Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по самому важному предмету

«Задание 2 практикума по оптимальному управлению»

Студент 315 группы
Д. М. Сотников

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2020

Содержание

Часть I
Теоретическая часть

1 Постановка задачи

Вертикальное движение ракеты описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{m}v + m\dot{v} = -gm + lu \\ \dot{m} = -u \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $v \in \mathbb{R}$ — скорость ракеты, m — масса ракеты, $g > 0$ — гравитационная постоянная, $l > 0$ — коэффициент, определяющий силу, действующую на ракету со стороны сгорающего топлива, $u \in [0, u_{max}]$ — скорость подачи топлива, $u_{max} > 0$. Масса ракеты без топлива равна $M > 0$. Если топливо заканчивается $(m = M)$, то дивгатель ракеты отключается, то есть $u = 0$.

Заданы начальный момент $t_0 = 0$, начальная скорость $v(0) = 0$, начальная масса ракеты с топливом $m(0) = m_0 > M$. Движение ракеты описывается системой (1) на всем отрезке времени, движение вниз в начальный момент времени невозможно, то есть $v(t) > 0,\ t \in [0, \delta]$ для некоторого $\delta > 0$.

Задача 1. Найти измеримое управление $u(\cdot)$, переводящее ракету на максимальную высоту H в заданный момент времени $T > 0$ так, чтобы $v(T) \in [-\epsilon, \epsilon]$.

Задача 2. Найти измеримое управление $u(\cdot)$, переводящее ракету на заданную высоту $H > 0$ в момент времени $T > 0$, минимизируя функционал

$$J = \int\limits_0^T u^4(t)dt.$$

2 Преобразование системы

Сделаем замену переменных $x_1(t) = v(t) + l,\ x_2(t) = m(t)$, а также подставим $\dot{m} = -u$ в первое уравнение системы (1) и поделим его на m. В новых переменных система принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -g + \dfrac{x_1 u}{x_2} \\ \dot{x}_2 = -u \end{cases} \tag{2}$$

Такое представление удобно, поскольку дает возможность решить систему аналитически при постоянных u.

3 Ограничения на входные параметры

Помимо явных ограничений на параметры $(g > 0, l > 0, u_{max} > 0)$ в системе так же присутствует неявное ограничение: как было указано в постановке задачи, для взлеты ракеты ее скорость должна стать положительной, для этого её производная $\dot{v} = \dot{x}_1$ должна быть положительна в начальный момент времени. Используя $x_1(0) = l,\ x_2(0) = m_0$, получим следующее ограничение на управление:

$$u(0) \geqslant \frac{m_0 g}{l} \tag{3}$$

Отсюда же следует, что $u_{max} \geqslant \dfrac{m_0 g}{l}$. Если это неравенство не выполнено, будем считать задачу некорректно поставленной.

Из интерпретации следует, что параметр ϵ в задаче 1 мал, поскольку требуется практически остановить ракету на максимально возможной высоте. А именно, пусть

$$\epsilon < l. \tag{4}$$

4 Вспомогательные утверждения

Главным утверждением, использующимся для решения задачи, является принцип максимума Понтрягина, доказательство которого когда-нибудь будет изложено в [1].

Рассматривается задача оптимального управления автономной системой

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, t_1],\ x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m$$

с минимизацией функционала

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t))dt \to \inf_{u(\cdot)}$$

из множества $\mathcal{X}_0$ в множество $\mathcal{X}_1$, то есть $x(t_0) \in \mathcal{X}_0,\ x(t_1) \in \mathcal{X}_1$. В классе измеримых управлений требуется найти $u(\cdot)$ такое, что $u(t) \in \mathcal{P}(t)$ почти всюду на $[t_0, t_1]$ и $u(\cdot)$ является решением поставленной выше задачи. Здесь $\mathcal{P}(\cdot)$ — заданное измеримое многозначное отображение, $\mathcal{P}(t)$ является выпуклым компактом при любом $t \in [t_0, t_1]$.

Функционал Гамильтона-Понтрягина имеет вид

$$\mathcal{H}(x, u, \tilde{\psi}) = \psi_0 f_0(x, u) + \langle \psi,\ f(x, u) \rangle,$$

где $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) \in \mathbb{R}^n,\ \psi_0 \in \mathbb{R}$.

Теорема 1 (Принцип максимума Понтрягина)**.** *Пусть $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ — решение поставленной задачи оптимального управления. Тогда найдется $\tilde{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n)$, $\tilde{\psi} \not\equiv 0$ такой, что*

$$\mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \tilde{\psi}(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} \max_{u \in \mathcal{P}(t)} \mathcal{H}(x^*(t), u, \tilde{\psi}(t)).$$

При этом $\psi_0 \leqslant 0$ и постоянна, а $\psi(t)$ является решением сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \tilde{\psi}(t)),$$

и выполнены условия трансверсальности

$$\psi(t_0) \perp T_{x^*(t_0)} \mathcal{X}_0, \quad \psi(t_1) \perp T_{x^*(t_1)} \mathcal{X}_1.$$

Рассмотрим так же несколько вспомогательных утверждений, относящихся к дифференциальным уравнениям.

Лемма 1. *Пусть функции $a(\cdot), b(\cdot)$ непрерывны на $[t_0, t_1]$. Тогда задача Коши*

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t), \quad x(t_0) = x^0$$

имеет решение

$$x(t) = x^0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int\limits_{t_0}^{t} b(\tau) e^{\int_{\tau}^{t} a(s)ds} d\tau.$$

Лемма 2. *Пусть функции $a(\cdot), b(\cdot)$ непрерывны на $[t_0, t_1]$ и $b(\cdot)$ знакопостоянна и не обращается в ноль на $[t_0, t_1]$. Тогда решение уравнения $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$ обращается в ноль не более, чем в одной точке, возрастая в ее окрестности, если $b > 0$, и убывая, если $b < 0$.*

Доказательство. Пусть, для определенности, $b(t) > 0$ при любых $t \in [t_0, t_1]$, и пусть решение уравнения обращается в 0 в точке $\tau \in [t_0, t_1]$. Тогда $\dot{x}(\tau) = b(\tau) > 0$, что также выполняется в маленькой окрестности точки τ, поэтому функция $x(\cdot)$ возрастает этой окрестности. Это означает, что траектория может пересекать ноль только «снизу-вверх». Объединяя это с непрерывностью $x(\cdot)$, получаем требуемое утверждение. ■

Договоримся для краткости, что запись $f > 0$ ($f < 0$) означает положительность (отрицательность) функции почти всюду на рассматриваемом отрезке $[t_0,\, t_1]$.

5 Решение задачи 1

В координатах (x_1, x_2) начальное и конечное множества имеют вид

$$\mathcal{X}_0 = \{l\} \times \{m_0\}, \quad \mathcal{X}_1 = [l - \epsilon,\, l + \epsilon] \times [M,\, m_0].$$

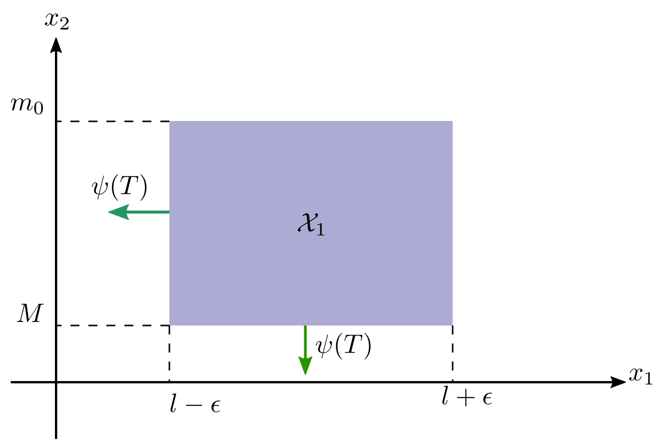

Рис. 1: Множество $\mathcal{X}_1$

Максимизация высоты $H(T) = \int\limits_0^T v(t)dt$ эквивалентна максимизации функционала

$$J = \int\limits_0^T x_1(t)dt$$

Для данной задачи функционал Гамильтона-Понтрягина имеет вид

$$\mathcal{H} = \psi_0 x_1 + \psi_1(-g + \frac{x_1 u}{x_2}) - \psi_2 u = (\psi_0 x_1 - \psi_1 g) + (\frac{\psi_1 x_1}{x_2} - \psi_2)u.$$

Введем вспомогательную функцию $F(t) = \psi_1(t)x_1(t) - \psi_2(t)x_2(t)$. Очевидно, что функционал Гамильтона-Понтрягина является возрастающей линейной функцией по u тогда и только тогда, когда $F(t) > 0$. Здесь мы воспользовались тем, что $x_2 > 0$ всюду на $[0,\, T]$.

Из условия максимума получаем, что

$$u(t) = \begin{cases} u_{max}, & F(t) > 0,\ x_2(t) > M, \\ [0,\, u_{max}], & F(t) = 0,\ x_2(t) > M, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{5}$$

Из условий трансверсальности и вида множества $\mathcal{X}_1$ следует, что $\psi_2(T) = 0$ при $x_2(T) \in\ (M,\, m_0)$, и $\psi_1(T) = 0$ при $x_2(T) = M$.

Заметим также, что $x_1(t) > 0$ всюду на $[0,\, T]$. Это следует из того, что $x_1(T) > l - \epsilon \overset{(4)}{>} 0$ и леммы 2: если найдется $\tau \in (0,\, T)$ такое, что $x_1(\tau) = 0$, то $x_1(t) < 0$ для всех $t > \tau$.

Рассмотрим теперь возможные режимы движения системы, которые будут получены из принципа максимума Понтрягина.

5.1 Нормальный случай

Пусть $\psi_0 \neq 0$. Тогда в силу положительной однородности принципа максимума по $\tilde{\psi}$ можно считать, что $\psi_0 = 1$. Тогда сопряженная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = -1 + \dfrac{\psi_1 u}{x_2} \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = \dfrac{\psi_1 x_1 u}{x_2^2} \end{cases} \tag{6}$$

Вычислим $\dot{F} = \dot{\psi}_1 x_1 + \psi_1 \dot{x}_1 - \dot{\psi}_2 x_2 - \psi_2 \dot{x}_2 = -x_1 + \dfrac{\psi_1 x_1 u}{x_2} - \psi_1 g - \dfrac{\psi_1 x_1 u}{x_2} - \dfrac{\psi_1 x_1 u}{x_2} + \psi_2 u =$ $= -x_1 - \psi_1 g - \dfrac{Fu}{x_2}$. Таким образом получили, что F удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{F} = (-x_1 - \psi_1 g) - \frac{Fu}{x_2}. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь, как будут меняться режимы движения в зависимости от того, закончилось ли топливо к концу полета или нет.

Случай $m(T) > M$ Пусть к моменту времени T было израсходавано не все топливо. Тогда из условий трансверсальности следует, что $\psi_2(T) = 0$, а значит $F(T) = \psi_1(T) x_1(T)$.

Пусть $F(T) \geqslant 0$ Если $F(T) \geqslant 0$, то $\psi_1(T) \geqslant 0$, и, по лемме 2, $\psi_1 > 0$. Но тогда $-x_1 - \psi_1 g < 0$, и из уравнения (7) и леммы 2 следует, что $F > 0$. Но это означает, что

$$u(t) = u_{max}, \quad t \in [0,\, T].$$

Пусть $F(T) < 0$ В этом случае можно утверждать, что найдется точка τ_s, в которой $F(\tau_s) = 0$, и $F(t) < 0,\ t \in (\tau_s,\, T]$. Если такой точки нет, то $F < 0$, и двигатель всегда будет выключен, что невозможно в поставленной задаче (ракета упадет на землю). Из вида управления (14) следует, что $u(t) = 0,\ t > \tau_s$. Тогда, решая задачу Коши на $[\tau_s,\, T]$ получаем $\psi_2(\tau_s) = 0$. Поскольку $F(\tau_s) = \psi_1(\tau_s) x_1(\tau_s) = 0$, получаем $\psi_1(\tau_s) = 0$. Далее рассуждениями, полностью аналогичными прошлому случаю, получаем $u(t) = u_{max}$ на $[0,\, \tau_s]$.

Случай $m(t) = M$ Из условия трансверсальности $\psi_1(T) = 0$, откуда по лемме 2 $\psi_1 > 0$. Так как топливо закончилось, был промежуток времени, в который двигатель был включен. Пусть τ_F — момент, когда топливо закончилось, то есть $F(\tau_F) \geqslant 0$. Заметим вновь, что $(-x_1 - \psi_1 g) < 0$, и поэтому $F > 0,\ u = u_{max}$ на $[0,\, \tau_s]$.

Вывод Подведем итог нормального случая. Все допустимые режимы имеют следующий вид: $u(t) = u_{max}$ до некоторого момента выключения двигателя либо до тех пор, пока не кончится топливо (то есть в момент $\tau_F = \dfrac{m_0 - M}{u_{max}}$).

5.2 Анормальный случай

Пусть $\psi_0 = 0$. Тогда сопряженная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = \dfrac{\psi_1 u}{x_2} \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = \dfrac{\psi_1 x_1 u}{x_2^2} \end{cases} \tag{8}$$

Фкнкция F удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{F} = -\psi_1 g - \frac{Fu}{x_2}.$$

Случай $m(T) > M$ $\quad F(T) = \psi_1(T) x_1(T)$.

Пусть $F(T) < 0$ $\quad \psi_1(T) < 0$, поэтому из сопряженной системы $\psi_1 < 0,\ -\psi_1 g > 0$, и по лемме 2 $F < 0$, что невозможно, так как в момент взлета управление должно быть ненулевым.

Пусть $F(T) = 0$ $\quad$ так же невозможен, поскольку противоречит нетривиальности вектора сопряженных переменных $\tilde{\psi}$.

Пусть $F(T) > 0$ $\quad$ Аналогично нормальному случаю показывается, что $F > 0,\ u = u_{max}$.

Случай $m(T) = M$ $\quad \psi_1 \equiv 0$, и функция F не проходит через нуль, поскольку нуль является неподвижной точкой для F. $F \not\equiv 0$, поскольку иначе $\psi_2(T) = 0$, что противоречит принципу максимума. Так как при взлете управление ненулевое, получаем $F > 0,\ u(t) = u_{max},\ t < \tau_F$.

Вывод Анормальный случай приводит к тем же режимам, что и нормальный.

5.3 Разрешимость задачи и алгоритм решения

Задача разрешима, если $x_1(T) \in [l - \epsilon,\, l + \epsilon]$. Это условие может не выполняться при больших значениях T, когда ракета будет терять скорость после того, как закончится топливо, и $x_1(T) < l - \epsilon$. Кроме того, систему можно явно проинтегрировать с помощью леммы 1, поэтому справедлива формула

$$x_1^T(\tau_s) = \frac{g m_0}{2u_{max}} - \frac{g\tau_s}{2} + \frac{m_0(g m_0 - 2 l u_{max})}{2u_{max}(-m_0 + \tau_s u_{max})} - g(T - \tau_s).$$

Эта формула позволяет найти значение x_1 в конечный момент времени в зависимости от τ_s — момента выключения двигателя.

Таким образом, задача неразрешима, если $\tau_F = \dfrac{m_0 - M}{u_{max}} < T$, и $x_1^T(\tau_F) < l - \epsilon$. В противном случае можно найти такое значение параметра τ_s, при котором $x_1(T) \in [l - \epsilon,\, l + \epsilon]$. Очевидно, что оптимальным является наибольший из таких параметров, то есть

$$\tau_s^* = \max\{\tau_s \in [0,\, \tau_F] \colon\ x_1^T(\tau_s) \leqslant l + \epsilon\}.$$

6 Решение задачи 2

Введем еще одну переменную $x_3 = \int\limits_0^t v(t)dt$ — высоту, на которой находится ракета. Тогда движение описывается системой

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -g + \dfrac{x_1 u}{x_2} \\ \dot{x}_2 = -u \\ \dot{x}_3 = x_1 - l \end{cases} \tag{9}$$

Начальное и конечное множества имеют вид

$$\mathcal{X}_0 = \{l\} \times \{m_0\} \times \{0\}, \quad \mathcal{X}_1 = \mathbb{R} \times [M, m_0] \times \{H\}.$$

Функционал Гамильтона-Понтрягина равен

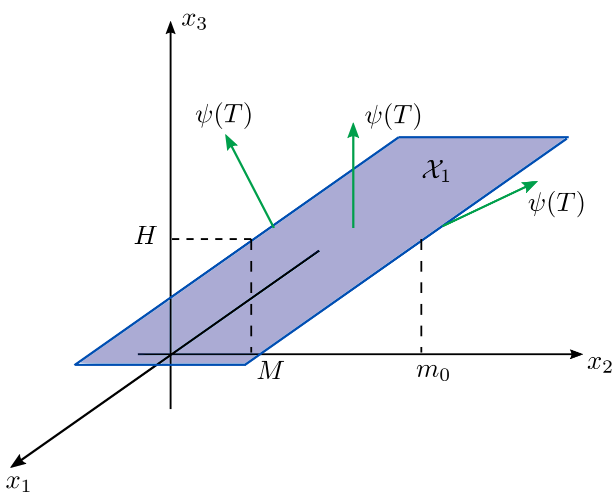

Рис. 2: Множество $\mathcal{X}_1$

$$\mathcal{H} = \psi_0 u^4 + \psi_1(-g + \frac{x_1 u}{x_2}) - \psi_2 u + \psi_3(x_1 - l),$$

а сопряженная система

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_3 - \dfrac{\psi_1 u}{x_2} \\ \dot{\psi}_2 = \dfrac{\psi_1 x_1 u}{x_2^2} \\ \dot{\psi}_3 = 0 \end{cases}$$

Отсюда получаем $\psi_3 \equiv \psi_3^0$, и система примет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_3^0 - \dfrac{\psi_1 u}{x_2} \\ \dot{\psi}_2 = \dfrac{\psi_1 x_1 u}{x_2^2} \end{cases} \tag{10}$$

Из условий трансверсальности следует, что $\psi_1(T) = \psi_2(T) = 0$ при $x_2(T) \in (M, m_0)$, и $\psi_1(T) = 0$ при $x_2(T) = M$. А так как $\dot{\psi}_1(T) = -\psi_3^0$, то из леммы 2 вытекает, что либо $\psi_3^0 > 0$ и $\psi_1 > 0$, либо $\psi_3^0 < 0$ и $\psi_1 < 0$, либо $\psi_3^0 = 0$ и $\psi_1 \equiv 0$.

Аналогично первой задаче вычисляется

$$\dot{F} = (-\psi_1 g - \psi_3^0 x_1) - \frac{Fu}{x_2}. \tag{11}$$

6.1 Нормальный случай

Будем считать, что $\left\|\tilde{\psi}(0)\right\| = 0$ Тогда

$$\mathcal{H} \to \max_{u\in[0,\, u_{max}]} \Leftrightarrow -\psi_0 u^4 + \frac{Fu}{x_2} \to \max_{u\in[0,\, u_{max}]}$$

Для удобства рассматриваем $\psi_0 > 0$, записывая в функционале Гамильтона-Понтрягина $-\psi_0$.

Функция $-\psi_0 u^4 + \dfrac{Fu}{x_2}$ является вогнутой и достигает максимум в единственной точке

$$u = \sqrt[3]{\frac{F}{4\psi_0 x_2}}.$$

Если $\sqrt[3]{\dfrac{F}{4\psi_0 x_2}} > u_{max} \Leftrightarrow F - 4\psi_0 x_2 u_{max}^3 > 0$, то $u = u_{max}$. Введем функцию

$$K(t) = F(t) - 4\psi_0 x_2(t) u_{max}^3$$

и запишем управление, полученное из условия максимума:

$$u(t) = \begin{cases} u_{max}, & K(t) > 0,\ x_2(t) > M, \\ \sqrt[3]{\dfrac{F}{4\psi_0 x_2}}, & K(t) < 0,\ F(t) > 0,\ x_2(t) > M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{12}$$

Назовем для удобства эти режимы I, II и III соответсвенно.

Заметим также, что

$$\dot{K} = (-\psi_1 g - \psi_3^0 x_1) - \frac{Ku}{x_2},$$

то есть K удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и F.

Случай $m(T) > M$ Из условий трансверсальности $F(T) = 0$. $\psi_3^0 \neq 0$, иначе $F \equiv 0$, и $u \equiv 0$, что противоречит постановке задачи. Также невозможен случай $\psi_3^0 < 0$: если $x_1(T) > 0$, то $F < 0$, если же $x_1(T) < 0$, то $F(t) > 0$, $u(t) > 0$ в правой полуокрестности T, однако при отрицательных x_1 управление увеличивает скорость движения вниз, и нетривиальное управление на участке, где $x_1(t) < 0$, заведомо не может быть оптимальным. Значит,

$$\psi_3^0 > 0,\ \psi_1 > 0.$$

Так как скорость в начальный момент положительна, $u(0) > \dfrac{m_0 g}{l} > 0$, и значит $F(0) > 0$. Если $F(t) > 0$ ($K(t) > 0$) на некотором множестве, то на нем $x_1 > 0$, и $-\psi_1 g - \psi_3^0 x_1 < 0$, поэтому в силу (11) F (K) монотонно убывает на этом множестве. Если где-то $F(t) > 0$ и $K(t) < 0$, то $x_1 > 0$ и $-\psi_1 g - \psi_3^0 x_1 < 0$ поэтому по лемме 2 функция K не обращается в 0 на этом множестве.

Таким образом было показано, что возможны только следующие переходы между режимами:

- Из режима I в II
- Из режима II в III

То есть движение может реализовываться только по сценарию (I)-II-(III), где режимы в скобках могут быть пропущены.

Заметим так же, что $\dot{\psi}_1 < -\psi_3^0$. Интегрируя это неравенство от 0 до T, получим

$$\psi_3^0 < \frac{\psi_1^0}{T}.$$

Случай $m(T) = M$ Поскольку $\psi_1(T) = 0$, ψ_3^0 и ψ_1 одного знака, случай $\psi_3^0 > 0$ рассматривается абсолютно аналогично предыдущему.

Если $\psi_3^0 = 0$, то $\psi_1 \equiv 0$. Тогда функции K и F убывают на области положительной определенности, не проходя через 0, поэтому движение будет осуществляться либо в режиме I, либо в режиме II до тех пор, пока не кончится топливо.

Если же $\psi_3^0 < 0$, то $\psi_1 < 0$, поэтому функции K и F так же не попадают в 0, если положительны. То есть реадизуется один из двух сценариев I и II-(I). При этом $\dot{\psi_1} > -\psi_3^0$, поэтому

$$\psi_3^0 > \frac{\psi_1^0}{T}$$

Вывод Получили, что система будет двигать не более, чем в двух нетривиальных режимах, то есть во время движения произойдет не более одного переключения. При этом были получены следующие ограничения на начальные значения сопряженных переменных

$$\psi_1^0 \in [-1,\,1], \quad \psi_3^0 \in [-1,\,1], \quad \psi_1^0\psi_3^0 \geqslant 0, \quad |\psi_3^0| \leqslant \frac{|\psi_1^0|}{T}, \tag{13}$$

$$\psi_2^0 \in [-1,\,0], \quad \psi_0 \in [0,\,1], \quad (\psi_0)^2 + (\psi_1^0)^2 + (\psi_2^0)^2 + (\psi_3^0)^2 = 1.$$

ψ_2^0 отрицательна, посокльку при $\psi_1 > 0$ функция ψ_2 возрастает, и $\psi_2(T) = 0$, а при $\psi_1 < 0$ случай $\psi_2^0 > 0$ невозможен, так как $F(0) = \psi_1^0 l - \psi_2^0 m_0 > 0$.

Добавим также условие взлета

$$u(0) > \frac{m_0 g}{l} \Leftrightarrow F(0) > \frac{4\psi_0 m_0^4 g^3}{l^3}.$$

6.2 Анормальный случай

Если $\psi_0 = 0$, то

$$\mathcal{H} = \psi_1(-g + \frac{ux_1}{x_2}) - \psi_2 u + \psi_3(x_1 - l).$$

Поэтому управление будет иметь тот же вид, что и в задаче 1:

$$u(t) = \begin{cases} u_{max}, & F(t) > 0,\ x_2(t) > M, \\ [0,\,u_{max}], & F(t) = 0,\ x_2(t) > M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{14}$$

Сопряженная система останется такой же, как в нормальном случае:

$$\begin{cases} \dot{\psi_1} = -\psi_3^0 - \dfrac{\psi_1 u}{x_2} \\ \dot{\psi_2} = \dfrac{\psi_1 x_1 u}{x_2^2} \end{cases} \tag{15}$$

Случай $m(T) > M$ Из условий трансверсальности $F(T) = 0$. Как и в нормальном случае показывается, что $\psi_3^0 > 0$, откуда следует $F > 0,\ u \equiv u_{max}$.

Случай $m(T) = M$ Если $\psi_3^0 > 0$, то $\psi_1 > 0$, поэтому функция F убывает и имеет не более одного корня. Однако, так как $m(T) = M$, $F(\tau_F) \geqslant 0$, то есть F положительна до тех пор, пока не кончится топливо. Если $psi_3^0 < 0$, то $\psi_1 < 0$, поэтому по лемме 2 функция F не имеет корней ($F(0) > 0$). Случай $\psi_3^0 = 0$ означает, что $\psi_1 \equiv 0$, и $\dot{F} = -\dfrac{Fu}{x_2}$. Но так $F(0) > 0$, снова приходим к тому, что $F > 0$.

Вывод Таким образом, единственный возможный режим, полученный из анормального случая, — положить $u(t) = u_{max}$ до тех пор, пока это возможно.

6.3 Разрешимость задачи и алгоритм решения

Задача является неразрешимой, если при управлении $u = u_{max},\ t \in [0,\ \tau_F]$ получим $x_3(T) <\ H$. Это следует из задачи 1, в которой было показано, что именно это управление максимизирует $x_3(T)$. Если $x_3(T) \geqslant H$, то задача разрешима, причем при $x_3(T) = H$ единственным возможным, и потому оптимальным, будет являться описанное выше управление $u =\ u_{max},\ t\ \in\ [0,\ \tau_F]$, то есть реализуется анормальный случай. При $x_3(T)\ >\ H$ будем перебирать параметры $\psi_0, \psi_1^0, \psi_3^0$ в соответсвие с ограничениями (13), выбирая те траектории, у которых

$$\psi_1(T) = 0, \quad \psi_2 < 0, \quad x_3(T) = H,$$

переключаясь между режимами в корнях K и F, которые описываются уравнением

$$\dot{F} = -\psi_3^0 x_1 - \psi_1 g - \frac{Fu}{x_2}.$$

Список литературы

[1] Комаров Ю.А. Лекции по оптимальному управлению. ВМК МГУ, 2020.