Лабораторная работа №3

Численные методы

Вариант 1

При выполнении этой лабораторной работы пользоваться символьными вычислениями можно *только* для проверки результатов на правильность.

1 [1]. Построить график разности $S_n - S$, где S_n — n-я частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = S$. Вывести оценку на погрешность $\psi(n)$ — убывающую и сходящуюся к нулю функцию, такую, что $|S_n - S| \leqslant \psi(n)$ для всех n. Построить график $\psi(n)$.

2 [1] ($\star$). Найти корни уравнения $\cos(x) = x/\pi$ с помощью функции `fzero`. Использовать указатели на функции. Для определения начальных приближений нарисовать левую и правую часть на графике и воспользоваться функцией `ginput`.

3 [3]. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

нарисовать график на отрезке $[-1, 1]$: по оси абсцисс — начальное приближение, по оси ординат — **ближайший** к начальному приближению корень функции, найденный с помощью `fzero`.

4 [2]. Движение шарика на плоскости описывается уравнением $\ddot{x} = 0,\ x \in \mathbb{R}^2$. Реализовать моделирование (см. `ode45`) движения шарика внутри участка, окруженного перегородкой в форме окружности. При попадании на перегородку шарик от нее упруго отскакивает (скорость отражается относительно нормали к касательной в точке попадания и уменьшается в α раз). Нарисовать анимацию, изображающую движение шарика с ненулевой начальной скоростью.

5 [2]. Рассмотреть систему «хищник-жертва»:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \gamma xy, & x \in \mathbb{R}, \\ \dot{y} &= -\beta y + \delta xy, & y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Решить систему численно. Нарисовать на плоскости фазовые кривые $(x(t), y(t))$ и в пространстве интегральные $(x(t), y(t), t)$, полученные численно и аналитически, для различных наборов значений параметров $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x_0, y_0)$. При каких значениях параметров происходят качественные изменения в поведении системы?

6 [2] ($\star$). Для линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка построить фазовый портрет. Подобрать примеры системы таким образом, чтобы проиллюстрировать различные виды особых точек (узел, дикритический узел, седло, фокус, центр).

7 [2]. Для систем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x + xy, & x \in \mathbb{R}, \\ \dot{y} &= x - y - x^2 - y^3, & y \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + 2y^3, & x \in \mathbb{R}, \\ \dot{y} &= xy^2, & y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия, построив функцию Ляпунова и применив теоремы Ляпунова или Четаева. Нарисовать фазовый портрет системы и линии уровня функции Ляпунова. Траектории нарисовать меняющими цвет в соответствии со значением функции Ляпунова вдоль траектории (например, чем больше — тем краснее).

8 [2]. С помощью функции `bvp4c` решить численно краевую задачу

$$y'' + y = 1;\ y(0) = 0, y(\pi/2) = 0.$$

Сравнить решение с аналитическим в L_2-норме и C-норме.

9 [2]. Реализовать функцию, ищущую минимум функции многих переменных методом градиентного спуска. Функцию, её градиент и начальное приближение задаёт пользователь. Для функции двух переменных построить набор линий уровня, на которых отметить шаги алгоритма. Сравнить результат работы с функцией `fminbnd`.

10 [5]. Получить аппроксимацию преобразования Фурье $F(\lambda)$ для каждой функции $f(t)$ из набора, указанного на стр. 5 данного файла, при помощи быстрого преобразования Фурье (БПФ), выбирая различные шаги дискретизации исходной функции и различные окна, ограничивающие область определения $f(t)$. Построить графики $F(\lambda)$. Для первых двух функций $f(t)$ вычислить $F(\lambda)$ в явном виде и сравнить графики $F(\lambda)$, полученные из аналитического представления $F(\lambda)$ и из аппроксимации через БПФ. См. также комментарии на стр. 4 данного файла.

11 [5]. Создать в системе LaTeX отчёт по выполнению предыдущего задания. Отчёт обязательно должен содержать:

1. Полную постановку задачу с описанием всех параметров.
2. Теоретические выкладки, как именно происходят вычисления, полностью соответствующие программе (при несоответствии задание не принимается).
3. Вычисления вручную преобразований Фурье для тех функций, для которых это указано (включая все промежуточные выкладки).
4. Графики каждого преобразования Фурье при разных значениях параметров (с указанием их значений), включая
   - иллюстрацию эффекта наложения спектра (должна быть картинка для одной из функций $f(t)$, когда график настоящего преобразования Фурье рисуется несколько раз с соответствующим сдвигом аргумента, а затем рисуется сумма полученных графиков, при этом при наложении спектра должно быть видно, что суммарный результат портится);
   - иллюстрацию ряби;
   - иллюстрацию устранения эффекта наложения спектра и ряби (последней в точках непрерывности $F(\lambda)$) при улучшении значений параметров, а также невозможности устранить рябь в точках разрыва $F(\lambda)$.
5. Отчёт должен удовлетворять Требованиям по Написанию Отчетов.

Лабораторная работа №2

Численные методы

Вариант 2

При выполнении этой лабораторной работы пользоваться символьными вычислениями можно *только* для проверки результатов на правильность.

1 [1]. Построить график разности $S_n - S$, где S_n — n-я частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = S$. Вывести оценку на погрешность $\psi(n)$ — убывающую и сходящуюся к нулю функцию, такую, что $|S_n - S| \leqslant \psi(n)$ для всех n. Построить график $\psi(n)$.

2 [1] ($\star$). Найти корни уравнения $\sin(x) = x^3 + x - 1$ с помощью функции `fzero`. Использовать указатели на функции. Для определения начальных приближений нарисовать левую и правую часть на графике и воспользоваться функцией `ginput`.

3 [3]. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x\cos(\ln|x|)\,, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

нарисовать график на отрезке $[-1, 1]$: по оси абсцисс — начальное приближение, по оси ординат — **ближайший** к начальному приближению корень функции, найденный с помощью `fzero`.

4 [2]. Движение шарика на плоскости описывается уравнением $\ddot{x} = -\alpha x,\ x \in \mathbb{R}^2$. Реализовать моделирование (см. `ode45`) движения шарика внутри участка, окруженного четырьмя перегородками, параллельными осям координат. При попадании на перегородку шарик от нее упруго отскакивает (так, при ударе о вертикальную стенку в момент t' вертикальная компонента скорости меняет знак: $x_1(t'+0) = x_1(t'-0)$, $x_2(t'+0) = -x_2(t'-0)$, и так далее). Нарисовать анимацию, изображающую движение шарика с ненулевой начальной скоростью.

5 [2]. Рассмотреть систему двух тел на плоскости:

$$m_1\ddot{x}_1 = G\frac{m_1 m_2(x_2 - x_1)}{\|x_1 - x_2\|^3},\ x_1 \in \mathbb{R}^2,\ m_2\ddot{x}_2 = G\frac{m_1 m_2(x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|^3},\ x_2 \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Решить систему численно. Нарисовать на плоскости анимацию движения траекторий $x_1(t), x_2(t)$. Подобрать параметры так, что бы продемонстрировать движение двух типов: по пересекающимся орбитам («восьмёрка») и вокруг общего центра.

6 [2] ($\star$). Для линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка построить фазовый портрет. Подобрать системы таким образом, чтобы проиллюстрировать различные виды особых точек (узел, дикритический узел, седло, фокус, центр).

7 [2]. Для систем

$$\begin{array}{rll} \dot{x} = & x^3 - y, & x \in \mathbb{R}, \\ \dot{y} = & x + y^3, & y \in \mathbb{R}, \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{rll} \dot{x} = & 2y^3 - x^5, & x \in \mathbb{R}, \\ \dot{y} = & -x - y^3 + y^5, & y \in \mathbb{R}, \end{array}$$

исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия, построив функцию Ляпунова и применив теоремы Ляпунова или Четаева. Нарисовать фазовый портрет системы и линии уровня функции Ляпунова. Траектории нарисовать меняющими цвет в соответствии со значением функции Ляпунова вдоль траектории (например, чем больше — тем краснее).

8 [2]. С помощью функции `bvp4c` решить численно краевую задачу

$$y'' + y = 2x - \pi;\ y(0) = 0, y(\pi) = 0.$$

Сравнить решение с аналитическим в L_2-норме и C-норме.

9 [2]. Реализовать функцию, ищущую минимум функции многих переменных методом покоординатного спуска. (Функцию, её частные производные и начальное приближение задаёт пользователь.) Для функции двух переменных построить набор линий уровня, на которых отметить шаги алгоритма. Сравнить результат работы с функцией `fminbnd`.

10 [5]. Получить аппроксимацию преобразования Фурье $F(\lambda)$ для каждой функции $f(t)$ из набора, указанного на стр. 5 данного файла, при помощи быстрого преобразования Фурье (БПФ), выбирая различные шаги дискретизации исходной функции и различные окна, ограничивающие область определения $f(t)$. Построить графики $F(\lambda)$. Для первых двух функций $f(t)$ вычислить $F(\lambda)$ в явном виде и сравнить графики $F(\lambda)$, полученные из аналитического представления $F(\lambda)$ и из аппроксимации через БПФ. См. также комментарии на стр. 4 данного файла.

11 [5]. Создать в системе LaTeX отчёт по выполнению предыдущего задания. Отчёт обязательно должен содержать:

1. Полную постановку задачу с описанием всех параметров.
2. Теоретические выкладки, как именно происходят вычисления, полностью соответствующие программе (при несоответствии задание не принимается).
3. Вычисления вручную преобразований Фурье для тех функций, для которых это указано (включая все промежуточные выкладки).
4. Графики каждого преобразования Фурье при разных значениях параметров (с указанием их значений), включая
   - иллюстрацию эффекта наложения спектра (должна быть картинка для одной из функций $f(t)$, когда график настоящего преобразования Фурье рисуется несколько раз с соответствующим сдвигом аргумента, а затем рисуется сумма полученных графиков, при этом при наложении спектра должно быть видно, что суммарный результат портится);
   - иллюстрацию ряби;
   - иллюстрацию устранения эффекта наложения спектра и ряби (последней в точках непрерывности $F(\lambda)$) при улучшении значений параметров, а также невозможности устранить рябь в точках разрыва $F(\lambda)$.
5. Отчёт должен удовлетворять Требованиям по Написанию Отчетов.

Лабораторная работа №2

Численные методы

Вариант 3

При выполнении этой лабораторной работы пользоваться символьными вычислениями можно *только* для проверки результатов на правильность.

1 [1]. Построить график разности $S_n - S$, где S_n — n-я частичная сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = S$. Вывести оценку на погрешность $\psi(n)$ — убывающую и сходящуюся к нулю функцию, такую, что $|S_n - S| \leqslant \psi(n)$ для всех n. Построить график $\psi(n)$.

2 [1] ($\star$). Найти корни уравнения $\sqrt{x} = \operatorname{tg} x$ с помощью функции `fzero`. Использовать указатели на функции. Для определения начальных приближений нарисовать левую и правую часть на графике и воспользоваться функцией `ginput`.

3 [3]. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

нарисовать график на отрезке $[-1, 1]$: по оси абсцисс — начальное приближение, по оси ординат — **ближайший** к начальному приближению корень функции, найденный с помощью `fzero`.

4 [2]. Реализовать расчёт траектории нелинейного маятника (см. `ode45`) с диссипацией и отражением при прохождении начала координат:

$$x'' = -\sin(x) - \alpha x', \text{ отражение: } x' := -x' \text{ при } x = 0$$

Вывести график траектории маятника.

5 [2]. Рассмотреть систему двух тел в пространстве:

$$m_1\ddot{x}_1 = G\frac{m_1 m_2(x_2 - x_1)}{\|x_1 - x_2\|^3},\ x_1 \in \mathbb{R}^3,\ m_2\ddot{x}_2 = G\frac{m_1 m_2(x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|^3},\ x_2 \in \mathbb{R}^3. \tag{2}$$

Решить систему численно. Нарисовать в пространстве анимацию движения траекторий $x_1(t), x_2(t)$. Методом наименьших квадратов построить плоскость, в которой происходит движение.

6 [2] ($\star$). Для линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка построить фазовый портрет. Подобрать системы таким образом, чтобы проиллюстрировать различные виды особых точек (узел, дикритический узел, седло, фокус, центр).

7 [2]. Для систем

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} = & 2y - x - y^3, & x \in \mathbb{R}, \\ \dot{y} = & x - 2y, & y \in \mathbb{R}, \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{rcl} \dot{x} = & xy - x^3 + y^3, & x \in \mathbb{R}, \\ \dot{y} = & x^2 - y^3, & y \in \mathbb{R}, \end{array}$$

исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия, построив функцию Ляпунова и применив теоремы Ляпунова или Четаева. Нарисовать фазовый портрет системы и линии уровня функции Ляпунова. Траектории нарисовать меняющими цвет в соответствии со значением функции Ляпунова вдоль траектории (например, чем больше — тем краснее).

8 [2]. С помощью функции `bvp4c` решить численно краевую задачу

$$y'' - y' = 0;\ y(0) = -1,\ y'(1) - y(1) = 2.$$

Сравнить решение с аналитическим в L_2-норме и C-норме.

9 [2]. Реализовать функцию, ищущую минимум функции многих переменных методом Ньютона. (Функцию, её градиент, гессиан и начальное приближение задаёт пользователь.) Для функции двух переменных построить набор линий уровня, на которых отметить шаги алгоритма. Сравнить результат работы с функцией `fminbnd`.

10 [5]. Получить аппроксимацию преобразования Фурье $F(\lambda)$ для каждой функции $f(t)$ из набора, указанного на стр. 5 данного файла, при помощи быстрого преобразования Фурье (БПФ), выбирая различные шаги дискретизации исходной функции и различные окна, ограничивающие область определения $f(t)$. Построить графики $F(\lambda)$. Для первых двух функций $f(t)$ вычислить $F(\lambda)$ в явном виде и сравнить графики $F(\lambda)$, полученные из аналитического представления $F(\lambda)$ и из аппроксимации через БПФ. См. также комментарии на стр. 4 данного файла.

11 [5]. Создать в системе LaTeX отчёт по выполнению предыдущего задания. Отчёт обязательно должен содержать:

1. Полную постановку задачу с описанием всех параметров.
2. Теоретические выкладки, как именно происходят вычисления, полностью соответствующие программе (при несоответствии задание не принимается).
3. Вычисления вручную преобразований Фурье для тех функций, для которых это указано (включая все промежуточные выкладки).
4. Графики каждого преобразования Фурье при разных значениях параметров (с указанием их значений), включая
   - иллюстрацию эффекта наложения спектра (должна быть картинка для одной из функций $f(t)$, когда график настоящего преобразования Фурье рисуется несколько раз с соответствующим сдвигом аргумента, а затем рисуется сумма полученных графиков, при этом при наложении спектра должно быть видно, что суммарный результат портится);
   - иллюстрацию ряби;
   - иллюстрацию устранения эффекта наложения спектра и ряби (последней в точках непрерывности $F(\lambda)$) при улучшении значений параметров, а также невозможности устранить рябь в точках разрыва $F(\lambda)$.
5. Отчёт должен удовлетворять Требованиям по Написанию Отчетов.