А. А. Муравлёв, Представление фрактального броуновского движения через бесконечномерный процесс Орнштейна–Уленбека, *УМН*, 2011, том 66, выпуск 2, 235–236

DOI: https://doi.org/10.4213/rm9424

# Представление фрактального броуновского движения через бесконечномерный процесс Орнштейна–Уленбека

**А. А. Муравлёв**

**1.** Фрактальное броуновское движение с параметром Харста $H \in (0,1)$ определяется как выходящий из нуля гауссовский процесс $B^H = (B^H_t)_{t\geqslant 0}$ с нулевым средним и ковариационной функцией

$$R(s,t) = \frac{1}{2}\bigl(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\bigr), \qquad s,t \geqslant 0. \tag{1}$$

Хорошо известно, что при $H \in (0,1/2)\cup(1/2,1)$ процесс $B^H$ не является ни семимартингалом, ни марковским процессом (см., например, [1]). В настоящей работе будет показано, что, несмотря на это, $B^H$ можно представить как линейный функционал от бесконечномерного марковского процесса.

Пусть $\xi = (\xi_\beta)_{\beta>0}$ – гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $R_\xi(\alpha,\beta) = (\alpha+\beta)^{-1}$, а $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ – независимое от $\xi$ стандартное броуновское движение. Построим по $\xi$ и $B$ семейство процессов $\{Z^\beta\}_{\beta>0}$, где $Z^\beta = (Z^\beta_t)_{t\geqslant 0}$ – процесс Орнштейна–Уленбека, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения

$$dZ^\beta_t = -\beta Z^\beta_t\,dt + dB_t, \qquad Z^\beta_0 = \xi_\beta.$$

Теорема 1. *Для $H \in (0,1/2)\cup(1/2,1)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ процесс $\overline{B}^{H,\varepsilon} = \bigl(\overline{B}^{H,\varepsilon}_t\bigr)_{t\geqslant 0}$, определяемый как*

$$\overline{B}^{H,\varepsilon}_t = c_H \int_0^\infty \beta^{-1/2-H}(Z^\beta_t - \xi_\beta - e^{-\beta\varepsilon_0}B_t)\,d\beta + \varepsilon B_t, \tag{2}$$

*где*

$$c_H = \frac{[\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)]^{1/2}}{\mathrm{B}(1/2+H,1/2-H)}, \qquad \varepsilon_0 = \left(\frac{\varepsilon}{c_H\Gamma(1/2-H)}\right)^{1/(H-1/2)},$$

*является фрактальным броуновским движением с параметром Харста $H$.*

Следствие 1. *Процесс $\overline{B}^H = \bigl(\overline{B}^H_t\bigr)_{t\geqslant 0}$, определяемый как*

$$\overline{B}^H_t = \begin{cases} c_H \displaystyle\int_0^\infty \beta^{-1/2-H}(Z^\beta_t - \xi_\beta)\,d\beta & \text{при } H \in \left(0,\dfrac{1}{2}\right), \\ c_H \displaystyle\int_0^\infty \beta^{-1/2-H}(Z^\beta_t - \xi_\beta - B_t)\,d\beta & \text{при } H \in \left(\dfrac{1}{2},1\right), \end{cases} \tag{3}$$

*также является фрактальным броуновским движением с параметром Харста $H$.*

Полученные представления позволяют применять к $B^H$ некоторые методы из теории марковских процессов. Так, для получения неравенств с $B^H$ может быть использована общая теория об оптимальной остановке (см. [2]) для семейства марковских процессов $\{Z^\beta\}_{\beta>0}$.

Теорема 2. *Пусть $B^H$ – фрактальное броуновское движение. с параметром Харста $H$. Тогда*

$$-\,k_H(\mathbf{E}\tau)^H \leqslant \mathbf{E}B^H_\tau \leqslant k_H(\mathbf{E}\tau)^H \tag{4}$$

*для всех моментов остановки $\tau$ процесса $B^H$. При этом*

$$k_H \leqslant c_H\frac{(2\pi)^{-H/2}}{H\sqrt{2}}\int_{\mathbb{R}}\Phi(u)\biggl[\int_{-\infty}^u \Phi^2(v)e^{v^2/2}\,dv\biggr]^{-H}du.$$

---

Работа выполнена при поддержке Фонда содействия отечественной науке.

Отметим, что в случае $H \in (1/2, 1)$ неравенство (4) следует из результатов [3], однако при $H \in (0, 1/2)$ полученная оценка для $\mathbf{E}B^H_\tau$ является новым результатом.

**2.** Чтобы показать, что процессы $\overline{B}^{H,\varepsilon}$ и $\overline{B}^H$ представляют собой фрактальное броуновское движение, достаточно проверить, что их корелляционные функции совпадают с (1). Поясним, как были получены (2) и (3). Для произвольного $\varepsilon > 0$ представление Мандельброта–Ван Несса [4] можно записать в виде

$$\begin{aligned} B^H_t &= c_H \int_{-\infty}^0 \biggl[\int_0^\infty (e^{-\beta(t-s)} - e^{\beta s})\beta^{-1/2-H}\,d\beta\biggr]\,dB_s \\ &\quad + c_H \int_0^t \biggl[\int_0^\infty (e^{-\beta(t-s)} - e^{-\beta\varepsilon_0})\beta^{-1/2-H}\,d\beta\biggr]\,dB_s + \varepsilon B_t. \end{aligned} \tag{5}$$

По теореме Фубини для стохастических интегралов (см., например, [5]) изменим порядок интегрирования. Несложно видеть, что мы получим в точности (2).

При переходе к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$ представление (2) перейдет в (3). В случае $H \in (0, 1/2)$ вместо этого можно сразу положить $\varepsilon = 0$ в (5).

**3.** Чтобы доказать (4), используем представление (2). Пусть $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ и $(\mathscr{F}^B_t)_{t\geqslant 0}$ – естественные фильтрации процессов $\overline{B}^{H,\varepsilon}$ и $B$, а $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^B$ – множества моментов остановки $\tau$ относительно этих фильтраций, для которых $\mathbf{E}\tau < \infty$. Очевидно, что $\mathscr{F}_t = \sigma(\xi) \vee \mathscr{F}^B_t$. Аналогично [6] можно показать, что

$$W^\beta_*(c, z) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^B} \mathbf{E}(Z^\beta_\tau - c\tau \mid \xi_\beta = z) = \begin{cases} z_* - 2c\displaystyle\int_z^{z^*} e^{\beta x^2}\int_{-\infty}^x e^{-\beta t^2}\,dt\,dx & \text{при } z < z_*, \\ z & \text{при } z \geqslant z_*, \end{cases}$$

где $z_*$ – единственное решение уравнения $2ce^{\beta z^2}\displaystyle\int_{-\infty}^z e^{-\beta t^2}\,dt = 1$. Поэтому для любого $\tau \in \mathfrak{M}$ справедливо

$$\mathbf{E}(Z^\beta_\tau - c\tau) = \mathbf{E}\mathbf{E}(Z^\beta_\tau - c\tau \mid \xi) \leqslant \mathbf{E}W^\beta_*(c, \xi_\beta), \qquad \mathbf{E}Z^\beta_\tau \leqslant \inf_{c>0}\bigl[\mathbf{E}W^\beta_*(c, \xi_\beta) + c\mathbf{E}\tau\bigr].$$

Проведя необходимые вычисления, получим

$$\mathbf{E}Z^\beta_\tau \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\beta}}\int_{-\infty}^A \Phi(\alpha)\,d\alpha, \tag{6}$$

где $A$ – единственное решение уравнения $\sqrt{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^A \Phi^2(\gamma)e^{\gamma^2/2}\,d\gamma = \beta\,\mathbf{E}\tau$. Поскольку $\mathbf{E}B_\tau = 0$ для любого $\tau \in \mathfrak{M}$, то для доказательства (4) достаточно проинтегрировать обе части неравенства (6) по $\beta^{-1/2-H}\,d\beta$ и применить теорему Фубини.

Автор выражает благодарность А. Н. Ширяеву за постановку задачи и внимание к работе.

## Список литературы

[1] Yu. Mishura, *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes*, Lecture Notes in Math., **1929**, Springer, Berlin, 2008. [2] G. Peskir, A. Shiryaev, *Optimal stopping and free-boundary problems*, Birkhäuser, Basel, 2006. [3] A. Novikov, E. Valkeila, *Statist. Probab. Lett.*, **44** (1999), 47–54. [4] B. B. Mandelbrot, J. W. van Ness, *SIAM Rev.*, **10** (1968), 422–437. [5] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Статистика случайных процессов*, Наука, М., 1974, 216–218. [6] J. L. Pedersen, G. Peskir, *Stochastic Anal. Appl.*, **18**:5 (2000), 811–835.

**А. А. Муравлёв (A. A. Muravlev)**
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
*E-mail*: almurav@mi.ras.ru

Представлено Д. В. Трещёвым
Принято редколлегией
04.02.2011