Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по самому важному предмету

«Задание 1 практикума по оптимальному управлению»

Студент 315 группы
Д. М. Сотников

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2020

Часть I
Теоретическая часть

1 Постановка задачи

Дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}\,(t) = Ax\,(t) + Bu\,(t) + f, \quad t \in [t_0, +\infty),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^2,\ u(t) \in \mathbb{R}^2,\ A \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ B \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ f \in \mathbb{R}^2$, а значения функции управления $u(t) \in \mathcal{P} \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$.

Множество допустимых управлений имеет вид

$$\mathcal{P} = \left\{x \in \mathbb{R}^2\colon\ x_1^2 + ax_2^2 \leq b,\ ax_1^2 + x_2^2 \leq b\right\}, \quad a, b > 0.$$

Будем считать, что $a > 1$, в противном случае сделаем замену $a = \frac{1}{a},\ b = \frac{b}{a}$.

Начальное множество зачений фазового вектора:

$$\mathcal{X}_0 = \mathbb{B}(x_0, r_0).$$

Терминальное множество:

$$\mathcal{X}_1 = \mathrm{conv}\{x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(n)}\} + \mathbb{B}(0, \epsilon), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Необходимо численно решить задачу быстродействия, то есть перевести систему из множества $\mathcal{X}_0$ в множество $\mathcal{X}_1$, минимизируя время перемещения $(t_1 - t_0)$. При этом, поскольку система является линейной и автономной, будем считать, что $t_0 = 0$.

2 Принцип максимума Понтрягина

Решение задачи опирается на принцип максимума Понтрягина для линейных систем [1].

Теорема 1 (Принцип максимума Понтрягина)**.** *Пусть $(x^*(\cdot),\ u^*(\cdot))$ — оптимальная пара, t_1^* — соответствующее ей время перемещения. Тогда существует дифференцируемая функция $\psi(\cdot) \not\equiv 0$, для которой выполнено*

1. $\langle \psi(t),\ Bu^*(t) \rangle = \rho(\psi(t) \,|\, B\mathcal{P})$ *для почти всех* $t \in [0, t_1^*]$;
2. $\langle \psi(0),\ x^*(0) \rangle = \rho(\psi(0) \,|\, \mathcal{X}_0)$;
3. $\langle -\psi(t_1^*), x^*(t_1^*) \rangle = \rho(-\psi(t_1^*) \,|\, \mathcal{X}_1)$.

При этом функция $\psi(\cdot)$ является решением сопряженной системы $\dot{\psi}(t) = -A^T\psi(t)$, а класс управлений представляет собой множество измеримых функций, принимающих значения в $\mathcal{P}$.

Заметим, что если $\psi(\cdot)$ удовлетворяет условиям теоремы, то им будет удовлетворять и функция $\alpha\psi(\cdot),\ \forall\alpha > 0$. Это следует из линейности скалярного произведения и положительной однородности опорной функции. Поэтому можно считать, что $\|\psi(0)\| = 1$.

Перебирая по единичному кругу параметр $\psi(0) = \psi^0$, можно найти все возможные траектории и управления, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина, что существенно сузит класс функций, среди которых следует искать решение. Оптимальная при этом имеет наименьшее значение функцинала t_1.

Для проверки пунктов теоремы необходимо знать опорные функции и векторы множеств $\mathcal{X}_0,\ \mathcal{X}_1,\ \mathcal{P}$, которые можно найти аналитически.

3 Вычисление опорных функций и множеств

В этом разделе приведено аналитическое вычисление опорных функций для начального, терминального множества и множества допустимых управлений.

Поскольку $\mathcal{X}_0$ является шаром, его опорная функция известна и имеет вид

$$\rho(l \,|\, \mathcal{X}_0) = \rho(l \,|\, \{x_0\}) + \rho(l \,|\, \mathbb{B}(0, r_0)) = \langle l,\ x_0 \rangle + r_0 \|l\|.$$

Это значение достигается на опорном векторе

$$x^* = x_0 + \frac{l}{\|l\|} r_0.$$

Для вычисления опорной функции X_1 воспользуемся свойством линейности ρ по второму аргументу и тем, что опорная функция для выпуклой комбнации точек является максимумом скалярных произведений вектора l на эти точки:

$$\rho(l \,|\, \mathcal{X}_1) = \rho(l \,|\, \mathrm{conv}\{x_1^{(1)}, , \ldots, x_1^{(n)}\}) + \rho(l \,|\, \mathbb{B}(0, \epsilon)) = \max_{i=1,\ldots,n} \langle l,\ x_1^{(i)} \rangle + \epsilon \|l\|.$$

Множество всех опорных векторов X^* для $\mathcal{X}_1$ есть сумма опорных множеств для $\mathrm{conv}\{x_1^{(1)}, , \ldots, x_1^{(n)}\}$ и $\mathbb{B}(0, \epsilon)$, и поэтому имеет вид

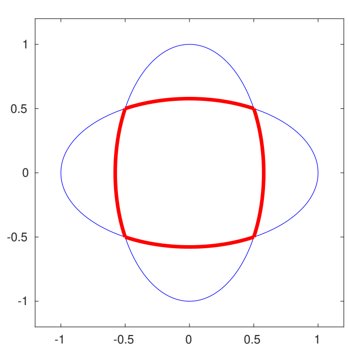
$$X^* = \operatorname*{Argmax}_{i=1,\ldots,n} \langle l,\ x_1^{(i)} \rangle + \frac{l}{\|l\|} \epsilon.$$

При этом $\operatorname*{Argmax}\limits_{i=1,\ldots,n} \langle l,\ x_1^{(i)} \rangle$ состоит из одной точки — вершины многоугольника — в случае, когда l не перпендикулярен ни одной из сторон, или содержит всю соответствующую сторону в противном случае.

Множество $\mathcal{P}$ является пересечением двух эллипсоидов

$$\begin{aligned} x_1^2 + a x_2^2 &\le b, \\ a x_1^2 + x_2^2 &\le b, \end{aligned}$$

где $a > 1,\ b > 0$.



На рисунке множество $\mathcal{P}$ отмечено красным. Заметим, что, в силу симметрии, достаточно найти опорную функцию и опорный вектор только в случае $l_1 > l_2 > 0$.

Используя функцию Лагранжа, находим условный экстремум на эллипсе $x_1^2 + a x_2^2 = b$:

$$x_1^* = \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + a l_2^2}},\ x_2^* = \frac{l_2 \sqrt{ab}}{\sqrt{l_1^2 + a l_2^2}}.$$

Найденные решения являются опорными векторами только в том случае, когда лежат на $\partial\mathcal{P}$, а именно когда $|x_2^*| < \sqrt{\frac{b}{a+1}}$. Опорная функция при это принимает значение $\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{l_1^2 + al_2^2}$. В случае верхней и нижней стороны множества по аналогии получаем

$$x_1^* = \frac{l_1\sqrt{ab}}{\sqrt{al_1^2 + l_2^2}},\ x_2^* = \sqrt{\frac{b}{a}}\frac{l_2}{\sqrt{al_1^2 + l_2^2}}, \quad |x_1^*| < \sqrt{\frac{b}{a+1}}.$$

Опорная функция здесь равна $\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{al_1^2 + l_2^2}$. Во всех остальных случаях опорным вектором будет являться один из «углов» множества $\sqrt{\frac{b}{a+1}}[\operatorname{sgn} l_1,\, \operatorname{sgn} l_2]^T$.

Объединяя все вышесказанное, получаем итоговый вид для опорной функции:

$$\rho(l\,|\,\mathcal{P}) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{b}{a}}\sqrt{l_1^2 + al_2^2},\ |l_1| > |l_2|,\ \dfrac{|l_2|\sqrt{ab}}{\sqrt{l_1^2 + al_2^2}} < \sqrt{\dfrac{b}{a+1}}, \\ \sqrt{\dfrac{b}{a}}\sqrt{al_1^2 + l_2^2},\ |l_2| > |l_1|,\ \dfrac{|l_1|\sqrt{ab}}{\sqrt{al_1^2 + l_2^2}} < \sqrt{\dfrac{b}{a+1}}, \\ \sqrt{\dfrac{b}{a+1}}(|l_1| + |l_2|),\ \text{иначе}. \end{cases} \tag{1}$$

Список литературы

[1] Рублев И.В. Лекции по оптимальному управлению.