



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по самому важному предмету

«Задание 1 практикума по оптимальному управлению»

Студент 315 группы
Д. М. Сотников

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2020

Часть I

Теоретическая часть

1 Постановка задачи

Дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f, \quad t \in [t_0, +\infty),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^2$, $u(t) \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $f \in \mathbb{R}^2$, а значения функции управления $u(t) \in \mathcal{P} \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$.

Множество допустимых управлений имеет вид

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + ax_2^2 \leq b, ax_1^2 + x_2^2 \leq b\}, \quad a, b > 0.$$

Будем считать, что $a > 1$, в противном случае сделаем замену $a = \frac{1}{a}$, $b = \frac{b}{a}$.

Начальное множество значений фазового вектора:

$$\mathcal{X}_0 = \mathbb{B}(x_0, r_0).$$

Терминальное множество:

$$\mathcal{X}_1 = \text{conv} \left\{ x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n)} \right\} + \mathbb{B}(0, \epsilon), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Необходимо численно решить задачу быстродействия, то есть перевести систему из множества \mathcal{X}_0 в множество \mathcal{X}_1 , минимизируя время перемещения $(t_1 - t_0)$. При этом, поскольку система является линейной и автономной, будем считать, что $t_0 = 0$.

2 Принцип максимума Понтрягина

Решение задачи опирается на принцип максимума Понтрягина для линейных систем [1].

Теорема 1 (Принцип максимума Понтрягина). *Пусть $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ — оптимальная пара, t_1^* — соответствующее ей время перемещения. Тогда существует дифференцируемая функция $\psi(\cdot) \not\equiv 0$, для которой выполнено*

1. $\langle \psi(t), Bu^*(t) \rangle = \rho(\psi(t) | B\mathcal{P})$ для почти всех $t \in [0, t_1^*]$;
2. $\langle \psi(0), x^*(0) \rangle = \rho(\psi(0) | \mathcal{X}_0)$;
3. $\langle -\psi(t_1^*), x^*(t_1^*) \rangle = \rho(-\psi(t_1^*) | \mathcal{X}_1)$.

При этом функция $\psi(\cdot)$ является решением сопряженной системы $\dot{\psi}(t) = -A^T \psi(t)$, а класс управлений представляет собой множество измеримых функций, принимающих значения в \mathcal{P} .

Заметим, что если $\psi(\cdot)$ удовлетворяет условиям теоремы, то им будет удовлетворять и функция $\alpha\psi(\cdot)$, $\forall \alpha > 0$. Это следует из линейности скалярного произведения и положительной однородности опорной функции. Поэтому можно считать, что $\|\psi(0)\| = 1$.

Перебирая по единичному кругу параметр $\psi(0) = \psi^0$, можно найти все возможные траектории и управления, удовлетворяющие принципу максимума Понtryгина, что существенно сузит класс функций, среди которых следует искать решение. Оптимальная при этом имеет наименьшее значение функционала t_1 .

Для проверки пунктов теоремы необходимо знать опорные функции и векторы множеств \mathcal{X}_0 , \mathcal{X}_1 , \mathcal{P} , которые можно найти аналитически.

3 Вычисление опорных функций и множеств

В этом разделе приведено аналитическое вычисление опорных функций для начального, терминального множества и множества допустимых управлений.

Поскольку \mathcal{X}_0 является шаром, его опорная функция известна и имеет вид

$$\rho(l | \mathcal{X}_0) = \rho(l | \{x_0\}) + \rho(l | \mathbb{B}(0, r_0)) = \langle l, x_0 \rangle + r_0 \|l\|.$$

Это значение достигается на опорном векторе

$$x^* = x_0 + \frac{l}{\|l\|} r_0.$$

Для вычисления опорной функции X_1 воспользуемся свойством линейности ρ по второму аргументу и тем, что опорная функция для выпуклой комбинации точек является максимумом скалярных произведений вектора l на эти точки:

$$\rho(l | \mathcal{X}_1) = \rho(l | \text{conv} \left\{ x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n)} \right\}) + \rho(l | \mathbb{B}(0, \epsilon)) = \max_{i=1, \dots, n} \langle l, x_1^{(i)} \rangle + \epsilon \|l\|.$$

Множество всех опорных векторов X^* для \mathcal{X}_1 есть сумма опорных множеств для $\text{conv} \left\{ x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n)} \right\}$ и $\mathbb{B}(0, \epsilon)$, и поэтому имеет вид

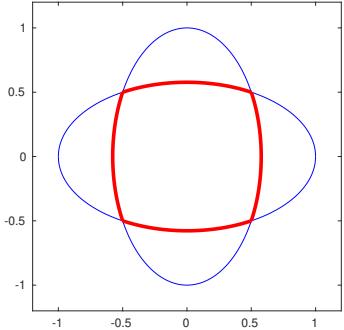
$$X^* = \underset{x_1^{(i)}, i=1, \dots, n}{\text{Argmax}} \langle l, x_1^{(i)} \rangle + \frac{l}{\|l\|} \epsilon.$$

При этом $\underset{x_1^{(i)}, i=1, \dots, n}{\text{Argmax}} \langle l, x_1^{(i)} \rangle$ состоит из одной точки — вершины многоугольника — в случае, когда l не перпендикулярен ни одной из сторон, или содержит всю соответствующую сторону в противном случае.

Множество \mathcal{P} является пересечением двух эллипсоидов

$$\begin{aligned} x_1^2 + ax_2^2 &\leq b, \\ ax_1^2 + x_2^2 &\leq b, \end{aligned}$$

где $a > 1$, $b > 0$.



На рисунке множество \mathcal{P} отмечено красным. Заметим, что, в силу симметрии, достаточно найти опорную функцию и опорный вектор только в случае $l_1 > l_2 > 0$.

Используя функцию Лагранжа, находим условный экстремум на эллипсе $x_1^2 + ax_2^2 = b$:

$$x_1^* = \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + al_2^2}}, \quad x_2^* = \frac{l_2 \sqrt{ab}}{\sqrt{l_1^2 + al_2^2}}.$$

Найденные решения являются опорными векторами только в том случае, когда лежат на $\partial\mathcal{P}$, а именно когда $|x_2^*| < \sqrt{\frac{b}{a+1}}$. Опорная функция при этом принимает значение $\sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{l_1^2 + al_2^2}$. В случае верхней и нижней стороны множества по аналогии получаем

$$x_1^* = \frac{l_1 \sqrt{ab}}{\sqrt{al_1^2 + l_2^2}}, \quad x_2^* = \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{l_2}{\sqrt{al_1^2 + l_2^2}}, \quad |x_1^*| < \sqrt{\frac{b}{a+1}}.$$

Опорная функция здесь равна $\sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{al_1^2 + l_2^2}$. Во всех остальных случаях опорным вектором будет являться один из «углов» множества $\sqrt{\frac{b}{a+1}} [\operatorname{sgn} l_1, \operatorname{sgn} l_2]^T$.

Объединяя все вышесказанное, получаем итоговый вид для опорной функции:

$$\rho(l \mid \mathcal{P}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{l_1^2 + al_2^2}, & |l_1| > |l_2|, \frac{|l_2| \sqrt{ab}}{\sqrt{l_1^2 + al_2^2}} < \sqrt{\frac{b}{a+1}}, \\ \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{al_1^2 + l_2^2}, & |l_2| > |l_1|, \frac{|l_1| \sqrt{ab}}{\sqrt{al_1^2 + l_2^2}} < \sqrt{\frac{b}{a+1}}, \\ \sqrt{\frac{b}{a+1}} (|l_1| + |l_2|), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

Часть II

Практическая часть

1 Описание алгоритма

Для поиска оптимальной траектории используется перебор по функциям, удовлетворяющим принципу максимума, которые параметризованы одним числом — углом вектора ψ^0 , лежащего на единичной окружности.

Предполагается, что матрица B является невырожденной, в противном случае будем добавлять к ней незначительные случайные изменения до тех пор, пока ее определитель не станет больше некоторого заданного числа ϵ_B . Таким образом, $\text{Ker } B = \{0\}$.

Отметим также, что сопряженная переменная $\psi(t) \neq 0, \forall t \geq 0$. Это следует из единственности решения задачи Коши и требования $\psi(\cdot) \not\equiv 0$ принципа максимума.

Ниже приведены шаги алгоритма вычисления субоптимальной пары.

- Создание равномерной сетки значений $\psi^0 = \psi(0)$ на окружности и численное решение задачи Коши для сопряженной системы

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -A^T \psi(t), & t \in [0, 1], \\ \psi(0) = \psi^0 \end{cases} \quad (2)$$

с помощью функции `ode45` на некоторой временной сетке.

- В каждом узле сетки вычислим значение управления, пользуясь пунктом 1. принципа максимума: $u(t)$ является опорным вектором множества \mathcal{P} по направлению $B^T \psi(t) \neq 0$. Опорный вектор этого множества был вычислен аналитически в прошлом разделе и определен однозначно.
- Из условия трансверсальности 2. найдем начальную точку $x^0 = x(0)$ которая является опорным вектором к \mathcal{X}_0 по направлению ψ^0 и также определена однозначно.
- Зная начальное условие и управление, найдем траекторию $x[t]$, решая задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f, & t \in [0, 1], \\ x(0) = x^0 \end{cases} \quad (3)$$

Получили, что каждому значению ψ^0 соответствует единственная пара $(u(t), x(t))$, удовлетворяющая принципу максимума Понtryгина.

- Численно проверим попадание траектории в терминальное множество, пользуясь свойством

$$x \in \mathcal{X}_1 \Leftrightarrow \langle l, x \rangle \leq \rho(l | X_1), \quad \forall l: \|l\| = 1. \quad (4)$$

При попадании траектории в \mathcal{X}_1 установим значение t_1^* , далее которого вычисления других траекторий производиться не будут. Таким образом, к концу перебора t_1^* будет равно минимальному времени перемещения для перебираемых траекторий, а соответствующая траектория, на которой достигается это значение, будет субоптимальной.

- Если же ни одна из траекторий не попала в терминальное множество, продолжим их на отрезок $[1, 2]$ и выполним аналогичные действия. Вычисления продолжаются до тех пор, пока $t \leq t_{max}$, где t_{max} — заранее задаванный параметр алгоритма. Если к этому времени ни одна из траекторий не достигла \mathcal{X}_1 , считаем, что задача не имеет решения.

2 Проверка условия трансверсальности

В описанном алгоритме никак не было задействовано условие трансверсальности \mathcal{Z} . теоремы 1. Так как оптимальное управление удовлетворяет всем трем пунктам теоремы, найденное решение также должно им удовлетворять, и пункт \mathcal{Z} . можно использовать для оценки погрешности (если условие трансверсальности не выполнено, найденное управление не может быть оптимальным).

Для проверки данного условия необходимо найти опорную гиперплоскость в точке $x^1 \equiv x^*(t_1^*)$, где $x^*(\cdot)$ — найденная субоптимальная траектория. Из гладкости границы $\partial\mathcal{X}_1$ следует, что каждой его точке однозначно ставится в соответствие направление, по которому она является опорным вектором. Таким образом для x^1 найдется единственный вектор l такой, что $\langle l, x^1 \rangle = \rho(l | \mathcal{X}_1)$, $\|l\| = 1$. Это вектор найдем численно с помощью сетки на единичной сфере, выбирая l , минимизирующий $|\langle l, x^1 \rangle - \rho(l | \mathcal{X}_1)|$. Если $l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$, то вектор нормали к опорной гиперплоскости имеет вид $n = \begin{bmatrix} -l_2 \\ l_1 \end{bmatrix}$. Для оценки «неоптимальности» найденного решения будем использовать угол α между $\frac{\psi(t_1^*)}{\|\psi(t_1^*)\|}$ и n , который можно найти по формуле $\alpha = \arccos \left\langle \frac{\psi(t_1^*)}{\|\psi(t_1^*)\|}, n \right\rangle$. В случае идеального выполнения принципа максимума $\alpha = 0$.

3 Локализация и уточнение вычислений

При большой ошибке в условии трансверсальности \mathcal{Z} . рассматривается более мелкая сетка для параметра ψ^0 , охватывающая меньший угол, чем на предыдущей итерации, и симметричная относительно ψ_*^0 — оптимального параметра на прошлой итерации.

Последовательное уточнение происходит до тех пор, пока ошибка в условии трансверсальности не станет достаточно маленькой.

4 Примеры работы программы

Пример 1

$$A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathcal{X}_0 = \mathbb{B} \left(\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}, 1 \right),$$

$$\mathcal{X}_1 = \text{conv} \left\{ \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} \right\} + \mathbb{B}(0, 1),$$

$$\mathcal{P} = \{u: 2u_1^2 + u_2^2 \leq 1, u_1^2 + 2u_2^2 \leq 1\}.$$

За одну итерацию работы программы значения функционала

$$t_1^* = 1.1790,$$

а ошибка условия трансверсальности $\alpha = 0.0687^\circ$.

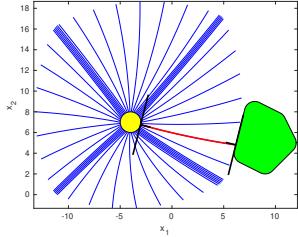


Рис. 1: График (x_1, x_2)

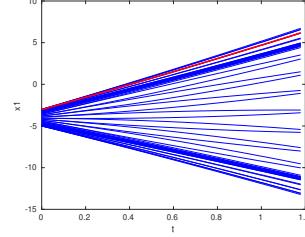


Рис. 2: График (t, x_1)

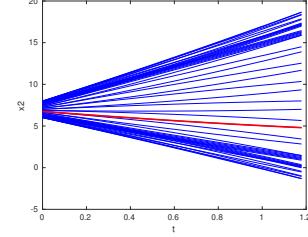


Рис. 3: График (t, x_2)

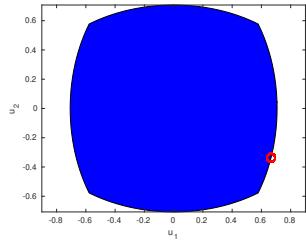


Рис. 4: График (u_1, u_2)

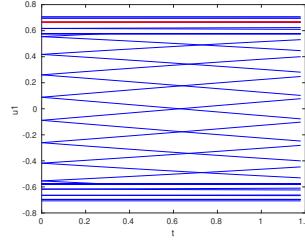


Рис. 5: График (t, u_1)

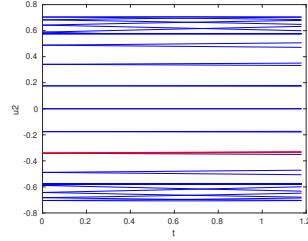


Рис. 6: График (t, u_2)

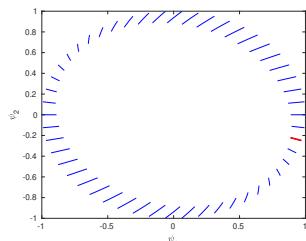


Рис. 7: График (ψ_1, ψ_2)

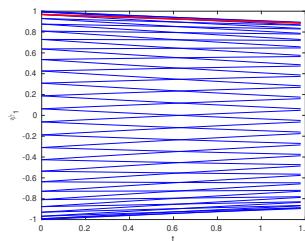


Рис. 8: График (t, ψ_1)

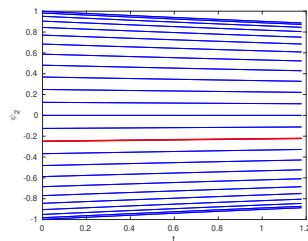


Рис. 9: График (t, ψ_2)

Пример 2

$$A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathcal{X}_0 = \mathbb{B} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, 1 \right),$$

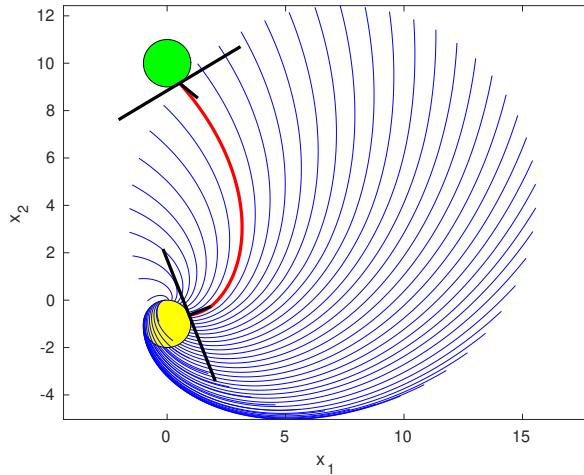
$$\mathcal{X}_1 = \text{conv} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \right\} + \mathbb{B}(0, 1),$$

$$\mathcal{P} = \{u: u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}.$$

За одну итерацию работы программы значения функционала

$$t_1^* = 1.0390,$$

а ошибка условия трансверсальности $\alpha = 19.7232^\circ$.



После второй итерации

$$t_1^* = 1.0370,$$

и ошибка $\alpha = 2.3975^\circ$.

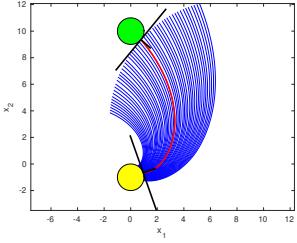


Рис. 10: График (x_1, x_2)

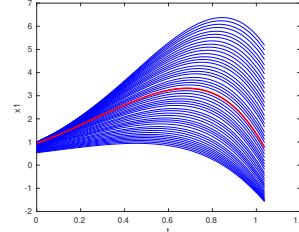


Рис. 11: График (t, x_1)

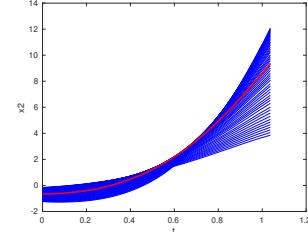


Рис. 12: График (t, x_2)

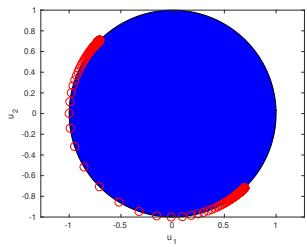


Рис. 13: График (u_1, u_2)

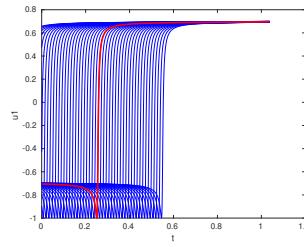


Рис. 14: График (t, u_1)

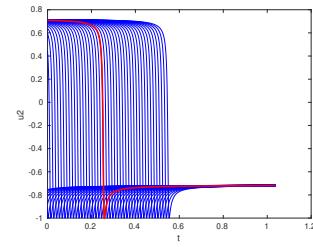


Рис. 15: График (t, u_2)

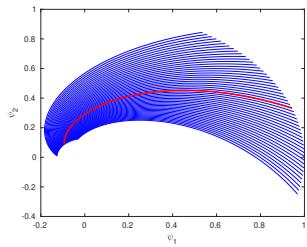


Рис. 16: График (ψ_1, ψ_2)

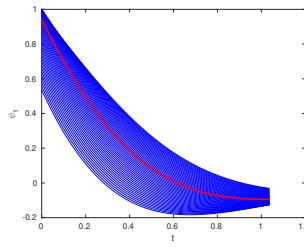


Рис. 17: График (t, ψ_1)

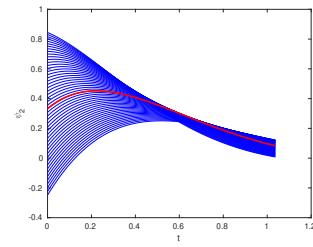


Рис. 18: График (t, ψ_2)

5 Разрывность зависимости t_1 от входных параметров

Пример 1

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{X}_0 &= \mathbb{B} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, 1 \right), \\
 \mathcal{X}_1 &= \text{conv} \left\{ \left(3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} + \mathbb{B}(0, 1), \\
 \mathcal{P} &= \{u: u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Центр координат является особой точкой типа неустойчивый фокус для матрицы A . При этом матрица A влияет на траекторию сильнее управления, и траектория не может выйти за пределы некоторой спирали. При расположении терминального множества на

крайней траектории оно будет достижимо за один оборот вокруг центра координат, однако при сколь угодно малом увеличении координаты его центра на перемещение потребуется уже два оборота, и значение функционала t_1^* изменится скачком, то есть зависимость не является непрерывной.

Первый рисунок соответствует поставленной задаче. Во втором случае остаются неизменными все множества, кроме целевого, вместо которого рассматривается возмущенное

$$\tilde{\mathcal{X}}_1 = \mathcal{X}_1 + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

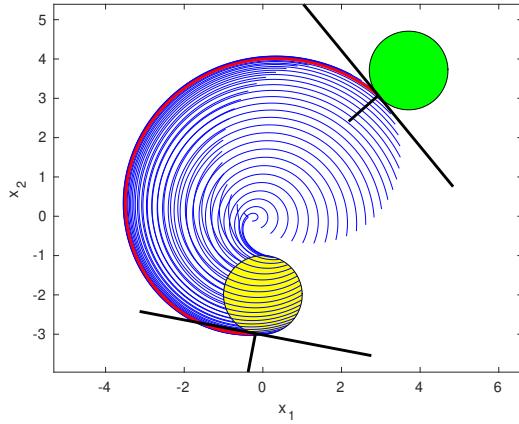


Рис. 19: $t_1^* = 1.2680$

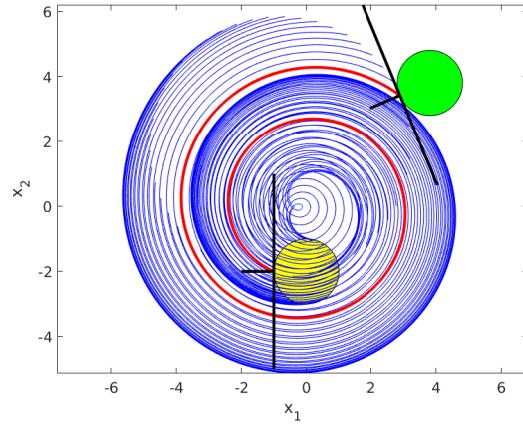


Рис. 20: $t_1^* = 3.0060$

Пример 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathcal{X}_0 = \mathbb{B} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, 1 \right),$$

$$\mathcal{X}_1 = \text{conv} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + \mathbb{B}(0, 1),$$

$$\mathcal{P} = \{u: u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}.$$

Следующий пример показывает, что разрывы у функционала, вообще говоря, могут быть и второго рода. Здесь все точки начального множества неположительны, а вектор f «тянет» решение влево с единичной скоростью. А так как управления ограничены единичным кругом, выйти в область $\{x_1 > 0\}$ в этой задаче невозможно, то есть $t_1^* = +\infty$. Однако при сколь угодно малом смещении начального множества вправо, появляется решение, выходящее из точки $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 + \epsilon \end{bmatrix}$.

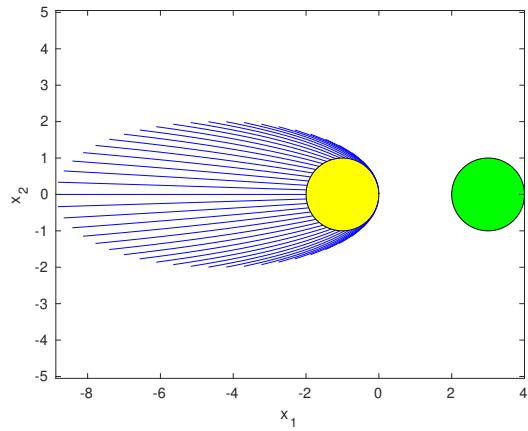


Рис. 21: $t_1^* = +\infty$

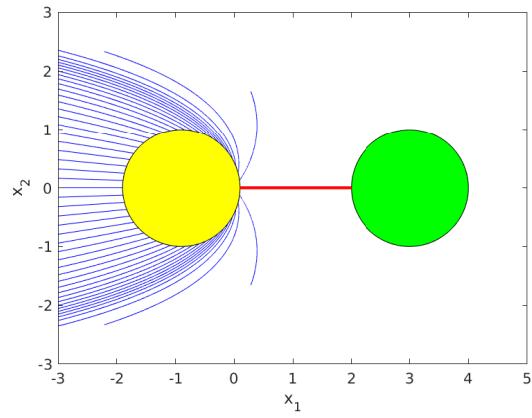


Рис. 22: $t_1^* = 2.9960$

Список литературы

- [1] Рублев И.В. Лекции по оптимальному управлению. ВМК МГУ, 2019.