Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по самому важному предмету

«Практикум на Matlab»

Студент 315 группы
Д. М. Сотников

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2019

1 Постановка задачи

Рассматривается краевая задача для уравнения Лапласа

$$
\begin{cases}
u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) - \mu u(x y) = f(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \\
u(x, 0) \equiv u(x, 1) \equiv \xi(x), \\
u(0, y) \equiv u(1, y) \equiv \eta(y), \\
\xi(0) = \xi(1) = \eta(0) = \eta(1).
\end{cases}
\tag{1}
$$

Здесь функция $f(\cdot, \cdot)$ непрерывно дифференцируема в $[0, 1] \times [0, 1]$, функции $\xi(\cdot), \eta(\cdot)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, 1]$, а вещественный параметр $\mu > 0$.

Для данной задачи нужно реализовать алгоритм поиска численного решения, основанный на быстром преобразовании Фурье, а именно необходимо реализовать функцию solveDirichlet(fHandle, xiHandle, etaHandle, mu, N, M), возвращающую значение решения на сетке размера N на M. Первые три аргумента функции представляют собой указатели на функции $f(\cdot, \cdot)$, $\xi(\cdot)$, $\eta(\cdot)$ соответственно. Затем передается значение параметра μ и размер сетки.

2 Алгоритм решения

Для решения поставленной задачи используется разностная схема, в которой уравнение Лапласа принимает вид

$$\begin{aligned} &\frac{y_{k+1,l}-2y_{k,l}+y_{k-1,l}}{h_x^2}+\frac{y_{k,l+1}-2y_{k,l}+y_{k,l-1}}{h_y^2}-\mu y_{k,l}=\phi_{k,l},\\ &y_{k,0}=y_{k,M}=\xi_k,\quad y_{0,l}=y_{N,l}=\eta_l,\quad k=1,\dots,N-1,\quad l=1,\dots,M-1. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь на сетке $x_k=\frac{k}{N},\ y_l=\frac{l}{M},\ h_x=\frac{1}{N},\ h_y=\frac{1}{M}$ задаются функции $y_{k,l}=u\left(x_k,\,y_l\right),\ \phi_{k,l}=f\left(x_k,\,y_l\right),\ \xi_k=\xi\left(x_k\right),\ \eta_l=\eta\left(y_l\right).$

Пусть $\{a_{s,p}\},\ \{b_{s,p}\},\ s=1,\dots,N-1,\ p=1,\dots,M-1$ задают обратное двумерное преобразование для $y_{k,m}$ и $\phi_{k,m}$ соответствено. Тогда

$$y_{k,m}=\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{M-1}a_{s,p}e^{-2\pi i\left(\frac{ks}{N}+\frac{mp}{M}\right)}$$

$$\phi_{k,m}=\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{M-1}b_{s,p}e^{-2\pi i\left(\frac{ks}{N}+\frac{mp}{M}\right)}$$

Подставляя эти соотношения в разностную схему (2) и приравнивая коэффициенты при экспонентах, получаем

$$a_{s,p}c_{s,p}=b_{s,p}, \tag{3}$$

где

$$c_{s,p}=-4N^2\sin^2\left(\frac{\pi s}{N}\right)-4M^2\sin^2\left(\frac{\pi p}{M}\right)-\mu.$$

Для удовлетворения граничным условиям необходимо специальным образом подобрать значения $\phi_{k,0},\ \phi_{0,l}$. Для этого представим $b_{s,p}$ в виде

$$\begin{aligned} b_{s,p}=\frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\phi_{k,m}e^{2\pi i\left(\frac{ks}{N}+\frac{mp}{M}\right)}=&\\ \frac{1}{MN}\sum_{l=0}^{M-1}\phi_{0,l}e^{2\pi i\left(\frac{lp}{M}\right)}+\frac{1}{MN}\sum_{l=0}^{M-1}\phi_{l,0}e^{2\pi i\left(\frac{ls}{N}\right)}-\frac{1}{MN}\phi_{0,0}+\overline{b_{s,p}}.& \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\overline{b_{s,p}}=\dfrac{1}{MN}\sum\limits_{k=1}^{N-1}\sum\limits_{m=1}^{M-1}\phi_{k,m}e^{2\pi i\left(\frac{ks}{N}+\frac{mp}{M}\right)}$. Заметим, что $\overline{b_{s,p}}$ можно вычислить, применив обратное двумерное преобразование преобразование Фурье (функция ifft2 в Matlab) к матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \phi_{1,1} & \dots & \phi_{1,M-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \phi_{N-1,1} & \dots & \phi_{N-1,M-1} \end{pmatrix}$$

Поскольку

$$\eta_m = y_{0,m} = \sum_{s=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{M-1} a_{s,p} e^{-2\pi i\left(\frac{mp}{M}\right)} = \sum_{s=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{M-1} \frac{b_{s,p}}{c_{s,p}} e^{-2\pi i\left(\frac{mp}{M}\right)},$$

$$\xi_k = y_{k,0} = \sum_{s=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{M-1} a_{s,p} e^{-2\pi i\left(\frac{ks}{N}\right)} = \sum_{s=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{M-1} \frac{b_{s,p}}{c_{s,p}} e^{-2\pi i\left(\frac{ks}{N}\right)},$$

подставляя (4) в эти выражения, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $\phi_{0,0}, \ldots, \phi_{0,M-1}, \phi_{1,0}, \ldots, \phi_{N-1,0}$:

$$\eta_m = \frac{1}{MN}\sum_{l=0}^{M-1}\phi_{0,l}\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{M-1}\frac{1}{c_{s,p}}e^{-2\pi i\frac{mp}{M}}e^{2\pi i\frac{lp}{M}}$$
$$+\frac{1}{MN}\sum_{l=1}^{N-1}\phi_{l,0}\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{M-1}\frac{1}{c_{s,p}}e^{-2\pi i\frac{mp}{M}}e^{2\pi i\frac{ls}{N}} - \sum_{s=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{M-1}\frac{\overline{b_{s,p}}}{c_{s,p}}e^{-2\pi i\frac{mp}{M}}, \quad m = 0, \ldots, M-1 \tag{5}$$

$$\xi_k = \frac{1}{MN}\sum_{l=0}^{M-1}\phi_{0,l}\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{M-1}\frac{1}{c_{s,p}}e^{-2\pi i\frac{ks}{N}}e^{2\pi i\frac{lp}{M}}$$
$$+\frac{1}{MN}\sum_{l=1}^{N-1}\phi_{l,0}\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{M-1}\frac{1}{c_{s,p}}e^{-2\pi i\frac{ks}{N}}e^{2\pi i\frac{ls}{N}} - \sum_{s=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{M-1}\frac{\overline{b_{s,p}}}{c_{s,p}}e^{-2\pi i\frac{ks}{N}}, \quad k = 1, \ldots, N-1 \tag{6}$$

Уравнение на ξ_0 не было включено в систему, так как $\xi_0 = \eta_0$ по постановке задачи.

Для вычисления коэффициентов вида $\frac{1}{MN}\sum\limits_{s=0}^{N-1}\sum\limits_{p=0}^{M-1}\frac{1}{c_{s,p}}e^{-2\pi i\frac{mp}{M}}e^{2\pi i\frac{lp}{M}}$ достаточно просуммировать матрицу $\left\{\frac{1}{c_{s,p}}\right\}$ по s, применить обратное преобразование по p с помощью функции fft и сделать циклический сдвиг на m вправо.

Коэффициенты вида $\frac{1}{MN}\sum\limits_{s=0}^{N-1}\sum\limits_{p=0}^{M-1}\frac{1}{c_{s,p}}e^{-2\pi i\frac{mp}{M}}e^{2\pi i\frac{ls}{N}}$ вычисляются последовательным применением прямого преобразования Фурье к строкам матрицы $\left\{\frac{1}{c_{s,p}}\right\}$, а затем обратного преобразования (ifft) к её столбцам.

Правая часть системы вычиляется так же с помощью прямого преобразования fft.

Решив систему, рассмотрим матрицу $\Phi = \{\phi_{k,m}\}$, $k = 1, \ldots, N-1$, $m = 1, \ldots, M-1$. Применяя к ней двумерное обратное преобразование Фурье (ifft2), находим матрицу $\{b_{s,p}\}$, $s = 1, \ldots, N-1$, $p = 1, \ldots, M-1$. С помощью формулы (3) вычислим значения $\{a_{s,p}\}$, $s = 1, \ldots, N-1$, $p = 1, \ldots, M-1$ и применим к ним прямое преобразование Фурье fft2, найдя тем самым искомое решение $\{y_{k,m}\}$, $k = 1, \ldots, N-1$, $m = 1, \ldots, M-1$.

3 Вычисление аналитического решения

В этом разделе будет вычислено аналитическое решение задачи (1) для функции $f(x,\, y) = e^{2x}\cos(3x) - y^2 e^y = f_1(x) + f_2(y)$. Исходя из вида f решение ищется в виде

$$u(x,\, y) = u_1(x) + u_2(y), \quad u_1(0) = u_1(1) = u_1^0, \quad u_2(0) = u_2(1) = u_2^0,$$

числа u_1^0 и u_2^0 известны.

При этих условиях задача (1) распадается на две одномерные краевые задачи

$$\begin{cases} u_1'' - \mu u_1 = e^{2x}\cos(3x) \\ u_1(0) = u_1(1) = u_1^0 \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} u_2'' - \mu u_2 = -y^2 e^y \\ u_2(0) = u_2(1) = u_2^0 \end{cases} \tag{8}$$

Общее решение однородного уравнения для обеих задач имеет вид

$$u(x) = c_1 e^{\sqrt{\mu}x} + c_2 e^{-\sqrt{\mu}x}.$$

Для первой краевой задачи методом вариации постоянных находим

$$c_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} e^{x\left(2-\sqrt{\mu}\right)}\cos(3x), \qquad c_2'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\mu}} e^{x\left(2+\sqrt{\mu}\right)}\cos(3x).$$

Интегрируя эти выражения получим

$$c_1 = \frac{\left(3\sin(3x) + \left(2-\sqrt{\mu}\right)\cos(3x)\right)e^{x\left(2-\sqrt{\mu}\right)}}{2\sqrt{\mu}\left(\mu - 4\sqrt{\mu} + 13\right)} + d_1 = c_1(x) + d_1, \quad d_1 \in \mathbb{R}$$

$$c_2 = -\frac{\left(3\sin(3x) + \left(2+\sqrt{\mu}\right)\cos(3x)\right)e^{x\left(2+\sqrt{\mu}\right)}}{2\sqrt{\mu}\left(\mu + 4\sqrt{\mu} + 13\right)} + d_2 = c_2(x) + d_2, \quad d_2 \in \mathbb{R}$$

Таким образом решение краевой задачи (7) находится по формуле

$$u_1(x) = (c_1(x) + d_1))e^{\sqrt{\mu}x} + (c_2(x) + d_2)e^{-\sqrt{\mu}x},$$

в которой d_1, d_2 являются решениями системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_1(0) + d_1 + c_2(0) + d_2 = u_1^0 \\ (c_1(1) + d_1))e^{\sqrt{\mu}} + (c_2(1) + d_2)e^{-\sqrt{\mu}} = u_1^0. \end{cases}$$

Абсолютно аналогично для второй задачи функции c_1, c_2 имеют вид

$$c_1 = -\frac{1}{2\sqrt{\mu}\left(1-\sqrt{\mu}\right)} y^2 e^{y\left(1-\sqrt{\mu}\right)} + \frac{1}{2\sqrt{\mu}\left(1-\sqrt{\mu}\right)^2} y e^{y\left(1-\sqrt{\mu}\right)} - \frac{1}{2\sqrt{\mu}\left(1-\sqrt{\mu}\right)^3} e^{y\left(1-\sqrt{\mu}\right)} + d_1$$

$$c_2 = \frac{1}{2\sqrt{\mu}\left(1+\sqrt{\mu}\right)} y^2 e^{y\left(1+\sqrt{\mu}\right)} - \frac{1}{2\sqrt{\mu}\left(1+\sqrt{\mu}\right)^2} y e^{y\left(1+\sqrt{\mu}\right)} + \frac{1}{2\sqrt{\mu}\left(1+\sqrt{\mu}\right)^3} e^{y\left(1+\sqrt{\mu}\right)} + d_2.$$

Как и раньше переобозная $c_1 = c_1(y) + d_1,\ c_2 = c_2(y) + d_2$, получаем общее решение задачи (8) в виде

$$u_2(y) = (c_1(y) + d_1))e^{\sqrt{\mu}y} + (c_2(y) + d_2)e^{-\sqrt{\mu}y},$$

постоянные d_1, d_2 являются решениями системы

$$\begin{cases} c_1(0) + d_1 + c_2(0) + d_2 = u_2^0 \\ (c_1(1) + d_1))e^{\sqrt{\mu}} + (c_2(1) + d_2)e^{-\sqrt{\mu}} = u_2^0. \end{cases}$$

Финальное решение задачи Лапласа (1) имеет вид

$$u(x, y) = u_1(x) + u_2(y).$$

4 Сравнение численного и аналитического решений

В этом разделе проведено сравнение численного решения с полученным ранее аналитическим при различных значениях параметров $\mu,\ u_1^0,\ u_2^0$.

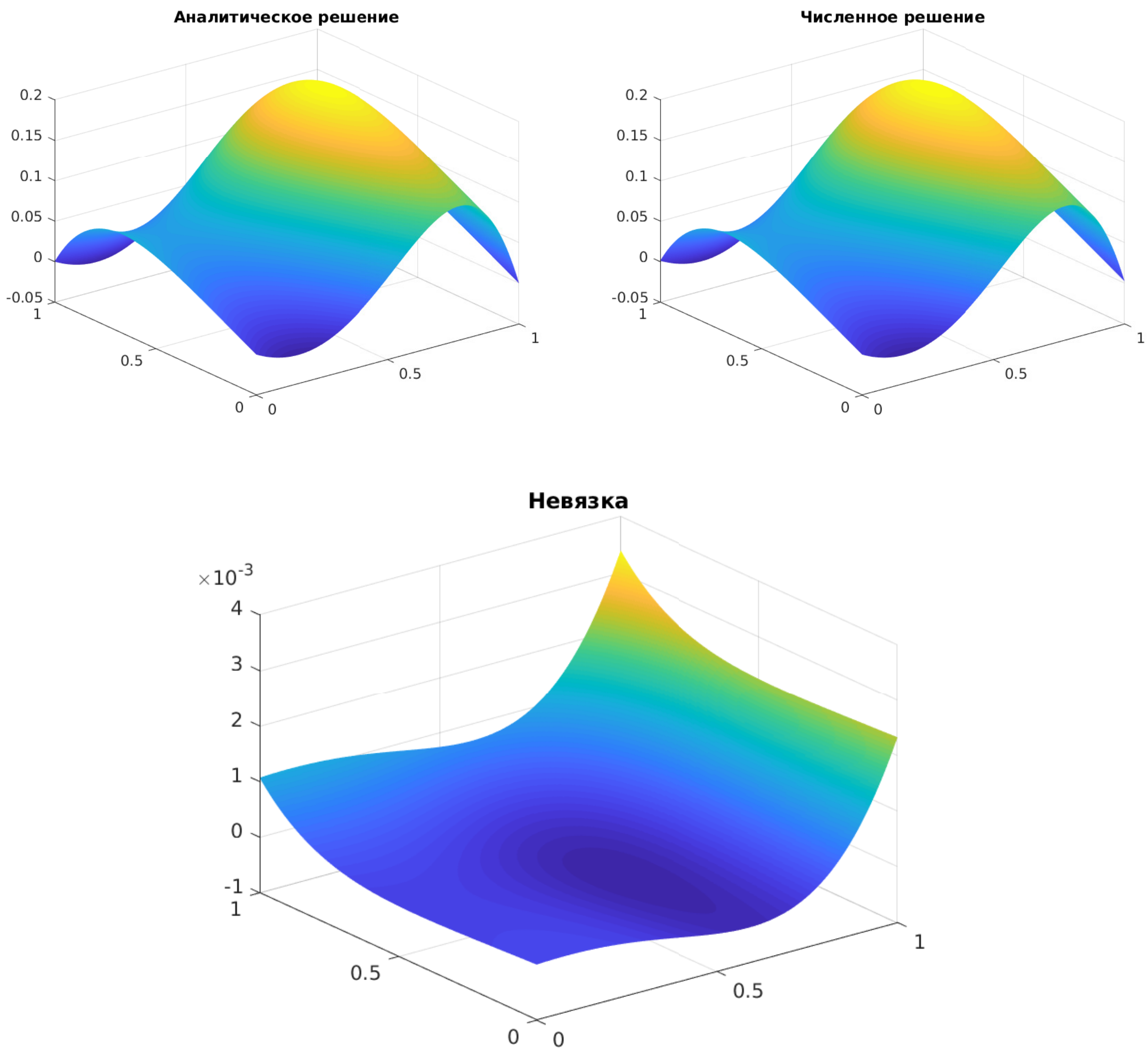

рис. 1 $\quad \mu = 1, \quad u_1^0 = u_2^0 = 0, \quad M = N = 500.$

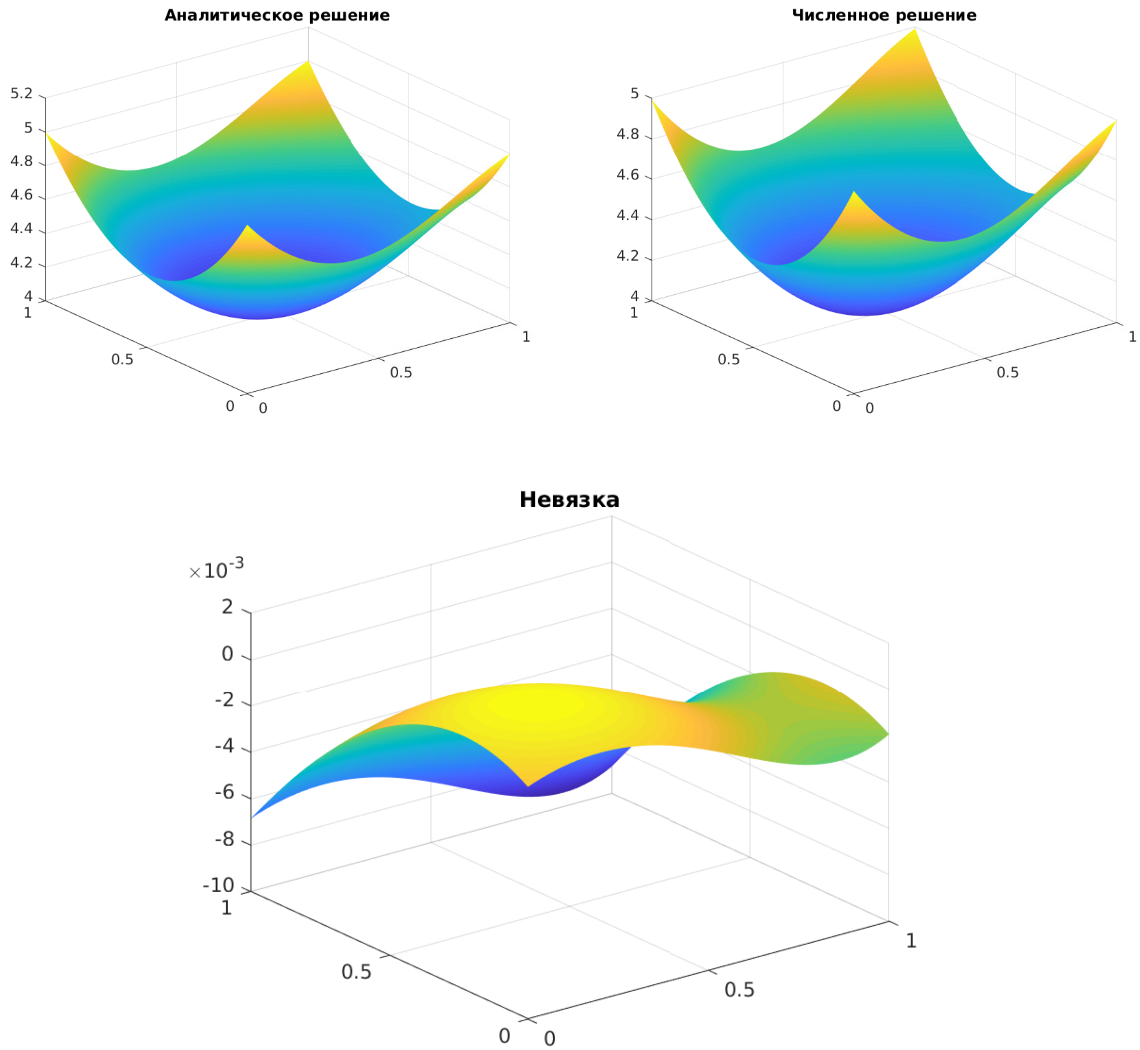

рис. 2 $\quad \mu = 2, \quad u_1^0 = 2, \quad u_2^0 = 3, \quad M = N = 300.$

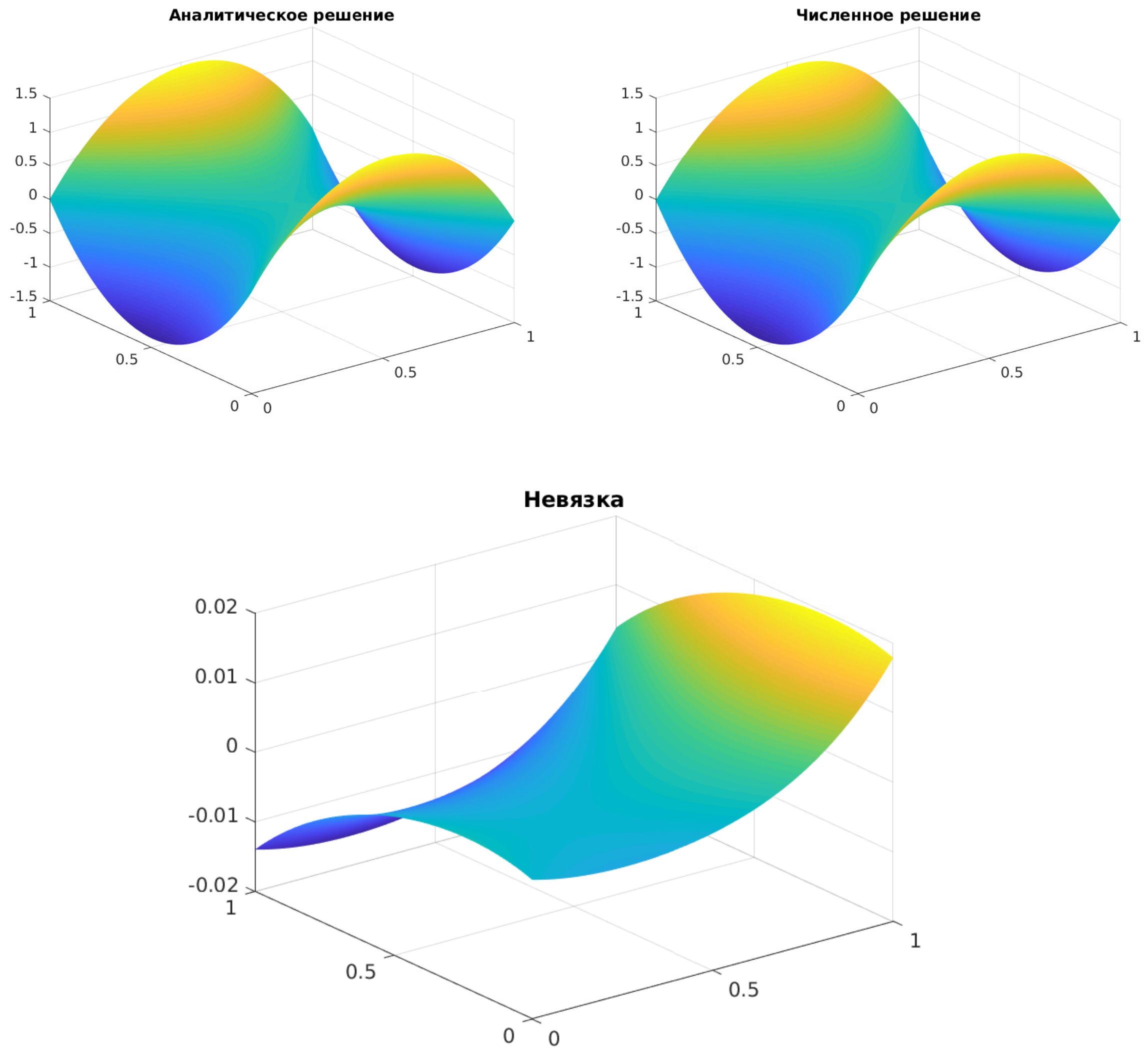

рис. 3 $\quad \mu = 4, \quad u_1^0 = -4, \quad u_2^0 = 4, \quad M = N = 400.$

В этом примере ошибка численного алгоритма является достаточно большой, однако точность можно повысить измельчением сетки.

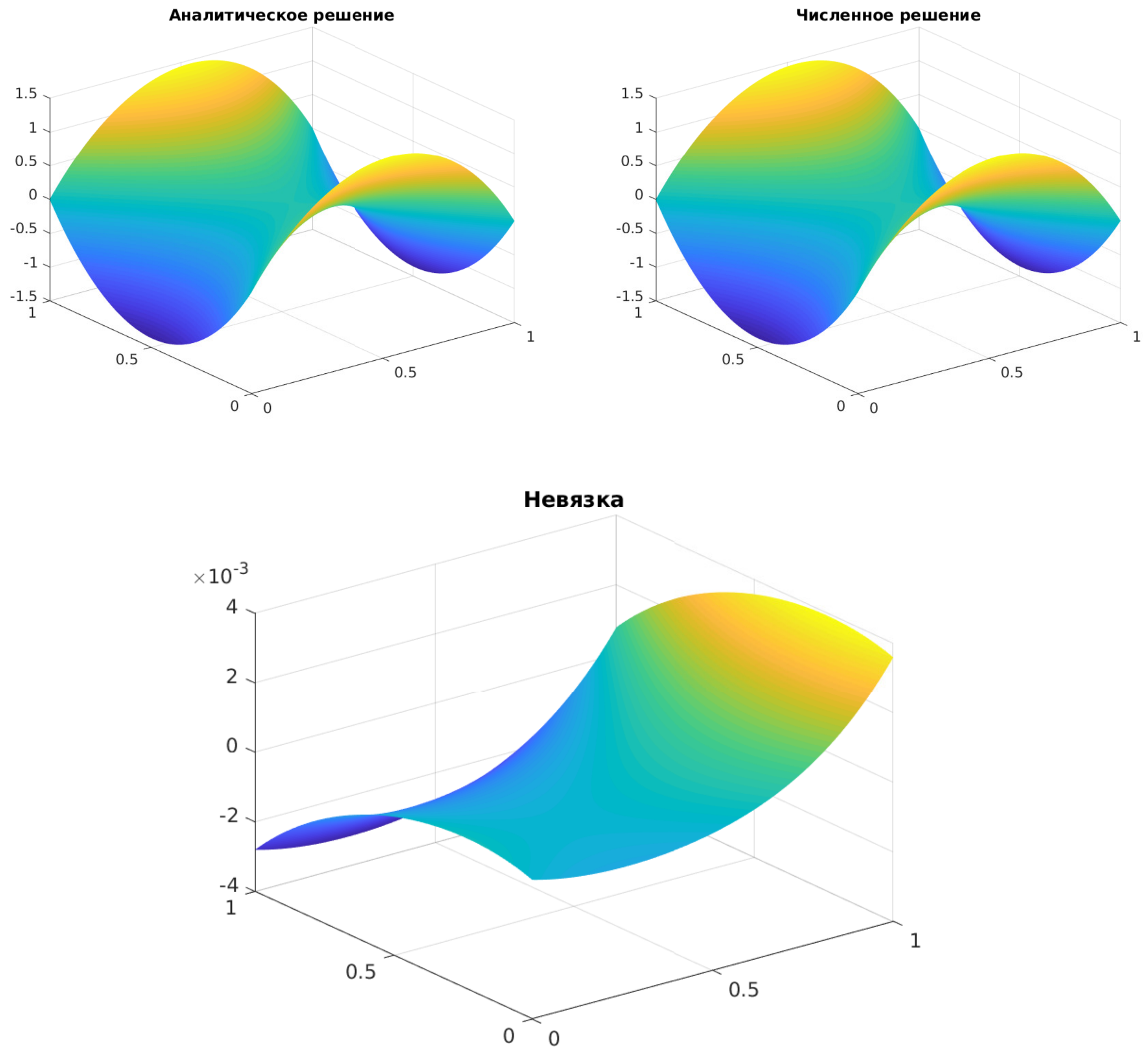

рис. 4 $\quad \mu = 4, \quad u_1^0 = -4, \quad u_2^0 = 4, \quad M = N = 2000.$

5 Численное решение для произвольной функции

Пусть $f(x,y) = yx\ln(x) - y^3x^2$, $\quad \xi(x) = \frac{3}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, $\quad \eta(y) = \sin(\pi y) + 1$. Решения при различных μ, M, N имеют вид

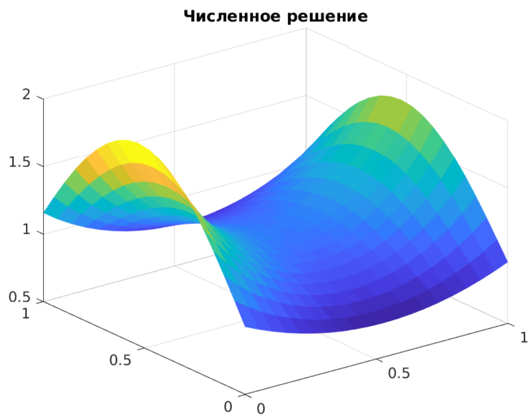

рис. 5 $\quad \mu = 3, \quad M = N = 20.$

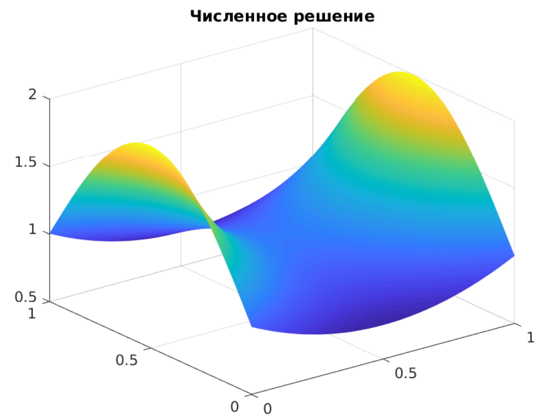

рис. 6 $\quad \mu = 3, \quad M = N = 1000.$

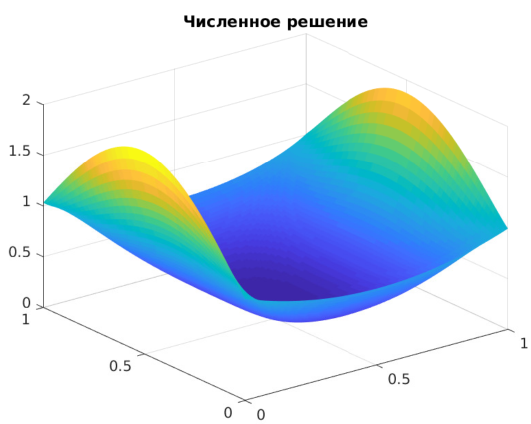

рис. 7 $\quad \mu = 42, \quad M = N = 100.$

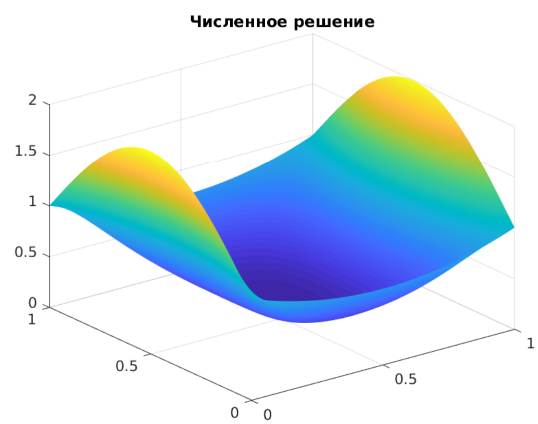

рис. 8 $\quad \mu = 42, \quad M = N = 1500.$

Рассмотрим теперь $f(x,y) = \cos(xy^2)e^{x-y}, \xi(x) = 0, \eta(y) = 0$.

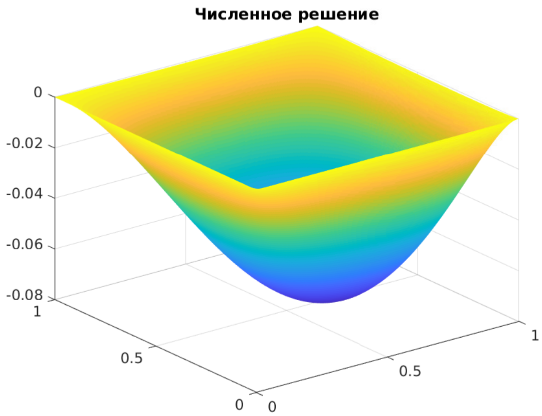

рис. 9 $\mu = 1, \quad M = N = 500.$

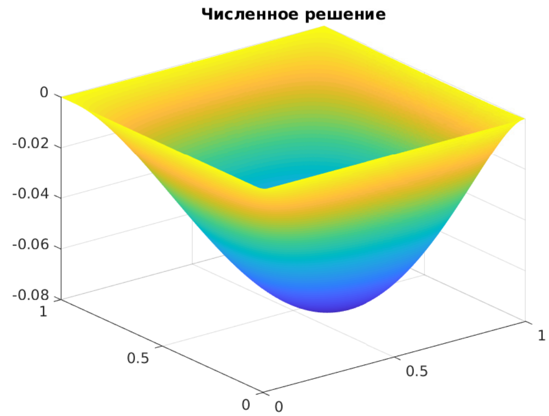

рис. 10 $\mu = 0.0001, \quad M = N = 700.$

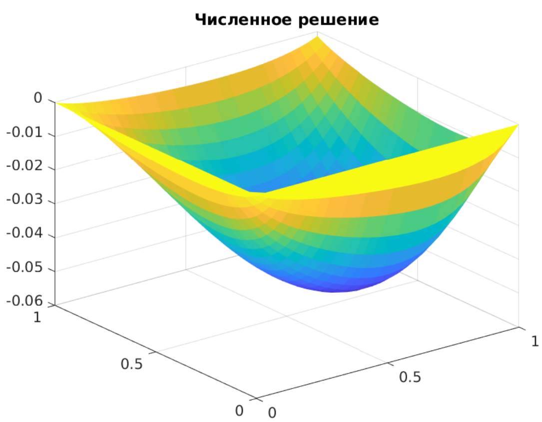

рис. 11 $\mu = 10, \quad M = N = 30.$

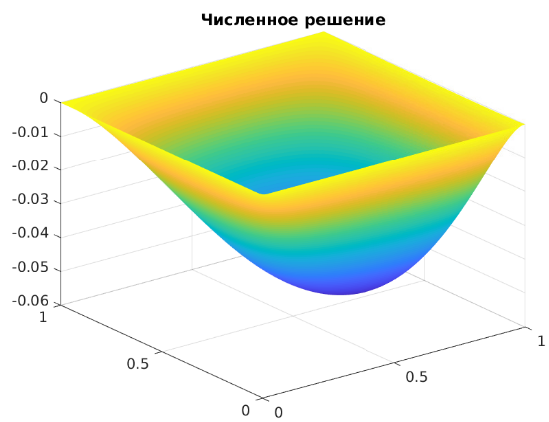

рис. 12 $\mu = 10, \quad M = N = 1000.$