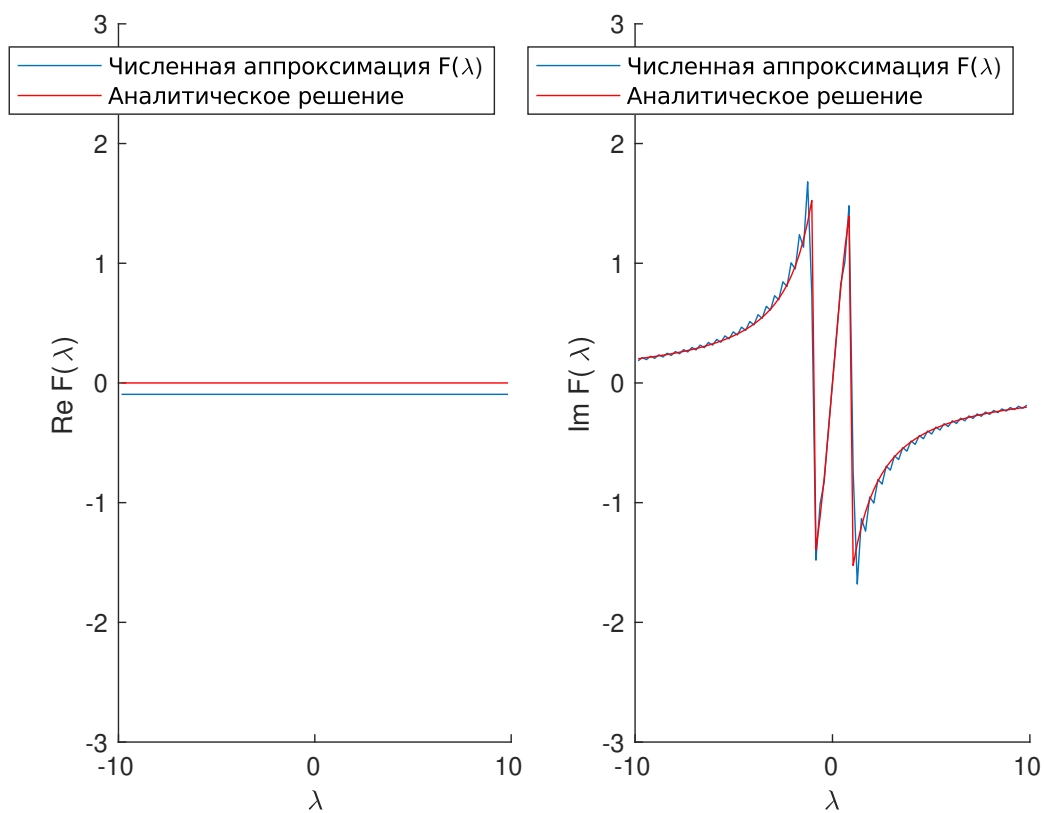


рис. 11 $\Delta = 0.1$, $b = -a = 15$.

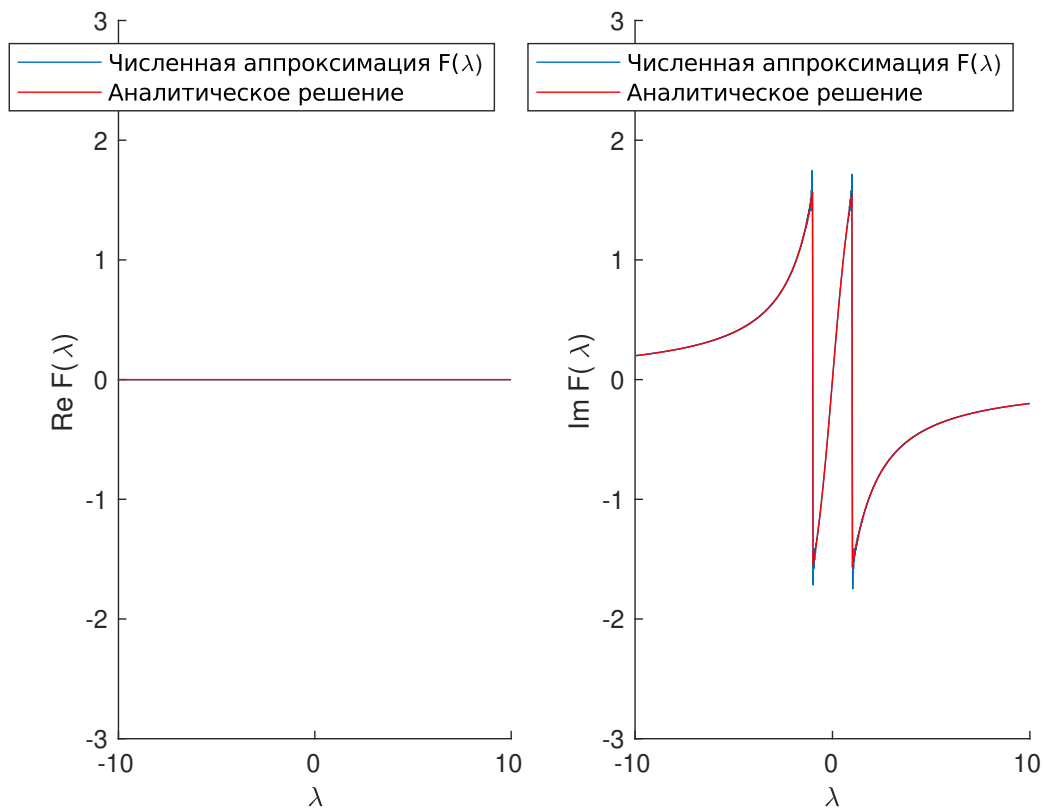


рис. 12 $\Delta = 0.001$, $b = -a = 150$.

На множестве непрерывности функции-образа от ряби можно избавиться, уменьшив шаг дискретизации и увеличив размер окна. Однако устранить рябь вблизи точки разрыва функции $F(\lambda)$ невозможно.