



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по самому важному предмету

«Задание 2 практикума по оптимальному управлению»

Студент 315 группы
Д. М. Сотников

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Содержание

I	Теоретическая часть	3
1	Постановка задачи	3
2	Преобразование системы	3
3	Ограничения на входные параметры	3
4	Вспомогательные утверждения	4
5	Решение задачи 1	5
5.1	Нормальный случай	6
5.2	Анормальный случай	7
5.3	Разрешимость задачи и алгоритм решения	8
6	Решение задачи 2	8
6.1	Нормальный случай	9
6.2	Анормальный случай	11
6.3	Разрешимость задачи и алгоритм решения	12
II	Примеры работы программы	13
1	Задача 1	13
2	Задача 2	15

Часть I

Теоретическая часть

1 Постановка задачи

Вертикальное движение ракеты описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{m}v + m\dot{v} = -gm + lu \\ \dot{m} = -u \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $v \in \mathbb{R}$ — скорость ракеты, m — масса ракеты, $g > 0$ — гравитационная постоянная, $l > 0$ — коэффициент, определяющий силу, действующую на ракету со стороны сгорающего топлива, $u \in [0, u_{max}]$ — скорость подачи топлива, $u_{max} > 0$. Масса ракеты без топлива равна $M > 0$. Если топливо заканчивается ($m = M$), то двигатель ракеты отключается, то есть $u = 0$.

Заданы начальный момент $t_0 = 0$, начальная скорость $v(0) = 0$, начальная масса ракеты с топливом $m(0) = m_0 > M$. Движение ракеты описывается системой (1) на всем отрезке времени, движение вниз в начальный момент времени невозможно, то есть $v(t) > 0$, $t \in [0, \delta]$ для некоторого $\delta > 0$.

Задача 1. Найти измеримое управление $u(\cdot)$, переводящее ракету на максимальную высоту H в заданный момент времени $T > 0$ так, чтобы $v(T) \in [-\epsilon, \epsilon]$.

Задача 2. Найти измеримое управление $u(\cdot)$, переводящее ракету на заданную высоту $H > 0$ в момент времени $T > 0$, минимизируя функционал

$$J = \int_0^T u^4(t) dt.$$

2 Преобразование системы

Сделаем замену переменных $x_1(t) = v(t) + l$, $x_2(t) = m(t)$, а также подставим $\dot{m} = -u$ в первое уравнение системы (1) и поделим его на m . В новых переменных система принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -g + \frac{x_1 u}{x_2} \\ \dot{x}_2 = -u \end{cases} \quad (2)$$

Такое представление удобно, поскольку дает возможность решить систему аналитически при постоянных u .

3 Ограничения на входные параметры

Помимо явных ограничений на параметры ($g > 0$, $l > 0$, $u_{max} > 0$) в системе так же присутствует неявное ограничение: как было указано в постановке задачи, для взлета ракеты ее скорость должна стать положительной, для этого её производная $\dot{v} = \dot{x}_1$ должна быть положительна в начальный момент времени. Используя $x_1(0) = l$, $x_2(0) = m_0$, получим следующее ограничение на управление:

$$u(0) \geq \frac{m_0 g}{l} \quad (3)$$

Отсюда же следует, что $u_{max} \geq \frac{m_0 g}{l}$. Если это неравенство не выполнено, будем считать задачу некорректно поставленной.

Из интерпретации следует, что параметр ϵ в задаче 1 мал, поскольку требуется практически остановить ракету на максимально возможной высоте. А именно, пусть

$$\epsilon < l. \quad (4)$$

4 Вспомогательные утверждения

Главным утверждением, используемым для решения задачи, является принцип максимума Понтрягина, формулировка которого приведена в [1], а полное доказательство можно найти в [2] (5.1, теорема 1).

Рассматривается задача оптимального управления автономной системой

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m$$

с минимизацией функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf_{u(\cdot)}$$

из множества \mathcal{X}_0 в множество \mathcal{X}_1 , то есть $x(t_0) \in \mathcal{X}_0$, $x(t_1) \in \mathcal{X}_1$. В классе измеримых управлений требуется найти $u(\cdot)$ такое, что $u(t) \in \mathcal{P}(t)$ почти всюду на $[t_0, t_1]$, и $u(\cdot)$ является решением поставленной выше задачи. Здесь $\mathcal{P}(\cdot)$ — заданное измеримое многозначное отображение, $\mathcal{P}(t)$ является выпуклым компактом при любом $t \in [t_0, t_1]$.

Функционал Гамильтона-Понтрягина имеет вид

$$\mathcal{H}(x, u, \tilde{\psi}) = \psi_0 f_0(x, u) + \langle \tilde{\psi}, f(x, u) \rangle,$$

где $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\psi_0 \in \mathbb{R}$.

Теорема 1 (Принцип максимума Понтрягина). Пусть $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ — решение поставленной задачи оптимального управления. Тогда найдется $\tilde{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)$, $\tilde{\psi} \neq 0$ такой, что

$$\mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \tilde{\psi}(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \max_{u \in \mathcal{P}(t)} \mathcal{H}(x^*(t), u, \tilde{\psi}(t)).$$

При этом $\psi_0 \leq 0$ и постоянна, а $\psi(t)$ является решением сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \tilde{\psi}(t)),$$

и выполнены условия трансверсальности

$$\psi(t_0) \perp T_{x^*(t_0)} \mathcal{X}_0, \quad \psi(t_1) \perp T_{x^*(t_1)} \mathcal{X}_1.$$

Рассмотрим так же несколько вспомогательных утверждений, относящихся к дифференциальным уравнениям.

Лемма 1. Пусть функции $a(\cdot), b(\cdot)$ непрерывны на $[t_0, t_1]$. Тогда задача Коши

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t), \quad x(t_0) = x^0$$

имеет решение

$$x(t) = x^0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + \int_{t_0}^t b(\tau) e^{\int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau.$$

Лемма 2. Пусть функции $a(\cdot), b(\cdot)$ непрерывны на $[t_0, t_1]$, $b(\cdot)$ знакопостоянна и не обращается в ноль на $[t_0, t_1]$. Тогда решение уравнения $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$ обращается в ноль не более, чем в одной точке, возрастая в ее окрестности, если $b > 0$, и убывая, если $b < 0$.

Доказательство. Пусть, для определенности, $b(t) > 0$ при любых $t \in [t_0, t_1]$, и пусть решение уравнения обращается в ноль в точке $\tau \in [t_0, t_1]$. Тогда $\dot{x}(\tau) = b(\tau) > 0$, что также выполняется в маленькой окрестности точки τ , поэтому функция $x(\cdot)$ возрастает в этой окрестности. Это означает, что траектория может пересекать ноль только «снизу-вверх». Объединяя это с непрерывностью $x(\cdot)$, получаем требуемое утверждение. ■

Договоримся для краткости, что запись $f > 0$ ($f < 0$) означает положительность (отрицательность) функции почти всюду на рассматриваемом отрезке $[t_0, t_1]$.

5 Решение задачи 1

В координатах (x_1, x_2) начальное и конечное множества имеют вид

$$\mathcal{X}_0 = \{l\} \times \{m_0\}, \quad \mathcal{X}_1 = [l - \epsilon, l + \epsilon] \times [M, m_0].$$

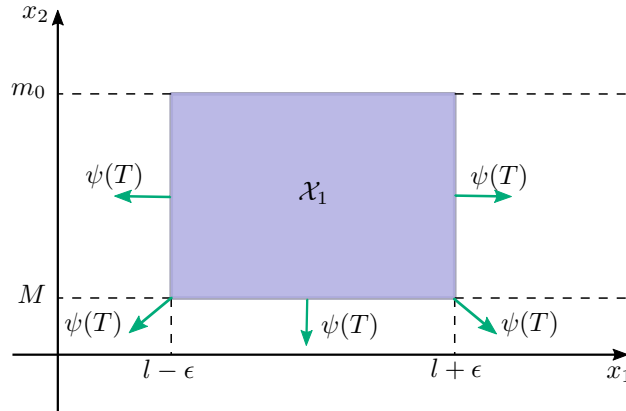


Рис. 1: Множество \mathcal{X}_1

Обсудим условия трансверсальности для терминального множества. Из начальных условий на управление ($u(t) > 0$ на некотором интервале $[0, \delta]$) следует, что $m(T) < m_0$. Если $m(T) > M$, то $\psi_2(T) = 0$, и этого условия будет достаточно для решения задачи. Если же $m(T) = M$ и, кроме того, $x_1(T) \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$, то $\psi_1(T) = 0$. При этом $\psi_2(T) \leq 0$. Попадание в «углы» множества \mathcal{X}_1 будет рассмотрено отдельно после решения общего случая.

Максимизация высоты $H(T) = \int_0^T v(t)dt$ эквивалентна максимизации функционала

$$J = \int_0^T x_1(t)dt$$

Для данной задачи функционал Гамильтона-Понтрягина имеет вид

$$\mathcal{H} = \psi_0 x_1 + \psi_1 \left(-g + \frac{x_1 u}{x_2} \right) - \psi_2 u = (\psi_0 x_1 - \psi_1 g) + \left(\frac{\psi_1 x_1}{x_2} - \psi_2 \right) u.$$

Введем вспомогательную функцию $F(t) = \psi_1(t)x_1(t) - \psi_2(t)x_2(t)$. Очевидно, что функционал Гамильтона-Понтрягина является возрастающей линейной функцией по u тогда и только тогда, когда $F(t) > 0$. Здесь мы воспользовались тем, что $x_2 > 0$ всюду на $[0, T]$.

Из условия максимума получаем, что

$$u(t) = \begin{cases} u_{max}, & F(t) > 0, \ x_2(t) > M, \\ [0, u_{max}], & F(t) = 0, \ x_2(t) > M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5)$$

Заметим также, что $x_1(t) > 0$ всюду на $[0, T]$. Это следует из того, что $x_1(T) > l - \epsilon \stackrel{(4)}{>} 0$ и леммы 2: если найдется $\tau \in (0, T)$ такое, что $x_1(\tau) = 0$, то $x_1(t) < 0$ для всех $t > \tau$.

Рассмотрим теперь возможные режимы движения системы, которые будут получены из принципа максимума Понтрягина.

5.1 Нормальный случай

Пусть $\psi_0 \neq 0$. Тогда в силу положительной однородности принципа максимума по $\tilde{\psi}$ можно считать, что $\psi_0 = 1$. Тогда сопряженная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = -1 + \frac{\psi_1 u}{x_2} \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = \frac{\psi_1 x_1 u}{x_2^2} \end{cases} \quad (6)$$

Вычислим $\dot{F} = \dot{\psi}_1 x_1 + \psi_1 \dot{x}_1 - \dot{\psi}_2 x_2 - \psi_2 \dot{x}_2 = -x_1 + \frac{\psi_1 x_1 u}{x_2} - \psi_1 g - \frac{\psi_1 x_1 u}{x_2} - \frac{\psi_1 x_1 u}{x_2} + \psi_2 u = -x_1 - \psi_1 g - \frac{Fu}{x_2}$. Таким образом получили, что F удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{F} = (-x_1 - \psi_1 g) - \frac{Fu}{x_2}. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь, как будут меняться режимы движения в зависимости от того, закончилось ли топливо к концу полета или нет.

Случай $m(T) > M$ Пусть к моменту времени T было израсходовано не все топливо. Тогда из условий трансверсальности следует, что $\psi_2(T) = 0$, а значит $F(T) = \psi_1(T)x_1(T)$.

Пусть $F(T) \geq 0$ Если $F(T) \geq 0$, то $\psi_1(T) \geq 0$, и, по лемме 2, $\psi_1 > 0$. Но тогда $-x_1 - \psi_1 g < 0$, и из уравнения (7) и леммы 2 следует, что $F > 0$. Но это означает, что

$$u(t) = u_{max}, \quad t \in [0, T].$$

Пусть $F(T) < 0$ В этом случае можно утверждать, что найдется точка τ_s , в которой $F(\tau_s) = 0$, и $F(t) < 0$, $t \in (\tau_s, T]$. Если такой точки нет, то $F < 0$, и двигатель всегда будет выключен, что невозможно в условиях поставленной задачи (ракета упадет на землю). Из вида управления (15) следует, что $u(t) = 0$, $t > \tau_s$. Тогда, решая задачу Коши на $[\tau_s, T]$, получаем $\psi_2(\tau_s) = 0$. Поскольку $F(\tau_s) = \psi_1(\tau_s)x_1(\tau_s) = 0$, получаем $\psi_1(\tau_s) = 0$. Далее рассуждениями, полностью аналогичными прошлому случаю, получаем $u(t) = u_{max}$ на $[0, \tau_s]$.

Случай $m(t) = M$ Из условия трансверсальности $\psi_1(T) = 0$, откуда, по лемме 2, $\psi_1 > 0$. Так как топливо закончилось, был промежуток времени, в который двигатель был включен. Пусть τ_F — момент, когда топливо закончилось, при этом $F(\tau_F) \geq 0$. Заметим вновь, что $(-x_1 - \psi_1 g) < 0$, и поэтому $F > 0$, $u = u_{max}$ на $[0, \tau_s]$.

В случае попадания траектории на угол $x(T) = (l + \epsilon, M) \in \mathcal{X}_1$ из условий трансверсальности $\psi_1(T) \geq 0$, $\psi_2(T) \leq 0$, откуда $F(T) \geq 0$. Следовательно, $\psi_1 > 0$ и $F > 0$, поэтому $u(t) = u_{max}$.

Пусть $x(T) = (l - \epsilon, M) \in \mathcal{X}_1$. Покажем, что любое управление, кроме $u(t) = u_{max}$, $t < \tau_F$ не может быть оптимальным. Действительно, из условия максимума $u(t)$ принимает либо значение 0, либо u_{max} . Предположим, что $u^*(\cdot)$ имеет более одного переключения. Тогда, из физических соображений следует, что немного уменьшая момент второго включения двигателя, можно добиться увеличения $H(T)$, чтобы при этом $x_1(T) < l + \epsilon$. Тем самым рассмотренное управление не является оптимальным.

Вывод Подведем итог нормального случая. Все допустимые режимы имеют следующий вид: $u(t) = u_{max}$ до некоторого момента выключения двигателя либо до тех пор, пока не кончится топливо, то есть до момента $\tau_F = \frac{m_0 - M}{u_{max}}$.

5.2 Анормальный случай

Пусть $\psi_0 = 0$. Тогда сопряженная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = \frac{\psi_1 u}{x_2} \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = \frac{\psi_1 x_1 u}{x_2^2} \end{cases} \quad (8)$$

Функция F удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{F} = -\psi_1 g - \frac{Fu}{x_2}.$$

Случай $m(T) > M$ $F(T) = \psi_1(T)x_1(T)$.

Пусть $F(T) < 0$ $\psi_1(T) < 0$, поэтому из сопряженной системы $\psi_1 < 0$, $-\psi_1 g > 0$, и, по лемме 2, $F < 0$, что невозможно, так как в момент взлета управление должно быть ненулевым.

Пусть $F(T) = 0$ так же невозможен, поскольку противоречит нетривиальности вектора сопряженных переменных ψ .

Пусть $F(T) > 0$ Аналогично нормальному случаю показывается, что $F > 0$, $u = u_{max}$.

Случай $m(T) = M$ $\psi_1 \equiv 0$, и функция F не проходит через нуль, поскольку нуль является неподвижной точкой для F . $F \neq 0$, поскольку иначе $\psi_2(T) = 0$, что противоречит принципу максимума. Так как при взлете управление ненулевое, получаем $F > 0$, $u(t) = u_{max}$, $t < \tau_F$.

Пусть $x(T) = (l + \epsilon, M) \in \mathcal{X}_1$. В этом случае $\psi_1(T) \geq 0$, $\psi_2(T) \leq 0$. Тогда либо $\psi_1(T) \equiv 0$ (этот случай был рассмотрен в предыдущем абзаце), либо $\psi_1(T) > 0$, и тогда $\psi_1 > 0$, $F(T) > 0$, поэтому $F > 0$, $u(t) = u_{max}$, $t < \tau_F$.

Если $x(T) = (l - \epsilon, M) \in \mathcal{X}_1$, то либо $\psi_1(T) = 0$ (уже рассмотрен), либо $\psi_1(T) < 0$, но тогда $\psi_1 < 0$, и F , в силу леммы 2, имеет не более одного корня, проходя через него сверху-вниз. Но в момент τ_F верно $F(\tau_F) \geq 0$, а значит $F > 0$ на $[0, \tau_F]$, $u(t) = u_{max}$, $t \in [0, \tau_F]$.

Вывод Анормальный случай приводит к тем же режимам, что и нормальный.

5.3 Разрешимость задачи и алгоритм решения

Задача разрешима, если $x_1(T) \in [l - \epsilon, l + \epsilon]$. Это условие может не выполняться при больших значениях T , когда ракета будет терять скорость после того, как закончится топливо, и $x_1(T) < l - \epsilon$. Кроме того, систему можно явно проинтегрировать с помощью леммы 1, поэтому справедлива формула

$$x_1^T(\tau_s) = \frac{gm_0}{2u_{max}} - \frac{g\tau_s}{2} + \frac{m_0(gm_0 - 2lu_{max})}{2u_{max}(-m_0 + \tau_s u_{max})} - g(T - \tau_s).$$

Эта формула позволяет найти значение x_1 в конечный момент времени в зависимости от τ_s — момента выключения двигателя.

Таким образом, задача неразрешима, если $\tau_F = \frac{m_0 - M}{u_{max}} < T$, и $x_1^T(\tau_F) < l - \epsilon$. В противном случае можно найти такое значение параметра τ_s , при котором $x_1(T) \in [l - \epsilon, l + \epsilon]$. Очевидно, что оптимальным является наибольший из таких параметров, то есть

$$\tau_s^* = \max\{\tau_s \in [0, \tau_F] : x_1^T(\tau_s) \leq l + \epsilon\}. \quad (9)$$

При численном решении рассматривается равномерная сетка для $\tau_s \in [0, \min(T, \tau_F)]$, и решение τ_s^* находится в соответствии с (9).

6 Решение задачи 2

Введем еще одну переменную $x_3 = \int_0^t v(t)dt$ — высоту, на которой находится ракета. Тогда движение описывается системой

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -g + \frac{x_1 u}{x_2} \\ \dot{x}_2 = -u \\ \dot{x}_3 = x_1 - l \end{cases} \quad (10)$$

Начальное и конечное множества имеют вид

$$\mathcal{X}_0 = \{l\} \times \{m_0\} \times \{0\}, \quad \mathcal{X}_1 = \mathbb{R} \times [M, m_0] \times \{H\}.$$

Функционал Гамильтона-Понтрягина равен

$$\mathcal{H} = \psi_0 u^4 + \psi_1 \left(-g + \frac{x_1 u}{x_2} \right) - \psi_2 u + \psi_3 (x_1 - l),$$

а сопряженная система

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_3 - \frac{\psi_1 u}{x_2} \\ \dot{\psi}_2 = \frac{\psi_1 x_1 u}{x_2^2} \\ \dot{\psi}_3 = 0 \end{cases}$$

Отсюда получаем $\psi_3 \equiv \psi_3^0$, и система примет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_3^0 - \frac{\psi_1 u}{x_2} \\ \dot{\psi}_2 = \frac{\psi_1 x_1 u}{x_2^2} \end{cases} \quad (11)$$

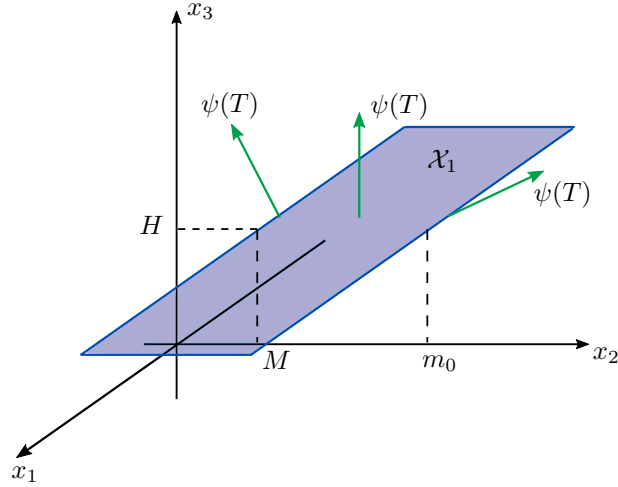


Рис. 2: Множество \mathcal{X}_1

Аналогично первой задаче вычисляется

$$\dot{F} = (-\psi_1 g - \psi_3^0 x_1) - \frac{F u}{x_2}. \quad (12)$$

Из условий трансверсальности получаем, что если $x(T)$ принадлежит относительной внутренности \mathcal{X}_1 , то нормаль вертикальна, и тогда $\psi_1(T) = \psi_2(T) = 0$. Так же, как и в задаче 1, $m(T) < m_0$, поэтому случай $x_2(T) = m_0$ невозможен. Если же $m(T) = M$, то из рисунка видно, что $\psi_1(T) = 0$.

6.1 Нормальный случай

Будем считать, что $\|\tilde{\psi}(0)\| = 0$ Тогда

$$\mathcal{H} \rightarrow \max_{u \in [0, u_{max}]} \Leftrightarrow -\psi_0 u^4 + \frac{F u}{x_2} \rightarrow \max_{u \in [0, u_{max}]}$$

Для удобства рассматриваем $\psi_0 > 0$, записывая в функционале Гамильтона-Понтрягина $-\psi_0$.

Функция $-\psi_0 u^4 + \frac{F u}{x_2}$ является вогнутой и достигает максимум в единственной точке

$$u = \sqrt[3]{\frac{F}{4\psi_0 x_2}}.$$

Если $\sqrt[3]{\frac{F}{4\psi_0 x_2}} > u_{max} \Leftrightarrow F - 4\psi_0 x_2 u_{max}^3 > 0$, то $u = u_{max}$. Введем функцию

$$K(t) = F(t) - 4\psi_0 x_2(t) u_{max}^3$$

и запишем управление, полученное из условия максимума:

$$u(t) = \begin{cases} u_{max}, & K(t) > 0, \ x_2(t) > M, \\ \sqrt[3]{\frac{F}{4\psi_0 x_2}}, & K(t) < 0, \ F(t) > 0, \ x_2(t) > M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (13)$$

Назовем для удобства эти режимы I, II и III соответственно.
Заметим также, что

$$\dot{K} = (-\psi_1 g - \psi_3^0 x_1) - \frac{Ku}{x_2},$$

то есть K удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и F .

Случай $m(T) > M$ Из условий трансверсальности $F(T) = 0$. $\psi_3^0 \neq 0$, иначе $F \equiv 0$, и $u \equiv 0$, что противоречит постановке задачи. Также невозможен случай $\psi_3^0 < 0$: если $x_1(T) > 0$, то $F < 0$, если же $x_1(T) < 0$, то $F(t) > 0$, $u(t) > 0$ в правой полуокрестности T , однако при отрицательных x_1 управление увеличивает скорость движения вниз, и нетривиальное управление на участке, где $x_1(t) < 0$, заведомо не может быть оптимальным. Значит,

$$\psi_3^0 > 0, \psi_1 > 0.$$

Так как скорость в начальный момент положительна, $u(0) > \frac{m_0 g}{l} > 0$, то $F(0) > 0$. Если $F(t) > 0$ ($K(t) > 0$) на некотором множестве, то на нем $x_1 > 0$, и $-\psi_1 g - \psi_3^0 x_1 < 0$, поэтому, в силу (12), F (K) монотонно убывает на этом множестве. Если где-то $F(t) > 0$ и $K(t) < 0$, то $x_1 > 0$ и $-\psi_1 g - \psi_3^0 x_1 < 0$ поэтому, по лемме 2, функция K не обращается в нуль на этом множестве.

Таким образом было показано, что возможны только следующие переходы между режимами:

- Из режима I в II
- Из режима II в III

То есть движение может реализовываться только по сценарию (I)-II-(III), где режимы в скобках могут быть пропущены.

Однако в случае $m(T) > M$ движение в режиме I невозможно, поскольку функционал J «чувствителен» к большим значениям, сильно увеличиваясь на них, поэтому для любого управления, соответствующего сценарию I-II, можно рассмотреть его «сглаженную» версию, немного уменьшенную на участке, соответствующем I, и немного увеличенную на участке, соответствующем II, так, чтобы $x_3(T)$ осталось равным H . Однако на полученном управлении функционал примет меньшее значение, поскольку в среднем оно будет меньше. А значит, движение реализуется по сценарию II-(III).

Заметим также, что $\dot{\psi}_1 < -\dot{\psi}_3^0$. Интегрируя это неравенство от 0 до T , получим

$$\psi_3^0 < \frac{\psi_1^0}{T}.$$

Случай $m(T) = M$ Поскольку $\psi_1(T) = 0$, ψ_3^0 и ψ_1 одного знака, случай $\psi_3^0 > 0$ рассматривается абсолютно аналогично предыдущему.

Если $\psi_3^0 = 0$, то $\psi_1 \equiv 0$. Тогда функции K и F убывают на области положительной определенности, не проходя через 0, поэтому движение будет осуществляться либо в режиме I, либо в режиме II до тех пор, пока не кончится топливо.

Если же $\psi_3^0 < 0$, то $\psi_1 < 0$, поэтому функции K и F так же не попадают в 0, если положительны. То есть до тех пор, пока не кончится топливо, реализуется один из двух сценариев I и II-(I). Однако сценарий II-I невозможен, поскольку рассмотрев любое управление при таком сценарии и поменяв в нем местами отрезки с режимами I и II, получим управление, на котором J принимает то же значение, однако выводящее ракету на большую высоту. Но тогда можно уменьшить управление на участке с I, приводя ракету на нужную высоту и уменьшая значение функционала. Таким образом рассмотренное управление является неоптимальным. Режим I до окончания топлива реализуется только когда H — максимально возможная высота, на которую можно поднять ракету, и в общем случае его можно не рассматривать.

Отметим также, что $\dot{\psi}_1 > -\psi_3^0$, поэтому

$$\psi_3^0 > \frac{\psi_1^0}{T}$$

Вывод Получили, что в случае, когда заканчивается топливо и H строго меньше минимально возможной высоты ракета будет двигаться в режиме II до тех пор, пока не закончится топливо. В случае, когда топливо остаётся, движение происходит по сценарию II-(III). При этом были получены следующие ограничения на начальные значения сопряженных переменных

$$\psi_1^0 \in [-1, 1], \quad \psi_3^0 \in [-1, 1], \quad \psi_1^0 \psi_3^0 \geq 0, \quad |\psi_3^0| \leq \frac{|\psi_1^0|}{T}, \quad (14)$$

$$\psi_2^0 \in [-1, 0], \quad \psi_0 \in [0, 1], \quad (\psi_0)^2 + (\psi_1^0)^2 + (\psi_2^0)^2 + (\psi_3^0)^2 = 1.$$

ψ_2^0 отрицательна, поскольку при $\psi_1 > 0$ функция ψ_2 возрастает, и $\psi_2(T) = 0$, а при $\psi_1 < 0$ случай $\psi_2^0 > 0$ невозможен, так как $F(0) = \psi_1^0 l - \psi_2^0 m_0 > 0$.

Добавим также условие взлета

$$u(0) > \frac{m_0 g}{l} \Leftrightarrow F(0) > \frac{4\psi_0 m_0^4 g^3}{l^3}.$$

6.2 Анормальный случай

Если $\psi_0 = 0$, то

$$\mathcal{H} = \psi_1 \left(-g + \frac{ux_1}{x_2} \right) - \psi_2 u + \psi_3 (x_1 - l).$$

Поэтому управление будет иметь тот же вид, что и в задаче 1:

$$u(t) = \begin{cases} u_{max}, & F(t) > 0, \quad x_2(t) > M, \\ [0, u_{max}], & F(t) = 0, \quad x_2(t) > M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (15)$$

Сопряженная система останется такой же, как в нормальном случае:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_3^0 - \frac{\psi_1 u}{x_2} \\ \dot{\psi}_2 = \frac{\psi_1 x_1 u}{x_2^2} \end{cases} \quad (16)$$

Случай $m(T) > M$ Из условий трансверсальности $F(T) = 0$. Как и в нормальном случае показывается, что $\psi_3^0 > 0$, откуда следует $F > 0$, $u \equiv u_{max}$.

Случай $m(T) = M$ Если $\psi_3^0 > 0$, то $\psi_1 > 0$, поэтому функция F убывает и имеет не более одного корня. Однако, так как $m(T) = M$, $F(\tau_F) \geq 0$, то есть F положительна до тех пор, пока не кончится топливо. Если $\psi_3^0 < 0$, то $\psi_1 < 0$, поэтому, по лемме 2, функция F не имеет корней ($F(0) > 0$). Случай $\psi_3^0 = 0$ означает, что $\psi_1 \equiv 0$, и $\dot{F} = -\frac{Fu}{x_2}$. Но так $F(0) > 0$, снова приходим к тому, что $F > 0$.

Вывод Таким образом, единственный возможный режим, полученный из анормального случая, — положить $u(t) = u_{max}$ до тех пор, пока это возможно.

6.3 Разрешимость задачи и алгоритм решения

Задача является неразрешимой, если при управлении $u = u_{max}$, $t \in [0, \tau_F]$ получим $x_3(T) < H$. Это следует из задачи 1, в которой было показано, что именно это управление максимизирует $x_3(T)$. Если $x_3(T) \geq H$, то задача разрешима, причем при $x_3(T) = H$ единственным возможным, и потому оптимальным, будет являться описанное выше управление $u = u_{max}$, $t \in [0, \tau_F]$, то есть реализуется аномальный случай. При $x_3(T) > H$ возможно движение по одному из следующих сценариев (F обозначает выключение двигателя в момент, когда кончилось топливо):

- II - F
- II
- II-III

Будем перебирать параметры $\psi_0, \psi_1^0, \psi_3^0$ в соответствии с ограничениями (14), выбирая те траектории, у которых

$$\psi_1(T) = 0, \quad \psi_2 < 0, \quad x_3(T) = H,$$

переключаясь между режимами в корнях F , которые описываются уравнением

$$\dot{F} = -\psi_3^0 x_1 - \psi_1 g - \frac{Fu}{x_2}.$$

При численном решении рассматривается сетка $[0, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ для трехмерного параметра $(\psi_0, \psi_1^0, \psi_3^0)$. Для значений, удовлетворяющих (14), с помощью функции ode45 Matlab решается задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -g + \frac{x_1 u}{x_2} \\ \dot{x}_2 = -u \\ \dot{F} = -\psi_3^0 x_1 - \psi_1 g - \frac{Fu}{x_2} \\ \dot{\psi}_1 = -\psi_3^0 - \frac{\psi_1 u}{x_2} \\ x_1(0) = l \\ x_2(0) = m_0 \\ F(0) = \psi_1^0 l - \psi_2^0 m_0 \\ \psi_1(0) = \psi_1^0 \end{cases} \quad (17)$$

Движение начинается в режиме II, переключения между режимами происходят в одном из следующих случаев:

- $F(t) = 0$ — переключение в режим III
- $x_2(t) = M$ — переключение в режим III

Случай $u(t) = u_{max}$ при $m(t) > M$ рассчитывается отдельно.

Для вычисленной траектории проверяется $|x_3(T) - H| < \epsilon_H$, где ϵ_H — задаваемая допустимая погрешность для высоты в момент T .

Часть II

Примеры работы программы

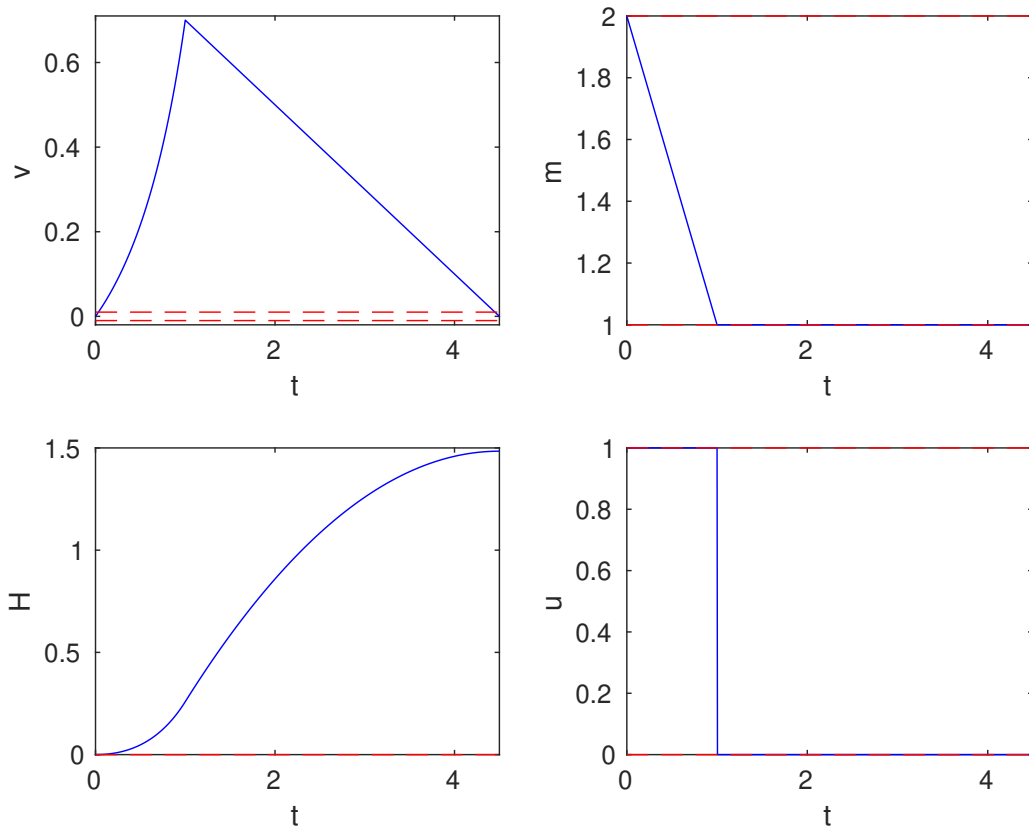
Во всех задачах будем рассматривать входные данные с $l = 1$, $g = 0.2$.

1 Задача 1

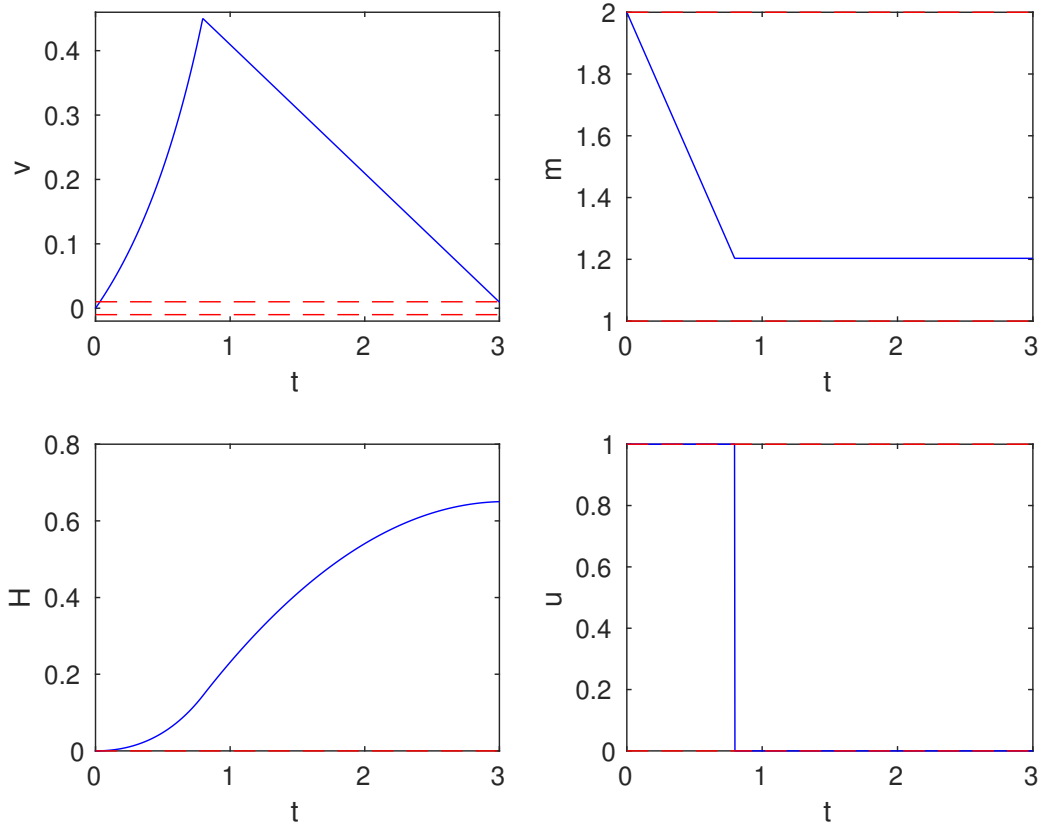
Входные параметры

$$M = 1, \quad m_0 = 2, \quad u_{max} = 1, \quad \epsilon = 0.01.$$

При $T = 4.5$ получаем следующее решение



В этом случае движение продолжается до момента τ_F . Набранная высота при этом $H_{max} = 1.48$.



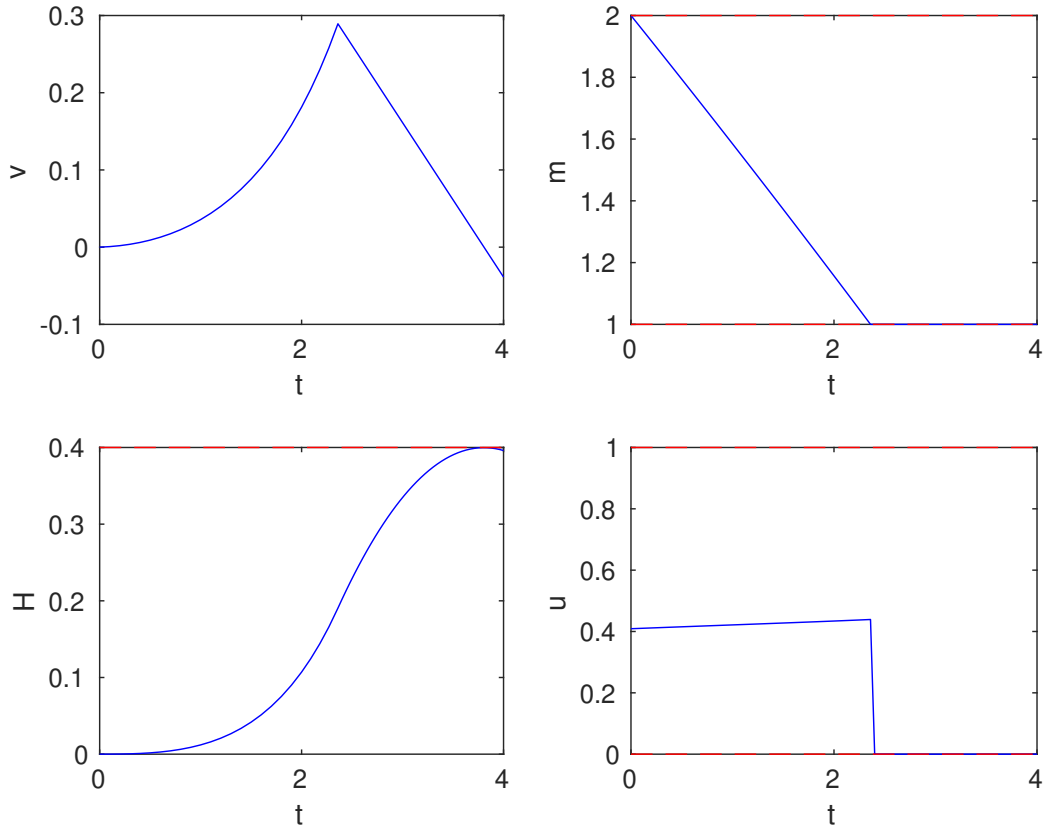
Режим с переключением реализуется, если при тех же входных данных взять $T = 3$.
 Переключение происходит в момент $\tau = 0.8$, а максимальная высота равна $H_{max} = 0.65$.

2 Задача 2

Рассмотрим сначала случай $m(T) = M$.

Пусть

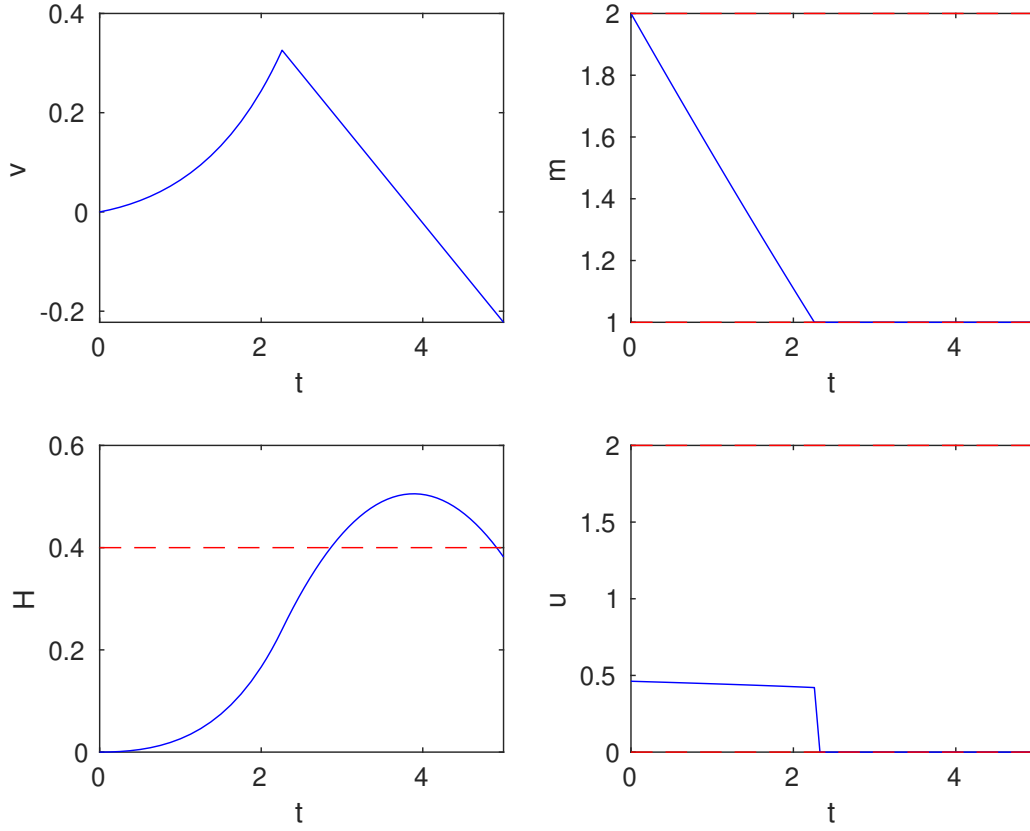
$$T = 4, \quad M = 1, \quad m_0 = 2, \quad u_{max} = 1, \quad H = 0.4.$$



Здесь значение функционала $J(u^*) = 0.08$, а момент выключения двигателя $\tau_F = 2.36$. Отметим, что в этом примере управление возрастает, а значит $\psi_3^0 < 0$.

Пусть

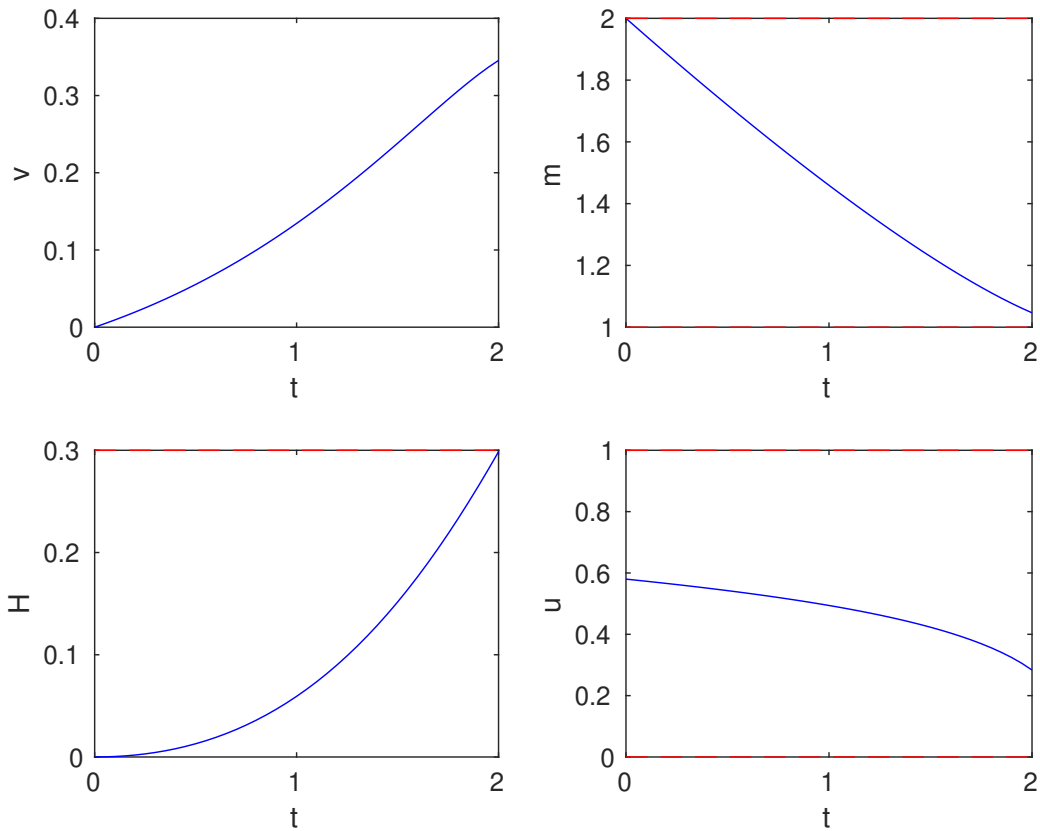
$$T = 5, \quad M = 1, \quad m_0 = 2, \quad u_{max} = 2, \quad H = 0.4.$$



Здесь значение функционала $J(u^*) = 0.09$, а момент выключения двигателя $\tau_F = 2.26$. В этом случае управление убывает, что означает $\psi_3^0 > 0$.

Теперь перейдем к случаю $m(T) > M$

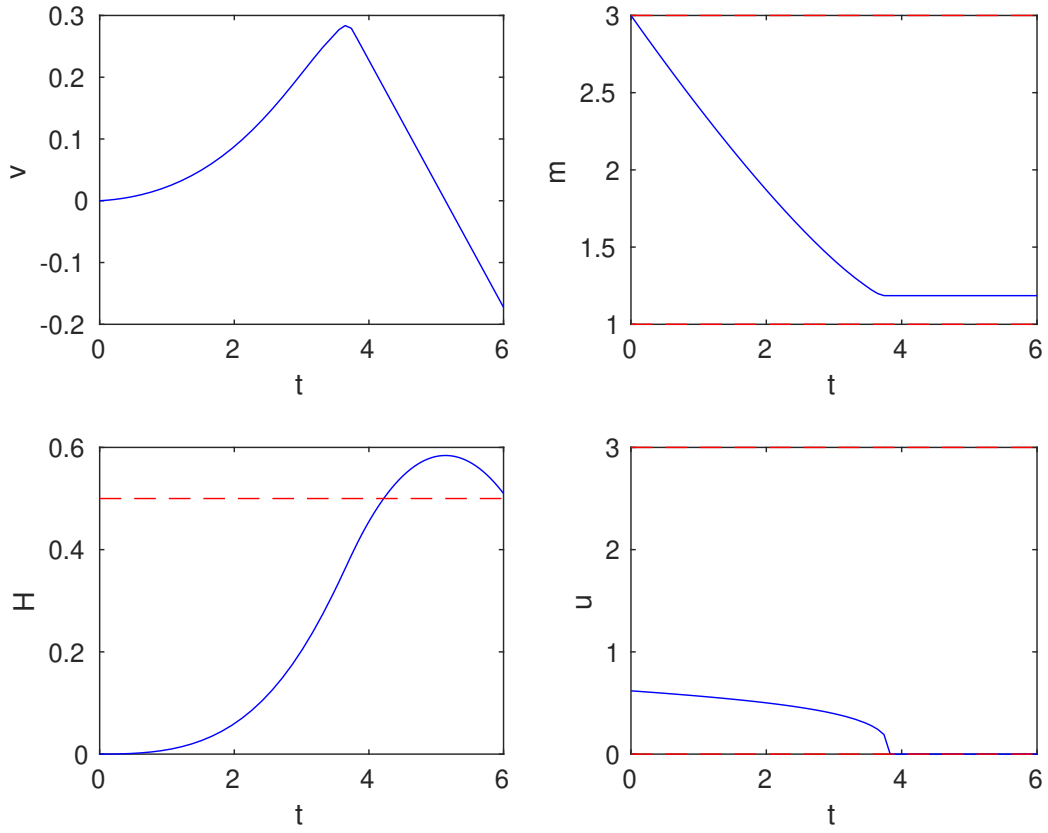
$$T = 2, \quad M = 1, \quad m_0 = 2, \quad u_{max} = 1, \quad H = 0.3.$$



В этом примере движение происходит по сценарию II. Значение функционала $J(u^*) = 0.12$.

Пусть

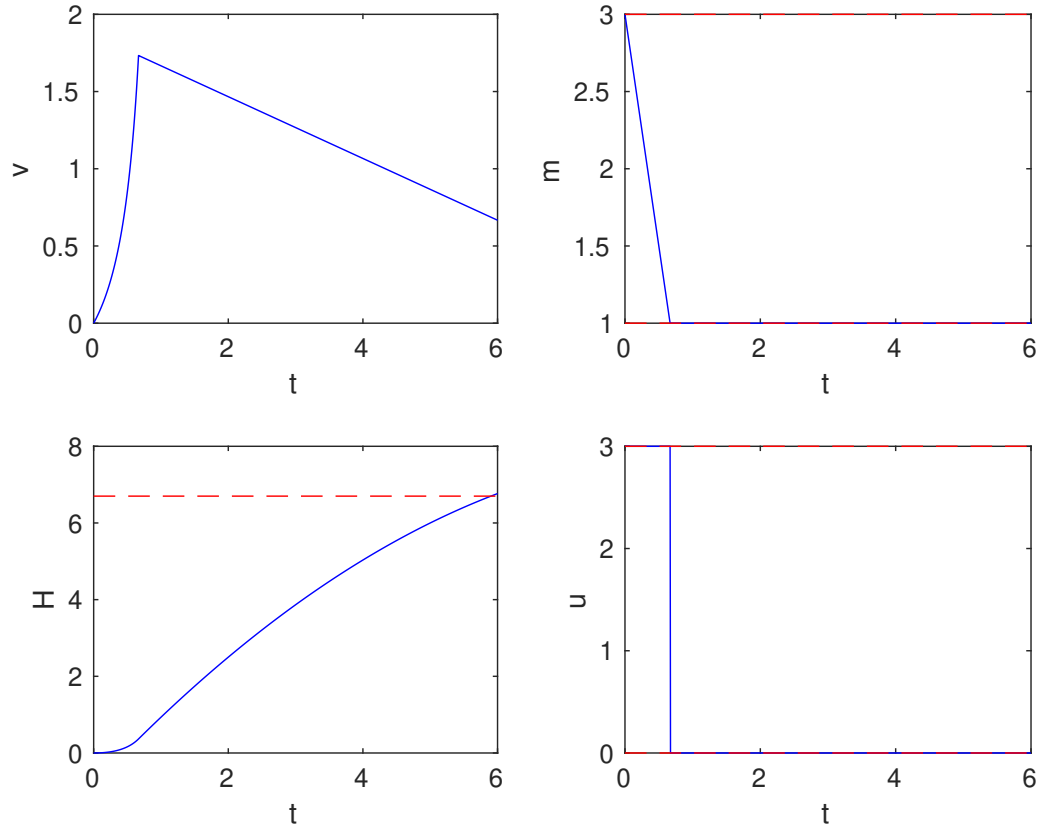
$$T = 6, \quad M = 1, \quad m_0 = 3, \quad u_{max} = 3, \quad H = 0.5.$$



В этом примере движение происходит по сценарию II-III. Значение функционала $J(u^*) = 0.26$, время переключения $\tau = 3.83$.

В заключение рассмотрим предельный случай, когда H является максимально возможной высотой:

$$T = 6, \quad M = 1, \quad m_0 = 3, \quad u_{max} = 3, \quad H = 6.7.$$



Значение функционала $J(u^*) = 54$, время выключения двигателя $\tau = 0.67$.

Список литературы

- [1] Комаров Ю.А. Лекции по оптимальному управлению. ВМК МГУ, 2020.
- [2] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972.