Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по 3 заданию практикума

«Достигнуть недостижимого»

Студент 315 группы
Д. М. Сотников

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2020

1 Постановка задачи

Для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \dot{x} + 5x^5 + x\sin(x^3) = u, \quad x \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}$$

необходимо построить множество достижимости $\mathcal{X}[T] = \mathcal{X}(T, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ при заданном ограничении на управление $u \in [-\alpha,\, \alpha]$. Известно, что в начальный момент $t_0 = 0$ состояние $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. В качестве управлений будем рассматривать измеримые по Лебегу функции $u(\cdot)$ такие, что $|u(t)| \leqslant \alpha$ для почти всех t.

Делая замену $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$, приводим систему к нормальному виду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - 5x_1^5 - x_1\sin(x_1^3) - x_2 \\ x_1(0) = x_2(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

2 Вспомогательные утверждения

Для решения задачи используется принцип максимума Понтрягина для задачи достижимости, который сформулирован и доказан в [2] (4.1, теорема 3).

Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

дополнительно предполагая, что функции $f,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны, $u(\cdot)$ измерима, и $u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ для почти всех t.

Функция Гамильтона-Понтрягина для $x,\ \psi \in \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\mathcal{H}(\psi(t), x(t), u(t)) = \langle \psi(t),\ f(x(t), u(t)) \rangle.$$

Теорема 1 (Принцип максимума Понтрягина). *Пусть $\tilde{u}(\cdot)$ — допустимое управление, переводящее систему на границу множества достижимости $\mathcal{X}[T]$, $\tilde{x}(\cdot)$ — траектория, соответствующая этому управлению, $\tilde{x}(T) \in \partial\mathcal{X}[T]$. Тогда существует функция $\tilde{\psi}(\cdot) \not\equiv 0$, удовлетворяющая сопряженной системе*

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x},$$

и выполнено условие максимума

$$\mathcal{H}(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \overset{п.в.}{=} \sup_{v \in \Omega} \mathcal{H}(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), v).$$

Из этой теоремы следует, что множество траекторий, удовлетворяющих описанным выше условиям, содержит в себе все траектории, выводящие систему на границу множества достижимости, поэтому в дальнейшем будут рассматриваться только траектории и управления, удовлетворяющие принципу максимума.

Вернемся к рассмотрению системы (1), далее ψ — сопряженная переменная из принципа максимума. Следующая теорема позволяет делать выводы о существовании переключений на некоторых участках траектории. Она была доказана в [1].

Теорема 2 (о нулях x_2 и ψ_2). *Пусть $t_1 < t_2$. Тогда, если $x_2(t_1) = x_2(t_2) = 0$, x_2 не обращается в нуль на $(t_1,\, t_2)$, и $\psi_2(t_1) \neq 0$, то $\psi_2(t_2) \neq 0$, и существует $\tau \in (t_1,\, t_2)$ такая, что $\psi_2(\tau) = 0$.*

Иными словами, между двумя нулямми x_2 существует нуль ψ_2.

Лемма 1. *В задаче (1) множество достижимости не убывает в смысле включения, то есть*

$$\mathcal{X}(t) \subset \mathcal{X}(t+\Delta t), \quad \forall \Delta t > 0.$$

Доказательство. Пусть a — произвольная точка из $\mathcal{X}(t)$. Покажем, что $a \in \mathcal{X}(t+\Delta t)$. Так как $a \in \mathcal{X}(t)$, найдется допустимое управление $\overline{u}(\cdot)$, определенное на $(0, t)$ и переводящее систему в точку a к моменту времени t. Положим теперь

$$u(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < \Delta t \\ \overline{u}(\tau - \Delta t), & \tau \geqslant \Delta t \end{cases}$$

Из системы (1) видно, что система будет оставаться в нуле на отрезке $(0, \Delta t)$, затем управление $\overline{u}(\cdot)$ за время t приведет систему в точку a, поскольку система является автономной. Таким обрзаом $x(t+\Delta t) = a$, а значит, $a \in \mathcal{X}(t+\Delta t)$.

■

3 Применение принципа максимума

Для данной задачи функционал Гамильтона-Понтрягина имеет вид

$$\mathcal{H} = \psi_1 x_2 + \psi_2(u - 5x_1^5 - x_1 \sin(x_1^3) - x_2),$$

а сопряженная система

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2(25x_1^4 + \sin(x_1^3) + 3x_1^3 \cos(x_1^3)) \\ \dot{\psi}_2 = \psi_2 - \psi_1 \end{cases} \tag{CC}$$

Так как функционал $\mathcal{H}$ линеен по u, из условия максимума получаем следующий вид управления:

$$u(t) = \begin{cases} \alpha, & \psi_2(t) > 0 \\ [-\alpha, \alpha], & \psi_2(t) = 0 \\ -\alpha, & \psi_2(t) < 0 \end{cases}$$

Лемма 2. *Особый режим в данной задаче невозможен.*

Доказательство. Предположим, что $\psi_2(t) = 0$ на некотором отрезке. Тогда на этом же отрезке, в силу постоянства ψ_2, выполнено

$$\dot{\psi}_2(t) = 0 = \psi_2(t) - \psi_1(t) = -\psi_1(t),$$

а значит, и $\psi_1(t) = 0$ на данном отрезке, что приводит к противоречию с нетривиальностью сопряженной переменной. ■

Итак, управления, приводящие на границу множества, почти всюду принимают максимальные по модулю значения и имеют вид

$$u(t) = \alpha \operatorname{sgn}(\psi_2(t))$$

Система при этом движется в двух режимах, соответствующих $u = \alpha$ и $u = -\alpha$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha - 5x_1^5 - x_1 \sin(x_1^3) - x_2 \end{cases} \tag{$-$}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha - 5x_1^5 - x_1 \sin(x_1^3) - x_2 \end{cases} \tag{$+$}$$

4 Алгоритм решения

Выпустим из начального положения две траектории по системам (+) и (—). Заметим, что при $u = \alpha$ переменная x_2 сначала возрастает, также возрастает и x_1, затем, когда они достигают некоторого значения, производная $\dot{x}_2$ становится отрицательной, и в некоторый момент x_2 обращается в нуль. Те же рассуждения приводят к тому, что при $u = -\alpha$ переменная x_2 сначала убывает, затем возрастает и обращается в нуль.

Таким образом при любом значении параметра α данные траектории имеют примерно такой вид:

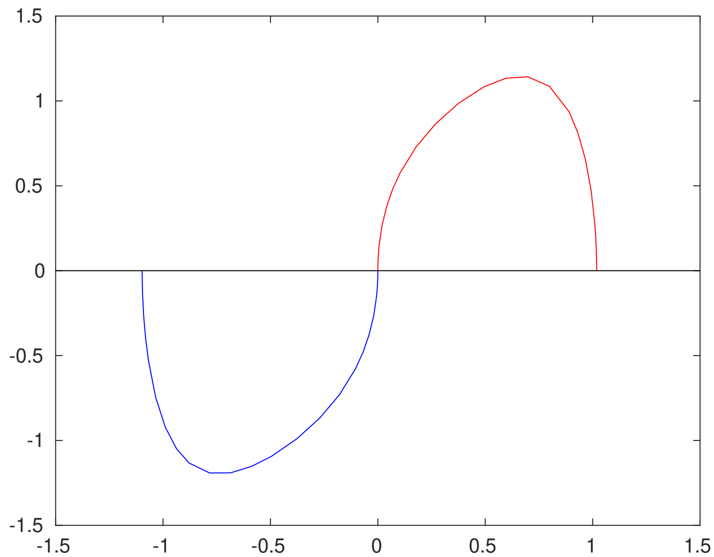

Рис. 1: Траектории систем (+) и (—)

Значения τ_-, τ_+, при которых x_2 обращается в нуль, находятся численно с помощью функции ode45.

Рассмотрим теперь ветвь $u = \alpha$. По теореме о нулях найдется $\tau_s \in (0, \tau_+)$ — нуль функции ψ_2, то есть момент переключения. При этом, в силу положительной однородности сопряженной переменной в принципе максимума, можно считать, что $|\psi_1(\tau_s)| = 1$. Так как на $[0, \tau_s]$ управление было положительно, функция ψ_2 была так же положительна, и потому прошла через нуль убывая, то есть

$$\dot{\psi}_2(\tau_s) = -\psi_1(\tau_s) < 0.$$

Отсюда $\psi_1(\tau_s) = 1$.

В момент τ_s известны значения всех параметров, поэтому, интегрируя (—) и (СС) и переключаясь между системами при обращении ψ_2 в нуль, найдем конец траектории $x(T)$.

При численном решении параметр τ_s перебирается по интервалу $(0, \min(T, \tau_+))$.

Абсолютно аналогично рассматривается отрицательная ветвь с единственным отличием: в момент переключения $\psi_1(\tau_s) = -1$.

Упорядочивая полученное множество конечных точек получим границу множества достижимости. Основной проблемой здесь является возниконовение «острых углов» на границе при самопересечениях построенной кривой.

Для удаления частей кривой, находящихся внутри множества достижимости, используется следующий алгоритм:

- Находится точка, лежащая на границе множества достижимости, она становится начальной точкой массива. Такой точка является, например, точка с наибольшим значением x_1.
- Находятся точки, подозрительные на пересечение (близкие по расстоянию и сильно различающиеся по индексам).
- Для подозрительных точек x_i, x_j проверяется, пересекаются ли отрезки $[x_{i-1},\, x_{i+1}]$ и $[x_{i-1},\, x_{i+1}]$. Если отрезки пересекаются, то участок кривой между подозрительными точками удаляется.

Также в программе фиксируются моменты переключений перебираемых траекторий.

5 Положения равновесия

Необходимо также проверить возможность прохождения траектории близко к неподвижной точки соответствующей системы. Из уравнения $f(x) = 0$ получим уравнение неподвижной точки для системы (+)

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 5x_1^5 + x_1 \sin(x_1^3) = \alpha \end{cases}$$

и для системы (—)

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 5x_1^5 + x_1 \sin(x_1^3) = -\alpha \end{cases}$$

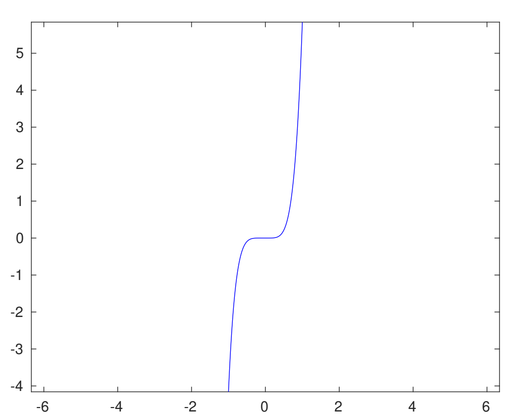

Рис. 2: График $5x^5 + x\sin(x^3)$

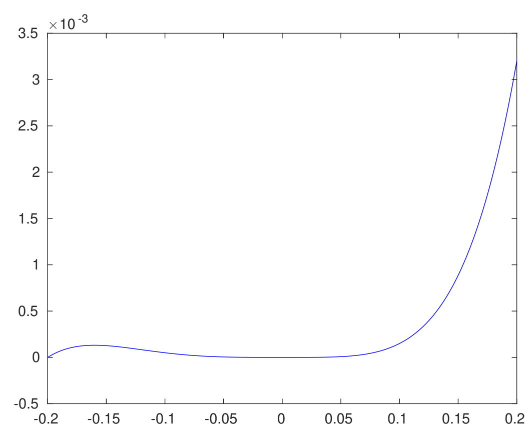

Рис. 3: График $5x^5 + x\sin(x^3)$

Из графика видно, что при значениях $\alpha > 0.0002$ система (+) имеет положение равновесия с $x_1^* > 0$, а система (—) имеет равновесие с $x_1^* < 0$. Обозначим $f(x) = 5x^5 + x\sin(x^3)$. Заметим, что в системе (+) на красной траектории на рис.1

$$\dot{x}_2 = \alpha - f(x_1^*) - x_2 = -x_2 < 0$$

Это означает, что вектор $f(x_1^*, x_2)$ сонаправлен с вектором $[1,\, -1]^T$, что возможно только на участке $t \in (0,\, \tau_+)$, поскольку далее $\dot{x}_1 < 0$. Но точка на $(0,\, \tau_+) \times \{0\}$ будет лежать в зоне, где после переключения система будет двигаться в режиме (—), а значит, при вычислении её можно не учитывать. Второе положение равновесия обрабатывается аналогично.

При малых $\alpha \leqslant 0.0002$ у положительной системы будет существовать положение равновесия с $x_1^* < 0$, однако этот корень на несколько порядков больше α, и потому множество достижимости, которое будет равномерно ограничено по времени (числом порядка $\sqrt{\alpha}$), не достигнет данной точки.

6 Примеры работы

Рассмотрим эволюцию множества достижимости при $\alpha = 1$. Здесь и далее красным и синим отмечены кривые первых трех переключений.

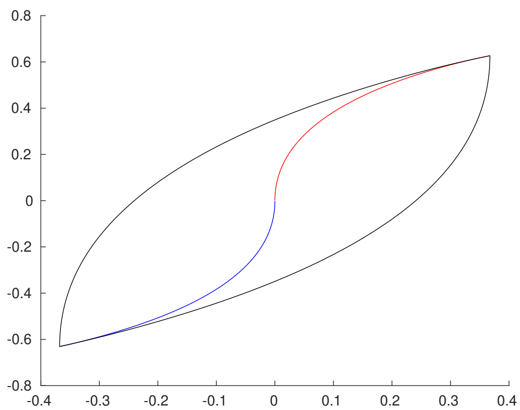

Рис. 4: $T = 1$

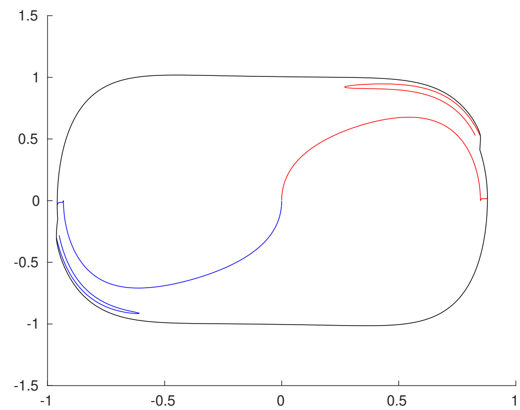

Рис. 5: $T = 4$

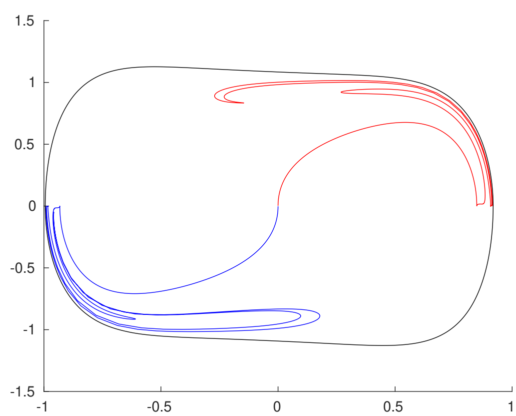

Рис. 6: $T = 10$

Видно, что множество достижимости растет, стремясь к некоторому ограниченному предельному множеству.

Еще несколько примеров при других значениях параметров:

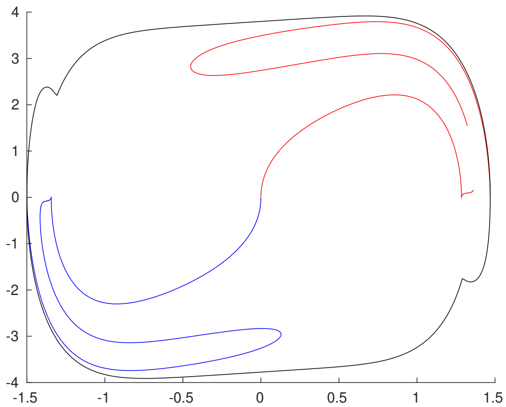

Рис. 7: $T = 1.9,\ \alpha = 5$

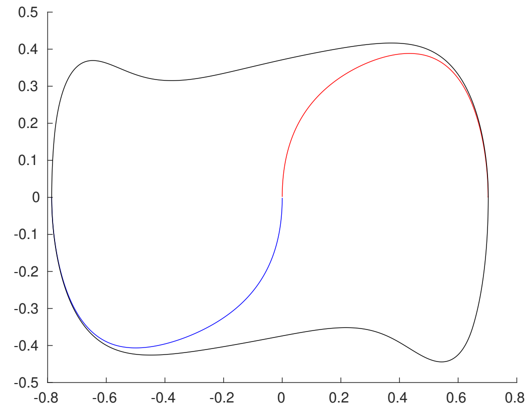

Рис. 8: $T = 3,\ \alpha = 0.5$

Список литературы

[1] Комаров Ю.А. Лекции по оптимальному управлению. ВМК МГУ, 2020.

[2] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972.